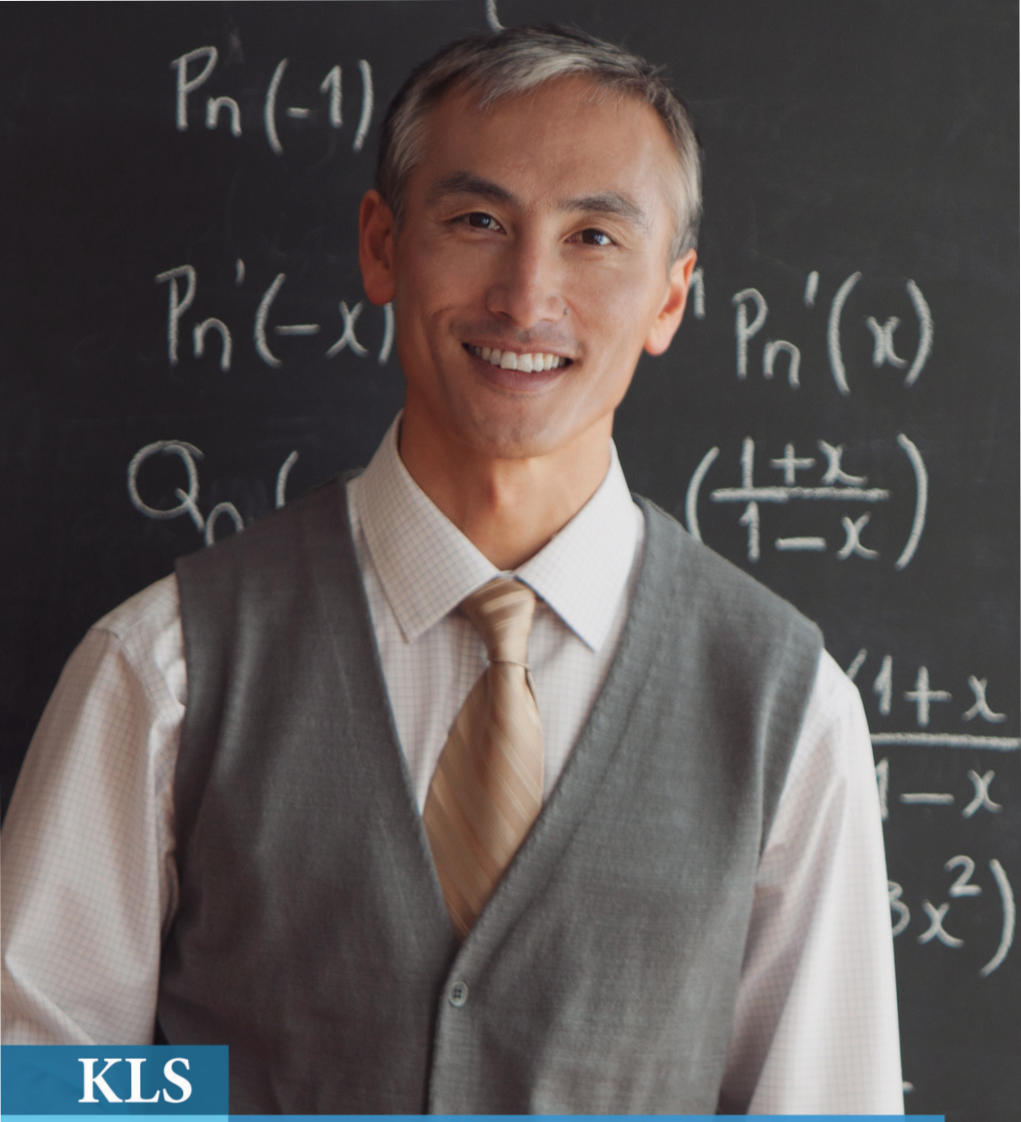


KLS

Equações Diferenciais Parciais e Séries

Equações Diferenciais Parciais e Séries

Alessandra Negrini Dalla Barba

© 2019 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Vanessa Cadan Scheffer
André Luís Delvas Fróes

Editorial
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Barba, Alessandra Negrini Dalla
B228e Equações diferenciais parciais e séries / Alessandra Negrini Dalla Barba. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2019.
216 p.

ISBN 978-85-522-1382-6

1. Equações diferenciais. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Séries. I. Barba, Alessandra Negrini Dalla. II. Título.

CDD 510

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2019
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1

Sequências e séries 7

Seção 1.1

Sequências 9

Seção 1.2

Séries numéricas 24

Seção 1.3

Convergência de séries numéricas 40

Unidade 2

Série de Taylor e Série de Fourier 61

Seção 2.1

Séries de potências, séries de Taylor e Maclaurin 63

Seção 2.2

Série de Fourier para funções elementares 81

Seção 2.3

Série de Fourier para funções especiais 97

Unidade 3

Introdução às Equações Diferenciais Parciais 115

Seção 3.1

Conceitos básicos sobre equações diferenciais parciais. 117

Seção 3.2

Estudo do problema de transferência de calor. 132

Seção 3.3

Equação do calor e séries de Fourier. 147

Unidade 4

Equações da onda e de Laplace 165

Seção 4.1

Equação da onda unidimensional 167

Seção 4.2

Casos particulares da equação da onda unidimensional 184

Seção 4.3

Equação de Laplace bidimensional 200

Palavras do autor

Quando estudamos fenômenos de nosso cotidiano e buscamos elucidá-los por meio dos conhecimentos da matemática em diversas situações, podemos nos deparar com equações diferenciais sendo empregadas em sua modelagem. Esse é o caso dos escoamentos de fluidos, do estudo da corrente elétrica e da tensão presente em circuitos elétricos, da condução de calor em objetos metálicos, entre outros. Além disso, como nessas situações diversas variáveis podem ser destacadas, como as dimensões e o tempo em um escoamento, temos a necessidade de considerar funções de várias variáveis nesses estudos e, consequentemente, as equações diferenciais parciais correspondentes. Dessa forma, podemos observar a importância das equações diferenciais parciais para o estudo da matemática e de problemas de outros campos do conhecimento, como da física e das engenharias.

Na resolução de equações diferenciais parciais, dependendo de suas características, podemos identificar as soluções por meio da representação em séries, ou seja, as funções incógnitas são obtidas a partir de suas representações em séries, isto é, com base em uma soma composta por infinitos termos, ou soma infinita.

Assim, as séries infinitas correspondem a outro tema importante da matemática e podem ser empregadas, por exemplo, na representação de funções, na aproximação de números irracionais, na resolução de equações diferenciais, entre outras.

Nesse sentido, visando a aprendizagem das sequências e séries numéricas, na Unidade 1 estudaremos as definições de sequências e séries de números reais, analisando as classificações bem como os critérios e testes que podem ser empregados quando desejamos verificar se uma sequência ou série são convergentes.

Na Unidade 2 estudaremos as séries de Taylor, de Maclaurin e de Fourier, observando como aplicá-las na aproximação de funções reais, visando analisar suas principais propriedades e aplicabilidade no estudo de problemas específicos da matemática e/ou em conjunto com outras áreas.

Dando início ao estudo das equações diferenciais parciais, na Unidade 3 serão definidas essas equações, com a apresentação das classificações e condições associadas, de modo a possibilitar um estudo mais específico a respeito da equação que descreve problemas de transferência do calor, sujeita a diferentes tipos de condições.

Por fim, na Unidade 4, continuaremos estudando alguns casos especiais de equações diferenciais parciais, direcionando as análises para a equação da onda, sujeita a diferentes tipos de condições, e a equação de Laplace bidimensional.

Para cumprir os desafios propostos a cada unidade é importante que você estude os conceitos apresentados em cada seção, acesse os materiais sugeridos no decorrer das unidades e também reflita a respeito da aplicabilidade destes na resolução dos problemas abordados ao longo deste livro, realizando sempre as pré e pós-aulas correspondentes.

Considerando esses objetivos, iniciaremos os estudos a respeito das equações diferenciais parciais e das séries.

Unidade 1

Sequências e séries

Convite ao estudo

As sequências de números reais são estudadas desde a educação básica por meio das progressões aritméticas e geométricas. Podemos observar as aplicações das sequências, em conjunto com as séries, na compreensão de fenômenos como as variações de um capital aplicado em um investimento a juros compostos fixados, crescimento populacional, decaimento radioativo, variações das correntes em um circuito elétrico, bem como outras situações relativas à física, às engenharias ou a outras áreas do conhecimento.

Uma famosa sequência presente em diversas áreas do conhecimento é a chamada sequência de Fibonacci, estudada por Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido por Fibonacci, por volta do século XII. Essa sequência pode ser associada à reprodução de coelhos, à proporção áurea, que por sua vez pode ser relacionada às artes, à literatura, às proporções do corpo humano, dos animais e plantas, entre outros. Com base nas sequências podemos definir séries, as quais correspondem a somas compostas por infinitas parcelas originadas dos termos de sequências. Dessa forma, nessa unidade estudaremos as sequências e séries numéricas com vistas à sua aplicação em situações relativas ao contexto de sala de aula, bem como outros contextos, compreendendo a aplicabilidade desses conceitos em determinadas situações e desenvolvendo o raciocínio crítico e de solução de problemas.

Assim, para o estudo desse tema, imagine que você atua como professor de Matemática para as turmas regulares do ensino médio em um colégio. Em uma reunião pedagógica realizada com todos os docentes da instituição foi proposta a realização de uma feira cultural envolvendo todas as disciplinas, de modo que cada grupo de professores ficaria responsável por orientar uma das turmas do colégio no desenvolvimento de trabalhos relativos às suas disciplinas.

Você e um professor de História ficaram responsáveis pela orientação de uma turma de primeiro ano do ensino médio na elaboração e apresentação de seus projetos para toda a comunidade escolar. Em conjunto com os alunos, vocês optaram pelo estudo de alguns fatos históricos relacionados ao desenvolvimento da matemática, buscando aplicações práticas para os conceitos estudados pelos alunos durante o ano letivo e os conceitos que já

foram estudados por eles em etapas anteriores. No entanto, antes da elaboração dos trabalhos, você e o professor de História decidiram desenvolver, em conjunto, três aulas com toda a turma com o intuito de familiarizá-los com os temas dos projetos a serem desenvolvidos por eles para a feira cultural. A partir dessas aulas, os grupos responsáveis por cada tema poderiam aprofundar seus estudos, elaborando os trabalhos e a apresentação a ser realizada na feira. Para isso, vocês deverão elaborar as propostas das três aulas, considerando os três temas centrais selecionados para a feira: sequência de Fibonacci, matemática e música, e o sistema de numeração decimal. Qual é a importância das sequências e séries numéricas para o estudo de cada um desses temas? Como relacioná-los com os conteúdos que são comumente abordados na educação básica?

Sendo assim, para que você possa, em conjunto com o professor de história, elaborar as três aulas a serem ministradas à turma, na primeira seção serão estudadas as sequências numéricas, observando suas propriedades e sua aplicação no estudo da sequência de Fibonacci. Na segunda seção serão estudadas as séries numéricas e suas propriedades características, verificando a possibilidade de associação entre a matemática e a música a partir da série harmônica. Por fim, na terceira seção serão estudadas as convergências de séries, observando a aplicabilidade desses conceitos no estudo do sistema de numeração decimal.

Prossiga em seus estudos e confira os conhecimentos necessários para a realização desse desafio!

Seção 1.1

Sequências

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo a esta primeira seção, na qual estudaremos as sequências numéricas. Você já ouviu falar de sequências? Já observou em seu cotidiano situações em que esse termo esteve presente?

As sequências podem ser empregadas, por exemplo, na identificação de instantes em que ocorrem fenômenos que se repetem a cada intervalo de tempo fixo, como os jogos olímpicos, realizados a cada quatro anos, mas também podem ser empregadas quando desejamos acompanhar a evolução de determinados fenômenos, como a variação nas taxas de mortalidade infantil em uma região do país, por exemplo, que podem ser crescentes, decrescentes, constantes, ou ainda não apresentarem um padrão específico. No entanto, para que esses fenômenos possam ser representados adequadamente, é necessário o conhecimento das propriedades das sequências numéricas.

Considerando o contexto de elaboração de aulas com o professor de História, sobre os temas que serão apresentados pelos alunos na feira cultural, sua primeira tarefa consiste em elaborar a primeira aula a respeito da sequência de Fibonacci, a qual, posteriormente, será complementada pelo professor de História. Dessa forma, você deverá elaborar o plano de aula referente a essa proposta, construindo um documento composto pelas tarefas a serem propostas aos alunos, acrescidas de suas resoluções e comentários a respeito dos conteúdos necessários para o desenvolvimento da proposta com a turma em questão.

Para isso, elabore ou selecione um contexto que possibilite o estudo da sequência de Fibonacci, identificando a solução para o problema escolhido e propondo questionamentos que possibilitem a construção da expressão do termo geral dessa sequência, tais como: será que a sequência de Fibonacci pode ser classificada como crescente ou decrescente? Ela é limitada? O que podemos afirmar a respeito de sua convergência? Além disso, compare a sequência de Fibonacci com a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_n = \frac{1}{3^n}$, observando as propriedades apresentadas por cada uma delas.

Para contribuir com a resolução desse problema, nesta primeira seção estudaremos as sequências de números reais, observando suas principais

propriedades e investigando o conceito de convergência. Assim, dê continuidade à leitura e confira a definição de sequência e suas principais propriedades para que possa cumprir sua primeira tarefa!

Não pode faltar

As sequências de números reais são estudadas desde a educação básica por meio das progressões aritméticas e geométricas, as quais podem ser empregadas na descrição de fenômenos como proliferação de bactérias, decaimento radioativo, desde que consideremos intervalos de tempo específicos, avaliando-os de forma discreta. Nesta seção, aprofundaremos os estudos a respeito das sequências numéricas, observando a definição, a convergência e as classificações possíveis.

Sequências numéricas

Uma **sequência** numérica infinita pode ser entendida como uma lista de números, denominados **termos**, organizados a partir de uma ordem específica: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...\}$. Nesse caso, a_1 corresponde ao primeiro termo da sequência, a_2 corresponde ao segundo termo da sequência, e se n for um número natural maior ou igual a 1, a_n indica o n-ésimo termo da sequência. O número n é chamado de índice do termo a_n e indica qual é a posição que esse elemento ocupa na listagem. O emprego das reticências (...) indica que a sequência contém infinitos termos, de modo que cada termo a_n tem um sucessor a_{n+1}, com $n \geq 1$ natural. Para a representação da sequência $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...\}$ também podemos empregar as notações $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (THOMAS, 2012).

Por exemplo, a sucessão $\{x_n\} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ corresponde à sequência cujos elementos são números naturais pares. Outro exemplo de sequência é a seguinte sucessão de inteiros: $\{y_n\} = \{-1, 1, -1, ...\}$.

Assimile

As sequências podem ser caracterizadas como funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos (ou inteiros positivos). Assim, podemos definir uma sequência $\{a_n\}$ na forma $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ com $f(n) = a_n$, com $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (ROGAWSKI, 2009).

Uma sequência pode ser descrita por meio da **listagem** de seus termos, como vimos nos exemplos anteriores, ou por meio de regras que expressam

seus termos, chamadas de expressão do **termo geral** da sequência, como é o caso de $\{b_n\}$ dada por $b_n = n$, que é a expressão do termo geral de $\{b_n\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (ROGAWSKI, 2009). No caso das sequências anteriores, o termo geral de $\{x_n\} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ é $x_n = 2n$ e para $\{y_n\} = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$ temos o termo geral $y_n = (-1)^n$.

Conferiremos no próximo exemplo como podemos identificar a expressão do termo geral de uma sequência conhecendo os seus primeiros termos.

Exemplificando

Seja a sequência infinita de primeiros termos $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, ...\right\}$.

Queremos determinar a expressão do termo geral de $\{a_n\}$. Observe que

$$a_1 = \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = -\frac{2}{3} = (-1) \cdot \frac{2}{2+1} = (-1)^{2+1} \cdot \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{3}{3+1} = (-1)^{3+1} \cdot \frac{3}{3+1}$$

Sendo assim, para $n \geq 1$ natural segue que $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$. Portanto, a sequência $\{a_n\}$ tem seu termo geral dado por $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$.

Note que a identificação da expressão do termo geral de uma sequência envolve o estudo dos padrões e das regularidades presentes nos termos conhecidos da sequência, visando a construção de uma expressão que seja válida para qualquer termo e que dependa diretamente das posições ocupadas pelos termos, ou seja, dos índices em questão.

Faça você mesmo

Determine a expressão do termo geral da sequência

$$\{c_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}.$$

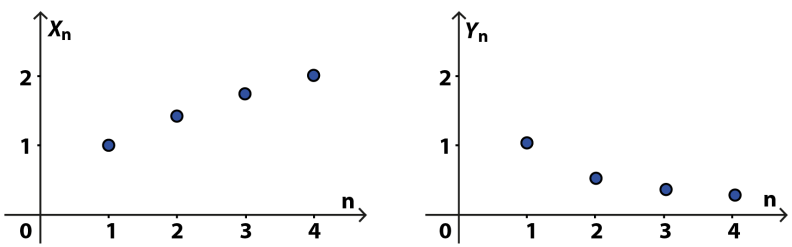
Reflita

Podemos definir sequências a partir da indicação da expressão de seu termo geral, o que está associado à definição de sequência enquanto função com domínio de inteiros positivos. Porém, a toda sequência é possível associar uma expressão para caracterizar seu termo geral? Todas as sequências têm uma expressão simples para seu termo geral, envolvendo as funções elementares (polinomiais, exponenciais, trigonométricas, etc.)?

Podemos representar as sequências graficamente, no entanto, note que essas representações envolvem apenas pontos, porque o domínio das funções que caracterizam as sequências é um conjunto discreto formado pelos números naturais (ou pelos inteiros positivos).

Seja a sequência $\{x_n\}$ de termo geral $x_n = \sqrt{n}$, com $n \geq 1$ natural. Os primeiros termos dessa sequência são $\{x_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...\}$. Na Figura 1.1 (a) temos a representação gráfica dos primeiros termos de $\{x_n\}$. Veja que cada ponto no gráfico tem coordenadas (n, x_n), ou seja, no eixo das abscissas indicamos as variações dos índices (posições na sequência) e no eixo das ordenadas indicamos os números que ocupam cada uma das posições em $\{x_n\}$.

Figura 1.1 | Representações gráficas de sequências



(a) Sequência $\{x_n\}$ com $x_n = \sqrt{n}$ **(b) Sequência $\{y_n\}$ com $y_n = \frac{1}{n}$**

Fonte: elaborada pela autora.

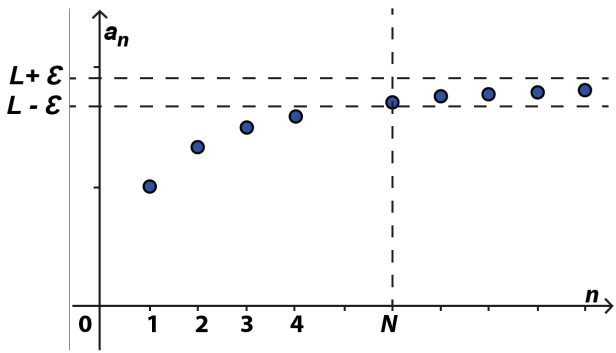
Observe que, para a sequência $\{x_n\}$ cujo gráfico é apresentado na Figura 1.1 (a), quanto maior o valor do índice *n*, maior o valor do termo x_n. Por outro lado, se tomarmos a sequência $\{y_n\}$ com $y_n = \frac{1}{n}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 1.1 (b), quanto maior o valor do índice *n*, mais próximo de zero estará o termo y_n. A diferenciação entre esses dois tipos de sequência é possível a partir do estudo do conceito de convergência de sequências.

Estudo da convergência das sequências

A sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L se for possível identificar termos a_n tão próximos de L o quanto se queira quando tomamos índices suficientemente grandes. Nesse caso, temos as notações $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou então $a_n \to L$ quando $n \to \infty$. Uma forma mais precisa dessa definição é: $\{a_n\}$ tem **limite** L quando, para todo $\varepsilon > 0$, existir um natural N tal que se $n > N$ então $|a_n - L| < \varepsilon$ (STEWART, 2016b).

Analisando a Figura 1.2 podemos observar graficamente que uma sequência admite um limite L quando dado qualquer número $\varepsilon > 0$ é possível identificar N natural tal que todos os termos a_n com índices n maiores que N (ou a partir de N) terão seus valores limitados entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$.

Figura 1.2 | Limite de sequência

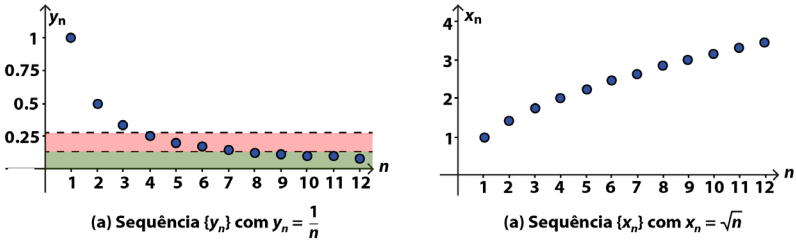


Fonte: elaborada pela autora.

Quando $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos dizer que a sequência $\{a_n\}$ é **convergente** (ou que a sequência converge). Caso contrário, a sequência será **divergente** (ou a sequência diverge) (STEWART, 2016b).

Como exemplo de sequência convergente temos $\{y_n\}$ com $y_n = \frac{1}{n}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando N um natural maior que $\frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $N > \frac{1}{\varepsilon}$, então $n > N$ implica em $|y_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Sendo assim, quando n tende ao infinito, y_n tende a zero, o que implica $\{y_n\}$ ser convergente com $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Veja na Figura 1.3 (a) que, quanto maior o valor de n, mais próximos de zero estarão os termos y_n.

Figura 1.3 | Limite de sequência

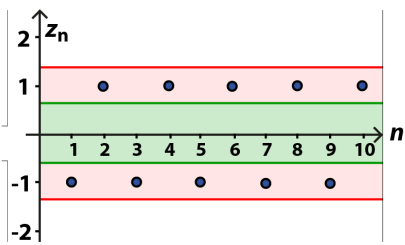


Fonte: elaborada pela autora.

Por outro lado, a sequência $\{x_n\}$ de termo geral $x_n = \sqrt{n}$ é um exemplo de sequência divergente. Diferente do exemplo anterior, ao analisar a Figura 1.3 (b) observamos que os termos dessa sequência não podem ser limitados em um intervalo em torno de um valor fixo, ou seja, seus termos não se aproximam de um número real específico conforme a definição de convergência de sequências.

Outro exemplo de sequência divergente é $\{z_n\}$ com $z_n = (-1)^n$. Pela Figura 1.4 podemos notar que os termos de $\{z_n\}$ oscilam entre -1 e 1, de modo que z_n não se aproxima de nenhum número específico. Assim, apesar de os termos dessa sequência estarem limitados no intervalo $[-1, 1]$, como destacado na Figura 1.4, quando tomamos um raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, não é possível limitar todos os termos no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, de modo que $\lim_{n\to\infty} z_n$ não existe. Assim, a sequência $\{z_n\}$ diverge.

Figura 1.4 | Limite de sequência



Fonte: elaborada pela autora.

Exemplificando

Seja $\{g_n\}$ com $g_n = \frac{n^3}{1+n^3}$. No cálculo do limite de g_n quando $n \to \infty$, iniciamos dividindo o numerador e o denominador de g_n pela maior

potência de n, no caso n^3, obtendo $g_n = \dfrac{n^3}{1+n^3} = \dfrac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{n^3}{n^3}} = \dfrac{1}{\frac{1}{n^3}+1}$.

Calculando o limite temos

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{1+n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^3}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} + \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Sendo assim, a sequência $\{g_n\}$ é convergente para 1.

Veja que as estratégias para o cálculo de limites de funções podem ser empregadas no cálculo dos limites de sequências, já que uma sequência é uma função com domínio natural.

Reflita

Para que valores de q a sequência $\{q^n\}$ será convergente? Qual é a relação dessa sequência com as progressões estudadas na educação básica?

Assim como podemos estudar as operações envolvendo limites de funções, também podemos analisar a convergência de sequências resultantes de operações. Supondo as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergentes e k uma constante real, então: $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$; $\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$;

$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ se $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Além disso, temos a validade do seguinte resultado, conhecido por Teorema do Confronto:

Teorema 1.1 (Teorema do Confronto): se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$, com n_0 natural, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ (GUIDORIZZI, 2013).

Além da convergência, podemos classificar as sequências de acordo com seus termos, possibilitando o estudo da monotonicidade e da limitação das sequências.

Classificações das sequências

Dizemos que a sequência $\{a_n\}$ é **crescente** quando $a_n < a_{n+1}$ para todo natural $n \geq 1$. Por outro lado, $\{a_n\}$ será **decrescente** no caso em que $a_n > a_{n+1}$ para todo natural $n \geq 1$. Se uma sequência for crescente ou decrescente, podemos dizer que a sequência é **monótona** (STEWART, 2016b).

Como exemplo de sequência crescente temos $\{u_n\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ ...\}$, enquanto um exemplo de sequência decrescente é $\{v_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{9},\ ...\right\}$. Ambas as sequências podem ser classificadas como monótonas. Temos ainda o caso da sequência **constante**, em que todos os temos são iguais a um número real, categoria na qual podemos enquadrar a sequência $\{w_n\} = \{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ ...\}$.

Além das sequências crescentes e decrescentes, temos ainda as sequências não crescentes e não decrescentes, as quais, em conjunto com as crescentes e decrescentes, também podem ser classificadas como sequências monótonas. Uma sequência $\{a_n\}$ é **não decrescente** quando $a_n \leq a_{n+1}$ com $n \geq 1$ natural qualquer, como é o caso da sequência $\{p_n\} = \{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ ...\}$, por exemplo. Por outro lado, $\{a_n\}$ será **não crescente** quando $a_n \geq a_{n+1}$ para todo natural $n \geq 1$, classe em que podemos destacar a sequência $\{q_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ ...\right\}$, por exemplo (ROGAWSKI, 2009).

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número A para o qual $a_n \leq A$ para todo natural $n \geq 1$. A sequência $\{a_n\}$ é **limitada inferiormente** se existir um número B tal que $a_n \geq B$ para todo natural $n \geq 1$. E sendo limitada superiormente e inferiormente ao mesmo tempo, podemos dizer que $\{a_n\}$ é uma sequência **limitada** (ROGAWSKI, 2009).

A sequência $\{s_n\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\}$ é limitada inferiormente por 2, porque todos os seus termos são maiores ou iguais a 1, ou seja, $s_n \geq 2$ para todo natural $n \geq 1$. A sequência $\{t_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ ...\right\}$ é uma sequência limitada superiormente por 1, porque $t_n \leq 1$ para todo natural $n \geq 1$, além de ser também limitada inferiormente por 0, porque $t_n \geq 0$ para todo natural $n \geq 1$, o que implica $\{t_n\}$ ser limitada.

A sequência $\{r_n\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ ...\}$ é limitada, porque todos os seus termos estão limitados entre 0 e 1, ou seja, a sequência $\{r_n\}$ é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. No entanto, note que $\{r_n\}$ não é uma sequência convergente, pois seus termos oscilam entre 0 e 1, não se aproximando de nenhum número em particular. Logo, a limitação de uma sequência não implica sua convergência. No caso estudado, isso se deve porque a sequência $\{r_n\}$ não é monótona.

Quando temos uma sequência limitada que seja também monótona (crescente ou decrescente), podemos concluir que a sequência será convergente. Esse fato é garantido pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2: toda sequência monótona limitada é convergente (STEWART, 2016b).

Sendo assim, se for possível verificar que uma sequência é monótona (crescente, decrescente, não crescente ou não decrescente) e limitada (superiormente e inferiormente), podemos inferir que a sequência será convergente. Com base nessa informação, podemos investigar sua expressão de modo a identificar o limite correspondente. Vejamos um exemplo a seguir.

Exemplificando

Seja a sequência $\{p_n\}$ definida por $p_n = \frac{1}{2n+3}$. Vamos empregar o Teorema 1.2 para concluir a convergência dessa sequência, e, para isso, precisamos verificar suas hipóteses, ou seja, mostrar que $\{p_n\}$ é monótona e limitada.

Os primeiros termos dessa sequência são $\{p_n\} = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$. Note que $2(n+1)+3 = 2n+5 > 2n+3$ para todo n natural, sendo assim:

$p_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+3} < \frac{1}{2n+3} = p_n$ para todo n natural. Logo, $\{p_n\}$ é decrescente e, por isso, pode ser classificada como uma sequência monótona. Sendo decrescente, $x_n \leq x_1$ para todo n natural, ou seja, $x_n \leq \frac{1}{5}$ para todo n natural, o que implica $\{p_n\}$ ser limitada superiormente. Além disso, veja que $x_n > 0$ para todo n natural, o que implica $\{p_n\}$ ser limitada inferiormente. Dessa forma, $\{p_n\}$ é uma sequência limitada. Logo, pelo Teorema 1.2, sendo $\{p_n\}$ uma sequência monótona limitada, podemos concluir que $\{p_n\}$ é convergente. Para determinar seu limite, observe que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}(2n+3)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(2n+3)}$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2n+3) = \infty$, então $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(2n+3)} = 0$, o que implica $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Portanto, a sequência $\{p_n\}$ é convergente com $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Temos ainda o seguinte teorema que relaciona a limitação com a convergência de sequências.

Teorema 1.3: toda sequência convergente é limitada (ROGAWSKI, 2009).

Podemos construir ainda um tipo especial de sequências que, em vez de serem construídas a partir da expressão de seu termo geral, são construídas por expressões de recorrência que permitem a geração de seus termos com base nos termos precedentes. Essas sequências podem ser denominadas **sequências recursivas** ou sequências definidas recursivamente, sendo as fórmulas que as definem chamadas de **fórmulas recursivas** ou de recursão (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014). Como exemplo temos $\{x_n\}$, em que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 - 4x_n$ para $n > 1$. Os termos de $\{x_n\}$ são construídos a partir dos termos precedentes, de modo que seus primeiros termos são $\{x_n\} = \{1, -3, 13, -51, \ldots\}$.

Assim, quando estudamos as sequências numéricas, as quais são infinitas e podem ser definidas por funções de domínio inteiro positivo, podemos estudar a convergência, as classificações quanto à limitação, monotonicidade e recursividade, favorecendo a aplicação destas na resolução de problemas.

Dica

Para complementar os estudos sobre sequências, estude a Seção 11.1, denominada *Sequências*, do volume 2 do livro *Cálculo*, de Jon Rogawski, o qual pode ser encontrado em sua biblioteca virtual. Nesse material, entre as páginas 535 e 543, você encontrará outros exemplos de sequências, além de observar outros exemplos para o estudo da convergência, classificações e limitação.

Sem medo de errar

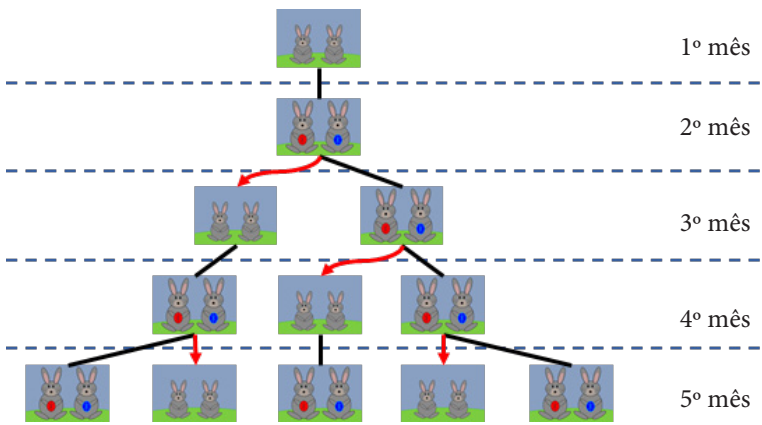
Você, em conjunto com um professor de História do colégio em que atua, considerando o contexto de elaboração de trabalhos para apresentação em uma feira cultural dessa instituição, deve organizar as três aulas que precederão a elaboração de cada trabalho. Dessa forma, como a primeira aula será direcionada ao estudo da sequência de Fibonacci, a sua tarefa consiste em elaborar ou selecionar um contexto que permita o estudo dessa sequência, apresentando sua solução e um estudo a respeito de suas características, comparando-a com uma outra sequência numérica.

A sequência de Fibonacci, que corresponde a um exemplo de sequência recursiva, surgiu a partir dos estudos do matemático italiano Leonardo de

Pisa (1170-1250), conhecido como Fibonacci, por volta do século XII, ao estudar um problema relativo à reprodução de coelhos (STEWART, 2016b). Assim, para dar início a essa aula pode ser proposto o seguinte problema: suponha que um homem tenha colocado um único casal de coelhos jovens em um local cercado, em uma região isolada. A cada mês, um casal de coelhos adultos gera um novo casal de coelhos. Além disso, um coelho se torna fértil, alcançando sua fase adulta, apenas a partir de seu segundo mês de vida. Com base nessas informações e considerando que todos os coelhos gerados nesse local permaneçam vivos, quantos casais de coelhos serão gerados ao longo de um ano? Quantos casais de coelhos terá nesse local após o *n-ésimo* mês, com *n* natural? (BOYER, 2012).

Para a resolução desse problema pode ser construído um esquema ilustrando as quantidades de casais de coelhos presentes nos primeiros meses, partindo da situação inicial que envolve um único casal de coelhos jovens, conforme a Figura 1.5. Esse esquema pode auxiliar na identificação da fórmula de recursão que caracteriza a sequência.

Figura 1.5 | Quantidades de casais de coelhos em cada mês



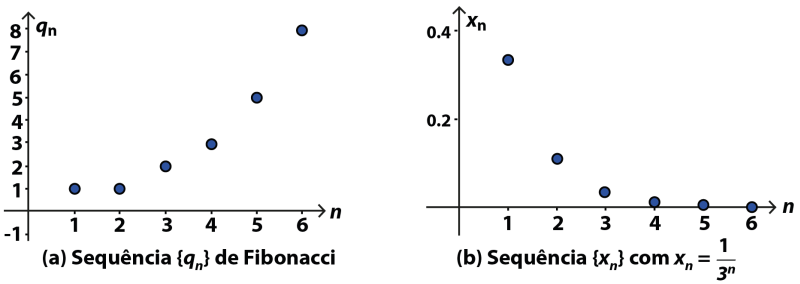
Fonte: adaptada de https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11104228. Acesso em: 23 ago. 2018.

Com base na Figura 1.5, a quantidade de coelhos (q_n) em cada mês (n) pode ser descrita por uma sequência recursiva $\{q_n\}=\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ ...\}$. A fórmula recursiva associada é: $q_1=1$, $q_2=1$ e $q_n=q_{n-1}+q_{n-2}$ para $n>2$, que indica a quantidade de casais de coelhos presentes em cada mês. Ao final do 12º mês, pela fórmula de recorrência, teremos 144 casais de coelhos.

Note que $q_{n+1}\geq q_n$ para todo n natural, pois $q_n>0$ para todo natural n, logo, a sequência $\{q_n\}$ é não decrescente e, portanto, monótona. Como $q_n>0$ para todo n natural, então $\{q_n\}$ é limitada inferiormente. Porém, não existe constante real A tal que $q_n\leq A$ para todo natural n, sendo $\{q_n\}$ ilimitada

superiormente. Logo, $\{q_n\}$ é ilimitada. Pela contrapositiva do Teorema 1.3, se uma sequência for ilimitada, então ela não será convergente, então $\{q_n\}$ não converge, isto é, não existe $\lim_{n\to\infty} q_n$, o que indica que a sequência de Fibonacci é uma sequência divergente, sendo ilustrada na Figura 1.6 (a).

Figura 1.6 | Comparação entre sequências



Fonte: elaborada pela autora.

A sequência $\{x_n\}$ com $x_n = \frac{1}{3^n}$, ilustrada na Figura 1.6 (b) e tal que $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right\}$, é uma progressão geométrica de primeiro termo $\frac{1}{3}$ e razão $\frac{1}{3}$. Pela expressão do termo geral de $\{x_n\}$ temos $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 > 3^n$, n natural, e, assim, $x_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3^n} = x_n$. Dessa forma, $\{x_n\}$ é decrescente e, consequentemente, monótona. Assim, tanto $\{x_n\}$ quanto a sequência de Fibonacci são monótonas, no entanto, podemos observar diferenças quanto à limitação. Como $x_n > 0$ para todo n natural, então $\{x_n\}$ é limitada inferior mente. Sendo $3^n > 1$, então $x_n = \frac{1}{3^n} < 1$ o que implica $\{x_n\}$ ser limitada superiormente. Logo, $\{x_n\}$ é limitada. Assim, diferente da sequência de Fibonacci, $\{x_n\}$ é limitada, e, por ser monótona, pelo Teorema 1.2 conclu ímos que $\{x_n\}$ converge. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 3^n} = 0$, $\{x_n\}$ converge para zero.

Para finalizar sua tarefa, organize o plano de aula com base no problema apresentado, indicando o problema, sua solução, possíveis dúvidas que podem surgir e os possíveis encaminhamentos, acrescentando estratégias que permitam a comparação da sequência de Fibonacci com a progressão geométrica estudada, direcionando a proposta para o primeiro ano de ensino médio.

A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja elaborando uma aula a respeito de sequências para uma turma de ensino médio e que, além das definições, você pretende destacar algumas aplicações importantes, principalmente a relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro, ou razão áurea, usualmente representado pela letra grega ϕ. A partir da sequência de Fibonacci $\{q_n\}$ definida recursivamente por $q_1 = 1$, $q_2 = 1$ e $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$ para $n > 2$, podemos construir a sequência $\{p_n\}$ com $p_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}$. Sabendo que essa sequência é convergente, construa seus sete primeiros termos e mostre que seu limite é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o qual corresponde ao número de ouro (STEWART, 2016b). Finalize a organização do plano de aula pesquisando a respeito da origem do número de ouro e algumas de suas aplicações na matemática e/ou em outros campos do conhecimento.

Resolução da situação-problema

A partir da sequência de Fibonacci $\{q_n\}$, dada $\{p_n\}$ com $p_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}$, temos $\{p_n\} = \left\{1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ ...\right\} = \{1;\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}667;\ 1{,}6;\ 1{,}625;\ 1{,}615;\ ...\}$

Note que, a partir do terceiro termo, observamos um decrescimento nos termos de $\{p_n\}$ de tal forma que esses termos estão se aproximando de 1,61. Por hipótese, sabemos que $\{p_n\}$ é convergente, e queremos agora justificar que $\{p_n\}$ converge para o número de ouro.

Note inicialmente que $p_1 = 1$ e, como $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ segue que

$$p_n = \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{q_n + q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_n}{q_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = 1 + \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{p_{n-1}}$$

Assim, $\{p_n\}$ é tal que $p_1 = 1$ e $p_n = 1 + \frac{1}{p_{n-1}}$ para todo natural $n \geq 2$. Sendo assim, $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{p_{n-1}}\right)$. Como $\{p_n\}$ é convergente, suponhamos que seu limite seja p, logo, $p = 1 + \frac{1}{p}$ e, assim, $p^2 - p - 1 = 0$. Esta última equação tem como raízes $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $p = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, sendo este segundo caso impossível porque a sequência $\{p_n\}$ tem todos os seus termos positivos,

o que implica seu limite ser positivo. Assim, $\{p_n\}$ converge para $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja, converge para o número de ouro ϕ, que tem um valor aproximadamente igual a 1,618.

Conclua sua tarefa elaborando uma explicação a respeito da associação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, voltada aos alunos do ensino médio, destacando também algumas aplicações do número de ouro, dentre as quais destacamos a presença da razão áurea na fachada do Parthenon grego, nas pirâmides do Egito, nas proporções em plantas, etc. (OLIVEIRA, 2010). Pesquise a respeito dessas aplicações e sobre outras que podem ser associadas ao número de ouro.

Faça valer a pena

1. As sequências consistem em sucessões ordenadas de números, as quais contêm infinitos termos. Quando é conhecida a expressão do termo geral de uma sequência, podemos, entre outros, identificar os elementos que ocupam cada uma das posições nessa sucessão, permitindo o estudo da limitação, da monotonicidade, etc.
Com base nesse tema, analise as sequências cujos primeiros termos são indicados a seguir:

I. $\left\{0, \frac{\ln(2)}{2}, \frac{\ln(3)}{3}, \frac{\ln(4)}{4}, \ldots\right\}$

II. $\{0, -\ln(2), -\ln(3), -\ln(4), \ldots\}$

III. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

Associe os primeiros elementos que compõem as sequências apresentadas em I, II e III com a expressão de seu termo geral, denotados por x_n, y_n e z_n:

$\{x_n\}$ com $x_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

$\{y_n\}$ com $y_n = \frac{\ln(n)}{n}$

$\{z_n\}$ com $z_n = \frac{n}{2^n}$

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I- x_n ; II- y_n ; III- z_n
b) I- x_n ; II- z_n ; III- y_n
c) I- y_n ; II- x_n ; III- z_n
d) I- y_n ; II- z_n ; III- x_n
e) I- z_n ; II- y_n ; III- x_n

2. O estudo das propriedades das sequências em relação às propriedades de ser monótona e/ou limitada pode contribuir para o estudo da convergência das sequências, desde que sejam empregados os teoremas correspondentes de forma correta.
Considerando as propriedades das sequências numéricas, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

( ) A sequência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{2}{n}$ pode ser classificada como monótona e limitada.
( ) A sequência $\{b_n\}$ com $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pode ser classificada como não monótona e limitada.
( ) A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = (0,8)^n$ pode ser classificada como monótona e ilimitada.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta das classificações, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:
a) V - F - V.
b) V - V - F.
c) V - F - F.
d) F - V - F.
e) F - F - V.

3. O estudo da convergência das sequências numéricas é importante quando desejamos avaliar o comportamento de seus termos ao considerarmos uma grande quantidade destes, sendo necessário para esse estudo o cálculo dos limites tendendo ao infinito.
Com relação a esse tema, analise as seguintes afirmações:

I. A sequência $\{r_n\}$ com $r_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ é convergente com $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$.

II. A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = \frac{n+1}{3n-1}$ é convergente com $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

III. A sequência $\{t_n\}$ com $t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ é convergente com $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Em relação às afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:
a) Apenas a afirmação I está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
d) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
e) As afirmações I, II e III estão corretas.

Seção 1.2

Séries numéricas

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos as propriedades das sequências numéricas, observando a existência de sequências que podem ser classificadas como convergentes, enquanto outras são chamadas de divergentes. Considerando esses conceitos, o que é possível afirmar sobre a soma dos infinitos termos que compõem uma sequência? Se a sequência convergir, podemos afirmar que a soma de seus infinitos termos também será convergente, ou seja, essa soma poderia resultar em um número real? Assim, refletindo a respeito desses questionamentos, estudaremos as séries de números reais, as quais são derivadas de sequências e podem ser caracterizadas como somas infinitas.

Dando continuidade ao projeto da feira cultural, sua segunda tarefa consiste em elaborar a segunda aula a ser desenvolvida com a turma do primeiro ano do ensino médio, em conjunto com o professor de Física, a respeito da possibilidade de associação entre a matemática, a física e a música por meio da chamada série harmônica, descrita como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Segundo Hewitt (2015), os sons são, em geral, ondas produzidas a partir de vibrações de objetos materiais em determinados meios, como o ar. Quando tocamos um instrumento musical, temos a ocorrência de vibrações que produzem os sons, algo semelhante acontece quando falamos, sendo as nossas cordas vocais responsáveis pela produção dos sons, entre outros exemplos.

Quando escutamos um som, proveniente de algum instrumento, muitas vezes temos a impressão de que existe uma única nota sendo tocada, no entanto, nesse instante são produzidos vários sons que compõem essa nota, denominados harmônicos. Assim, a maioria das notas são formadas por meio da superposição de sons com frequências distintas, chamados de componentes de frequência, de tal forma que a frequência mais baixa, ou mais grave, é a frequência fundamental e a que determina a altura da nota. Os harmônicos são as componentes múltiplas inteiras (por um número inteiro) da frequência fundamental (HEWITT, 2015). É por meio do estudo desses harmônicos, também realizado historicamente por Pitágoras (570 a.C.-497 a.C.), que podemos compor a série harmônica.

Assim, para cumprir sua segunda tarefa, estude a série harmônica em relação à sua sequência de somas parciais, suas principais propriedades, bem

como sua convergência ou divergência, elaborando um material que possibilite a compreensão dessa série pelos alunos. Tome por base a sequência $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n=\frac{1}{n}$ e possibilite uma fundamentação teórica a respeito dessa associação entre matemática, física e música. Reflita, durante a elaboração desse material, a respeito das possíveis dúvidas que possam surgir durante a aplicação dessa aula à turma em questão.

Prossiga em seus estudos e verifique os conhecimentos que poderão auxiliá-lo nesse desafio.

Não pode faltar

Na seção anterior estudamos as sequências numéricas infinitas, que correspondem a listas compostas por números organizados, a partir de uma ordem específica, e que também podem ser interpretadas como funções com domínio natural (ou de inteiros positivos). Podemos construir expressões que caracterizam o termo geral da sequência, além de estudar sua classificação quanto à limitação, monotonicidade e convergência.

Sendo a sequência $\{x_n\}$ convergente, a soma dos infinitos termos de $\{x_n\}$ também converge para um número real? Para analisar esse tipo de situação, estudaremos a definição de série.

Séries numéricas

Considere uma sequência numérica $\{a_n\}$. Uma expressão na forma $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ é denominada **série** infinita (ou apenas série) e pode ser denotada pelo símbolo $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ou $\sum a_n$ (a letra grega sigma maiúscula é empregada na representação do somatório), no qual a_n é chamado de *n*-ésimo termo da série ou **termo geral** da série (STEWART, 2016b).

Podemos construir séries em que o somatório inicie pelo índice 1, assumindo a forma $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, ou podemos avaliar séries iniciando a partir de outros índices como $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=7}^{\infty}a_n$ ou $\sum_{n=-3}^{\infty}a_n$, por exemplo (SALAS; HILLE; ETGEN, 2005).

Por exemplo, a partir da sequência $\{x_n\}$ dada por $x_n=\frac{1}{3^n}$, podemos definir a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...$, cujo termo geral é

descrito por $x_n = \frac{1}{3^n}$, e que corresponde à soma infinita $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$.

Exemplificando

Seja a série definida por $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1}+\frac{5}{2}+\frac{25}{4}+\frac{125}{8}+\ldots$. Observe que:

$$b_1 = \frac{1}{1} = \frac{5^0}{2^0} = \frac{5^{1-1}}{2^{1-1}}\ ;\ b_2 = \frac{5}{2} = \frac{5^{2-1}}{2^{2-1}}\ ;\ b_3 = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{5^{3-1}}{2^{3-1}}$$

Para um natural n qualquer, temos $b_n = \frac{5^{n-1}}{2^{n-1}}$, que corresponde ao termo geral da série. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1}+\frac{5}{2}+\frac{25}{4}+\frac{125}{8}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

No entanto, como não é possível somar uma infinidade de números, podemos empregar uma estratégia que envolve o conceito de limite, avaliando as chamadas somas parciais da série.

Partiremos da sequência $\{a_n\}$ e construiremos a série $\sum a_n$. Com base nessas informações, podemos construir uma sequência auxiliar $\{S_n\}$ da seguinte forma: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. A sequência $\{S_n\}$ é chamada de sequência das somas parciais ou sequência das reduzidas da série $\sum a_n$. Quando a sequência $\{S_n\}$ é convergente, ou seja, existe um número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, podemos concluir que a série $\sum a_n$ será convergente e tal que $\sum a_n = S$ (THOMAS, 2012).

Assimile

Sendo $\sum a_n$ uma série numérica, se a sequência $\{S_n\}$ de termo geral $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, denominada sequência das **somas parciais** de $\sum a_n$, for convergente, com $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, então podemos dizer que a série $\sum a_n$ é **convergente** e escrever $\sum a_n = S$, ou seja, a série também converge para S, o qual é **chamado** de soma da série. Isto

é, a soma da série é o limite de sua sequência de somas parciais. Se a sequência $\{S_n\}$ for divergente, então diremos que $\sum a_n$ é **divergente** (ROGAWSKI, 2009).

Assim, para avaliar a convergência de uma série precisamos avaliar a sequência das somas parciais correspondentes para, então, obter conclusões a respeito das características da série.

Retomaremos a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. A sequência das somas parciais associada é a sequência $\{S_n\}$ de termo geral $S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}$. Note que S_n corresponde à soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{3}$. Sabemos que a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão *q* é dado por $\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ (AXLER, 2016), assim, para $\{S_n\}$, teremos

$$S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Calculando o limite do termo S_n, temos

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}$$

Portanto, a sequência das somas parciais $\{S_n\}$ é convergente e seu limite é $\frac{1}{2}$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ é convergente, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$.

A série estudada compõe um conjunto de séries denominadas séries geométricas.

Séries geométricas são séries que apresentam a forma $a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ em que *a* e *r* são números reais fixos e *a* é não nulo. Esse tipo de série também pode ser descrito na forma $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$. A razão *r* pode ser positiva ou negativa, podendo ser enquadrada em uma das seguintes categorias: $|r|<1$ ou $|r|\geq 1$ (STEWART, 2016b).

Se $r=1$, a sequência das somas parciais é tal que $S_n=na$, com $\lim_{n\to\infty}S_n=\pm\infty$,

dependendo do sinal de *a*, o que implica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ser divergente. Para $r=-1$, a sequência das somas parciais diverge porque seu limite oscila entre 0 e *a*, implicando $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ser divergente.

Para $|r|\neq 1$, a sequência das somas parciais é

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}.$$

Se $|r|<1$, então $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$ e $S_n \to \frac{a}{1-r}$. Logo, para $|r|<1$ a série geométrica é convergente com $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. Para $|r|>1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é divergente (STEWART, 2016b).

Assimile

Em suma, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é convergente para $|r|<1$ com $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. Por outro lado, a série $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é divergente para $|r|\geq 1$.

A fórmula apresentada para a soma de uma série geométrica é válida apenas quando temos $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, sendo necessária uma nova avaliação para séries que têm início em um outro índice.

Reflita

Que relações podemos estabelecer entre as séries geométricas e as progressões geométricas, estudadas desde a educação básica?

Além das séries geométricas, outra classe importante de séries são as chamadas telescópicas, nas quais os termos se cancelam aos pares, como podemos verificar no próximo exemplo (THOMAS, 2012).

Exemplificando

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, a qual provaremos ser convergente.

