KLS

Controle de Vibrações

Controle de Vibrações

Ricardo Carvalho Quesada

© 2019 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Éder Cícero Adão Simêncio
Roberto Mac Intyer Simões

Editorial
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Quesadac, Ricardo Carvalho
Q5c Controle de vibrações / Ricardo Carvalho Quesada. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2019.
240 p.

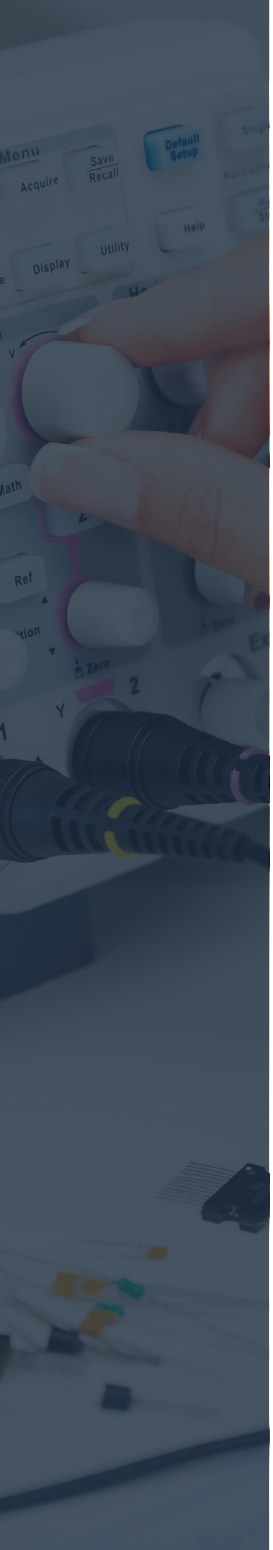
ISBN 978-85-522-1370-3

1. Vibrações mecânicas. 2. Vibrações livres. 3. Vibrações forçadas. I. Quesadac, Ricardo Carvalho. II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2019
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/



Sumário

Unidade 1
Fundamentos de vibrações 7

Seção 1.1
Conceitos básicos e classificação de vibrações 9

Seção 1.2
Elementos de análise 22

Seção 1.3
Movimento e análise harmônica 39

Unidade 2
Vibrações livres 55

Seção 2.1
Vibração livre de um sistema de translação não amortecido 57

Seção 2.2
Vibração livre de um sistema torcional não amortecido 77

Seção 2.3
Vibração livre com amortecimento viscoso e com amortecimento Coulomb 92

Unidade 3
Vibrações forçadas 111

Seção 3.1
Respostas de um sistema 113

Seção 3.2
Vibrações sob condições forçantes gerais e sistemas com dois graus de liberdade 135

Seção 3.3
Sistemas com vários graus de liberdade 161

Unidade 4
Controle e medições de vibração 187

Seção 4.1
Parâmetros de controle de vibração 188

Seção 4.2
Introdução de amortecimento 205

Seção 4.3
Medições de vibração e aplicações 220

Palavras do autor

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma etapa do curso de Engenharia Mecânica. Neste livro serão apresentados a você os conceitos de vibrações e as formas de como controlar esse fenômeno tão importante, que deve ser levado em consideração nos projetos tanto mecânicos como estruturais. Vibração é um efeito gerado a partir da excitação inicial ou contínua, podendo ser tanto interna quanto externa. Temos que este efeito pode se tornar devastador quando não suprimido ou controlado, sendo possível até mesmo levar a máquina ou estrutura ao colapso e à desintegração.

Esperamos que você se interesse pelo assunto, que compreenda e torne-se capaz de classificar os tipos de vibrações, entenda os processos para análise de vibração e análise harmônica, conhecendo e compreendendo os elementos de um sistema vibracional e sabendo como associá-los. Veremos ainda como avaliar e dimensionar vibrações livres e forçadas, amortecidas ou não, de um ou mais graus de liberdade, a fim de compreender como aplicar as diversas estratégias de controle e medição de vibrações.

Na primeira unidade de ensino serão mostrados os fundamentos de vibrações para que você compreenda melhor o que são vibrações e suas variações, além dos elementos de um sistema vibracional. Também apresentaremos como se comporta um movimento harmônico e como ele é analisado. A segunda unidade de ensino trará conhecimentos iniciais de análise vibracional a partir da investigação dos diversos tipos de vibrações livres com um grau de liberdade, sendo tanto translacional quanto torcional, não amortecido e com amortecimentos variados. Na Unidade 3 deste livro serão expostas as vibrações forçadas que são as mais próximas da realidade de funcionamento de uma máquina, também apresentada em seus diversos tipos e classificações. E, por fim, na quarta e última unidade de ensino serão apresentadas as formas de controle vibracional e métodos de medição para garantir o monitoramento dos efeitos desse fenômeno.

Desejamos que este material desperte seu interesse por essa competência tão nobre da engenharia mecânica, tornando-o capaz de aplicar os conhecimentos aqui expostos. Portanto, lembre-se de que o estudo contínuo é

de extrema importância para seu aprendizado e o mais interessado em seu desenvolvimento é você mesmo. Bons estudos!

Unidade 1

Fundamentos de vibrações

Convite ao estudo

Você já parou para pensar o porquê de um carro começar a apresentar ruídos estranhos ao longo do tempo? Ou ainda, por que dá para sentir o carro funcionando quando ligamos o seu motor? Esse fenômeno é conhecido como vibração mecânica e não é particular dos carros. Ele é um evento típico do funcionamento de todas as máquinas e pode ainda ser observado nos efeitos dinâmicos da natureza sobre as estruturas. Para tanto, é de extrema importância conseguir quantificar os efeitos positivos e negativos desse fenômeno, o que aprendemos a partir do estudo de vibrações no curso de Engenharia Mecânica.

Ao final desta unidade de ensino esperamos que você consiga compreender e classificar os tipos de vibrações, os procedimentos para análise de vibrações e o estudo de elementos utilizados em associações, para que possa analisar um sistema vibratório, correlacionando os elementos e seus movimentos harmônicos.

Pense que você é um engenheiro de uma multinacional automotiva e foi colocado como responsável pelo setor de análise vibracional e conforto acústico dos automóveis. Na fase final do projeto automotivo, após todos os testes computacionais, é construído um protótipo para testes reais, sendo que o protótipo do próximo modelo da marca (Figura 1.1) está apresentando níveis preocupantes de vibração na cabine.

O intuito da primeira fase de análise é justamente definir o sistema vibracional e os graus de liberdade, compreender como é representado o sistema em modelagem matemática para posterior equacionamento e como o sistema se comporta harmonicamente, para que, a partir disso, possa identificar a fonte do problema e definir a melhor estratégia para resolvê-lo.

Figura 1.1 | Ilustração de automóvel para problematização

Fonte: adaptada de Pixabay.

Você já faz ideia de como resolver esse problema? Quais tipos de vibrações podem ocorrer nesse sistema? Sabe como elaborar um modelamento matemático de um sistema vibracional? Conhece movimento harmônico e sua relação com vibrações?

Nesta primeira unidade você terá acesso às informações necessárias para responder a todas essas questões, tornando-se, assim, capaz de compreender e avançar nos estudos acerca de vibrações. Aqui você verá os fundamentos de vibrações, conceitos, classificações, elementos associados, movimento e análise harmônica. Isso permitirá que você desenvolva uma visão diferenciada sobre os efeitos positivos e negativos dos fenômenos sofridos pelas máquinas e estruturas. Ainda, ao final deste primeiro momento, esperamos que você se torne capaz de elaborar, compreender, classificar e analisar sistemas vibracionais, seus elementos e movimentos.

Na Seção 1, veremos como são classificadas as vibrações e como são formados os sistemas vibracionais. Já a segunda seção mostrará os elementos básicos de um sistema desse tipo e como são associados esses elementos. Por fim, na terceira seção serão mostrados os movimentos harmônicos e como eles são analisados.

Bons estudos!

Seção 1.1

Conceitos básicos e classificação de vibrações

Diálogo aberto

Começaremos nosso estudo conhecendo e compreendendo o que é vibração, suas classificações e correlações. É sabido que as vibrações afetam muito o funcionamento das máquinas, inclusive são responsáveis por grande parte do decaimento da eficiência delas. Ainda assim, existem máquinas vibracionais ou geradoras de vibração para fins intencionais, como é o caso de uma peneira mineradora, que faz o trabalho de peneiramento pela vibração. Mas os casos mais comuns ainda são os efeitos negativos, como o de ressonância, que pode causar danos irreversíveis ao sistema ou ainda ruídos em demasia. Assim, daremos maior foco aos efeitos negativos.

Inicialmente, vejamos o carro apresentado anteriormente na Figura 1.1. Lembre-se de que neste momento você é um engenheiro de uma multinacional automotiva e foi colocado como responsável pelo setor de análise vibracional e conforto acústico dos automóveis. Na fase final do projeto automotivo, após todos os testes computacionais, é construído um protótipo para testes reais, que está apresentando níveis preocupantes de vibração na cabine.

Os carros sofrem com diversos tipos de vibrações, que podem se intensificar dependendo do estado de funcionamento do veículo e do estado da estrada em que se locomove, se o carro está vazio ou em carga máxima, portanto, deve-se levar todos os aspectos em consideração. Ainda assim, é preciso simplificar o sistema para poder analisá-lo, uma vez que, quanto mais complexo for, maior a possibilidade de se cometer erros.

Nesse modelo de automóvel, a fim de avaliar a vibração e suas variáveis, você analisará os aspectos construtivos do carro, levando em conta o motorista que o pilotará. Sabendo que o carro tem quatro rodas com sistema de suspensão em cada uma delas, você conseguiria dizer quais são os componentes acoplados para se elaborar esse sistema vibracional? Quantos graus de liberdade o sistema apresenta considerando o motorista? Quais são os tipos de vibração sofridos pelo carro?

Para responder a essas questões, veremos nesta seção o conceito de vibração, como se dá um sistema vibracional, o que são e como são entendidos os graus de liberdade de um sistema, quais são os tipos de vibração existentes e como podem ser classificados. Esses conteúdos serão úteis para você poder compreender e visualizar o mundo de uma forma diferente.

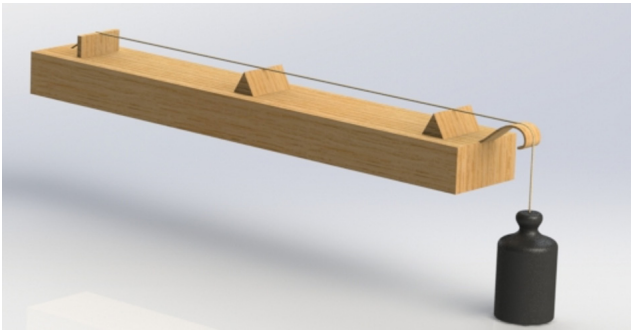
Lembre-se de se dedicar aos estudos dos conteúdos apresentados nesta seção do seu livro didático.

Não pode faltar

Breve história

Acredita-se que o homem começou a se interessar por vibrações ainda na Antiguidade, com os primeiros instrumentos musicais. A partir daí vem realizando estudos sobre esse fenômeno natural, tentando entendê-lo e dimensioná-lo. De acordo com Rao (2008), acredita-se que Pitágoras (582-507 a. C.) tenha sido o primeiro interessado em investigar sons musicais cientificamente, realizando experimentos com cordas através de um instrumento chamado monocórdio (Figura 1.2).

Figura 1.2 | Monocórdio de Pitágoras



Fonte: elaborada pelo autor.

Desde então, a humanidade vem desenvolvendo e estudando as vibrações em seus diversos aspectos. Por exemplo, em meados do segundo século a China vinha sofrendo com muitos terremotos e, então, Zhang Heng, em 132 d. C., criou o primeiro sismógrafo (Figura 1.3) para definir a hora e a direção dos terremotos a fim de tentar prever os eventos sísmicos. Porém, a maior parte dos estudos e da compreensão das vibrações ocorreu durante os séculos XVII e XVIII com os tão conhecidos

Figura 1.3 | Sismógrafo de Zhang Heng

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/EastHanSeismograph.JPG. Acesso em: 15 out. 2018.

cientistas Galileu, Rayleigh, Taylor, Bernoulli, Newton, entre outras grandes mentes da era dos gênios.

No início de 1800, o cientista alemão Ernst Chladni (1756–1824) desenvolveu a teoria da vibração das placas a partir da observação das formas de vibrar de uma placa espalhando areia sobre ela. Porém, foi apenas em 1815 que a cientista Sophie Germain (1776–1831) desenvolveu uma equação diferencial satisfatória para explicar as formas de vibrar das placas, apesar de ter considerado as condições de contorno erroneamente, corrigidas em 1850 por Kirchhoff (1824–1887), sendo então o pontapé inicial para as elaborações matemáticas que temos nos dias atuais. Vale dizer ainda que as vibrações torcionais começaram a ser levadas em consideração somente em 1902 por Frahm, em seu estudo sobre eixos de hélices de navios.

O que é vibração

Após uma breve introdução à história da vibração, vale pensarmos o que esse termo significa. E você já parou para pensar nisso?

Existem contextos vibracionais até mesmo nas práticas terapêuticas alternativas, mas neste livro falaremos sobre as vibrações observadas em máquinas e estruturas, que podem ser definidas como qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo, sendo regular ou não. São exemplos clássicos de vibração: o oscilar de um pêndulo e o movimento de cordas ao serem dedilhadas (RAO, 2008).

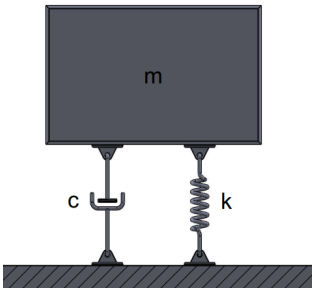
Hibbeler (2011, p. 504) define vibração como sendo "um movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos conectados e deslocados de uma posição de equilíbrio", além de nos apresentar os diferentes tipos de vibração sobre os quais discorreremos adiante.

Rao (2008, p. 6) ainda nos traz o conceito de teoria de vibração que, segundo ele, "trata do estudo de movimento oscilatório de corpos e as forças associadas a eles", sendo estes corpos os elementos ou as partes elementares de sistemas vibratórios.

Assimile

Vibrações, assim como vistas pela engenharia, são movimentos oscilatórios periódicos em um intervalo de tempo, que podem ser regulares ou irregulares.

Figura 1.4 | Sistema vibracional básico com todos os elementos



Fonte: elaborada pelo autor.

Partes elementares de sistemas vibratórios

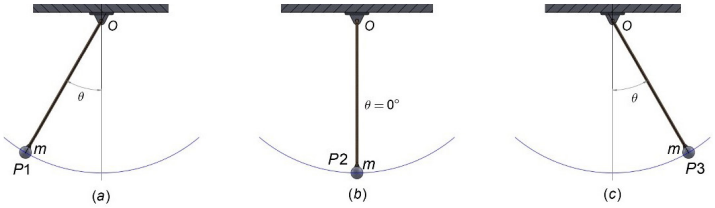
Os sistemas vibratórios são compostos de elementos que garantem sua oscilação, podendo inclusive ter elementos que tendem a dissipá-la. Esses sistemas contêm, portanto, pelo menos um armazenador de energia potencial e um de energia cinética e podem ter um elemento de perda gradual de energia. Tais componentes serão discutidos mais detalhadamente no decorrer deste livro didático. Vejamos o construto básico de um sistema vibracional representado pela Figura 1.4, que mostra como são simplificados os sistemas apresentados para facilitar sua compreensão.

Na Figura 1.4 é possível perceber os elementos simplificados, o armazenador de energia cinética representado pela massa (m), o elemento que armazena energia potencial representado pela mola (k) e o elemento que dissipa as energias representado pelo amortecedor (c).

Exemplificando

Um exemplo clássico de movimento oscilatório é o de um pêndulo simples formado por uma massa presa à ponta de uma corda. De acordo com a Figura 1.5(a), quando elevamos o pêndulo a uma posição P1 com ângulo θ qualquer, uma quantidade de energia potencial gravitacional é armazenada e, quando a massa é liberada, inicia-se um processo em que toda a energia potencial será transferida para o movimento (energia cinética) e, quando passa para a posição P2 de $\theta = 0°$, a energia potencial se torna também nula, deixando o sistema com energia cinética máxima (Figura 1.5(b)). Uma vez que a massa começa a subida novamente, a energia cinética se converte em potencial e, quando atinge P3 com ângulo θ novamente, em potencial máxima e cinética nula (Figura 1.5(c)). Esse movimento continua até que o pêndulo pare, devido à perda de energia pelo atrito com o ar.

Figura 1.5 | Funcionamento oscilatório do pêndulo simples

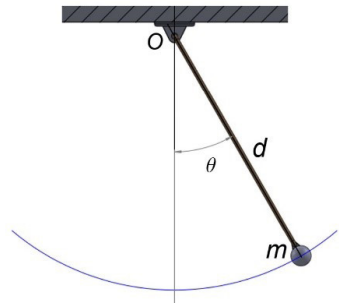


Fonte: elaborada pelo autor.

Graus de liberdade

Para definirmos quantos graus de liberdade tem um sistema, devemos olhar de forma a conseguir identificar quantas coordenadas independentes são necessárias para se determinar as posições de todas suas partes (RAO, 2008). Se pensarmos em um sistema como o de um pêndulo simples mostrado na Figura 1.6, podemos perceber que é composto por uma massa (m) e uma corda de comprimento (d) presa a um suporte de origem (O). Todas as posições desse pêndulo podem ser definidas a partir da coordenada de ângulo (θ) ou por coordenadas x e y, que não são independentes, pois são descritas por $x^2 + y^2 = d^2$, configurando assim um sistema de um único grau de liberdade. Esse conceito se tornará mais claro conforme você avançar em seus estudos.

Figura 1.6 | Pêndulo simples



Fonte: elaborada pelo autor.

Sistemas discretos e contínuos

A partir do conceito de graus de liberdade podemos compreender os sistemas discretos e os contínuos, sendo que o primeiro é conhecido por ter um número finito de graus de liberdade e pode ser chamado também de sistemas de parâmetros concentrados. Já o segundo tipo de sistema é conhecido como contínuo ou distribuído, pois é definido por um número infinito de graus de liberdade. Estes sistemas são de extrema complexidade, portanto, existem poucos modelos analíticos, além de serem limitados a problemas com vigas uniformes, hastes delgadas e placas finas (RAO, 2008).

Em geral em vibrações, para fins práticos, lidamos com sistemas contínuos, fazendo aproximações em sistemas discretos. Por exemplo, uma máquina que compõe vigas e placas contém, por definição, um número infinito de graus de liberdade, mas podemos tratar o sistema limitando o número de graus de liberdade e concentrando os elementos vibracionais. Isso permite facilitar o estudo e a elaboração de modelos analíticos.

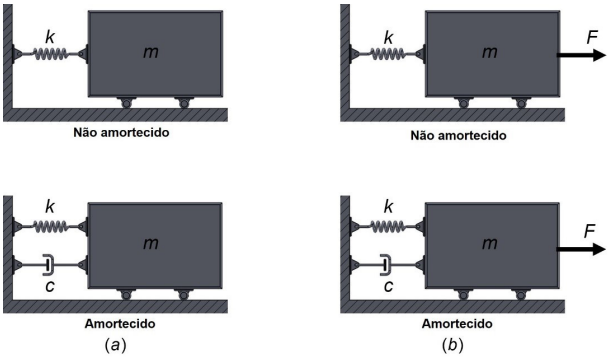
Reflita

Já imaginou o problema que seria tratar todos os sistemas vibracionais de forma contínua?

Classificando vibrações

De acordo com Hibbeler (2011), podemos dividir vibração em dois tipos básicos: livres ou forçadas. As vibrações livres são caracterizadas pela oscilação a partir de uma excitação inicial e não repetida, sendo que o sistema se mantém vibrando sem que existam forças externas para tal. Já a vibração forçada é garantida pela entrada de forças externas que perpetuam o movimento vibratório. Ambos os tipos podem ser amortecidos ou não, e os sistemas não amortecidos continuam indefinidamente a vibrar. Os amortecidos perdem energia, que é dissipada com o tempo. Uma vez que existem forças de atrito externas e internas nos sistemas reais, todos são sempre amortecidos. Por motivos de simplificação, muitas vezes desprezamos os amortecimentos, dependendo de sua influência no sistema. A Figura 1.7(a) mostra os sistemas vibracionais livres simplificados, enquanto a Figura 1.7(b) traz a representação dos sistemas forçados.

Figura 1.7 | Tipos de sistemas vibracionais



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

As vibrações podem ser classificadas em dois tipos básicos:

1. Livres.
2. Forçadas.

Lembrando que todas as vibrações são amortecidas, mas, a fim de facilitar o entendimento de um sistema, dependendo da influência do amortecimento na vibração, este pode ser desprezado.

Vibração linear e não linear

Em um sistema vibracional, quando temos todos os componentes básicos se comportando de forma linear, ocorrerá a chamada vibração linear. As

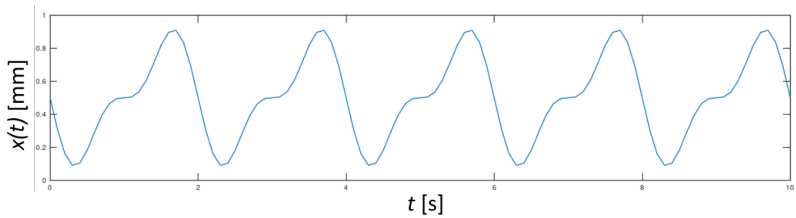
vibrações lineares já são bem desenvolvidas matematicamente, uma vez que obedecem ao princípio de superposição, em que a maior parte dos estudos é realizada. Já as vibrações não lineares, ou seja, quando pelo menos um dos componentes do sistema não se comporta de forma linear, são mais complexas e, portanto, menos estudadas em sua forma real por não seguirem os princípios de superposição. Assim, a maneira mais comum de se estudar seus fenômenos é a partir de aproximações.

Rao (2008) postula a importância de se conhecer os sistemas não lineares para lidar com sistemas vibracionais na prática, pois, de acordo com ele, todos os sistemas de vibração reais se comportam de forma não linear devido ao aumento da amplitude de oscilação.

Vibração determinística e aleatória

Os conceitos de determinismo e aleatoriedade em vibrações mecânicas dependem das forças exercidas sobre os sistemas e, por assim dizer, somente vibrações forçadas podem se apresentar destas formas. Sempre que a magnitude de excitação que faz com que o sistema vibre for conhecida, temos uma vibração determinística ou periódica. Esse tipo de vibração é bem conhecido e bem apresentado de forma didática para facilitar a compreensão em um momento inicial sobre o assunto. A Figura 1.8 mostra um gráfico de vibração determinística, no qual se percebe que o sistema se comporta de forma bem simétrica.

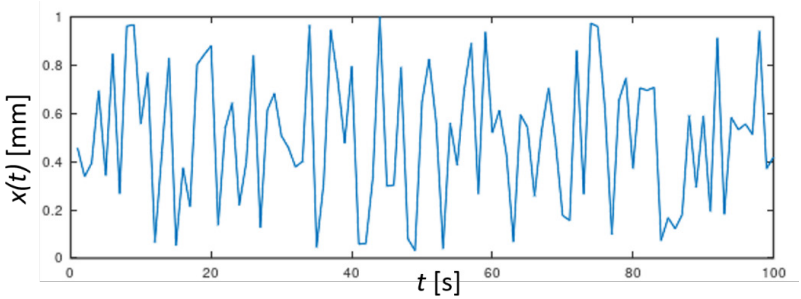
Figura 1.8 | Gráfico de vibração determinística (periódica)



Fonte: elaborada pelo autor.

Por outro lado, uma vibração aleatória é aquela em que os valores de excitação não podem ser previstos, fazendo com que o sistema apresente vibrações variadas a todo instante. Os dados desse tipo de vibração podem ser expressos em termos de quantidade estatística. A Figura 1.9 traz um gráfico que representa um sistema sofrendo com excitação aleatória. Esses dados podem ser gerados, por exemplo, pelo vento agindo sobre uma estrutura, por terremotos, pelo movimento de carros sobre asfalto grosseiro ou ainda em estradas acidentadas.

Figura 1.9 | Gráfico de vibração aleatória



Fonte: elaborada pelo autor.

Procedimento de análise

Após tantas informações sobre vibrações, veremos sobre como discretizar um sistema de forma mais simplificada. O procedimento para análise de vibrações é composto de quatro etapas básicas, como proposto por Rao (2008). A seguir descreveremos cada uma delas:

- A primeira etapa, em que é feita a **modelagem matemática** do sistema, consiste em representar todos os componentes de um sistema de forma a obter as equações matemáticas que o governam. Os modelos matemáticos podem ser lineares ou não, dependendo do comportamento do sistema, conforme visto anteriormente.
- A segunda etapa é responsável pela **derivação das equações governantes** do sistema vibratório. Tal ação é possibilitada a partir do desenho dos diagramas de corpo livre de todas as massas do sistema. As equações de movimento são normalmente obtidas na forma de equações diferenciais ordinárias para sistemas discretos e diferenciais parciais para sistemas contínuos.
- Na terceira etapa são solucionadas as **equações governantes** obtidas na segunda etapa. Podem ser usados vários métodos para se resolver tais equações, por exemplo, métodos padronizados, transformada de Laplace, métodos matriciais e métodos numéricos.
- Na quarta e última etapa realiza-se a **interpretação dos resultados**, as soluções da terceira etapa fornecem velocidades, acelerações e deslocamento para o sistema vibracional, que devem ser interpretados para os aspectos individuais de cada projeto. A análise de vibrações demanda, além de conhecimento matemático e analítico, muito bom senso por parte do engenheiro.

Pesquise mais

Para se aprofundar mais sobre o assunto, dê uma olhada nas etapas do procedimento de análise de vibrações nas páginas 9 e 10 do livro *Vibrações mecânicas*, de Rao e, para compreender melhor sobre a modelagem matemática, visualize o exemplo 1.1 sobre o modelamento de uma motocicleta. O livro pode ser encontrado na biblioteca:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. p. 1-11.

Sem medo de errar

Caro aluno, você se lembra do problema do carro apresentado anteriormente?

Foi apresentado um automóvel e, como engenheiro de uma multinacional, você e sua equipe estão responsáveis pela análise dos efeitos vibracionais e conforto acústico do carro. Você já sabe quais são os problemas apresentados e conhece seus aspectos construtivos. O intuito da primeira fase de análise é justamente definir o sistema vibracional, os graus de liberdade e classificar as vibrações que ocorrem no automóvel.

Figura 1.1 | Ilustração de automóvel para problematização

Fonte: adaptada de Pixabay.

Nesse modelo de automóvel, a fim de avaliar a vibração e suas variáveis, você analisará os aspectos construtivos do carro, levando em conta o motorista que o pilotará, e sabendo que o carro tem quatro rodas e sistema de suspensão em cada uma delas. Com essas informações em mente e sabendo que um corpo vibracional pode ser simplificado em sistemas massa-mola, discorra sobre as seguintes questões:

Quais são os componentes acoplados para se elaborar esse sistema vibracional?

Quantos são os graus de liberdade apresentados pelo veículo com motorista?

Qual ou quais são os tipos de vibração sofridos pelo carro?

Pensando em como cada vibração se comporta, como pode classificar as vibrações sofridas pelo automóvel?

Resolução:

No contexto apresentado até aqui, é possível perceber que o carro tem um sistema com muitos aspectos construtivos que garantem uma análise complexa dos componentes.

Se observarmos o carro de forma realista, podemos desdobrá-lo em conjuntos de partes menores, como o sistema de suspenção, chassis, carenagem, motor, bancos, painel etc. Veremos, assim, que o carro é um sistema complexo e, quanto mais desdobrado for, maior o número de graus de liberdade; então, podemos dizer que este é um sistema contínuo, ou seja, com infinitos graus de liberdade. Porém, se analisarmos o veículo de forma completa: massa do carro, molas e amortecedores, podemos perceber que se trata de um sistema vibracional completo com um único grau de liberdade. Pensando dessa forma, podemos perceber que o motorista é um sistema vibracional completo, apresentando massa, mola e amortecedor próprio, o que pode ser considerado, devido aos movimentos de reação involuntários que temos. Logo, pensando no carro com motorista, trata-se de um sistema de dois graus de liberdade que pode ser desdobrado em mais graus.

Levando em conta o movimento do carro, podemos perceber que ele sofre com vibrações tanto livres, quando, por exemplo, passa por uma lombada, quanto forçadas pelo motor e condições da estrada, que são sempre amortecidas devido aos aspectos construtivos já observados anteriormente.

Os efeitos dessas vibrações serão não lineares, olhando de uma forma mais realista, podem ser aproximados para lineares a fim de facilitar as análises, e são efeitos aleatórios por não serem previsíveis, uma vez que dependem das condições da estrada, do motor e dos movimentos do motorista.

Análise de vibração de uma extrusora a frio ou por impacto

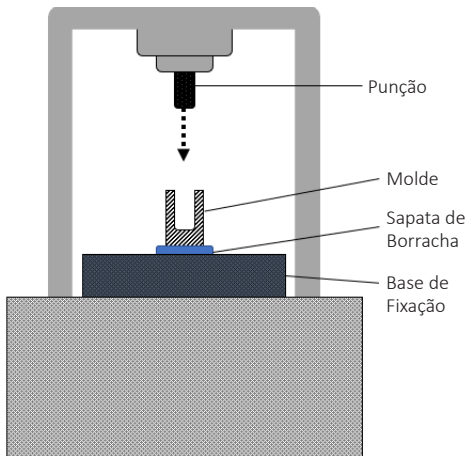
Descrição da situação-problema

Uma extrusora a frio, apresentada na Figura 1.10, é usada para conformar alumínio a fim de se obter o formato desejado. Esse é um processo que visa melhorar a precisão e aumentar a resistência mecânica do alumínio, pois a conformação a frio gera uma compactação dos grãos do material, conhecida como encruamento. Esse processo é usado na fabricação de latas de refrigerante e aerossol.

O funcionamento dessa máquina é parecido com o de um martelo pneumático. Inicialmente, o molde é fixado na base da máquina, sobre uma sapata de borracha de alta densidade, então, um disco de alumínio é inserido e preso na matriz e o punção desce rapidamente, transformando o disco no objeto desejado.

Pensando nos aspectos construtivos da máquina apresentada e sabendo que a ela é fixada sobre o piso da empresa com buchas de borracha para absorver o impacto, defina quantos são os graus de liberdade do sistema. Você conseguiria classificar a vibração desse sistema e estabelecer os efeitos que podem ocorrer nele?

Figura 1.10 | Esquema de uma extrusora a frio



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

O sistema apresentado tem dois graus de liberdade, um é a máquina como um todo e o outro é provindo da fixação da máquina extrusora sobre a sapata de borracha. O sistema pode ser classificado como sendo uma vibração livre, pois o impacto causado pelo punção é a excitação inicial do sistema, sendo que a vibração perdura sem ação externa. Ainda assim, temos um sistema amortecido nos dois graus, pois ambos têm fixação em elementos amortecedores (sapata e buchas de borracha). Esse é um sistema discreto, por ter um número finito de graus de liberdade, sendo determinístico, pois se comporta de forma harmônica sem efeitos aleatórios. O sistema, apesar de poder ser não linear se olhado de forma realista, pode ser aproximado em linear para fins didáticos, devido à sua simplicidade.

Faça valer a pena

1. Hibbeler (2011, p. 504) nos traz a seguinte definição para vibração: "um movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos conectados e deslocados de uma posição de equilíbrio". Sobre a teoria de vibração, Rao (2008, p. 6) nos traz que "se trata do estudo de movimento oscilatório de corpos e as forças associadas a eles", sendo estes corpos os elementos ou as partes elementares de sistemas vibratórios.

Assinale a alternativa que melhor define o conceito de vibração a partir do contexto dado.
a) Vibração é qualquer movimento que se repete após um intervalo de tempo, sendo regular ou não.
b) Vibração é um efeito negativo que somente ocorre em máquinas, sendo exclusivo de seu funcionamento.
c) É um fenômeno natural que pode ser observado em máquinas e estruturas que sofrem apenas esforços quando o vento incide sobre elas.
d) Efeito oscilatório que provém de motores a combustão interna, devido à explosão do combustível.
e) É um fenômeno causado por esforços sobre máquinas e estruturas, devido aos seus aspectos construtivos.

2. Imagine que você, um engenheiro mecânico, foi contratado por uma empresa para resolver problemas de vibrações em estruturar metálicas de galpões industriais. Seu primeiro trabalho é investigar um galpão recém-instalado que tem apresentado problemas de vibração no telhado. O galpão é de pequeno porte e tem apenas um andar.

Assinale a alternativa que melhor define o sistema vibratório composto pelo galpão.
a) É um sistema vibracional livre, com dois graus de liberdade.
b) O sistema vibracional é composto por um grau de liberdade e sofre com vibrações livres amortecidas.
c) O sistema tem apenas um grau de liberdade e sofre vibração forçada provinda de esforços externos vindos das condições ambientais, configurando então um efeito aleatório.
d) É um sistema de vibração com dois graus de liberdade, que sofre de vibração forçada com efeito determinístico.
e) O galpão tem diversos graus de liberdade e vibração não linear determinística.

3. O pêndulo simples é o mais simples e clássico exemplo de oscilação usado para se explicar vibrações, análise harmônica e ondulatória. Esse sistema é amplamente utilizado na literatura para contextualizar conteúdos mais complexos.

Analise a utilização do exemplo do pêndulo para as exemplificações em vibrações e assinale a alternativa correta.
a) O pêndulo não é um exemplo bom, já que traz o sistema mais simples, e as contextualizações devem sempre começar pelos sistemas mais complexos.
b) O pêndulo simples é um bom exemplo, pois traz um sistema complexo de vibração, mostrando os elementos de rigidez, massa e amortecimento.
c) Não se encaixa nos critérios de vibração, por não ser nem uma máquina, nem uma estrutura.
d) O pêndulo é um exemplo bom, pois tem o movimento oscilatório característico de vibrações, além de colocar em prática o sistema mais simples: vibração livre não amortecida de um grau de liberdade, linear e determinística.
e) É um exemplo bom, pois apresenta todos os elementos de vibração, categorizando: vibração forçada amortecida com um grau de liberdade, não linear e aleatória.

Seção 1.2

Elementos de análise

Diálogo aberto

Anteriormente vimos um breve histórico sobre a evolução dos estudos em vibração e também os conceitos básicos para que pudéssemos compreender os principais aspectos de um sistema vibratório. Nesta seção de estudos veremos algumas características elementares dos sistemas vibracionais, de forma a clarear o entendimento sobre a composição de um sistema real e como visualizá-lo a partir de uma modelagem matemática, usando os componentes simplificados e associando-os de maneira que possam ser assimilados conjuntamente. A compreensão acerca dessas características de um sistema permitirá traduzir um sistema real em um modelo matemático aceitável para análise. Para contextualizar, imagine uma bancada de testes com um motor montado sobre ela, que apresentará uma leve deflexão devido ao peso desse motor. Se formos criar uma modelagem a partir desse sistema, podemos dizer que a bancada exerce a função da mola e que a massa do motor será a massa sistema.

Para que possamos pensar de forma mais prática, lembre-se de que você é um engenheiro de uma multinacional automotiva e foi colocado como responsável pelo setor de análise vibracional e conforto acústico dos automóveis. Reveremos o exemplo do protótipo do próximo modelo da marca, ilustrado na Figura 1.1, que apresenta níveis preocupantes de vibração na cabine. Você deve se lembrar que vimos na seção anterior que o automóvel tem, além de sua massa, molas e amortecedores.

Lembrando que o sistema de suspensão do automóvel apresenta molas e amortecedores e que o motorista é um sistema vibracional completo, então, podemos realizar algumas inferências. Observe novamente o automóvel e reflita: quais elementos compõem o sistema vibracional do motorista? Como ficaria a modelagem do sistema completo e como podemos simplificar para ter a menor representação possível?

Figura 1.1 | Ilustração de automóvel para problematização

Fonte: adaptada de Pixabay.

Para que você possa elaborar o sistema simplificado para modelagem matemática, é importante saber quais são os elementos básicos de um sistema vibracional e como se associam e se comportam. Levando em conta os aspectos construtivos do automóvel e pensando que a suspensão é composta por mola e amortecedor, que a roda tem pneu macio e que o veículo será sempre operado por um motorista, é possível definir diversos elementos que influenciarão a vibração do carro. Sendo assim, elabore um sistema simplificado que represente o automóvel em blocos, a fim de facilitar a visualização e propiciar a modelagem matemática dele. Para isso, reflita sobre as seguintes questões:

É possível discretizar o carro de forma completa, levando em conta cada mola, cada amortecedor e cada massa do sistema?

Você consegue imaginar como o sistema pode ser simplificado em visualização bidimensional, associando as molas e amortecedores que se encontram no mesmo plano?

Já pensou em como simplificar o sistema associando os elementos de forma a obter o menor sistema possível, sem perder as suas características dinâmicas?

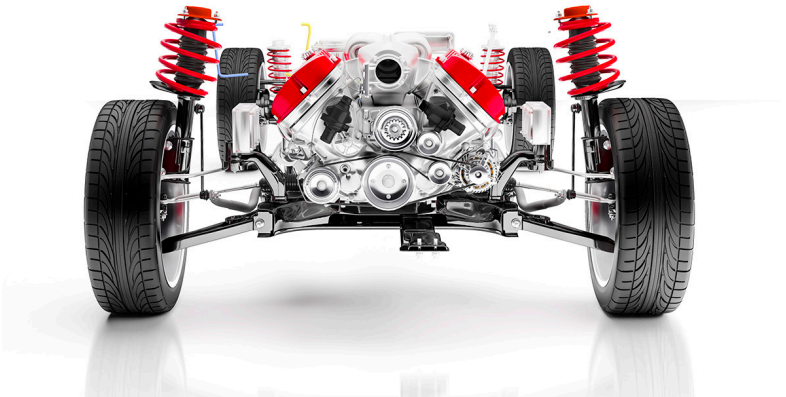
Para resolver essas questões, devemos dar atenção aos elementos do sistema vibracional representativo do automóvel, o que nos permitirá desenvolver o seu modelo matemático para posterior equacionamento. Agora que você já sabe o caminho que trilharemos, vamos iniciar os estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, note que sempre que andamos de carro e passamos por uma lombada, podemos sentir o carro oscilar e perceber a ação dos amortecedores, que fazem com que o carro não permaneça no movimento de "subida e descida" por muito tempo.

Em um carro, se observarmos a Figura 1.11, podemos perceber que realmente existem molas e amortecedores físicos fazendo parte da máquina. Isso facilita o entendimento e a elaboração da modelagem matemática dessa máquina, porém, não podemos acreditar que isso é uma regra, pois, por vezes, o sistema vibracional não apresentará tais elementos físicos e teremos de abstrair a modelagem matemática a partir do conhecimento de suas características estruturais.

Figura 1.11 | Sistema de suspensão do carro



Fonte: iStock.

Assimile

Os sistemas reais podem não apresentar fisicamente elementos como mola e amortecedores em sua composição, porém sua modelagem matemática usará desses elementos para explicar o funcionamento de suas características de rigidez e amortecimento intrínsecos.

Molas e suas associações

A fim de entender os sistemas, conforme já foi apresentado, devemos simplificá-los em modelos matemáticos que permitem discretizar suas características construtivas. Para isso, usamos representações elementares. Algumas dessas representações são as molas lineares, um tipo de elo mecânico com massa e amortecimento desprezados (RAO, 2008).

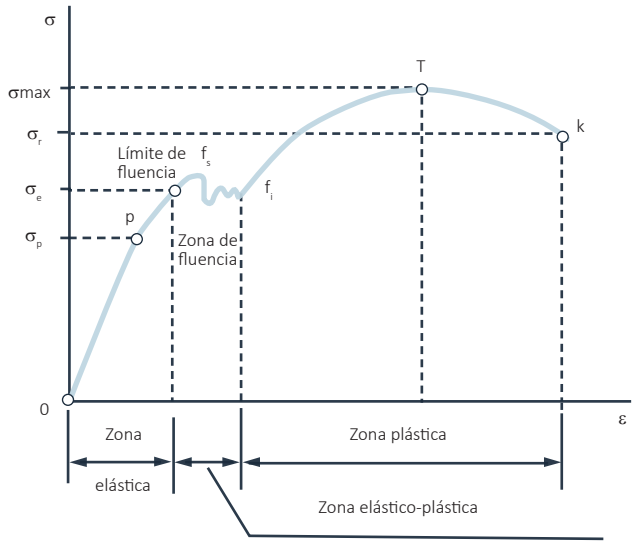
A mola representa a rigidez do sistema, portanto, mesmo que a estrutura ou a máquina não apresente uma mola em sua montagem (composição física), ainda assim tem uma rigidez estrutural, representada por uma mola linear, responsável pela força de reação do sistema, sendo proporcional à sua deformação seguindo a Equação 1.1.

$$F = k \cdot x \qquad (1.1)$$

Nessa equação, F representa a força da mola, x a deformação sofrida pela mola e k a rigidez da mola, também conhecida como constante elástica. Sabemos que, na realidade, as molas não são lineares, por seu material apresentar não linearidades de deformação. Analisando um

gráfico de tensão *versus* deformação, como o representado na Figura 1.12, vemos que o material se comporta linearmente durante o regime elástico, apresentando não linearidades quando ultrapassa a tensão de escoamento. Temos que, em vibrações mecânicas, geralmente as deformações são pequenas e permanecem dentro dos limites elásticos do material. Na prática, quando ocorre ressonância, as deformações são amplificadas de forma exponencial, acarretando a presença da deformação permanente ou da ruptura do sistema, o que não é interessante para seu funcionamento, tornando, assim, viáveis as aproximações lineares para estudo de vibrações.