Como essa série não é geométrica, avaliaremos sua convergência por meio de sua sequência de somas parciais. Note inicialmente que se

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

Assim, $a=1$ e $b=-a=-1$, ou seja, $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Logo,

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\not 2}\right)+\left(\frac{1}{\not 2}-\frac{1}{\not 3}\right)+\left(\frac{1}{\not 3}-\frac{1}{\not 4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\not n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Calculando o limite do termo S_n quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-0=1$$

Portanto, a sequência das somas parciais converge para 1, o que implica a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Faça você mesmo

Estude a convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$, sabendo que ela pode ser classificada como uma série telescópica.

Sugestão: empregue a decomposição em frações parciais do termo geral da série para analisar a sequência de somas parciais correspondentes.

Quando estudamos séries divergentes, além da possibilidade de analisar as características da sequência de somas parciais correspondentes, podemos empregar um teste que deriva do seguinte teorema:

Teorema 1.4: se a série $\sum a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Pelo Teorema 1.4, se a série for convergente, então o limite do termo geral da série será nulo. Por exemplo, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ é convergente, logo, pelo Teorema 1.4, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$, que corresponde a uma igualdade válida no estudo das propriedades dos limites de funções.

Quando $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pelo Teorema 1.4, nada podemos afirmar a respeito da convergência da série $\sum a_n$. Para investigar esse fato, considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, a qual apresenta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Como a série é composta por termos positivos, sua sequência $\{S_n\}$ das somas parciais é crescente, pois $S_n < S_{n+1}$ para todo natural $n \geq 1$, sendo monótona. Além disso, observe também que

$$S_n = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}^{n \text{ termos}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$$, isto é, $S_n \geq \sqrt{n}$,

o que implica que a sequência $\{S_n\}$ não é limitada, não sendo convergente, de tal forma que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Entretanto, analisando a contrapositiva do Teorema 1.4, podemos identificar o seguinte teste para a divergência de séries:

Atenção

Dado um teorema na forma "Se P então Q", ou na forma simbólica $P \to Q$, em que P e Q são afirmações, a contrapositiva corresponde ao teorema equivalente "Se não Q então não P", ou na forma simbólica $\sim Q \to \sim P$ (NASCIMENTO, 2016).

Teste de divergência: Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então a série $\sum a_n$ é divergente (ROGAWSKI, 2009).

Por exemplo, seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$. Note que

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \neq 0$. Portanto, pelo teste anterior podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$ é uma série divergente.

Assimile

Considere a série numérica $\sum a_n$. Pelo Teorema 1.4, temos:

Se $\sum a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

Outra possibilidade para estudo de convergência de séries consiste em comparar séries por meio das operações de adição, subtração e multiplicação, de acordo com o seguinte teorema:

Teorema 1.5: se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes, então $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$ e $\sum ca_n$ serão também convergentes, com c constante real, tal que: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (STEWART, 2016b).

Exemplificando

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right)$. Anteriormente já foi verificado que as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ são convergentes, de modo que suas somas são $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. Sendo assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=4\cdot 1=4$$

Consequentemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

Isso implica a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right)$.

Considere que a série é definida por $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Avaliando a sequência $\{S_n\}$ de somas parciais, temos: $S_1=-1$; $S_2=-1+1=0$; $S_3=-1+1-1=-1$; $S_4=-1+1-1+1=0$ e assim sucessivamente. Dessa forma, os termos da sequência das somas parciais alternam entre -1 e 0, não se aproximando, no infinito, de nenhum valor numérico específico, o que possibilita sua caracterização como sequência divergente. Dessa forma,

a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ será divergente.

Considere a série definida por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$. Note que $\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}=\frac{2^2\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}}=4\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Sendo assim, essa série corresponde a uma série geométrica com primeiro termo $a=4$ e razão $r=\frac{2}{3}$. Como $|r|<1$, a série em questão é convergente e apresenta como soma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}=\frac{4}{1-\frac{2}{3}}=12\,.$$

No estudo das séries é importante diferenciar as sequências que estão relacionadas a ela, bem como os termos gerais correspondentes.

Por exemplo, considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}+\ldots$. Note que o termo geral dessa série é dado por $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$. Observe que essa série é construída a partir da soma dos infinitos termos da sequência $\{a_n\}$ com expressão do termo geral dada por $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$ e cujos primeiros termos são $\left\{\frac{1}{4},-\frac{1}{16},\frac{1}{64},\ldots\right\}$. Partindo da série, podemos construir a sequência $\{S_n\}$ das somas parciais de $\sum a_n$ cujos primeiros termos são: $S_1=\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$, $S_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$. Prosseguindo com essa construção, a expressão do termo geral da sequência $\{S_n\}$ será dada por $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$. Logo, a partir da série $\sum a_n$ temos o termo geral da série (a_n), a sequência que gera a soma infinita $(\{a_n\})$, bem como a sequência das somas parciais da série $(\{S_n\})$. Assim, é importante diferenciar cada um desses elementos e observar quais podem contribuir para os estudos a respeito da convergência.

No caso de $\sum a_n$, como $\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{4\cdot 4^{n-1}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$, temos uma série geométrica de primeiro termo $a=\frac{1}{4}$ e razão $r=-\frac{1}{4}$, então podemos

analisar a convergência pelo valor absoluto da razão, sem a necessidade de recorrer diretamente à convergência da sequência das somas parciais $\left(\{S_n\}\right)$. Como $|r|<1$, $\sum a_n$ é convergente com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{5}$.

Dica

Como sugestão de material complementar para o estudo das séries infinitas, estude as Seções 11.2 e 11.4 denominadas, respectivamente, *Definindo funções através de somas: séries aritméticas e Séries geométricas infinitas, presentes no livro Funções para modelar variações: uma preparação para o cálculo*, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual. Nesse material você encontrará exemplos de aplicações das séries no estudo de problemas envolvendo matemática financeira, taxa de variação de substâncias químicas no corpo humano ao longo do tempo, entre outros.

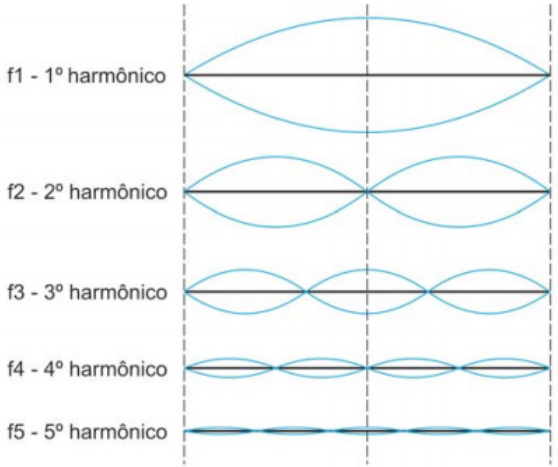
Sem medo de errar

No contexto de elaboração de seminários em conjunto com o professor de física da instituição de educação básica na qual você atua, em preparação para a feira cultural, sua tarefa consiste em elaborar a segunda aula voltada à série harmônica. Assim, você deve estudar a série harmônica e suas propriedades, organizando um material direcionado aos alunos do primeiro ano do ensino médio, associando a matemática com a música.

A série harmônica é descrita por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Um dos primeiros estudiosos a se dedicar a essa série foi Pitágoras, por volta do século V a.C. Segundo Anton, Bivens e Davis (2014, p. 620), a série harmônica "surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical". O termo "harmônico" está associado à "vibração de um fio ou coluna de ar, com a presença de frequências múltiplas em relação a uma frequência fundamental, provocando uma distorção do som resultante (SOUZA, 2008, p. 19).

Quando uma corda de um violão, por exemplo, é colocada em um movimento de pequena amplitude, ela produz um padrão de onda estacionária, tal que a menor frequência é a frequência fundamental, que produz o primeiro padrão de onda estacionária presente na Figura 1.7, denominado modo fundamental de vibração ou 1º harmônico (TIPLER; MOSCA, 2011).

Figura 1.7 | Subdivisão de harmônicos



Fonte: adaptada de Boro, Franciscon e Merli (2012, p. 4).

O 2º harmônico, cujo padrão de onda pode ser verificado na Figura 1.7, apresenta frequência duas vezes maior do que a frequência fundamental e tal que o comprimento de onda é igual a metade do comprimento da onda no 1º harmônico. No caso do 3º harmônico temos uma frequência igual ao triplo da frequência fundamental e o comprimento de onda correspondente a um terço do comprimento da onda no 1º harmônico, e assim sucessivamente. Perceba que os harmônicos correspondem a frequências múltiplas inteiras da frequência mais baixa, ou seja, da frequência fundamental (HEWITT, 2015).

Se adotarmos o comprimento da onda na frequência fundamental como 1, no 2º harmônico o comprimento será igual a $\frac{1}{2}$, no 3º harmônico de $\frac{1}{3}$, e assim por diante, o que possibilita a construção da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$. Logo, a série harmônica está associada aos comprimentos da onda em cada harmônico, partindo do 1º.

Conhecendo a possibilidade de estabelecer relações entre a série harmônica e os sons, associação esta que será complementada pelo professor de Física, agora analisaremos essa série do ponto de vista da matemática, analisando sua constituição e convergência/divergência.

A série harmônica consiste em uma soma infinita de termos positivos, os quais são identificados a partir da sequência $\{x_n\}$ de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$, a qual converge para zero. Note que a sequência $\{S_n\}$ das somas parciais é tal que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = S_{n+1}$, ou seja, corresponde a uma sequência estritamente crescente, o que evidencia a monotonicidade de $\{S_n\}$. Se $\{S_n\}$ for uma sequência limitada, então pelo Teorema 1.2, estudado na seção anterior, podemos concluir que $\{S_n\}$ será convergente. Analisaremos somas parciais específicas da série, a saber: S_2, S_4, S_8, S_{16}, que são as somas cujos índices são da forma 2^n, isto é, S_{2^n}:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$S_8 = 1 + ... + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$S_{16} = 1 + ... + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16} = S_8 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{16}}_{8 \text{ frações}} > S_8 + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16}}_{8 \text{ frações}} = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

Procedendo de forma análoga, podemos observar que $S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$. Note que se M for uma constante qualquer, sempre podemos encontrar um inteiro positivo n tal que $\frac{n+1}{2} > M$, e, assim, $S_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$, ou seja, a sequência $\{S_n\}$ das somas parciais não é limitada. Além disso, note que $S_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como a sequência $\{S_n\}$ das somas parciais é divergente, podemos concluir que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Agora, finalize a elaboração do material para os alunos do primeiro ano do ensino médio a respeito da série harmônica, associando essa série à soma dos infinitos termos da sequência $\left\{\underbrace{\frac{1}{n}}_{8 \text{ frações}}\right\}^{8 \text{ frações}}$ e evidenciando sua aplicabilidade no estudo da acústica e da música, o qual será complementado pelo professor de Física. Procure identificar possíveis dúvidas que podem surgir durante esse estudo, destacando os encaminhamentos que podem ser adotados nesses casos. Pesquise também outras aplicações para a série harmônica e que podem ser apresentadas aos alunos.

Associação entre as séries e os números racionais

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja elaborando um plano de aula voltado aos alunos dos anos finais do ensino fundamental, principalmente do oitavo ano, a respeito do conjunto dos números racionais. O objetivo, com esse plano, é trabalhar com a identificação de frações geratrizes para dízimas periódicas, as quais pertencem ao conjunto dos números racionais. Um dos exemplos a serem discutidos nessa aula é a identificação da fração geratriz associada à dízima periódica 0,121212... segundo as estratégias direcionadas a essa etapa de ensino.

Como podemos associar a identificação da fração geratriz 0,121212... com a convergência de uma série geométrica? Estude esse problema do ponto de vista das séries, de modo a fundamentar o procedimento de identificação das frações geratrizes e, em seguida, finalize seu plano de aula descrevendo de forma detalhada o processo que é adotado na etapa a que o plano está direcionado.

Resolução da situação-problema

Queremos associar o processo de identificação da fração geratriz 0,121212... com a convergência de uma série geométrica. Para isso, observe que:

$$\begin{aligned} 0{,}121212... &= 0{,}12 + 0{,}0012 + 0{,}000012 + ... \\ &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} + ... \\ &= \frac{12}{100}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + ...\right] \\ &= \frac{12}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \end{aligned}$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n$ corresponde a uma série geométrica com primeiro termo $a=1$ e razão $r=\frac{1}{100}$. Como $|r|<1$ então essa série é convergente,tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{\frac{100}{100}-\frac{1}{100}} = \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99}$$

Logo, $0{,}121212... = \frac{12}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{12}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{12}{99}$, isto é, a fração geratriz de 0,1212... é $\frac{12}{99}$.

Finalize seu plano de aula com a apresentação do procedimento de identificação das frações geratrizes adotado no oitavo ano, estendendo esse processo para outros tipos de dízimas periódicas.

Faça valer a pena

1. Considerando as características das séries e o significado da notação para somatório, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. O resultado da expressão $\sum_{k=2}^{4} 2^{2-k}$ é igual a 1,75.

II. Os três primeiros termos da sequência $\{S_n\}$ de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ são dados por 1, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{27}$.

III. Os três primeiros termos da sequência $\{S_n\}$ de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ são dados por $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{11}{12}$.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta das classificações, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V - F - V.
b) V - V - F.
c) V - F - F.
d) F - F - V.
e) F - V - F.

2. Considere a sequência de números reais $\{x_n\}$ cujo termo geral assume a expressão

$$x_n = \frac{2}{n^2 - 1}$$

com *n* variando de 2 a infinito. Logo, seus primeiros termos são dados por $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{15}, \ldots\right\}$.

A partir dessa sequência, foi construída a série $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$.

A partir dessa série, podemos identificar uma sequência auxiliar denominada sequência das somas parciais da série e que pode ser denotada por $\{S_n\}$. A identificação do termo geral da sequência $\{S_n\}$ é importante para, entre outras questões, avaliar a convergência da série correspondente.

Reescreva o termo x_n como uma diferença de frações, obtidas por meio do emprego das frações parciais. Com base nessa representação, identifique, entre as seguintes alternativas, aquela que representa corretamente a expressão do termo geral da sequência de somas parciais $\{S_n\}$ da série $\sum x_n$:

a) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

b) $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) $S_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1}$

d) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

e) $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

3. Considere as séries apresentadas a seguir:

I. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-2}$

II. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \right)$

III. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10^k}$

IV. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k}$

V. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k+5}$

VI. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k-1}}$

Com base no estudo da convergência e divergência de séries infinitas de números reais, assinale a alternativa correta:

a) Apenas as séries indicadas nos itens I e IV são convergentes.
b) Apenas as séries indicadas nos itens II e III são convergentes.
c) Apenas as séries indicadas nos itens III e V são convergentes.
d) Apenas as séries indicadas nos itens II, III e IV são convergentes.
e) Apenas as séries indicadas nos itens I, II, V e VI são convergentes.

Seção 1.3

Convergência de séries numéricas

Diálogo aberto

Nas seções anteriores estudamos as sequências e séries de números reais, observando suas principais propriedades, além de estudar a convergência ou divergência tanto das sequências quanto das séries. Verificamos exemplos de séries numéricas convergentes, como é o caso da série $\sum \frac{1}{3^n}$, e de séries divergentes, como a série harmônica, por exemplo. Nesses casos, usamos algumas estratégias particulares para concluir a respeito da convergência ou divergência dessas séries. No entanto, será que existem estratégias mais gerais que permitem estudar a convergência das séries numéricas?

Diante desse questionamento, para nossos estudos, considere que, no contexto de preparação para a feira cultural do colégio, você e o professor de História precisam concluir a elaboração da terceira aula referente aos temas dos trabalhos que serão desenvolvidos pelos alunos da turma com a qual vocês estão trabalhando.

O terceiro tema diz respeito ao desenvolvimento histórico do sistema de numeração decimal, associado à estrutura dos conjuntos numéricos. Considerando essa proposta, sua terceira tarefa consiste em elaborar uma aula a respeito da estrutura do sistema de numeração decimal, analisando a representação dos números em relação a esse sistema e retomando suas principais características, a qual será complementada posteriormente pelo professor de História.

Para contribuir com a preparação para essa aula, você deverá refletir a respeito da representação de números com quantidades infinitas de casas decimais nesse sistema. Sabemos que o número 2,15 pode ser representado no sistema de numeração decimal como $2\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}$ ou $2\cdot 10^0 + \frac{1}{10^1} + \frac{5}{10^2}$. Considerando essa estrutura, um número na forma $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$, com $d_1, d_2, d_3, \ldots$ algarismos de 0 a 9, pode ser representado como $0, d_1 d_2 d_3 \ldots = \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots$, ou seja, pode ser representado na forma de uma série de números reais. Com base nessas informações, mostre que essa série sempre converge. De que forma essa informação pode contribuir com o estudo do sistema de numeração decimal na educação básica?

Conclua o plano de aula sobre o sistema de numeração decimal

estendendo a representação para todos os números reais e refletindo a respeito da importância desse sistema para a representação numérica e interpretação dos fenômenos.

Dessa forma, você está apto a finalizar seu desafio. Para isso, construa um documento contendo os planos de aulas relativos às três aulas, desenvolvidos ao longo da unidade, finalizando com a elaboração de uma conclusão a respeito da importância do estudo das sequências e séries para a formação do professor de Matemática.

Para cumprir essa tarefa, prosseguiremos com o estudo das séries, analisando algumas das estratégias que podem ser empregadas quando desejamos investigar a convergência dessas somas infinitas. Assim, dê continuidade aos seus estudos e confira os conceitos que podemos empregar no estudo da convergência das séries numéricas!

Não pode faltar

Na seção anterior estudamos as séries infinitas, que consistem em somas infinitas que podem ser construídas a partir de sequências. Assim, dada uma sequência numérica $\{a_n\}$, podemos construir a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$. De modo análogo às sequências, também podemos classificar as séries em convergentes ou divergentes conforme suas propriedades.

Além do estudo da convergência das sequências das somas parciais correspondentes, podemos empregar testes que nos auxiliam na caracterização de sequências como convergentes ou divergentes, com base nas características de seus termos e desde que determinadas condições sejam verificadas.

Dentre as séries estudadas, podemos destacar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$, a qual pode ser classificada como série geométrica. Veja que todos os termos que compõem essa série são maiores que zero, logo, corresponde a uma série de termos positivos.

Quando estudamos séries cujos termos são maiores ou iguais a zero podemos empregar alguns critérios específicos no estudo de sua convergência. Dessa forma, seja uma **série** $\sum a_n$ de **termos não negativos**, ou seja, uma série com termos $a_n \geq 0$ para todo *n* natural, a sequência $\{S_n\}$ das somas parciais dessa série tem termo geral $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Como cada termo da sequência $\{S_n\}$ é obtido do termo precedente pelo acréscimo de um valor não negativo temos $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, o que implica $\{S_n\}$ ser

uma sequência não decrescente. Veja o caso de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, por exemplo, em que $\frac{1}{3^{n+1}}>0$ para todo natural, então sua sequência de somas parciais $\{S_n\}$, com termo geral $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{3^n}$, é tal que $S_{n+1}\geq S_n$ para todo *n* natural. Para esses conjuntos de séries, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.6: Sendo $\sum a_n$ uma série de termos não negativos, dessa forma:

Se $\{S_n\}$ for limitada superiormente, então a série positiva $\sum a_n$ será convergente.

Se $\{S_n\}$ não for limitada superiormente, então a série positiva $\sum a_n$ será divergente.

Note que o item (a) decorre do Teorema 1.2, pois se a sequência das somas parciais $\{S_n\}$, a qual é não decrescente, ou monótona, for também limitada superiormente, em conjunto com a limitação inferior, pois $S_n\geq 0$ para todo *n* natural, segue que $\{S_n\}$ será convergente, o que implica na convergência de $\sum a_n$ (ROGAWSKI, 2009). A partir desse Teorema 1.6, podemos identificar uma aplicação importante, que consiste no teste da integral, descrito a seguir.

Teorema 1.7 (Teste da integral): Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos. Se *f* for uma função decrescente, positiva e contínua no intervalo $[p,+\infty)$, com *p* natural, de modo que $a_k=f(k)$ para todo $k\geq p$, então:

Se $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, então $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ é uma série convergente.

Se $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ é uma série divergente (THOMAS, 2012).

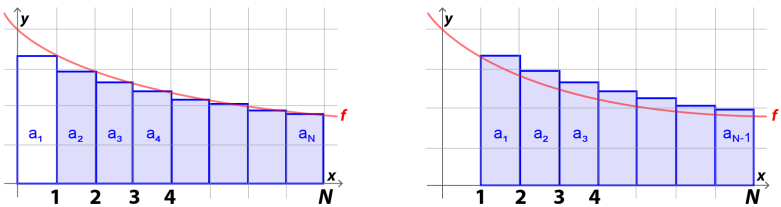
Lembre-se de que uma integral imprópria converge quando o limite correspondente existir (STEWART, 2016a), ou seja, $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge no caso de $\lim_{A\to\infty}\int_p^{A} f(x)\,dx$ resultar em um número real. Por outro lado, a integral imprópria diverge se o limite correspondente divergir.

Dica

A demonstração do Teorema 1.7 pode ser consultada na página 655 do livro *Cálculo: volume 2*, de James Stewart, o qual pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

O teste da integral nos diz que se a integral imprópria de *f* converge, então a série associada à expressão de *f* também convergirá, relação análoga que também é válida no caso da divergência. Assim, da Figura 1.8(a), se a integral imprópria de *f* converge, então a sequência $a_2 + a_3 + ... + a_N$ também convergirá para todo $N \geq 1$ natural, pois assume um valor menor ou igual ao valor da integral em $[1, N]$, ou seja, a área limitada abaixo de *f* e acima do eixo *x* em $[1, N]$. Dessa forma, temos a convergência de $a_1 + a_3 + ... + a_N$ para todo $N \geq 1$ natural, o que implica a convergência da sequência de somas parciais da série e, consequentemente, a convergência da série. Por outro lado, com base na Figura 1.8, se a integral imprópria diverge, então a sequência das somas parciais da série também divergirá, já que as somas $a_1 + a_3 + ... + a_N$ serão sempre maiores ou iguais à integral de *f* em $[1, N]$, para cada $N \geq 1$ natural, implicando a divergência da série.

Figura 1.8 | Interpretação do teste da integral



(a) Estudo da convergência da série associada à *f*

(b) Estudo de divergência da série associada à *f*

Fonte: elaborada pelo autor.

Porém, note que o item (a) do Teorema 1.7 não indica a necessidade da integral e da série convergirem para um mesmo valor, basta que ambas sejam convergentes nas hipóteses estabelecidas. Vamos verificar essa situação e a aplicação desse teste no próximo exemplo.

Exemplificando

Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Esta é composta por termos positivos, pois $\frac{1}{n^2} > 0$ para todo n natural. Definindo a função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

por $f(x)=\frac{1}{x^2}$, obtemos uma função decrescente e contínua para $x\geq 1$. Note que $f(n)=\frac{1}{n^2}$ para todo n. Além disso, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^A\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^A=\lim_{A\to\infty}\left[1-\frac{1}{A}\right]=1$. Como a integral converge, pelo teste da integral podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge. No entanto, essa série não converge para 1, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) provou que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (STEWART, 2016b), o que pode ser verificado por meio de séries de Fourier, tema que será estudado na próxima unidade.

Reflita

As séries na forma $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{k^p}+\ldots$, com $p>0$, denominadas séries p ou séries hiper-harmônicas (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014) são convergentes ou divergentes? Por quê?

As séries na forma $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{k^p}+\ldots$, com $p>0$, denominadas **séries p** ou **séries hiper-harmônicas** (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014) são convergentes ou divergentes? Por quê?

Além das séries positivas ou não negativas, existem séries nas quais, se um termo da soma for positivo, então o próximo será negativo, e assim sucessivamente, como é o caso de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$, por exemplo. Nesse caso, quando uma série apresenta seus termos alternadamente positivos e negativos, temos uma série chamada de **alternada** (GUIDORIZZI, 2013). Para esse tipo de série, podemos empregar um teste específico a fim de investigarmos sua convergência, teste esse que é descrito a seguir:

Teorema 1.8 (Teste das séries alternadas): uma série alternada na forma: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{k-1}b_k + \ldots$

é convergente quando $0 < b_{n+1} < b_n$ para todo natural $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (GUIDORIZZI, 2013).

Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. Para todo $n \geq 1$, como $n+1 > n$ então $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Sendo $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pelo Teorema 1.8, temos que $\sum r_n$ converge.

Faça você mesmo

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ converge ou diverge, pelo Teorema 1.8.

Além dos casos já citados, existem séries que não são compostas apenas por termos positivos ou por termos não negativos, mas que também não são alternadas. Nesses casos, podemos empregar o valor absoluto dos termos da série como uma forma de avaliar a convergência, estando esses estudos associados às categorias de séries absolutamente convergentes ou condicionalmente convergentes.

Dizemos que uma série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** se a série $\sum |a_n|$ for convergente (STEWART, 2016b), isto é, se a série cujo termo geral corresponde ao módulo do termo geral da série original. Assim, devemos estudar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$.

Por exemplo, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right|$ é uma série geométrica convergente, logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ é uma série absolutamente convergente.

No próximo teorema vejamos como o conhecimento da convergência de $\sum |a_n|$ pode contribuir com o estudo da convergência $\sum a_n$.

Teorema 1.9: Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, logo $\sum a_n$ converge (STEWART, 2016b).

Dessa forma, a partir do Teorema 1.9, sendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ absolutamente convergente, podemos garantir a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

No entanto, quando uma série $\sum a_n$ é convergente mas $\sum |a_n|$ diverge, dizemos que $\sum a_n$ é **condicionalmente convergente** (THOMAS, 2012). Nesse caso, podemos citar como exemplo a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, a qual é convergente, como estudado anteriormente. Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ coincide com a série harmônica, que diverge. Sendo assim, $\sum r_n$ é condicionalmente convergente, porque $\sum r_n$ converge apesar de $\sum |r_n|$ não convergir.

Assimile

Quando uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, podemos concluir que $\sum a_n$ é, em particular, convergente. Porém, se $\sum a_n$ é convergente, não podemos garantir que $\sum |a_n|$ também convergirá.

Além dos testes apresentados para avaliar a convergência ou divergência, podemos comparar as séries em estudo com outras séries cujo comportamento e classificação são conhecidos previamente. Por meio da relação de ordem definida no conjunto dos números reais, que possibilita estabelecer associações como 3 é menor que 9, por exemplo, podemos estudar o teste da comparação entre séries e as conclusões que podem ser obtidas por meio dele.

Teorema 1.10 (Teste da comparação): considere as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de termos não negativos, tais que $a_n \leq b_n$ para todo natural $n \geq 1$. Dessa forma,(a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

(b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será divergente (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Para aplicar o teste da comparação precisamos relacionar a série em estudo com uma outra série cujas características sejam previamente conhecidas e de tal forma que seja possível comparar os termos correspondentes das duas séries entre si. Vejamos um exemplo.

Exemplificando

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Note que se $n \geq 1$ então $n^3 \geq n^2$, o que implica $0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$. Sendo assim, os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ são sempre menores ou iguais que os termos de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, a qual já provamos que converge. Portanto, pelo teste da comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série convergente. Por outro lado, seja a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^3-1}$. Analisando a fração apresentada, note que esta decresce quando o numerador diminui ou o denominador aumenta, assim, $0 \leq \frac{3n^2}{n^3} \leq \frac{3n^2+1}{n^3-1}$ ou $0 \leq \frac{3}{n} \leq \frac{3n^2+1}{n^3-1}$. Dessa forma, como $0 \leq \frac{3}{n} \leq \frac{3n^2+1}{n^3-1}$ para todo natural $n > 1$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, implicando $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ também divergir, podemos concluir pelo Teorema 1.10 que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^3-1}$ diverge.

No teste da comparação, buscamos relacionar duas séries entre si de modo a concluir informações a respeito da convergência ou divergência de uma das séries em função das propriedades apresentadas pela outra série.

Reflita

Suponha que você deseja empregar o teste da comparação para provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}$ é convergente. Com qual série podemos comparar $\sum x_n$? Que argumentos podem ser empregados para justificar a convergência de $\sum x_n$ no caso da série destacada?

Outra alternativa para estudar a convergência de séries em geral, e não apenas para as séries alternadas, de termos positivos ou não negativos, consiste em comparar os termos destas entre si a partir de dois testes: o teste da razão e o teste da raiz. Nesses dois testes, basta avaliarmos um limite envolvendo termos da série para concluir informações a respeito de sua convergência ou divergência. Porém, precisamos ter atenção às situações em que esses testes são inconclusivos, buscando alternativas para tais situações.

O teste da razão é empregado por meio da avaliação do limite de uma razão entre termos sucessivos da série, observando se o limite existe e, nesse caso, qual o valor assumido por ele, conforme o teorema apresentado no que segue.

Teorema 1.11 (Teste da razão): seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que o limite $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ exista.

Se $L < 1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente e, portanto, $\sum a_n$ converge.

Se $L = 1$, o teste é inconclusivo, ou seja, a série pode convergir ou divergir.

Se $L > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

No caso de o limite L não existir, a série $\sum a_n$ também será divergente (ROGAWSKI, 2009).

Considere, por exemplo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$. Dessa forma, vamos avaliar o valor absoluto da razão entre dois termos sucessivos quaisquer dessa série conforme o Teorema 1.11. Assim,

$$\left|\frac{g_{k+1}}{g_k}\right| = \left|\frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!}\right| = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k} = \frac{2^k\cdot 2}{(k+1)\cdot k!}\cdot\frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1}$$

Logo, $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{g_{k+1}}{g_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1} = 0 < 1$. Como o limite resultou em um valor inferior a 1, pelo teste da razão podemos concluir que a série $\sum g_k$ converge absolutamente e, portanto, converge.

Porém, note que nem sempre conseguimos obter conclusões satisfatórias por meio do teste da razão, como apresentado no próximo exemplo.

Exemplificando

Seja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$. Note que $\left|\frac{1/2(k+1)-1}{1/2k-1}\right| = \left|\frac{1/2k+1}{1/2k-1}\right| = \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{2k-1}{1} = \frac{2k-1}{2k+1}$. Como $\lim_{k\to\infty}\frac{2k-1}{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2-\frac{1}{k}}{2+\frac{1}{k}} = \frac{2}{2} = 1$, nada podemos afirmar a respeito da convergência de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ pelo teste da razão. Porém, utilizando o teste da integral, por exemplo, por se tratar de série de termos positivos, tem-se:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^{A} = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(2A-1)\right] = \infty$$

Ou seja, a série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ diverge.

Diferente do teste anterior, o teste da raiz envolve o cálculo do limite da raiz n-ésima do valor absoluto do termo geral da série, apresentando uma estrutura semelhante à do teste da raiz no que se refere ao estudo dos valores obtidos para o limite.

Teorema 1.12 (Teste da raiz): Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que o limite $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ exista.

Se $L < 1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente e, portanto, $\sum a_n$ converge.

Se $L = 1$, o teste é inconclusivo, ou seja, a série pode convergir ou divergir.

Se $L > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

No caso de o limite L não existir, a série $\sum a_n$ também será divergente (ROGAWSKI, 2009).

Como exemplo, vamos estudar a série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\ln(k)\right)^k}$. Se $k \geq 1$, podemos observar que

$$\sqrt[k]{|h_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{1}{\left(\ln(k)\right)^k}\right|} = \sqrt[k]{\frac{1}{\left(\ln(k)\right)^k}} = \frac{1}{\ln(k)}$$

Como $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|h_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0 < 1$ podemos concluir, pelo teste da raiz, que $\sum h_k$ converge.

Note que, assim como no teste da razão, quando o limite obtido é igual a 1 nada podemos afirmar a respeito da convergência da série pelo teste da raiz. Pesquise um exemplo de série na qual o teste da raiz seja inconclusivo.

Dessa forma, perceba que ao aplicar o teste da razão, ou da raiz, se for obtido o limite correspondente igual a 1, nada podemos concluir a respeito da convergência ou divergência, pois os testes são inconclusivos nesses casos. Quando isso ocorre, precisamos buscar outros testes para avaliar a convergência.

Assimile

Em resumo, temos as seguintes possibilidades de estudo da convergência das séries a partir da aplicação dos testes estudados:

Uma série $\sum a_n$ diverge a menos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para séries de termos não negativos, podemos empregar o teste da integral. Ou ainda, se for possível comparar a série com outra conhecida, pode ser empregado o teste da comparação.

No caso das séries com alguns termos negativos, podemos estudar a convergência de $\sum |a_n|$, avaliando a convergência absoluta para, em particular, concluir a respeito da convergência de $\sum a_n$.

Para as séries alternadas, podem ser avaliadas as três condições do teste de convergência: se o limite do termo geral for nulo, os termos forem positivos (desconsiderando as potências de -1 presentes nos termos) e se a sequência dos termos da série for decrescente (desconsiderando as potências de -1 presentes em cada termo).

Para uma série qualquer, podem ser verificados os testes da razão ou da raiz, de modo a obter informações a respeito da convergência, quando possível, ou seja, quando os testes são passíveis de serem aplicados de acordo com o resultado do limite correspondente.

Note que temos diversas possibilidades de avaliação da convergência de uma série: limite das sequências das somas parciais, teste da comparação, teste da razão, teste da raiz, bem como os critérios específicos das séries de termos não negativos ou séries alternadas. No entanto, observe que os testes apresentados nesta seção possibilitam apenas a classificação da série como convergente ou divergente, não envolvendo o cálculo da soma da série, pois para isso faz-se necessário empregar outros recursos, como o estudo do limite das sequências das somas parciais correspondentes.

Dica

Para auxiliar nos estudos a respeito da convergência de séries numéricas e os critérios e testes correspondentes, consulte a seção 9.3, denominada *Testes de convergência* e localizada entre as páginas 342 e 345, do livro Cálculo de uma variável, de Hughes-Hallett *et al.*, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual. Procure identificar as semelhanças e diferenças presentes em cada teste, observando as hipóteses que devem ser verificadas e as conclusões que podem ser obtidas.

Sem medo de errar

Finalizando a proposta de elaboração de aulas para contribuir com a preparação para a feira cultural do colégio, sua tarefa consiste em elaborar uma aula voltada ao estudo do sistema de numeração decimal, envolvendo aspectos matemáticos e históricos de seu desenvolvimento. Assim, você deverá organizar o plano de aula do ponto de vista da Matemática, o qual será complementado pelo professor de História para, posteriormente, ser desenvolvido com a turma em questão.

Para isso, inicialmente, você deve estudar a possibilidade de decomposição de números reais a partir desse sistema, bem como sua associação com a convergência de séries. Nesse sentido, sabemos que um número real na forma $0,d_1d_2d_3\ldots$, com $d_1,d_2,d_3,\ldots$ algarismos de 0 a 9, pode ser representado como $0,d_1d_2d_3\ldots=\frac{d_1}{10^1}+\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\ldots$, isto é, pode ser representado como uma série de números reais. Com base nessas informações, o que podemos afirmar

a respeito da convergência dessa série? Veja que os números $d_1, d_2, d_3, \ldots$ são todos algarismos de 0 a 9, sendo assim, $0 \leq d_n \leq 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir dessas informações, temos que:

$$\frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \ldots \leq \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \quad (*)$$

Vamos agora estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

Com base no estudo das séries geométricas, desenvolvido na seção anterior, temos que $\sum c_n$ corresponde a uma série geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{10}$, logo, $\sum c_n$ é convergente.

Estudaremos agora a convergência dessa série empregando alguns dos testes estudados nesta seção. Observe que $\sum c_n$ é uma série de termos positivos, por isso, podemos avaliar sua convergência a partir do teste da integral, mas também por meio dos testes da raiz e da razão.

Aplicando o teste da raiz temos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{10}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{10}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$. Dessa forma, a série $\sum c_n$ é convergente. Ao aplicar o teste da razão temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(1/10\right)^{n+1}}{\left(1/10\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1/10\right)^{n+1}}{\left(1/10\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1/10^{n+1}\right)}{\left(1/10^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$$

garantindo também a convergência da série $\sum c_n$. Além disso, para a série $\sum c_n$, note que ao definir a função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{10^x}$ temos uma função decrescente e contínua para $x \geq 1$ e tal que $f(n) = \frac{1}{10^n}$ para n natural. Sendo assim,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{10^x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{10^x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(10)\cdot 10^x}\right]_1^A = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(10)\cdot 10^A}+\frac{1}{\ln(10)\cdot 10}\right]\cdot$$

$$= \frac{1}{\ln(10)\cdot 10} \approx 0{,}043$$

Como a integral converge, pelo teste da integral podemos concluir que $\sum c_n$ converge. Note que, apesar de os testes apresentarem características diferentes, todos eles fornecem uma mesma conclusão a respeito da série. Assim, a opção pelo teste se dá a partir da expressão do termo geral da série, ou mesmo das informações que temos a respeito dela.

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ converge, pelas propriedades das operações envolvendo séries temos que $9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ também convergirá. De posse dessa informação, em conjunto com a desigualdade apresentada em $(*)$, pelo teste da comparação, podemos concluir que a série $\frac{d_1}{10^1}+\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\ldots$ é convergente. Portanto, qualquer número real na forma $0,d_1d_2d_3\ldots$ pode ser representado como uma série convergente de números reais.

Sabendo que a representação dos números reais na forma $0,d_1d_2d_3\ldots$ é dada por uma série convergente, então todo número real admite uma decomposição em potências de 10, o que caracteriza a decomposição dos números pelo sistema de numeração decimal. Logo, independentemente do número real tomado, sempre podemos construir uma decomposição desse número como uma soma de finitas ou infinitas parcelas envolvendo produtos por potências de 10, a qual converge para o número em questão. Assim, dado qualquer número na forma $a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0,d_1d_2d_3\ldots$, em que $d_1,d_2,d_3,\ldots$ são algarismos de 0 a 9, e que também tenhamos $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ algarismos de 0 a 9 com $a_n\neq 0$ e n inteiro não negativo, podemos construir uma representação na forma:

$$a_na_{n-1}\ldots a_1a_0,d_1d_2d_3\ldots = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0+\frac{d_1}{10^1}+\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\ldots$$

a qual converge para o número real em questão, possibilitando a representação de qualquer número real em função do sistema decimal e a seleção de qualquer exemplo para abordagem da estrutura desse sistema na educação básica, por exemplo.

Assim, se o número considerado for inteiro ou um racional representado por uma quantidade finita de algarismos, sabemos que sua representação será dada como uma soma de uma quantidade finita de parcelas envolvendo potências de 10. Já no caso das dízimas periódicas, teremos uma soma com infinitas parcelas e cuja ordem dos termos é possível identificar por meio do padrão apresentado pela dízima. Mesmo para os números irracionais, que são descritos por dízimas não periódicas, como é o caso do π, por exemplo, ainda que não saibamos exatamente todos os algarismos que ocupam suas casas decimais, pelo estudo anterior podemos garantir que esse número, e os demais irracionais, também podem ser representados a partir dessa decomposição.

Concluindo esse estudo, você poderá finalizar a proposta indicando aos alunos tarefas que envolvam a decomposição de números segundo esse sistema, bem como os aspectos históricos relacionados, em conjunto com o professor de história. Como sugestões, podem ser apresentados alguns sistemas de numeração que adotam a base 10 como o sistema de numeração hieroglífico e hierático, desenvolvidos no Antigo Egito, e os numerais romanos, os quais, apesar de adotarem diferentes representações para os números, também adotam a base decimal como no caso do nosso sistema mais usual, o sistema de numeração indo-arábico (EVES, 2011). Mais informações a respeito do desenvolvimento desses e outros sistemas de numeração podem ser acessados nos anexos I e II da dissertação intitulada *Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe* (ALMEIDA, 2007).

Dessa forma, você estará apto a finalizar esse desafio. Para isso, conclua seus estudos organizando um documento que contemple os três planos de aula elaborados, com todos os conceitos e atividades propostas, as respectivas resoluções e encaminhamentos. Em seguida, finalize esse trabalho elaborando uma conclusão a respeito da importância do estudo das sequências e séries para a formação do professor de Matemática.

Avançando na prática

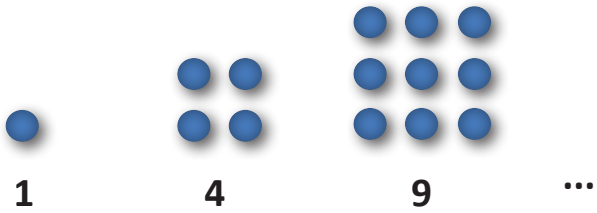
Números quadrados perfeitos e a construção de séries

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja elaborando uma aula a respeito dos números quadrados perfeitos e esteja trabalhando geometricamente com a sequência formada por esses números. Dizemos que um número é um quadrado perfeito

se sua raiz quadrada resultar em um número inteiro, como é o caso do 25, por exemplo, porque $\sqrt{25}=5$ (KIME, 2014). Assim, um número quadrado perfeito pode ser representado na forma n^2, com n inteiro. Podemos construir uma sequência formada por esses números, a qual é infinita e pode ser ilustrada geometricamente conforme a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Números quadrados perfeitos



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que a soma dos infinitos termos da sequência (x_n), com $x_n=\frac{1}{2^n}$ para n natural, converge para 1, o que pode ser associado com a área de um quadrado de lado 1, conforme verificado em um dos exemplos da seção anterior. Será que algo semelhante pode ser verificado no caso de $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$? O que podemos afirmar a respeito da soma dos infinitos números quadrados perfeitos? Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ por meio dos testes estudados.

Em seguida, finalize a elaboração do plano a respeito dos quadrados perfeitos, contemplando tarefas voltadas à avaliação das propriedades desses números, refletindo sobre a possibilidade, ou não, de representar geometricamente a soma dos infinitos termos da sequência $\left\{n^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ e das possibilidades de empregar essa série para favorecer a construção da ideia intuitiva de infinito pelos alunos.

Resolução da situação-problema

Aplicando o teste da razão para investigar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

Como o limite resulta em 1, temos que o teste da razão é inconclusivo nesse caso, então nada podemos afirmar a respeito da convergência ou divergência desta série. O teste da integral nesse caso não pode ser empregado por não ser possível definir uma função decrescente associada ao termo geral dessa série.

Assim, como alternativa, vamos avaliar as propriedades dessa série de modo a empregar o Teorema 1.6. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ é composta por termos positivos, pois $n^2 > 0$ para todo n natural, e sua sequência $\{S_n\}$ das somas parciais correspondentes não é limitada superiormente, sendo crescente, pelo item (b) do Teorema 1.6 podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge. Sendo assim, não conseguimos realizar um estudo geométrico semelhante ao realizado com base na série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, porque a soma dos infinitos termos da sequência $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, diverge.

Como não há possibilidade de realizar um estudo para $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ semelhante ao de $\{1/2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no sentido de soma infinita que converge, finalize seu plano propondo uma atividade que envolva o estudo da sequência dos números quadrados perfeitos e verificando a possibilidade de estudar a soma dos infinitos termos dessa sequência de forma intuitiva com os alunos da educação básica visando a construção de uma ideia intuitiva associada ao infinito.

Faça valer a pena

1. Considere as séries alternadas apresentadas no que segue:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots$

II. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \ldots$

III. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \ldots$

Associe as séries apresentadas (denotadas por I, II e III) com as respectivas expressões do termo geral (indicadas por A, B e C):

A. $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$

B. $x_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$

C. $x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$

Assinale a alternativa que apresenta todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B.
b) I – B; II – A; III – C.
c) I – B; II – C; III – A.
d) I – C; II – A; III – B.
e) I – C; II – B; III – A.

2. Considere a seguinte série de números reais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

A respeito dessa série, foram apresentadas as seguintes afirmações e uma relação proposta entre elas:

I. A série $\sum y_n$ é divergente.

PORQUE

II. Utilizando o teste da comparação, temos que $\frac{1}{2^{n!}} \leq \frac{1}{2^n}$ para todo n natural, e a

série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente.

Com base nas afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) As afirmações I e II estão corretas, e a II é uma justificativa correta para a I.

b) As afirmações I e II estão corretas, mas a II não é uma justificativa correta para a I.

c) A afirmação I está correta e a II, incorreta.

d) A afirmação II está correta e a I, incorreta.

e) As afirmações I e II estão incorretas.

3. Com base nas propriedades das séries numéricas, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. ( ) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ pode ser classificada como absolutamente convergente.

II. ( ) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ pode ser classificada como absolutamente convergente.

III. ( ) A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n$ pode ser classificada como absolutamente convergente.

IV. ( ) A série $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ pode ser classificada como absolutamente convergente.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta das classificações, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) I – V; II – V; III – F; IV – F.

b) I – V; II – F; III – V; IV – F.

c) I – V; II – F; III – V; IV – V.

d) I – F; II – V; III – F; IV – F.

e) I – F; II – V; III – V; IV – V.

Referências

ALMEIDA, F. M. M. de B. **Sistemas de numeração precursores do sistema indo-árabe.** 2007. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade Federal do Porto, Porto, 2007.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo:** volume 2. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

AXLER, S. **Pré-cálculo:** uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BAZANO, Rafael. **Teoria Musical (AULA GRATUITA) - Série Harmônica (1ª Parte) - Cordas e Música.** 2015. Disponível em: https://youtu.be/kSiKeoaqeWU. Acesso em: 19 out. 2018.

BAZANO, Rafael. **Teoria Musical - Série Harmônica (2ª Parte) - Cordas e Música.** 2015. Disponível em: https://youtu.be/G8LFhcpl4wY. Acesso em: 19 out. 2018.

BORO, M. C.; FRANCISCON, H. M.; MERLI, F. R. Série infinita harmônica e as notas musicais. *In:* CONGRESSO MULTIDISCIPLINAR FAP, 1.; FÓRUM CIENTÍFICO FAP, 6., 2012, Apucarana. **Anais...** Apucarana: FAP, 2012. Disponível em: http://www.fap.com.br/forum_2012/forum/pdf/Exatas/Comunicacao_Oral/ResExaCO18.pdf. Acesso em: 19 out. 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2012.

CONNALLY, E. A. *et al.* **Funções para Modelar Variações:** uma preparação para o cálculo. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo:** volume 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

HEWITT, P. G. **Física conceitual.** 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* **Cálculo de uma variável.** 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KIME, L. A. Álgebra na universidade: um curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

NASCIMENTO, J. A. do. **Explorando a lógica matemática no ensino básico.** 2016. 182f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

OLIVEIRA, C. B de. **Razão áurea:** suas aplicações e importância no ensino de matemática. 2010. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Superior de Educação, Faculdade Alfredo Nasser, Aparecida de Goiânia, 2010.

ROGAWSKI, J. **Cálculo:** volume 2. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SALAS, S. L.; HILLE, E.; ETGEN, G. J. **Cálculo:** volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro, LTC, 2005.

SOUZA, W. E. **Análise das distorções harmônicas de tensão a partir de características dos transformadores e de dados de consumo.** 2008. 100f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Departamento de Engenharia Civil, Departamento de Matemática dos setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

STEWART, J. **Cálculo:** volume 1. 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016a.

STEWART, J. **Cálculo:** volume 2. 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016b.

THOMAS, G. B. **Cálculo:** volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros:** mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 1.

Unidade 2

Série de Taylor e Série de Fourier

Convite ao estudo

Na unidade anterior estudamos as sequências e as séries numéricas, observando algumas de suas aplicações. Vimos que as séries de números reais correspondem a somas infinitas associadas aos termos de uma sequência de números reais, de modo que podemos estudar sua convergência ou divergência com base na sequência de somas parciais ou a partir da aplicação de testes adequados.

Nesta unidade daremos continuidade ao estudo das séries, observando agora como aplicar o conceito de série na representação e aproximação de funções, principalmente no caso das séries de Taylor, de Maclaurin e de Fourier, as quais podem ser empregadas na resolução de problemas modelados matematicamente, como é o caso dos problemas de transferência de calor, por exemplo. Com isso, podemos construir aproximações para funções com a possibilidade, em alguns casos, de avaliar os erros associados a elas.

Para este estudo, considere que você atua em uma empresa de consultoria que presta serviços para outras companhias. Você e sua equipe foram designados para prestar consultoria a uma companhia da área da computação, que atua com a elaboração de programas a serem instalados em drones visando a captação de imagens e vídeos a serem transmitidos em tempo real para um servidor. A sua tarefa consiste em resolver problemas apresentados pelo setor de programação da companhia, contribuindo com o desenvolvimento dos algoritmos para os novos equipamentos. Dessa forma, você deverá elaborar relatórios técnicos contendo as resoluções detalhadas e comentadas para cada um dos problemas apresentados, bem como os conhecimentos matemáticos essenciais para esse estudo, de modo que o setor de programação possa, no momento de construir os algoritmos associados a esses problemas, selecionar adequadamente as bibliotecas de funções predefinidas.

Na primeira etapa de sua tarefa, você deverá estudar um problema relacionado ao emprego das séries de Taylor e de Maclaurin na aproximação de funções, bem como a avaliação do erro associado a esse tipo de aproximação. Na segunda etapa, a proposta é direcionada às séries de Fourier, as quais podem ser utilizadas para o estudo de problemas envolvendo as transferências de calor, por exemplo, e a sua contribuição na aproximação de números irracionais, como é o caso do 2π. Por fim, a terceira etapa corresponde ao

estudo das aproximações de funções especiais por meio de séries de Fourier, como as funções pares e ímpares e suas séries de cossenos e senos associadas, além da construção de extensões pares e ímpares para funções pares e ímpares.

Para a realização dessa tarefa, na primeira seção você estudará a representação das funções por meio de séries de Taylor e de Maclaurin, na segunda será discutido a respeito das séries de Fourier e suas principais propriedades, enquanto que na terceira serão estudados alguns casos particulares para as séries de Fourier.

Dê continuidade em seus estudos a respeito das séries e confira os desafios que devem ser resolvidos por você em relação a este tema!

Seção 2.1

Séries de potências, séries de Taylor e Maclaurin

Diálogo aberto

Caro aluno, na unidade anterior estudamos as sequências e séries de números reais, bem como algumas aplicações importantes. Diante disso, é possível empregar séries para obter valores aproximados de funções? De que forma podemos associar as séries às funções?

Existem problemas associados à Matemática, principalmente relativos às equações diferenciais, que, ao serem resolvidos por métodos específicos, não geram como solução uma função no sentido com o qual estamos acostumados, com uma lei de formação específica baseada, por exemplo, nas funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, etc., mas possibilitam a identificação de aproximações para essas funções, que são as soluções dos problemas, expressas na forma de séries. Isso ocorre em determinados problemas envolvendo condução de calor, movimentos harmônicos associados às cordas em movimento, dentre outros. Assim, o conhecimento da representação em séries para funções, principalmente as séries de Taylor, e Maclaurin, são essenciais para a interpretação e resolução de determinados problemas.

Dando início à consultoria para a empresa que elabora programas a serem instalados em drones, a primeira responsabilidade direcionada a você e sua equipe consiste na resolução detalhada do problema proposto pelo setor de programação da companhia atendida, o qual envolve a aproximação de funções por polinômios de Taylor e o estudo dos erros associados. A empresa precisa construir um programa para monitorar o trânsito de uma cidade ao longo de algumas semanas, sempre nos mesmos horários e lugares. Por se tratar de um fenômeno periódico, os algoritmos associados a esse tipo de problema envolvem o emprego das chamadas funções periódicas, como as trigonométricas.

Nesse sentido, para essa parte de sua tarefa, você e sua equipe devem construir as representações em série de Maclaurin para as funções $f(x)=\cos(x)$ e $g(x)=\cos(3x)$, bem como as representações em série de Taylor centradas em $\pi/3$ para estas mesmas funções. Além disso, para a função f, tomando a série de Maclaurin correspondente, deve ser estudado o polinômio de Taylor, centrado na origem e de grau 4, que pode ser construído para obter um erro inferior à 10^{-4} para a aproximação realizada.

Elabore um relatório contendo a resolução detalhada e comentada para os problemas propostos, pois este documento servirá de referência para que

o setor de programação possa estudar as aproximações, por meio das séries de Taylor e de Maclaurin, para outras funções que apresentam propriedades semelhantes às da função trigonométrica cosseno.

Para que seja possível cumprir esse desafio, nesta seção estudaremos conceitos associados à construção de aproximações para funções com base nas séries de Taylor e séries de Maclaurin, bem como os polinômios de Taylor e a avaliação do erro associado.

Prossiga com seus estudos e confira a seguir como podemos associar séries a funções!

Não pode faltar

Como vimos, uma série corresponde à soma dos infinitos termos de uma sequência, a qual pode convergir ou divergir de acordo com seu termo geral. Nosso objetivo agora é analisar como as séries podem ser empregadas na aproximação de funções reais, principalmente a partir das séries de potências, de Taylor e de Maclaurin.

Séries de potências

Uma **série de potências** é uma série na forma

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, em que x é a variável e a_n, com n inteiro não negativo, são constantes chamadas de coeficientes da série. A cada valor de x fixado, podemos obter uma série convergente ou divergente.

Por exemplo, se $a_n = 1$ para todo n, temos $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, ou seja, uma série geométrica que converge para $|x| < 1$, com $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, e diverge para $|x| \geq 1$ (THOMAS, 2012).

No exemplo apresentado, temos uma série de potências centrada em zero. Nesse caso, a série sempre convergirá em seu centro para 1, pois se $x = 0$ então $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + \ldots = 1$.

Logo, ao construir uma série de potências centrada em zero com $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, teremos sua convergência ocorrendo para o termo a_0 quando $x = 0$. Porém, temos ainda a possibilidade de construir uma representação mais geral, na qual a série esteja centrada em qualquer número real k, garantir sempre sua convergência em $x = k$. Assim, segundo Stewart

(2016), a série de potências em $x-k$, a série de potências centrada em k ou em torno de k, é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-k)^n = a_0 + a_1(x-k) + a_2(x-k)^2 + a_3(x-k)^3 + \ldots$.

Vejamos no próximo exemplo como estudar a convergência das séries de potências.

Exemplificando

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Como

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = \frac{n|x|}{n+1} = \frac{|x|}{(n+1)/n} = \frac{|x|}{1+(1/n)},$$

então $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{1+(1/n)} = |x|$. Do teste da razão, $\sum u_n$ converge para $|x|<1$ e diverge para $|x|>1$, nada podemos afirmar para $|x|=1$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, do teste da razão $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, logo, a série converge em $x \in \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, do teste da razão $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = (n+1)|x| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ para $x \neq 0$, então a série diverge para x não nulo e converge em $x = 0$.

Assim, quando desejamos estudar a convergência de uma série de potências, podemos empregar os testes de convergência já estudados, como é o caso do teste da razão e o da raiz, por exemplo. A seleção pelo teste mais adequado, assim como no estudo das séries numéricas, dá-se pelas características dos termos que compõem a série e das conclusões que podem ser obtidas por meio dele.

Faça você mesmo

Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$.

Em relação à convergência das séries de potências centradas em k, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1: Para a série de potências $\sum a_n(x-k)^n$ temos as possibilidades: a série converge apenas quando $x=k$; a série converge para todo x real; ou existe $R>0$ tal que a série converge para $|x-k|<R$ e diverge se $|x-k|>R$. O número R é o raio de convergência da série de potências. Por convenção, $R=0$ para a série que converge em um único ponto e $R=\infty$ se a série converge em todo o seu domínio (ROGAWSKI, 2009). Dos exemplos anteriores, o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ é $R=1$, de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ é $R=\infty$ e de $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ é $R=0$. A série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo x real, com $R=\infty$. Assim, a função $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ está bem definida em todo o $\mathbb{R}$ porque a série converge em $\mathbb{R}$, logo, seu domínio é $\mathbb{R}$. Por outro lado, como $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ converge apenas em $x=0$, a função $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ possui domínio $D(g)=\{0\}$ por ser o único valor para o qual a série converge. Desse modo, uma série de potências $\sum a_n(x-k)^n$ define uma função $f(x)=\sum a_n(x-k)^n$ desde que o domínio de f seja formado apenas pelos valores de x para os quais essa série convirja (STEWART, 2016).

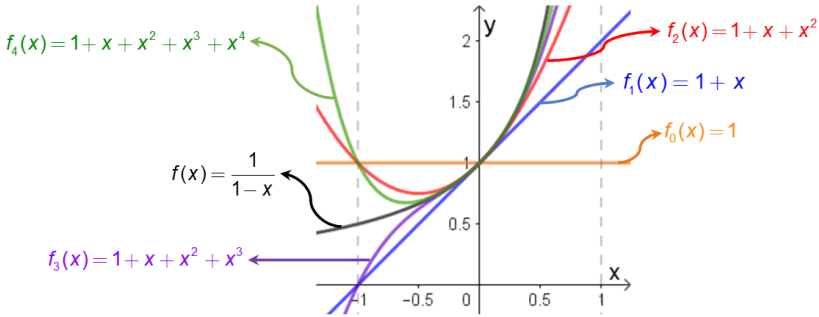
Reflita

Qual deve ser o domínio de $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^n$ para que h esteja bem definida?

Vimos que $f(x)=\frac{1}{1-x}$ pode ser aproximada por $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ para $|x|<1$, porque $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ e esta série converge para $|x|<1$. Dessa forma, a função $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{1-x}$ admite a expansão em série de potências $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. Para auxiliar no estudo de sua convergência, observe o gráfico apresentado na Figura 2.1. Note que a função $f_0(x)$ corresponde a uma aproximação para a função f que inclui apenas o primeiro termo da série $\sum x^n$, enquanto que $f_1(x)$ consiste em uma função polinomial de 1º grau que aproxima f com apenas os dois primeiros termos de $\sum x^n$. De modo análogo, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ correspondem a funções polinomiais que aproximam f a partir, respectivamente, dos três, quatro e cinco primeiros termos da série correspondente, de tal forma que

$f_2(x)$ está associado a um polinômio de 2º grau, $f_3(x)$ a um polinômio de 3º grau e $f_4(x)$ a um polinômio de 4º grau

Figura 2.1 | Estudo da função f e de sua aproximação por série de potências



Fonte: elaborada pela autora.

Note que, para a função f, quanto mais termos da série são considerados, isto é, quanto maior o grau do polinômio que aproxima f, melhor a aproximação para f no intervalo $(-1, 1)$. Além disso, por ser uma série de potências centrada em zero, cada polinômio que aproxima f, em zero, coincide com $f(0)=1$ em $x=0$, de modo que, quanto mais próximo de zero estiver o valor de x, melhor será a aproximação para $f(x)$, sendo exigida, nesse caso, uma menor quantidade de termos da série para obter uma maior precisão na aproximação.

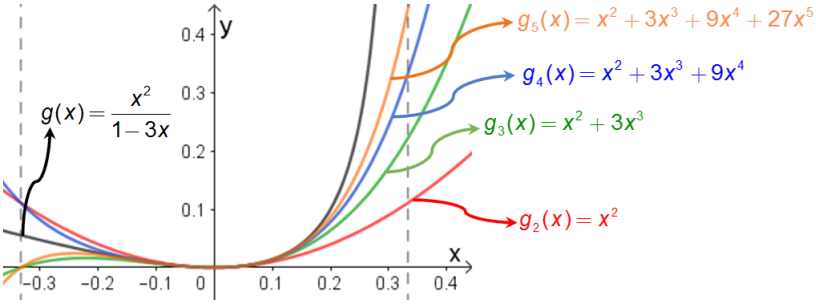
A partir dessa série de potências, podemos construir expansões em séries para outras funções.

Por exemplo, seja $g(x)=\frac{x^2}{1-3x}$. Como $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, para $|x|<1$, então substituindo x por $3x$ na igualdade obtemos $\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(3)^n(x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$. Assim, reescrevendo a expressão da função g e adotando $|3x|<1$, ou $|x|<1/3$, segue que

$$g(x)=\frac{x^2}{1-3x}=x^2\cdot\frac{1}{1-3x}=x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{n+2}=x^2+3x^3+9x^4+27x^5+\ldots$$

Logo, g apresenta uma expansão em série de potências convergentes quando $|x|<1/3$. No gráfico da Figura 2.2 podemos comparar a função g somas parciais originadas da série $\sum 3^n x^{n+2}$.

Figura 2.2 | Estudo da função g e de sua aproximação por série de potências



Fonte: elaborada pela autora.

Para determinar o domínio de g devemos avaliar o intervalo para x em que a série é convergente. Como verificado anteriormente, a série converge para $|x|<1/3$. Dessa forma, g deve ser descrita por $g:\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\frac{x^2}{1-3x}$, a qual está bem definida e admite a representação em série de potências $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{n+2}$.

Assim, a igualdade $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ pode ser empregada na aproximação de funções que envolvam alguma expressão na forma $\frac{1}{1-x}$. Além disso, também podemos empregar as representações em séries de potências para avaliar as derivadas e antiderivadas de funções que apresentem esse tipo de expansão, como é o caso de $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Verifiquemos no próximo resultado de que forma as séries de potências podem contribuir para esse tipo de estudo.

Teorema 2.2 (Diferenciação e integração termo a termo): Considere que $f(x)=\sum a_n(x-k)^n$ tenha raio de convergência $R>0$. Então f é derivável no intervalo $(k-R,\ k+R)$ e sua derivada e antiderivada podem ser calculadas termo a termo. Isto é, para cada $x\in(k-R,\ k+R)$ temos $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-k)^{n-1}$ e $\int f(x)\,dx=A+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-k)^{n+1}$, com A uma constante qualquer, ambas as séries com raio de convergência R (ROGAWSKI, 2009).

Verifiquemos no próximo exemplo como empregar o Teorema 2.2 para o estudo de derivadas.

Exemplificando

Seja função $f(x)=\frac{1}{1-x}$, a qual apresenta a expansão em série de potências como $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ para $|x|<1$. Note que $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, assim, pelo Teorema 2.2, $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, isto é, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, sendo esta expansão válida para $|x|<1$.

Veja que empregamos a diferenciação termo a termo para, a partir da expansão em série para *f*, obter uma expansão em série para sua derivada.

Séries de Taylor e Maclaurin

Suponha que a função *f* admite a expansão em série de potências na forma $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-k)^n$. Queremos determinar os coeficientes a_n, com *n* inteiro não negativo, associados a essa representação. Para isso, note inicialmente que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-k)^n=a_0+a_1(x-k)+a_2(x-k)^2+a_3(x-k)^3+a_4(x-k)^4+a_5(x-k)^5+\ldots$$

Quando aplicamos a função *f* em $x=k$ obtemos

$$f(k)=a_0+a_1(k-k)+a_2(k-k)^2+a_3(k-k)^3+a_4(k-k)^4+a_5(k-k)^5+\ldots=a_0$$

Pelo Teorema 2.2 (diferenciação termo a termo) aplicado à f podemos, a partir de f e conhecendo $f(k)$, calcular as derivadas de f. Vejamos no caso da derivada de primeira ordem de f:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-k)^{n-1}=a_1+2a_2(x-k)+3a_3(x-k)^2+4a_4(x-k)^3+5a_5(x-k)^4+\ldots$$

Aplicando f' em $x=k$ obtemos

$$f'(k)=a_1+2a_2(k-k)+3a_3(k-k)^2+4a_4(k-k)^3+5a_5(k-k)^4+\ldots=a_1$$

Note que, tanto para *f* quanto para f', ao aplicarmos essas funções sobre *k*, identificamos relações entre as imagens de *k* por *f* e f' com os coeficientes da série. Dessa forma, procedendo de forma análoga para as demais derivadas de *f*, e aplicando-as em $x=k$, segue que

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3(x-k)+4\cdot3a_4(x-k)^2+5\cdot4a_5(x-k)^3+\ldots\ \Rightarrow f''(k)=2\cdot1\cdot a_2=2!a_2$$

$$f'''(x)=3\cdot2a_3+4\cdot3\cdot2a_4(x-k)+5\cdot4\cdot3a_5(x-k)^2+\ldots\ \Rightarrow f'''(k)=3\cdot2\cdot1\cdot a_3=3!a_3$$

$$f^{(4)}(x)=4\cdot3\cdot2a_4+5\cdot4\cdot3\cdot2a_5(x-k)+\ldots \Rightarrow f^{(4)}(k)=4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a_4=4!a_4$$

Procedendo desse modo, teremos que o n-ésimo coeficiente a_n está relacionado ao cálculo da derivada de ordem n da função f, aplicada ao ponto $x=k$, de modo que

$$f^{(n)}(k)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2a_n \Rightarrow f^{(n)}(k)=n!a_n \Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(k)}{n!}$$

A última igualdade obtida será válida mesmo no caso de $n=0$. Sendo assim, adotando $0!=1$ e considerando a notação $f^{(0)}(x)=f(x)$, a qual significa que a derivada de ordem zero de uma função f é igual à própria f, podemos sistematizar o seguinte resultado.

Teorema 2.3: Se f admite uma representação ou expansão em série de potências em k, ou seja, se temos $f(x)=\sum a_n(x-k)^n$, com $|x-k|<R$ para algum $R>0$, então seus coeficientes serão dados por $a_n=\frac{f^{(n)}(k)}{n!}$, para todo inteiro não negativo n (STEWART, 2016).

Substituindo a expressão dos coeficientes na série teremos

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}(x-k)+\frac{f''(k)}{2!}(x-k)^2+\frac{f'''(k)}{3!}(x-k)^3+\ldots$$

Esta série é chamada de **série de Taylor da função *f* em *k*** (ou em torno de k ou centrada em k). E quando $k=0$,

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$, a qual recebe o nome especial de série de Maclaurin da função f (ROGAWSKI, 2009).

Assimile

A série de Maclaurin para *f* consiste na série de Taylor centrada em zero para a função *f*, ou seja, a série de Maclaurin é um caso particular da série de Taylor.

Considere, por exemplo, a função $f(x)=e^x$. Queremos determinar a série de Maclaurin para f, assim, devemos calcular f e suas derivadas aplicadas em zero. Note que $f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots=e^x$, o que implica em $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots=e^0=1$. Sendo assim, a série de Maclaurin para f é $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Dessa forma, pelo Teorema 2.3, se a função f admite uma expansão em série de Taylor centrada em zero então essa expansão será da forma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Mas quais são as condições necessárias

para que uma função admita uma expansão em série, coincidindo com sua representação em série de Taylor?

Inicialmente, precisamos que a função em estudo admita todas as suas derivadas. Além disso, a série de potências precisa convergir para a função, ou seja, a sequência das somas parciais da série de potências deve convergir para *f*. Logo, considerando a série de Taylor para *f* centrada em *k*, a sua sequência das somas parciais admite termo geral dado por

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(k)}{i!}(x-k)^i=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}(x-k)+\frac{f''(k)}{2!}(x-k)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n$$

O polinômio $P_n(x)$, de grau n, é denominado **polinômio de Taylor de n-ésimo grau de *f* em *k***. Assim, a função f será o limite de sua série de Taylor no caso de $f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$. Tomando $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ então $R_n(x)$ corresponde ao **resto** da série de Taylor. Dessa forma, para que $P_n(x)$ convirja para $f(x)$, pela expressão $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ devemos ter $R_n(x)$ convergindo para zero (THOMAS, 2012). Apesar de não existir um método geral que se aplique no estudo do limite de $R_n(x)$, podemos empregar o seguinte teorema.

Teorema 2.4: Seja $f(x)$ uma função infinitamente diferenciável no intervalo aberto $I=(k-R,\ k+R)$, em que $R>0$. Suponha que exista uma constante $M\geq 0$ tal que, para todo $n\geq 0$, seja válido $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$ para todo $x\in I$. Então, $f(x)$ é representada por sua série de Taylor $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n$ para todo $x\in I$ (ROGAWSKI, 2009).

Assimile

Se uma função f de uma variável real admite todas as suas derivadas, além de ser tal que f e suas derivadas são todas limitadas, então f admite uma expansão em série de Taylor centrada em $x=k$ e dada por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}(x-k)+\frac{f''(k)}{2!}(x-k)^2+\frac{f'''(k)}{3!}(x-k)^3+\ldots.$$

Por exemplo, vimos que se a função $f(x)=e^x$ admite uma expansão em série de Maclaurin, sua representação será $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Empregaremos o Teorema 2.4 para comprovar que $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Note que a função f é infinitamente diferenciável em seu domínio $\mathbb{R}$. Como e^x é crescente em todo o seu domínio, para qualquer $R>0$ é válido que $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq e^R$ para todo $x=(-R,\ R)$ e todo $n\geq 0$, porque $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|e^x\right|=e^x$, para todo $n\geq 0$, e $e^x\leq e^R$ para todo

$x=(-R,\ R)$. Então, admitindo $M=e^R$ teremos a validade das hipóteses do Teorema 2.4, o que possibilita concluir que, sendo $R>0$ qualquer, a expansão em série de Taylor é válida a todo $\mathbb{R}$ com $f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Podemos estudar as séries de Taylor centrada em valores não nulos, empregando os mesmos resultados estudados. Por exemplo, para determinar a série de Taylor centrada em 3 para $f(x)=e^x$ temos $f^{(n)}(x)=e^x$ para todo $n\geq 0$, o que implica em $f^{(n)}(3)=e^3$ a todo $n\geq 0$. Logo, a série de Taylor centrada em 3 para f é $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^3}{n!}(x-3)^n$. Do teste da razão

$$\left|\frac{\left(e^3/(n+1)!\right)(x-3)^{n+1}}{\left(e^3/n!\right)(x-3)^n}\right|=\left|\frac{e^3(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^3(x-3)^n}\right|=\left|\frac{(x-3)}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}|x-3|\xrightarrow{n\to\infty}0<,$$

e assim, o raio de convergência é $R=\infty$. A partir de uma análise similar à realizada para a série de Maclaurin, podemos concluir, pelo Teorema 2.4, que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^3}{n!}(x-3)^n$.

Vamos estudar um outro exemplo relativo à determinação das séries de Taylor e de Maclaurin. Seja a função $h(x)=\text{sen}(x)$. Note que h é infinitamente diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, assim podemos determinar os coeficientes da série de Maclaurin correspondente, avaliando a função h e suas derivadas aplicadas em zero. Note que: $h(x)=\text{sen}(x)$, $h'(x)=\cos(x)$, $h''(x)=-\text{sen}(x)$, $h'''(x)=-\cos(x)$, $h^{(4)}(x)=\text{sen}(x)$, $h^{(5)}(x)=\cos(x)$, e assim sucessivamente. Aplicando em zero temos: $h(0)=0$, $h'(0)=1$, $h''(0)=0$, $h'''(0)=-1$, $h^{(4)}(0)=0$, $h^{(5)}(0)=1$, e assim sucessivamente, evidenciando um padrão de repetição dos coeficientes em um ciclo de quatro. Logo, a série de Maclaurin para h é dada por:

$$\frac{0}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\ldots=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Veja que $h^{(n)}(x)$ pode ser igual a: $\pm\text{sen}(x)$ ou $\cos(x)$, e apenas a essas funções. Logo, $\left|h^{(n)}(x)\right|\leq 1$ para $x\in\mathbb{R}$, e tomando $M=1$ no Teorema 2.4, podemos concluir a partir desse teorema que $h(x)=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t}{(2t+1)!}x^{2t+1}$. Para aproximar a função $h(x)=\text{sen}(x)$ por polinômios de Taylor a partir da sua representação em série precisamos truncar a representação em série para h. Por exemplo, $P_1(x)=x$, $P_3(x)=x-\frac{1}{3!}x^3$ e $P_5(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$ são polinômios de Taylor de graus 1, 3 e 5, respectivamente, centrados em zero, ou polinômios

de Maclaurin, que podem ser empregados na aproximação da função h. Veja que os índices dizem respeito aos graus dos polinômios considerados.

Observe, no exemplo anterior, que a representação em série para a função $h(x)=\text{sen}(x)$ corresponde a uma série alternada, conforme definição estudada anteriormente. No caso específico desse tipo de série, podemos avaliar o resto gerado pela aproximação utilizando polinômios de Taylor a partir do seguinte teorema.

Teorema 2.5 (Teorema da estimativa de séries alternadas): Se $L=\sum(-1)^{n-1}a_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz $a_{n+1}\leq a_n$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, para todo n inteiro positivo, então o resto $R_n(x)$ é tal que $|R_n(x)|\leq a_{n+1}$ (STEWART, 2016).

Vamos observar a aplicação do Teorema 2.5 no exemplo anterior. Vimos que a função $h(x)=\text{sen}(x)$ pode ser descrita pela série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, a qual é alternada, assim, consideremos $a_n=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Temos que $a_{n+1}\leq a_n$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ para todo inteiro $n\geq 0$ e todo real x, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ para todo real x. Logo, como a série satisfaz às hipóteses do Teorema 2.5, podemos emprega-lo no estudo do erro cometido com a aproximação de h por polinômios de Taylor. Assim, se considerarmos a aproximação de h por $P_5(x)$, em suma, o erro cometido na aproximação deve ser inferior ao valor absoluto do primeiro termo da série que foi descartado na construção desse polinômio, ou seja, o erro máximo é dado por $\left|-\frac{1}{7!}x^7\right|$. Assim, se desejamos, por exemplo, que o maior erro nessa aproximação seja de 0,001, devemos ter $\left|-\frac{1}{7!}x^7\right|<0{,}001$, o que implica em $|x^7|<0{,}001\cdot 7!$, ou ainda, $|x|<\sqrt[7]{5{,}04}\approx 1{,}26$. Assim, para que o erro cometido com a aproximação de h pelo polinômio $P_5(x)$ seja inferior a 0,001, devemos avaliar x real tal que $|x|<1{,}26$. E se desejássemos determinar um intervalo para x no qual a aproximação de h por $P_5(x)$ apresente uma precisão de três casas decimais? Então devemos determinar um intervalo para o qual $\left|-\frac{1}{7!}x^7\right|<0{,}0005$, o que implica em $|x|<1{,}14$.

Porém, note que o Teorema 2.5. só pode ser aplicado nos casos de funções que podem ser aproximadas por séries alternadas que satisfazem às condições do teorema. Para as demais situações, podemos avaliar o resto em associação com o Teorema 2.4.

Faça você mesmo

Se desejarmos aproximar o $sen(\pi/15)$ por um polinômio de Taylor, centrado em zero, de grau 3, para quais valores de x a aproximação terá precisão de 0,0005?

Assim, o estudo das séries de potências, de Taylor e de Maclaurin podem ser empregadas na aproximação de funções, o que, consequentemente, permite a aproximação de determinados números reais associados à função considerando uma precisão preestabelecida.

Dica

Para contribuir com o estudo das séries de Taylor e de Maclaurin, confira os conceitos e exemplos apresentados nas seções 9.7, chamada de "Polinômios de Maclaurin e de Taylor", e 9.8, denominada "Séries de Maclaurin e de Taylor; Séries de Potências", do livro Cálculo: Volume 2, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual. Confira outros exemplos que são apresentados nesse material, complementando os estudos desenvolvidos ao longo desta seção.

Sem medo de errar

No contexto de estudo, você atua em uma empresa que está prestando consultoria a uma companhia que atua no setor de informática construindo programas a serem implementados em drones. A primeira responsabilidade que foi direcionada a você e sua equipe consiste em resolver detalhadamente um problema proposto pelo setor de programação da companhia, que envolve as séries de Taylor e suas características.

Para cumprir essa tarefa, vamos iniciar com a determinar das expansões em série de Maclaurin e em série de Taylor centrada em $\pi/3$ para a função real $f(x)=\cos(x)$. Nesse caso, como f admite todas as suas derivadas, vamos calcular os coeficientes de ambas as séries. No Quadro 2.1 podemos verificar as expressões de f e de suas primeiras derivadas, bem como as imagens dessas funções em 0, para a série de Maclaurin, e em $\pi/3$, para a série de Taylor.

Quadro 2.1 | Cálculo das derivadas e dos coeficientes das séries de Maclaurin e de Taylor para f

Tipo de função	Lei de formação	Avaliação em 0	Avaliação em $\pi/3$
Função original	$f(x)=\cos(x)$	$f(0)=1$	$f(\pi/3)=1/2$
Derivada de 1ª ordem	$f'(x)=-\text{sen}(x)$	$f'(0)=0$	$f'(\pi/3)=-\sqrt{3}/2$
Derivada de 2ª ordem	$f''(x)=-\cos(x)$	$f''(0)=-1$	$f''(\pi/3)=-1/2$
Derivada de 3ª ordem	$f'''(x)=\text{sen}(x)$	$f'''(0)=0$	$f'''(\pi/3)=\sqrt{3}/2$
Derivada de 4ª ordem	$f^{(4)}(x)=\cos(x)$	$f^{(4)}(0)=1$	$f^{(4)}(\pi/3)=1/2$
Derivada de 5ª ordem	$f^{(5)}(x)=-\text{sen}(x)$	$f^{(5)}(0)=0$	$f^{(5)}(\pi/3)=-\sqrt{3}/2$

Fonte: elaborada pela autora.

Para a série de Maclaurin, note que as derivadas de ordem ímpar são nulas, logo os coeficientes das potências de x com expoentes ímpares serão nulos. Além disso, temos uma alternância dos sinais em relação às demais potências de x. Assim, a série de Maclaurin de f é

$$f(x)=1+\frac{0}{1!}x+\frac{(-1)}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{0}{5!}x^5+\ldots=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}$$

A série de Taylor para f não apresenta coeficientes nulos, mas apresenta alternância de sinal e de valores. Assim, temos

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1!}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\ldots$$

Procedendo de forma análoga para a função $g(x)=\cos(3x)$, podemos observar no Quadro 2.2 os coeficientes das séries de Maclaurin e de Taylor centrada em $\pi/3$ correspondentes. Veja que no cálculo das derivadas de g é necessário empregar a regra da cadeia, pois g consiste em uma função composta. Veja, por exemplo, o caso da derivada de primeira ordem de g:

$$g(x)=\cos(3x) \;\Rightarrow\; g'(x)=\left[-\text{sen}(3x)\right]\cdot 3 \;\Rightarrow\; g'(x)=-3\,\text{sen}(3x)$$

Quadro 2.2 | Cálculo das derivadas e dos coeficientes das séries de Maclaurin e de Taylor para g

Tipo de função	Lei de formação	Avaliação em 0	Avaliação em $\pi/3$
Função original	$g(x)=\cos(3x)$	$g(0)=1$	$g\left(3(\pi/3)\right)=-1$
Derivada de 1ª ordem	$g'(x)=-3\,\text{sen}(3x)$	$g'(0)=0$	$g'\left(3(\pi/3)\right)=0$

Tipo de função	Lei de formação	Avaliação em 0	Avaliação em $\pi/3$
Derivada de 2ª ordem	$g''(x)=-3^2\cos(3x)$	$g''(0)=-3^2$	$g''\left(3\left(\pi/3\right)\right)=3^2$
Derivada de 3ª ordem	$g'''(x)=3^3\operatorname{sen}(3x)$	$g'''(0)=0$	$g'''\left(3\left(\pi/3\right)\right)=0$
Derivada de 4ª ordem	$g^{(4)}(x)=3^4\cos(3x)$	$g^{(4)}(0)=3^4$	$g^{(4)}\left(3\left(\pi/3\right)\right)=-3^4$
Derivada de 5ª ordem	$g^{(5)}(x)=-3^5\operatorname{sen}(3x)$	$g^{(5)}(0)=0$	$g^{(5)}\left(3\left(\pi/3\right)\right)=0$

Fonte: elaborada pela autora.

A série de Maclaurin para *g* é dada por

$$g(x)=1+\frac{0}{1!}x+\frac{(-1)\cdot 3^2}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1\cdot 3^4}{4!}x^4+\ldots=1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}3^{2n}x^{2n}$$

enquanto que a série de Taylor para g centrada em $\pi/3$ é

$$\begin{aligned}g(x)&=-1+\frac{0}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{0}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3-\frac{3^4}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\ldots\\&=-1+\frac{3^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{3^4}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{2n}}{2n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Para completar esse estudo, devemos avaliar o polinômio de Taylor de grau 4, centrado em zero, associado a *f*. Para construir um polinômio de grau 4, a partir da série de Maclaurin $f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}$, devemos truncar a série, obtendo o polinômio $P_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$. Para verificar a aproximação que está associada a um erro inferior à $10^{-4}=0{,}0001$, por se tratar de uma série alternada que atende às condições do Teorema 2.5, podemos avaliar o valor absoluto do primeiro termo da série que foi descartado na construção de $P_4(x)$. Assim,

$$\left|-\frac{x^6}{6!}\right|<0{,}0001\Rightarrow\left|\frac{x^6}{6!}\right|<0{,}0001\Rightarrow\left|x^6\right|<0{,}0001\cdot 6!\Rightarrow\left|x^6\right|<0{,}072$$
$$\Rightarrow\left|x\right|<\sqrt[6]{0{,}072}\Rightarrow\left|x\right|<0{,}645$$

Portanto, a aproximação de g pelo polinômio $P_4(x)$ gera um erro inferior a 10^{-4} se $\left|x\right|<0{,}645$.

Finalize esse desafio estruturando a parte do relatório relativa a essa primeira tarefa, acrescentado comentários relativos a cada uma das etapas

necessárias para a resolução do problema e acrescentando os conceitos relacionados a cada uma dessas etapas.

Avançando na prática

Aproximação de funções por polinômios de Taylor

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja preparando uma aula a respeito de funções de uma variável real voltada ao Ensino Médio e pretende empregar softwares de geometria dinâmica para auxiliar nas construções gráficas, tendo em vista que os alunos possam reconhecer os perfis característicos dos gráficos associados às principais funções estudadas na Educação Básica, como as polinomiais, trigonométricas e exponenciais. Durante a preparação dessa aula, você está selecionando algumas funções, com seus respectivos gráficos, para a organização das tarefas. Você sabe que algumas funções podem ser aproximadas por outras, como é o caso da aproximação da função exponencial por polinômios de diferentes graus, o que é possível pelo estudo das séries de Taylor e Maclaurin. Sabendo que a função $f(x)=e^x$ pode ser descrita pela série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos da função f e dos polinômios de Taylor de graus 1, 2 e 3. Compare os gráficos entre si e faça uma análise a respeito da aproximação entre a função f e os polinômios de Taylor. Finalize seu estudo elaborando questões relativas à análise realizada por você, e que também podem ser discutidas com os alunos do Ensino Médio.

Resolução da situação-problema

Da representação para $f(x)=e^x$ pela série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ podemos construir os polinômios de Taylor:

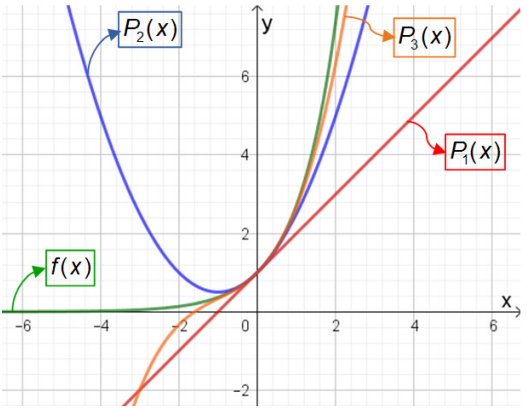
$$P_1(x)=1+x;$$

$$P_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}=1+x+\frac{x^2}{2};$$

$$P_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},$$

os quais, em conjunto com a função f, são representados graficamente na Figura 2.3.

Figura 2.3: Comparação entre os gráficos de $f(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos analisar a representação gráfica da função *f* em comparação com os polinômios de Taylor correspondentes. É possível observar que, quanto maior o grau do polinômio de Taylor, melhor será a aproximação obtida, pois quanto maior o grau do polinômio, mais próximos estaremos da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, a qual converge para a função *f* para todo *x* real, porque o raio de convergência dessa série é $R = \infty$. Assim, intuitivamente podemos observar uma tendência da convergência dos polinômios de Taylor para a função *f*. Assim temos um recurso gráfico que pode auxiliar na ilustração de padrões, bem como na construção de conjecturas, as quais devem ser verificadas com base em demonstrações, como é o caso dos teoremas estudados.

Além disso, podemos observar que para valores de *x* muito próximos de zero, todos os polinômios fornecem uma boa aproximação para *f*, pois, graficamente, podemos observar que os gráficos estão praticamente sobrepostos uns aos outros.

Finalize esse estudo elaborando questões relativas a essas análises, que também podem ser discutidas com os alunos do Ensino Básico a partir das representações gráficas das funções polinomiais selecionadas, com base na série de Taylor de e^x, em comparação com a função exponencial.

Faça valer a pena

1. A representação de funções a partir de séries de potências pode ser empregada, por exemplo, quando desejamos aproximar um valor de uma função considerando uma precisão fixada previamente.
Sabemos que a função $f(x)=\frac{1}{1-x}$ admite uma representação em série de potências, a qual é descrita por:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

para $|x|<1$. Além disso, conforme verificado no Teorema 2.2, podemos empregar as derivadas e integrais para relacionar as funções entre si e obter as funções e/ou suas expansões em séries de potências.

A partir da função f apresentada e de suas propriedades, bem como do enunciado do Teorema 2.2, assinale a alternativa que indica corretamente a expansão em série de potências para a função $g(x)=\ln(1-x)$ e seu respectivo raio de convergência R:

a) A série de potências para g é $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+C$, com C constante real e raio de convergência dado por $R=1$.

b) A série de potências para g é $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+C$, com C constante real e raio de convergência dado por $R=\infty$.

c) A série de potências para g é $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+C$, com C constante real e raio de convergência dado por $R=1$.

d) A série de potências para g é $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}+C$, com C constante real e raio de convergência dado por $R=\infty$.

e) A série de potências para g é $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+C$, com C constante real e raio de convergência dado por $R=0$.

2. Segundo Stewart (2016), a série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático Brook Taylor (1685-1731), o qual publicou, em 1715, suas descobertas a respeito desse conceito em um de seus livros, ainda que essas séries já tivessem sido estudadas anteriormente, em 1668, por outro matemático, James Gregory.
Em relação à representação de funções infinitamente diferenciáveis a partir de séries de Taylor e de Maclaurin, analise as seguintes afirmações:

I. A série de Taylor centrada em $x=3$ para a função $p(x)=e^{2x}$ é representada por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^ne^6}{n!}(x-3)^n$.

II. A série de Maclaurin associada à função $q(x)=\text{sen}(\pi x)$ é representada na forma por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^n}{n!}x^n$.

III. O polinômio de Taylor de terceiro grau, centrado em $x=4$, para a função $r(x)=\sqrt{x}$ é dado por $P_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$.

A respeito das afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmação II está correta.

b) Apenas a afirmação III está correta.

c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

d) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

e) As afirmações I, II e III estão corretas.

3. A respeito da representação em séries de potências para funções, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

( ) O raio de convergência associado à representação em séries de potências para $f(x)=\frac{1}{1+x}$ é igual a $R=\infty$.

( ) O raio de convergência associado à representação em séries de potências para $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$ é igual a $R=1$.

( ) O raio de convergência associado à representação em séries de potências para $h(x)=\frac{2}{3-x}$ é igual a $R=3$.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta das classificações, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V – F – F.

b) V – F – V.

c) V – V – F.

d) F – F – V.

e) F – V – V.

Seção 2.2

Série de Fourier para funções elementares

Diálogo aberto

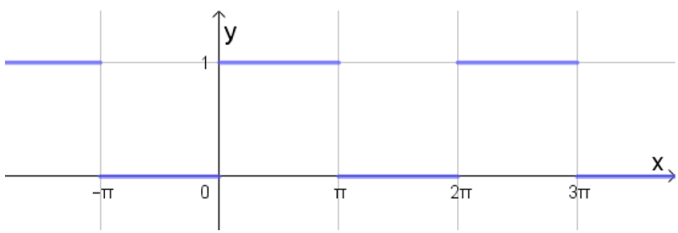
Prezado aluno (a), estudamos anteriormente as séries de Taylor e Maclaurin, observando que estas podem ser empregadas na representação de funções. Assim, podemos utilizar tanto a expressão original da função quanto sua representação em série, de modo que podemos selecionar a representação mais conveniente de acordo com a situação.

No entanto, vimos que esses tipos de séries envolvem potências de uma variável, de modo que podemos identificar termos polinomiais compondo a representação em série. Porém, será possível construir uma representação para funções a partir de séries que dependam de outros tipos de funções, como as trigonométricas, por exemplo?

Diante desse questionamento, estudaremos nesta seção as chamadas séries de Fourier. Essas séries podem ser empregadas, dentre outros, na resolução de equações diferenciais parciais, que correspondem a equações que envolvem funções de duas ou mais variáveis reais e suas derivadas parciais, permitindo a resolução de problemas a respeito de escoamento de fluidos, condução de calor, movimentos de cordas elásticas ao longo do tempo, entre outros.

Diante disso, prosseguindo com o atendimento à empresa de tecnologia que produz softwares a serem implementados em drones para captura de imagens, você e sua equipe devem cumprir a segunda etapa de sua tarefa, a qual está relacionada ao estudo das séries de Fourier. Assim, vocês devem estudar a função periódica definida por $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<\pi\\ 0, & -\pi\leq x<0\end{cases}$, a qual possui período 2π e cuja representação gráfica é dada conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4 | Representação gráfica para a função *f*



Fonte: elaborada pela autora.

Faça um estudo a respeito da continuidade e da periodicidade da função *f*, construindo a expansão em série de Fourier correspondente. De que forma o conhecimento da expansão em série de Fourier para *f* pode auxiliar na representação em série para o número irracional 2π ?

Construa um relatório contendo o estudo da função *f* e de sua representação em série de Fourier, bem como o processo de obtenção da série numérica que possibilita a representação do número irracional 2π . Procure descrever detalhadamente cada um desses procedimentos, para que esse relatório possa ser usado como referência para a construção da representação de séries de Fourier associadas a outras funções periódicas e contínuas por partes.

Para cumprir esse desafio, nesta seção estudaremos as séries de Fourier, observando que condições devem ser satisfeitas para que haja a convergência para a função em estudo, em associação com as definições para funções periódicas e contínuas por partes.

Dê continuidade aos seus estudos, agora a respeito de séries de Fourier, para que possa cumprir o desafio proposto!

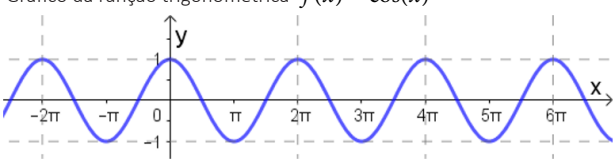
Não pode faltar

Na seção anterior discutimos a respeito da possibilidade de aproximar uma função por meio de uma série infinita, principalmente por meio do emprego das séries de potências, e mais especificamente pelas séries de Taylor e de Maclaurin. No entanto, vimos que, nesses casos, as aproximações são construídas para funções contínuas e diferenciáveis. Porém, e no caso de funções descontínuas? Também é possível construir aproximações por meio de séries? Refletindo a respeito desse tema, nesta seção estudaremos a categoria das séries de Fourier. Para isso, precisaremos de algumas definições iniciais.

Funções periódicas e contínuas por partes

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é classificada como periódica com período P se $f(x+P)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (FIGUEIREDO, 2012). Como exemplo de função periódica podemos destacar a função trigonométrica cosseno, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $f(x)=\cos(x)$, cujo gráfico é destacado na Figura 2.5.

Figura 2.5 | Gráfico da função trigonométrica $f(x)=\cos(x)$



Fonte: elaborada pela autora.

Observe que o período da função cosseno é igual a 2π, pois $f(x+2\pi)=f(x)$ para todo x real, ou ainda, pela análise gráfica, a cada intervalo de comprimento 2π temos a repetição de um comportamento específico. Note que poderíamos adotar também 4π como um período da função cosseno, no entanto, 2π é o menor valor positivo para o qual essa função é periódica, por isso 2π é chamado de período fundamental da função trigonométrica cosseno (BOYCE; DIPRIMA, 2018). Em geral, o período fundamental é chamado apenas de período.

Para a construção da expansão em série de Fourier para uma dada função, empregaremos as funções trigonométricas $\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)$ e $\cos\left(n\pi x/L\right)$, com n natural e L um real positivo. Sabemos que $\cos(x)$ tem período 2π. Quando tomamos a função $\cos(kx)$, com k inteiro, seu período será dado por $2\pi/k$. Para ilustrar essa afirmação, estude, por exemplo, os casos em que $k=2$ e $k=3$, associando-os com as representações gráficas correspondentes. Tomando $\cos\left(n\pi x/L\right)$, com $k=n\pi/L$ então o período será $\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{n\pi/L}=\frac{2\pi}{1}\cdot\frac{L}{n\pi}=\frac{2L}{n}$. Logo, o período (fundamental) de $\cos\left(n\pi x/L\right)$ é $P=2L/n$. Analogamente, podemos verificar que o período de $\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)$ é também $P=2L/n$.

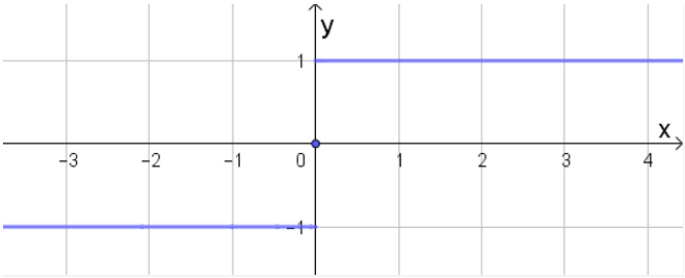
Além da periodicidade, para estudar as séries de Fourier precisamos considerar funções que sejam contínuas ao menos em subintervalos de seus domínios, configurando a classe das funções contínuas por partes.

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada de contínua por partes, ou seccionalmente contínua, se f apresentar apenas um número finito de descontinuidades (de primeira espécie ou de salto) em qualquer intervalo limitado de seu domínio (FIGUEIREDO, 2012).

Saiba mais

Uma função f tem descontinuidade do tipo salto, ou de primeira espécie, em um ponto x_0 quando os limites laterais nesse ponto existem, mas são diferentes (STEWART, 2016), como é o caso da função sinal de x, definida por $sign:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $sign(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ e cujo gráfico é ilustrado na Figura 2.6. Veja que a função sinal tem uma descontinuidade em $x=0$.

Figura 2.6 | Gráfico da função sinal de *x*

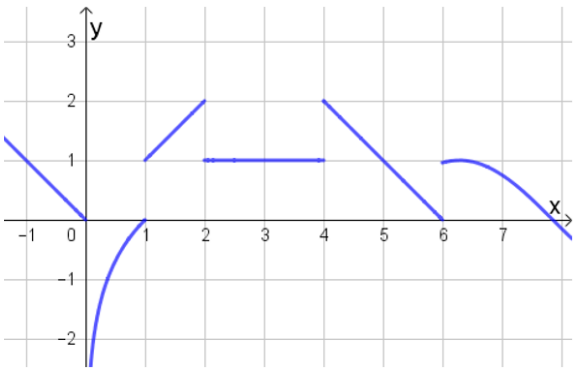


Fonte: elaborada pela autora.

Ou ainda, f é contínua por partes em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo puder ser dividido em um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de tal forma que f seja contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, e f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Note, por exemplo, que a função p cujo gráfico é indicado na Figura 2.7 não é contínua por partes. Veja que p apresenta um número finito de descontinuidades do tipo salto no intervalo $[1,7]$. Por outro lado, como o limite lateral de p à direita de zero não existe, pois p tende a $-\infty$ quando x tende a zero pela direita, temos uma descontinuidade que não pode ser classificada como de primeira espécie ou do tipo salto. Dessa forma, a função p não é contínua por partes.

Figura 2.7 | Gráfico da função *p*



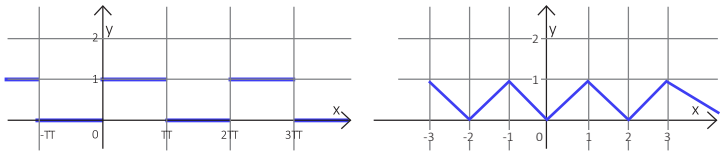
Fonte: o autor.

Exemplificando

Considere a função $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $m(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

com $m(x)=m(x+2\pi)$, e cujo gráfico é apresentado na Figura 2.8 (a). Veja que a função m é contínua por partes e tem período 2π.

Figura 2.8 | Gráfico de funções contínuas por partes e periódicas



(a) Gráfico da função *m* (b) Gráfico da função *n*

Fonte: elaborada pela autora.

Por outro lado, seja a função $n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $n(x)=|x|$, para $|x|\leq 1$, e periódica de período 2, conforme o gráfico da Figura 2.8 (b). Essa função também é contínua por partes e apresenta período igual a 2.

A partir dessas definições, podemos identificar que tipos de funções apresentam expansões em série de Fourier convergentes.

Séries de Fourier

A **série de Fourier** para uma função f é da forma $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)+b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$, desde que essa soma infinita convirja para f para cada valor de x. Os termos a_n e b_n são denominados coeficientes de Fourier da função f (THOMAS, 2009). No entanto, para garantir que a função f admita uma expansão em série de Fourier convergente, ou seja, que f coincida com sua expansão em série, é necessário que algumas condições sejam satisfeitas, conforme o resultado a seguir.

Teorema 2.6: Suponha que f e f' sejam contínuas por partes no intervalo $[-P,P]$. Além disso, suponha que f esteja definida fora do intervalo $[-P,P]$ de tal forma que seja periódica com período $2P$. Então f tem uma expansão em série de Fourier na forma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)+b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right),$$

cujos coeficientes a_n e b_n são dados, respectivamente, pelas expressões

$$a_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx,\quad \text{para } n=0,1,2,3,...$$

$$b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P}f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx,\quad \text{para } n=1,2,3,...$$

Nesse caso, a série de Fourier converge para f em todos os pontos x nos quais f é contínua, e converge para $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ nos pontos em que f é descontínua (BOYCE; DIPRIMA, 2018). O termo $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ corresponde ao valor médio dos limites à direita e à esquerda em x para f.

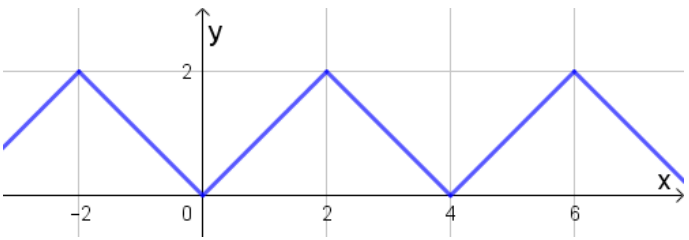
Reflita

Da conclusão do Teorema 2.6 a respeito da convergência, é possível afirmar que f converge para $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ tomando qualquer x no domínio de f, independentemente de ser um ponto em que f é contínua ou descontínua? Por quê?

A demonstração do Teorema 2.6 pode ser verificada no capítulo 3, "Convergência das séries de Fourier", do livro Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, de Djairo Guedes de Figueiredo. Uma outra demonstração pode ser conferida na seção A2.3, "Demonstração do teorema da seção 9.4", do livro "Um Curso de Cálculo: volume 4", que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

A partir do Teorema 2.6, podemos identificar séries de Fourier associadas a funções. Por exemplo, seja a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $m(x)=\begin{cases}-x, & -2\le x<0\\ x, & 0\le x<2\end{cases}$, periódica com $g(x)=g(x+4)$, ou seja, de período $2P=4$, e cujo gráfico é apresentado na Figura 2.9. Assim, note que g é contínua por partes e periódica. Além disso, a função g' é contínua por partes, pois existe apenas um número finito de descontinuidades em cada subintervalo de comprimento igual a 4. Logo, a função g, pelo Teorema 2.6, admite uma expansão em série de Fourier convergente.

Figura 2.9 | Gráfico da função g de período $2P=4$



Fonte: elaborada pela autora.

Agora, vamos determinar a série de Fourier correspondente a g. Para isso, queremos identificar os coeficientes a_n e b_n de tal forma que $g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)+b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$. Empregaremos as expressões para os coeficientes a_n e b_n conforme o Teorema 2.6. Inicialmente, determinemos o coeficiente a_0, ou seja, a_n para $n=0$, com $2P=4$ ou $P=2$:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\cos(0)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}g(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}g(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{2}\left[-0+\frac{(-2)^2}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{2^2}{2}-0\right]=2$$

Calculemos agora a_n para $n>0$. Para isso, vamos calcular previamente a integral indefinida a seguir por meio da técnica de integração por partes:

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=x\left(\frac{\text{sen}\left(n\pi x/2\right)}{n\pi/2}\right)-\int\left(\frac{\text{sen}\left(n\pi x/2\right)}{n\pi/2}\right)dx=\frac{2x}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\frac{2}{n\pi}\int\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{2x}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+C_1=\frac{2x}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+C_1$$

com C_1 constante real. De posse dessa informação, segue que:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[0+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(0)+\frac{4}{n\pi}\text{sen}(-n\pi)-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(-n\pi)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{4}{n\pi}\text{sen}(n\pi)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)-0-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(0)\right]=(*)$$

Observe que $\cos(0)=1$. Além disso, $sen(-n\pi)=sen(n\pi)=0$ para todo natural $n\geq 1$. Agora, para a função trigonométrica cosseno, inicialmente observe que $\cos(-n\pi)=\cos(n\pi)$ para todo n natural, além disso, veja que $\cos(n\pi)=1$ sempre que n for um natural par, enquanto que $\cos(n\pi)=-1$ no caso de n ser um natural ímpar, o que implica em $\cos(n\pi)=(-1)^n$ para todo natural $n\geq 1$. Sendo assim, de $(*)$ obtemos

$$a_n = -\frac{1}{2}\left[0 + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(0) + \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}(-n\pi) - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(-n\pi)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - 0 - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(0)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi^2}\right]$$
$$= -\frac{2}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{2}{n^2\pi^2}$$
$$= -\frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[-1 + (-1)^n\right] = \begin{cases} -8/n^2\pi^2, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Logo, $a_n = -8/n^2\pi^2$ para n ímpar e $a_n = 0$ para n par.