Figura 1.12 | Gráfico de tensão versus deformação



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluencia.jpg. Acesso em: 24 out. 2018.

Assimile

A ressonância é um fenômeno de amplificação da amplitude vibracional, que ocorre quando a frequência de excitação de um corpo é igual à sua frequência natural. Isso faz com que a amplitude de vibração receba um ganho exponencial de seu valor, o que torna esse fenômeno extremamente prejudicial à estrutura do corpo.

Um segundo dado importante para considerarmos é o trabalho (U) que a força da mola exerce quando deformada. Esse trabalho dado pela Equação 1.2 é importante, pois é armazenado na forma de energia potencial elástica.

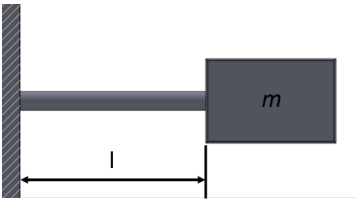
$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \qquad (1.2)$$

Para elucidar melhor a ideia de representar uma mola em um sistema que não a apresenta fisicamente, observe o exemplo a seguir.

Exemplificando

Se colocarmos uma massa concentrada na ponta de uma barra delgada, conforme mostrado na Figura 1.13, podemos perceber que o sistema não tem um elemento mola em sua composição. No entanto, a mola aparecerá na modelagem matemática para representar a rigidez oferecida por esta barra.

Figura 1.13 | Barra delgada com massa concentrada



Fonte: elaborada pelo autor.

Esta barra apresenta uma rigidez característica, dependendo do material usado em sua fabricação. Assumindo que a massa *m* é muito maior do que a massa da barra, podemos desprezar a massa, sobrando apenas sua rigidez. Podemos recorrer aos conceitos de resistência dos materiais e notar que a deflexão estática de uma viga com extremidade livre é dada pela seguinte equação:

$$\delta_{st} = \frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \qquad (1.3)$$

Sendo que *m* representa a massa, *g,* a aceleração da gravidade, l, o comprimento da barra, *E,* o módulo de *Young* do material empregado e *I,* o momento de inércia da barra dado por:

$$I = \frac{1}{3} m \cdot l^2 \qquad (1.4)$$

Sabendo que a deflexão é a deformação da barra, ou seja, a deformação da mola (x), e a força (F) exercida sobre a mola é a própria força peso provinda da massa, podemos fazer uma substituição na Equação 1.1 e isolar a constante elástica (k), obtendo uma nova equação (1.5).

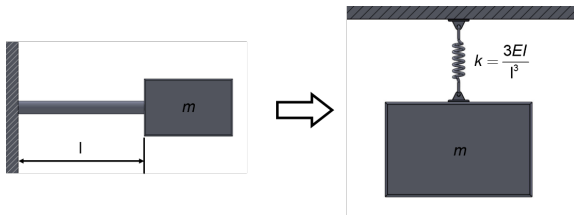
$$k = \frac{W}{\delta} \qquad (1.5)$$

Sendo $W = m \cdot g$, podemos substituir a Equação 1.3 pela 1.5 e obter:

$$k = \frac{\check{}}{\frac{W \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}} = \frac{3}{l^3} \qquad (1.6)$$

Esse novo valor de k representa a rigidez da barra. Apesar de o sistema apresentado não ter um elemento de mola, com esse novo valor de k é possível considerar uma mola (fictícia) acoplada ao sistema. Assim, podemos realizar a seguinte elaboração do sistema, mostrado na Figura 1.14.

Figura 1.14 | Representação da barra como mola

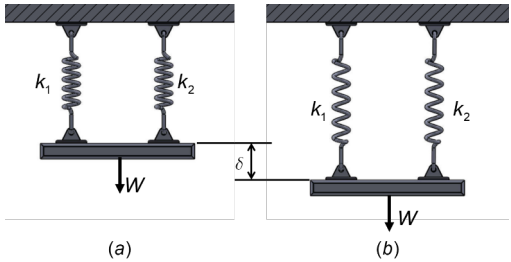


Fonte: elaborada pelo autor.

Na prática, os sistemas podem apresentar diversos elementos de molas usados em associação. Essas molas podem ser associadas equivalentemente em uma única mola. Isso pode ocorrer em dois casos distintos (RAO, 2008), conforme indicado a seguir.

- **Molas associadas em paralelo:** se usarmos duas molas em paralelo e aplicarmos uma carga sobre elas, as duas se deformarão igualmente e, com isso, o deslocamento do sistema será exatamente igual à deflexão das molas, como mostra a Figura 1.15.

Figura 1.15 | Deformação de molas associadas em paralelo



Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa realidade, podemos dizer que a rigidez resultante do sistema em paralelo é dada pela somatória direta da rigidez de cada uma das molas. Assim, teremos:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \qquad (1.7)$$

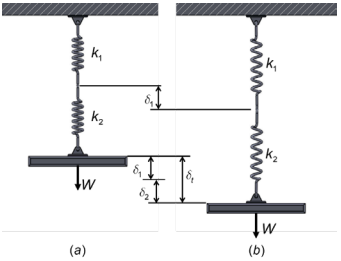
Podemos generalizar essa afirmação para sistemas com um número *n* de molas associadas em paralelo, sendo:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n \qquad (1.8)$$

Vale dizer que as molas associadas em paralelo sempre apresentarão rigidez igual quando estiverem em um mesmo grau de liberdade do sistema.

- **Molas associadas em série:** quando usamos duas molas em série e aplicamos uma carga sobre elas, veremos que a deformação das molas será diferente do deslocamento total do sistema. Isso é representado pela Figura 1.16.

Figura 1.16 | Molas associadas em série



Fonte: elaborada pelo autor.

Por conta dessa realidade, a rigidez equivalente (k_{eq}) do sistema não é mais dada por uma soma simples, mas sim por uma equivalência de relações entre a carga aplicada (*W*), a rigidez de cada mola (k_n), a deflexão de cada mola (δ_n) e a deflexão total (δ_t). Seguindo essa lógica, teremos:

$$W = k_1 \cdot \delta_1 \qquad (1.9)$$

$$W = k_2 \cdot \delta_2 \qquad (1.10)$$

$$W = k_{eq} \cdot \delta_t \qquad (1.11)$$

Assim, podemos relacionar as Equações 1.9, 1.10 e 1.11, tendo:

$$k_1 \cdot \delta_1 = k_2 \cdot \delta_1 = k_{eq} \cdot \delta_t \qquad (1.12)$$

Sabendo que a deformação total é dada por:

$$\delta_t = \delta_1 + \delta_2 \qquad (1.13)$$

E, a partir disso, chegamos na seguinte equação de rigidez equivalente:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad (1.14)$$

Finalizando, podemos generalizar essa equação para uma quantidade infinita de molas associadas em série, assumindo:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \qquad (1.15)$$

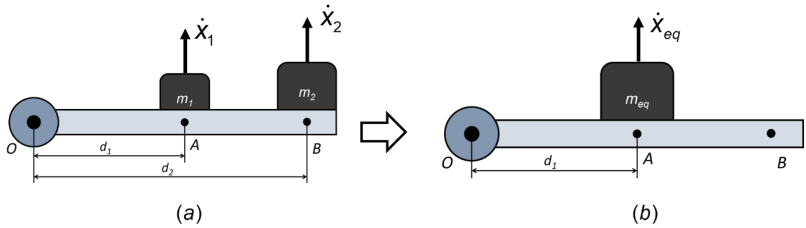
Massas e associações

As massas de um sistema são elementos que armazenam energia cinética, portanto, são corpos rígidos que ganham ou perdem energia conforme a velocidade do corpo muda. As massas são representadas na literatura pela letra *m*. Na prática podem aparecer massas associadas, podendo ser substituídas por uma única massa equivalente (m_{eq}) (RAO, 2008).

É bastante importante dizer que a associação de massa ocorre puramente em um mesmo grau de liberdade, por exemplo, várias massas em uma barra rígida, massas distribuídas sobre uma placa ou ainda elementos de translação e rotação acoplados. Dois casos comuns são:

1. Massas de translação ligadas à barra rígida: caso em que uma barra apresenta massas diferentes em pontos distintos da barra. Se pegarmos, por exemplo, uma barra com duas massas acopladas, conforme a Figura 1.17(a), teremos de relacionar a velocidade das massas e um pequeno deslocamento entre elas.

Figura 1.17 | Associação de massas em barra rígida



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso nos permitirá associar as massas em uma única massa no ponto de referência, conforme a Figura 1.17(b), tendo:

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1 \quad (1.16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d_2}{d_1} \cdot \dot{x}_1 \quad (1.17)$$

Igualando a energia cinética das duas massas ao da massa equivalente, teremos:

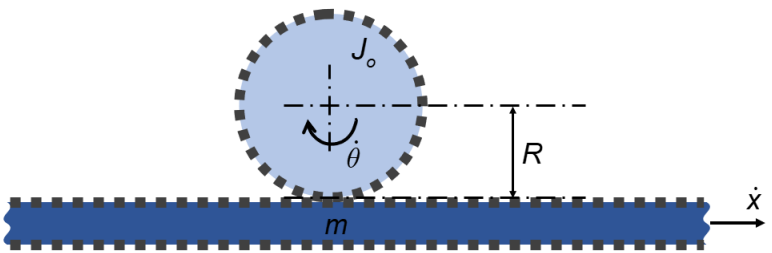
$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.18)$$

Substituindo as Equações 1.16 e 1.17 pela 1.18 e simplificando, teremos a massa equivalente mostrada na Figura 1.17(b):

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot m_2 \quad (1.19)$$

2. Massas de translação e rotação acopladas: ocorre sempre que tivermos duas massas acopladas e realizando movimento relativo, como no exemplo mostrado na Figura 1.18, sendo uma de translação com velocidade $\dot{x}$ e uma de rotação com momento de inércia de massa J_o. Neste caso, podemos associar ambas as massas para translação, obtendo uma massa equivalente m_{eq}, ou para rotação, obtendo uma massa rotacional equivalente J_{eq}.

Figura 1.18 | Associação de massas de translação e rotação



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar a massa equivalente de translação, deve-se equivaler a energia cinética dos dois corpos a uma energia cinética total (equivalente T_{eq}), que corresponderá aos dois corpos se movimentando em conjunto. Sendo assim, teremos:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_o \cdot \dot{\theta}^2 \rightarrow T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.20)$$

Sabendo que o movimento de referência é a translação e que $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$ e $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$, temos que a equivalência $T = T_{eq}$ nos dará:

$$\frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_o \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \quad (1.21)$$

Ou seja:

$$m_{eq} = m + \frac{J_o}{R^2} \quad (1.22)$$

Se quisermos relacionar as massas do ponto de vista rotacional, deveremos equivaler a energia cinética com relação ao corpo em rotação, o que nos dá:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \theta_{eq}^2 \quad (1.23)$$

Porém, teremos que $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ e $\dot{x} = \dot{\theta} \cdot R$, então:

$$\frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{\theta} \cdot R)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_o \cdot \dot{\theta}^2 \quad (1.24)$$

Assim, obtemos:

$$J_{eq} = J_o + m \cdot R^2 \quad (1.25)$$

Reflita

Em um projeto de máquina, existem diversos elementos associados e muitos graus de liberdade para serem considerados. Será que existem somente esses dois tipos de associação de massas? Podemos sempre associar elementos irrestritamente?

Amortecedores e suas associações

Os amortecedores são elementos de um sistema dedicados a dissipar as energias armazenadas pelas molas e pelas massas. Sistemas práticos podem apresentar vários amortecedores associados, seguindo associações parecidas com as utilizadas para as molas, podendo ser em paralelo ou em série, o que nos permite realizar as seguintes analogias:

Associação de amortecedores em paralelo governada pela equação que representa o coeficiente de amortecimento equivalente (c_{eq}):

$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \cdots + c_n \quad (1.26)$$

Associação de amortecedores em série governada pela equação:

$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} \quad (1.27)$$

O amortecimento de um sistema pode ocorrer de várias formas diferentes, sendo as mais comuns:

Amortecimento viscoso: é o mais comum em análise vibracional, ocorre quando o sistema vibra em um meio fluido como ar, água ou óleo, no qual a resistência do fluido faz a dissipação da energia do sistema. A força de amortecimento é proporcional à velocidade do corpo, obedecendo à equação:

$$F_c = c \cdot v \quad (1.28)$$

Em que F_c é a força de amortecimento, c é o coeficiente de amortecimento do fluido e v é a velocidade do corpo.

Amortecimento Coulomb: também conhecido como amortecimento por atrito, ocorre quando duas ou mais superfícies entram em contato direto e sem lubrificação.

Amortecimento por histerese: ocorre quando um material sólido sofre deformação plástica, dissipando energia.

Pesquise mais

Para saber mais sobre amortecedores, veja os exemplos mostrados no livro do Rao, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. p. 1-11.

Veja também o artigo sobre amortecimentos da ATCP engenharia:
COSSOLINO, L. C.; PEREIRA, A. H. A. **Amortecimento:** classificação e métodos de determinação.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você é um engenheiro de uma multinacional automobilística que foi designado para a área de análise vibracional e conforto acústico. Você e sua equipe estão resolvendo problemas vibracionais do protótipo do último modelo da empresa. Na seção anterior você foi capaz de observar os aspectos construtivos do carro e discretizar as vibrações existentes nele, além de caracterizar tais vibrações. Agora, modelará matematicamente os elementos-chave, sendo que, para isso, é importante saber quais são os elementos e como se associam e se comportam.

Resolução

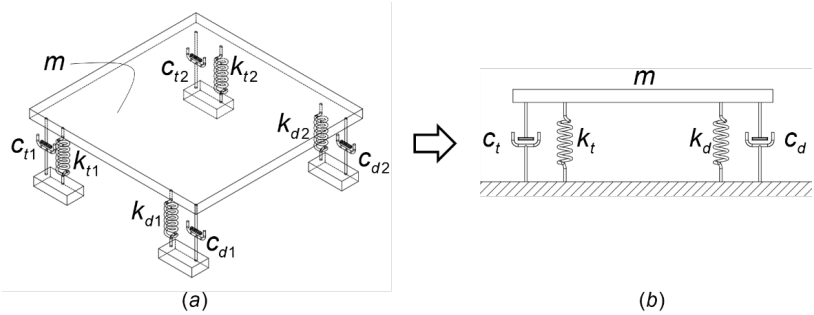
Inicialmente, observe que o carro, como um todo, pode ser definido como um conjunto de massa sobre quatro rodas. Isso nos permite dizer que o veículo é um sistema de um grau de liberdade, como visto na seção anterior.

Note que o sistema do carro é bem fácil de entender, pois as molas e os amortecedores existem fisicamente no sistema de suspensão, mas, por vezes,

é preciso lembrar que nem todos os conjuntos reais terão esses elementos fisicamente em sua composição, sendo que representam a rigidez e o amortecimento intrínsecos da estrutura.

Portanto, podemos desenhar o carro como um sistema massa-mola-amortecedor, considerando que temos uma massa (composta de todas as massas do carro), quatro molas e quatro amortecedores. Uma representação válida seria a do desenho esquemático da Figura 1.19(a) que mostra a modelagem do carro tridimensionalmente. Podemos associar as molas e os amortecedores da parte dianteira e da parte traseira, criando uma representação bidimensional, como mostrado pela Figura 1.19(b).

Figura 1.19 | Representação do automóvel em modelagem matemática



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir das Equações 1.8 e 1.26, temos para esse caso:

$$k_d = k_{1d} + k_{2d} \text{ e } k_t = k_{1t} + k_{2t}$$

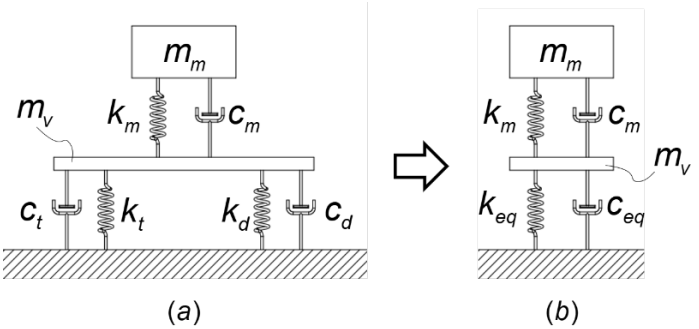
$$c_d = c_{1d} + c_{2d} \text{ e } c_t = c_{1t} + c_{2t}$$

Em que k_d e c_d são a rigidez e o amortecimento equivalentes, respectivamente, da dianteira do carro, e k_t e c_t são os equivalentes da traseira, de rigidez e de amortecimento, respectivamente.

Após realizarmos essas relações e associações, podemos lembrar que o motorista é considerado mais um grau de liberdade do sistema que apresenta massa, mola e amortecedor, inserido ao modelo do carro, conforme a Figura 1.20(a). Porém, ainda assim podemos associar as molas e amortecedores do carro, pois estão em um mesmo grau de liberdade, permitindo a modelagem apresentada na Figura 1.20(b). Lembrando que a modelagem obedece às equações de associação em paralelo, sendo que teremos a rigidez equivalente (k_{eq}) e o amortecimento equivalente (c_{eq}):

$$k_{eq} = k_d + k_t \quad \text{e} \quad c_{eq} = c_d + c_t$$

Figura 1.20 | Modelagem matemática do automóvel com motorista



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos perceber que a compreensão dos aspectos básicos da vibração e seus elementos e associações torna possível a simplificação do sistema de forma eficiente, finalizando de maneira eficaz a resolução da problematização proposta. Vale ressaltar que essa análise garantirá um equacionamento posterior mais facilitado e assertivo da vibração desse automóvel.

Avançando na prática

Análise do sistema vibratório de uma moto

Descrição da situação-problema

O departamento de construção mecânica de uma empresa fabricante de motocicletas solicitou ao departamento de análise de vibrações que realizasse uma simulação de vibração da nova moto projetada, que será lançada no começo do próximo ano. Foi dada a você a tarefa de modelar matematicamente o sistema vibracional da moto e, para isso, foi entregue um desenho e as especificações técnicas do projeto.

Pelas especificações técnicas, você visualizou que a moto tem massa total com tanque cheio de $197\ \text{kg}$ e que o sistema de suspensão dianteiro conta com um amortecedor do tipo garfo invertido de $c_d = 4500\ \text{Ns/m}$ e duas molas de acopladas às hastes de cada amortecedor de $k_d = 31\ \text{kN/m}$ cada. A suspensão traseira é uma suspensão monochoque com amortecimento de $c_t = 1800\ \text{Ns/m}$ e rigidez de mola de $k_t = 42\ \text{kN/m}$.

Sendo assim, como você definiria o sistema modelado matematicamente a partir da associação dos elementos, de maneira a se ter o menor sistema possível?

Resolução da situação-problema

Para que possamos definir um sistema simples, precisamos primeiramente discretizar os componentes elementares. Isso nos leva a uma análise em que temos um sistema vibratório de um grau de liberdade, composto por uma massa total da moto de $197\,\text{kg}$, uma mola equivalente da associação em paralelo de todas as três molas presentes na moto e um amortecimento equivalente da associação em paralelo de todos os amortecedores da moto. Assim, podemos definir os valores das associações usando as equações de associação em paralelo, sendo que as molas dianteiras serão consideradas como k_{d1} e k_{d2}, a mola traseira será k_t e os amortecedores dianteiro e traseiro serão, respectivamente, e c_t, levando a:

$$k_{eq} = k_{d1} + k_{d2} + k_t \text{ e } c_{eq} = c_d + c_t$$

Portanto, temos que:

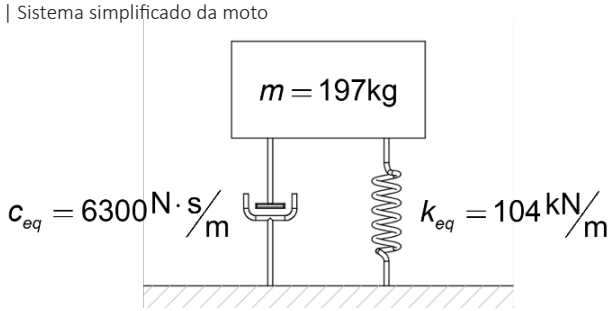
$$k_{eq} = 31 + 31 + 42\left[\text{kN/m}\right] \text{ e } c_{eq} = 4500 + 1800\left[\text{N}\cdot\text{s/m}\right]$$

Logo:

$$k_{eq} = 104\,\text{kN/m} \text{ e } c_{eq} = 6300\,\text{N}\cdot\text{s/m}$$

Isso nos permite elaborar o sistema simplificado, conforme apresentado na Figura 1.21.

Figura 1.21 | Sistema simplificado da moto



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse momento, podemos perceber que o sistema, apesar da simplificação, ainda apresenta todas as características importantes para posterior análise e equacionamento dos aspectos vibracionais, finalizando assim a resolução da problematização proposta.

Faça valer a pena

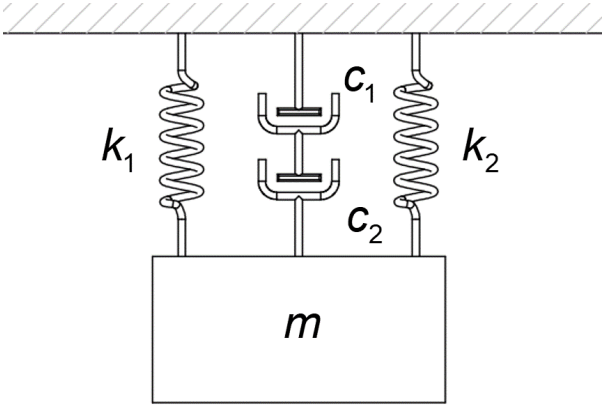
1. O amortecimento _____ é o mais comum em analise vibracional, sendo que ocorre quando o sistema vibra em um _____ como ar, água ou óleo, em que a resistência do fluido faz a _____ da energia do sistema. A força de amortecimento é proporcional à velocidade do corpo, obedecendo à seguinte equação: $F_c = c \cdot v$.

A partir do texto-base e de acordo com o estudado, assinale a alternativa que completa as lacunas corretamente.

a) Viscoso, meio fluido, alteração.
b) Coulomb, meio viscoso, dissipação.
c) Viscoso, meio viscoso, alteração.
d) Coulomb, meio fluido, dissipação.
e) Viscoso, meio fluido, dissipação.

2. O sistema apresentado na figura a seguir é um sistema de vibração com um grau de liberdade, o que indica que se necessita de apenas uma coordenada para se definir tal sistema. Como se pode perceber, ele tem duas molas em paralelo e dois amortecedores em série.

Figura | Sistema vibracional de um grau de liberdade



Fonte: elaborada pelo autor.

Visto que o sistema tem um grau de liberdade e sabendo que ambas as molas têm o mesmo valor de rigidez de $k = 236\ \mathrm{N/m}$ e o mesmo valor de amortecimento de $c = 50\,\mathrm{N \cdot s/m}$, qual seria a rigidez total do sistema apresentado?

De acordo com o apresentado no texto-base, assinale a alternativa correta.

a) $k_{eq} = 118\ \mathrm{N/m}$, $c = 50\,\mathrm{N \cdot s/m}$

b) $k_{eq} = 472\ \mathrm{N/m}$, $c = 25\,\mathrm{N \cdot s/m}$

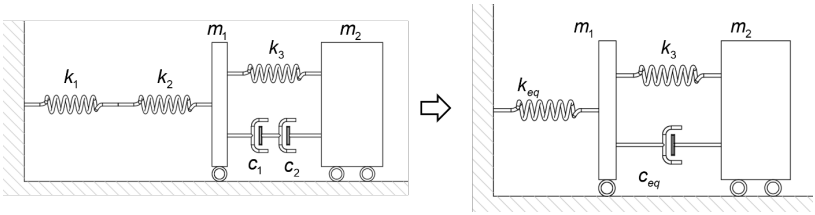
c) $k_{eq} = \dfrac{1}{472}\ \mathrm{N/m}$, $c = 100\,\mathrm{N \cdot s/m}$

d) $k_{eq} = 236\ \mathrm{N/m}$, $c = 25\,\mathrm{N \cdot s/m}$

e) $k_{eq} = \dfrac{1}{118}\ \mathrm{N/m}$, $c = 100\,\mathrm{N \cdot s/m}$

3. Imagine que você trabalha em uma empresa de consultoria em vibrações mecânicas, na área de análise e simulação de sistemas vibracionais. Por estar com uma carga de trabalho muito grande, a empresa contratou um estagiário para auxiliá-lo na modelagem matemática dos sistemas de vibração. A seu pedido e com a sua supervisão, o estagiário modelou o sistema vibratório, conforme figura a seguir, e ficou responsável por lhe entregar o sistema simplificado (Figura b) para simulação.

Figura | Sistema completo e simplificado



Fonte: elaborada pelo autor.

O estagiário então conclui a tarefa dada, entregando-lhe o portfólio de cálculo e a modelagem (conforme mostrado na Figura b):

Cálculos apresentados:

$k_1 = 200\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = 350\,\mathrm{N/m}$, $k_3 = 150\,\mathrm{N/m}$, $c_1 = 20\,\mathrm{N \cdot s/m}$ e $c_2 = 25\,\mathrm{N \cdot s/m}$

Simplificando por associação de elementos:

Associações: $k_{eq} = k_1 + k_2$ e $c_{eq} = c_1 + c_2$

Resultados obtidos: $k_{eq} = 550\,\mathrm{N/m}$ e $c_1 = 45\,\mathrm{N \cdot s/m}$

Avalie os cálculos entregues pelo estagiário conforme o portfólio apresentado e assinale a alternativa que melhor representa a conclusão acerca dos resultados encontrados por ele.

a) A modelagem está errada, pois o ideal seria que todas as molas, massas e amortecedores fossem associados, deixando, assim, o sistema com apenas um grau de liberdade.

b) Os cálculos estão corretos, mas a modelagem está errada, visto que o estagiário não associou as massas e todas as molas.

c) A modelagem está correta, pois os elementos foram associados mantendo-se os graus de liberdade separados, porém os cálculos estão errados, porque o estagiário usou os cálculos de associação em paralelo, sendo que as molas k_1 e k_2 e os amortecedores c_1 e c_2 encontram-se em série.

d) O estagiário realizou um excelente trabalho associando corretamente os elementos que poderiam ser associados e mantendo os dois graus de liberdade do sistema.

e) Os elementos, apesar de serem associados erroneamente, não trouxeram valores errados de cálculo, uma vez que os resultados seriam os mesmos, independentemente da associação.

Seção 1.3

Movimento e análise harmônica

Diálogo aberto

Caro aluno, você já notou como as cordas de um instrumento ondulam quando são tocadas? Esse movimento de onda é a base do som das cordas, conhecido como reverberação. Portanto, podemos dizer que as cordas vibram e esse movimento, que gera o som do instrumento, é harmônico.

Retornemos ao nosso problema original. Neste momento, você é engenheiro de uma multinacional automotiva, responsável pelo setor de análise vibracional e conforto acústico dos automóveis. Em seu trabalho, você precisará lidar com um problema no protótipo do próximo modelo da marca, que apresenta níveis preocupantes de vibração na cabine.

Com uma análise vibracional feita por sua equipe, pode-se perceber que a frequência natural das rodas do automóvel está em torno de 1,5 Hz. Em uma segunda análise foi percebido que, quando o carro trafega próximo de 60 km/h, as rodas vibram em uma frequência de 2 Hz, bem próxima da frequência natural, gerando grandes amplitudes, o que justifica o desconforto acústico na cabine. Foi verificado ainda um desalinhamento importante das rodas dianteiras, da ordem de 2°, ocasionado sem motivo aparente, o que pode ter gerado um deslocamento transversal das rodas da ordem de 9 mm. Uma vez entendidos seus aspectos construtivos, graus de liberdade, definidos os elementos associados e compreendido o tipo de vibração ao qual lhe é atribuído, podemos chegar a uma conclusão acerca do fenômeno que está ocorrendo no carro? Já imaginou como a vibração do carro se comportaria de forma harmônica? Qual é a relação do sistema do automóvel com as análises harmônicas e os números complexos?

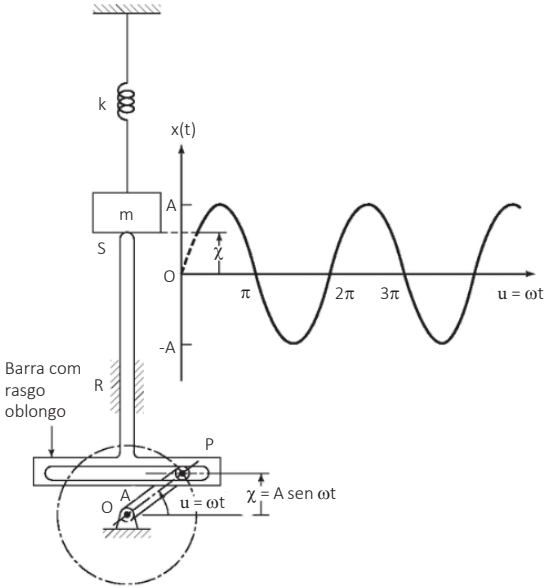
Para resolver esse problema, nesta seção veremos os conceitos de movimento e análise harmônica, seguindo as expansões de Fourier para representações nos domínios do tempo e da frequência. Isso permitirá que você tenha um olhar diferenciado para os problemas envolvendo vibrações.

Não pode faltar

Movimento harmônico

O movimento oscilatório conhecido como periódico é caracterizado por movimentos repetidos em intervalos de tempo iguais, sendo denominado movimento harmônico o tipo mais simples de movimento periódico (RAO, 2008). A Figura 1.22 apresenta um mecanismo de Scotch Yoke (garfo escocês) que simula o movimento oscilante vibratório.

Figura 1.22 | Mecanismo de Scotch Yoke



Fonte: Rao (2008, p. 22).

A partir dessa figura, podemos perceber que, conforme a manivela A rotaciona com velocidade angular constante ω, a extremidade superior da haste (S) imprime um movimento oscilatório e periódico à massa (m), deslocando-a a uma distância x no tempo t a partir do seu ponto de equilíbrio. A equação que resulta desse movimento é expressa por:

$$x = A\text{sen}\theta \quad \text{ou} \quad x = A\text{sen}(\omega t) \qquad (1.29)$$

Em que A é o raio da barra e θ é o ângulo de ação da barra. Isso nos mostra um movimento senoidal. A velocidade da massa será a derivação de x no tempo, sendo:

$$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) \qquad (1.30)$$

Derivando-se novamente, teremos a aceleração, que é dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\text{sen}(\omega t) = -\omega^2 x \qquad (1.31)$$

Assim, podemos perceber que a aceleração é diretamente proporcional ao deslocamento, sendo que essa característica denota o movimento harmônico simples (MHS). Analogamente, é possível inferir, por simetria, que também é um MHS o deslocamento $x = A\cos(\omega t)$.

Esse tipo de movimento pode ainda ser representado vetorialmente por um vetor $\overrightarrow{OP}$ de magnitude A que rotaciona com velocidade angular ω. Se

observarmos a Figura 1.22, a extremidade da manivela A pode ser representada por $\vec{X} = \overrightarrow{OP}$ através das coordenadas cartesianas nos eixos x e y, pelas equações:

$$y = A\text{sen}(\omega t) \text{ e } x = A\cos(\omega t) \qquad (1.32)$$

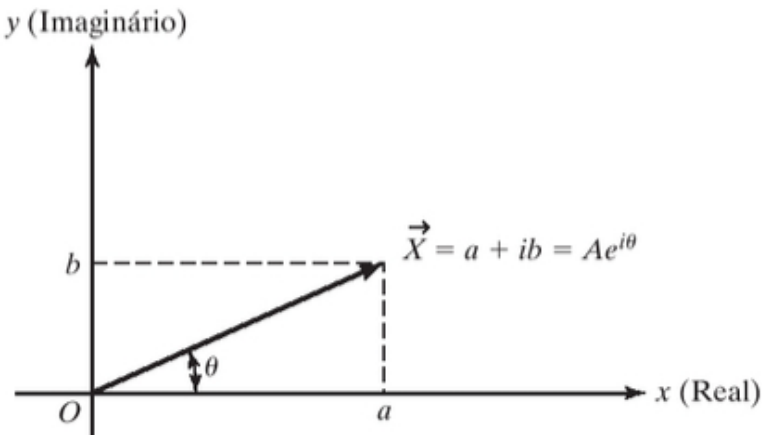
Representação do movimento harmônico por números complexos

Por vezes, é mais conveniente representar o vetor por números complexos, assim, não é necessário descrever o movimento por ambos os $\vec{X}$ componentes, horizontal e vertical. Trazendo a representação xy para uma equação do tipo:

$$\vec{X} = a + ib \qquad (1.33)$$

Temos que $i = \sqrt{-1}$ e a e b são os componentes x e y, que denominam as partes real e imaginária, respectivamente, do vetor representado na Figura 1.23.

Figura 1.23 | Representação de um número complexo



Fonte: Rao (2008, p. 23).

Logo, o vetor pode ser expresso por:

$$\vec{X} = A\cos(\theta) + iA\text{sen}(\theta) \quad (1.34)$$

Sendo:

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \qquad (1.35)$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{b}{a} \quad (1.36)$$

Observando que $i=\sqrt{-1}$, podemos inferir uma série exponencial em que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1\cdots$, assim, podemos expandir $\cos(\theta)$ e $i\text{sen}(\theta)$ em séries, como nos exemplos a seguir:

$$\cos(\theta)=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots=1+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots \quad (1.37)$$

$$\cos(\theta)=i\cdot\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right]=i\theta+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\cdots \quad (1.38)$$

Somando e subtraindo $\cos(\theta)$ e $i\text{sen}(\theta)$ nas equações 1.37 e 1.38, teríamos:

$$\cos(\theta)+i\text{sen}(\theta)=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots=e^{i\theta} \quad (1.39)$$

$$\cos(\theta)-i\text{sen}(\theta)=1-i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}-\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots=e^{-i\theta} \quad (1.40)$$

Portanto, podemos dizer que o vetor toma a forma de:

$$\vec{X}=A(\cos(\theta)+i\text{sen}(\theta))=Ae^{i\theta} \quad (1.41)$$

Operações com funções harmônicas

A representação do vetor $\vec{X}$ em números complexos, sabendo que $\theta=\omega t$, pode ser escrita como:

$$\vec{X}=Ae^{i\omega t} \quad (1.42)$$

Sendo ω a frequência circular, dada em rad/s no sentido anti-horário de rotação do vetor $\vec{X}$. Assim, diferenciando-se duas vezes o vetor em relação ao tempo, obteremos a sua velocidade e a aceleração.

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t})=i\omega Ae^{i\omega t}=i\omega\vec{X} \quad (1.43)$$

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t})=-\omega^2Ae^{i\omega t}=-\omega^2\vec{X} \quad (1.44)$$

Essas equações podem ser expressas pela parte real (representada pelo termo $A\cos(\omega t)$) ou pela parte imaginária (representada por $A\text{sen}(\omega t)$).

Ainda, podemos somar vetorialmente as funções harmônicas. Se pegarmos a parte real de duas funções harmônicas $\text{Re}(\vec{X}_1)=A_1\cos(\omega t)$ e $\text{Re}(\vec{X}_2)=A_2\cos(\omega t+\theta)$, teremos a soma representada por um vetor resultante $\vec{X}$ com as coordenadas:

$$A=\sqrt{(A_1+A_2\cos\theta)^2+(A_2\text{sen}\theta)^2} \quad (1.45)$$

e o ângulo α por:

$$\alpha = tg^{-}\left(\frac{A\ sen\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right) \quad (1.46)$$

A soma das componentes reais $\vec{X}_1$ e $\vec{X}_2$ é dada, portanto, por:

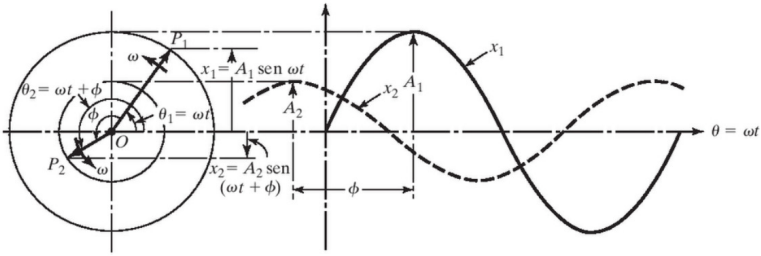
$$\mathrm{Re}(\vec{X}) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad (1.47)$$

Definição e terminologia

A seguir, apresentamos a definição de algumas das terminologias utilizadas quando se trata do tema de vibrações mecânicas.

Ciclo: é o movimento completo de uma onda oscilatória, ou seja, se observarmos a Figura 1.24, podemos perceber que quando a trajetória de qualquer um dos raios completar uma volta inteira, será chamada de ciclo. Assim, o gráfico sairá de um ponto de equilíbrio (*x=0*) para amplitude máxima positiva, passando pelo equilíbrio novamente, pela amplitude máxima negativa e terminando o ciclo no equilíbrio.

Figura 1.24 | Vibrações síncronas



Fonte: Rao (2008, p. 26).

- **Amplitude:** deslocamento máximo de um corpo vibratório a partir do ponto de equilíbrio, tanto positivo quanto negativo.
- **Período de oscilação:** tempo que a vibração leva para completar um ciclo de movimento, representado por τ e medido em segundos (s), dado por:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.48)$$

- **Frequência de oscilação:** pode ser encontrada como frequência linear ou simplesmente frequência, dada em *Hertz* (Hz). Denota a quantidade de ciclos no período de um segundo, sendo obtida por:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.49)$$

- **Ângulo de fase:** é o ângulo de defasagem entre dois raios que se movimentam com a mesma velocidade angular (ω), demonstrado na Figura 1.24 pela letra grega ϕ. Um sistema que apresenta essas características é conhecido como sistema síncrono, apresentando mesma velocidade angular, porém diferentes amplitudes. Vale ressaltar que, se tivermos dois movimentos oscilatórios, podemos representá-los em correlação pelo ângulo de fase, sendo:

$$x_1 = A_1 \text{sen}(\omega t) \quad (1.50)$$

$$x_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (1.51)$$

- **Frequência natural:** é a frequência em que um objeto vibra naturalmente. Após uma excitação inicial, o sistema continua a vibrar por conta própria, sem interferência de agentes externos a ele. Um sistema com infinitos graus de liberdade apresentará infinitas frequências naturais. Na prática, todo objeto apresenta amortecimento interno e tende a parar de vibrar. Em uma análise vibracional, é realizado um teste no qual são instalados equipamentos que medem a vibração; então, o técnico infere do sistema uma perturbação inicial e nas medições aparecem pontos em que a vibração tem leves picos, que representam as vibrações naturais. Veremos mais adiante neste livro que essas vibrações devem ser evitadas no regime de funcionamento de qualquer sistema.

Assimile

O conceito de frequência natural é importante, pois quando a frequência de operação ou excitadora de uma máquina ou estrutura coincidir com a sua frequência natural, ocorrerá um fenômeno conhecido como ressonância. Nesse momento, inicia-se um aumento exponencial da amplitude de oscilação, causando a fadiga ou a falha do corpo.

- **Batimento:** quando dois movimentos harmônicos cujas frequências próximas são somadas, ocorre o fenômeno de batimento. Se pegarmos uma frequência ω e outra $\omega + \delta$, sendo δ um pequeno acréscimo à frequência, teremos deslocamentos dados por:

$$x_1(t) = X \cos(\omega t) \quad (1.52)$$

$$x_2(t) = X\cos[(\omega+\delta)t] \quad (1.53)$$

Pela somatória das frequências, teremos:

$$x(t) = X\{\cos(\omega t) + \cos[(\omega+\delta)t]\} \quad (1.54)$$

Pela relação trigonométrica de soma de cossenos:

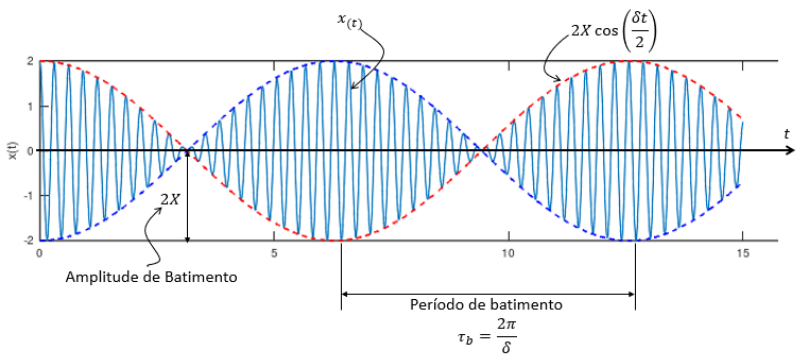
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (1.55)$$

Portanto:

$$x(t) = 2X\cos\left[\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\delta t}{2}\right) \quad (1.56)$$

Esse fenômeno é mostrado pelo gráfico da Figura 1.25.