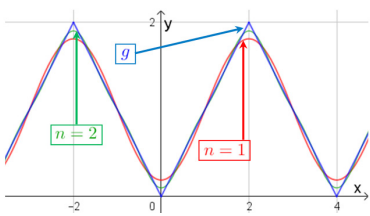
Por outro lado, calculando o termo b_n por meio da integral correspondente e empregando um argumento análogo do caso de a_n, podemos verificar que $b_n = 0$ para todo natural $n \geq 1$.

Portanto, a série de Fourier correspondente à função g é dada por

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + b_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \ldots$$
$$= \frac{2}{2} + \left(-\frac{8}{1^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 0 + 0 + 0 - \frac{8}{3^2\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 0 + 0 + 0 - \frac{8}{5^2\pi^2}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots\right)$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5^2}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots\right)$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)$$

Na Figura 2.10 podemos comparar o gráfico da função g com suas aproximações por meio das somas parciais definidas a partir da série de Fourier quando admitimos apenas os dois e três primeiros termos da soma infinita, respectivamente, ou seja, quando tomamos as aproximações dadas por $P_2(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ e $P_3(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{8}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

Figura 2.10 | Comparação entre g e as somas parciais da série de Fourier



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos observar que um aumento na quantidade de termos da soma infinita implica em uma melhor aproximação para g, ilustrando a convergência da série de Fourier correspondente à função g.

Assimile

Para identificar a série de Fourier associada a uma função f que apresenta todas as condições necessárias, conforme o Teorema 2.6, precisamos calcular os coeficientes a_n e b_n por meio do cálculo de integrais definidas associadas à função em estudo e envolvendo o período desta.

Note que ao serem satisfeitas as condições do Teorema 2.6,a série de Fourier obtida por meio das expressões presentes no teorema convergem para a função em estudo. Assim, desde que as condições do Teorema 2.6 sejam satisfeitas, podemos garantir a existência de uma série de Fourier convergente para a função considerada.

Dica

Para complementar os estudos a respeito das séries de Fourier, confira o exemplo destacado na seção 4.4, intitulada "Séries de Fourier" e localizada entre as páginas 34 e 38, do trabalho de conclusão de curso.

NAZARI, L. F. **Séries de Fourier e o fenômeno de Gibbs**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade de Santa Catarina, Florianópolis.

Sem medo de errar

Você e sua equipe estão em processo de atendimento a uma empresa de tecnologia que produz softwares a serem implementados em drones voltados à captação de imagens. Nesse atendimento, a segunda tarefa de sua equipe consiste em desenvolver um estudo detalhado a respeito de série de Fourier com a produção de um relatório, o qual será utilizado pela empresa como um direcionamento para outros trabalhos semelhantes.

Essa segunda etapa da sua tarefa consiste em estudar a função $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<\pi\\ 0, & -\pi\leq x<0\end{cases}$, a qual é periódica de período 2π, como podemos observar no gráfico presente na Figura 2.4, em que existe um perfil que se repete ao longo do domínio da função a cada intervalo de comprimento 2π. Nesse caso, temos que $f(x+2\pi)=f(x)$ para todo x real. Essa função é também conhecida como onda quadrada (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Como o período da função f é $2P=2\pi$, ou $P=\pi$, f é contínua por partes, porque existe uma quantidade finita de descontinuidades a cada intervalo de comprimento 2π em seu domínio, além de sua derivada f' ser também contínua por partes pela limitação na quantidade de descontinuidades em cada intervalo limitado do domínio, pelo Teorema 2.6 podemos afirmar que f admite uma expansão em série de Fourier convergente. Diante disso, podemos calcular os coeficientes de Fourier com base no Teorema 2.6.

A série de Fourier de f assume a forma $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$ com coeficientes a_n e b_n dados pelas integrais definidas indicadas no Teorema 2.6. Como $P=\pi$, calculemos os coeficientes da série de Fourier. No caso de a_0 temos $\cos\left(0\pi x/\pi\right)=1$ e:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\,dx=0+\frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi-0)=1$$

No caso dos demais coeficientes, vejamos inicialmente que $n\pi x/\pi=nx$, e assim, $\int\cos(nx)\,dx=(1/n)\operatorname{sen}(nx)+C_1$ e $\int\operatorname{sen}(nx)\,dx=-(1/n)\cos(nx)+C_2$. Logo, para a_n com $n\geq 1$ segue que:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(nx)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=0+\frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}(n\pi)-\operatorname{sen}(0)\right]=0$$

porque $\operatorname{sen}(n\pi)=0$ para todo natural $n\geq 1$. E para b_n com $n\geq 1$ obtemos:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx=0+\frac{1}{n\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}\left[-\cos(n\pi)+\cos(0)\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[-\cos(n\pi)+1\right]$$

Temos $\cos(n\pi)=1$ para n um natural par, o que implica em $-\cos(n\pi)+1=-1+1=0$ para n par. Por outro lado, $\cos(n\pi)=-1$ para n natural ímpar, então $-\cos(n\pi)+1=-(-1)+1=2$ para n ímpar. Assim,

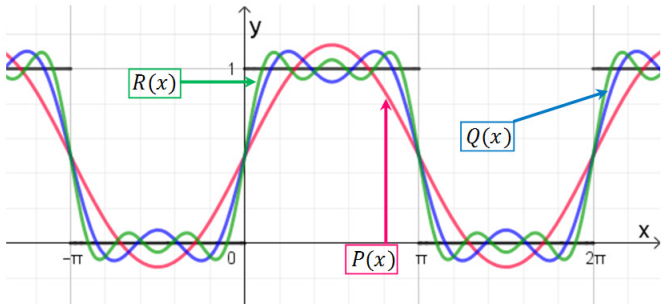
$-\cos(n\pi)+1=\begin{cases}0,\ n\text{ par}\\2,\ n\text{ ímpar}\end{cases}$. Logo, o coeficiente b_n é $b_n=\begin{cases}0,\ n\text{ par}\\\frac{2}{n\pi},\ n\text{ ímpar}\end{cases}$.

Consequentemente, a série de Fourier para f é dada por

$$f(x)=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{\pi}sen(x)+\frac{2}{3\pi}sen(3x)+\frac{2}{5\pi}sen(5x)+\frac{2}{7\pi}sen(7x)+...\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(sen(x)+\frac{1}{3}sen(3x)+\frac{1}{5}sen(5x)+\frac{1}{7}sen(7x)+...\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left((2n-1)x\right)\right)$$

Considerando as funções $P(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\text{sen}(x)$, $Q(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\text{sen}(x)+\frac{2}{3\pi}\text{sen}(3x)$ e $R(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\text{sen}(x)+\frac{2}{3\pi}\text{sen}(3x)+\frac{2}{5\pi}\text{sen}(5x)$, construídas a partir dos dois, três e quatro primeiros termos da série de Fourier correspondente a f, respectivamente, ou seja, associadas às somas parciais da série de Fourier, podemos observar pelo gráfico presente na Figura 2.11 a tendência de convergência da série para f quando aumentamos a quantidade de termos da soma. Assim, quanto mais termos da série de Fourier consideramos, melhor será a aproximação para o perfil do gráfico da função f, a "onda quadrada", de modo que a aproximação pela série de Fourier é contínua ainda que a função f apresente pontos de descontinuidade.

Figura 2.11 | Comparação entre f e as somas parciais da série de Fourier



Fonte: elaborada pela autora.

Agora, o objetivo é empregar a série de Fourier correspondente à f para identificar uma representação em série correspondente ao número irracional 2π. Sabemos que $0<1<\pi$ e, por isso, pela definição da f, $f(1)=1$. Assim, da série de Fourier para f em 1 temos

$$1=f(1)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left((2n-1)1\right)\right) \Rightarrow 1-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left(2n-1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left(2n-1\right)\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left(2n-1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\right) \quad \Rightarrow \quad 2\pi = 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\right)$$

Dessa forma, o número 2π pode ser aproximado pela série

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\right) = 8\ \operatorname{sen}(1)+\frac{8}{3}\operatorname{sen}(3)+\frac{8}{5}\operatorname{sen}(5)+\frac{8}{7}\operatorname{sen}(7)+\ldots$$

Veja que, empregando uma calculadora científica obtemos a aproximação $2\pi \approx 6{,}2831853$, enquanto que pelos quatro primeiros termos da série temos $2\pi \approx 6{,}3246508$. Assim, além da possibilidade de aproximar funções por meio de séries, a partir do conceito e dos resultados correspondentes à série de Fourier, podemos ainda empregar essas séries na aproximação de números irracionais, estabelecendo uma relação com a função em estudo e os conjuntos que compõem sua definição (domínio e imagem).

Após esses estudos, para finalizar a segunda etapa de sua tarefa, organize os dados coletados em um relatório descritivo, detalhando cada um dos passos necessários para a construção da série de Fourier para a função *f*, indicando os conteúdos correspondentes, bem como o procedimento empregado na identificação de uma série que caracteriza o número irracional 2π. Complemente seu relatório indicando algumas das aplicações das ondas quadradas relativas ao processamento de sinais e à eletrônica, estabelecendo uma relação com a transmissão dos sinais com os drones para captura de imagens.

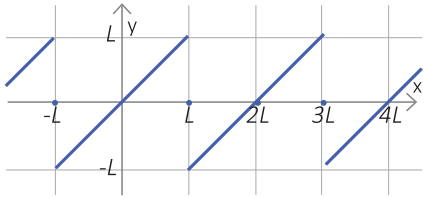
Avançando na prática

Séries de Fourier e circuitos elétricos

Descrição da situação-problema

Imagine que você precisa atender a um escritório de engenharia da computação no sentido de contribuir com um estudo a respeito da série de Fourier, a qual é empregada na resolução de problemas voltados a circuitos elétricos utilizados em sistemas computacionais, sendo esta sua principal área de atendimento. Nos problemas estudados pelo escritório, são adotadas muitas funções descontínuas devido à avaliação das correntes elétricas nos sistemas, como é o caso da onda "dente de serra", descrita de forma genérica por $d(x)=\begin{cases} x, & -L<x<L \\ 0, & x=-L \text{ e } x=L \end{cases}$, periódica de período $2P=2L$, ou $P=L$, sendo L um real positivo, e cujo gráfico é indicado na Figura 2.12.

Figura 2.12 | Gráfico da função que descreve a onda "dente de serra"



Fonte: elaborada pela autora.

A função d admite uma expansão em série de Fourier convergente? Qual é a série de Fourier associada? Quais são as vantagens e desvantagens em definir uma função a partir de um período genérico $2L$? Conclua seu estudo construindo um roteiro a respeito da resolução do problema proposto e com as análises realizadas, de modo a finalizar o atendimento ao escritório de engenharia de computação.

Resolução da situação-problema

Como a função d tem período $2P = 2L$, sendo contínua por partes, podemos concluir que d admite uma expansão em série de Fourier convergente. Na construção da série de Fourier associada, precisamos calcular os coeficientes a_n e b_n correspondentes. Assim, temos:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} d(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\,dx = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right) = 0$$

Para o cálculo de a_n, com $n>1$, vejamos inicialmente que $\cos(-kx) = \cos(kx)$ para todo k real então, em particular para $k = n\pi/L$, com $n>1$ natural, $\cos\left(-n\pi x/L\right) = \cos\left(n\pi x/L\right)$. Consequentemente, $(-x)\cos\left(-n\pi x/L\right) = (-x)\cos\left(n\pi x/L\right) = -\left(x\cos\left(n\pi x/L\right)\right)$. Sendo assim,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} d(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = (I)$$

Adotando a mudança $y = -x$ teremos $x = -y$ e $dx = -dy$, o que implica em

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{L}^{0} (-y)\cos\left(\frac{n\pi(-y)}{L}\right)(-1)\,dy = -\frac{1}{L}\int_{L}^{0} (-y)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} (-y)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} y\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy = (II)$$

Substituindo a expressão (II) em (I) segue que

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} y\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Além disso, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} d(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}$.

Logo, a série de Fourier para d é $d(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$. De que forma essa definição genérica pode contribuir com estudos que envolvam funções com um perfil semelhante? Como podemos tratar de forma genérica esse problema? Conclua as análises solicitadas e organize o relatório descritivo que será encaminhado ao escritório para finalizar o atendimento.

Faça valer a pena

1. As séries de Fourier podem ser empregadas na aproximação de funções que apresentam determinadas características de modo que, enquanto os coeficientes da série de Taylor são obtidos a partir da derivação, os coeficientes da série de Fourier são obtidos por um processo de integração envolvendo a função em estudo.
A respeito desse tema, considere as séries apresentadas no que segue:

I. $1 + sen(x) + sen^2(x) + sen^3(x) + sen^4(x) + \ldots$

II. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{1}{4}sen(2x) - \frac{1}{5}\cos(3x) + \ldots$

III. $\cos(x) + sen(x) - \cos(2x) - sen(2x) + \cos(3x) + \ldots$

Qual(is) das séries apresentadas pode(m) ser classificada(s) como série(s) de Fourier?
a) Apenas a série indicada no item I.
b) Apenas a série indicada no item III.
c) Apenas as séries indicadas nos itens I e II.
d) Apenas as séries indicadas nos itens II e III.
e) As séries indicadas nos itens I, II e III.

2. Analise as funções apresentadas no que segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

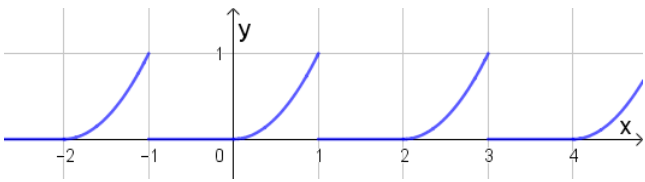
$$h(x)=\begin{cases}0, & -3\le x<-1\\ 2, & -1\le x<1\end{cases}$$

Considere que essas funções sejam estendidas em seu domínio de modo a tornarem-se periódicas. Em relação a essas funções, analise as seguintes afirmações:
I. A função f consiste em uma função contínua em todo o seu domínio, periódica de período $2P=2$.
II. A função g é contínua por partes em seu domínio, além de ser periódica de período $2P=\pi$.
III. A função h é contínua por partes em seu domínio, além de ser periódica de período $2P=4$.

A respeito das afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:
a) Apenas a afirmação II está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
d) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
e) As afirmações I, II e III estão corretas.

2. Quando estamos trabalhando com funções reais periódicas, contínuas ou contínuas por partes, de modo que sua derivada de primeira ordem seja, ao menos, contínua por partes, podemos construir expansões em séries de Fourier convergentes, o que possibilita a identificação de aproximações para as funções em estudo. Com base nesse tema, considere a função p descrita pela seguinte representação gráfica indicada na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Gráfico correspondente à função *p*



Fonte: elaborada pela autora.

Sabemos que essa função p é contínua por partes e periódica, derivada da função quadrática $f(x)=x^2$, conforme as informações que podem ser extraídas a partir de sua representação gráfica.

Considerando as informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente a representação em série de Fourier para a função p apresentada:

a)

$$p(x)=\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)-\frac{4}{\pi^3}\operatorname{sen}(\pi x)+\frac{2}{4\pi^2}\cos(2\pi x)-\frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\ldots$$

b)

$$p(x)=\frac{1}{6}+\frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)-\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(3\pi x)-\frac{3}{4\pi}\operatorname{sen}(4\pi x)\ldots$$

c)

$$p(x)=\frac{1}{6}+\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)-\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(3\pi x)+\ldots$$

d)

$$p(x)=\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)+\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(3\pi x)+\ldots$$

e)

$$p(x)=\frac{1}{6}+\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)-\frac{4}{\pi^2}\cos(2\pi x)-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}(2\pi x)+\frac{4}{\pi^2}\cos(3\pi x)+\ldots$$

Seção 2.3

Série de Fourier para funções especiais

Diálogo aberto

Caro (a) aluno (a), nas seções anteriores investigamos a possibilidade de aproximar funções a partir de séries de potências, como foi o caso das séries de Taylor e de Maclaurin, ou na forma de somas infinitas envolvendo as funções trigonométricas seno e cosseno, como é o caso das séries de Fourier, cada qual com suas hipóteses específicas.

Em alguns dos exemplos estudados na seção anterior observamos que, na expansão em série de Fourier para algumas funções, alguns dos coeficientes eram nulos, de tal forma que a série de Fourier correspondente envolvia apenas senos ou apenas cossenos. Por que isso ocorre? Está relacionado às propriedades das funções consideradas? E quais seriam esses tipos de propriedades que permitem uma simplificação no processo de identificação das séries de Fourier correspondentes?

Diante desses questionamentos, considerando o contexto de atendimento à empresa de tecnologia associada à produção de drones voltados à captura de imagens, na terceira e última etapa desse atendimento, você e sua equipe devem resolver alguns problemas envolvendo séries de Fourier e tipos especiais de funções, como as funções do tipo "dente de serra".

As funções do tipo "dente de serra", ou "onda dente de serra", são empregadas no estudo de conversores analógicos-digitais, circuitos, osciladores de relaxação com tipos específicos de transistores, entre outros, estando presentes nos mais variados problemas que envolvem circuitos elétricos, como é o caso dos elementos que compõem os drones ou outros aparelhos eletrônicos.

Nesse sentido, a terceira parte da tarefa a ser executada por sua equipe consiste em estudar a função $f(x)=x$, para $0\leq x\leq \pi$, e construir as representações em série de Fourier de senos e em série de Fourier de cossenos, ou seja, construir as extensões da função f para funções periódicas pares e ímpares, apresentando, inclusive, as representações gráficas correspondentes a essas duas extensões, bem como as aproximações em série associadas. Elabore um relatório com a descrição detalhada dos procedimentos para obtenção das extensões periódicas de f, bem como as representações em séries de Fourier correspondentes.

Por fim, você estará apto a finalizar o atendimento à empresa de tecnologia. Logo, você e sua equipe deverão finalizar o relatório técnico, o qual deve conter as resoluções detalhadas para os três problemas apresentados

pelo setor de programação, finalizando com a indicação dos conteúdos que são necessários para a resolução de cada problema para que o setor possa selecionar as bibliotecas correspondentes na elaboração dos algoritmos.

Assim, para cumprir a última etapa de seu desafio, nesta seção, estudaremos as propriedades de funções que permitem a identificação de expansões em séries de Fourier que envolvam apenas senos ou cossenos, ou seja, que empregue apenas uma dessas funções trigonométricas nas somas infinitas, por meio das definições de funções pares e ímpares, bem como as extensões que podem ser construídas nesse sentido. Prossiga em seus estudos e finalize o desafio proposto a você a respeito das séries de Fourier!

Não pode faltar

Estudamos, na seção anterior, as séries de Fourier, as quais podem ser empregadas na aproximação de funções periódicas e contínuas por partes. Diferente do que ocorre nas séries de Taylor e Maclaurin, nas quais temos potências de uma variável na composição das somas infinitas, nas séries de Fourier empregamos as funções trigonométricas seno e cosseno.

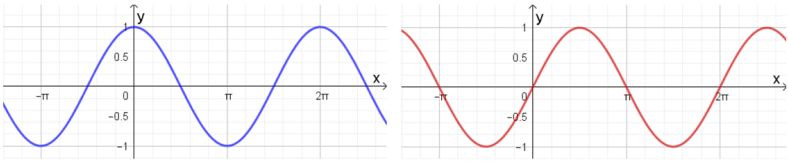
Analisando as séries de Fourier, existe alguma propriedade das funções reais que pode auxiliar na identificação de seus coeficientes? Isto é, existe alguma propriedade que pode simplificar o procedimento de construção das expansões em séries de Fourier para funções reais? Antes de refletir a respeito dessas questões, retomaremos as definições de funções pares e ímpares, as quais serão essenciais em nossos estudos nesta seção.

Funções pares e ímpares

Seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ então podemos classificar f como uma função par. Uma característica desse tipo de função é a simetria de seu gráfico em relação ao eixo y. Por outro lado, se a função f é tal que $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, podemos dizer que f é uma função ímpar. No caso dessa categoria de funções, temos que seus gráficos são simétricos em relação à origem do sistema de coordenadas (FIGUEIREDO, 2012).

Como exemplos podemos destacar as funções trigonométricas seno e cosseno. Note que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\cos(x)$ é uma função par, pois $\cos(x)=\cos(-x)$ e, além disso, graficamente observamos uma simetria em relação ao eixo y, como podemos observar na Figura 2.14(a). Já no caso da função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\operatorname{sen}(x)$ temos um exemplo de função ímpar, pois $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)$ e, além disso, observamos uma simetria em seu gráfico com relação à origem, conforme a Figura 2.14(b).

Figura 2.14 | Gráficos de funções pares e ímpares



(a) Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ (b) Gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$

Fonte: elaborada pela autora.

Faça você mesmo

Mostre que as funções $\cos\left(n\pi x/P\right)$ e $\text{sen}\left(n\pi x/P\right)$, para P positivo e n natural, são classificadas, respectivamente, como par e ímpar.

Considerando as propriedades das funções pares e ímpares, podemos obter algumas implicações sobre as operações envolvendo tais funções, bem como sobre o cálculo de integrais sobre intervalos da forma $[-L, L]$, com L positivo, isto é, intervalos em torno de zero. Assim, podemos estudar o seguinte resultado.

Teorema 2.7: A respeito das funções pares e ímpares temos: a soma de duas funções pares, ou de duas funções ímpares, é uma função par; o produto de duas funções pares, ou de duas funções ímpares, é uma função par; e o produto de uma função par por uma função ímpar resulta em uma função ímpar. (FIGUEIREDO, 2012).

Dessa forma, quando combinamos funções pares e ímpares entre si por meio das operações de adição e multiplicação de funções, podemos obter como resultado novas funções que também podem apresentar essas características. Por exemplo, a função $h(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$, resultante do produto entre as funções seno e cosseno, corresponde a uma função ímpar por ser produto entre uma função par e uma ímpar. Essas e outras análises podem ser realizadas, desde que sejam conhecidas as propriedades das funções envolvidas.

Reflita

Você conseguiria identificar um exemplo de função $p(x) = q(x)r(x)$ que possa ser classificada como par, ou ímpar, de modo que as funções $q(x)$ e $r(x)$ envolvidas não possam ser classificadas como pares ou ímpares?

Vejamos agora a influência dessas classificações sobre o cálculo de integrais definidas.

Teorema 2.8: Seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo limitado. Assim,

(a) Se f é uma função par então $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.

(b) Se f é uma função ímpar então $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$ (FIGUEIREDO, 2012).

Como esses resultados impactam na construção de séries de Fourier associadas a funções pares e ímpares? Vimos que os coeficientes de Fourier são determinados a partir de integrais definidas do produto da função em estudo com funções trigonométricas do tipo seno e cosseno. Assim, o conhecimento dessas informações sobre as propriedades das funções pode simplificar o processo de construção das expansões em série de Fourier auxiliando na interpretação e na identificação dos coeficientes de Fourier correspondentes. Verifiquemos agora como os teoremas anteriores podem favorecer o estudo das séries de Fourier para funções pares e ímpares.

Séries de Fourier para funções pares e ímpares

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de período $2P$, $P>0$, com f e f' contínuas por partes, admite uma expansão em série de Fourier na forma $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$ com coeficientes $a_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx,\ n=0,1,2,\ldots$ e $b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx,\ n=1,2,\ldots$

Suponhamos agora que essa função f seja par. Pelo Teorema 2.7, $f(x)\cos\left(n\pi x/P\right)$ será uma função par e $f(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/P\right)$ será ímpar. Consequentemente, pelo Teorema 2.8, teremos $a_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx=\frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$ e $b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx=0$. Com isso, a série de Fourier para f será dada por $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$, ou seja, corresponde a uma **série de cossenos** para *f*. Por outro lado, se a função *f* for ímpar, então do Teorema 2.7 segue que $f(x)\cos\left(n\pi x/P\right)$ será ímpar e $f(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/P\right)$ será par. Dessa forma, do Teorema 2.8, $b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx=\frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$ e

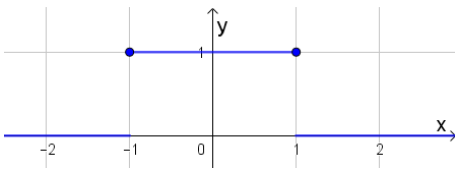
$b_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right) dx = \frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right) dx$. Assim, teremos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right)$, isto é, **uma série de senos** para *f*.

Assimile

Em síntese, para uma função *f* periódica de período $2P$, $P>0$, contínua por partes, se *f* for par, sua expansão em série de Fourier é tal que $a_n = (2/P)\int_0^P f(x)\cos(n\pi x/P)\,dx$, $n \geq 0$, e $b_n = 0$, $n>0$, resultando em série de cossenos. Por outro lado, se *f* for ímpar, sua expansão em série de Fourier admite $a_n = 0$, $n \geq 0$, e $b_n = (2/P)\int_0^P f(x)\,\text{sen}(n\pi x/P)\,dx$, $n>0$, originando uma série de senos (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Vejamos agora como empregar essas informações no estudo da série de Fourier. Seja $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $v(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}$, de período $2P = 4$, ou $P = 2$. Note que *v* é uma função par, fato verificado graficamente pela simetria em relação ao eixo *y* na Figura 2.15.

Figura 2.15 | Gráfico da função v



Fonte: elaborada pela autora.

Por se tratar de uma função par, periódica, com *v* e v' contínuas por partes, temos que *v* admite uma expansão em série de Fourier de cossenos, para isso, precisamos calcular seus coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 v(x)\cos(0)\,dx = \int_0^2 v(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 0\,dx = \int_0^1 1\,dx + 0 = [x]_0^1 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 v(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 v(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + 0 = \left[\frac{\text{sen}(n\pi x/2)}{n\pi/2}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 = \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, a série de Fourier para v é

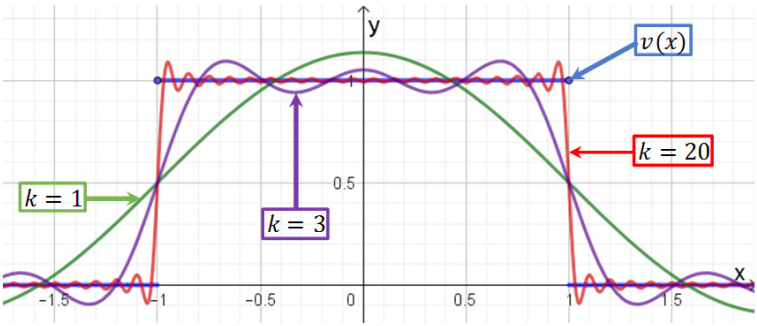
$$v(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+0-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+0+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)+0-\frac{2}{7\pi}\cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right)+\ldots$$

Com exceção de a_0, como temos a presença apenas dos termos a_n em que n é ímpar, e sabendo que um número ímpar pode ser representado na forma $2n-1$ para todo inteiro, a série de Fourier para v pode ser representada na forma

$$v(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)\right).$$

Na Figura 2.16 podemos observar a convergência da soma de Fourier para a função v.

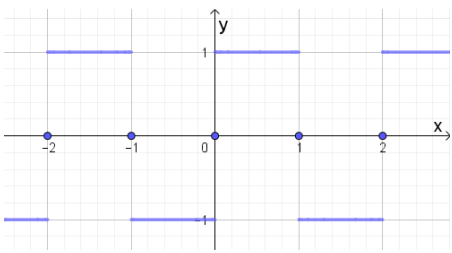
Figura 2.16 | Convergência da soma de Fourier para v



Fonte: elaborada pela autora.

Agora seja $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $w(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$, período $2P=4$, ou $P=2$. Temos que w é uma função ímpar, o que pode ser observado graficamente por meio da Figura 2.17.

Figura 2.17 | Gráfico da função w



Fonte: elaborada pela autora.

Por se tratar de uma função ímpar, periódica, com w e w' contínuas por partes, w admite uma expansão em série de Fourier de senos. Seus coeficientes são calculados da seguinte forma:

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 w(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^2 w(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 0\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0,\ n=4k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{n\pi},\ n \text{ ímpar} \\ \dfrac{4}{n\pi},\ n=2+4k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 0 + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \\ &\quad + \frac{4}{6\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{2}\right) + \frac{2}{7\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + 0 + \frac{2}{9\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi x}{2}\right) + \frac{4}{10\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi x}{2}\right) + \ldots \\ &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{2}{7\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \frac{2}{9\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi x}{2}\right) + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi x) + \ldots \\ &= \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{2}{7\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \frac{2}{9\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi x}{2}\right) + \ldots\right] \\ &\quad + \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi x) + \ldots\right] \end{aligned}$$

Nas duas últimas linhas da igualdade anterior, a presença de dois tipos de termos: $\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ e $\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)$, com n ímpar. Portanto, a série de Fourier para w pode ser expressa por

$$w(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right) + \frac{1}{(2k-1)}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)\right).$$

No exemplo anterior, estudamos as funções v e w e suas expansões em série de Fourier. Temos que v admite uma expansão em série de Fourier de cossenos, por ser uma função par, enquanto que w admite uma expansão em série de Fourier de senos, por ser ímpar. No entanto, ao comparar essas funções entre si, inclusive pela análise gráfica, podemos verificar que elas são coincidentes no intervalo $0 < x < 1$. Assim, se desejamos aproximar a função

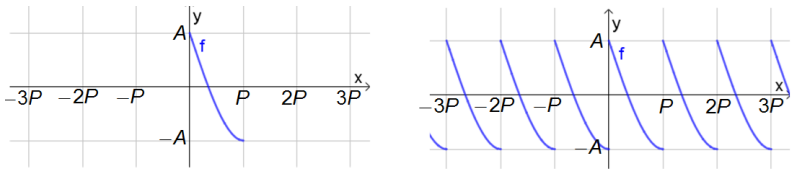
constante igual a 1 nesse intervalo por uma série de Fourier, podemos adotar tanto a u quanto a v, a seleção será realizada em função do tipo de série desejada, série de cossenos ou de senos.

Desse modo, quando estudar a série de Fourier para uma função definida em um intervalo limitado, podemos construir uma expansão para esta de modo a torná-la periódica e, ainda, satisfazendo a propriedade de ser par ou ímpar, processo este realizado por meio das extensões periódicas para funções reais.

Extensões periódicas e séries de Fourier de senos e cossenos

Suponha que seja necessário, para a resolução de um problema ou mesmo para um estudo teórico, construir a série de Fourier correspondente a uma função f definida em um intervalo limitado da forma $[0, P]$, cujo gráfico é ilustrado na Figura 2.18(a). Como estudado anteriormente, uma das condições necessárias para construir a série de Fourier para uma função é que esta seja periódica. Assim, para atender a essa condição, podemos construir uma extensão periódica para f, ou seja, construir uma nova função que seja periódica e coincida com f no intervalo $[0, P]$ como no exemplo apresentado na Figura 2.18(b).

Figura 2.18 | Extensão periódica para uma função



(a) Gráfico da função f (b) Gráfico de uma extensão periódica de f

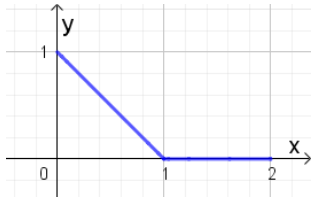
Fonte: elaborada pela autora.

Essa extensão deve ser construída de modo a atender todas as condições necessárias para a construção de uma expansão em série de Fourier convergente. Além disso, podemos ainda construir uma extensão periódica que apresente as propriedades das funções pares ou ímpares, o que permite a identificação de uma série de Fourier de senos ou de cossenos para a extensão periódica e que, consequentemente, aproximará a função f no intervalo $[0, P]$. Vejamos no próximo exemplo como podemos determinar extensões periódicas pares ou ímpares.

Exemplificando

Seja $r:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por $r(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<1\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases}$, conforme a Figura 2.19.

Figura 2.19 | Gráfico da função *r*



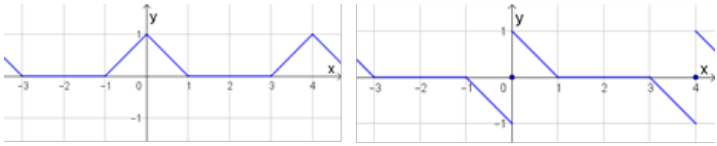
Fonte: elaborada pela autora.

Para construir uma expansão em série de Fourier de cossenos e uma de senos para *r*, precisamos construir extensões periódicas, respectivamente, par e ímpar para essa função.

Vejamos o caso da extensão par. Precisamos construir uma função periódica a partir de *r* que tenha seu gráfico simétrico em relação ao eixo *y*. Assim, podemos construir $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $p(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & 1<x\le 3\end{cases}$,

de período $2P=4$. O gráfico dessa função é apresentado na Figura 2.20(a). Note que o gráfico é simétrico em relação ao eixo *y*, o que equivale à condição $p(-x)=p(x)$, $x\in\mathbb{R}$, e $p(x)=r(x)$ para todo *x* em $[0,2]$. Essa é a extensão periódica par de *r*. Pelos procedimentos já estudados, podemos construir uma expansão em série de Fourier de cossenos para *p* e que aproxima *r* em $[0,2]$.

Figura 2.20 | Extensões periódicas para *r*



(a) Extensão periódica par (b) Extensão periódica ímpar

Fonte: elaborada pela autora.

Na Figura 2.16(b) podemos conferir a representação gráfica para a extensão periódica ímpar para *r*, que é definida por $p(x)=\begin{cases}-1-x, & -1\le x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{x}=0 \text{ e } 1<x\le 3\end{cases}$,

de período $2P=4$. Veja que seu gráfico é simétrico em relação à origem, o que equivale à condição $q(-x)=-q(x)$ para todo x real, e além disso, $q(x)=r(x)$ para todo x no intervalo $[0,2]$. Logo, podemos construir uma expansão em série de Fourier de senos para q e que aproxima r em $[0,2]$.

Sendo assim, podemos construir expansões em séries de Fourier de senos ou de cossenos para funções definidas em um intervalo limitado desde que sejam construídas extensões periódicas que permitam esse tipo de aproximação, ou seja, extensões periódicas que possam ser classificadas como pares ou ímpares.

Faça você mesmo

Construa os gráficos da extensão par e da extensão ímpar da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ em que $f(x)=0$ para $0\leq x<1$ e $f(x)=x-1$ para $1\leq x<2$.

Observe que podemos construir expansões em séries de Fourier para funções que satisfaçam às condições apresentadas (função e derivada de primeira ordem contínuas por partes, com a função periódica). No entanto, se tivermos algumas condições extras, como o fato da função ser par ou ímpar, podemos simplificar o processo de determinação das séries de Fourier correspondentes devido à identificação de coeficientes nulos de acordo com as propriedades da função em estudo. Desse modo, para que seja possível estudar uma série de Fourier associada a uma dada função, precisamos investigar todas as suas propriedades de modo a verificar a possibilidade de identificar expansões em série de Fourier convergentes e a natureza dessa série.

Dica

Para complementar os estudos a respeito das séries de Fourier associadas a funções pares e ímpares, bem como as extensões periódicas para determinação de aproximações em séries de Fourier de senos ou de cossenos, consulte a Seção 1.3, intitulada "Teorema de Fourier", da dissertação a seguir:

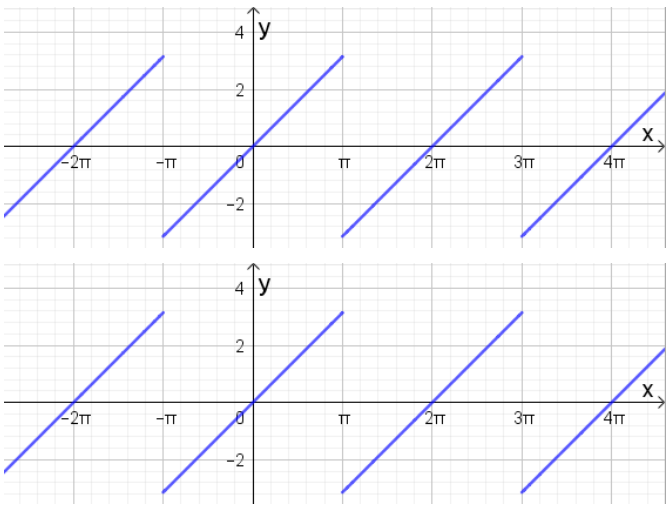
PASSOS, R. L. **Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl**. 2007. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Programa de pós-graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana.

Sem medo de errar

Com base nos conhecimentos a respeito de séries de Fourier, no contexto de atendimento à empresa de tecnologia, a qual produz softwares para drones voltados à captura de imagens, a terceira parte de sua tarefa consiste em construir séries de Fourier de senos e de cossenos para $f(x)=x$, $0\leq x\leq\pi$. Nesse sentido, será necessário empregar o estudo a respeito das extensões periódicas para funções para a posterior identificação das séries de Fourier correspondentes.

Para construir uma série de senos para *f*, devemos admitir uma extensão periódica ímpar para *f*, ou seja, construir uma função *g* que coincida com *f* em $0 \le x \le \pi$ e seja tal que $g(-x) = -g(x)$ para todo *x* real. Para isso, consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$, de período $2P = 2\pi$, ou $P = \pi$, com gráfico dado na Figura 2.21.

Figura 2.21: Gráfico da extensão periódica ímpar de *f*



Fonte: elaborada pela autora.

Por se tratar de uma função ímpar, g admite uma expansão em série de Fourier de senos dada na forma $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P} \right) \right)$ com $b_n = \frac{2}{P} \int_0^P g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{P} \right) dx$, $n > 0$. Assim, temos que

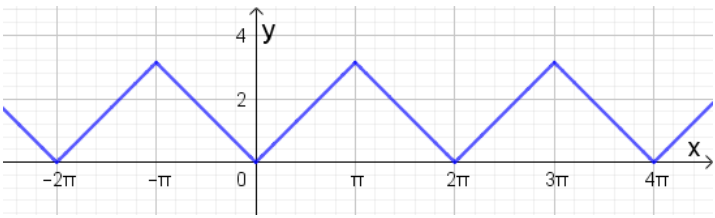
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2} - \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) - \left(\frac{\operatorname{sen}(0)}{n^2} - 0 \right) \right] = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Logo, função *g*, que corresponde à extensão periódica ímpar de *f*, admite a expansão em série de Fourier de senos na forma $g(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$.

De modo análogo, se desejamos construir uma série de cossenos para *f*, devemos considerar uma extensão par para esta função, ou seja, uma extensão h de modo que $h(-x)=h(x)$ para todo x real. Nesse caso, consideremos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$, periódica de período $2P=2\pi$, ou $P=\pi$, com gráfico ilustrado na Figura 2.18.

Figura 2.22 | Gráfico da extensão periódica par de *f*



Fonte: elaborada pela autora.

Por se tratar de uma função par, h admite uma expansão em série de Fourier de cossenos dada na forma $h(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)\right]$ com $a_n=\frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$, $n\ge 0$. Logo,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(0)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

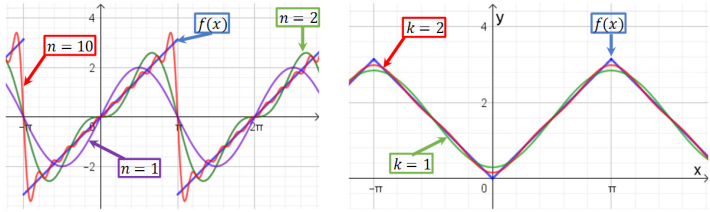
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{x\,\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2}+\frac{\pi\,\operatorname{sen}(n\pi)}{n}\right)-\left(\frac{\cos(0)}{n^2}+0\right)\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\right)=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ímpar}\end{cases}$$

Dessa forma, a função h, que corresponde à extensão periódica par de *f*, admite a expansão em série de Fourier de cossenos na forma $h(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right)$.

Veja que ambas as séries, relacionadas às extensões periódicas, aproximam a função f na região $0\le x\le\pi$. Na Figura 2.23(a) podemos observar a convergência de da extensão periódica ímpar de *f*, enquanto que na Figura 2.23(b) temos a convergência da extensão par de *f*.

Figura 2.23 | Convergência das extensões periódicas de f



(a) Convergência da extensão ímpar (b) Convergência da extensão par

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, a opção por uma representação ou outra pode estar baseada, dentre outras, em um interesse particular quanto ao comportamento das funções envolvidas, ou seja, se o objetivo é a construção de séries de senos ou de cossenos, ou ainda, na velocidade da convergência das séries associadas.

Para concluir a terceira etapa, elabore o relatório detalhado a respeito dos procedimentos que foram empregados na construção das extensões periódicas de f, bem como a identificação das representações em séries de Fourier correspondentes, contemplando todos os conhecimentos necessários para a execução dessa parte da tarefa. Agora, você pode finalizar o relatório técnico que será encaminhado à empresa, contemplando todos os problemas e temas estudados, concluindo, assim, seu desafio!

Avançando na prática

Aproximação numérica empregando séries de Fourier

Descrição da situação-problema

Suponha que o setor de programação de uma empresa de tecnologia precisa implementar um algoritmo voltado à análise do fluxo de água em uma tubulação para que possa atender uma indústria que produz equipamentos para sistemas de abastecimento de uma cidade e contratou você para prestar uma consultoria na elaboração do algoritmo necessário. Para esse algoritmo, considerando as dimensões das tubulações e as soluções, é necessário adotar uma aproximação para o número $\pi^2/6$ por meio de uma série de Fourier. Construa uma aproximação para esse número irracional por meio da expansão em série de Fourier para a função $f(x)=x^2$ definida em $-1\leq x\leq 1$ e elabore um relatório técnico para o setor de programação da empresa de modo que possa empregar esse procedimento para outras aproximações numéricas.

Resolução da situação-problema

Para construir uma série de Fourier para *f*, vejamos inicialmente que ela corresponde a uma função par, por ser simétrica em relação ao eixo *y*, logo, podemos construir uma série de cossenos que a represente no intervalo considerado. Podemos construir uma extensão periódica par para f como segue: $g(x)=x^2$, se $-1\le x\le 1$, de período $2P=2$, ou seja, $g(x+2)=g(x)$ para todo x real. Assim, a extensão periódica par de f admite uma expansão em série de cossenos da forma $\left(a_0/2\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\pi x\right)\right)$ e cujos coeficientes são calculados a seguir:

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 g(x)\cos(0)\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 g(x)\cos\left(n\pi x\right)dx=2\int_0^1 x^2\cos\left(n\pi x\right)dx=2\left[\frac{x^2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\,\operatorname{sen}\left(n\pi x\right)dx$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1\cos\left(n\pi x\right)dx=-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)\right]-\frac{4}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Logo, a série de Fourier de cossenos para *f* é

$$\frac{(2/3)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(n\pi x\right)\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(n\pi x\right)\right)$$

Como queremos aproximar um valor numérico por uma série de números reais, ao invés de analisar a série na forma de função, vamos trabalhar com valores numéricos assumidos por ela e que permitem essa aproximação. Como $f(1)=1^2=1$, logo, da série de Fourier temos

$$1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(n\pi\right)\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{2n}}{n^2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Dessa forma,

$$1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ 1-\frac{1}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ \frac{2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Portanto, o número $\pi^2/6$ pode ser aproximado pela série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$.

Finalize sua tarefa com a elaboração do relatório técnico que será enviado ao setor de programação da empresa em atendimento, detalhando cada uma das etapas e cada um dos conceitos necessários para a resolução desse problema.

Faça valer a pena

1. Quando desejamos construir séries de Fourier de senos ou de cossenos para funções periódicas e que atendem às demais condições de convergência, precisamos avaliar propriedades das funções em estudo, principalmente em relação à possibilidade de classificá-las em pares ou ímpares.

Diante desse tema, analise as funções apresentadas no que segue:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=|x|^3$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=4-x^2$

$j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $j(x)=x+3$

Assinale a alternativa que traz, dentre as funções apresentadas, todas as que podem ser classificadas como pares:

a) Apenas as funções f e g.

b) Apenas as funções f e j.

c) Apenas as funções g e h.

d) Apenas as funções f, g e h.

e) Apenas as funções g, h e j.

2. Seja *P* um número real positivo. A partir de *P*, definamos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como

$$f(x)=\begin{cases}P-x, & 0\le x\le P\\ P+x, & -P\le x\le 0\end{cases}$$

periódica de período $2P$.

A respeito dessa função, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. ( ) A função *f* pode ser classificada como uma função ímpar.

II. ( ) A função *f* admite uma expansão em série de Fourier de cossenos.

III. ( ) O coeficiente a_0 da expansão em série de Fourier para f é dado por $a_0=P$.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta das classificações, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) I – V; II – V; III – F.

b) I – V; II – F; III – V.

c) I – F; II – F; III – V.
d) I – F; II – V; III – V.
e) I – F; II – V; III – F.

3. Considere a função $p:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida por $p(x)=3x$. Em relação a essa função, analise as afirmações apresentadas no que segue:

I. Podemos construir uma extensão periódica ímpar para a função p a partir da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1\\ 0, & x=\pm 1\end{cases}$, periódica de período $2P=2$, e cuja série de Fourier correspondente assume a forma: $f(x)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi x)\right)$.

II. Podemos construir uma extensão periódica ímpar para a função p a partir da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1\\ 0, & x=\pm 1\end{cases}$, periódica de período $2P=2$, e cuja série de Fourier correspondente assume a forma:

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\left((2m-1)\pi x\right)\right).$$

III. Podemos construir uma extensão periódica par para a função p a partir da função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $g(x)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1\\ -3x, & -1\le x\le 0\end{cases}$, periódica de período $2P=2$, e cuja série de Fourier correspondente assume a forma:

$$g(x)=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)\pi x\right)\right).$$

Com relação às afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:
a) Apenas a afirmação II está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
d) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
e) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

Referências

ABRANTES, W. G. B. **A função periódica para o Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

ANTON, H.; BIVENS, Irl; DAVIS, S. **Cálculo**: volume 2. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

CONNALLY, Eric A. et. al. **Funções para Modelar Variações**: uma preparação para o cálculo. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**: volume 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

HUGHES-HALLETT, D. et. al. **Cálculo de uma variável**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KIME, L. A. **Álgebra na universidade**: um curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

NAZARI, Luiz Fernando. **Séries de Fourier e o fenômeno de Gibbs**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

PASSOS, R. L. **Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana.

ROGAWSKI, J. **Cálculo**: volume 2. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SALAS, S. L.; HILLE, E.; ETGEN, G. J. **Cálculo**: volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro, LTC, 2005.

STEWART, J. **Cálculo**: volume I. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**: volume II. 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THOMAS, G. B. **Cálculo**: volume 2. 11. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

Unidade 3

Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores, estudamos sequências e séries numéricas, bem como aproximação de funções por séries, observando suas principais propriedades. Nesta unidade, estudaremos as equações diferenciais parciais com suas principais classificações e soluções, dando um enfoque aos problemas de condução do calor e sua resolução via séries de Fourier, principalmente.

Imagine que você atua como professor em uma instituição de Ensino Superior e leciona uma disciplina envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações voltada para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, os quais já cursaram outras disciplinas relativas a esse campo da Matemática, principalmente no que se refere ao estudo das funções de uma e várias variáveis reais e ao cálculo de derivadas e integrais correspondentes.

Um dos tópicos a ser tratado nessa disciplina consiste nas equações diferenciais parciais, bem como algumas de suas aplicações. Nesse sentido, visando discutir a respeito dessas equações e sua relação com os problemas de condução do calor, os quais consistem em uma das principais aplicações estudadas pela Matemática para contribuir com a compreensão das equações diferenciais parciais, bem como preparar o material a ser desenvolvido com sua turma do curso de licenciatura em Matemática, sua tarefa se resume em elaborar um plano de aula, organizado em três partes, nas quais deverão ser abordados os seguintes temas: equações diferenciais parciais, envolvendo definição, classificações, soluções, tipos de problemas, além de sua aplicabilidade no estudo de problemas de condução do calor mediante a identificação de diferentes tipos de condições.

Nesse desafio, o plano de aula deverá ser organizado em três partes a partir da seguinte distribuição dos temas citados: a primeira parte consiste em abordar as principais características das equações diferenciais parciais, por se tratarem das equações que representam os problemas de condução do calor, os quais, por sua vez, correspondem à aplicação que será discutida nesse plano; a segunda parte refere-se ao estudo de um problema modelado pela equação do calor com condições de fronteira não homogêneas, investigando estratégia de obtenção da solução e a associação desta com as condições estabelecidas; por fim, a terceira parte está relacionada ao estudo de um

problema de condução de calor, destacando o papel das séries de Fourier na obtenção da solução para o problema apresentado.

Para que você possa elaborar esse plano e cumprir com o desafio proposto, você estudará, na primeira seção desta unidade, as características das equações diferenciais parciais, bem como a estruturação de problemas modelados por essas equações e o estudo de suas soluções. Na segunda seção, serão estudados problemas de condução de calor cujas regiões em estudo apresentam condições de fronteira homogêneas e não homogêneas. Na terceira seção, estudaremos a aplicabilidade das séries de Fourier em determinados problemas envolvendo condução de calor.

Prossiga com seus estudos e verifique qual é o primeiro desafio que você deve solucionar!

Seção 3.1

Conceitos básicos sobre equações diferenciais parciais.

Diálogo aberto

O estudo das equações diferenciais parciais é essencial para a compreensão dos mais variados fenômenos físicos, como o escoamento de fluídos, as transferências de calor, problemas associados ao eletromagnetismo, entre outros. Por isso, nesta primeira seção, estudaremos as características dessas equações, comparando-as com as equações diferenciais ordinárias.

Para esses estudos, no contexto de elaboração de um plano de aula voltado a alunos do curso de licenciatura em Matemática a respeito das equações diferenciais parciais, sua primeira tarefa consiste em elaborar a primeira etapa do plano, a qual deve abordar as principais características das equações diferenciais parciais, que correspondem aos conceitos essenciais para as demais etapas relativas aos problemas de condução do calor. Diante disso, você deverá estruturar essa primeira parte do plano, a qual deve contemplar as seguintes atividades:

Atividade 1: Realizar um estudo com base nos seguintes questionamentos:

- Quais são as principais aplicações das equações diferenciais parciais?
- Quais os conhecimentos prévios necessários para o estudo destas equações?
- Dentre os conhecimentos destacados no item anterior, quais estão relacionados aos conteúdos estudados na Educação Básica?