Figura 1.25 | Representação de efeito de batimento



Fonte: Rao (2008, p. 26).

- **Oitava:** uma faixa de frequência na qual o valor máximo é igual ao dobro do mínimo é denominada uma faixa de oitava. 50-100Hz ou 75-150Hz são exemplos de oitavas.
- **Decibel:** unidade de medida usual em vibrações e estudo do som, porém, é uma grandeza muito incompreendida e apresenta várias formas de ser obtida. É representada por dB, sendo conhecida como uma relação de potências ou tensões.

Pesquise mais

Para compreender um pouco mais sobre o conceito de decibel, sugerimos a leitura do artigo indicado a seguir:

O DECIBEL, ou melhor: os decibéis. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1997.

Análise harmônica

De acordo com Rao (2008, p. 26), "qualquer função periódica de tempo pode ser representada por série de Fourier como uma soma infinita de termos em seno e cosseno". Assim, podemos demonstrar que, sendo *x(t)* uma função periódica, sua representação é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \cdots + b_1 sen(\omega t) + b_2 sen(2\omega t) + \cdots \qquad (1.57)$$

Podendo ser generalizada da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \qquad (1.58)$$

Sendo $\omega = 2\pi/\tau$ a frequência fundamental e $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, b_2, \cdots$ os coeficientes constantes da equação.

Ainda, seguindo essa lógica, podemos representar uma série de Fourier apenas em seno ou cosseno pela imposição de um ângulo de fase entre as séries da seguinte forma:

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos(n\omega t + \phi_n)) \qquad (1.59)$$

Em que:

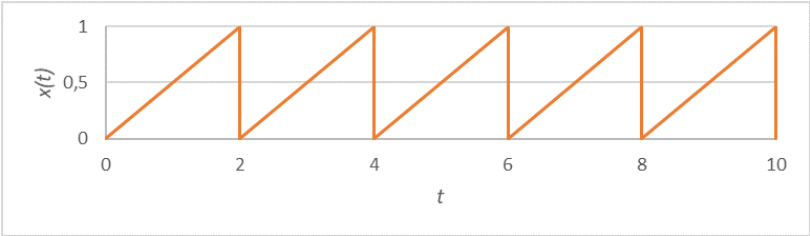
$$d_0 = \frac{a_0}{2} \qquad (1.60)$$

$$d_n = \sqrt{\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)} \qquad (1.61)$$

$$\phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad (1.62)$$

Se observarmos uma função periódica como a apresentada no gráfico da Figura 1.26, percebemos a possibilidade de aproximar essa função usando uma série de Fourier com o número de termos adequado.

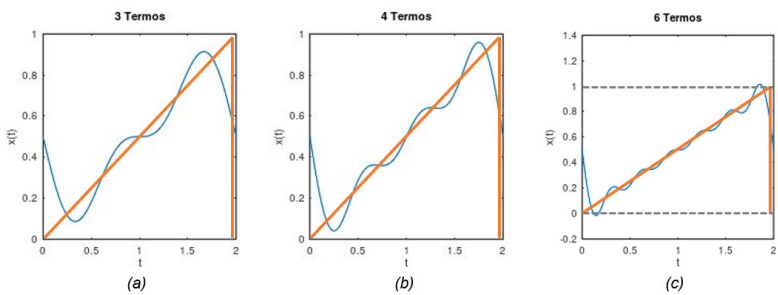
Figura 1.26 | Exemplo de função periódica



Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando a série de Fourier, a função será aproximada dependendo do número de termos usados. A partir da Figura 1.27 podemos perceber que, quanto maior o número de termos, mais precisa é a aproximação. No entanto, se olharmos a aproximação apresentada na Figura 1.27(c), podemos observar que, acima de determinada quantidade de termos usados, a série pode apresentar um erro. Se o pico mais elevado da amplitude máxima ultrapassar o pico real da oscilação, teremos a ocorrência do fenômeno conhecido como Fenômeno de Gibbs, que pode chegar a um erro de até 9% entre a amplitude real e a de aproximação.

Figura 1.27 | Aproximações por séries de Fourier



Fonte: elaborada pelo autor.

Também podemos expressar as séries de Fourier por meio de números complexos. Assim, é possível escrever:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t) \quad \text{e} \quad e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\text{sen}(\omega t) \quad (1.63)$$

Isso nos permite reescrever a equação de deslocamento da seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.64)$$

E os coeficientes de Fourier complexos podem ser encontrados pela relação dada por:

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)e^{-in\omega t}dt \quad (1.65)$$

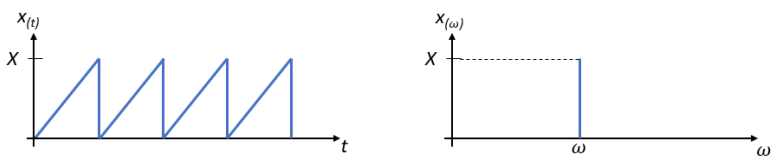
Pesquise mais

Para entender melhor as séries de Fourier complexas, consulte a página 27 do livro *Vibrações mecânicas*, de Rao (2008). Nele você verá como são deduzidas as equações apresentadas anteriormente.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Uma função harmônica pode ser representada como linhas verticais em um diagrama de amplitude em relação à frequência, denominado espectro de frequência ou diagrama espectral. Uma função harmônica pode também ser representada por meio de séries de Fourier no domínio do tempo, que vimos até agora, e no domínio da frequência, quando montamos um gráfico em que apresentamos a amplitude em relação à frequência em que esta ocorre. Isso é muito útil quando trabalhamos com sistemas reais, pois estes apresentam infinitas frequências naturais, sendo que quando fazemos uma representação no domínio da frequência podemos ver perfeitamente as frequências que devem ser evitadas. A Figura 1.28 mostra a diferença entre os planos de representação.

Figura 1.28 | Representação no domínio do tempo e da frequência



Fonte: elaborada pelo autor.

Funções pares e ímpares

Uma função par é aquela que apresenta simetria entre os valores no eixo coordenado vertical, portanto, a imagem de dois valores opostos será sempre a mesma. Essa função deve satisfazer a relação:

$$x(-t) = x(t) \quad (1.66)$$

Considerando que, em vibrações, uma função par tem sua expansão de Fourier contendo somente termos em cosseno, temos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad (1.67)$$

Conforme visto anteriormente, a_n são os termos da série.

No entanto, uma função ímpar apresenta simetria em relação à origem da função. Isso significa que, em um gráfico, a simetria é garantida em quadrantes opostos; portanto, a imagem da função de dois números opostos resultará em valores também opostos. Essa função obedece à relação:

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.68)$$

Em vibrações, as funções ímpares são representadas por uma expansão de Fourier contendo apenas termos em seno. Logo, temos que:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}(n\omega t) \quad (1.69)$$

Reflita

As vibrações podem apresentar diversos tipos de oscilações, mas talvez isso não seja um problema, visto que sempre será uma oscilação. Poderíamos, então, afirmar que toda série de Fourier é um tipo de vibração ou pode representar outros conceitos importantes da engenharia?

Exemplificando

Exemplo de soma de movimentos harmônicos

Determinaremos aqui a soma de dois movimentos harmônicos dados por:

$x_1(t) = 10\cos\omega t$ e $x_2(t) = 15\cos(\omega t + 2)$

Uma vez que ambos os movimentos são dados a partir da mesma velocidade angular ω, a soma deles poderá ser expressa pela Equação 1.47, dada por:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

Sendo que R é dado pela Equação 1.45 e α pela 1.46, temos que:

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2\mathrm{sen}\theta)^2}$$

$$A = \sqrt{(10 + 15\cos 2)^2 + (15\mathrm{sen}2)^2}$$

$$A = 14{,}1477$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{A_2 \operatorname{sen}\theta}{A_1 + A_2 \cos\theta}\right)$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{15\operatorname{sen}2}{10 + 15\cos 2}\right)$$

$$\alpha = 72{,}5963^\circ$$

O que resulta em um vetor:

$$\vec{X} = 14{,}1477\cos(\omega t + 72{,}5963^\circ)$$

Com isso, podemos perceber que o vetor resultante representa o movimento harmônico completo dos dois deslocamentos e é definido como uma equação em função do tempo. Assim, podemos encontrar o deslocamento em qualquer momento desejado.

Sem medo de errar

Você e sua equipe realizaram análises vibracionais no automóvel e, com isso, perceberam que a frequência natural das rodas do automóvel estava em torno de 1,5 Hz. Em uma segunda análise foi percebido que quando o carro trafega em asfalto comum, a 60 km/h, as rodas vibram em uma frequência de 2 Hz, que é muito próximo da frequência natural, gerando desconforto para os ocupantes do carro. Foi verificado ainda um desalinhamento das rodas dianteiras da ordem de 3°, o que pode ter gerado um deslocamento transversal das rodas da ordem de 14,5 mm. Com esses dados encontrados pela equipe de engenheiros, podemos chegar a uma conclusão acerca do fenômeno que está ocorrendo no carro?

Resolução:

Uma vez que o sistema apresenta uma frequência natural de 1,5 Hz e que, quando está a 60 km/h, uma velocidade comum, encontrada na maioria das avenidas das grandes cidades e em estradas pequenas, as rodas vibram em uma frequência de 2 Hz, podemos concluir, primeiramente, que o desconforto ocorrerá com grande frequência, tendo em vista que é uma velocidade de tráfego normal. Em um segundo plano, podemos perceber que essa frequência recebe sua magnitude a partir de um desbalanceamento que poderemos chamar convenientemente de X.

Ainda podemos verificar a proximidade da frequência de vibração proveniente da velocidade do veículo. Com isso, poderemos dizer que a frequência natural é acrescida de uma segunda frequência, garantindo a seguinte relação:

$$\omega_T = \omega + \delta = 1{,}5\text{Hz} + 0{,}5\text{Hz} = 2\text{Hz}$$

Podemos perceber que se trata de um fenômeno de batimento, no qual duas frequências próximas se somam. Aqui, aplicamos as Equações 1.52 e 1.53:

$$x_1(t) = X\cos(\omega t)$$

$$x_2(t) = X\cos\left[(\omega + \delta)t\right]$$

Conforme deduzido anteriormente, quando somadas, elas resultam na Equação 1.56, dada por:

$$x(t) = 2X\cos\left[\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\delta t}{2}\right)$$

Substituindo os dados $\omega = 1{,}5\text{Hz}$, $\delta = 0{,}5\text{Hz}$ e $X = 9mm$, teremos:

$$x(t) = 2 \cdot 9 \cdot \cos\left[\left(1{,}5 + \frac{0{,}5}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{0{,}5t}{2}\right)$$

$$x(t) = 18\cos\left[(1{,}75)t\right]\cos(0{,}25t)[\text{mm}]$$

Temos, portanto, uma equação de deslocamento em função do tempo que denota o fenômeno de batimento que gera o desconforto na cabine do veículo. Essas informações são de grande importância para a tomada de decisão de um engenheiro mecânico em relação ao que será proposto para resolver os efeitos indesejados da vibração.

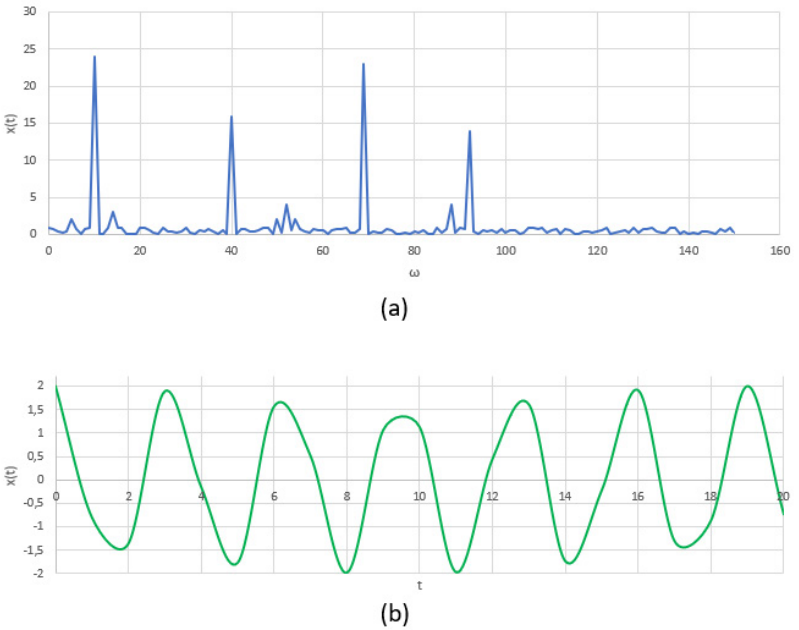
Avançando na prática

Análise de uma função no domínio da frequência

Descrição da situação-problema

Imagine que você, como engenheiro mecânico, foi convocado para participar de um processo seletivo de um concurso para o cargo de analista de vibrações. Ao chegar no local, você e outros quatro engenheiros mecânicos são levados a uma sala, onde são propostos alguns problemas para vocês resolverem. O primeiro deles é identificar qual dos gráficos (apresentados nas Figuras 1.29(a) e (b)) permite inferir as frequências problemáticas e qual representa o funcionamento de uma máquina.

Figura 1.29 | Gráficos de vibração na máquina



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Considere a seguinte definição: é o ângulo de defasagem entre dois raios que se movimentam com a mesma velocidade angular (ω), sendo representado pela letra grega ϕ. Um sistema que apresenta essas características é conhecido como sistema síncrono, apresentando mesma velocidade angular, porém, diferentes amplitudes.

De acordo com o texto-base e com os conhecimentos adquiridos até aqui, a qual conceito a asserção se refere.

a) Ângulo de fase.
b) Frequência natural.
c) Frequência angular.
d) Ciclo.
e) Amplitude.

2. Os sistemas vibracionais podem apresentar diversas características. A esse respeito, analise as afirmativas a seguir.
I – Os sistemas vibracionais são caracterizados por seu movimento oscilatório, e os efeitos vibracionais são sempre representados por movimentos harmônicos simples.
II – O período de um movimento harmônico é o tempo que leva para que o sistema conclua um ciclo completo.
III – A frequência natural de um sistema deve ser evitada como frequência de trabalho, pois pode levar a falhas dos equipamentos em vibração.

A partir da avaliação das afirmativas apresentadas no texto-base, assinale a alternativa correta.
a) As afirmativas I e II estão corretas.
b) Apenas a afirmativa III está correta.
c) As afirmativas I e III estão corretas.
d) As afirmativas II e III estão corretas.
e) Apenas a afirmativa II está correta.

3. A análise harmônica é usada em vibrações para que possamos analisar as características de funcionamento do sistema. Com isso, é possível tomar decisões importantes a fim de evitar problemas futuros ou resolver problemas presentes no sistema.

Assinale a alternativa correta a respeito da importância da expansão por séries de Fourier para a análise harmônica.
a) As expansões por série de Fourier são importantes, pois podem mostrar um gráfico simplificado de um movimento mais complexo.
b) As séries de Fourier são responsáveis por melhorar a qualidade de um resultado obtido, permitido que o engenheiro crie critérios de solução de problemas existentes na máquina.
c) As séries de Fourier só podem ser aplicadas em vibrações mecânicas por ser o único movimento harmônico simples.
d) As expansões de Fourier são úteis para simplificar dados que podem parecer ocultos em um primeiro olhar.
e) As expansões por séries de Fourier são muito importantes, pois nos permitem aproximar movimentos não harmônicos, facilitando a compreensão do movimento vibracional.

Referências

COSSOLINO, L. C.; PEREIRA, A. H. A. **Amortecimento**: classificação e métodos de determinação. São Carlos: ATCP Engenharia Física, 2010. Disponível em: http://www.atcp.com.br/imagens/produtos/sonelastic/artigos/ITC04-ATCP.pdf. Acesso em: 24 out. 2018.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2011. 591 p.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Unidade 2

Vibrações livres

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta segunda unidade de ensino estudaremos a vibração livre de forma a compreender alguns aspectos importantes e avançarmos nos estudos acerca de vibrações mais complexas. Esse tipo de vibração pode ocorrer em diversos sistemas distintos, visto que é a aplicação de uma perturbação inicial sem forças externas que force a continuação do fenômeno. Um exemplo clássico desse tipo de vibração é quando um automóvel passa por uma lombada: o efeito oscilatório é configurado como uma vibração livre.

O conteúdo abordado nesta unidade vai auxiliá-lo a tornar-se capaz de analisar sistemas vibracionais com um grau de liberdade que permitirá uma melhor compreensão das funcionalidades das vibrações livres amortecidas e não amortecidas.

Na nossa situação-problema, você foi contratado por uma fabricante de aviões para fazer parte da equipe de testes estruturais. Temos que um novo modelo de avião, que se encontra em fase de testes e será lançado em breve no mercado, está apresentando problemas estruturais devido a vibrações. Durante o pouso, o avião sofre um impacto muito grande ao tocar o solo, o que gera vibrações translacionais que podem causar danos à estrutura do avião, e, em pleno voo, o avião sofre com vibrações torcionais devido ao vento e às condições adversas, tais como a turbulência. Em vista desses problemas, primeiramente você sugere à equipe que sejam dimensionados os deslocamentos e as amplitudes vibracionais máximas apresentadas pela aeronave em regime de vibração translacional. Em seguida, você propõe um estudo acerca dos efeitos das vibrações torcionais gerados no voo. Por último você e sua equipe pretendem dimensionar os efeitos vibracionais reduzidos por elementos amortecedores. Para termos um ponto de partida, podemos considerar que o avião é análogo a um avião comercial de grande porte, como o modelo E-195LR da Embraer, apresentado na Figura 2.1 a seguir.

Figura 2.1 | Embraer E-195LR

Fonte:https://www.istockphoto.com/br/foto/ar-dolomiti-embraer-erj-195lr-decolar-do-aeroporto-internacional-de-cluj-napoca-gm869469088-144903745

Com isso em mente, podemos fazer alguns questionamentos que nos permitirão direcionar nosso pensamento para a resolução dos problemas vibracionais apresentados pela aeronave.

Já consegue imaginar como um avião se comporta, vibracionalmente, no momento do pouso e durante o voo? Qual seria a magnitude de amortecimento necessária para reduzir os efeitos vibracionais? E para inibir a oscilação no pouso?

Esta unidade será dividida no estudo das vibrações livres com um grau de liberdade, translacionais e torcionais, sem amortecimento, com amortecimento viscoso e com amortecimento Coulomb. Esse conteúdo vai permitir a visualização de uma forma mais completa de como se comportam os diversos sistemas vibratórios, trazendo conceitos muito importantes para a compreensão de sistemas mais complexos.

Seção 2.1

Vibração livre de um sistema de translação não amortecido

Diálogo aberto

Olá, aluno! Nesta seção, estudaremos os conceitos de vibrações translacionais, livres, não amortecidas com um grau de liberdade. Isso permitirá compreender melhor o fenômeno da vibração. Você, uma pessoa antenada com as tendências ecológicas e de sustentabilidade, ao deslocar-se de sua casa até seu trabalho de bicicleta, certamente já passou sobre algum desnível acentuado no pavimento, o que fez com que a bicicleta oscilasse para cima e para baixo, certo? Esse fenômeno é conhecido como vibração livre. Como o movimento ocorre somente no sentido vertical, é conhecido como vibração translacional, podendo ser amortecida ou não, dependendo da configuração de sua bicicleta.

Nesse momento, para aplicar de maneira prática os conceitos que serão estudados na seção, imagine que você é um engenheiro da equipe de testes estruturais e que o novo modelo de avião da empresa em que trabalha está com problemas provindos das vibrações apresentadas pela aeronave. Portanto, a equipe está preocupada em entender as dimensões máximas das vibrações a que o avião apresentado anteriormente pode ser submetido. Observando a Figura 2.1, você pode perceber que o avião possui seis pneus: dois dianteiros e quatro traseiros.

Figura 2.1 | Embraer E-195LR

Fonte:https://www.istockphoto.com/br/foto/ar-dolomiti-embraer-erj-195lr-decolar-do-aeroporto-internacional-de-cluj-napoca-gm869469088-144903745

Conforme os tipos de vibração que já foram apresentados anteriormente, podemos pensar que, no momento em que toca o solo, o avião sofre com vibrações livres não amortecidas, e que, para isto, devemos desconsiderar os amortecedores e imaginar que os pneus são instalados em hastes fixadas diretamente à carenagem da aeronave. Logicamente, essa consideração acarretaria deslocamentos muito grandes que poderiam ocasionar falhas na estrutura do avião, porém isso nos permite inspecionar os esforços máximos gerados pelo pouso de uma aeronave e ter um parâmetro dimensional do problema.