Atividade 2: Classificar as seguintes equações diferenciais parciais, $u = u(x, y)$, quanto à ordem, linearidade e homogeneidade: $yu_{xy}(x, y) + x^2 u_y(x, y) - u(x, y) = 0$, $\left(u_{xxx}(x, y)\right)^3 + xy - 2 = 0$ e $e^x u_{yy}(x, y) + 3u_x(x, y) + 4\ln\left(u(x, y)\right) = 0$.

Atividade 3: Identificar a solução geral $u = u(x, y)$ da equação diferencial parcial $u_{xy}(x, y) = 0$, retomando o cálculo de derivadas e integrais associadas a funções de uma ou mais variáveis reais, essenciais para a resolução de problemas modelados por equações diferenciais.

Como podem ser desenvolvidas cada uma das tarefas apresentadas? Qual ou quais estratégias metodológicas (resolução de problemas, investigações, uso de tecnologias etc.) podem ser empregadas no desenvolvimento de cada tarefa? Assim, organize o plano de aula, contemplando as orientações sobre

a forma como cada tarefa será desenvolvida com os alunos da turma de licenciatura em Matemática e como deverão ser conduzidas pelo professor, apresentando também as resoluções para cada tarefa, bem como as possíveis dúvidas que podem ser manifestadas pelos estudantes durante suas aplicações e os encaminhamentos que podem ser adotados diante dessas dificuldades.

Para cumprir esse desafio, nesta seção, será abordada a definição de equação diferencial parcial, suas classificações e soluções, além da avaliação de condições associadas, como é o caso da condição inicial e das condições de fronteira correspondentes.

Prossiga em seus estudos e confira quais os conceitos necessários para enfrentar o desafio proposto!

Não pode faltar

As equações diferenciais parciais são empregadas na descrição de fenômenos como problemas de condução do calor, estudo do eletromagnetismo, propagação de vírus e vibrações em meios elásticos. Ainda que, em diversas situações, seja necessário recorrer a métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas para os problemas modelados por essas equações, o conhecimento dos modelos associados e das soluções analíticas, quando é possível obtê-las, é essencial para a interpretação dos fenômenos e a avaliação da eficiência dos métodos numéricos. Sendo assim, vamos iniciar os estudos pela caracterização das equações diferenciais parciais, bem como pelas possíveis classificações que podem ser adotadas.

Equações diferenciais parciais

Conforme Zill (2016), uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função desconhecida, ou função incógnita, e suas derivadas (ou diferenciais). Assim, a incógnita desse tipo de equação corresponde a uma função, diferentemente do que ocorre nas equações algébricas.

A classificação de uma equação diferencial como ordinária ou parcial depende da função incógnita em estudo e da quantidade de variáveis independentes associadas, sendo essa variável aquela que pertence ao domínio da função em estudo.

Se uma equação diferencial envolve uma função de uma variável independente e suas derivadas, temos uma **equação diferencial ordinária** (EDO). Por exemplo, $y'(x)-2y(x)=0$ corresponde a uma equação diferencial ordinária porque a função incógnita $y=y(x)$ depende apenas da variável

independente x. Veja que $y'(x)$ é a derivada de primeira ordem de $y = y(x)$ (ZILL, 2016).

Por outro lado, se a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes, a equação diferencial relativa a essa função e suas derivadas pode ser classificada como uma **equação diferencial parcial** (EDP). Por exemplo, $u_x(x,y) - 2u_y(x,y) = 4$ consiste em uma equação diferencial parcial porque envolve a função incógnita $u = u(x,y)$, a qual depende das variáveis x e y independentes.

Atenção

No caso das EDPs, as notações $u_x(x,y)$ e $u_y(x,y)$ indicam as derivadas parciais de primeira ordem de u em relação a x e a y, respectivamente. Temos também as notações $u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ e $u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, além das notações correspondentes para as derivadas de ordem superior, como é o caso de $u_{xx}(x,y)$ e $u_{xxy}(x,y)$, por exemplo (ZILL, 2016).

A forma geral para uma EDP de função incógnita $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, com $n > 1$ natural, pode ser dada por $F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0$, com $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$, sendo Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ e $k \geq 1$ naturais, F uma função e $u = u(x)$ a função incógnita correspondente. Alguns exemplos importantes de EDPs são:

Equação unidimensional do calor: $u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t)$, em que $u = u(x,t)$ corresponde à temperatura em determinada posição x no instante t.

Equação unidimensional da onda: $u_{xx}(x,t) = \frac{1}{k^2}u_{tt}(x,t)$, em que $u = u(x,t)$ descreve a posição no eixo y de uma corda em um dado instante t e em um ponto x.

Equação de Laplace: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$, de função incógnita $u = u(x,y)$ e com diversas aplicações no eletromagnetismo.

Essas equações possuem diversas aplicações nas Engenharias e na Física, entre outras, sendo algumas das equações cujas soluções analíticas são investigadas (BRONSON; COSTA, 2008).

Assimile

Uma equação diferencial parcial envolve uma função incógnita com duas ou mais variáveis independentes e suas derivadas parciais.

Dependendo das características apresentadas pelas equações diferenciais parciais, podemos estudar outras classificações. Vejamos algumas delas no que segue.

Classificações para as equações diferenciais parciais

A classificação de uma EDP de acordo com sua **ordem** se dá a partir da ordem da maior derivada da função na equação, ou seja, a ordem de uma EDP diz respeito à ordem da maior derivada da função incógnita presente na equação (BOYCE; DIPRIMA, 2018). Por exemplo, a equação $g_{xxx}(x,y)+g_{yx}(x,y)-g(x,y)=0$ é de terceira ordem, porque a derivada de ordem mais alta da função incógnita $g=g(x,y)$ é $g_{xxx}(x,y)$, uma derivada parcial de terceira ordem. Por outro lado, $h_{xy}(x,y,z)-2h_z(x,y,z)+3=0$ é uma EDP de segunda ordem, porque a derivada de ordem mais alta da função incógnita $h=h(x,y,z)$ é $h_{xy}(x,y,z)$, é derivada parcial de segunda ordem.

Podemos também estudar a classificação de uma EDP quanto à linearidade. Dizemos que uma equação diferencial parcial é **linear** quando envolve apenas funções lineares das variáveis, que consistem na função incógnita e suas derivadas parciais, isto é, as variáveis assumem potências de expoente máximo 1 e seus os coeficientes dependem apenas das variáveis independentes ou de constantes. Veja que $f_{xx}(x,y)+f_y(x,y)=-y$ e $x^2f_{xy}(x,y)=5xyf_x(x,y)$ são EDPs lineares, porque todas as parcelas e membros das equações estão associados a funções lineares de $f=f(x,y)$ e de suas derivadas parciais, e seus coeficientes dependem apenas de x e y, que são as variáveis independentes, ou de constantes.

No caso da EDP, temos uma função linear envolvendo a derivada de ordem mais elevada da função incógnita – com potência de expoente 1 e coeficientes com variáveis independentes e constantes apenas –, mas os demais termos não correspondem a funções lineares da função incógnita e das demais derivadas, é classificada como equação diferencial parcial **quase-linear**. Por exemplo, $xf_{xy}(x,y)+3\left(f_x(x,y)\right)^2=0$ é uma EDP de segunda ordem quase-linear, porque temos a linearidade da derivada parcial de segunda ordem devido à $f_{xy}(x,y)>$ ser uma potência de expoente 1 e seu coeficiente depender somente da variável independente x, mas temos a presença de $\left(f_x(x,y)\right)^2$, ou seja, uma função não linear de $f_x(x,y)$. Outro exemplo de EDP quase-linear é a equação $f_{xx}(x,y)=f(x,y)f_y(x,y)$, porque temos que a derivada de segunda ordem é expressa em uma potência de coeficiente 1, porém temos a presença do termo $f(x,y)f_y(x,y)$, o qual não é linear por se tratar de um produto entre f e sua derivada de primeira ordem.

Para os demais casos, temos a classificação da equação diferencial parcial como **não-linear** (BRONSON; COSTA, 2008). Por exemplo, podemos destacar $\left(f_{xxy}(x,y)\right)^3=3f(x,y)$, a qual é não linear pela presença do termo $\left(f_{xxy}(x,y)\right)^3$, associado à derivada de maior ordem de f.

Podemos também verificar se uma EDP é homogênea ou não. Dizemos que uma equação diferencial parcial é **homogênea** quando todos os seus

termos dependem da função incógnita e de suas derivadas parciais. Por exemplo, a EDP $m_{xxy}(x,y)-m_{xy}(x,y)+m(x,y)=0$ corresponde a uma equação homogênea relativa à função incógnita $m=m(x,y)$. Por outro lado, uma equação é dita **não-homogênea** se existem termos que não dependem da função incógnita, como é o caso, por exemplo, da equação $n_{xx}(x,y)-n_{yy}(x,y)+2xy=3$ relativa à função incógnita $n=n(x,y)$, a qual é não-homogênea pela presença dos termos $2xy$ e 3, pois ambos não dependem de *n* (BRONSON; COSTA, 2008). Assim, nas equações não-homogêneas podemos ter a presença de termos relativos às variáveis independentes e constantes apenas.

Podemos ainda empregar todas essas diferentes categorias visando a classificação de uma EDP segundo seus termos, conforme discutido no seguinte exemplo.

Exemplificando

Considere a EDP $3yg_{xxy}(x,y)-2g_x(x,y)+\left(g(x,y)\right)^3-5=0$ relativa à função incógnita $g=g(x,y)$. Note que essa equação é de terceira ordem, porque $g_{xxy}(x,y)$ é a derivada de ordem mais elevada, sendo uma derivada parcial de terceira ordem. Essa equação é quase-linear porque a derivada de ordem mais alta corresponde a uma potência de expoente 1, além de seu coeficiente depender somente de uma constante e de uma função da variável independente y, porém temos a presença do termo $\left(g(x,y)\right)^3$, o qual não é uma função linear de g. Por fim, essa EDP é não-homogênea pela presença da constante -5, que não depende de g e suas derivadas.

Assim, em síntese, podemos estudar uma EDP classificando-a em relação à ordem, à linearidade e à homogeneidade.

Reflita

Qual seria a forma geral para uma equação diferencial parcial de primeira ordem, linear e homogênea, relativa à função incógnita $u=u(x,y)$? E a forma geral para uma equação diferencial parcial de segunda ordem, linear e homogênea relativa a essa mesma função incógnita?

Se temos um problema modelado por uma equação diferencial parcial, em geral, um dos interesses consiste na identificação da solução correspondente, ou seja, à descoberta da função incógnita, já que a solução da EDP está associada à uma solução para o problema em estudo.

Estudo da solução de uma equação diferencial parcial

Considere uma EDP de ordem *n*. Se uma função $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, com $n > 1$ natural, for derivável até a ordem *n* de modo que, ao substituir as derivadas parciais consideradas e a função *u* na EDP, seja obtida uma identidade, então diremos que *u* é a **solução** da equação diferencial parcial em estudo (ZILL, 2016). Logo, para avaliar se uma função é solução de uma EDP precisamos calcular as derivadas parciais necessárias, conforme as regras de derivação para funções de várias variáveis, e verificar se essas funções satisfazem a EDP, ou seja, se a igualdade presente na EDP é verificada para a função considerada.

Exemplificando

Seja a equação unidimensional do calor dada por $u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t)$ ou $u_{xx}(x,t) - Ku_t(x,t) = 0$, com *K* um número. Vejamos que a função $f(x,t) = e^{-t/K}\text{sen}(x)$ é solução para essa equação. Note que as derivadas parciais de *f* de primeira ordem em relação a *t* e de segunda ordem em relação a *x* são:

$$f_x(x,t) = e^{-t/K}\cos(x) \Rightarrow f_{xx}(x,t) = -e^{-t/K}\text{sen}(x)$$
$$f_t(x,t) = \left(-1/K\right)e^{-t/K}\text{sen}(x)$$

Substituindo essas funções no primeiro membro da EDP, considerando a segunda versão apresentada, obtemos:

$$f_{xx}(x,t) - Kf_t(x,t) = -e^{-t/K}\text{sen}(x) - K\left[\left(-1/K\right)e^{-t/K}\text{sen}(x)\right]$$
$$= -e^{-t/K}\text{sen}(x) + e^{-t/K}\text{sen}(x) = 0,$$

para todo (x,t). Como a função *f* satisfaz a equação apresentada, podemos concluir que *f* é solução da equação $u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t)$.

Por outro lado, considere a equação de Laplace $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ e a função $g(x,y) = \cos(x-y)$. Note que *g* não é solução para a EDP apresentada, pois calculando as derivadas parciais de segunda ordem de *g* em relação a *x* e a *y* obtemos:

$$g_x(x,y) = -\text{sen}(x-y) \Rightarrow g_{xx}(x,y) = -\cos(x-y)$$
$$g_y(x,y) = \left[-\text{sen}(x-y)\right](-1) = \text{sen}(x-y)$$
$$\Rightarrow g_{yy}(x,y) = \left[\cos(x-y)\right](-1) = -\cos(x-y),$$

porém, ao substituir esses termos no primeiro membro da equação de Laplace segue que:

$$g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = \left[-\cos(x-y)\right] + \left[-\cos(x-y)\right] = -2\cos(x-y) \neq 0,$$

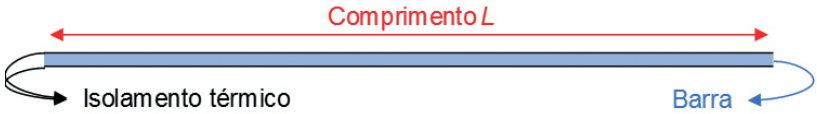
para todo (x,t), ou seja, a equação de Laplace não é válida para *g*. Portanto, *g* não é solução para a equação de Laplace.

Após o estudo das classificações possíveis para uma EDP e de suas soluções, vamos analisar um problema associado à condução do calor com o objetivo de estudar a estrutura dos problemas modelados por EDPs, principalmente em relação às condições associadas.

Problemas de valores iniciais, problemas de valores de fronteira e problemas mistos

Suponha agora que estudaremos o problema de condução do calor em uma barra, produzida a partir de um material condutor uniforme de calor com características conhecidas, de comprimento L, com $L>0$ um número real. Vamos supor, por simplicidade, que essa barra seja aproximada por um elemento unidimensional, ou seja, temos apenas uma dimensão da barra a ser analisada – o seu comprimento –, desconsiderando sua espessura. Assim, somente em suas extremidades podem ocorrer trocas de calor, as demais regiões dessa barra permanecem em isolamento térmico, o que dificulta as trocas de calor com o meio. Na Figura 3.1, temos uma representação para a barra, porém não se esqueça que a barra é unidimensional, logo sua espessura deve ser desconsiderada.

Figura 3.1 | Barra de comprimento L



Fonte: elaborada pela autora.

A partir do comentário anterior, temos que a variação da temperatura $u=u(x,t)$ nessa barra será avaliada em função do tempo t e do comprimento x apenas, com $t\geq 0$ e $0\leq x\leq L$. Esse problema pode ser estudado com base na equação do calor $u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t)$, em que $K>0$ é uma constante associada ao material no qual a barra foi produzida (FIGUEIREDO, 2012).

Veja que a equação $u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t)$ pode admitir infinitas soluções. Por exemplo, se $u(x,t)$ for uma constante qualquer, a equação será satisfeita, assim como se $u(x,t)$ for da forma cx, com c constante real qualquer. Mas como podemos especificar qual será a solução do problema em estudo? Para isso, precisamos avaliar as condições que são impostas, chamadas de condições iniciais e condições de contorno.

Fisicamente, é coerente supor que a distribuição de temperatura na barra, com o passar do tempo, deve depender da temperatura inicial da barra, isto é, da temperatura no instante $t=0$. Essa informação é chamada de **condição inicial** do problema e pode ser escrita na forma $u(x,0)=f(x)$, em que $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ é uma função que indica a temperatura em cada ponto da barra quando $t=0$.

Também podemos analisar as temperaturas indicadas para as extremidades da barra, ou seja, as condições definidas para $x=0$ e $x=L$ ao longo

do tempo. Essas informações compõem as chamadas **condições de fronteira** e podem ser dos seguintes tipos:

Tipo I (condição de Dirichlet): as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas ao longo do tempo e, nesse caso, temos $u(0,t)=T_1$ e $u(L,t)=T_2$, para todo $t>0$, com T_1 e T_2 temperaturas conhecidas. Outra possibilidade é indicar a variação temporal da temperatura para uma ou as duas extremidades de modo que $u(0,t)=h_0(t)$ e $u(L,t)=h_1(t)$, para todo $t>0$, sendo h_0 e h_1 funções conhecidas.

Tipo II (condição de Neumann): as extremidades permanecem isoladas termicamente ao longo do tempo, de modo que os fluxos de calor através delas sejam nulos, o que pode ser indicado por $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$, para todo $t>0$.

Tipo III: considerar que exista transferência de calor entre o meio ambiente, de temperatura T_A, e a barra, que podem ser representadas por equações do tipo $\beta u_x(0,t)=e\left[u(0,t)-T_A\right]$, com β uma constante associada ao material da barra e condições do meio.

Tipo IV: considerar a combinação de duas das condições acima como, por exemplo, adotar $u(0,t)=0$ e $u_x(L,t)=0$, para todo $t>0$; isto é, a extremidade com $x=0$ é mantida à temperatura de 0 °C, segundo uma condição do tipo I, e a extremidade $x=L$ é isolada termicamente, conforme uma condição do tipo II (FIGUEIREDO, 2012).

Quando um problema admite somente condições iniciais, podemos chamá-lo de **problema de valor inicial** (PVI). Para os problemas que envolvem apenas condições de fronteira, temos os **problemas de valores de fronteira** (PVF). Já no caso dos problemas que envolvem tanto condições iniciais quanto de fronteira, temos os chamados **problemas de valores iniciais e de fronteira** (PVIF), ou também chamados de **problemas mistos**.

Vamos considerar que $u=u(x,t)$ representa a temperatura em um pedaço de ferro de construção de espessura bem fina e comprimento π, desconsiderando as demais dimensões desse objeto. A temperatura nesse pedaço de ferro é tal que satisfaz a equação do calor $u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t)$, com K uma constante real e tal que $0\leq x\leq\pi$ e $t\geq 0$.

Suponha que a temperatura nessa barra no instante $t=0$ seja $u(x,0)=2\,\mathrm{sen}(4x)-11\,\mathrm{sen}(7x)$ para todo $0\leq x\leq\pi$, que corresponde à condição inicial do problema, por estar relacionada ao instante de tempo $t=0$. Dessa forma, podemos construir o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t), & t\geq 0,\ \ 0\leq x\leq\pi \\ u(x,0)=2\,\mathrm{sen}(4x)-11\,\mathrm{sen}(7x), & 0\leq x\leq\pi \end{cases}$$

Podemos ainda adicionar outras condições ao problema. Consideremos que as extremidades dessa barra estejam isoladas termicamente, ou seja, tenhamos $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ para $t>0$, assim, temos condições de fronteira do tipo II>. Logo, temos o problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t), & t\geq 0, \quad 0\leq x\leq \pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0 \end{cases}$$

Quando unimos todas as condições apresentadas, temos a construção do seguinte problema de valor inicial e de fronteira, ou problema misto:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t), & t\geq 0, \quad 0\leq x\leq \pi \\ u(x,0)=2\ \text{sen}(4x)-11\ \text{sen}(7x), & 0\leq x\leq \pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t>0 \end{cases}$$

Podemos verificar que a função $u(x,t)=2e^{-16t/K}\text{sen}(4x)-11e^{-49t/K}\text{sen}(7x)$ é uma solução para o problema apresentado. As derivadas parciais de *u*, pela regra da cadeira, são tais que:

$$u_x(x,t)=8e^{-16t/K}\cos(4x)-77e^{-49t/K}\cos(7x)$$

$$u_{xx}(x,t)=-32e^{-16t/K}\text{sen}(4x)+539e^{-49t/K}\text{sen}(7x)$$

$$u_t(x,t)=\left(-32/K\right)e^{-16t/K}\text{sen}(4x)+\left(539/K\right)11e^{-49t/K}\text{sen}(7x)\,.$$

Dessa forma, $u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t)$ para todo (x,t), ou seja, a função *u* satisfaz à equação diferencial parcial. Além disso, veja que:

$$u(x,0)=2e^{0}\text{sen}(4x)-11e^{0}\text{sen}(7x)=2\ \text{sen}(4x)-11\ \text{sen}(7x)$$

$$u(0,t)=2e^{-16t/K}\text{sen}(0)-11e^{-49t/K}\text{sen}(0)=0$$

$$u(\pi,t)=2e^{-16t/K}\text{sen}(4\pi)-11e^{-49t/K}\text{sen}(7\pi)=0\,.$$

Portanto, como todas as condições do problema misto são verificadas – EDP, condição de contorno e condições de fronteira –, podemos concluir que a função $u(x,t)=2e^{-16t/K}\text{sen}(4x)-11e^{-49t/K}\text{sen}(7x)$ é solução para o problema misto apresentado.

Assim, quando estudamos um problema modelado por uma equação diferencial parcial, para que exista a possibilidade de especificar sua solução, precisamos indicar, além da EDP, as condições iniciais e de fronteira correspondentes.

Assimile

Um problema de valor inicial envolve uma EDP associada a uma condição para o tempo $t=0$. Um problema de valores de fronteira envolve condições sobre as extremidades da região em estudo. Um problema misto apresenta condições iniciais e de fronteira associadas entre si.

O estudo que realizamos para a equação do calor também pode ser adaptado para outros tipos de equações, porque as classificações dos tipos de problema estão presentes em situações que envolvem outras EDPs além da equação do calor.

Reflita

A solução $u = u(x, y)$ da equação de Laplace $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ pode ser estudada em uma região do plano em que $0 \leq x \leq A$ e $0 \leq y \leq B$, por exemplo, com A e B números reais positivos. Para essa situação, podemos definir um problema de valor inicial correspondente? E problemas de valores de fronteira?

Logo, para o estudo das equações diferenciais parciais precisamos analisar as classificações de modo a identificar o método que pode ser empregado em sua resolução, avaliar como as condições iniciais e de fronteira interferem no processo de obtenção de solução, permitindo a identificação de soluções particulares a cada problema em estudo.

Dica

Para complementar os estudos envolvendo as equações diferenciais parciais, consulte a seção 10.1, *Introdução: um modelo para fluxo de calor*, do livro *Equações Diferenciais*, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual. Analise a construção do modelo envolvendo a equação do calor, identificando os elementos essenciais, como as condições auxiliares, por exemplo.

Sem medo de errar

No contexto de elaboração de plano de aula voltado a alunos do curso de licenciatura em Matemática a respeito das equações diferenciais parciais, a primeira parte de sua tarefa consiste em elaborar a primeira parte do plano de aula, contemplando as três atividades apresentadas.

Considerando a estrutura das três atividades que devem ser acrescidas ao plano, para essa primeira parte, os estudantes podem ser organizados em duplas ou pequenos grupos para a realização de pesquisas, elaboração de seminários e resolução de problemas.

Nesse sentido, a primeira atividade tem por objetivo destacar algumas aplicações das EDPs, bem como os conteúdos matemáticos associados. Para o desenvolvimento dessa atividade, os estudantes devem realizar pesquisas em livros ou na Internet, por exemplo, a respeito do tema proposto,

organizando um breve seminário a ser apresentado aos colegas para, em seguida, ser realizada uma discussão com toda a turma a respeito dos resultados das pesquisas. Dentre as aplicações das equações diferenciais parciais que podem ser apresentadas pelos estudantes e/ou que podem ser destacadas pelo professor durante a discussão com toda a turma temos:

a equação de Burgers com viscosidade $\left(u_t + uu_x = \nu u_{xx}\right)$, empregada em modelagens relativas à dinâmica de gases, por exemplo.

a equação de calor $\left(u_{xx} = Ku_t\right)$, que pode ser empregada na avaliação da temperatura em um objeto ao longo do tempo.

a equação de Laplace $\left(u_{xx} + u_{yy} = 0\right)$, empregada no estudo da teoria de gravidade de Newton, de situações relacionadas a processos estocásticos, em análise complexa etc.

a equação da onda $\left(k^2 u_{xx} = u_{tt}\right)$, a qual está associada à propagação de uma onda em determinado meio.

a equação de Schrödinger $ih\psi_t = \left(-h^2/2m\right)\psi_{xx}$, da mecânica quântica, que permite avaliar a probabilidade da identificação de uma partícula, sujeita a um potencial, em um certo instante de tempo e local.

as equações de Navier-Stokes $\left(v_t + \left(v \cdot \nabla\right)v = -\nabla v + \nu\Delta v + f(x,t)\right)$, que corresponde a um sistema de equações diferenciais parciais, empregado na modelagem do movimento de fluidos sujeito a condições específicas (LIMA, 2013).

Quando analisamos as equações diferenciais parciais, alguns conhecimentos essenciais para sua compreensão correspondem a conteúdos abordados pelo Cálculo Diferencial e Integral, como as funções de muitas variáveis reais, derivadas parciais, integrais múltiplas, os quais estão associados às funções de uma variável real, derivadas e integrais correspondentes. Associando com a Educação Básica, temos que o estudo das funções, das equações e dos conjuntos numéricos são essenciais para a compreensão das equações diferenciais parciais, as quais derivam desses conceitos para sua estruturação e também para a resolução dos problemas modelados por esses tipos de equações, considerando os demais conhecimentos teóricos que devem ser construídos para essa finalidade.

A segunda atividade refere-se à classificação de algumas equações diferenciais parciais de acordo com as categorias: ordem, linearidade e homogeneidade. Para essa atividade, ainda em grupos, os estudantes podem preparar uma breve apresentação contemplando as justificativas para cada classificação. Cada grupo pode ser selecionado para apresentar uma das equações, em conjunto com a classificação correspondente. Assim, para as três equações temos:

A equação $yu_{xy}(x,y) + x^2 u_y(x,y) - u(x,y) = 0$ é de segunda ordem, porque

$u_{xy}(x,y)$ – derivada parcial de segunda ordem – é a derivada de ordem mais elevada; a equação é linear porque todos os seus termos correspondem a funções lineares de u e suas derivadas, isto é, u e suas derivadas estão associadas a potências com expoente máximo 1 e, além disso, os coeficientes dessas funções dependem apenas das variáveis independentes x e y; a equação é homogênea, porque todos os seus termos dependem da função u ou de suas derivadas.

A equação $\left(u_{xxx}(x,y)\right)^3 + xy - 2 = 0$ é de terceira ordem, porque $u_{xxx}(x,y)$ – derivada parcial de terceira ordem – é a derivada de ordem mais elevada; a equação é não-linear porque a derivada de ordem mais alta corresponde a uma potência de expoente 3, ou seja, temos a presença do termo $\left(u_{xxx}(x,y)\right)^3$, que não é uma função linear de $u_{xxx}(x,y)$; a equação é não-homogênea pela presença do termo xy e da constante -2.

A equação $e^x u_{yy}(x,y) + 3u_x(x,y) + 4\ln\left(u(x,y)\right) = 0$ é de segunda ordem, porque $u_{yy}(x,y)$ – derivada parcial de segunda ordem – é a derivada de ordem mais elevada; a equação é quase-linear porque a derivada de ordem mais alta corresponde a uma potência de expoente 1, além de seu coeficiente depender somente da variável independente x, no entanto, temos a presença do termo $\ln\left(u(x,y)\right)$, o qual não é uma função linear de u; a equação é homogênea porque todos os seus termos dependem da função u ou de suas derivadas.

Após cada grupo apresentar as informações de uma equação, é importante discutir com toda a turma a respeito da classificação apresentada, sanando as possíveis dúvidas manifestadas pelos alunos. Também podem ser selecionadas outras equações em função da quantidade de estudantes na turma.

Para a última parte, a atividade consiste em propor aos grupos a identificação da solução geral $u = u(x,y)$ da equação diferencial parcial dada por $u_{xy}(x,y) = 0$, com base nos conhecimentos respeito das funções de várias variáveis reais e operações correspondentes. Os estudantes podem ser orientados a recorrer aos livros de Cálculo Diferencial e Integral para auxiliar na resolução do problema.

Para a resolução desse problema, como temos a derivada de uma função igual a zero, podemos empregar a integração para determinar a função incógnita. Porém, por se tratar de uma função de duas variáveis, precisamos considerar, por exemplo, que a derivada de x em relação a y é nula, o que, no processo de integração, gera uma situação inversa. Por exemplo, quando derivamos $x + y$ em relação a x temos como resultado 1, no entanto, quando integramos 1 com respeito a x, o resultado é $x + f(y)$, porque temos que considerar aquele fator y que poderia estar presente na função original. Diante disso, vejamos como determinar a função incógnita.

Integrando essa igualdade em relação a y, teremos $u_x(x,y) = \int u_{xy}(x,y)\, dy = \int 0\, dy = f(x)$, porque ao derivar a função f, que depende somente de x e de constantes, em relação a y, o resultado será igual a 0. Agora, integrando $u_x(x,y) = f(x)$ em relação a x teremos:

$$u(x,y) = \int u_x(x,y)\, dx = \int f(x)\, dx = g(x) + h(y)$$

na qual g é uma antiderivada de f e h corresponde a uma função que depende somente de y. Logo, a solução geral da EDP $u_{xy}(x,y) = 0$ é da forma $u(x,y) = g(x) + h(y)$, ou seja, uma combinação entre funções que dependem somente de x e de y, respectivamente.

Pode ser realizada uma discussão com toda a turma com relação ao problema proposto, instigando os estudantes a compartilharem suas soluções de modo a verificar as dúvidas que possam ter surgido nesse processo.

Conclua seu desafio estruturando a primeira parte do plano de aula, contemplando as atividades, as possíveis resoluções, as estratégias adotadas em cada uma delas, acrescentando também possíveis dúvidas e encaminhamentos que podem ser adotados no decorrer da aplicação do plano.

Avançando na prática

Soluções para problemas de valores de fronteira

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja participando de um projeto de monitorias acadêmicas em uma universidade e está selecionando alguns problemas a serem discutidos com alunos de uma turma de engenharia que estão cursando uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a qual aborda o estudo das equações diferenciais parciais. Durante essa preparação, você selecionou um problema que solicita a identificação de uma função $u = u(x,y)$, a qual consiste na solução geral da equação $u_x = 2x$ sujeita à condição de fronteira $u(0,y) = \ln(y)$. Quais são as vantagens em acrescentar a condição de fronteira apresentada na solução da EDP em questão? Que relações podemos estabelecer entre a solução da EDP e o problema de valor de fronteira associado? Reflita a respeito dessas questões e finalize a resolução do problema selecionado, acrescentando comentários que possam contribuir com a discussão a respeito do problema com os alunos da engenharia.

Resolução da situação-problema

Queremos identificar a solução para a EDP $u_x = 2x$. Quando integramos essa equação em relação à variável x teremos $u(x,y) = \int u_x \, dx = \int 2x \, dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + f(y) = x^2 + f(y)$. Logo, a solução da equação é $u(x,y) = x^2 + f(y)$. Veja que temos o acréscimo da função f para considerar os termos que dependem apenas de y ou que são constantes e que também podem estar presentes nessa função, tornando-se nulos após o cálculo da derivada em relação a x.

Note que essa função é genérica, já que não podemos identificar a expressão de f sem nenhuma outra condição adicional. Porém, quando tomamos $u(0,y) = \ln(y)$, observamos que $\ln(y) = u(0,y) = 0^2 + f(y) = f(y)$, isto é, $f(y) = \ln(y)$. Assim, a solução do problema de valor de fronteira é $u(x,y) = x^2 + \ln(y)$, que corresponde a uma função particular em comparação com a solução da EDP desprovida de condição de fronteira.

Portanto, quando construímos problemas de valores de contorno, de fronteira ou mistos, as soluções obtidas são particulares quando comparamos com a solução da EDP correspondente, o que permite especificar a solução para cada problema de acordo com suas condições associadas. Finalize esse desafio acrescentando à essa discussão outras informações, bem como os conhecimentos necessários para a compreensão de cada etapa da resolução desse problema, destacando possíveis dúvidas que podem ser manifestadas pelos alunos da engenharia e os encaminhamentos que podem ser adotados frente a essas dificuldades.

Faça valer a pena

1. As equações diferenciais parciais, assim como as ordinárias, podem ser classificadas segundo algumas categorias específicas. Esse tipo de classificação pode contribuir com a identificação do método a ser empregado em sua resolução, bem como nas ordens das derivadas associadas, entre outras.
Considere que um estudante precisa resolver um problema modelado por uma equação diferencial parcial de segunda ordem, quase-linear e não-homogênea.

Com base nessas informações, qual das seguintes alternativas indica uma equação que se encaixa na classificação da EDP que deve ser resolvida pelo estudante?

a) $\left(u_y\right)^2 + 2u_x = 0$.
b) $u_{xy} + 3u_x + u = 0$.
c) $y^3 u_{yy} + uu_x + 3xy = 0$.
d) $\left(u_y\right)^3 - 3u = 5$.

e) $u_{xx} + u_{yy} = 12$.

2. De acordo com Bronson e Costa (2008), uma função $u = u(x, y)$ é chamada de harmônica quando é solução da equação de Laplace, isto é, quando satisfaz $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Em relação a esse tema, considere as seguintes funções:
$f(x, y) = 3x + 4y - 2$
$g(x, y) = e^{3x}\cos(3y)$
$h(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a função *g* pode ser classificada como harmônica.
b) Apenas a função *h* pode ser classificada como harmônica.
c) Apenas as funções *f* e *g* podem ser classificadas como harmônicas.
d) Apenas as funções *f* e *h* podem ser classificadas como harmônicas.
e) As funções *f*, *g* e *h* podem ser classificadas como harmônicas.

3. Considere o seguinte problema misto relativo à equação do calor:
$$\begin{cases} u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \pi \end{cases}$$
o qual descreve o fluxo de calor sem fonte em um fio uniforme cujas extremidades são mantidas na temperatura constante zero ao longo do tempo.
Em relação a esse problema, foram feitas as seguintes afirmações:
I. A função $u(x,t) = 3\cos(6t)\ \text{sen}(2x) + 12\cos(39t)\ \text{sen}(13x)$ é solução para o problema misto quando consideramos $f(x) = \text{sen}(x) - 7\text{sen}(3x) + \text{sen}(5x)$.
II. A função $u(x,t) = t\cos(4x) - 5t^5\text{sen}(6x)$ é solução para o problema misto quando consideramos $f(x) = \text{sen}(4x) + 3\ \text{sen}(6x) - \text{sen}(10x)$.
III. A função $u(x,t) = e^{-3t}\text{sen}(x) - 6e^{-48t}\text{sen}(4x)$ é solução para o problema misto quando consideramos $f(x) = \text{sen}(x) - 6\ \text{sen}(4x)$.

Em relação às afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmação I está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
d) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
e) As afirmações I, II e III estão corretas.

Seção 3.2

Estudo do problema de transferência de calor.

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos as equações diferenciais parciais e observamos suas principais propriedades. Nesta segunda seção direcionaremos nossos estudos a uma equação diferencial parcial específica: a equação do calor, empregada na descrição de problemas envolvendo a condução de calor. Essa equação é fundamental para o estudo de situações nas quais esse fenômeno ocorre, como é o caso de problemas relacionados às indústrias, na construção de caldeiras, na indústria aeroespacial, entre outros. Em nossos estudos, vamos analisar problemas de condução do calor em barras ao longo do tempo, que se trata de um problema em uma região unidimensional na qual tomaremos o tempo como uma segunda variável a ser avaliada.

Nesse sentido, no contexto de elaboração de um plano de aula voltado a alunos do curso de Licenciatura em Matemática a respeito das equações diferenciais parciais, sua segunda tarefa consiste na elaboração da segunda etapa desse plano, a qual deve envolver o estudo de um problema modelado pela equação do calor com condições de fronteira não homogêneas. Assim, para essa segunda tarefa, você deve elaborar uma proposta que contemple o seguinte problema: Considere que uma barra metálica de comprimento igual a um metro seja isolada na superfície e mantida com temperatura inicial de 15 °C em todo o seu comprimento e suas extremidades sejam mantidas a uma temperatura fixa de 10 °C para todo tempo $t > 0$. Qual é o modelo matemático para a temperatura $u(x,t)$ dessa barra considerando $K = 1$? Qual é a solução desse problema? Como podemos ilustrar esse fenômeno a partir de representações gráficas e/ou esquemas?

Selecione uma estratégia que possa ser adotada para a elaboração desta segunda parte do plano e que contemple a investigação do problema apresentado. Organize a proposta da forma como será apresentada aos alunos, construa sua resolução, reflita sobre possíveis dúvidas que possam surgir durante a resolução do problema e quais os encaminhamentos que podem ser adotados diante dessas dificuldades. Elabore um documento que contemple todos os elementos indicados.

Para que esse desafio possa ser cumprido, ao longo dessa seção você estudará a equação do calor unidimensional e como obter sua solução quando tomamos algumas condições em específico, como os problemas com condições de fronteira fixas, sejam elas homogêneas ou não-homogêneas.

Assim, prossiga em seus estudos e solucione o desafio proposto!

Na seção anterior, discutimos a respeito das equações diferenciais parciais, as possíveis classificações quanto à ordem, linearidade e homogeneidade, bem como o estudo das soluções e condições correspondentes.

Anteriormente, iniciamos o estudo de problemas relativos a condução do calor. Vimos que se $u = u(x,t)$ corresponde à distribuição de temperatura em uma barra, por exemplo, as variações de temperatura ao longo do tempo t e em relação à posição x é descrita pela equação do calor unidimensional, dada por $u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t)$, em que $K > 0$ é uma constante relacionada ao material no qual a barra foi produzida (FIGUEIREDO, 2012).

O que possibilita a construção de problemas específicos e, portanto, a identificação de soluções particulares, é o acréscimo de condições iniciais e de fronteira, conforme as propriedades da situação em estudo. Assim, podemos construir diferentes problemas, gerando soluções diversas, mas todos com base na mesma equação diferencial parcial, que consiste na equação do calor.

Vejamos alguns tipos de problemas que podem ser estudados, ou seja, alguns tipos de condições que podem ser adotadas. Assim, consideremos uma barra de comprimento L, com $0 \leq x \leq L$.

Equação do calor com condições de fronteira homogêneas

Vamos supor que a temperatura na barra esteja sujeita a uma condição inicial $u(x,0) = f(x)$ para $0 \leq x \leq L$, isto é, no instante $t = 0$, a temperatura na barra varia conforme a função $f(x)$, de domínio $[0,L]$. Quando apenas essa condição é especificada, temos um problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}.$$

Para complementar esse problema, vamos supor que ao longo do tempo as extremidades dessa barra sejam mantidas à temperatura fixa de 0 °C, ou seja, temos $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ para $t > 0$. Com isso, temos a indicação de condições de fronteira do tipo I, como visto na seção anterior, o que permite a elaboração do seguinte problema misto:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases},$$

que consiste no problema da **equação do calor unidimensional com condições de fronteira homogêneas**, ou seja, condições de fronteira nulas para $t>0$. Como podemos resolver esse problema? Como identificar sua solução? Para isso, empregaremos a **separação de variáveis**. Nesse método, vamos supor que a solução $u=u(x,t)$ do problema possa ser escrita como $u(x,t)=F(x)G(t)$, ou seja, como um produto de funções de uma variável real associadas às variáveis x e t em estudo (FIGUEIREDO, 2012). Para que seja possível empregar esse método, devemos ter a equação diferencial parcial e as condições de fronteira lineares, com a possibilidade de expandir a função f em uma série de Fourier convergente (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012), além disso, deve ser possível separar a EDP em duas EDOs, relativas a cada uma das variáveis independentes consideradas.

Assimile

O método da separação de variáveis para a resolução de um problema modelado por uma equação diferencial parcial consiste em supor que a solução $u=u(x,t)$ corresponde ao produto de funções que dependem apenas de x e t, isto é, a solução é da forma $u(x,t)=F(x)G(t)$.

Desejamos resolver o problema anterior utilizando essa estratégia. Para isso, calculemos as derivadas parciais de u com base na separação de variáveis, obtendo $u_x(x,t)=F'(x)G(t)$, $u_{xx}(x,t)=F''(x)G(t)$ e $u_t(x,t)=F(x)G'(t)$. Substituindo as duas últimas igualdades na equação do calor segue que:

$$F''(x)G(t)=K\left[F(x)G'(t)\right] \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)}=K\frac{G'(t)}{G(t)}$$

Na última igualdade, podemos observar, no primeiro membro, uma combinação de funções associadas apenas a x e, no segundo membro, combinação de funções que depende apenas de t. Logo, para que a igualdade seja válida em $0<x<L$ e $t>0$ devemos ter ambos os membros iguais a uma constante, ou seja, $\frac{F''(x)}{F(x)}=K\frac{G'(t)}{G(t)}=-\sigma$, com σ uma constante real independente de x e de t. Assim, para $0<x<L$ e $t>0$, respectivamente, temos:

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=-\sigma \Rightarrow F''(x)=-\sigma F(x) \Rightarrow F''(x)+\sigma F(x)=0$$

$$K\frac{G'(t)}{G(t)}=-\sigma \Rightarrow KG'(t)=-\sigma G(t) \Rightarrow G'(t)=-\frac{\sigma}{K}G(t) \Rightarrow G'(t)+\frac{\sigma}{K}G(t)=0$$

Nos dois casos temos equações diferenciais ordinárias, pois são equações que estão associadas a funções de uma variável real. Assim, podemos empregar os procedimentos correspondentes para a resolução de EDOs.

Para o primeiro caso, relativo à $F(x)$, como $u(0,t)=0$ e $u(0,t)=F(0)G(t)$ então devemos ter $F(0)G(t)=0$ para todo $t>0$. Note que se $F(0)\neq 0$ então

deveríamos ter $G(t)=0$ para todo $t>0$, o que implica em G ser identicamente nula. Porém, se isso ocorresse, teríamos $u(x,t)=F(x)G(t)=0$ para todo $t>0$, ou seja, a solução do problema seria apenas a função nula, algo impossível se tivéssemos a condição $u(x,0)=f(x)\neq 0$ para algum x real. Logo, das condições de fronteira presentes no problema, podemos concluir que $F(0)=0$ e $F(L)=0$.

Assim, queremos resolver o problema $\begin{cases} F''(x)+\sigma F(x)=0,\ 0<x<L \\ F(0)=F(L)=0 \end{cases}$, o qual consiste em um problema para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Veja que caso $\sigma=0$, sendo a EDO $F''(x)=0$, sua solução seria da forma $F(x)=c_1x+c_2$, com c_1 e c_2 números reais tais que $F(0)=F(L)=0$, logo, $c_2=0$ e $c_1L+c_2=0$, isto é, $c_1=c_2=0$, o que implica em $F(x)=0$ para todo $0<x<L$. Assim, a EDO admitiria somente a solução trivial.

Porém, como buscamos soluções não nulas para o problema, nosso interesse está em determinar os valores de σ associados a soluções não triviais. Os valores de σ que possibilitam a identificação desses tipos de solução são chamados de **autovalores**, enquanto que as soluções não triviais admitem a nomenclatura **autofunções** (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Diante desse objetivo, vamos determinar os autovalores e autofunções associadas ao problema $\begin{cases} F''(x)+\sigma F(x)=0,\ 0<x<L \\ F(0)=F(L)=0 \end{cases}$. Como já vimos que $\sigma=0$ gera apenas soluções triviais, vamos analisar os outros dois casos possíveis: $\sigma<0$ e $\sigma>0$.

Se $\sigma<0$, podemos reescrevê-lo na forma $\sigma=-\lambda^2$ com $\lambda>0$. Assim, temos a EDO $F''(x)-\lambda^2F(x)=0$ de 2ª ordem, que admite a equação característica $r^2-\lambda^2=0$ com raízes $r=\pm\lambda$. Nesse caso, a solução geral para a EDO é $F(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}$, com c_1 e c_2 constantes reais. Como devemos ter $F(0)=F(L)=0$, então

$$0=F(0)=c_1e^0+c_2e^{-0} \ \Rightarrow\ c_1+c_2=0$$

$$0=F(L)=c_1e^{\lambda L}+c_2e^{-\lambda L} \ \Rightarrow\ c_1e^{\lambda L}+c_2e^{-\lambda L}=0$$

que consiste em um sistema cuja solução única é a trivial, ou seja, $c_1=c_2=0$. Logo, a EDO admite somente a solução trivial, não existindo autovalores e autofunções correspondentes.

Por outro lado, se $\sigma>0$, sendo $F''(x)+\sigma F(x)=0$ uma EDO de 2ª ordem, admite a equação característica $r^2+\sigma=0$, a qual tem raízes $r=\pm\sqrt{\sigma}i>$, ou seja, raízes complexas conjugadas. Nesse caso, a solução geral para a EDO é dada por $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$, com c_1 e c_2 constantes reais. Como devemos ter $F(0)=F(L)=0$, então

$$0=F(0)=c_1\cos(0)+c_2\text{sen}(0)=c_1 \ \Rightarrow\ c_1=0$$

$$0 = F(L) = 0\cos\left(\sqrt{\sigma}L\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) \Rightarrow c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) = 0$$

Como queremos soluções não triviais, e da primeira condição temos $c_1 = 0$, então necessariamente $c_2 \neq 0$, implicando em $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) = 0$. Dessa forma, devemos ter $\sqrt{\sigma}L = n\pi$, com n inteiro não nulo, ou $\sqrt{\sigma} = \frac{n\pi}{L}$, ou ainda, $\sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Assim, os autovalores associados são da forma $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{L^2}$, $\sigma_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}$, $\sigma_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}$, ..., $\sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, ..., com n inteiro positivo, e as autofunções correspondentes são da forma $F_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ para n inteiro positivo, sendo que qualquer múltiplo dessas funções também pode ser caracterizado como autofunção para esse problema.

Em síntese, o problema $\begin{cases} F''(x) + \sigma F(x) = 0,\ 0 < x < L \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases}$ admite solução não trivial somente quando $\sigma > 0$, e, nesse caso, o problema apresenta os autovalores da forma $\sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, com n inteiro positivo, e as autofunções como múltiplas de termos na forma $F_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Assim, as soluções para o problema podem ser construídas a partir dos autovalores e autofunções correspondentes.

Assimile

Na resolução de uma equação diferencial ordinária na forma $y'' + \sigma y = 0$, sujeita a condições iniciais $y(0) = y(L) = 0$, para algum L positivo, os valores de σ associados às soluções não triviais do problema são chamados de **autovalores**, enquanto as soluções não triviais são as **autofunções.**

Em relação à segunda equação diferencial ordinária, $G'(t) + \frac{\sigma}{K}G(t) = 0$, sua solução geral é da forma $G(t) = ce^{-(\sigma/K)t}$, com c constante, por se tratar de uma EDO linear de 1ª ordem.

Sendo assim, para cada n inteiro positivo, temos uma função da forma $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = e^{-(n^2\pi^2/KL^2)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, a qual satisfaz à EDP e as condições auxiliares presentes no problema misto da equação do calor com condições de fronteira homogêneas, a qual pode ser chamada de **solução fundamental**, para cada n inteiro positivo.

Além das funções dessa forma serem soluções do problema misto, qualquer combinação entre essas funções também será uma solução para o problema. Esse fato nos leva a um resultado importante, denominado **princípio da superposição**, o qual afirma que se $u(x,t)$ e $v(x,t)$ são soluções da equação do calor, $u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t)$, então qualquer função $au(x,t) + bv(x,t)$, com a e b constantes reais, será também solução desta EDP (FIGUEIREDO, 2012).

Logo, qualquer expressão na forma $\sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t)$ com N e n inteiros

positivos e c_n constantes reais, é solução do problema misto. Tomando a condição inicial $u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, a solução do problema misto será $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Note que a condição inicial é tomada na forma de uma representação em série de Fourier de senos para *f* em que os coeficientes são calculados por $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$. Portanto, a solução para a equação diferencial parcial pode ser dada pela série infinita $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Reflita

Identificamos um possível candidato para a solução do problema misto: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Substituindo essa função na equação do calor unidimensional, podemos afirmar que ela é solução da equação? Essa função satisfaz à condição inicial e condições de contorno?

A solução e as condições empregadas na resolução desse problema envolvendo a equação do calor podem ser empregadas em problemas semelhantes, de modo que a solução é determinada em função das séries de Fourier.

Exemplificando

Considere uma barra metálica produzida em um material com $K=0{,}86\ \mathrm{s/m^2}$, com um metro de comprimento. Suponha que essa barra esteja isolada termicamente de tal forma que sua temperatura inicial seja de 20 °C em toda a barra, e que ao longo do tempo $(t>0)$ suas extremidades sejam mantidas a 0 °C.

Do problema da equação do calor com condições de fronteira homogêneas, com $0\le x\le 1$, $u(x,0)=f(x)=20$ e $u(0,t)=u(1,t)=0$ para todo $t>0$, sabemos que sua solução $u=u(x,t)$ será:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/0{,}86\cdot 1^2\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/0{,}86\right)t}\operatorname{sen}\left(n\pi x\right)$$

Calculando os coeficientes a partir da expansão em série de Fourier de senos para a função *f* temos, para cada *n* inteiro positivo:

$$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=2\int_0^1 20\operatorname{sen}\left(n\pi x\right)dx=40\int_0^1 \operatorname{sen}\left(n\pi x\right)dx$$

$$=40\left[-\frac{\cos\left(n\pi x\right)}{n\pi}\right]_0^1=40\left[-\frac{\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}-\left(-\frac{\cos\left(0\right)}{n\pi}\right)\right]=40\left(\frac{1-\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}\right)$$

$$=\begin{cases}80/n\pi, & n \text{ ímpar}\\ 0, & n \text{ par}\end{cases}$$

Sendo assim, a solução para o problema é da forma

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{80}{(2k-1)\pi}e^{-\left((2k-1)^2\pi^2/0{,}86\right)t}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)$$

Vimos o caso do problema em que as condições de fronteira são homogêneas, ou seja, a temperatura nas extremidades é nula. Vejamos outro caso, no qual essas condições não são tomadas homogêneas.

Equação do calor com condições de fronteira não homogêneas

Considere agora que as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas fixas e diferentes de 0 ºC. Nesse caso, temos o problema da **equação do calor unidimensional com condições de fronteira não homogêneas**, dado por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), \ \ t>0, \ \ 0<x<L \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 \le x \le L \\ u(0,t) = T_1; \ u(L,t) = T_2, \ \ t>0 \end{cases}$$

em que T_1 e T_2 são constantes reais ambas diferentes de zero (FIGUEIREDO, 2012).

Esse problema pode ser resolvido por meio da sua redução a um problema de condições de fronteira homogêneas, empregando o método já estudado. Para isso, empregaremos um conhecimento físico importante, que consiste em avaliar que, após um período de tempo muito longo, ou seja, quando $t \to \infty$, a temperatura assumida pelo sistema será do tipo estacionária, independentemente do tempo t e das condições iniciais, podendo ser representada por $v(x)$. Como v é uma função que depende apenas de x, a derivada de v em relação a t é nula. Assim, como v deve satisfazer a equação do calor, devemos ter $v''(x) = K \cdot 0 = 0$, ou seja, $v''(x) = 0$, com $0 < x < L$. Além disso, a temperatura no estado estacionário deve satisfazer às condições de contorno $v(0) = T_1$ e $v(L) = T_2$, porque estas devem ser verificadas para todo $t > 0$. Resolvendo o problema $\begin{cases} v''(x) = 0, \ 0 < x < L \\ v(0) = T_1; \ v(L) = T_2 \end{cases}$, obtemos a solução $v(x) = (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} + T_1$. Note que v é representada graficamente por uma reta de equação $y = ax + b$, na qual o coeficiente angular é $a = (T_2 - T_1)/L$ e o coeficiente linear é $b = T_1$.

Como a distribuição de temperatura no problema relativo à equação do calor com condições de fronteira não homogêneas pode ser representada como a soma da distribuição de temperatura em um estado estacionário $(v(x))$ com um transiente $(w(x,t))$, em que o transiente representará as variações de temperatura com o tempo desde a condição inicial até atingir a solução estacionária, isto é, como $u(x,t) = v(t) + w(x,t)$ então o problema estará resolvido se for possível determinar a solução associada ao estado transiente, ou seja, determinar $w(x,t)$. Pela expressão $u(x,t) = v(t) + w(x,t)$ e da equação do calor segue que:

$$(v+w)_{xx} = K(v+w)_t \;\Rightarrow\; v_{xx} + w_{xx} = K(v_t + w_t) \;\Rightarrow\; w_{xx} = Kw_t,$$

porque $v_{xx} = v_t = 0$. Das condições de fronteira e condição inicial segue

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0$$

$$w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$$

Assim, o estado transiente é descrito pelo problema $\begin{cases} w_{xx}(x,t) = Kw_t(x,t), & t>0, \;\; 0<x<L \\ w(x,0) = f(x) - v(x), & 0 \le x \le L \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t>0 \end{cases}$, que consiste em um problema para a equação do calor com condições de fronteira homogêneas, cuja solução já foi estudada anteriormente.

Portanto, a solução para o problema de condução do calor com condições de fronteira não homogêneas tem solução $u(x,t) = v(x) + w(x,t) = (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} + T_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, em que $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} - T_1\right] \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) dx$ (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Dica

Nas situações apresentadas, estudamos o problema da condução do calor em uma barra de modo que a temperatura é estudada em um ponto *x* e em um instante de tempo *t*. Se avaliássemos a temperatura em uma placa bidimensional, por exemplo, teríamos uma função $u = u(x,y,t)$, que indica a temperatura em um ponto (x,y) e em um instante de tempo *t*, a qual corresponde à solução da equação do calor na forma $u_{xx} + u_{yy} = Ku_t$. Para mais informações a respeito desse tema consulte a Seção 2.2, *Equação do calor bidimensional*, do artigo *A Equação de Condução de Calor Uni e Bidimensional: solução usando transformada integral e o método da separação de variáveis*. Revistas Unicentro.

Podemos organizar os dois casos estudados a partir de uma única situação, associada a barras com extremidades com temperaturas mantidas fixas ao longo do tempo, conforme o item a seguir.

Equação do calor com extremidades mantidas a temperaturas fixas

Se uma barra com distribuição de temperatura dada por $u = u(x,t)$ tem suas extremidades mantidas a temperaturas fixas, independentemente dos valores assumidos, temos um problema misto de condução do calor do tipo

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), \ t>0, \ 0<x<L \\ u(x,0) = f(x), \ 0 \le x \le L \\ u(0,t) = T_1; \ u(L,t) = T_2, \ t>0 \end{cases}$$, com T_1 e T_2 reais.

Dica

Para complementar os estudos a respeito da equação do calor, consulte o artigo *Resolução de uma Equação Diferencial Parcial pelo Método da Separação de Variáveis no problema de Condução do Calor em uma Barra*, de Carlos Friedrich Loeffler e Bruno Ramos Gonzaga, CMAC.

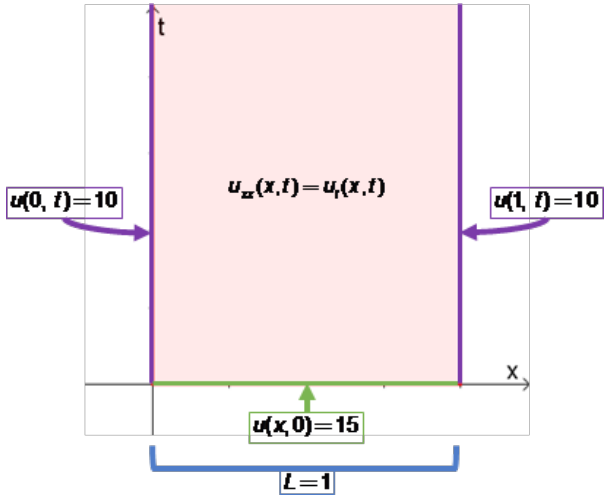
Sem medo de errar

No contexto de elaboração de um plano de aula, voltado a alunos da graduação em Licenciatura em Matemática, a respeito das equações diferenciais parciais e aplicações, sua tarefa consiste em elaborar a segunda parte do plano, contemplando o problema descrito relativo à equação do calor unidimensional.

Para essa segunda parte, pode ser proposto um trabalho em pequenos grupos, com dois ou três alunos cada, por meio da estratégia da resolução de problemas com posterior discussão coletiva em relação ao tema proposto. Assim, as orientações iniciais dizem respeito à organização da turma em grupos e a entrega, para cada grupo, de uma cópia impressa do enunciado da questão.

O problema que os grupos devem resolver consiste em partir de uma barra metálica de comprimento unitário, que podemos considerar como comprimento igual a um metro, por exemplo, com $K = 1$, isolada na superfície, mantida com temperatura inicial de 15 °C em todo o seu comprimento e com extremidades mantidas a uma temperatura fixa de 10 °C para todo tempo $t > 0$. Podemos representar graficamente essa situação conforme a Figura 3.2.

Figura 3.2 | Condições iniciais e de contorno para o problema da barra metálica



Fonte: elaborada pela autora.

Temos, assim, um problema associado à equação do calor com condições de fronteira não homogêneas, o qual pode ser descrito por $\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_t(x,t),\ \ t>0,\ \ 0<x<1 \\ u(x,0)=15,\ \ 0\le x\le 1 \\ u(0,\ t)=10;\ u(1,\ t)=10,\ \ t>0 \end{cases}$. Queremos avaliar a temperatura $u=u(x,t)$ nessa barra ao longo do tempo *t*. Para isso, precisamos decompor a solução em duas partes: uma referente ao estado estacionário $\left(v(x)\right)$ e a outra, ao estado transiente $\left(w(x,t)\right)$, de modo que $u(x,t)=v(x)+w(x,t)$.

Como estudado anteriormente, para o estado estacionário, a solução é dada por

$$v(x)=(10-10)\frac{x}{1}+10=10$$

Para o transiente, devemos resolver o problema $\begin{cases} w_{xx}(x,t)=w_t(x,t),\ \ t>0,\ \ 0<x<1 \\ w(x,0)=15-10=5,\ \ 0\le x\le 1 \\ w(0,\ t)=w(1,\ t)=0,\ \ t>0 \end{cases}$.

A solução para esse problema é da forma $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x)$ com

$$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=2\int_0^1 5\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx=10\int_0^1\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$=10\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1=10\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}-\left(-\frac{\cos(0)}{n\pi}\right)\right]=10\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}\right)=\begin{cases}20/n\pi,\ n\text{ ímpar}\\ 0,\ n\text{ par}\end{cases}$$

Logo, a solução da parte transiente é $w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{20}{(2k-1)\pi}e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)$.

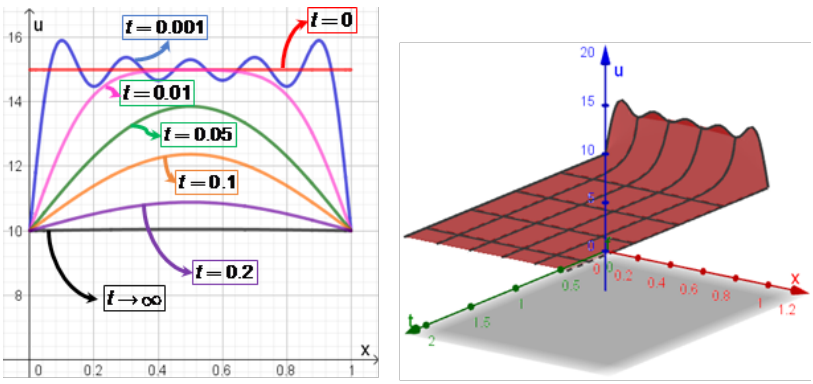
Portanto, a solução para o problema de condução de calor na barra metálica é dado por

$$u(x,t)=10+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{20}{(2k-1)\pi}e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)$$

Durante a resolução desse problema, os alunos podem partir dos conhecimentos a respeito da resolução de problemas para a equação do calor com condições de fronteira homogêneas, associando com os conhecimentos físicos, obtidos por meio de pesquisas, a respeito dos estados estacionário e transiente. Nesse processo, o professor deve ter uma participação ativa, orientando os alunos por meio de questionamentos para que eles possam construir suas próprias afirmações e conclusões. Para contribuir com os estudos, os grupos podem ser orientados a realizarem construções de gráficos e esquemas para contribuir com o estudo da solução obtida.

Podemos construir uma representação gráfica que descreve a temperatura ao longo da barra em determinados instantes de tempo, conforme apresentado na Figura 3.3(a), por meio de uma representação bidimensional. Já na Figura 3.3(b) podemos observar um gráfico tridimensional que ilustra as variações na temperatura em todos os pontos da barra considerando as variações no tempo. Ambos os gráficos foram construídos tomando a expressão da solução $u(x,t)$ considerando apenas 5 termos na soma infinita, ou seja, com k variando de 1 a 5.

Figura 3.3 | Gráficos das variações de temperatura em função da posição



(a) Em determinados instantes de tempo (b) Em função do tempo

Fonte: elaborada pela autora.

A partir dos gráficos podemos observar que, nessa situação, o estado permanente é atingido para

$t < 1$, que corresponde à manutenção de uma temperatura fixa de 10 °C em toda a barra e para t tendendo ao infinito. O estado transiente corresponde ao período no qual observamos as variações na temperatura entre o estado inicial e o início do estado permanente.

Para finalizar sua tarefa, organize os principais pontos que podem ser apresentados aos alunos, como discussões a respeito de uma solução que envolve funções exponenciais e trigonométricas e como os perfis dessas funções estão presentes nos gráficos correspondentes, qual é o significado dos estados permanente e transiente na situação descrita, entre outros. Finalize com a organização de um documento contendo todas as informações que vão compor a apresentação aos alunos do Ensino Médio a respeito das aplicações da Matemática no campo das Engenharias.

Avançando na prática

Resfriamento de barras metálicas

Descrição da situação-problema

Suponha que você foi contratado para auxiliar determinada indústria em um estudo teórico associado a processos empregados por ela na produção de barras metálicas para a construção civil. Para isso, considere que nas últimas etapas da produção de determinada barra com comprimento de 20 cm, a qual estava aquecida a 100 °C, em um dado instante $t = 0$ essa barra tem suas extremidades submetidas a um banho gelado a 0 °C, de modo que essas regiões permaneçam a essa temperatura ao longo do tempo. Também suponha que não ocorra trocas de calor entre o meio e a superfície da barra. Diante dessa situação, a empresa deseja saber uma previsão a respeito do tempo necessário para que o centro dessa barra esfrie até uma temperatura de 5 °C, sabendo que $K = 0{,}86 \ \mathrm{s/cm^2}$. Assim, resolva esse problema de modo a atender à solicitação da indústria, detalhando o processo de obtenção da informação em questão.

Resolução da situação-problema

O problema pode ser representado por $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = 0{,}86 \cdot u_t(x,t), & t > 0, \ \ 0 < x < 20 \\ u(x,0) = 100, & 0 \leq x \leq 20 \\ u(0,t) = u(20,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$, que consiste em um problema para a equação do calor com condições de fronteira homogêneas. Como $L = 20$ e $K = 0{,}86$, a solução para esse problema é

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(n^2\pi^2/0{,}86\cdot 20^2\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(n^2\pi^2/344\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right).$$

Os coeficientes podem ser calculados como segue:

$$c_n=\frac{2}{20}\int_0^{20}f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx=\frac{1}{10}\int_0^{20}100\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx=10\int_0^{20}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx=10\left[-\frac{\cos\left(n\pi x/20\right)}{n\pi/20}\right]_0^{20}$$

$$=10\left[-\frac{20\cos(n\pi)}{n\pi}-\left(-\frac{20\cos(0)}{n\pi}\right)\right]=200\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}\right)\quad=\begin{cases}400/n\pi, & n \text{ ímpar}\\ 0, & n \text{ par}\end{cases}$$

Logo, a solução para o problema é $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{(2n-1)\pi}e^{-\left((2n-1)^2\pi^2/344\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{20}\right)$.

Queremos avaliar em que instante é atingida a temperatura de 5 °C no centro da barra, ou seja, quando $x=10$ cm. Adotando um termo na expansão em série para u obtemos

$$5=u(10,t)=\frac{400}{\pi}e^{-\left(\pi^2/344\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{20}\right)=\frac{400}{\pi}e^{-\left(\pi^2/344\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{400}{\pi}e^{-\left(\pi^2/344\right)t}$$

$$\Rightarrow\ \frac{5\pi}{400}=e^{-\left(\pi^2/344\right)t}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{80}=e^{-\left(\pi^2/344\right)t}\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{\pi}{80}\right)=-\frac{\pi^2}{344}t\ \Rightarrow\ \left(-\frac{344}{\pi^2}\right)\ln\left(\frac{\pi}{80}\right)=t\ \Rightarrow\ t\approx 112{,}8$$

Portanto, o tempo aproximado para que a temperatura do centro da barra seja reduzida para 5 °C é de 122,8 segundos. Finalize sua tarefa com a elaboração de um relatório técnico a ser encaminhado para a indústria com os resultados obtidos ao longo da investigação do problema proposto.

Faça valer a pena

1. Considere as equações diferenciais parciais descritas por:

I. $xu_{xx}+u_t=0$

II. $tu_{xx}+xu_t=0$

III. $u_{xx}+u_{xt}+u_t=0$

Desejamos verificar se essas equações podem ser estudadas a partir da estratégia da separação de variáveis, ou seja, se ao supor que a solução da EDP seja da forma $u(x,t)=F(x)G(t)$, podemos repará-la em equações diferenciais ordinárias relativas a x e a t.

Com base nessas informações, assinale a alternativa que destaca quais das equações apresentadas pode ser estudada mediante a separação de variáveis:

a) Apenas a equação I.
b) Apenas a equação III.
c) Apenas as equações I e II.
d) Apenas as equações II e III.
e) As equações I, II e III.

2. Seja uma barra metálica de 40 centímetros de comprimento e tal que $K = 1 \ \mathrm{s/cm^2}$. Suponha que a barra esteja a uma temperatura inicial de 100 °C e que, a partir desse instante, que adotaremos como $t = 0$, a temperatura nas extremidades seja alterada para 0 °C.

A solução geral para problemas modelados pela equação unidimensional do calor é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Porém, além das informações presentes no contexto, quando ao comprimento da barra e o valor de *K*, para que a solução esteja bem definida devemos determinar os coeficientes c_n, para *n* inteiro positivo.

Assinale a alternativa que indica corretamente a expressão para os coeficientes c_n, com *n* inteiro positivo:

a) $c_n = \begin{cases} 400/n\pi, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$.

b) $c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar} \\ 400/n\pi, & n \text{ par} \end{cases}$.

c) $c_n = \begin{cases} 200/n\pi, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$.

d) $c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar} \\ 200/n\pi, & n \text{ par} \end{cases}$.

e) $c_n = \begin{cases} -400/n\pi, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$.

3. Considere que uma barra, produzida a partir de um material tal que $K = 4\ \mathrm{s/cm^2}$, apresenta 50 cm de comprimento. De modo a avaliar a distribuição de temperatura nessa barra, suponha que um pesquisador submeteu, inicialmente, toda a barra a uma temperatura inicial de 100 °C. Além disso, uma das extremidades dessa barra foi submetida a uma temperatura de 0 °C, enquanto que a outra foi submetida a uma temperatura de 50 °C, de modo que essa situação foi mantida continuamente ao longo de todo o estudo. Considere também que a barra foi isolada de tal forma que não existam trocas de calor com o ambiente.
Esse pesquisador deseja conhecer a distribuição de temperatura em um ponto qualquer *x* dessa barra, e em um instante *t* de tempo qualquer.

Com base nessas informações, assinale a alternativa que indica corretamente a expressão da função $u = u(x,t)$ que descreve a distribuição de temperatura nessa barra, conforme as condições indicadas:

a) $u(x,t) = \frac{300}{\pi} e^{-(\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + \frac{100}{2\pi} e^{-(4\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \frac{300}{3\pi} e^{-(9\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{50}\right) + \ldots$

b) $u(x,t) = x + \frac{300}{\pi} e^{-(\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + \frac{300}{3\pi} e^{-(9\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{50}\right) + \frac{300}{5\pi} e^{-(25\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{50}\right) + \ldots$

c) $u(x,t) = \frac{100}{2\pi} e^{-(4\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \frac{100}{4\pi} e^{-(16\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{50}\right) + \frac{100}{6\pi} e^{-(36\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{50}\right) + \ldots$

d) $u(x,t) = x + \frac{300}{\pi} e^{-(\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + \frac{100}{2\pi} e^{-(4\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \frac{300}{3\pi} e^{-(9\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{50}\right) + \ldots$

e) $u(x,t) = \frac{200}{\pi} e^{-(\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{50}\right) + \frac{200}{2\pi} e^{-(4\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{50}\right) + \frac{200}{3\pi} e^{-(9\pi^2/10000)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{50}\right) + \ldots$

Seção 3.3

Equação do calor e séries de Fourier.

Diálogo aberto

Nas seções anteriores, estudamos as equações diferenciais parciais e suas aplicações na modelagem e na resolução de problemas envolvendo as transferências de calor e as variações de temperaturas em barras, isto é, em objetos nos quais consideramos apenas as variações de posição, de forma unidimensional, e variações no tempo. Logo, as funções em estudo correspondem a funções de duas variáveis reais em que uma descreve uma posição e a outra, o tempo. Nesta seção, destacaremos a importância das séries de Fourier para a resolução de problemas modelados pela equação do calor como forma de evidenciar a aplicabilidade destas séries em problemas práticos.

Sendo assim, prosseguindo com a elaboração de plano de aula voltado aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, relacionados às equações diferenciais parciais e suas aplicações, sua tarefa consiste em elaborar a última parte do plano de aula. Assim, estruture a terceira parte do plano, a qual deve contemplar a seguinte situação-problema: considere que uma barra metálica de comprimento unitário seja isolada na superfície, mantida com temperatura inicial descrita pela função $f(x)=x$ em todo o seu comprimento. Além disso, suponha que sua extremidade indicada por $x=0$ seja mantida a uma temperatura fixa de 0 °C para todo $t>0$, enquanto que a outra extremidade, em que $x=1$, seja mantida isolada para todo $t>0$, sem ganho ou perda de calor ao longo do tempo. Qual é o modelo matemático para a temperatura $u(x,t)$ dessa barra considerando $K=0{,}86$? Qual é a solução desse problema? Como podemos ilustrar esse fenômeno e sua solução a partir de representações gráficas e/ou esquemas?

Adotando uma estratégia semelhante à da seção anterior, elabore a terceira parte do plano, selecionando uma estratégia metodológica adequada e que possibilite a abordagem da situação-problema descrita, descrevendo qual deve ser o papel e as ações do professor durante a aplicação do plano de aula aos estudantes. Apresente também a resolução para a situação apresentada, bem como as possíveis dúvidas que podem ser manifestadas pelos estudantes durante sua resolução e os encaminhamentos que podem ser adotados nesses casos. Para essa tarefa, estudaremos a associação entre séries de Fourier e a resolução de problemas modelados pela equação do calor unidimensional, observando outros tipos de condições de fronteira que podem ser adotadas no estudo desses tipos de problemas.

Dessa forma, você estará apto a finalizar o plano de aula envolvendo as

equações diferenciais parciais e sua aplicação no estudo de problemas envolvendo a equação do calor unidimensional. Assim, conclua seus estudos com a estruturação do plano, contemplando as três partes desenvolvidas no decorrer da unidade, refletindo a respeito da importância do estudo das equações diferenciais parciais para os graduandos em Licenciatura em Matemática e indicando situações reais nas quais os problemas de condução de calor possam estar presentes.

Dê continuidade aos seus estudos e confira os conceitos necessários para a conclusão de seu desafio!

Não pode faltar

Na seção anterior discutimos a respeito dos problemas envolvendo equação do calor em uma barra com extremidades cujas temperaturas eram mantidas fixas, sendo homogêneas ou não. Por meio do método da separação de variáveis foi possível identificar soluções para cada problema a partir da resolução de equações diferenciais ordinárias relativas às variáveis x e t.

Para o problema da equação do calor com condições homogêneas, o qual pode ser representado por $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), & t>0, \quad 0<x<L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t>0 \end{cases}$, verificamos que um candidato à solução do problema consiste em $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, isto é, em uma combinação de todas as **soluções fundamentais** encontradas e que são da forma $e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, para $n \in \mathbb{N}$. Os coeficientes em $u(x,t)$ devem ser calculados considerando a possibilidade de representação da função f na forma $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Dessa forma, os c_n, $n \in \mathbb{N}$ são os coeficientes da série de Fourier de senos para f, a qual deve ser definida em um intervalo $[0,L]$ e estendida a todo o $\mathbb{R}$ segundo uma extensão periódica ímpar de período $2L$, o que implica em $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$. Além disso, devemos ter f contínua, $f(0) = f(L) = 0$ e f' contínua por partes.

Logo, a solução para o problema misto associado à equação do calor com condições homogêneas pode ser obtida desde que f satisfaça as condições do Teorema 2.6, admita uma extensão periódica ímpar, seja contínua, $f(0) = f(L) = 0$ e f' seja contínua por partes.

Para comprovar a existência de solução ao problema misto, vejamos a seguinte definição.

Definição 3.1: Sendo $\Re = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L,\ t > 0\}$ e $\overline{\Re} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0\}$, dizemos que uma função $u : \overline{\Re} \to \Re$ é uma **solução** do problema misto da equação do calor, com condições de fronteira homogêneas, se u tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em $\Re$ e satisfizer a todas as condições presentes no problema misto (FIGUEIREDO, 2012).

Porém, como devemos considerar a condição inicial, associada a f, como um elemento essencial, vejamos o seguinte teorema e a comprovação de que a combinação de soluções fundamentais encontrada consiste na solução do problema de interesse.

Teorema 3.1: seja $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em que $f(0) = f(L) = 0$, a derivada f' exista em $[0,L]$ e, além disso, as funções f e $|f^2|$ sejam integráveis. Dessa forma, a expressão $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ define uma função contínua em $\overline{\Re}$, que é solução do problema misto no sentido da Definição 3.1 (FIGUEIREDO, 2012).

A demonstração para esse teorema pode ser encontrada em Figueiredo (2012). Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ consiste em uma solução para o problema misto da equação do calor com condições homogêneas desde que a função f satisfaça às condições do Teorema 3.1 e admita uma extensão periódica ímpar, pois os coeficientes da série que descreve a solução u estão associados aos coeficientes de Fourier para a série de senos que representa a função f.

Assimile

A solução para o problema $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), & t > 0,\ 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$ é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ com } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

No problema misto para a equação do calor com condições não homogêneas, por um estudo análogo podemos verificar que $u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é a solução de

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), & t > 0,\ 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = T_1;\ u(L,t) = T_2, & t > 0 \end{cases}$$

, com $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Além dos problemas com condições de contorno homogêneas e não homogêneas, podemos ainda estudar problemas em que as condições de fronteira estão associadas às extremidades de uma barra que permanecem termicamente isoladas.

Equação do calor em uma barra com extremidades isoladas

Vamos considerar o problema de condução do calor em uma barra de comprimento L cuja distribuição de temperatura no instante inicial é dada por uma função f e de tal modo que as extremidades dessa barra estão isoladas, não ocorrendo ganhos ou perdas de temperatura através delas. Nesse caso, temos um problema que pode ser descrito na forma:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = Ku_t(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<L \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t>0 \end{cases}$$

Esse problema consiste na condução do calor em uma barra com **extremidades isoladas**.

Reflita

Como podemos relacionar fisicamente as igualdades $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ com o fato de as extremidades da barra permanecerem isoladas?

Empregando o método da separação de variáveis, conforme estudo realizado na seção anterior, obtemos as equações diferenciais ordinárias $F''(x) + \sigma F(x) = 0$ e $G'(t) + \dfrac{\sigma}{K} G(t) = 0$.

Tomando as condições correspondentes, temos o problema $\begin{cases} F''(x) + \sigma F(x) = 0, \ 0<x<L \\ F'(0) = F'(L) = 0 \end{cases}$ para a variável x e a equação $G'(t) + \dfrac{\sigma}{K} G(t) = 0$ para a variável t. As soluções podem ser estudadas a partir dos possíveis valores assumidos pela constante σ. Assim, podemos analisar três casos:

Quando $\sigma < 0$, de modo análogo ao que foi estudado na seção anterior, podemos verificar que a única solução possível para o problema misto é a trivial, a qual pode ser descartada.

No caso de $\sigma = 0$, considerando as condições iniciais impostas, teremos as autofunções $F(x) = 1$ e $G(t) = 1$, o que implica na solução fundamental $u_0(x,t) = 1$.

Tomando $\sigma > 0$, e considerando a notação $\sigma = \lambda^2$, com λ positivo, teremos as soluções como sendo as autofunções $F(x) = \cos\left(n\pi x / L\right)$ e

$G(t)=e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}$, com n natural, e correspondentes aos autovalores $\sigma=\left(n\pi/L\right)^2$. Logo, temos soluções fundamentais na forma $u_n(x,t)=e^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, para n natural.

Em síntese, a função $u_0(x,t)$, em conjunto com as $u_n(x,t)$, para n natural, compõem um conjunto de soluções fundamentais para o problema misto da condução do calor em uma barra com extremidades isoladas.

Seja agora a combinação $u(x,t)=\frac{c_0}{2}u_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Para que a condição inicial seja verificada, é necessário que $u(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=f(x)$, o que corresponde a uma série de Fourier de cossenos para a função f, em que os coeficientes são calculados por $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, para $n\geq 0$, sendo f de período $2L$.

Portanto, a solução para o problema misto da condução do calor em uma barra com extremidades isoladas é da forma $u(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, em que os coeficientes são tais que $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, para $n\geq 0$ e f uma função que atenda às condições estudadas anteriormente.

A solução $u(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pode ainda ser interpretada como um estudo da distribuição de temperatura nos estados transiente e permanente no seguinte sentido: a constante $\frac{c_0}{2}$ caracteriza a temperatura no estado permanente, enquanto que a série $\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\left(n^2\pi^2/KL^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ indica a temperatura no estado transiente, a qual converge para zero quanto t tende ao infinito. Além disso, $\frac{c_0}{2}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ indica a temperatura média no estado permanente (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Exemplificando

Queremos determinar a temperatura $u(x,t)$ em uma barra metálica com 25 unidades de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, com $K=1$ e cuja distribuição inicial de temperatura seja dada por $u(x,0)=2x$ para $0\leq x\leq 25$. Esse problema pode ser representado como:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_t(x,t), & t>0, \quad 0<x<25 \\ u(x,0)=2x, & 0\leq x\leq 25 \\ u_x(0,t)=u_x(25,t)=0, & t>0 \end{cases}$$

Conforme estudado anteriormente, como a condição inicial é descrita

pela função $f(x)=2x$, que atende às condições presentes na Definição 3.1, no Teorema 3.1, e ainda admite uma expansão em série de cossenos por meio da construção de uma expansão periódica par, com $L=25$, a solução para esse problema é da forma:

$$u(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(n^2\pi^2/25^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(n^2\pi^2/625\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right).$$

Os coeficientes podem ser determinados como segue:

$$c_0=\frac{2}{25}\int_0^{25}f(x)\,dx=\frac{2}{25}\int_0^{25}2x\,dx=\frac{2}{25}\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{25}=\frac{2}{25}\left[25^2\right]=50$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2}{25}\int_0^{25}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right)dx=\frac{2}{25}\int_0^{25}2x\cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right)dx\\&=\frac{4}{25}\int_0^{25}x\cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right)dx=\frac{4}{25}\left[\frac{25x\,\mathrm{sen}\left(n\pi x/25\right)}{n\pi}+\frac{625\cos\left(n\pi x/25\right)}{n^2\pi^2}\right]_0^{25}\\&=\frac{4}{25}\left[\frac{625\,\mathrm{sen}\left(n\pi\right)}{n\pi}+\frac{625\cos\left(n\pi\right)}{n^2\pi^2}-0-\frac{625\cos\left(0\right)}{n^2\pi^2}\right]\\&=\frac{4}{25}\left[\frac{625\cos\left(n\pi\right)}{n^2\pi^2}-\frac{625}{n^2\pi^2}\right]=\frac{100}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(n\pi\right)-1\right]=\begin{cases}0,\ n\text{ par}\\-\dfrac{200}{n^2\pi^2},\ n\text{ ímpar}\end{cases}\end{aligned}$$

Portanto, a solução para o problema é da forma:

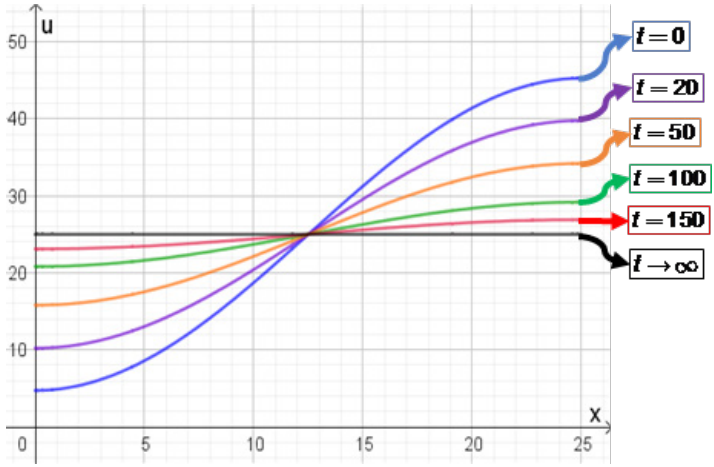
$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{50}{2}-\frac{200}{\pi^2}e^{-\left(\pi^2/625\right)t}\cos\left(\frac{\pi x}{25}\right)+0-\frac{200}{3^2\pi^2}e^{-\left(9\pi^2/625\right)t}\cos\left(\frac{3\pi x}{25}\right)\\&+0-\frac{200}{5^2\pi^2}e^{-\left(25\pi^2/625\right)t}\cos\left(\frac{5\pi x}{25}\right)+0+\ldots\end{aligned}$$

a qual pode ser reescrita como:

$$u(x,t)=25-\frac{200}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}e^{-\left((2k-1)^2\pi^2/625\right)t}\cos\left(\frac{\left(2k-1\right)\pi x}{25}\right)$$

Na Figura 3.4, é possível observar a distribuição da temperatura ao longo da barra em determinados instantes de tempo, considerando a aproximação da série por um termo. Podemos observar a tendência da convergência da solução para o estado permanente, no qual a temperatura média em toda a extensão da barra é de 25 °C.

Figura 3.4 | Estudo da solução em função do tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos ainda estudar problemas nos quais sejam consideradas diferentes condições de fronteira sob as extremidades, possibilitando a construção de condições de fronteira mistas.

Equação do calor com condições de fronteira mistas

Suponha que uma barra de comprimento L esteja isolada em sua superfície e de tal forma que uma de suas extremidades, em que $x=0$, esteja submetida a uma temperatura fixa de 100 °C, enquanto que na outra extremidade, na qual $x=L$, a barra esteja isolada termicamente. Considerando que a temperatura na barra no instante inicial $(t=0)$ seja dada por uma função f conhecida, a distribuição de temperatura nessa barra ao longo do tempo pode ser identificada mediante a resolução do problema:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=Ku_t(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<L \\ u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le L \\ u(0,t)=100; \; u_x(L,t)=0, \quad t>0 \end{cases}.$$

Note que as condições de fronteira para esse problema englobam uma condição não homogênea, quando tomamos $x=0$, e uma condição de isolamento térmico, em que $x=L$. Assim, temos nesse problema uma situação envolvendo **condições de fronteira mistas**. Poderíamos ainda tomar outras combinações das condições de fronteira, conforme os problemas estudados anteriormente.

Dessa forma, para a resolução desse problema, podemos articular diferentes estratégias, visando associá-lo com os problemas estudados anteriormente. Assim, basta combinar dois ou mais problemas, de acordo

com o que foi estudado, para que seja possível obter a solução para um problema com condições de fronteira mistas.

Por exemplo, vamos considerar uma barra metálica de 30 unidades de comprimento cujo material está associado a uma constante $K=1$ e cuja superfície esteja isolada termicamente. Considere que a temperatura inicial nessa barra seja de 20 °C. Além disso, considere que ao longo do tempo a extremidade inicial, indicada por $x=0$, permaneça em isolamento térmico, sem ganho ou perda de calor, enquanto que a extremidade final, $x=30$, a temperatura permaneça fixada em 0 °C. Assim, o problema que ilustra essa situação é dado por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_t(x,t), \ \ t>0, \ \ 0<x<30 \\ u(x,0)=20, \ \ 0\leq x\leq 30 \\ u_x(0,t)=u(30,t)=0, \ \ t>0 \end{cases}.$$

Temos, portanto, a combinação de uma condição de fronteira com isolamento térmico e uma condição homogênea.

Um outro exemplo que podemos analisar consiste em estudar a distribuição de calor em uma barra com comprimento unitário $K=1{,}14$ e isolada termicamente, de modo que a temperatura inicial nessa barra seja dada por $f(x)=x^2$, a extremidade inicial ($x=0$) permaneça a uma temperatura fixa de 50 °C, enquanto a outra extremidade ($x=1$) esteja em isolamento térmico, sem ganho ou perda de calor. Esse problema pode ser representado por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=1{,}14\cdot u_t(x,t), \ \ t>0, \ \ 0<x<1 \\ u(x,0)=x^2, \ \ 0\leq x\leq 1 \\ u(0,t)=50; \ u_x(1,t)=0, \ \ t>0 \end{cases}.$$

Em cada situação, podemos buscar soluções empregando separação de variáveis e séries de Fourier, desde que sejam consideradas corretamente as condições associadas a cada problema e a cada extremidade da região em estudo.

Assimile

Quando estudamos um problema envolvendo a equação do calor, associada a condições iniciais e de fronteira, podemos nos deparar com condições de fronteira homogêneas, não-homogêneas, com isolamento térmico, ou ainda, condições mistas, o que exige a descrição correta de cada condição e sua associação com a solução geral para o problema em estudo.

Assim, quando desejamos resolver um problema associado à equação do calor, considerando condições iniciais e de fronteira, ou seja, problemas mistos, podemos empregar as estratégias da separação de variáveis e as séries de Fourier, desde que as funções envolvidas, inclusive àquela que descreve

a condição inicial, satisfaçam às condições estabelecidas na Definição 3.1, Teorema 3.1 e demais conclusões obtidas ao longo da resolução dos problemas apresentados.

Dica

Para complementar os estudos desenvolvidos acerca da equação do calor, consulte o capítulo 3, *Equação do calor*, principalmente em sua seção 3.4, *Existência e representação de solução do Problema de Valores Inicias e de Fronteira para a Equação do Calor*, do trabalho intitulado *Método de Fourier para a resolução dos Problemas de Valores Inicial e de Fronteira para a Equação do Calor*, Melissa Samanta Holetz. Nessa seção, podem ser conferidos com mais detalhes todos os resultados essenciais para a comprovação da existência da solução para o problema da condução do calor.

Para finalizar a preparação da terceira parte do plano de aula a respeito das equações diferenciais parciais e aplicações, para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, sua tarefa é organizar uma proposta que envolva a situação-problema apresentada.

Para a terceira parte, a proposta pode ser desenvolvida na perspectiva da Resolução de Problemas como ponto de partida para o ensino da Matemática, como proposto por Onuchic e Allevato (2009). Assim, a turma pode ser organizada em pequenos grupos, com três ou quatro estudantes cada. Cada grupo deve, com base em seus conhecimentos prévios, resolver o problema proposto, que consiste na situação-problema descrita. Durante esse processo, o professor deve acompanhar os trabalhos desenvolvidos pelos estudantes, orientando-os por meio de questionamentos e evitando apresentar as respostas, mas estimulando-os a refletirem sobre o problema. Ao final, deve ser realizada uma discussão com toda a turma a respeito do problema, finalizando com a sistematização do conteúdo com base nas resoluções apresentadas pelos grupos.

Assim essa proposta deve ser baseada na situação-problema descrita. Nesse problema, o modelo para a equação do calor com condições de fronteira mistas é dado por $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = 0{,}86u_t(x,t), \;\; t>0, \;\; 0<x<1 \\ u(x,0) = x, \;\; 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0; \; u_x(1,t) = 0, \;\; t>0 \end{cases}$. Empregando a separação de variáveis, temos que a seguinte igualdade será válida para todo $0<x<1$ e todo $t>0$: $\frac{F''(x)}{F(x)} = 0{,}86\frac{G'(t)}{G(t)} = -\sigma$, com $\sigma >$ constante. Logo, devemos

ter $F''(x)+\sigma F(x)=0$ para $0<x<1$ e $G'(t)+\frac{\sigma}{0{,}86}G(t)=0$ para $t>0$, ambas equações diferenciais ordinárias.

Para o primeiro caso, relativo a $F(x)$, como $F(0)=0$ e $F'(1)=0$, devemos resolver o problema $\begin{cases}F''(x)+\sigma F(x)=0,\ 0<x<1\\F(0)=F'(1)=0\end{cases}$, o qual consiste em um problema para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Analisando os possíveis valores assumidos por σ, temos que avaliar cada caso para identificar a solução para o problema.

Se $\sigma=0$, sendo a EDO $F''(x)=0$, sua solução é da forma $F(x)=c_1x+c_2$, com c_1 e c_2 constantes reais tais que $F(0)=F'(1)=0$, logo, devemos ter $c_2=0$ e $c_1=0$, o que implica em $F(x)=0$ para todo $0<x<1$. Assim, o problema referente a x admite somente a solução trivial.

Se $\sigma<0$, podemos reescrevê-lo na forma $\sigma=-\lambda^2$ com $\lambda>0$. Dessa forma, temos a EDO $F''(x)-\lambda^2F(x)=0$ com equação característica $r^2-\lambda^2=0$ e raízes $r=\pm\lambda$. A solução geral para a EDO é $F(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}$, com c_1 e c_2 reais. Como devemos ter $F(0)=F'(1)=0$, então $0=F(0)=c_1e^0+c_2e^{-0}$, ou ainda, $c_1+c_2=0$, e também $0=F'(1)=\lambda c_1e^{\lambda}-\lambda c_2e^{-\lambda}$, ou $c_1e^{\lambda}-c_2e^{-\lambda}=0$, que compõe um sistema com somente a solução trivial.

Por fim, se $\sigma>0$, $F''(x)+\sigma F(x)=0$ admite a equação característica $r^2+\sigma=0$, a qual tem raízes $r=\pm\sqrt{\sigma}i$. A solução geral é dada por $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$, com c_1 e c_2 reais. Como $F(0)=F'(1)=0$, $0=F(0)=c_1\cos(0)+c_2\text{sen}(0)=c_1$ ou ainda $c_1=0$, o que implica em $F(x)=c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$. Para a segunda condição, $0=F'(1)=\sqrt{\sigma}c_2\cos\left(\sqrt{\sigma}\right)$, ou $\sqrt{\sigma}c_2\cos\left(\sqrt{\sigma}\right)=0$. Como queremos soluções não triviais, $\sqrt{\sigma}\neq0$, e da primeira condição temos $c_1=0$, então necessariamente $c_2\neq0$, implicando em $\cos\left(\sqrt{\sigma}\right)=0$. Dessa forma, devemos ter $\sqrt{\sigma}=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi(1+2n)}{2}=\frac{(2n+1)\pi}{2}$, com n inteiro não nulo, ou ainda, $\sigma=\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4}=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$. Assim, os autovalores associados são da forma $\sigma_n=\frac{(1+2n)^2\pi^2}{4}$ com n inteiro, e as autofunções correspondentes são da forma $F_n(x)=\text{sen}(n\pi x)$ para n inteiro, e sendo que qualquer múltiplo dessas funções também pode ser caracterizado como autofunção para esse problema.

Em síntese, o problema $\begin{cases}F''(x)+\sigma F(x)=0,\ 0<x<L\\F(0)=F'(L)=0\end{cases}$ admite solução não trivial somente quando $\sigma>0$, e, nesse caso, tem autovalores da forma $\sigma_n=\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4}$, com n inteiro, e as autofunções na forma $F_n(x)=\text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$

, com n inteiro. Assim, as soluções para o problema podem ser construídas a partir dos autovalores e autofunções correspondentes.

Em relação à equação $G'(t)+\dfrac{\sigma}{0,86}G(t)=0$, sua solução geral é da forma $G(t)=ce^{-(\sigma/0,86)t}$, com c constante. Assim, para cada n inteiro não nulo, temos soluções fundamentais da equação do calor na forma $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=e^{-\left((2n+1)^2\pi^2/4\cdot 0,86\right)t}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$. Logo, a solução para a equação do calor é $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left((2n+1)^2\pi^2/3,44\right)t}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$. Da condição inicial, devemos ter que $x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$. Assim, como a condição inicial deve corresponder a uma função ímpar, a qual pode ser expressa em uma série de senos, os coeficientes devem ser dados por:

$$c_n=2\int_0^1 x\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)dx=2\left[\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)-\frac{2}{(2n+1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$=2\left[\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)-\frac{2}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)-\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\operatorname{sen}(0)-0\right]$$

$$=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)=\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}$$

Portanto, a solução para a equação diferencial parcial é dada por:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-\left((2n+1)^2\pi^2/3,44\right)t}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right).$$

Complemente a resolução desse problema construindo as representações gráficas associadas, de acordo com o que foi estudado anteriormente.

Para finalizar sua tarefa, estruture a terceira parte do plano acrescentando as orientações ao professor, a resolução comentada para o problema e reflexões a respeito de dúvidas que podem ser manifestadas pelos estudantes ao longo do desenvolvimento do plano.

Dessa forma, você estará apto a finalizar a organização do plano de aula para os alunos do curso de graduação de Licenciatura em Matemática. Organize o documento contemplando as três partes do plano, com as respectivas atividades e reflexões, acrescentando também exemplos de aplicações práticas envolvendo os problemas estudados e outras informações que julgar relevante e que possam contribuir para o desenvolvimento das aulas conforme o plano.

Avançando na prática

Comparação entre problema com condições de fronteira homogêneas e com isolamento térmico

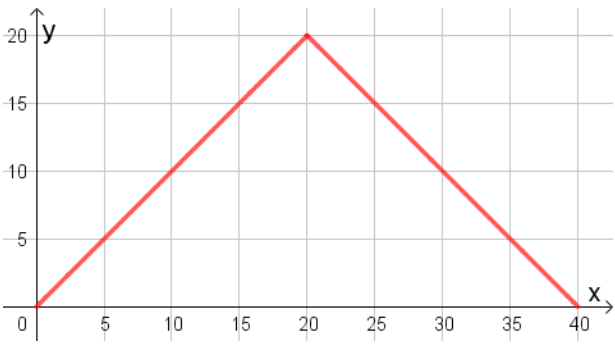
Descrição da situação-problema

Uma indústria de arames, empregados na construção civil, solicitou a você um estudo teórico a respeito das distribuições de temperatura associadas a duas situações envolvendo um tipo específico de arame. Considere que esse arame tenha comprimento igual a 40 unidades, sua superfície esteja isolada, $K=1$ e sua temperatura no instante inicial seja descrita pela função $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<20 \\ 40-x, & 20<x<40 \end{cases}$. Essa indústria solicitou a você uma comparação entre duas situações: a primeira na qual as extremidades da barra sejam mantidas a uma temperatura fixa de 0 °C ao longo do tempo e a segunda em que as extremidades são mantidas em isolamento térmico. Estude os dois problemas propostos e construa um relatório técnico, a ser enviado para a indústria, descrevendo as semelhanças e diferenças envolvendo essas duas situações, partindo de uma mesma barra e das mesmas condições iniciais.

Resolução da situação-problema

A distribuição inicial de temperatura envolve a função *f* cujo gráfico é apresentado na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Gráfico da função *f* definida por partes



Fonte: elaborado pela autora.

Vejamos as duas situações que devem ser estudadas com base em f e nas demais condições.

A primeira situação apresentada pela indústria consiste no estudo do problema da condução do calor com condições homogêneas descrito por $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), & t>0, \quad 0<x<40 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 40 \\ u(0,\ t) = u(40,\ t) = 0, & t>0 \end{cases}$. A segunda corresponde ao estudo do problema da condução do calor com isolamento térmico, o qual pode ser representado na forma $\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), & t>0, \quad 0<x<40 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 40 \\ u_x(0,\ t) = u_x(40,\ t) = 0, & t>0 \end{cases}$.

Empregando as estratégias estudadas, temos que a solução do primeiro problema é da forma

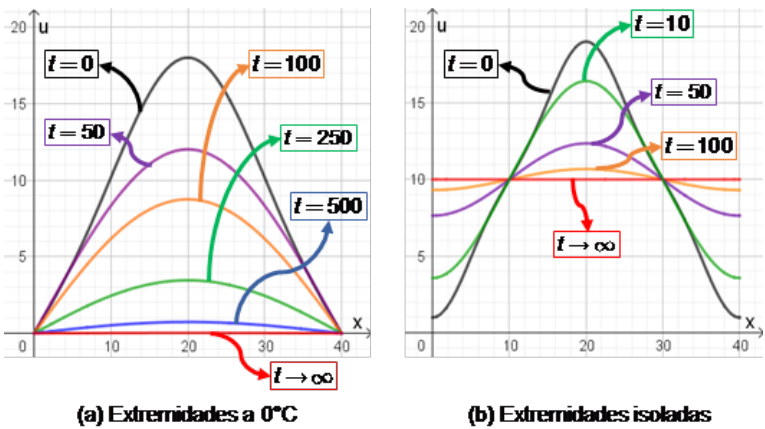
$$u(x,t) = \frac{160}{\pi^2} e^{-\left(\pi^2/1600\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{40}\right) - \frac{160}{\pi^2}\frac{1}{9} e^{-\left(9\pi^2/1600\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{40}\right) + \ldots$$

enquanto que a solução para o segundo consiste em

$$u(x,t) = 10 - \frac{320}{\pi^2}\frac{1}{4} e^{-\left(4\pi^2/1600\right)t} \cos\left(\frac{2\pi x}{40}\right) - \frac{320}{\pi^2}\frac{1}{36} e^{-\left(36\pi^2/1600\right)t} \cos\left(\frac{6\pi x}{40}\right) + \ldots$$

Na Figura 3.6, podemos comparar os gráficos das distribuições de temperatura em determinados instantes de tempo para os dois problemas. Podemos observar na Figura 3.6(a) a variação da temperatura na barra considerando o primeiro problema, em que as extremidades são mantidas a 0 °C, enquanto que na Figura 3.6(b) temos a ilustração do segundo problema, em que as extremidades do arame são mantidas em isolamento térmico.

Figura 3.6 | Comparação entre condições de fronteira homogêneas e em isolamento



Fonte: elaborado pela autora.

Podemos observar, por meio dos gráficos, que a convergência para o estado permanente ocorre mais rapidamente quando as extremidades são mantidas isoladas. Além disso, as temperaturas que são atingidas no estado permanente diferem entre os dois problemas, pois no primeiro temos que a temperatura atingida será de 0 °C em toda a barra, sujeita às condições de fronteira consideradas, enquanto no segundo a temperatura média atingida é de 10 °C, devido ao isolamento térmico e a ausência de ganhos ou perdas de calor no arame ao longo do tempo.

Que conclusões podem ser obtidas a partir desse estudo? Quais seriam outros comentários que poderiam ser encaminhados à indústria a respeito dessas duas situações? Finalize o relatório técnico acrescentando outras informações importantes e que podem auxiliar a indústria em tomadas de decisão envolvendo a produção e o emprego desse tipo de arame em construções.

Faça valer a pena

1. Suponha que um pesquisador deseja avaliar a distribuição de temperatura $u = u(x,t)$ em uma barra metálica com $K = 1 \text{ s}/\text{cm}^2$, comprimento igual a 50 centímetros, de modo que sua superfície esteja isolada termicamente, com base em um problema relativo à equação do calor.
Sabe-se que a distribuição de temperatura no instante inicial é dada pela função $f(x) = 3x$, para $0 \leq x \leq 50$. Ao longo do estudo, considere que esse pesquisador deseja manter uma das extremidades a uma temperatura fixa de 30 °C, enquanto que a outra extremidade será mantida isolada termicamente.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente as condições de fronteira correspondentes a esse problema:

a) $u(0,t) = 3x,\ t > 0$.
b) $u(0,t) = 30;\ u_x(50,t) = 0,\ t > 0$.
c) $u(0,t) = 30;\ u(50,t) = 0,\ t > 0$.
d) $u(x,0) = 50,\ 0 < x < 30$.
e) $u_x(0,t) = u_x(50,t) = 30,\ t > 0$.