Alguns dados importantes dessa aeronave, que lhe foram fornecidos pela empresa, mostram que esse modelo de avião apresenta uma massa máxima de pouso de $m = 45.000$ kg, e, além disso, a equipe pode assumir que os pneus da aeronave se deformam apenas $X = 150$ mm com o impacto do pouso. Ainda, no contexto da aviação existe uma razão padrão de descida que é assumida para segurança, dada em $V = 600$ FPM, que é o equivalente a aproximadamente 3,0 m/s, representando a velocidade vertical do movimento de aproximação para pouso.

Com isso, você saberia elaborar o sistema vibracional de um grau de liberdade que representa a aeronave? Consegue pensar no sistema massa-mola resultante e elaborar as equações para resolução do sistema?

Nesta seção vamos nos preocupar em compreender as características das vibrações livres translacionais, a fim de desenvolver o equacionamento desse tipo de vibração, a partir da aplicação dos possíveis métodos utilizados para isso, com o intuito de solucionar o equacionamento proposto e observar sua analogia com o movimento harmônico.

Não se esqueça de estudar todo o conteúdo apresentado nesta seção com afinco e interesse para conseguir resolver os problemas vibracionais.

Não pode faltar

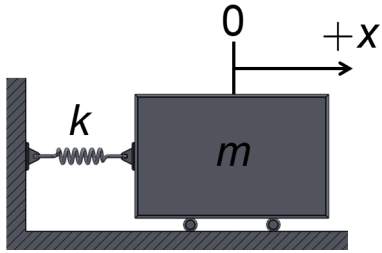
A compreensão das vibrações livres de um grau de liberdade (1 GDL) é de grande importância para o entendimento de sistemas vibratórios mais complexos. Esse tipo de vibração ocorre quando o sistema oscila a partir de uma excitação inicial e nenhuma outra perturbação posterior ocorre. As oscilações de um ciclista ou de um veículo após passar por uma saliência na estrada são exemplos de vibração livre (RAO, 2008, p. 50).

De acordo com Hibbeler (2011, p. 504), "a vibração livre ocorre quando o movimento é mantido por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas".

Muitos sistemas que apresentam vários graus de liberdade podem ser idealizados em apenas um GDL, visto que uma barra com massa distribuída pode ser resumida a um ponto material com massa concentrada.

O sistema vibracional mostrado na Figura 2.2 é o sistema mais simples, que possui apenas uma massa e uma mola. Como já visto anteriormente, a massa (m) representa o elemento que armazena energia cinética, enquanto a mola (k) representa a rigidez do sistema ou o elemento que armazena energia potencial.

Figura 2.2 | Sistema massa-mola simples



Fonte: elaborada pelo autor.

Esse sistema tem um grau de liberdade, visto que apenas a coordenada x é suficiente para descrever a posição da massa do sistema, em qualquer instante de tempo. Uma vez que uma perturbação inicial é inserida nesse sistema, temos que um movimento oscilatório livre de forças externas se iniciará. Como o sistema não possui meio de dissipação de energia (sistema não amortecido), a vibração se perpetuará indefinidamente.

Equação de movimento pela segunda lei de Newton

Para determinar a equação de movimento característico dessa vibração, usaremos a segunda lei de Newton, que, definida por Hibbeler (2011, p. 83), dita que "quando uma força desequilibrada atua sobre uma partícula, a acelerará na direção da força com uma intensidade que é proporcional à força". Desta forma, temos que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{2.1}$$

Para definir a equação do movimento vibracional, usando a segunda lei de Newton, passaremos por quatro etapas descritas por Rao (2008, p. 51), que serão apresentadas resumidamente a seguir:

1- Selecionar uma coordenada que descreva a posição da massa ou

corpo rígido. Usando uma coordenada linear e outra angular para descrever o movimento, pode-se chegar a resultados mais precisos.

2- Determinar a configuração de equilíbrio do sistema e medir o deslocamento inicial da massa ou corpo rígido.

3- Desenhar o diagrama de corpo livre que permita visualizar todos os aspectos importantes a serem considerados na elaboração do equacionamento, indicando todas as forças ativas e reativas a que o corpo rígido é submetido.

4- Por fim, deve-se aplicar a segunda lei de Newton à massa ou corpo rígido.

Usaremos a definição de taxa de variação de movimento para definir o movimento em relação ao tempo. Sabendo que a aceleração (a) é a derivada da velocidade em função do tempo, podemos reescrever a força como sendo:

$$\vec{F}_{(t)} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \frac{d\vec{x}_{(t)}}{dt}\right) \tag{2.2}$$

Dado que a aceleração pode ser escrita como:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}_{(t)}}{dt^2} \tag{2.3}$$

Considerando a massa constante, esta pode ser retirada da derivada, resultando na seguinte forma:

$$\vec{F}_{(t)} = m \cdot \frac{d^2\vec{x}_{(t)}}{dt^2} = m \cdot \ddot{\vec{x}} \tag{2.4}$$

Já para um corpo rotacional, teremos, analogamente, que:

$$\vec{M}_{(t)} = J\ddot{\vec{\theta}} \tag{2.5}$$

Sendo $\vec{M}_{(t)}$ o momento resultante que age sobre o corpo, $\vec{\theta}$ o deslocamento angular e $\ddot{\vec{\theta}}$ a aceleração angular dada por:

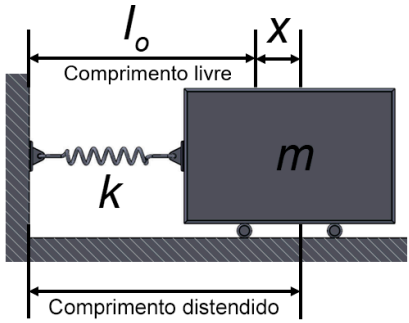
$$\ddot{\vec{\theta}} = \frac{d^2\vec{\theta}_{(t)}}{dt^2} \tag{2.6}$$

Com isso em mãos, se aplicarmos as quatro etapas do procedimento descrito anteriormente ao sistema simples apresentado na Figura 2.2, teremos:

1- Como já visto, o sistema pode ser representado pela coordenada x, que descreve a posição do corpo em oscilação.

2- Nessa etapa, devemos medir o deslocamento inicial que gera o movimento, em relação ao ponto de equilíbrio, que pode ser visto na Figura 2.3.

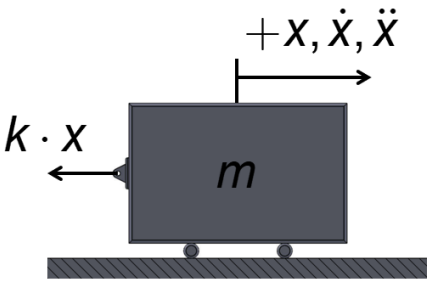
Figura 2.3 | Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio



Fonte : elaborada pelo autor.

3- Nesse ponto, devemos montar o diagrama de corpo livre que permitirá visualizar todas as forças que agem sobre o corpo. O diagrama do sistema em análise pode ser visto na Figura 2.4.

Figura 2.4 | Diagrama de corpo livre



Fonte : elaborada pelo autor.

4- Por fim, aplica-se a Equação 2.4 ao sistema. Sabendo que a mola exerce a força elástica restauradora do sistema, teremos:

$$\vec{F}_{(t)} = -k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \tag{2.7}$$

Ou podemos reescrever do ponto de vista do equilíbrio, da seguinte forma:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.8}$$

Essa equação nos mostra uma relação entre a força de movimento do corpo e a força restauradora da mola.

Assimile

Para facilitar o desenvolvimento do raciocínio, podemos aplicar as seguintes etapas: 1 - definição da coordenada; 2 - medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio; 3 - desenho do diagrama de corpo livre; e 4 - aplicação da equação do movimento.

Equações do movimento por outros métodos

De acordo com Rao (2008), as equações de vibrações podem ser derivadas por várias formas diferentes. Vejamos os seguintes métodos:

Princípio de D'Alembert: as equações 2.4 e 2.6 podem ser reescritas das seguintes formas:

$$\vec{F}_{(t)} - m \cdot \ddot{\vec{x}} = 0 \tag{2.9}$$

E

$$\vec{M}_{(t)} - J \cdot \ddot{\vec{\theta}} = 0 \tag{2.10}$$

Essas equações de equilíbrio representam uma força e um momento fictícios, conhecidos como força ou momento de inércia, e o equilíbrio fictício é conhecido como equilíbrio dinâmico. A aplicação desse princípio ao diagrama mostrado na Figura 2.4 resulta na equação:

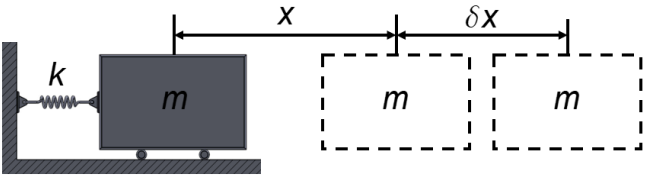
$$-k \cdot x - m \cdot \ddot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.11}$$

Princípio dos deslocamentos virtuais: esse princípio afirma que "se um sistema que está em equilíbrio sob ação de um conjunto de forças for submetido a um deslocamento virtual, então o trabalho virtual total realizado pelas forças será zero" (RAO, 2008, p. 52).

Um deslocamento virtual é o deslocamento infinitesimal, ou seja, diferente e muito próximo de zero. A Figura 2.5 demonstra um deslocamento infinitesimal aplicado a um sistema massa-mola.

Tem-se que todo deslocamento virtual deve ser fisicamente possível e compatível com as restrições do sistema.

Figura 2.5 | Movimento com deslocamento virtual

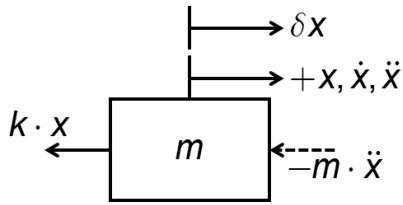


Fonte: elaborada pelo autor.

O trabalho virtual é realizado por todas as forças resultantes desse deslocamento.

Elaborando o diagrama de corpo livre do sistema, teremos o que se apresenta na Figura 2.6, em que x é o deslocamento da massa e δx é o deslocamento virtual.

Figura 2.6 | Diagrama de corpo livre do deslocamento virtual



Fonte: elaborada pelo autor.

O trabalho virtual realizado pela mola é dado por $\delta W_s = -(k \cdot x) \cdot \delta x$, e o trabalho realizado pela força de inércia é $\delta W_i = -(m \cdot \ddot{x}) \cdot \delta x$, que nos resulta em:

$$-m \cdot \ddot{x} \cdot \delta x - k \cdot x \cdot \delta x = 0 \tag{2.12}$$

Dado que a Equação 2.12 representa o trabalho virtual total realizado por todas as forças, quando este se iguala a zero. Assim, considerando que o deslocamento virtual é um valor arbitrário diferente de zero ($\delta x \neq 0$), a equação pode ser escrita como:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.8}$$

Princípio da conservação de energia: um sistema é conservativo quando não possui perdas de energia devido a dissipação de nenhum tipo. Se nenhum trabalho for realizado por forças externas, então a energia total é constante.

Sabemos que um sistema vibracional é parcialmente cinético e parcialmente potencial. Assim, podemos dizer que:

$$T + U = \text{constante} \tag{2.13}$$

Ou

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \tag{2.14}$$

Sendo que T é a energia cinética do sistema, obtida por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 \tag{2.15}$$

E U é a energia potencial da mola, obtida por:

$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \tag{2.16}$$

Com isso, podemos aplicar as Equações 2.15 e 2.16 à Equação 2.14, obtendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = 0 \tag{2.17}$$

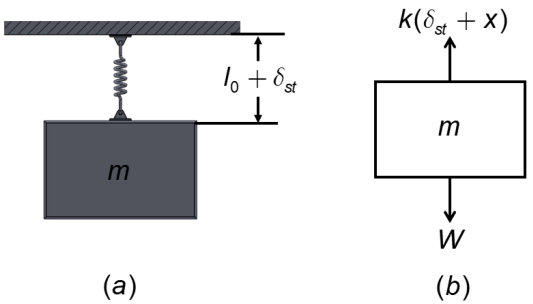
O que nos retorna à Equação 2.8:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.8}$$

Equação de movimento de um sistema massa-mola vertical

Em um sistema vertical com o mostrado na Figura 2.7, a posição de equilíbrio deixa de ser simplesmente o comprimento da mola e passa a ser o seu comprimento acrescido de um pequeno deslocamento proveniente do peso do corpo. Portanto, nessa posição, o comprimento de equilíbrio da mola passa a ser $l_0 + \delta_{st}$, dado que δ_{st} é conhecido como deflexão estática devido ao peso W.

Figura 2.7 | Sistema massa-mola em posição vertical



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos ainda que, como o sistema chega a uma nova situação de equilíbrio devido ao peso do corpo, então esse peso é compensado pela força da mola, e, com isso, podemos dizer que $W = m \cdot g = k \cdot \delta_{st}$, o que nos permitirá inferir que, a partir do diagrama de corpo livre da Figura 2.7b, aplicando-se um deslocamento x à massa, a força da mola passa a ser $-k \cdot (x + \delta_{st})$. Utilizando da segunda lei de Newton, poderemos encontrar:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot (x + \delta_{st}) + W \tag{2.18}$$

Tendo em vista que $W = k \cdot \delta_{st}$, teremos:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x + \delta_{st}) - W = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + k \cdot \delta_{st} - W = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + W - W = 0$$

Retornando assim à Equação 2.8, dada por:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.8}$$

Reflita

Será que um sistema vertical se comporta da mesma forma que um sistema horizontal, sendo possível definir suas equações ao serem aplicados os mesmos princípios?

Solução e movimento harmônico

De acordo com Rao (2008), podemos encontrar uma solução para a Equação 2.8, admitindo que:

$$\breve{\ }_{(t)} = \quad {}^{st} \tag{2.19}$$

Em que s e C são constantes a determinar. Se substituirmos isso na Equação 2.8, teremos:

$$C \cdot \breve{\ } m \cdot s^2 + k \ = \tag{2.20}$$

Sabendo que C não pode ser zero, temos que:

$$m \cdot s^2 + k = 0 \tag{2.21}$$

Rearranjando, temos que:

$$s = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} \tag{2.22}$$

Sabemos que $i = \sqrt{-1}$, o que nos permite encontrar uma outra equação:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.23}$$

A Equação 2.23 denota a frequência angular natural do sistema massa--mola, a qual é dada em radianos por segundo (rad/s) em que o corpo oscila em uma vibração livre. É também conhecida como frequência angular de ressonância, que deve ser evitada na faixa de operação do sistema, pois pode causar danos irreparáveis à máquina ou estrutura.

Os dois valores de s são os autovalores do problema. Considerando que ambos os valores satisfazem a Equação 2.19, a solução geral pode ser escrita como:

$$x_{(t)} = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{2.24}$$

Sendo C_1 e C_2 constantes e usando a identidade $e^{\pm i\alpha t} = \cos\alpha t \pm i\text{sen}\alpha t$, podemos reescrever a Equação 2.24 como:

$$x_{(t)} = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \text{sen}\omega_n t \tag{2.25}$$

Como A_1 e A_2 são constantes, pode-se perceber que retornamos ao deslocamento apresentado pelo movimento harmônico simples analisado anteriormente.

Podemos reescrever a Equação 2.8 de acordo com Hibbeler (2011, p. 506). Sabendo que a frequência angular natural é dada por $\omega_n = \sqrt{k/m}$, obteremos o seguinte:

$$\ddot{x} + \omega_n^{\ 2} x = 0 \tag{2.26}$$

Se admitirmos que $A = A_2$ e $B = A_1$, poderemos reescrever a solução como:

$$x_{(t)} = A\text{sen}\omega_n t + B\cos\omega_n t \tag{2.27}$$

Assim, a equação pode ser expressa em movimento senoidal simples, supondo que $A = C\check{}\ \ \phi$ e $B = \check{}\ \ \phi$. Temos que C e ϕ são novas constantes a serem determinadas. Substituindo em 2.27, teremos:

$$x_{(t)} = C\cos\phi\text{sen}\omega_n t + C\text{sen}\phi\cos\omega_n t \tag{2.28}$$

Já que $(\theta + \phi) = \text{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\text{sen}\phi$ e $\theta = \omega_n t$, teremos que:

$$x_{(t)} = C \cdot \text{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{2.29}$$

Se representarmos a Equação 2.29 em um gráfico $x \times \omega_n t$, levando em conta o estado inicial do sistema ($t = 0$), teremos que C é a amplitude do deslocamento dada por:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \left[x_0^{\ 2} + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{2.30}$$

E ϕ é o ângulo de fase é dado por:

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}\right) \tag{2.31}$$

A Equação 2.29 poderia ser escrita em cosseno, uma vez que o ângulo de fase se defasaria 90°, resultando em:

$$x_{(t)} = C \cdot \cos(\omega_n t + \phi) \tag{2.32}$$

E

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right) \tag{2.33}$$

A partir do que foi visto até aqui, podemos definir ainda o período de oscilação como sendo:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{ou} \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.34}$$

A frequência natural ou frequência de ressonância é dada por:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad \text{ou} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.35}$$

Pesquise mais

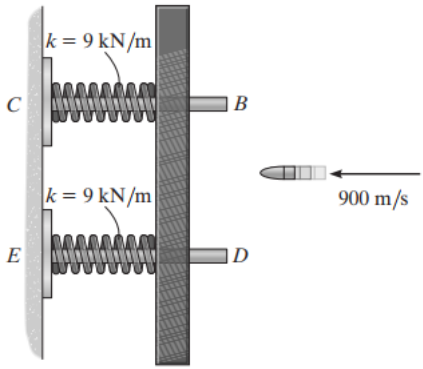
O vídeo sugerido a seguir trata da definição de vibrações livres não amortecidas.

REGINALDO J. SANTOS. Oscilações livres sem amortecimento.

Exemplificando

O alvo de $m_a = 3\ \text{kg}$ desliza livremente ao longo das guias horizontais lisas *BC* e *DE*, as quais estão encaixadas em molas que têm rigidez de 9 kN/m, cada. Se uma bala de $m_b = 60\ \text{g}$ é atirada com velocidade de $v_b = 900\,\text{m/s}$ e se embute ao alvo, determine a amplitude e a frequência de oscilação do alvo. Observe a Figura 2.8, que nos traz o esquema do problema. (HIBBELER, 2011, p. 513)

Figura 2.8 | Alvo de 3 kg atingido por bala de 60 g a 900 m/s



Fonte: Hibbeler (2011, p. 513).

A velocidade do alvo após o impacto da bala pode ser obtida aplicando-se o princípio de conservação de quantidade de movimento, tendo:

$$m_b(v_b)_1 = (m_b + m_a)v$$

$$0{,}06(900) = (0{,}06 + 3)v \rightarrow v = 17{,}65\,\mathrm{m/s}$$

Sabemos que cada mola possui uma rigidez de 9 kN/m, uma vez que estão dispostas em paralelo, dando-nos uma rigidez equivalente obtida por:

$$k_{eq} = 2k = 2 \cdot 9.000 = 18.000\,\mathrm{N/m}$$

Isso nos permite encontrar a frequência angular natural como sendo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{18.000}{3{,}06}} = 76{,}70\,\mathrm{rad/s}$$

Sabemos que a equação de deslocamento é dada por:

$$x(t) = A_0 \mathrm{sen}(\omega_n t + \phi_0)$$

E, com isto, a amplitude A_0 pode ser obtida pelas condições inicias, onde, nesse caso, $x_0 = 0$, $x_0 = 17{,}65\,\mathrm{m/s}$ e $t = 0$, aplicando-se a equação:

$$A_0 = \left[x_0^{\,2} + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[0^2 + \left(\frac{17{,}65}{76{,}70}\right)^2\right]^{1/2} = 0{,}2301\,\mathrm{m}$$

Isso nos mostra que a frequência de oscilação nos é dada como sendo $\omega_n = 76{,}70\,\mathrm{rad/s}$, e a amplitude é dada por $A_0 = 0{,}2301\,\mathrm{m}$.

Sem medo de errar

Na Figura 2.1 é possível verificar que o avião apresentado possui seis pneus, sendo dois dianteiros e quatro traseiros. Para iniciarmos a análise vibracional, podemos simplificar o sistema a ponto de desconsiderar o amortecimento para que possamos pensar na magnitude máxima que o sistema sofre. A nave, quando toca o solo no momento do pouso, sofrerá vibração livre, no nosso caso, não amortecida, e translacional por conta da oscilação vertical.

Figura 2.1 | Embraer E-195LR

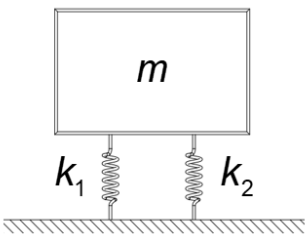
Fonte:https://www.istockphoto.com/br/foto/ar-dolomiti-embraer-erj-195lr-decolar-do-aeroporto-internacional-de-cluj-napoca-gm869469088-144903745

Lembrando os dados apresentados pela empresa, usaremos apenas os dados para movimento vertical da aeronave, sendo este movimento o interessante para a vibração que vamos analisar. Assim teremos uma massa máxima de pouso de m = 45.000 kg, a razão padrão de descida é dada por V = 600 FPM ou 3,0 m/s e os pneus da aeronave se deformam apenas X = 150 mm com o impacto com o solo. Isso nos permite trabalhar para encontrar as dimensões da vibração.

Resolução:

Tendo em vista o avião da Figura 2.1, considerando que os pneus e as hastes se comportam como molas lineares, vamos representar a rigidez do conjunto de pneus e haste traseiros como k_2 e a rigidez do conjunto de pneus e haste dianteiros como k_1. Com isso, podemos chegar ao seguinte sistema massa-mola apresentado pela Figura 2.9.

Figura 2.9 | Sistema massa-mola representativo da aeronave



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos considerar o avião como um ponto material com massa concentrada em seu centro de gravidade. Vamos calcular a rigidez equivalente diretamente, não importando a rigidez de cada componente em separado.

Primeiramente, temos que a força da mola, nesse caso, é a própria força de impacto do avião com o solo, pois é essa força que a mola terá que suportar. Uma vez que não temos o tempo de impacto, mas possuímos o deslocamento vertical no impacto, podemos chegar à aceleração que gera tal força a partir da equação de Torricelli:

$$V^2 = V_0^{\,2} + 2aX$$

Na qual V é a velocidade final (que nesse caso é zero, tendo em vista que o avião não entrará no solo), V_0 é a velocidade inicial, a é a aceleração e X é o deslocamento. A aceleração é negativa, já que no pouso a aeronave perderá velocidade. Assim, podemos reescrever a equação como:

$$a = \frac{V_0^{\,2}}{2X}$$

Dessa forma podemos escrever a equação da força como:

$$F = m \cdot \frac{V_0^{\,2}}{2X}$$

Tendo em vista que $F = k.x$ e $F = F_s$, escrevemos a equação de k como sendo:

$$F = k.x \;\; => \;\; k = F/x \qquad (2)$$

(1) em (2):

$$k = \frac{m.V_0^{\,2}/2x}{x/1} = \frac{m.V_{0^2}}{2x}.\frac{1}{x} = m.V_0^{\,2}/2x^2$$

$$k = m.V_0^{\,2}/2x^2 = (45.000\,.3^2)/2.(0.15)^2 = 9.10^6 N/m$$

Com o valor da rigidez em mãos, podemos encontrar a frequência angular natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}7\times10^6}{45.000}} \cong 7{,}75 \,\mathrm{rad/s}$$

Sendo assim usamos as equações de período e frequência:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \cong 0{,}81 \text{ s} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{\tau} \cong 1{,}23 \text{ Hz}$$

Além disso, podemos encontrar a equação do deslocamento vibracional a partir das Equações 2.29, 2.30 e 2.31, pois nesse ponto a velocidade inicial da vibração se torna zero, tendo em vista que a vibração só ocorre após o impacto com o solo. Sendo assim:

$$\check{}_{(t)} = \quad \cdot \text{sen}(\omega_n \ + \phi)$$

Em que:

$$C = \left[x_0{}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

E

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right)$$

Substituindo os valores da condição inicial, sendo $x_0 = 150$, $\dot{x}_0 = 0$ e t = 0, teremos:

$$c = \left[150^2 + \left(\frac{0}{14{,}14} \right)^2 \right]^{1/2} = (150^{1/2} = 150 \ mm$$

E

$$\varnothing = tg^{-1} \left(\frac{150 \cdot 14{,}14}{0} \right)$$

Nesse ponto, existe um problema matemático que pode ser resolvido intuitivamente. Como a velocidade no momento do contato é zero, podemos considerá-la um número muito pequeno e, portanto, tendendo a zero, o que nos permite dizer que a fração se tornaria, então, um número muito grande, tendendo ao infinito.

$$\frac{x_0 \omega_n}{0} = \infty$$

Uma vez que tg^{-1} de qualquer valor muito elevado nos dará $\pi/2$ ou 90°, teremos, portanto, que:

$$\varnothing = tg^{-1} \left(\frac{150 \cdot 14{,}14}{0} \right) = tg^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Substituindo os valores encontrados, teremos uma nova equação de deslocamento dada por:

$$x(t) = 150 \cdot sen\left(14{,}14t + \frac{\pi}{2}\right)150\cos(14{,}14)[mm]$$

Essa equação descreve o movimento oscilatório do avião em função do tempo, permitindo que, em qualquer instante de tempo, sejam encontrados os valores de deslocamento.

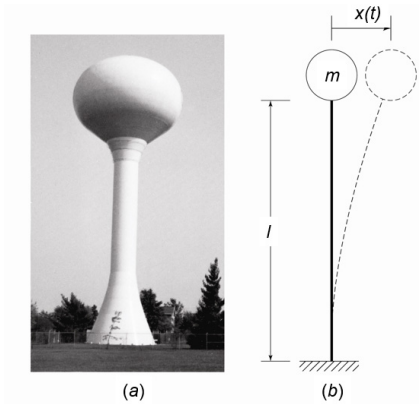
Com isso, chegamos a uma solução para a problematização proposta.

Ação do vento a uma caixa d'água

Descrição da situação-problema

Você foi contratado por uma empresa de engenharia para ser o responsável técnico da divisão de vibrações em estruturas. A empresa assume um projeto de um caixa d'agua, mostrada na Figura 2.10, para a prefeitura de sua cidade. O projeto especifica que a estrutura terá uma altura de 90 m, com seção transversal de 2,5 m de diâmetro interno e 3,0 m de diâmetro externo, sendo feita de concreto reforçado, com uma massa de 295 toneladas quando cheia de água. O módulo de elasticidade do concreto reforçado usado no projeto é de 30 GPa. Com essas informações, você terá que encontrar a frequência de ressonância, a velocidade e a aceleração máximas do movimento oscilatório da caixa d'agua, tendo um deslocamento inicial de 25 cm.

Figura 2.10 | Caixa d'água



Fonte: Rao (2008, p. 56).

Resolução da situação-problema

Sabemos que devemos diferenciar a equação do deslocamento em função do tempo para encontrarmos a equação de velocidade e, diferenciando uma segunda vez, encontrarmos a equação de aceleração. Sabemos ainda que a equação de deslocamento é dada por:

$$x(t) = A_0 \text{sen}(\omega_n t + \phi_0)$$

Portanto teremos que encontrar ω_n, A_0 e ϕ_0, uma vez que, para encontrar a frequência natural, precisamos definir a rigidez do sistema, e, como

vimos anteriormente, a rigidez para uma barra com massa concentrada na extremidade pode ser obtida pela equação:

$$k = \frac{3E\mathrm{I}}{l^3}$$

Para esse caso, temos que l = 90 m e E = 30 GPa, e, tendo os diâmetros externo $d_0 = 3{,}0\ \mathrm{m}$ e interno $d_i = 2{,}5\ \mathrm{m}$, o momento de inércia (I) para um cilindro oco é dado a partir de:

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{64}\left(d_0^{\,4} - d_i^{\,4}\right) = \frac{\pi}{64}\left(3{,}0^4 - 2{,}5^4\right) = 2{,}059\ \mathrm{m}^4$$

Sendo assim, podemos encontrar a rigidez aplicando:

$$k = \frac{3E\mathrm{I}}{l^3} = \frac{3 \cdot 30 \times 10^9 \cdot 2{,}059}{90^3} = 254.197{,}53\ \mathrm{N}/\mathrm{m}$$

Com essas informações podemos encontrar a frequência natural, que é a frequência em que ocorre a ressonância da estrutura. Aplicando a equação, teremos:

$$\omega_n \varnothing \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \sqrt{\frac{254.197{,}53}{250.000}} \quad 1{,}01\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

A amplitude A_0 é obtida pelas condições inicias, onde $x_0 = 25\ \mathrm{cm}$, $\dot{x}_0 = 0$ e $t = 0$, aplicando-se a equação:

$$A_0 = \left[x_0^{\,2} + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[0{,}25^2 + \left(\frac{0}{1{,}01}\right)^2\right]^{1/2} = \left[0{,}25^2\right]^{1/2} = 0{,}25\ \mathrm{m}$$

E o ângulo pode ser encontrado pela equação:

$$\phi_0 = tg^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}\right) = tg^{-1}\left(\frac{0{,}25 \cdot 1{,}01}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

O resultado do ângulo é possível se deduzirmos que qualquer valor dividido por outro muito pequeno só faz aumentá-lo, o que nos permite dizer que $\frac{0{,}25 \cdot 1{,}01}{0}$ tende ao infinito e portanto:

$$tg^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Logo escrevemos a equação de deslocamento como sendo:

$$x(t) = 0,25\text{sen}(1,01t + \frac{\pi}{2}) = 0,25\cos(1,01t)\left[\text{m}\right]$$

Onde, se derivarmos uma vez, obteremos a velocidade dada por:

$$\dot{x}(t) = 0,25 \cdot (1,01) \cdot \cos(1,01t + \frac{\pi}{2})$$

Dado que a velocidade máxima ocorre quando o cosseno se torna um (cos(x)=1), tendo, portanto:

$$\dot{x}(t) = 0,25 \cdot (1,01) \cdot 1 = 0,2525 \, \text{m}/\text{s}$$

E a aceleração pode ser obtida derivando-se a equação de velocidade, obtendo:

$$\ddot{x}(t) = -0,25(1,01)^2 \text{sen}(1,01t + \frac{\pi}{2})$$

Portanto, podemos encontrar a aceleração máxima quando seno se torna um (sen(x)=1), assim:

$$\ddot{x}(t) = -0,25 \cdot (1,01)^2 \cdot 1 = -0,255 \, \text{m}/\text{s}^2$$

Assim podemos perceber o movimento da caixa d'água em sua totalidade, obtendo um deslocamento em função do tempo, além de sua velocidade e aceleração máximas.

Faça valer a pena

1. Um sistema vibratório pode ser muito complexo, porém, para que possamos ter uma base de compreensão, assume-se um sistema de um grau de liberdade aproximando vários aspectos do sistema real. Para facilitar a compreensão, visualização e raciocínio da solução de problemas vibratórios com um grau de liberdade, podem ser descritas quatro etapas base.

Assinale a alternativa que apresenta cada uma das quatro etapas, **na ordem correta,** para a solução de problemas vibratórios.

a) 1- Desenho do diagrama de corpo livre; 2- Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio; 3- Definição da coordenada; e 4- Aplicação da equação do movimento.

b) 1- Definição da coordenada; 2- Aplicação da equação do movimento; 3- Desenho do diagrama de corpo livre; e 4- Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio.

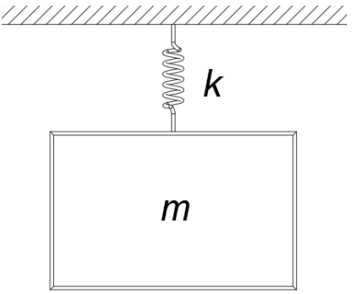
c) 1- Definição da coordenada; 2- Desenho do diagrama de corpo livre; 3- Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio; e 4- Aplicação da equação do movimento

d) 1- Definição da coordenada; 2- Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio; 3- Aplicação da equação do movimento; e 4- Desenho do diagrama de corpo livre.

e) 1- Definição da coordenada; 2- Medição do deslocamento inicial a partir do ponto de equilíbrio; 3- Desenho do diagrama de corpo livre; e 4- Aplicação da equação do movimento.

2. Um sistema massa-mola é apresentado pela figura a seguir, que contém uma massa de 40 kg que flexiona a mola em 6 mm. Uma vez que o sistema recebe uma excitação inicial, que dá início ao movimento vibratório, pode-se perceber que o sistema se comporta harmonicamente.

Figura | Sistema massa-mola



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os dados apresentados no texto-base, encontre a frequência angular natural do sistema. Assinale a alternativa correta.

a) $\omega_n = 14{,}79\,\text{rad/s}$.

b) $\omega_n = 12{,}79\,\text{rad/s}$.

c) $\omega_n = 122\,\text{rad/s}$.

d) $\omega_n = 7{,}79\,\text{rad/s}$.

e) $\omega_n = 11\,\text{rad/s}$.

3. Uma vibração livre não amortecida pode ser expressa por meio de uma equação de deslocamento $x_{(t)}$, que apresenta alguns dados importantes para um sistema vibracional. Tais dados podem ser obtidos a partir da avaliação de tal equação, dada por:

$$x_{(t)} = 15 \cdot \text{sen}(7t + 2)$$

Avaliando a equação de deslocamento apresentada no texto-base, podemos concluir que a vibração apresenta frequência natural de _____, amplitude igual a _____ e ângulo de fase de _____. Assinale a alternativa que preenche respectivamente as lacunas.

a) $\omega_n = 2 \, \text{rad}/\text{s}$, $C = 15$ mm e $\phi = 7$ rad.

b) $\omega_n = 15 \, \text{rad}/\text{s}$, $C = 7$ mm e $\phi = 2$ rad.

c) $\omega_n = 7 \, \text{rad}/\text{s}$, $C = 15$ mm e $\phi = 2$ rad.

d) $\omega_n = 15 \, \text{rad}/\text{s}$, $C = 2$ mm e $= 7$ rad.

e) $\omega_n = 7 \, \text{rad}/\text{s}$, $C = 2$ mm e $\phi = 15$ rad.

Seção 2.2

Vibração livre de um sistema torcional não amortecido

Diálogo aberto

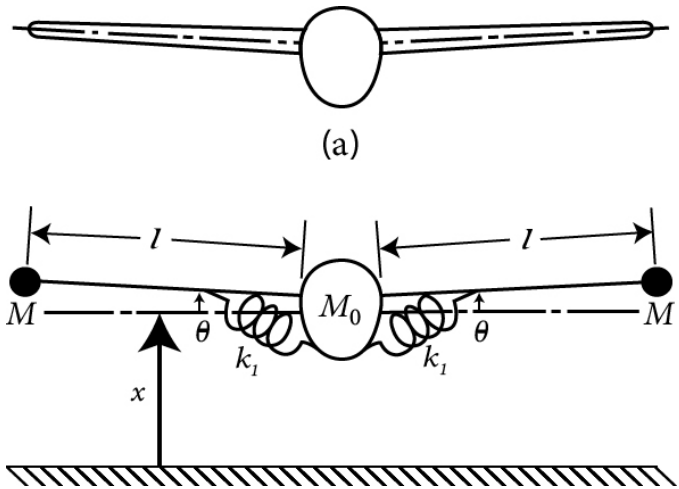
Caro aluno, as vibrações torcionais são muito comuns em máquinas rotativas, mas não só nessas máquinas. Quando um corpo tende a oscilar em torno de um eixo de referência qualquer, temos a ocorrência do tipo de vibração torcional. Pensando nisso, pode-se dizer que a asa de um avião, quando submetida a uma vibração, causa uma torção na fuselagem, que caracteriza esse tipo de vibração. Em pleno voo, o avião sofre com diversos adventos provindos do ambiente como frio, ventos fortes, mudanças de pressão e temperatura, mudanças bruscas de correntes de ar ascendentes e descendentes. Um dos efeitos mais comuns e assustadores em voo são as turbulências, que fazem as asas e cauda da aeronave oscilarem como as asas de um pássaro, porém em menor grau. Graças ao projeto e aos materiais empregados, os componentes não se rompem ou se destacam do avião, pois esses efeitos são previstos pela equipe de engenharia responsável pelos testes de validação e certificação da aeronave.

Na situação-problema desta unidade, você foi contratado por uma fabricante de aviões para fazer parte da equipe de testes estruturais, a qual está analisando o novo modelo de avião, que está apresentando problemas estruturais devido a vibrações – em pleno voo o avião sofre com vibrações torcionais devido ao vento e a condições adversas como turbulências. Você e sua equipe já dimensionaram os efeitos máximos das vibrações no pouso da aeronave. Agora é momento de resolver problemas relacionados ao efeito das vibrações torcionais em pleno voo. Dessa forma, você conseguiria elaborar o sistema massa-mola relativo ao movimento da aeronave? E lembrando da massa da aeronave, sabendo que cada asa carrega em torno de 8.000 litros de combustível (que apresenta densidade em torno de 0.775-0.840 kg/L a 15 °C) e que o comprimento das asas é de aproximadamente 10 metros, você seria capaz de estimar a rigidez dada pelo sistema, para que a frequência natural das asas seja maior que 2,5 Hz?

Para resolver esse problema consideramos alguns dados complementares: assumindo uma aproximação viável com um sistema massa-mola representado na Figura 2.11, tendo em vista que as asas oscilam em relação à fuselagem do avião, temos uma configuração de molas torcionais de rigidez k_t. Para isso, podemos atentar para apenas uma das asas, haja vista que a aeronave é simétrica, carregando a mesma massa de combustível em cada

uma delas. Ainda, para fins de cálculo, vamos supor que a massa *M* concentrada na extremidade da asa é de 60% da massa do combustível, o que será apenas uma facilitação para fins de estimativa.

Figura 2.11 | Sistema massa mola do avião



Fonte: Rao (2018, p. 246).

Nesta seção serão apresentados os conceitos sobre vibração torcional, os princípios de estabilidade e a determinação das equações de movimento com base no princípio de energia de Rayleigh. Com isso, fecharemos o conteúdo das vibrações livres não amortecidas, que nos permitirá iniciar estudos mais completos acerca desse fenômeno tão importante.

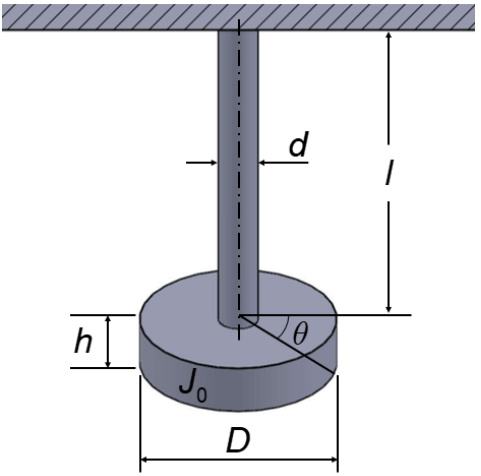
Não pode faltar

Vibração de um sistema torcional

A vibração por torção é aquela em que o corpo rígido oscila em relação a um eixo de referência, por isso o deslocamento é medido em termos de coordenada angular. Nesses casos, o momento restaurador é proveniente de uma torção de elemento elástico ou momento desbalanceado de uma força ou conjugado (RAO, 2008, p. 60).

Para exemplificar, imagine que um disco com diâmetro (*D*), altura (*h*) e momento de inércia de massa polar (J_0) seja montado na extremidade de uma haste cilíndrica sólida engastada pela outra extremidade, como mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12 | Disco submetido a torção



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2.12 nos apresenta uma torção θ ao conjunto. Pela teoria de torção de eixos circulares, temos que uma relação entre o torque e o ângulo de torção é dada pela equação:

$$\theta = \frac{M_t l}{I_0 G} \tag{2.36}$$

Em que M_t é o torque que produz o deslocamento angular (ou torção) θ, G é o módulo de elasticidade transversal, l é o comprimento do eixo e I_0 é o momento de inércia polar da seção transversal do eixo, que é dado pela equação:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \tag{2.37}$$

Sendo d o diâmetro do eixo. Caso se dê um deslocamento inicial qualquer, este será a perturbação inicial que gerará o momento restaurador M_t, e, portanto, o eixo se comportará como uma mola torcional que perpetuará o movimento oscilatório característico da vibração. Podemos deduzir a constante elástica ou rigidez (k_t) dessa barra cilíndrica a partir da equação análoga à força da mola translacional dada por $F = kx$, que nesse caso tomará a forma de $M_t = k_t \theta$. Sendo assim, podemos isolar k_t e substituir θ e I_0 obtendo:

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{M_t}{\frac{M_t \cdot l}{I_0 \cdot G}} = \frac{G \cdot I_0}{l} = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{32 \cdot l} \tag{2.38}$$

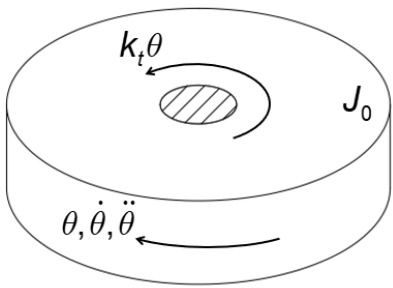
Assimile

O eixo de referência para a oscilação torcional se comportará como uma mola torcional, ou seja, não necessariamente existe uma mola real no sistema. Lembre-se de que essa característica de rigidez é intrínseca ao elemento constituinte da estrutura ou máquina.