2. O problema da condução do calor em uma barra, considerando apenas as variações de posição em uma dimensão, com a barra sendo tomada como unidimensional, e no tempo, pode ser estudado a partir de diferentes condições auxiliares. Com base nesse tema, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. ( ) Um problema misto envolvendo a equação do calor deve ser composto por uma condição inicial e por condições de fronteira do tipo homogêneas.
II. ( ) Podemos empregar o método da separação de variáveis para obter as soluções para problemas mistos envolvendo a equação do calor, considerando condições auxiliares correspondentes.
III. ( ) Para que uma função seja caracterizada como uma solução para um problema misto envolvendo a equação do calor, basta que suas derivadas satisfaçam à equação diferencial e às condições iniciais e de fronteira correspondentes.
IV. ( ) Os coeficientes que caracterizam a solução dos problemas mistos envolvendo equação do calor estão associados às expansões em série de Fourier para as funções que descrevem as condições iniciais associadas.

Assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente:

a) I – V; II – F; III – V; IV – F.
b) I – V; II – V; III – F; IV – F.
c) I – F; II – V; III – F; IV – V.
d) I – F; II – V; III – V; IV – V.
e) I – F; II – F; III – V; IV – V.

3. Considere uma barra de 80 centímetros de comprimento, com $K = 1{,}16 \ \mathrm{s/cm^2}$, cuja superfície esteja isolada. Sabemos que a temperatura inicial nessa barra é dada pela função:

$$f(x) = 100 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{80}\right)$$

para $0 \leq x \leq 80$ e medida em graus Celsius. Além disso, suponha que as extremidades dessa barra sejam mantidas isoladas para todo $t > 0$.

A partir dessa situação, analise as seguintes afirmações:

I. A temperatura $u(x,t)$ nessa barra é dada por:

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi} - \frac{400}{3\pi} e^{-\left(4\pi^2/7424\right)t} \cos\left(\frac{2\pi x}{80}\right) - \frac{400}{15\pi} e^{-\left(16\pi^2/7424\right)t} \cos\left(\frac{4\pi x}{80}\right) + \ldots$$

II. Os coeficientes da solução $u(x,t)$ são tais que $c_0 = 400\pi$ e

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\dfrac{400}{\pi\left(n^2 - 1\right)}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

para $n \geq 1$.

III. A temperatura média atingida no estado permanente, ou estacionário, é de, aproximadamente, 63,7 °C.

Com base nas afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmação II está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
d) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
e) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BRANNAN, J. R.; BOYCE, W. E. **Equações diferenciais**: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BRONSON, R.; COSTA, G. B. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

D'ALESSANDRO NETO, R.; VENEZUELA, A. L. A equação de condução de calor uni e bidimensional: solução usando transformada integral e o método da separação de variáveis. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, Guarapuava/Irati, v. 19, n. 2, p. 230-247, 2017.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

HOLETZ, M. S. **Método de Fourier para a resolução dos Problemas de Valores Inicial e de Fronteira para a Equação do Calor**. 2001. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

KREYZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**: volume 2. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, P. C. de. **Equações Diferenciais Parciais I**. Bacharelado em Matemática. 2013. Notas de aula. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~lima/apostilas/EDP1-aulas-22-8-13.pdf> (acesso em 02 nov. 2018).

LOEFFLER, C. F.; GONZAGA, B. R. Resolução de uma Equação Diferencial Parcial pelo Método da Separação de Variáveis no Problema de Condução de Calor em uma Barra. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 2013, Bauru. **Anais...** Disponível em: http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/trabalhos/PDF/6915.pdf. Acesso em: 12 nov. 2018.

NAGLE, R. K. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando volume de cilindros através da Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista** (Rio Grande do Sul), Canoas, v.1, n.10, p. 95-103, 2009.

ROGAWSKI, J. **Cálculo**: volume 2. Porto Alegre: Bookman, 2009.

STEWART, J. **Cálculo**: volume I. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THOMAS, G. B. **Cálculo**: volume 2. 11. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Unidade 4

Equações da onda e de Laplace

Convite ao estudo

Na unidade anterior estudamos as características das equações diferenciais parciais e como este conceito pode ser empregado na modelagem de problemas relacionados à condução de calor. No entanto, esta não é a única aplicação deste conceito. Outros fenômenos que podem ser modelados com equações dessa natureza são as vibrações em cordas, as quais estão presentes no estudo da acústica, de fenômenos oscilatórios na economia e na elaboração de projetos de máquinas, por exemplo, de modo que todos esses fenômenos estão associados à chamada equação da onda, ou ainda no estudo de funções potenciais gravitacionais ou elétricas, entre outras, relacionadas com a equação de Laplace. Estes são outros dois exemplos de equações diferenciais parciais importantes na descrição de fenômenos físicos e que correspondem aos temas de estudo desta unidade.

De modo a contribuir com estes estudos, imagine que você atua no setor responsável pela modelagem matemática de fenômenos físicos integrado a um escritório de tecnologia. O seu setor, em conjunto com o setor de programação e de projetos do escritório, é responsável pelos estudos teóricos realizados previamente ao lançamento de novos sistemas a serem implementados em equipamentos produzidos pelas indústrias associadas. Assim, você e seus colegas de equipe devem construir modelos matemáticos para a representação e resolução de problemas relativos a determinados fenômenos físicos tendo como principal objetivo validar os algoritmos computacionais desenvolvidos pelo setor de programação. Assim, por meio da comparação dos resultados teóricos com àqueles obtidos pelos algoritmos computacionais é possível investigar o funcionamento dos sistemas produzidos pelo escritório de tecnologia.

Considere que nesse escritório, você e sua equipe foram designados para atender uma indústria que pretende produzir um novo tipo de cabo a ser empregado em linhas de transmissão. Por isso, você e seus colegas deverão realizar estudos teóricos que contribuirão com os testes de resistência a serem realizados em laboratório e com as simulações, analisando diferentes tipos de condições e elaborando relatórios técnicos relativos a problemas associados ao sistema solicitado pela indústria.

Para que seja possível atender à indústria, na primeira seção será estudada a equação da onda unidimensional para a descrição das vibrações em cordas

elásticas, mais especificamente no caso das extremidades fixadas e velocidade inicial nula. Na segunda seção você estudará a outros problemas envolvendo a equação da onda unidimensional, envolvendo diferentes tipos de condições auxiliares. Na terceira seção os estudos serão direcionados à equação de Laplace e ao problema de Dirichlet.

Considerando o contexto apresentado, prossiga a leitura e verifique qual é o primeiro desafio a ser enfrentado!

Seção 4.1

Equação da onda unidimensional

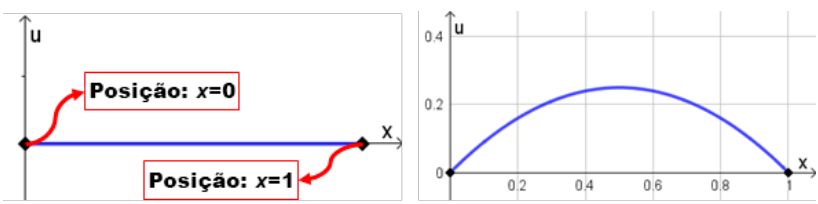
Diálogo aberto

Vivemos em uma era na qual as telecomunicações fazem parte do cotidiano e parece ser impossível imaginar a vida sem ela, não é mesmo? As telecomunicações estão relacionadas aos problemas que envolvem vibrações transversais de cordas perfeitamente flexíveis, assim como problemas envolvendo ondas eletromagnéticas, entre outros, o que evidencia a importância do estudo da equação da onda e sua empregabilidade da modelagem.

Para esse estudo, no contexto de atendimento à indústria que pretende produzir um novo tipo de cabo para linhas de transmissão, sua primeira tarefa consiste em resolver um problema associado a vibrações envolvendo cordas elásticas com extremidades fixas e elaborar um relatório explicativo sobre o processo de resolução desse problema, o qual será empregado para auxiliar nas simulações e testes realizados em laboratório.

Neste sentido, como primeira tarefa, você e seus colegas devem descrever detalhadamente o modelo e a solução relativos ao seguinte problema: Considere que um cabo de transmissão, que pode ser aproximado por uma corda elástica, com $a=1$, em que a representa as características do material e da tensão à qual ela está submetida, e comprimento unitário seja mantido com suas extremidades fixas em dois suportes no mesmo nível horizontal de tal forma que o eixo x esteja ao longo da corda com as extremidades descritas por $x=0$ e $x=1$, conforme a Figura 4.1(a). Além disso, suponha que esse cabo é deslocado de sua posição de equilíbrio e solto, em $t=0$ com velocidade nula, para vibrar livremente, desconsiderando a resistência do ar e outros fatores externos. A configuração inicial do cabo é descrita pela função $f(x)=x-x^2$, cuja representação gráfica é dada conforme a Figura 4.1(b).

Figura 4.1 | Configurações da corda do problema da indústria de cabos



(a) Cabo de comprimento unitário (b) Configuração inicial do cabo

Fonte: elaborada pela autora.

Construa o modelo matemático para o deslocamento vertical $u(x,t)$ do cabo em função do tempo, descrevendo detalhadamente a solução do problema e construindo um relatório relativo à resolução do problema proposto. Considerando que esse relatório pode ser empregado no estudo de outros problemas, todos os passos devem ser apresentados de forma detalhada para que o setor de simulação e os responsáveis pelos testes em laboratório possam aproveitá-lo, inclusive, em outros projetos.

Para cumprir esse desafio, nesta seção, estudaremos a equação da onda unidimensional e problemas relativos a vibrações transversais de cordas elásticas, especificamente no caso das cordas com extremidades fixadas e velocidade inicial nula.

Assim, prossiga em seus estudos e confira os conceitos que contribuirão com a solução para esse desafio!

Não pode faltar

Conforme estudado anteriormente, uma equação diferencial parcial corresponde a uma equação que relaciona uma função e suas derivadas de modo que sua incógnita corresponde a função de duas ou mais variáveis, como é o caso da equação do calor unidimensional, por exemplo. Podemos associar condições auxiliares para identificar soluções particulares para os problemas modelados por essas equações, construindo os problemas de valores iniciais e/ou de fronteira.

Outra importante equação dessa natureza que pode ser estudada consiste na equação da onda. Vamos analisar a estrutura dos problemas modelados por essa equação, em seu caso unidimensional, investigando as soluções correspondentes.

Equação da onda para cordas elásticas

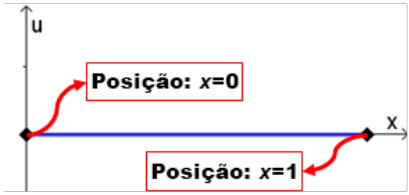
A equação da onda é empregada na interpretação de fenômenos associados a pequenas vibrações transversais de cordas do tipo elásticas, as quais podem sofrer alterações em seu comprimento a partir de deflexões (KREYZIG, 2013). De acordo com a disposição da corda em relação a permanecer com as extremidades fixadas ou não, ou ainda quanto à sua configuração inicial, podemos construir diferentes problemas, porém, em todos os casos, por simplicidade, vamos considerar que: a corda é homogênea, ou seja, sua massa é constante por unidade de comprimento, além de ser perfeitamente elástica, não oferecendo resistência à deflexão; a corda executa pequenos movimentos transversais em um plano vertical, ou seja, as alterações na posição da corda são analisadas verticalmente; os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, não influenciam no movimento da corda (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Vejamos os problemas que podem ser estudados com base na equação da onda.

Corda elástica com extremidades fixas e velocidade inicial nula

Vamos iniciar pelo estudo do movimento de uma corda elástica de comprimento L que está ligeiramente esticada e cujas **extremidades** permaneçam **fixadas** em dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda, conforme a Figura 4.2. Além disso, vamos considerar que a **velocidade inicial** da corda é **nula**.

Figura 4.2 | Corda elástica de comprimento L



Fonte: elaborada pela autora.

Suponha que a corda está sendo aproximada por um elemento unidimensional, ou seja, vamos desconsiderar sua espessura e analisar apenas as variações no seu comprimento, em conjunto com as variações temporais.

Desejamos estudar o deslocamento vertical da corda no ponto x e no instante t, o qual será denotado por $u(x,t)$. Com base nessas informações, a **equação da onda unidimensional** que descreve o movimento dessa corda é da forma $a^2u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)$, em que a é uma constante positiva associada ao material e à tensão na corda (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

O movimento da corda depende de duas condições iniciais: sua deflexão no instante inicial, ou seja, a configuração inicial da corda a partir da qual é estudado o movimento, a qual denotaremos por $f(x)$, e a velocidade inicial da corda, que será representada por $g(x)$. Sendo assim, temos as condições $u(x,0)=f(x)$ e $u_t(x,0)=g(x)$, para $0\leq x\leq L$. Como no problema em estudo estamos considerando a velocidade inicial nula, as **condições iniciais** correspondentes serão $u(x,0)=f(x)$ e $u_t(x,0)=0$, para $0\leq x\leq L$, em que $f(x)$ é a configuração da corda no instante inicial (FIGUEIREDO, 2012).

Reflita

Uma das condições iniciais para o problema pode ser descrita como $u_t(x,0)=0$. Qual é o significado matemático para essa igualdade, do ponto de vista das funções? E qual a relação com o fenômeno em estudo?

No caso das **condições de fronteira**, como a suposição é de que as extremidades permanecerão fixadas ao longo do tempo, então temos que o deslocamento nesses pontos será nulo, ou seja, $u(0,t)=u(L,t)=0$ para $t\geq 0$.

Assimile

O problema de valores iniciais e de fronteira associado ao movimento de uma corda elástica de comprimento L com extremidades fixas e velocidade inicial nula é:

$$\begin{cases} a^2u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\leq x\leq L,\ t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x);\ u_t(x,0)=0,\ 0\leq x\leq L \\ u(0,t)=u(L,t)=0,\ t\geq 0 \end{cases}$$

Assim como estudado na unidade anterior, para a equação do calor, podemos empregar o método da separação de variáveis e as séries de Fourier na obtenção de solução para a equação da onda unidimensional.

Suponha que a solução para a equação da onda seja da forma $u(x,t)=F(x)G(t)$. Sendo assim, ao calcular suas derivadas e substituir na EDP obtemos $a^2\left(F''(x)G(t)\right)=F(x)G''(t)$ ou ainda $\dfrac{F''(x)}{F(x)}=\dfrac{G''(t)}{a^2G(t)}$. Para que esta igualdade seja válida, de modo que cada membro dependa apenas de uma das variáveis independentes, devemos ter $\dfrac{F''(x)}{F(x)}=\dfrac{G''(t)}{a^2G(t)}=-\sigma$, com σ uma constante. Logo, podemos obter duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=-\sigma \ \Rightarrow\ F''(x)=-\sigma F(x) \ \Rightarrow\ F''(x)+\sigma F(x)=0$$

$$\frac{G''(t)}{a^2G(t)}=-\sigma \ \Rightarrow\ G''(t)=-\sigma a^2G(t) \ \Rightarrow\ G''(t)+\sigma a^2G(t)=0$$

Das condições de fronteira devemos ter $u(0,t)=F(0)G(t)=0$ e $u(L,t)=F(L)G(t)=0$ para todo t. Se G for identicamente nula, ou seja, $G(t)=0$ para todo t, então $u(x,t)=F(x)G(t)=0$, o que não é o objetivo. Assim, devemos ter $G\neq 0$, o que implica em $F(0)=0$ e $F(L)=0$.

Quando $\sigma=0$ ou $\sigma<0$ temos apenas a solução trivial para ambas as equações diferenciais ordinárias, o que não é o interesse. Este fato pode ser concluído de forma análoga à discussão realizada na unidade anterior envolvendo a equação do calor unidimensional. Analise essa situação com base no que foi estudado anteriormente, adequando para a equação da onda.

Tomando $\sigma > 0$, a EDO $F''(x) + \sigma F(x) = 0$ admite a equação característica $r^2 + \sigma = 0$, a qual tem raízes $r = \pm\sqrt{\sigma}i$ complexas conjugadas. A solução geral para essa EDO é $F(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\sigma}x\right) + c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$, com c_1 e c_2 constantes reais. Como $F(0) = F(L) = 0$, então:

$$0 = F(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \text{sen}(0) = c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$

$$0 = F(L) = 0\cos\left(\sqrt{\sigma}L\right) + c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) \;\Rightarrow\; c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) = 0$$

Como queremos soluções não triviais, e da primeira condição temos $c_1 = 0$, então necessariamente $c_2 \neq 0$, implicando em $\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}L\right) = 0$. Dessa forma, devemos ter $\sqrt{\sigma}L = n\pi$, com n inteiro positivo, ou $\sqrt{\sigma} = n\pi/L$, ou ainda $\sigma = n^2\pi^2/L^2$. Logo, os autovalores associados são da forma $\sigma_n = n^2\pi^2/L^2$, ..., com n inteiro positivo, e as autofunções correspondentes, $F_n(x) = \text{sen}\left(n\pi x/L\right)$, para n inteiro positivo.

Vejamos agora o caso da equação $G''(t) + \sigma a^2 G(t) = 0$, como temos $\sigma_n = n^2\pi^2/L^2$, para n inteiro positivo, então $\sigma_n a^2 = a^2 n^2 \pi^2/L^2$ e $G''(t) + \dfrac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} G(t) = 0$. Sendo assim, uma solução geral para essa EDO é da forma $G(t) = c_3 \cos\left(an\pi t/L\right) + c_4 \text{sen}\left(an\pi t/L\right)$. Da condição inicial $u_t(x,0) = 0$ segue que $u_t(x,0) = F(x)G'(0) = 0$ ou ainda $G'(0) = 0$. Logo,

$$G'(t) = -c_3\left(an\pi/L\right)\text{sen}\left(an\pi t/L\right) + c_4\left(an\pi/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$$

$$G'(0) = -c_3\left(an\pi/L\right)\text{sen}(0) + c_4\left(an\pi/L\right)\cos(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_4 = 0$$

ou $G(t) = c_3 \cos\left(an\pi t/L\right)$. Dessa forma, $G(t)$ é proporcional às funções $\cos\left(an\pi t/L\right)$.

Consequentemente, as soluções fundamentais para a equação da onda são da forma $u_n(x,t) = \text{sen}\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$, para n inteiro positivo. Pela superposição das soluções fundamentais temos que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$. Precisamos ainda determinar as constantes, as quais provêm da condição inicial $u(x,0) = f(x)$, implicando em $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(n\pi x/L\right)$, que corresponde à expansão em série de Fourier de senos para f cujos coeficientes são $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(n\pi x/L\right)\,dx$, para n inteiro positivo.

Assimile

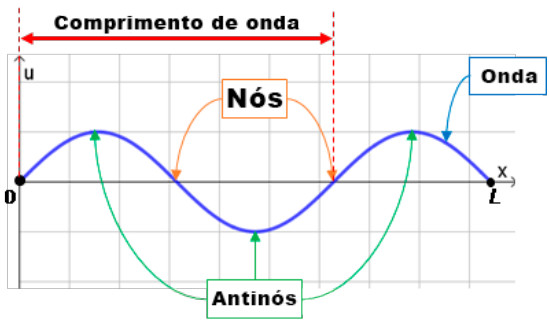
A solução para a equação da onda unidimensional, $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$, para uma corda de extremidades fixas e velocidade inicial nula, é da forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(an\pi t/L)$, para n inteiro positivo, com $c_n = (2/L)\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)\,dx$.

Note que a função f deve ser contínua e deve admitir uma expansão em série de Fourier de senos convergentes, garantindo a equivalência da série que expressa a solução da EDP.

A constante a, presente na equação da onda, está relacionada, dentre outras informações, à tensão sobre a corda. Quando a magnitude dessa tensão é grande o suficiente, a corda pode produzir um som musical, o qual é resultado de ondas estacionárias. Mas qual é a relação desse tipo de onda com a solução obtida para o problema da equação da onda unidimensional?

Vimos que a solução para o problema consiste em uma superposição de funções na forma $u_n(x,t) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(an\pi t/L)$, com n inteiro positivo. Essas funções são denominadas **ondas estacionárias**. Quando tomamos x tal que $n\pi x/L = k\pi$, com $k = 0,1,\ldots,n$, ou $x = kL/n$, com n inteiro positivo, temos que $\operatorname{sen}(n\pi x/L) = 0$, isso significa que somente esses pontos permanecem parados se a vibração for descrita por $u_n(x,t)$, os quais são denominados **nós**. Os pontos médios entre dois nós consecutivos são os **antinós**, e o **comprimento de onda** corresponde ao dobro da distância entre dois nós, o que implica no comprimento de onda de uma onda estacionária ser $2L/n$, com n inteiro positivo (FIGUEIREDO, 2012). Na Figura 4.3 podemos observar os elementos que estão associados a uma onda estacionária.

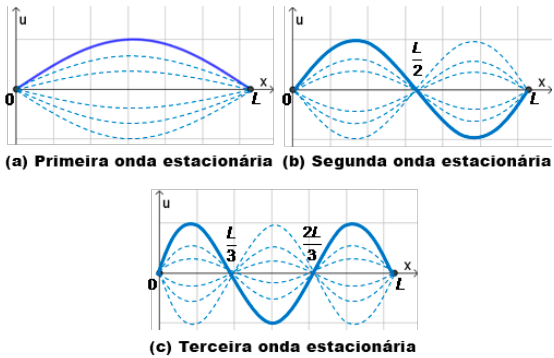
Figura 4.3 | Ondas estacionárias e seus elementos



Fonte: elaborada pela autora.

Também podemos interpretar as soluções $u_n(x,t) = \text{sen}\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$, com n inteiro positivo, do ponto de vista dos harmônicos. Cada função $u_n(x,t)$ é chamado de ***n*-ésimo harmônico**, a qual representa um movimento harmônico simples de frequência $an/2L$. Quando $n=1$, função $u_1(x,t) = \text{sen}\left(\pi x/L\right)\cos\left(a\pi t/L\right)$ pode ser chamada de **primeira onda estacionária**, **modo de vibração fundamental** ou **harmônico fundamental**. A frequência do harmônico fundamental, $a/2L$, é designada como **frequência fundamental**. As frequências dos demais harmônicos são múltiplos da frequência fundamental e são caracterizados como **sobretons** (ZILL; CULLEN, 2009). Na Figura 4.4 podemos observar as três primeiras ondas estacionárias, de modo que as linhas tracejadas descrevem as ondas em diferentes instantes de tempo.

Figura 4.4 | Primeiras três ondas estacionárias



Fonte: elaborada pela autora.

Reflita

Que relações podem ser estabelecidas entre as ondas estacionárias e a série numérica denominada série harmônica?

Vejamos um exemplo de situação na qual a equação da onda pode ser empregada.

Exemplificando

Considere uma corda elástica com $a=2$ e comprimento de 20 unidades cujas extremidades sejam mantidas fixas em dois suportes no mesmo nível horizontal de tal forma que o eixo *x* esteja ao longo da corda com as extremidades descritas por $x=0$ e $x=20$.

Suponha que essa corda seja deslocada de sua posição de equilíbrio de modo que sua configuração no instante inicial seja dada pela função $f(x) = -\left(1/50\right)x^2 + \left(2/5\right)x$, e, com velocidade inicial nula, é solta para

vibrar livremente, desconsiderando a resistência do ar e outros fatores externos.

Vejamos como podemos representar matematicamente esse problema e obter sua solução.

O deslocamento vertical da corda ao longo do tempo e em sua extensão será descrito por uma função $u = u(x,t)$ que consiste na solução do problema correspondente. Como a corda tem 20 unidades de comprimento, temos que $L = 20$ e, assim, $0 \le x \le 20$, e estando associada a uma constante $a = 2$, a equação da onda que caracteriza esse problema é da forma $4u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$, com $0 \le x \le 20$ e $t \ge 0$. Devido às extremidades da corda permanecerem fixadas no suporte para todo o tempo, então $u(0,t) = u(20,t) = 0$, $t \ge 0$. Se a configuração da corda, no instante inicial, é dada pela função $f(x) = -\left(1/50\right)x^2 + \left(2/5\right)x$ e, além disso, sua velocidade inicial é nula, temos as condições $u(x,0) = -\left(1/50\right)x^2 + \left(2/5\right)x$ e $u_t(x,0) = 0$, para $0 \le x \le 20$. Logo, o problema que modela essa situação é da forma

$$\begin{cases} 4u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 20,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = -\left(1/50\right)x^2 + \left(2/5\right)x;\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 20 \\ u(0,t) = u(20,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

isto é, um problema misto, o qual admite condições iniciais e de fronteira.

A solução para esse problema é $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)\cos\left(\frac{2n\pi t}{20}\right)$, de modo que $c_n = \frac{2}{20}\int_0^{20} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx$ para *n* inteiro positivo. Sendo assim,

$$c_n = \frac{2}{20}\int_0^{20}\left(-\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{500}\int_0^{20} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx + \frac{1}{25}\int_0^{20} x\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{20}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{500}\left[\frac{800x\,\operatorname{sen}\left(n\pi x/20\right)}{n^2\pi^2} - \frac{20x^2\cos\left(n\pi x/20\right)}{n\pi} + \frac{16000\cos\left(n\pi x/20\right)}{n^3\pi^3}\right]_0^{20}$$

$$+ \frac{1}{25}\left[-\frac{20x\cos\left(n\pi x/20\right)}{n\pi} + \frac{400\,\operatorname{sen}\left(n\pi x/20\right)}{n^2\pi^2}\right]_0^{20}$$

$$= -\frac{1}{500}\left[0 - \frac{8000\cos\left(n\pi\right)}{n\pi} + \frac{16000\cos\left(n\pi\right)}{n^3\pi^3} - 0 - \frac{16000}{n^3\pi^3}\right]$$

$$+ \frac{1}{25}\left[-\frac{400\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{16\cos\left(n\pi\right)}{n\pi} - \frac{32\cos\left(n\pi\right)}{n^3\pi^3} + \frac{32}{n^3\pi^3} - \frac{16\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}$$

$$= \frac{32\left(1-\cos\left(n\pi\right)\right)}{n^3\pi^3} = \begin{cases} 0,\ n \text{ par} \\ \dfrac{64}{n^3\pi^3},\ n \text{ ímpar} \end{cases}$$

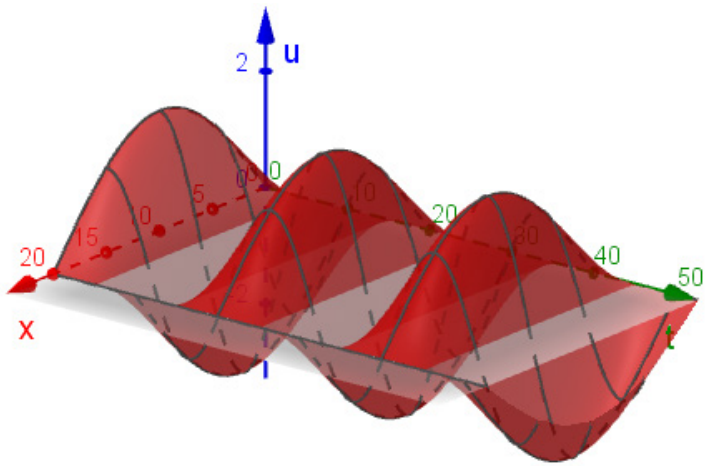
Logo, a solução para o problema misto é dada por:

$$u(x,t)=\frac{64}{\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{20}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{20}\right)+0+\frac{64}{27\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{20}\right)\cos\left(\frac{6\pi t}{20}\right)+0+\ldots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{64}{(2k-1)^3\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{20}\right)\cos\left(\frac{2(2k-1)\pi t}{20}\right)$$

Na Figura 4.5 podemos observar o comportamento da solução ao longo do tempo, considerando a aproximação por um termo da série associada.

Figura 4.5 |Comportamento da solução do problema misto



Fonte: elaborada pela autora.

Assim como no caso da equação do calor, podemos empregar o método da separação de variáveis na resolução do problema da equação da onda unidimensional, associando às séries de Fourier e considerando as condições de convergência correspondentes.

Dica

Para contribuir com os estudos a respeito da equação da onda, consulte a seção 12.2, intitulada "Modelagem: corda vibrante, equação da onda", do livro *Matemática Superior para Engenharia*, volume 2, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

Sem medo de errar

Considerando o contexto no qual você e sua equipe são responsáveis pelo atendimento a uma indústria que pretende produzir um novo tipo de cabo para linhas de transmissão, sua primeira tarefa consiste em resolver um problema associado a vibrações envolvendo cordas com extremidades fixas.

Para isso, inicialmente, deve ser construído o modelo correspondente a essa situação. Suponha que esse cabo possa ser aproximado por uma corda elástica devido ao material no qual ele foi produzido. Como o problema está relacionado a uma corda elástica de comprimento unitário, com $a=1$, de extremidades fixas e velocidade nula, tal que a configuração inicial, ou deflexão inicial, da corda seja dada por $f(x)=x-x^2$, segue que o problema pode ser representado na forma:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 1,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=x-x^2;\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\ge 0 \end{cases}.$$

Para a resolução desse problema, empregaremos o método da separação de variáveis. Se a solução é da forma $u(x,t)=F(x)G(t)$, calculando as derivadas e substituindo na EDP obtemos $F''(x)G(t)=F(x)G''(t)$ ou ainda $\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{G(t)}$. Para que essa igualdade seja válida devemos ter $\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{G(t)}=-\sigma$ com σ constante. Sendo assim, obtemos as equações diferenciais $F''(x)+\sigma F(x)=0$ e $G''(t)+\sigma G(t)=0$, ambas ordinárias de segunda ordem.

Das condições de fronteira temos $u(0,t)=F(0)G(t)=0$ e $u(1,t)=F(1)G(t)=0$ para todo t. Se G for tal que $G(t)=0$ para todo t, então $u(x,t)=F(x)G(t)=0$, o que não é o objetivo. Assim, devemos ter $G\neq 0$, o que implica em $F(0)=0$ e $F(1)=0$.

Para obter solução não nula devemos admitir $\sigma>0$. Como $F''(x)+\sigma F(x)=0$ é uma EDO de segunda ordem, a equação característica associada é $r^2+\sigma=0$, de raízes $r=\pm\sqrt{\sigma}i$ complexas conjugadas. A solução geral para a EDO é $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$, com c_1 e c_2 constantes reais. Como $F(0)=0$, então $c_1=0$ e, como $F(1)=0$, $c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}\right)=0$. Queremos soluções não triviais, então devemos ter $c_2\neq 0$, implicando em $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\sigma}\right)=0$. Logo, $\sqrt{\sigma}=n\pi$, com n inteiro não nulo, ou ainda $\sigma=n^2\pi^2$. Assim, os autovalores associados são $\sigma_n=n^2\pi^2$, ..., com n inteiro não nulo, e as autofunções correspondentes, $F_n(x)=\operatorname{sen}(n\pi x)$ para n inteiro.

Para a equação $G''(t)+\sigma G(t)=0$, como $\sigma_n=n^2\pi^2$ para n inteiro não nulo, então $G''(t)+n^2\pi^2G(t)=0$. Dessa forma, uma solução geral para essa EDO é dada por $G(t)=c_3\cos(n\pi t)+c_4\operatorname{sen}(n\pi t)$. Da condição inicial $u_t(x,0)=0$ temos $u_t(x,0)=F(x)G'(0)=0$ ou ainda $G'(0)=0$. Logo, $G'(t)=-c_3n\pi\operatorname{sen}(n\pi t)+c_4n\pi\cos(n\pi t)$ e, assim, $G'(0)=0$ implica em $c_4=0$ ou ainda $G(t)=c_3\cos(n\pi t)$. Dessa forma, $G(t)$ é proporcional às funções $\cos(n\pi t/L)$.

As soluções fundamentais para a equação da onda são $u_n(x,t)=\operatorname{sen}(n\pi x)\cos(n\pi t)$ com n inteiro não nulo, o que implica em $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}(n\pi x)\cos(n\pi t)$. Para determinar as constantes, que provêm da condição inicial $u(x,0)=f(x)$, temos $f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}(n\pi x)$, que consiste na expansão em série de Fourier de senos para f com $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$, para n inteiro não nulo. Calculando os coeficientes teremos:

$$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx=2\int_0^1\left(x-x^2\right)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx=2\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx-2\int_0^1 x^2\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$=2\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2}-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1-2\left[\frac{2\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3}-\frac{x^2\cos(n\pi x)}{n\pi}+\frac{2x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$=2\left[0-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}-0\right]-2\left[\frac{2\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}+0-\frac{2}{n^3\pi^3}+0\right]$$

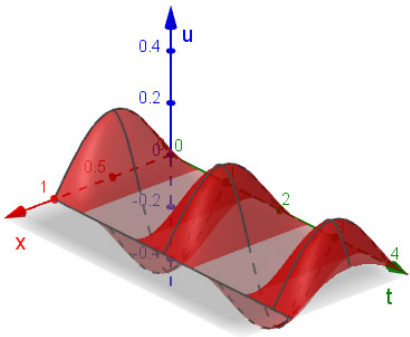
$$=\frac{4}{n^3\pi^3}-4\frac{\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}=4\left\{\frac{1-\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}\right\}=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ 8/n^3\pi^3, & n \text{ ímpar}\end{cases}$$

Portanto, a solução para o problema misto apresentado é:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)+0+\frac{8}{27\pi^3}\operatorname{sen}(3\pi x)\cos(3\pi t)+0$$
$$+\frac{8}{125\pi^3}\operatorname{sen}(5\pi x)\cos(5\pi t)+0+\frac{8}{343\pi^3}\operatorname{sen}(7\pi x)\cos(7\pi t)+0+\ldots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^3\pi^3}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)\cos\left((2k-1)\pi t\right)$$

Na Figura 4.6 podemos observar o comportamento da solução ao longo do tempo, considerando a aproximação com um termo da série.

Figura 4.6 | Evolução do movimento da corda ao longo do tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Para finalizar sua tarefa, estruture o relatório referente a esse problema, acrescentando todos os conceitos envolvidos na resolução do problema, bem como as discussões e reflexões que podem ser realizadas a partir da solução obtida para o problema misto em estudo.

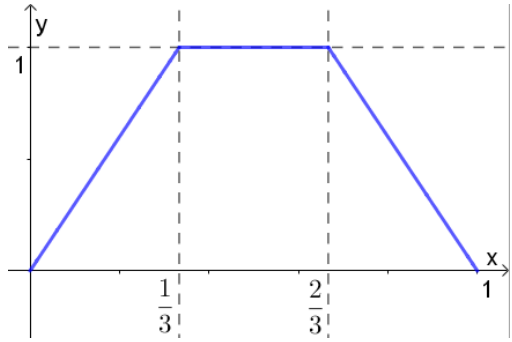
Avançando na prática

Emprego de condições iniciais definidas por partes

Descrição da situação-problema

Imagine que você atua no setor de modelagem de uma indústria de cabos para equipamentos da área da construção civil. Em um experimento realizado pelo laboratório da indústria, associado ao departamento de novos projetos, uma corda elástica com $a = 2$ e de comprimento unitário foi colocada em movimento com velocidade inicial nula e adotando a condição inicial cujo gráfico é indicado na Figura 4.7.

Figura 4.7 | Gráfico que representa a condição inicial



Fonte: elaborada pela autora.

O problema associado ao movimento dessa corda pode ser descrito na forma $\begin{cases} 4u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$, em que $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x < 1/3 \\ 1, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ -3x+3, & 2/3 < x \le 1 \end{cases}$.

Resolva o problema apresentado e elabore um relatório, contendo todas as informações obtidas, para ser encaminhado ao departamento de novos projetos.

Resolução da situação-problema

Sabemos que a solução para esse problema é da forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(2n\pi t)$, para n inteiro positivo, com os coeficientes dados por $c_n = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$. Dessa forma, temos:

$$
\begin{aligned}
c_n &= 2\int_0^1 f(x)\,\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^{1/3} (3x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 2\int_{1/3}^{2/3} \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 2\int_{2/3}^{1} (-3x+3)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= 6\int_0^{1/3} x\,\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 2\int_{1/3}^{2/3} \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx - 6\int_{2/3}^{1} x\,\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 6\int_{2/3}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= 6\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^{1/3} + 2\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{1/3}^{2/3} \\
&\qquad -6\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{2/3}^{1} + 6\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{2/3}^{1} \\
&= 6\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi/3)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(n\pi/3)}{3n\pi}\right] + 2\left[-\frac{\cos(2n\pi/3)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi/3)}{n\pi}\right] \\
&\qquad -6\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\operatorname{sen}(2n\pi/3)}{n^2\pi^2} + \frac{2\cos(2n\pi/3)}{3n\pi}\right] + 6\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(2n\pi/3)}{n\pi}\right] \\
&= \frac{6\operatorname{sen}(n\pi/3)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi/3)}{n\pi} - \frac{2\cos(2n\pi/3)}{n\pi} + \frac{2\cos(n\pi/3)}{n\pi} \\
&\qquad + \frac{6\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{6\operatorname{sen}(2n\pi/3)}{n^2\pi^2} - \frac{4\cos(2n\pi/3)}{n\pi} - \frac{6\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{6\cos(2n\pi/3)}{n\pi} \\
&= \frac{6\operatorname{sen}(n\pi/3)}{n^2\pi^2} + \frac{6\operatorname{sen}(2n\pi/3)}{n^2\pi^2} = \frac{6}{n^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}(n\pi/3) + \operatorname{sen}(2n\pi/3)\right)
\end{aligned}
$$

Assim, os coeficientes c_n, n inteiro positivo, podem assumir os seguintes valores:

- $c_n = \sqrt{3}$ quando $n = 1, 7, 13, \ldots$, ou seja, quando $n = 1 + 6k$, com k inteiro positivo;
- $c_n = -\sqrt{3}$ quando $n = 5, 11, 17, \ldots$, ou seja, quando $n = 5 + 6q$, com q inteiro positivo;
- $c_n = 0$ quando n for um inteiro positivo múltiplo de 2 ou múltiplo de 3.

Portanto, a solução para o problema é:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\cos(2\pi t) + 0 - \frac{6\sqrt{3}}{25\pi^2}\operatorname{sen}(5\pi x)\cos(10\pi t) + 0 + \frac{6\sqrt{3}}{49\pi^2}\operatorname{sen}(7\pi x)\cos(14\pi t) + \ldots \\
&= \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}(\pi x)\cos(2\pi t) - \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5\pi x)\cos(10\pi t) + \frac{1}{49}\operatorname{sen}(7\pi x)\cos(14\pi t) + \ldots\right]
\end{aligned}
$$

Finalize sua tarefa com a elaboração do relatório técnico a ser enviado para o setor de novos projetos.

Faça valer a pena

1. Considere o problema misto para a equação da onda unidimensional dado por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = x - x^2;\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

que descreve o movimento de uma corda de comprimento unitário, $a = 1$, velocidade inicial nula e deflexão inicial dada pela função $f(x) = x - x^2$. Além disso, sabemos que a solução para esse problema é da forma:

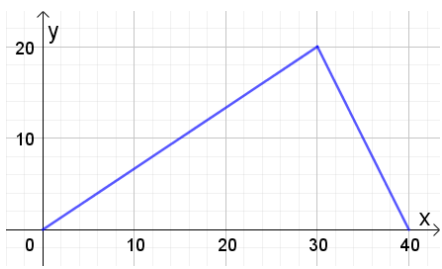
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^3 \pi^3} \operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right) \cos\left((2k-1)\pi t\right)$$

Com base nessas informações, qual é a frequência do terceiro harmônico associado à solução do problema misto apresentado?

a) $1/2$.
b) $3/2$.
c) 2.
d) $5/2$.
e) 1.

2. O método da separação de variáveis, em conjunto com as séries de Fourier e os critérios de convergência correspondentes, podem ser empregados na determinação de soluções para problemas mistos associados à equação da onda unidimensional. Para que esses métodos possam ser empregados corretamente, faz-se necessário expressar o problema correspondente de forma adequada.

Com base nessas informações, seja uma corda elástica de comprimento igual a 40 centímetros e com $a = 1{,}2\ \text{cm}^2/\text{s}^2$, a qual é mantida com as extremidades fixas em todo o tempo. Suponha que essa corda apresente uma velocidade inicial nula e, além disso, a configuração no instante inicial, a partir do qual ela é colocada em movimento, é descrita pela função cujo gráfico é ilustrado a seguir:



Com base nessas informações, assinale a alternativa que representa corretamente o problema descrito na forma de um problema misto para a equação da onda unidimensional:

a) $\begin{cases} 1{,}44 \cdot u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 40,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & 0 \le x \le 30 \\ 80 - 2x,\ 30 < x \le 40 \end{cases};\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 40 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1{,}44 \cdot u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 40,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = \dfrac{2}{3}x;\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 40 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1{,}44 \cdot u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 40,\ t \ge 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & 0 \le x \le 30 \\ 80 - 2x,\ 30 < x \le 40 \end{cases};\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 40 \\ u(0,t) = u(1,t) = 40,\ t \ge 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1{,}2 \cdot u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 40,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 30 \\ 40 - x,\ 30 < x \le 40 \end{cases};\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 40 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1{,}2 \cdot u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le 40,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 40 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$

3. Seja uma corda elástica com $a = 1$ e de comprimento correspondente a π centímetros. Suponha que essa corda foi colocada em movimento com velocidade inicial nula e adotando a condição inicial dada por $f(x) = \frac{1}{8}x(\pi - x)$.
Dessa forma, o problema associado ao movimento dessa corda pode ser descrito por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{8}x(\pi - x);\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Qual das seguintes alternativas apresenta corretamente a solução para o problema misto apresentado?

a) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k)^3}\operatorname{sen}\big((2k)x\big)\cos\big((2k)t\big)$.

b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^3}\operatorname{sen}\big(n\pi x\big)\cos\big(n\pi t\big)$.

c) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k-1)^3}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)x}{\pi}\right)\cos\left(\frac{(2k-1)t}{\pi}\right)$.

d) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^3}\operatorname{sen}\big(nx\big)\cos\big(nt\big)$.

e) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k-1)^3}\operatorname{sen}\big((2k-1)x\big)\cos\big((2k-1)t\big)$.

Seção 4.2

Casos particulares da equação da onda unidimensional

Diálogo aberto

Nesta seção daremos continuidade aos estudos a respeito da equação da onda. Vimos, na seção anterior, o problema da vibração de uma corda elástica cujas extremidades são mantidas fixas e a velocidade inicial é nula. Assim, considerando que o deslocamento inicial da corda seja descrito por uma função, podemos analisar seu movimento no decorrer do tempo. Porém, este não é a única situação possível a ser analisada.

Podemos estudar problemas que envolvem a equação da onda unidimensional sujeita a outras condições iniciais e de fronteira como, por exemplo, manter as extremidades livres para executarem movimentos na vertical, sem movimentação na horizontal, além de diferentes condições iniciais relativas a deslocamento e velocidade.

Dessa forma, nesta seção, investigaremos o problema das vibrações de uma corda elástica cujas extremidades se movimentam livremente, mas são forçadas a não se afastarem de trilhas colocadas de modo perpendicular à corda.

Para isso, considerando o contexto de atendimento à indústria que coopera com o setor de telecomunicações, fabricando cabos empregados na construção de linhas de transmissão, a segunda tarefa direcionada ao seu setor consiste em resolver detalhadamente um problema e construir um relatório a respeito desta tarefa, o qual será direcionado ao setor de programação da indústria.

O problema que deve ser resolvido por você e sua equipe é o seguinte: Uma corda de comprimento unitário é disposta entre dois trilhos perpendiculares ao seu eixo de modo que suas extremidades possam vibrar livremente e que seu deslocamento vertical no decorrer do tempo, $u(x,t)$, possa ser descrito pelo problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Elabore um relatório explicativo contemplando o problema proposto e sua solução, indicando todos os conceitos e hipóteses necessárias.

Para a execução dessa tarefa, estudaremos o caso geral para equação da onda unidimensional, bem como o problema envolvendo uma corda elástica submetida a um deslocamento inicial nulo, além do problema envolvendo o movimento de uma corda elástica com extremidade livre.

Prossiga em seus estudos e verifique os conceitos necessários para cumprir o desafio proposto a você nesta seção!

Não pode faltar

Conforme estudado anteriormente, a equação da onda, $a^2u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)$ com a constante e com unidades de velocidade, pode ser empregada quando desejamos modelar fenômenos que envolvem pequenas vibrações mecânicas associadas a cordas elásticas, neste caso, com a suposição de que a corda possa ser aproximada por um elemento unidimensional, por avaliarmos apenas as variações no tempo e em sua posição relativa a uma única dimensão.

Podemos construir problemas mistos associados a essa equação diferencial parcial, desde que sejam consideradas condições inicias e de fronteira condizentes com as características dos fenômenos em estudo. Além disso, podemos empregar o método da separação de variáveis, bem como as séries de Fourier, para a obtenção de soluções para os problemas dessa natureza.

Assim como foi estudado na seção anterior, a solução para a equação da onda unidimensional que caracteriza o movimento de uma corda com extremidades livres e velocidade inicial nula é dada por $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$, cujos coeficientes podem ser obtidos por meio da expressão $c_n=\left(2/L\right)\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$, para todo n natural. Essa solução pode ser obtida empregando o método de separação de variáveis e considerando que a função f seja tal que admita uma expansão em série de senos, viabilizando, assim, a identificação dos coeficientes que caracterizam a solução do problema em estudo (KREYZIG, 2013).

Vejamos no que segue outra possibilidade de problema que pode ser estudado com base na equação da onda unidimensional.

Corda elástica com deslocamento inicial nulo

Para o estudo desse problema, consideremos uma corda elástica de comprimento L que está ligeiramente esticada e com extremidades fixas em dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda. Suponha que a corda permaneça, inicialmente, em sua posição de equilíbrio e esteja sujeita a uma velocidade inicial não nula. Formalmente, teremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases},$$

de modo que g descreva a velocidade inicial da corda em cada ponto x. Temos, assim, o problema da corda elástica com **deslocamento inicial nulo** e **velocidade inicial não nula** (FIGUEIREDO, 2012). Na resolução desse problema podemos empregar o método da separação de variáveis, admitindo que a solução possa ser escrita como um produto de funções $u(x,t) = F(x)G(t)$. Substituindo essa igualdade na equação diferencial parcial, de modo análogo ao desenvolvimento apresentado na seção anterior, podemos obter suas equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem, $F''(x) + \sigma F(x) = 0$ e $G''(t) + \sigma a^2 G(t) = 0$, sujeitas às condições iniciais e de fronteira estabelecidas para o problema (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Com relação à primeira equação diferencial ordinária, podemos construir o problema:

$$\begin{cases} F''(x) + \sigma F(x) = 0 \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases},$$

com o acréscimo das condições iniciais características do problema. Como desejamos soluções não nulas para esse problema, devemos tomar $\sigma > 0$, o que implica na obtenção dos autovalores $\sigma_n = n^2\pi^2/L^2$ e das autofunções $F_n(x) = \operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)$ correspondentes, para n inteiro positivo.

Para a segunda equação diferencial ordinária, temos sua expressão dada por:

$$G''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} G(t) = 0,$$

devido aos autovalores identificados, para n inteiro positivo. Neste caso, a solução é dada na forma $G(t) = c_3 \cos\left(an\pi t/L\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$. Empregando a condição inicial $u(x,0) = 0$ segue que $u(x,0) = F(x)G(0) = 0$ ou ainda $G(0) = 0$. Logo,

$$0 = G(0) = c_3 \cos\left(0\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(0\right) = c_3.$$

Dessa forma, $G(t) = c_4 \operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$. Sendo assim, $G(t)$ é proporcional às funções $\operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$.

Nesse caso, temos que as soluções fundamentais para a equação da onda são dadas por $u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$, para n inteiro positivo, e pela superposição das soluções fundamentais obtemos $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$. Para identificar as constantes c_n, para n inteiro positivo, vamos empregar a condição inicial $u_t(x,0) = g(x)$. Consequentemente,

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an\pi}{L}\right)c_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right)$$

$$\Rightarrow\ g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an\pi}{L}\right)c_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an\pi}{L}\right)c_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Assim, os coeficientes c_n, para n inteiro positivo, são obtidos por meio da construção de uma expansão em série de Fourier de senos para a função g, desde que g apresente todas as condições já evidenciadas nas seções anteriores, como admitir uma extensão ímpar periódica e todas as demais condições de convergência para as séries de Fourier.

Sabendo que o coeficiente da expansão em série de senos para g está relacionado ao produto $\left(an\pi/L\right)c_n$. Assim, devemos ter:

$$\left(\frac{an\pi}{L}\right)c_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\ \Rightarrow\ c_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$

para n inteiro positivo. Portanto, a solução para o problema misto envolvendo a corda elástica com deslocamento inicial nulo e velocidade inicial não nula é da forma $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\operatorname{sen}\left(an\pi t/L\right)$, com $c_n=\left(2/an\pi\right)\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$ para n inteiro positivo (FIGUEIREDO, 2012).

Exemplificando

Vamos considerar uma corda elástica com comprimento igual a 30 centímetros, com $a=1$, e que está ligeiramente esticada e com extremidades fixas em dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos **x** esteja ao longo da corda. Suponha que a corda permaneça, inicialmente, em sua posição de equilíbrio e esteja sujeita a uma velocidade inicial não nula dada pela função. O movimento da corda ao longo do tempo pode ser determinado a partir do estudo do problema:

$$\begin{cases}u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 30,\ t\ge 0\\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=3x,\ 0\le x\le 30\\ u(0,t)=u(30,t)=0,\ t\ge 0\end{cases}.$$

Pelo estudo anterior, temos que a solução desse problema é dada pela expressão $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{30}\right)$, de modo que os coeficientes podem ser calculados da seguinte forma:

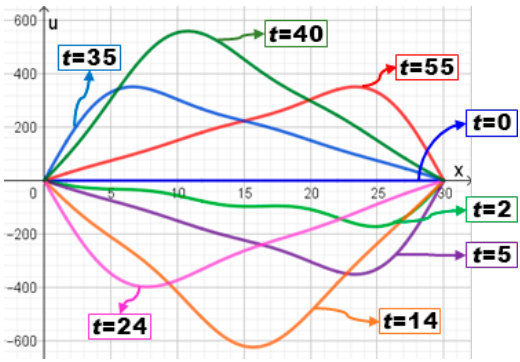
$$c_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{30}(3x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx = \frac{6}{n\pi}\int_0^{30} x\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx$$
$$= \frac{6}{n\pi}\left[\frac{30x\cos\left(n\pi x/30\right)}{n\pi} - \frac{900\text{sen}\left(n\pi x/30\right)}{n^2\pi^2}\right]_0^{30}$$
$$= \frac{6}{n\pi}\left[\frac{30\cdot 30\cdot\cos\left(n\pi\right)}{n\pi} - \frac{900\text{sen}\left(n\pi\right)}{n^2\pi^2} - 0 + 0\right]$$
$$= \frac{6}{n\pi}\left[\frac{900\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}\right] = \frac{5400\cos\left(n\pi\right)}{n^2\pi^2} = \frac{5400(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Portanto, a solução do problema será da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5400(-1)^n}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{30}\right) = \frac{5400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{30}\right)$$

Analisando graficamente a solução do problema, conforme a Figura 4.8, podemos observar o movimento da corda ao longo do tempo, admitindo que suas extremidades permaneçam fixadas e seu deslocamento inicial seja nulo.

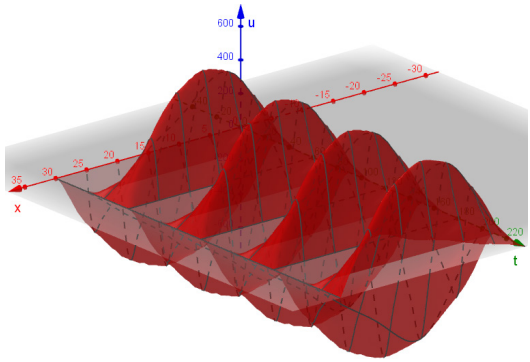
Figura 4.8 | Perfil da corda elástica em determinados instantes de tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos também analisar o movimento da corda ao longo do tempo por meio do gráfico presente na Figura 4.9, observando que existe um perfil que se repete ao longo do tempo, sujeito às condições auxiliares estabelecidas para o problema. Ambos os gráficos foram construídos considerando uma aproximação com 5 termos na expressão da série de Fourier que caracteriza a solução *u*.

Figura 4.9 | Movimento da corda elástica ao longo do tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos ainda considerar problemas nos quais estejam presentes tanto deslocamento quanto velocidade iniciais não nulos, compondo os problemas gerais para cordas elásticas.

Problema geral para a equação da onda unidimensional

Considere, assim como no problema anterior, uma corda elástica de comprimento L, aproximada por um elemento unidimensional, com extremidades fixas. A partir dessas informações podemos construir o seguinte problema misto:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

em que f e g são funções que descrevem, respectivamente, o deslocamento inicial e a velocidade inicial dessa corda. O problema misto em questão consiste no **problema geral para a equação da onda unidimensional**. Para a resolução desse problema podemos empregar o método da separação de variáveis, porém também podemos considerar as soluções para os problemas estudados anteriormente, em que um a velocidade inicial é nula e, no outro, o deslocamento inicial é nulo, e aplicar o princípio da superposição. Sendo assim, se $v(x,t)$ é solução do problema com velocidade inicial nula,

$$\begin{cases} a^2 v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ v(x,0) = f(x);\ v_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L, \\ v(0,t) = v(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

e $w(x,t)$ é solução do problema com deslocamento inicial nulo,

$$\begin{cases} a^2 w_{xx}(x,t) = w_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ w(x,0) = 0;\ w_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le L \\ w(0,t) = w(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases},$$

então $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ é solução do problema geral para a equação da onda unidimensional (BOYCE; DIPRIMA, 2018). Basta notar que $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ é tal que:

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = a^2\left(v_{xx} + w_{xx}\right) - \left(v_{tt} + w_{tt}\right) = \left(a^2 v_{xx} - v_{tt}\right) + \left(a^2 w_{xx} - w_{tt}\right) = 0 + \mathbf{0} = 0\,,$$

ou seja, satisfaz a equação da onda unidimensional, além de satisfazer as condições auxiliares:

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0$$

$$u(L,t) = v(L,t) + w(L,t) = 0 + 0 = 0$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x)\,.$$

Sendo assim, pelo princípio da superposição podemos combinar soluções para identificar soluções para outros problemas, considerando as expressões construídas anteriormente.

Outra possibilidade de estudo são os problemas envolvendo cordas elásticas com extremidades livres no sentido de que podem movimentar-se no sentido vertical, mas não na horizontal, como veremos na sequência.

Cordas com extremidades livres

Seja uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas livres para que possam movimentar-se verticalmente. Esse fato pode ser representado a partir das expressões $u_x(0,t) = 0$ e $u_x(L,t) = 0$. Considerando que a velocidade inicial da corda seja nula, e seu deslocamento inicial seja descrito por uma função f conveniente, sujeita às condições estudadas anteriormente, podemos construir o seguinte problema:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}.$$

Desta forma, temos o problema misto para a equação da onda unidimensional com **extremidades livres** e velocidade inicial nula (PINTO, 2013).

Na obtenção da solução para esse problema também podemos empregar o método da separação de variáveis, admitindo $u(x,t)=F(x)G(t)$. Substituindo na equação diferencial parcial, assim como nos demais casos, encontramos duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, a qual pode ser estudada em conjunto com um fator σ constante (KREYZIG, 2013).

Da primeira equação diferencial ordinária obtemos o problema $\begin{cases} F''(x)+\sigma F(x)=0 \\ F'(0)=F'(L)=0 \end{cases}$ com o acréscimo das condições iniciais características do problema. Para que seja possível obter soluções não nulas, devemos considerar $\sigma>0$, o que implica na solução geral para a EDO dada por $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$, com c_1 e c_2 constantes reais. Aplicando as condições associadas, e sabendo que devemos ter soluções não nulas para o problema, temos $c_2=0$, além dos autovalores $\sigma_n=n^2\pi^2/L^2$ e das autofunções $F_n(x)=\cos\left(n\pi x/L\right)$ correspondentes, para n inteiro positivo. Por outro lado, para a segunda equação diferencial ordinária, temos sua expressão dada por $G''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{L^2}G(t)=0$, devido aos autovalores identificados, para n inteiro positivo, cujas soluções $G(t)$ são proporcionais às funções $\cos\left(an\pi t/L\right)$.

Dessa forma, as soluções fundamentais para a equação da onda são dadas por $u_n(x,t)=\cos\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$, para n inteiro positivo, e pela superposição das soluções fundamentais obtemos $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$. Para identificar as constantes c_n, para n inteiro positivo, vamos empregar a condição inicial $u(x,0)=f(x)$. Logo, $f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\pi x/L\right)$, isto é, os coeficientes c_n, para n inteiro positivo, são obtidos por meio da construção de uma expansão em série de Fourier de cossenos para a função f, desde que f apresente todas as condições já evidenciadas nas seções anteriores, como admitir uma extensão par periódica e todas as demais condições de convergência para as séries de Fourier.

Portanto, a solução para o problema envolvendo a corda elástica com extremidades livres, deslocamento inicial não nulo e velocidade inicial nula é $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\pi x/L\right)\cos\left(an\pi t/L\right)$, cujos coeficientes são tais que $c_n=\left(2/L\right)\int_0^L f(x)\cos\left(n\pi x/L\right)\,dx$ para n inteiro positivo (FIGUEIREDO, 2012).

Assim, podemos construir problemas que envolvem cordas elásticas com extremidades fixas ou livres, com diferentes tipos de condições iniciais e de fronteira, tomando por base o método da separação de variáveis e as propriedades das séries de Fourier.

Assimile

A solução para o problema misto da corda elástica com extremidades livres dado por $\begin{cases} a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$ tem solução da forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\pi x/L\right) \cos\left(an\pi t/L\right)$, cujos coeficientes podem ser calculados por $c_n = \left(2/L\right) \int_0^L f(x) \cos\left(n\pi x/L\right) dx$, com n inteiro positivo.

Note que a alteração nas condições iniciais influencia diretamente as características da solução e das constantes correspondentes, o que indica a necessidade de considerar condições auxiliares coerentes com o fenômeno em estudo e o emprego correto delas na obtenção da solução por meio da separação de variáveis e das séries de Fourier.

Reflita

Qual seria a solução do problema da corda elástica com extremidades livres sujeita a uma velocidade inicial não nula, com deslocamento nulo? E do problema da corda elástica com extremidades livres, velocidade e deslocamento inicial não nulos?

Diante desses estudos, podemos observar que a equação da onda unidimensional pode ser empregada na descrição de diferentes fenômenos, desde que sejam consideradas condições auxiliares coerentes com as características do fenômeno, de modo que sua solução pode ser obtida a partir de uma associação entre o método da separação de variáveis e as séries de Fourier, sujeita às condições de convergência correspondentes.

Dica

Para contribuir com os estudos a respeito da equação da onda unidimensional, consulte o capítulo 4, "Condições de fronteira/iniciais para a equação da onda unidimensional", da dissertação intitulada *Soluções da Equação da Onda Unidimensional*, que pode ser encontrado em

sua biblioteca virtual. Com o auxílio desse material, procure relacionar as diferentes condições que podem ser empregadas no estudo dos problemas mistos envolvendo a equação da onda unidimensional.

Sem medo de errar

Considerando o contexto de atendimento à empresa que atua no ramo da produção de cabos para instalação de linhas de transmissão, sua segunda tarefa consiste em dar continuidade à resolução dos problemas teóricos que auxiliarão nas simulações, complementando os testes realizados em laboratório.

Assim, nessa tarefa você deve investigar o movimento de uma corda elástica de comprimento unitário, isto é, $L=1$, disposta entre dois trilhos perpendiculares ao seu eixo de modo que suas extremidades possam vibrar livremente. O deslocamento vertical no decorrer do tempo, $u(x,t)$, pode ser descrito pelo problema:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=0, & 0<x<1 \\ u_t(x,0)=x, & 0<x<1 \end{cases}.$$

Esse problema consiste em um problema misto envolvendo a equação da onda unidimensional, associada a uma corda com extremidades livres, sujeita a um deslocamento inicial nulo e velocidade inicial não nula.

Empregando o método da separação de variáveis, ao admitir $u(x,t)=F(x)G(t)$ e substituir essa expressão na equação diferencial parcial, assim como nos demais casos, encontramos duas equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem associadas a um fator σ constante. Para que seja obtida uma solução não trivial, é necessário que $\sigma>0$.

Considerando a primeira equação diferencial ordinária temos o problema $\begin{cases} F''(x)+\sigma F(x)=0 \\ F'(0)=F'(L)=0 \end{cases}$ com o acréscimo das condições iniciais características do problema. Tomando a solução geral dessa equação diferencial ordinária, dada por $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$ com c_1 e c_2 constantes reais, em conjunto com as condições auxiliares, obtemos os autovalores $\sigma_n=n^2\pi^2$ e as autofunções $F_n(x)=\cos\left(n\pi x\right)$ correspondentes, para n inteiro positivo.

No caso da segunda equação diferencial ordinária, sua expressão será dada por $G''(t)+n^2\pi^2G(t)=0$, devido aos autovalores identificados,

para n inteiro positivo. A solução geral para essa equação é da forma $G(t)=c_3\cos(n\pi t)+c_4\operatorname{sen}(n\pi t)$. Da condição inicial $u(x,0)=0$ segue que $u(x,0)=F(x)G(0)=0$ ou ainda $G(0)=0$. Logo,

$$0=G(0)=c_3\cos(0)+c_4\operatorname{sen}(0)=c_3 \;\Rightarrow\; c_3=0,$$

ou $G(t)=c_4\operatorname{sen}(n\pi t)$. Dessa forma, $G(t)$ é proporcional às funções $\operatorname{sen}(n\pi t)$.

Consequentemente, as soluções fundamentais são $u_n(x,t)=\cos(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi t)$, para n inteiro positivo, e pela superposição obtemos $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi t)$.

Para identificar as constantes c_n, para n inteiro positivo, vamos empregar a condição inicial $u_t(x,0)=x$. Note inicialmente que $u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)c_n\cos(n\pi x)\cos(n\pi t)$. Sendo assim, $x=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)c_n\cos(n\pi x)$, que consiste em uma expansão em série de cossenos para a função $g(x)=x$, $0<x<1$. Assim, os coeficientes podem ser determinados da seguinte forma:

$$n\pi c_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx=2\left[\frac{x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$=2\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}-0-\frac{\cos(0)}{n^2\pi^2}\right]=2\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\right]=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ -4/n^2\pi^2, & n \text{ ímpar},\end{cases}$$

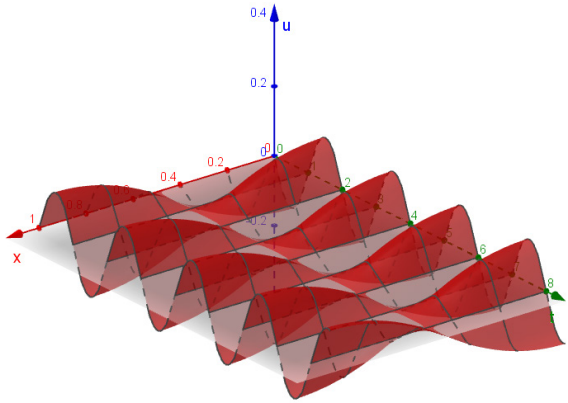
isto é, $c_n=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ -4/n^3\pi^3, & n \text{ ímpar}\end{cases}$. Portanto, a solução para o problema é:

$$u(x,t)=-\frac{4}{\pi^3}\cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)+0-\frac{4}{3^3\pi^3}\cos(3\pi x)\operatorname{sen}(3\pi t)+0-\frac{4}{5^3\pi^3}\cos(5\pi x)\operatorname{sen}(5\pi t)+\ldots$$

ou ainda $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{4}{(2k-1)^3\pi^3}\cos\big((2k-1)\pi x\big)\operatorname{sen}\big((2k-1)\pi t\big)$.

Na Figura 4.10 podemos observar o movimento da corda ao longo do tempo por meio de um gráfico tridimensional, verificando um processo cíclico em que ocorre uma repetição da posição da corda ao longo do tempo. O gráfico foi construído considerando *k* variando de 1 a 5 na expressão da solução *u*.

Figura 4.10 | Movimento da corda de extremidades livres ao longo do tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Finalize seu trabalho, elaborando a parte do relatório técnico, a ser encaminhado para a empresa, contemplando esse problema com a indicação da resolução detalhada para ele, bem como comentários a respeito dos conhecimentos empregados em seu estudo.

Avançando na prática

Estudo da corda elástica com extremidades fixas e livres

Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja participando de um projeto de iniciação científica, em conjunto com docentes da área de Física, voltado para estudantes de cursos de graduação nas áreas de Matemática, Física e Engenharias cujo tema está relacionado ao estudo do movimento de cordas elásticas e equações diferenciais parciais. Considere que vocês estejam elaborando uma proposta de trabalho voltada aos alunos do projeto e que envolva a resolução do problema $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$, o qual consiste no problema misto da equação da onda dimensional, de modo que a corda elástica de comprimento unitário permaneça com uma das extremidades fixas e a outra, livre, sujeita a um deslocamento inicial nulo e velocidade inicial não nula. Resolva o problema apresentado e, a partir desse estudo, finalize

com a elaboração da tarefa a ser executada pelos alunos relativa a esse tema.

Resolução da situação-problema

Empregando o método da separação de variáveis, com $u(x,t)=F(x)G(t)$, da equação diferencial parcial obtemos duas equações diferenciais ordinárias. O problema relativo à primeira equação é da forma $\begin{cases} F''(x)+\sigma F(x)=0 \\ F(0)=F'(1)=0 \end{cases}$, devido às condições impostas no problema. Tomando a solução geral dessa equação diferencial ordinária, dada por $F(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\sigma}x\right)+c_2\text{sen}\left(\sqrt{\sigma}x\right)$ com c_1 e c_2 constantes reais, em conjunto com as condições auxiliares, obtemos os autovalores $\sigma_n=\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$ e as autofunções $F_n(x)=\text{sen}\left((2n+1)\pi x/2\right)$, para n inteiro positivo.

No caso da segunda equação diferencial ordinária, sua expressão será dada por $G''(t)+\left((2n+1)^2\pi^2/4\right)G(t)=0$, devido aos autovalores identificados, para n inteiro positivo. A solução geral para essa equação é da forma $G(t)=c_3\cos\left((2n+1)\pi t/2\right)+c_4\text{sen}\left((2n+1)\pi t/2\right)$. Da condição inicial $u(x,0)=0$ segue que as soluções $G(t)$ são proporcional às funções $\text{sen}\left((2n+1)\pi t/2\right)$, com n inteiro positivo. Dessa forma, as soluções fundamentais são $u_n(x,t)=\text{sen}\left((2n+1)\pi x/2\right)\text{sen}\left((2n+1)\pi t/2\right)$, para n inteiro positivo, e pela superposição obtemos $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\text{sen}\left((2n+1)\pi x/2\right)\text{sen}\left((2n+1)\pi t/2\right)$. Para os coeficientes, partindo da condição $u_t(x,0)=g(x)$, segue que $g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\pi/2\right)c_n\text{sen}\left((2n+1)\pi x/2\right)$. Logo, os coeficientes podem ser calculados por $\dfrac{(2n+1)\pi}{2}c_n=2\int_0^1 g(x)\,\text{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)dx$ ou ainda $c_n=\dfrac{4}{(2n+1)\pi}\int_0^1 g(x)\,\text{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)dx$, com n inteiro positivo, o que conclui a solução do problema.

Finalize sua tarefa organizando a proposta a ser desenvolvida com os alunos de iniciação científica, indicando os principais conceitos a serem estudados para a investigação do problema em questão.

Faça valer a pena

1. A construção correta dos modelos associados aos fenômenos em estudo é essencial para a identificação de estratégias de solução adequadas e a análise da solução mediante as condições que são impostas.

Nesse sentido, suponha que um estudante deseja estudar um problema relativo ao movimento de uma corda elástica ao longo do tempo, aproximando-a por um elemento unidimensional, considerando que esse tipo de fenômeno pode ser associado à equação da onda unidimensional.

Considere que essa corda tenha comprimento igual a 40 unidades, com $a=3$, e cujas extremidades permanecerão livres para movimentar-se verticalmente, sem a ocorrência de deslocamentos horizontais.

Além disso, suponha que a velocidade inicial dessa corda seja descrita pela função $p(x)=\cos(x)$ e seu deslocamento inicial seja dado por $q(x)=\operatorname{sen}(x)$.

Com base na situação descrita, assinale a alternativa que indica corretamente o problema misto correspondente:

a) $\begin{cases} 9u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 40,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}(x);\ u_t(x,0)=\cos(x),\ 0<x<40 \\ u_x(0,t)=u_x(40,t)=0,\ t>0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 9u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 40,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\cos(x);\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}(x),\ 0<x<40 \\ u_x(0,t)=u_x(40,t)=0,\ t>0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 9u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 40,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}(x);\ u_t(x,0)=\cos(x),\ 0<x<40 \\ u(0,t)=u(40,t)=0,\ t>0 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} 9u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 40,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=\cos(x);\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}(x),\ 0<x<40 \\ u(0,t)=u(40,t)=0,\ t>0 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),\ 0\le x\le 1,\ t\ge 0 \\ u(x,0)=40;\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<40 \\ u_x(0,t)=\cos(x);\ u_x(40,t)=\operatorname{sen}(x),\ t>0 \end{cases}$.

2. O problema envolvendo uma corda elástica de comprimento unitário, com $a=1$, no qual uma extremidade permanece fixa e a outra livre, sujeita a deslocamento inicial nulo e velocidade inicial não nula é dada por:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t)=u_x(1,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x), & 0<x<1 \end{cases}.$$

Considere que a velocidade inicial de uma corda, sujeita a essas condições, seja descrita pela função $g(x)=2-2x$.

Sabendo que a solução para o problema misto descrito é da forma $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left((2n+1)\pi x/2\right)\operatorname{sen}\left((2n+1)\pi t/2\right)$, assinale a alternativa que indica corretamente a expressão que caracteriza os coeficientes c_n , com n inteiro positivo, para a série de Fourier que descreve a solução:

a) $c_n=\dfrac{16}{(2n+1)^2\pi^2}+\dfrac{32(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}$.

b) $c_n=\dfrac{16}{(2n+1)^2\pi^2}$.

c) $c_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$.

d) $c_n=\dfrac{16}{(2n+1)^2\pi^2}+\dfrac{32(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3\pi^3}$.

e) $c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2\pi^2}$.

3. Considere o problema geral envolvendo a equação da onda unidimensional dado por:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=-x,\ u_t(x,0)=2x, & 0<x<1 \end{cases}$$

Esse problema pode ser resolvido por meio do emprego do princípio da superposição, considerando os problemas correspondentes nos quais adotamos deslocamento e velocidade nulos, respectivamente, de modo que a solução do problema geral possa ser escrita como a soma das soluções para os problemas mais simples associados.

Assinale a alternativa que indica a solução para o problema geral obtida por meio da aplicação do princípio da superposição:

a) $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(n\pi x)\cos(n\pi t)$.

b) $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi t)$.

c) $u(x,t)=\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi x)\left(\cos(n\pi t)+n\pi\ \operatorname{sen}(n\pi t)\right)$.

d) $u(x,t)=\dfrac{4}{n\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi x)\left(\cos(n\pi t)+\dfrac{2}{n^2\pi}\operatorname{sen}(n\pi t)\right)$.

e) $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(n\pi x)\left(\cos(n\pi t)-\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi t)\right)$.

Seção 4.3

Equação de Laplace bidimensional

Diálogo aberto

Nas duas seções anteriores estudamos a equação da onda e diferentes situações nas quais ela pode ser empregada para modelar fenômenos relativos a vibrações de cordas, sujeitas a determinadas condições iniciais e de fronteira.

Nesta seção estudaremos outra equação diferencial parcial importante, a equação de Laplace, a qual possui associação direta com o operador laplaciano. Esse operador está presente em diversos estudos da matemática, física e engenharias, como energias potenciais de partículas no vácuo, escoamento de fluidos, problemas de condução do calor bidimensionais no estado estacionário, gravitação, entre outros.

Assim, para este estudo, considere o contexto de atendimento à indústria que pretende produzir um novo tipo de cabo para linhas de transmissão. A terceira tarefa direcionada a você e seus colegas consiste em resolver um problema modelado pela equação de Laplace, o qual pode ser associado aos campos eletrostáticos produzidos durante a instalação e o funcionamento das linhas de transmissão, visando desenvolver um estudo teórico para construir com os testes realizados em laboratório e simulações correspondentes.

Dessa forma, a terceira tarefa consiste em estudar e resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,2) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Em seguida, construa um relatório descritivo contemplando a resolução comentada para o problema proposto, bem como apresentando a ilustração do retângulo, no plano xy, sobre o qual é estudado esse problema.

Desta forma, você e seus colegas de setor poderão finalizar sua parte no atendimento à indústria em questão. Diante disso, você deve finalizar a tarefa de seu setor construindo um relatório técnico que envolva os três problemas resolvidos ao longo da unidade, todos de forma detalhada, apresentando também a indicação de todos os conceitos empregados na resolução de cada um dos problemas.

Para a conclusão deste desafio, nesta seção estudaremos a equação de Laplace bidimensional, observando que tipos de condições de fronteira podem ser consideradas e as regiões nas quais podem ser avaliadas as soluções para os problemas modelados por essas equações.

Prossiga em seus estudos e verifique quais são os conhecimentos essenciais para finalizar o desafio proposto!

Não pode faltar

Nesta seção estudaremos uma das equações diferenciais parciais mais importantes nas áreas da Matemática, Física e engenharias devido a suas aplicações, a chamada equação de Laplace. Podemos observar a aplicação dessa equação no estudo do estado estacionário de problemas de condução de calor bidimensionais para analisar as funções potenciais de partículas livres no espaço, sob ação apenas de forças gravitacionais – estudo este que possibilitou a caracterização dessa equação também como equação do potencial –, em problemas envolvendo eletromagnetismo, dentre outros (BOYCE; DIPRIMA, 2018). No campo do eletromagnetismo, por exemplo, a equação de Laplace tem origem nas equações de Maxwell, mais especificamente na equação de Gauss, quando a densidade volumétrica de carga é nula (HAYT; BUCK, 2013).

A **equação de Laplace bidimensional** é dada por $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$, em que (x,y) pertencem a um domínio D. Note que essa equação não depende do tempo, por isso não existem condições iniciais que podem ser adotadas em associação com essa equação na constituição dos problemas, o que implica na possibilidade de construção apenas de problemas de valores de fronteira.

No estudo da equação de Laplace, em geral, são considerados dois tipos de condições de fronteira: de Dirichlet e de Neumann, ou ainda as condições mistas. Vejamos quais são as caracterizações desses tipos de condições associadas à equação de Laplace bidimensional:

- Condições de fronteira de **Dirichlet**: deve ser válida a igualdade $u(x,y)=f(x,y)$ na fronteira da região D, denotada por ∂D, com f uma função conhecida.
- Condições de fronteira de **Neumann**: deve ser válida a igualdade $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=g(x,y)$ em ∂D, isto é, a derivada direcional de u ao longo da normal externa à fronteira deve coincidir com uma função g conhecida.

- Condições **mistas** ou de **Robin**: a solução deve satisfazer $u(x,y)=f(x,y)$, em parte da fronteira de seu domínio, e $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=g(x,y)$, no restante da fronteira (NAGLE, 2012).

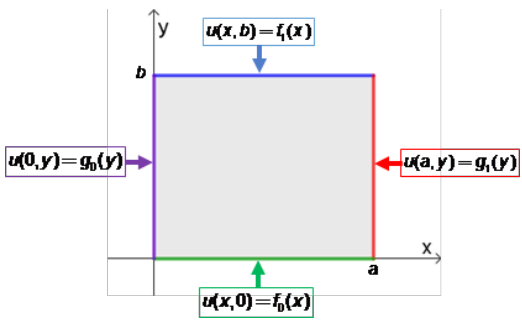
Assim como nos problemas envolvendo a equação do calor e a equação da onda unidimensionais, podemos empregar o método da separação de variáveis para a resolução de problemas envolvendo a equação de Laplace bidimensional. Porém, nesse processo de resolução precisamos considerar as características do domínio *D* de variação de (x,y), verificando estratégias adequadas ao seu formato.

Vamos iniciar pelo estudo da equação de Laplace em um domínio que assume o formato retangular, compondo o chamado problema de Dirichlet no retângulo.

Equação de Laplace no retângulo

Seja o problema relacionado à identificação de uma função *u*, de duas variáveis reais, que corresponda à solução da equação de Laplace bidimensional, $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$, em um domínio retangular em que $0<x<a$ e $0<y<b$. Dessa forma, a fronteira dessa região é composta por quatro segmentos, sobre os quais podemos definir condições de fronteira da seguinte forma: $u(x,0)=f_0(x)$ e $u(x,b)=f_1(x)$ para $0<x<a$; e ainda $u(0,y)=g_0(y)$ e $u(a,y)=g_1(y)$ para $0<y<b$. A região e as condições de fronteira correspondentes podem ser verificadas na Figura 4.11.

Figura 4.11 | Condições de fronteira em região retangular



Fonte: elaborada pela autora.

Um **problema de Dirichlet no retângulo** consiste na equação de Laplace bidimensional, em que tomamos apenas uma das funções dentre $f_0(x)$, $f_1(x)$, $g_0(y)$ ou $g_1(y)$ não nula, sendo todas as demais tomadas como nulas

(FIGUEIREDO, 2012).

Vejamos como podemos determinar a solução para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=f(x),\ 0\le x\le a \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,\ 0<y<b \end{cases}.$$

Nesse caso, temos que f é uma função definida no intervalo $[0,a]$ e depende da variável x.

Para identificar a solução para esse problema, empregaremos o método da separação de variáveis. Suponha, neste caso, que a solução seja dada por $u(x,y)=F(x)G(y)$, que ao ser substituída na equação de Laplace implica em:

$$\big(F''(x)G(y)\big)+\big(F(x)G''(y)\big)=0 \ \Rightarrow\ F''(x)G(y)=-F(x)G''(y) \ \Rightarrow\ \frac{F''(x)}{F(x)}=-\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Para que a última igualdade seja válida, devemos ter $\frac{F''(x)}{F(x)}=-\frac{G''(y)}{G(y)}=\sigma$, com σ uma constante. Com isso, podemos obter duas equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem:

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=\sigma \ \Rightarrow\ F''(x)=\sigma F(x) \ \Rightarrow\ F''(x)-\sigma F(x)=0;$$

$$-\frac{G''(y)}{G(y)}=\sigma \ \Rightarrow\ G''(y)=-\sigma G(y) \ \Rightarrow\ G''(y)+\sigma G(y)=0.$$

Considerando as condições de contorno homogêneas apresentadas, ou seja, as condições nulas, obtemos que: $0=u(x,0)=F(x)G(0)$, $0=u(0,y)=F(0)G(y)$ e $0=u(a,y)=F(a)G(y)$, o que implica em $G(0)=0$, $F(0)=0$ e $F(a)=0$ (FIGUEIREDO, 2012).

Vamos iniciar pela resolução do problema $\begin{cases} F''(x)-\sigma F(x)=0 \\ F(0)=F(a)=0 \end{cases}$ para $0<x<a$. Resolvendo este problema por meio do estudo de autovalores e autofunções, análogo ao que foi analisado nas seções anteriores, podemos identificar os autovalores $\sigma_n=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, com n inteiro positivo, cujas autofunções correspondentes são da forma $F_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, com n inteiro positivo.

Por outro lado, da segunda equação diferencial ordinária, considerando os autovalores determinados, temos $G''(y)-\frac{n^2\pi^2}{a^2}G(y)=0$. A solução geral para essa equação é da forma $G_n(y)=\beta_n e^{n\pi y/a}+\gamma_n e^{-n\pi y/a}$, com n inteiro positivo. Da

condição $G(0)=0$ obtemos:

$$0=G_n(0)=\beta_n e^0+\gamma_n e^0=\beta_n+\gamma_n\,,$$

isto é, $-\beta_n=\gamma_n$ para *n* inteiro positivo. Dessa igualdade, em conjunto com a solução, tem-se:

$$G_n(y)=\beta_n e^{n\pi y/a}-\beta_n e^{-n\pi y/a}=\beta_n\left[e^{n\pi y/a}-e^{-n\pi y/a}\right]=2\beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Lembre-se que a função seno hiperbólico, denotada por senh, pode ser relacionada com a função exponencial da seguinte forma: $\operatorname{senh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, com *x* real (STEWART, 2016).

Consequentemente, as soluções fundamentais para a equação de Laplace assumem a forma $u_n(x,y)=\alpha_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)$, com *n* inteiro positivo. Verifique que essas funções satisfazem a equação de Laplace e as condições de fronteira homogêneas, conforme estudado anteriormente, considerando *n* um inteiro positivo qualquer.

Desta forma, a partir das soluções fundamentais, temos que a solução para a equação de Laplace, considerando as condições de fronteira homogêneas, pode ser descrita na forma:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Para concluir a resolução do problema, é necessário determinar os coeficientes associados à solução, os quais podem ser determinados a partir da condição de fronteira $u(x,b)=f(x)$. Sendo assim, devemos ter $u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)=f(x)$. Note que $c_n \operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)$ são os coeficientes da série de Fourier de senos para a função *f*, assim $c_n \operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)=\dfrac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)dx$, com *n* inteiro positivo.

Observe que a solução envolve uma razão na forma $\dfrac{\operatorname{senh}\left(n\pi y/a\right)}{\operatorname{senh}\left(n\pi b/a\right)}$ proveniente, inclusive, dos coeficientes, para *n* inteiro positivo. Quando *n* é um valor suficientemente grande, podemos adotar a aproximação $senh(\phi)\cong\dfrac{e^{\phi}}{2}$, o que implica em:

$$\frac{\operatorname{senh}\left(n\pi y/a\right)}{\operatorname{senh}\left(n\pi b/a\right)}=\frac{\frac{1}{2}e^{n\pi y/a}}{\frac{1}{2}e^{n\pi b/a}}=e^{n\pi(y-b)/a}=e^{-n\pi(b-y)/a}\,.$$

Portanto, a solução para o problema de Dirichlet no retângulo, cuja descrição foi apresentada anteriormente, é da forma $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-n\pi(b-y)/a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ com coeficientes dados por $k_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$, para n inteiro positivo (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Exemplificando

Seja o problema de Dirichlet $\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ 0<x<2,\ 0<y<1 \\ u(x,0)=0,\ u(x,1)=f(x),\ 0\le x\le 2 \\ u(0,y)=0,\ u(2,y)=0,\ 0<y<1 \end{cases}$

em que $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$. Sabemos que a solução para esse problema é, para n inteiro positivo, $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-n\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

Os coeficientes podem ser calculados como segue:

$$k_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\int_1^2 (2-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx+2\int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx-\int_1^2 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi x/2\right)}{\left(n\pi/2\right)^2}-\frac{x\cos\left(n\pi x/2\right)}{\left(n\pi/2\right)}\right]_0^1+2\left[-\frac{\cos\left(n\pi x/2\right)}{\left(n\pi/2\right)}\right]_1^2$$

$$-\left[\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi x/2\right)}{\left(n\pi/2\right)^2}-\frac{x\cos\left(n\pi x/2\right)}{\left(n\pi/2\right)}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{4\operatorname{sen}\left(n\pi x/2\right)}{n^2\pi^2}-\frac{2x\cos\left(n\pi x/2\right)}{n\pi}\right]_0^1+2\left[-\frac{2\cos\left(n\pi x/2\right)}{n\pi}\right]_1^2$$

$$-\left[\frac{4\operatorname{sen}\left(n\pi x/2\right)}{n^2\pi^2}-\frac{2x\cos\left(n\pi x/2\right)}{n\pi}\right]_1^2$$

$$=\frac{8\operatorname{sen}\left(n\pi/2\right)}{n^2\pi^2}=\begin{cases} 8/n^2\pi^2,\ n=1+4k \\ -8/n^2\pi^2,\ n=3+4k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0,\ n=2k \end{cases}$$

Portanto, a solução é dada por:

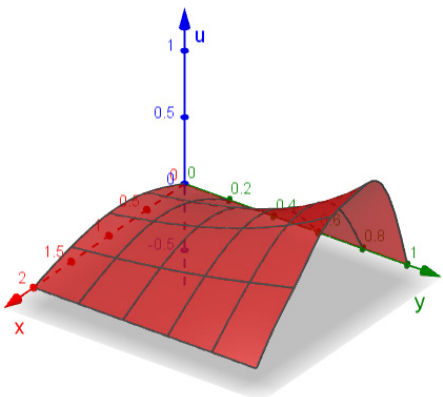
$$u(x,y)=\frac{8}{\pi^2}e^{-\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)+0-\frac{8}{3^2\pi^2}e^{-3\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+0$$
$$+\frac{8}{5^2\pi^2}e^{-5\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right)+0-\frac{8}{7^2\pi^2}e^{-7\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right)+0+\ldots$$

ou ainda:

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi^2}e^{-\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{8}{3^2\pi^2}e^{-3\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$
$$+\frac{8}{5^2\pi^2}e^{-5\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right)-\frac{8}{7^2\pi^2}e^{-7\pi(1-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right)+\ldots$$

Na Figura 4.12 podemos observar o comportamento da solução para o problema de Dirichlet no retângulo, sujeito à condição inicial e considerando uma aproximação obtida ao tomar *n* variando de 1 a 5 na soma que define a solução *u*. Pela representação gráfica podemos observar as influências das diferentes condições de fronteira sob o comportamento da solução.

Figura 4.12 | Solução para o problema de Dirichlet no retângulo



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, na resolução de um problema de Dirichlet no retângulo, o qual envolve uma equação de Laplace bidimensional, é preciso considerar condições de fronteira adequadas, tomando apenas uma delas não homogênea e adequando os procedimentos discutidos anteriormente.

Reflita

O que podemos afirmar a respeito da solução do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ 0<x<2,\ 0<y<3 \\ u(x,0)=x,\ u(x,3)=0,\ 0\le x\le 2 \\ u(0,y)=0,\ u(2,y)=0,\ 0<y<3 \end{cases}$$

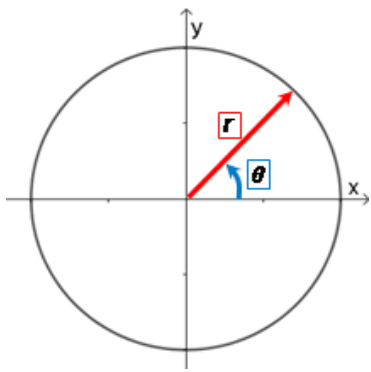
considerando o que foi estudado anteriormente?

Além das regiões retangulares, podemos estudar o problema de Dirichlet em um círculo, analisando a solução para a equação de Laplace tomando por base uma região na forma de disco e a associação entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares.

Equação de Laplace no disco

Considere agora o problema composto pela equação de Laplace bidimensional a ser estudada em uma região circular na qual o raio varia no intervalo $0<r<a$, sujeita à condição de contorno $u(a,\theta)=f(\theta)$, em que f é uma função dada em $0\le\theta\le 2\pi$ (FIGUEIREDO, 2012). Essa região está representada na Figura 4.13, comparada com o sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 4.13 | Problema de Dirichlet em um disco



Fonte: elaborada pela autora.

Para esse problema, devido à mudança das coordenadas cartesianas para polares na descrição da região em estudo, a equação de Laplace bidimensional assume a forma:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

Condições essenciais para que a solução $u(r,\theta)$ esteja bem definida são que u seja periódica em θ com período 2π e que u seja limitada para $r \leq a$ (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Esse problema também pode ser resolvido por meio do emprego do método da separação de variáveis e da série de Fourier. A solução para o problema pode ser obtida pela superposição das soluções fundamentais, o que implica em $u(r,\theta)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(c_n\cos(n\theta)+k_n\operatorname{sen}(n\theta)\right)$, cujos coeficientes são calculados como segue:

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\, d\theta, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta, \quad n = 1,\ 2,\ 3,...$$

Dica

Os detalhes da dedução da solução para o problema de Dirichlet no disco, ou no círculo, podem ser conferidos na seção 10.8, "Equação de Laplace", do livro *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

Assim, para estudar os problemas modelados pela equação de Laplace devemos considerar condições de fronteira adequada, lembrando que não é possível adotar condições iniciais porque esta equação não descreve variações temporais.

Sem medo de errar

No atendimento à empresa que pretende produzir um novo tipo de cabo para linhas de transmissão, sua terceira tarefa consiste em contribuir com as simulações e testes em laboratório por meio da apresentação da resolução, de forma teórica e detalhada, para o problema:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1, \quad 0<y<2 \\ u(x,0)=0, \quad u(x,2)=0, & 0\leq x\leq 1 \\ u(0,y)=0, \quad u(1,y)=2y, & 0\leq y\leq 2 \end{cases}.$$

Assim, você deve apresentar a resolução comentada para esse problema, visando encaminhá-la aos setores responsáveis na indústria atendida.

Para a resolução do problema apresentado, podemos empregar o método da separação de variáveis. Nesse sentido, vamos supor que a solução é

$u(x,y)=F(x)G(y)$, com $0<x<1$ e $0<y<2$, que ao ser substituída na equação de Laplace implica em $\frac{F"(x)}{F(x)}=-\frac{G"(y)}{G(y)}$, a qual deve ser constante, ou seja, da forma $\frac{F"(x)}{F(x)}=-\frac{G"(y)}{G(y)}=\sigma$, com σ constante. Com isso, podemos obter duas equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem: $F"(x)-\sigma F(x)=0$ e $G"(y)+\sigma G(y)=0$. Pelas condições de contorno homogêneas apresentadas, ou seja, as condições nulas, obtemos: $0=u(x,0)=F(x)G(0) \Rightarrow G(0)=0$; $0=u(x,2)=F(x)G(2) \Rightarrow G(2)=0$ e $0=u(0,y)=F(0)G(y) \Rightarrow F(0)=0$.

O problema $\begin{cases}G"(y)+\sigma G(y)=0\\ G(0)=G(2)=0\end{cases}$, $0<y<2$, apresenta autovalores $\sigma_n=\frac{n^2\pi^2}{2^2}=\frac{n^2\pi^2}{4}$, com n inteiro positivo, e autofunções correspondentes $G_n(y)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$, com n inteiro positivo.

Por outro lado, da segunda equação diferencial ordinária, considerando os autovalores determinados no estudo do problema anterior, temos $F"(x)-\frac{n^2\pi^2}{4}F(x)=0$, cuja solução geral pode ser escrita na forma $F_n(x)=\beta_n e^{n\pi x/2}+\gamma_n e^{-n\pi x/2}$, com n inteiro positivo. Como é válida a condição $F(0)=0$ então $0=F_n(0)=\beta_n e^0+\gamma_n e^0=\beta_n+\gamma_n$, isto é, $-\beta_n=\gamma_n$ para n inteiro positivo. Dessa igualdade, em conjunto com a solução, tem-se $F_n(x)=2\beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$. As soluções fundamentais para a equação de Laplace são $u_n(x,y)=\alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, com n inteiro positivo, as quais satisfazem a equação de Laplace bidimensional. A partir das soluções fundamentais, podemos afirmar que a solução para a equação de Laplace, considerando as condições de fronteira homogêneas, pode ser descrita na forma:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Para os coeficientes temos a condição de fronteira $u(1,y)=2y$, com $0\le y\le 2$. Assim, $2y=u(1,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, isto é, $c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ são os coeficientes da série de Fourier de senos para a função f, o que implica em $c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{2}{2}\int_0^2 f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)dy$, com n inteiro positivo. A solução envolve $\frac{\operatorname{senh}(n\pi x/2)}{\operatorname{senh}(n\pi/2)}$, para n inteiro positivo, o que pela aproximação $senh(\phi)\cong\frac{e^{\phi}}{2}$ implica em $\frac{\operatorname{senh}(n\pi x/2)}{\operatorname{senh}(n\pi/2)}=\frac{\frac{1}{2}e^{n\pi x/2}}{\frac{1}{2}e^{n\pi/2}}=e^{n\pi(x-1)/2}=e^{-n\pi(1-x)/2}$.

Logo, a solução será $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-n\pi(1-x)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$, com coeficientes dados por:

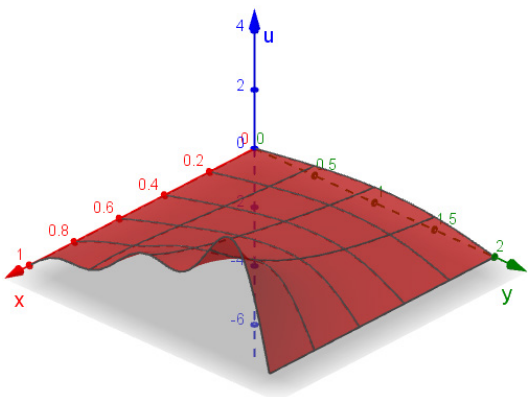
$$k_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)dy=\int_0^2 2y\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)dy=2\int_0^2 y\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)dy$$

$$=2\left[\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi y/2\right)}{\left(n\pi/2\right)^2}-\frac{y\cos\left(n\pi y/2\right)}{\left(n\pi/2\right)}\right]_0^2=2\left[\frac{4\operatorname{sen}\left(n\pi y/2\right)}{n^2\pi^2}-\frac{2y\cos\left(n\pi y/2\right)}{n\pi}\right]_0^2$$

$$=2\left[\frac{4\operatorname{sen}\left(n\pi\right)}{n^2\pi^2}-\frac{4\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}-0+0\right]=-\frac{8\cos\left(n\pi\right)}{n\pi}=-\frac{8\left(-1\right)^n}{n\pi}=\frac{8\left(-1\right)^{n+1}}{n\pi}$$

Portanto, a solução será $u(x,y)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}e^{-n\pi(1-x)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$. O comportamento da solução pode ser observado na Figura 4.14, considerando uma aproximação por meio da soma com *n* variando de 1 a 5.

Figura 4.14 | Comportamento da solução *u* com *n* variando de 1 a 5



Fonte: elaborada pela autora.

Finalize a elaboração do relatório técnico acrescentando a resolução completa do problema com as representações gráficas e comentários que possam contribuir com a compreensão da solução.

Com isso, você estará apto a finalizar seu trabalho. Para isso, conclua a elaboração do relatório técnico que será encaminhando à empresa sob atendimento, contemplando as resoluções detalhadas para os três problemas apresentados, destacando todos os conceitos necessários para a resolução, bem como as análises das soluções obtidas.

Problemas de Dirichlet no retângulo e no disco

Descrição da situação-problema

Imagine que você esteja participando de um projeto de extensão voltado ao atendimento às dúvidas de alunos do curso de graduação em Matemática. Assim, sua primeira tarefa nesse projeto é elaborar uma apresentação a respeito do problema de Dirichlet no disco, destacando como este pode ser obtido a partir do problema no retângulo e das coordenadas polares.

Resolução da situação-problema

Para cumprir seu desafio, considere inicialmente a equação de Laplace bidimensional dada por $u_{xx}+u_{yy}=0$. Essa equação está associada à equação de Laplace bidimensional na forma $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$, com $0<r<a$ e $0<\theta<2\pi$, empregada no problema de Dirichlet no disco.

Para a obtenção desse formato para a equação de Laplace, podemos partir de $u_{xx}+u_{yy}=0$ em conjunto com as coordenadas polares, dadas por $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\,\text{sen}(\theta)$, sabendo também que $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta=\text{arctg}(y/x)$.

Pela regra da cadeia $u_x=u_r r_x+u_\theta\theta_x$. Derivando novamente pela regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned}u_{xx}&=\left(u_r r_x\right)_x+\left(u_\theta\theta_x\right)_x=\left(u_r\right)_x r_x+u_r r_{xx}+\left(u_\theta\right)_x\theta_x+u_\theta\theta_{xx}\\&=\left(u_{rr}r_x+u_{r\theta}\theta_x\right)r_x+u_r r_{xx}+\left(u_{\theta r}r_x+u_{\theta\theta}\theta_x\right)\theta_x+u_\theta\theta_{xx}\\&=u_{rr}\left(r_x\right)^2+u_{r\theta}\theta_x r_x+u_r r_{xx}+u_{\theta r}r_x\theta_x+u_{\theta\theta}\left(\theta_x\right)^2+u_\theta\theta_{xx}\end{aligned}.$$

Derivando também os fatores r e θ com respeito a x até a segunda ordem segue que:

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}\;\Rightarrow\;r_{xx}=\frac{r-xr_x}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot r_x=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$$

$$\theta_x=\frac{1}{1+\left(y/x\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{r^2}\;\Rightarrow\;\theta_{xx}=-y\left(-\frac{2}{r^3}\right)r_x=-y\left(-\frac{2}{r^3}\right)\cdot\frac{x}{r}=\frac{2xy}{r^4}.$$

Substituindo essas expressões em u_{xx}, e sabendo que $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ pela continuidade, segue que:

$$u_{xx} = u_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + u_{r\theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\left(\frac{x}{r}\right) + u_r\left(\frac{y^2}{r^3}\right) + u_{\theta r}\left(\frac{x}{r}\right)\left(-\frac{y}{r^2}\right) + u_{\theta\theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)^2 + u_\theta\left(\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$= \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - \frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r - \frac{xy}{r^3}u_{\theta r} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^4}u_\theta = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + 2\frac{xy}{r^4}u_\theta .$$

De modo análogo podemos mostrar que:

$$u_{xx} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} - 2\frac{xy}{r^4}u_\theta .$$

Somando essas expressões, substituindo na equação de Laplace bidimensional, podemos observar que:

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} .$$

que corresponde à equação que compõe o problema de Dirichlet no disco.

Para finalizar seu desafio, elabore a apresentação para os estudantes sobre o tema proposto, destacando os principais elementos e conceitos essenciais para a construção da equação em coordenadas polares, complementando com outras informações relevantes.

Faça valer a pena

1. Podemos construir três tipos de problemas com base na equação de Laplace bidimensional conforme as condições de fronteira estabelecidas: condições de Dirichlet, de Neumann ou de Robin.

Com base nesse tema, analise os seguintes problemas:

Problema 1: $\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,\ 0 < x < 4,\ 0 < y < 3 \\ u(x,0) = \cos(3x),\ u(x,3) = 0,\ 0 \le x \le 4 \\ u(0,y) = 0,\ u(4,y) = -3y,\ 0 < y < 3 \end{cases}$;

Problema 2: $\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u_n(x,0) = 0,\ u(x,1) = 3\text{sen}(2x),\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ 0 < y < 1 \end{cases}$;

Problema 3: $\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 4 \\ u_n(x,0) = 3x,\ u_n(x,4) = 0,\ 0 \le x \le 2 \\ u_n(0,y) = 2y,\ u_n(2,y) = \cos(y),\ 0 < y < 4 \end{cases}$.

Qual dos seguintes problemas apresenta apenas condições de fronteira do tipo Dirichlet?

a) Apenas o problema 1.
b) Apenas o problema 2.
c) Apenas os problemas 1 e 2.
d) Apenas os problemas 1 e 3.
e) Apenas os problemas 2 e 3.

2. Dizemos que uma função contínua $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é harmônica se ela satisfaz à equação de Laplace bidimensional:

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0\ .$$

Assim, desde que essas condições sejam verificadas podemos classificar uma função como harmônica ou não.
Com base nesse tema, seja a função $u(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$, com *a*, *b* e *c* números reais.
Que relações devem ser estabelecidas entre as constantes *a, b* e *c* para que a função *u* possa ser classificada como harmônica?

a) Devemos ter *a, b* e *c* números reais com $a=c$.
b) Devemos ter *a, b* e *c* números reais com $a=-c$.
c) Devemos ter *a, b* e *c* números reais com $a+b=c$.
d) Devemos ter *a, b* e *c* números reais com $a+c=b$.
e) Devemos ter *a, b* e *c* números reais com $a-b=c$.

3. O problema de Dirichlet no retângulo definido por

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=f(x),\ 0\le x\le a \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,\ 0<y<b \end{cases}$$

tem solução na forma:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n e^{-n\pi(b-y)/a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

com coeficientes dados por $k_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$, para *n* inteiro positivo.
Com base nesse tema, seja o problema:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\ 0<x<4,\ 0<y<12 \\ u(x,0)=0,\ u(x,12)=1-\dfrac{x}{4},\ 0\le x\le 4 \\ u(0,y)=0,\ u(4,y)=0,\ 0<y<12 \end{cases}.$$

Assinale a alternativa que indica a solução correta para o problema apresentado:

a) $u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi(1-x)/4}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{4}\right)$.

b) $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi(12-x)/4}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{4}\right)$.

c) $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi(4-y)/2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

d) $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi(12-y)/4}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$.

e) $u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi(1-y)/4}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$.

Referências

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BRANNAN, James R.; BOYCE, William E. **Equações diferenciais**: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. **Equações diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

HAYT, W. H.; BUCK, J. A. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

KREYZIG, Erwin. **Matemática superior para engenharia**: volume 2. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

NAGLE, R. Kent. **Equações diferenciais**. 8 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

PINTO, Carla Alexandra Moreira. **Soluções da equação de onda unidimensional**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**: volume 2. Porto Alegre: Bookman, 2009.

STEWART, James. **Cálculo**: volume I. 8 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THOMAS, George B. **Cálculo**: volume 2. 11 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Matemática avançada para engenharia**. v.3. Porto Alegre: Bookman, 2009.

ISBN 978-85-522-1382-6