Determinação da equação de movimento

De acordo com Rao (2008), a equação de movimento pode ser derivada da segunda lei de Newton (ou qualquer método exposto na seção anterior), considerando o diagrama de corpo livre do disco mostrado na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Diagrama de corpo livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nisso, podemos derivar a equação de movimento, obtendo:

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \tag{2.39}$$

Pode-se perceber a semelhança com a Equação 2.8 de movimento translacional. Assim, podemos deduzir algumas analogias, chegando à equação de frequência angular natural como sendo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.40}$$

O período natural de oscilação e a frequência natural de oscilação são dadas respectivamente por:

$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{k_t}} \tag{2.41}$$

E

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.42}$$

Alguns aspectos a serem levados em consideração são:

- Se o eixo não for cilíndrico, então deve-se usar uma constante elástica adequada; e
- O momento de inércia de massa polar pode ser obtido a partir da equação:

$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{WD^2}{8g} \tag{2.43}$$

Em que ρ é a densidade do disco cilíndrico, h é a espessura, D é o diâmetro e W é o peso do disco.

Fazendo uma analogia com o sistema translacional é possível propor uma solução para a equação geral do movimento vibracional, atribuindo:

$$\theta_{(t)} = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \text{sen} \omega_n t \tag{2.44}$$

Sendo A e B constantes a serem determinadas a partir do estado inicial do sistema com $t = 0$, se:

$$\theta_{(t=0)} = \theta_0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_{(t=0)} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{(t=0)} = \dot{\theta}_0$$

Assim, podemos chegar à conclusão de que:

$$A_1 = \theta_0 \tag{2.45}$$

E

$$A_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \tag{2.46}$$

Pesquise mais

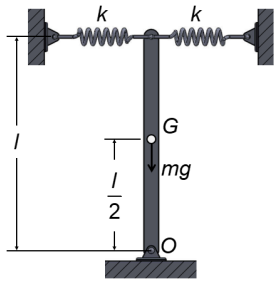
É interessante que você dê uma olhada nos conceitos de propriedades geométricas, centro de gravidade e momento de inércia de massa de sólidos homogêneos. Isso lhe garantirá uma melhor compreensão acerca de diversas características dinâmicas dos corpos rígidos. É possível encontrar de forma resumida no apêndice, nas páginas 544 e 545, do livro de *Dinâmica* do Hibbeler.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica:** mecânica para engenharia. 12 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2011.

Condição de estabilidade

Dizemos que um sistema é estável quando as forças restauradoras das molas agem de forma a anular uma à outra. Observe a Figura 2.14, que nos traz um sistema no qual a barra é estabilizada por duas molas de igual rigidez *k*, dado que esse sistema é estável se ambas as molas mantêm a barra na posição vertical sem que nenhuma esteja distendida (RAO, 2008, p. 63).

Figura 2.14 | Barra estabilizada por duas molas



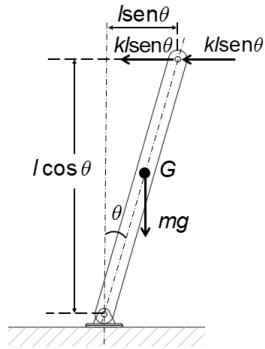
Fonte: elaborada pelo autor.

Se deslocarmos a barra em um ângulo (θ) qualquer, a força de cada mola será $kl\text{sen}\theta$, portanto a força total das molas será de $2\,kl\text{sen}\theta$, dado que a força peso da barra age no centro de gravidade G. Existe ainda um momento em relação ao ponto *O* devido à aceleração angular $\ddot{\theta}$, dado por:

$$J\ddot{\theta} = \left(\frac{ml^2}{3}\right)\ddot{\theta} \tag{2.47}$$

Podemos escrever a equação de movimento da barra com base no diagrama de corpo livre apresentado na Figura 2.15.

Figura 2.15 | Diagrama de corpo livre da barra estabilizada



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a Figura 2.15 teremos, portanto:

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}+(2\ kl\text{sen}\theta)l\cos\theta-\frac{Wl}{2}\text{sen}\theta=0 \tag{2.48}$$

Ainda, conseguimos reduzir a equação para pequenas oscilações, tendo:

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}+2kl^2\theta-\frac{Wl}{2}\theta=0 \tag{2.49}$$

Ou, sendo $\ddot{\theta}=\alpha$, podemos escrever como:

$$\alpha=\left(\frac{3Wl-12kl^2}{2ml^2}\right)^{1/2} \tag{2.50}$$

A solução da Equação 2.50 dependerá do sentido do movimento, ou seja, depende do sinal do termo ($12kl^2-3Wl$), o que nos permite três possíveis casos, os quais serão discutidos a seguir:

1º caso: estável, quando $\frac{12kl^2-3Wl}{2ml^2}>0$, a solução representa oscilações estáveis e é expressa por:

$$\theta_{(\cdot)}=A_1\cos\omega\ t+A_2\text{sen}\omega\ t \tag{2.51}$$

Sendo A_1 e A_2 constates.

2º caso: equilíbrio, quando $\frac{12kl^2-3Wl}{2ml^2}=0$, a equação reduz-se a $\alpha\quad 0$, tendo velocidade constante. A solução toma a forma:

$$\theta_{(t)}=C_1t+C_2 \tag{2.52}$$

Em que, para as condições iniciais, temos que $\theta_{(t=0)}=\theta_0$ e $\dot{\theta}_{(t=0)}=\dot{\theta}_0$, e a solução se torna:

$$\theta_{(t)}=\dot{\theta}_0t+\theta_0 \tag{2.53}$$

A Equação 2.53 nos permite perceber que o deslocamento angular aumenta de forma linear com a velocidade constante. Portanto, se não houver velocidade, a equação demonstrará $\theta_{(t)}=\theta_0$, o que denota uma posição de equilíbrio estático.

3º caso: instável, quando $\frac{12kl^2-3Wl}{2ml^2}<0$, assume-se:

$$\alpha=\left(\frac{3Wl-12kl^2}{2ml^2}\right)^{1/2} \tag{2.54}$$

A equação de solução passa a ser:

$$\theta_{(t)}=B_1e^{\alpha t}+B_2e^{-\alpha t} \tag{2.55}$$

Sendo B_1 e B_2 constantes e, para as condições iniciais do sistema, em que $\theta_{(t=0)} = \theta_0$ e $\dot{\theta}_{(t=0)} = \dot{\theta}_0$, teremos:

$$\theta_{(t)} = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0\right)e^{\alpha t} + \left(\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0\right)e^{-\alpha t}\right] \tag{2.56}$$

A Equação 2.56 nos mostra a instabilidade do sistema, uma vez que $\theta_{(t)}$ aumenta exponencialmente com o tempo. Isso ocorre porque o momento restaurador da mola é menor que o momento não restaurador da força peso da barra.

Reflita

Será que todos os sistemas torcionais podem ser estabilizados com o uso de duas molas, sendo essas molas sempre componentes reais do sistema?

Método de energia de Rayleigh

Esse método é usado para determinar a frequência natural de um sistema com um grau de liberdade. Novamente, podemos enunciar o princípio de conservação de energia como sendo:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \tag{2.57}$$

Em que T_1 e T_2 são as energias cinéticas inicial e final, respectivamente, e U_1 e U_2 são as energias potenciais inicial e final. Se o sistema apresentar movimento harmônico, por ser um sistema oscilatório, assim como um pêndulo simples, as energias se convertem de cinética para potencial (e vice-versa), de forma que podemos dizer que, quando $U = 0$, então T será máxima, e quando $T = 0$, U será máxima, ou seja:

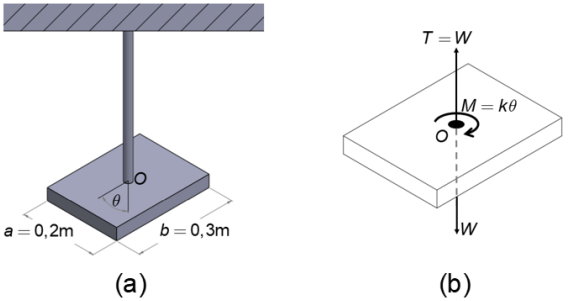
$$T_{máx} = U_{máx} \tag{2.58}$$

Portanto, se aplicarmos esse conceito a um sistema massa-mola de um GDL, poderemos encontrar diretamente a frequência natural do sistema. Veja o exemplo a seguir.

Exemplificando

Uma placa retangular de 10 kg está suspensa em seu centro de gravidade por uma barra com rigidez torcional de 1,5 Nm/rad, sistema ilustrado pela Figura 2.16. Qual será o período natural da placa quando ela é submetida a um pequeno deslocamento θ?

Figura 2.16 | Placa suspensa submetida a torção



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

O diagrama de corpo livre mostrado na Figura 2.16(b) nos permite perceber que é possível aplicar a Equação 2.39 ao sistema, dando-nos:

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

Podendo ser escrita como:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J_0}\theta = 0$$

Estando em sua forma padrão, podemos aplicar a Equação 2.41 para encontrar o período natural de vibração da placa, dada por:

$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{k_t}}$$

Pegando emprestada a equação de momento de inércia para placas com secção retangular, dos conceitos de dinâmica, podemos encontrar que:

$$J_0 = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

$$J_0 = \frac{1}{12}10(0,2^2 + 0,3^2) = 0,1083\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Assim, podemos substituir o valor de momento polar na equação de período, obtendo:

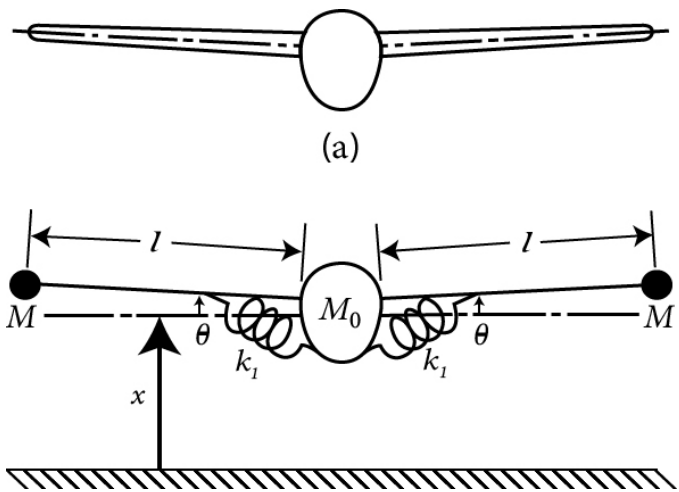
$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{0,1083}{1,5}} = 1,69 \text{ s}$$

Concluindo, temos que a placa leva 1,69 segundos para concluir um ciclo vibratório.

Para o avião proposto anteriormente, devemos elaborar o sistema massa--mola relativo ao movimento da aeronave. Lembrando que a massa da aeronave é de 45 toneladas, sabendo que cada asa carrega em torno de 8.000 litros de combustível (que apresenta densidade em torno de 0.775-0.840 kg/L a 15 °C), devemos ser capazes de estimar a rigidez dada pelo sistema para que a frequência natural das asas seja maior que 2,5 Hz, considerando que o comprimento das asas é de aproximadamente 10 metros.

Primeiramente, podemos atribuir às asas da aeronave um sistema massa--mola, representado na Figura 2.11. Considerando que as asas oscilam em relação à fuselagem do avião, temos uma configuração de molas torcionais de rigidez k_t. Vamos analisar apenas uma das asas, tendo em vista que a aeronave é simétrica, carregando a mesma massa de combustível em cada uma das asas. Ainda, para fins de cálculo, vamos supor que a massa M concentrada na extremidade da asa é de 60% da massa do combustível, o que será apenas uma facilitação para fins de estimativa.

Figura 2.11 | Sistema massa mola do avião



Fonte: Rao (2018, p. 246).

Resolução:

Para encontrar a massa de combustível que usaremos para estimar a massa M, devemos encontrar a densidade do querosene de aviação, usado em motores a jato. A densidade desse combustível está em torno de 0.775-0.840 kg/L a 15 °C. Vamos atribuir, portanto, 0,81 kg/L, o que nos permitirá encontrar uma massa de:

$$M = m_c \times 40\% = 8.000\text{L} \cdot 0{,}81 \, {}^{\text{kg}}\!/_{\text{L}} \times 40\% = 2.592 \text{ kg}$$

Usando o método de Rayleigh, podemos determinar as energias cinética e potencial:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2} k_t x^2$$

Sendo o deslocamento angular e a velocidade angular dados por θ e $\dot{\theta}$, respectivamente, teremos $x = \theta$ e $\dot{x} = l\dot{\theta}$. Se o deslocamento e a velocidade são lineares, podemos reescrever:

$$T = \frac{1}{2} M(l\dot{\theta})^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2} k_t \theta^2$$

Atribuindo a equivalência, em que $T_{máx} = U_{máx}$, e tendo que $T_{máx} = \frac{1}{2} m\omega_n{}^2 X^2$ e $U_{máx} = \frac{1}{2} kX^2$, podemos escrever as equações como uma equivalência sendo:

$$\frac{1}{2} Ml^2 \omega_n{}^2 X^2 = \frac{1}{2} k_t X^2$$

Ou seja,

$$Ml^2 \omega_n{}^2 = k_t$$

Para encontrar a frequência angular natural, podemos aplicar a equação:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Ou seja,

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi 2{,}5 = 15{,}71 \, {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}}$$

Dessa forma, podemos substituir os valores que possuímos como $M = 2592\text{kg}$, $l = 10 \text{ m}$ na equação da rigidez que foi deduzida, resultando em:

$$k_t = 2.592 \cdot 10^2 \cdot 15.71 = 4.072 \, {}^{\text{kN} \cdot \text{m}}\!/_{\text{rad}}$$

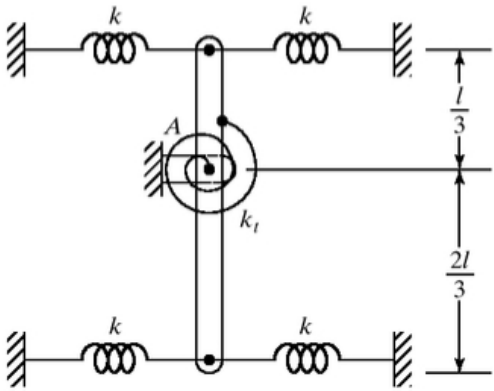
Isso nos mostra que a rigidez da fuselagem da aeronave deve ser de $4.072 \, {}^{\text{kN} \cdot \text{m}}\!/_{\text{rad}}$, para que a frequência natural seja maior que 2,5 Hz. Assim, temos a garantia de que a frequência natural da aeronave não coincida com a frequência nas asas durante o voo, finalizando com êxito a resolução da problematização proposta.

Determinação de equação de movimento pelo método de Rayleigh

Descrição da situação-problema

Você é o engenheiro responsável por determinar os riscos dessa estrutura e cabe a você dimensionar o ponto de ressonância desse sistema. A Figura 2.17 representa um sistema de estabilidade usado em uma estrutura flexível. Sendo, portanto, simplificado a uma barra delgada uniforme de 10 kg e 5 m de comprimento, que é articulada no ponto *A* e está ligada a quatro molas lineares de rigidez $k = 2.000\,\mathrm{N/m}$, que representam as vigas flexíveis da estrutura, e uma mola torcional de rigidez $k_t = 1.000\,\mathrm{N \cdot m/rad}$, que representa uma junta flexível de fixação no ponto *A*.

Figura 2.17 | Barra delgada



Fonte: Rao (2008, p. 94).

Para tanto, determine a frequência angular natural (representa a frequência de ressonância da estrutura) aplicando o método de Rayleigh.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, devemos nos lembrar de que o método de Rayleigh envolve o uso do princípio de conservação de energia para as energias máximas cinética e potencial. Com isso, podemos escrever que:

$$T_{máx} = U_{máx}$$

Para encontrar as energias, devemos usar as equações para o caso de movimento torcional, considerando que a energia cinética se torna:

$$T = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2$$

E, para encontrar J_A, devemos aplicar o **princípio de eixos paralelos** e a equação de momento de inércia para barras delgadas, que nos dará:

$$T = \frac{1}{2}(J_G + md^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{36}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{9}\right)\dot{\theta}^2$$

A energia potencial pode ser obtida levando em conta as molas do sistema e o peso da barra, sendo:

$$U = mgd(1 - \cos\theta) + 2\left(\frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}kx_2{}^2\right) + \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

Para esse caso, $\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, $x_1 = \frac{l}{3}$ e $x_2 = \frac{2l}{3}$, o que nos dá:

$$U = mg\frac{l}{6}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \left(k\frac{l^2}{9}\theta^2 + k\frac{4l^2}{9}\theta^2\right) + \frac{1}{2}k_t\theta^2 = mg\frac{l}{6}\cdot\frac{\theta^2}{2} + k\frac{5l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

Lembrando que as energias são dadas por uma relação em que:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_n{}^2X^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2}kX^2$$

Com isso em mente, podemos reescrever as equações como:

$$T_{máx} = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{9}\right)\omega_n{}^2X^2 \quad \text{e} \quad U_{máx} = \frac{1}{2}\left(\frac{mgl}{6} + \frac{10kl^2}{9} + k_t\right)X^2$$

Aplicando o princípio de conservação de energia, teremos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{9}\right)\omega_n{}^2X^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mgl}{6} + \frac{10kl^2}{9} + k_t\right)X^2$$

Assim, isolando ω_n, teremos:

$$\omega_n{}^2 = \frac{\frac{mgl}{6} + \frac{10kl^2}{9} + k_t}{\frac{ml}{9}}$$

Substituindo os valores dados no enunciado, sendo $m = 10\text{ kg}$, $= 5\text{ m}$, $k = 2.000\,\text{N/m}$ e $k_t = 1.000\,\text{N}\cdot\text{m/rad}$, teremos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{mgl}{6} + \frac{10kl^2}{9} + k_t}{\frac{ml}{9}}} = \sqrt{\frac{\frac{10 \cdot 9,81 \cdot 5}{6} + \frac{10 \cdot 2.000 \cdot 5^2}{9} + 1.000}{\frac{10 \cdot 5}{9}}} = 45,1547 \, {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}}$$

Ou seja, a frequência natural de vibração da barra submetida às configurações apresentadas na Figura 2.17 será de $\omega_n = 45,1547 \, {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}}$. Isso nos permite observar a frequência em que ocorre a ressonância nesse sistema.

Faça valer a pena

1. Quando um corpo rígido oscila em relação a um eixo de referência, seu deslocamento passa a ser medido em termos de coordenada angular. Nesse caso, o momento restaurador é proveniente de uma torção de elemento elástico ou momento desbalanceado de uma força ou conjugado.

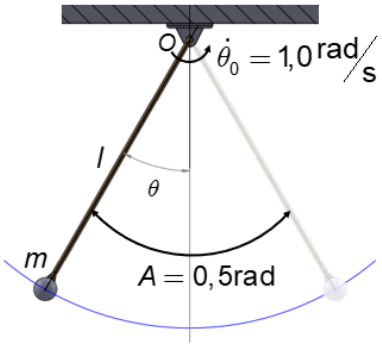
Assinale a alternativa que apresenta o tipo de vibração a que o texto-base se refere:
a) Vibração torcional.
b) Vibração translacional.
c) Vibração de Rayleigh.
d) Vibração de ressonância.
e) Vibração aeroelástica.

2. De acordo com os conhecimentos que adquiriu sobre vibrações, considere as seguintes sentenças e julgue-as verdadeiras (V) ou falsas (F):
I – Vibrações torcionais são oscilações que ocorrem quando um elemento oscila em torno de um eixo de referência.
II – Como vibração usa ângulos como ângulo da curva harmônica e ângulo de fase, toda vibração pode ser considerada torcional.
III – As vibrações são sempre movimentos harmônicos, podendo ser resolvidas sempre com as equações de movimento harmônico simples.
IV – As vibrações são oscilações que podem ser analisadas de diversas formas diferentes, sendo o método de Rayleigh uma delas.

Com base na sequência de valores lógicos V e F das afirmações apresentadas no texto-base, marque a alternativa que contém a ordem correta:
a) V, V, V, V.
b) V, F, V, F.
c) F, V, F, F.
d) F, F, V, V.
e) V, F, F, V.

3. Para que possamos observar melhor como um pêndulo se comporta, de forma a conseguir visualizar as interações entre seus elementos, como a massa e o comprimento do cabo que a suporta, veja o pêndulo da figura a seguir e analise-o quando este entra em oscilação, saindo do repouso com uma velocidade angular de 1 rad/s, obtendo assim uma amplitude de 0,5 rad.

Figura | Movimento do pêndulo simples



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine a frequência natural e o comprimento do pêndulo. Assinale a alternativa que corresponde à resposta correta.

a) $\omega_n = 2\,\mathrm{rad/s}$ e $l \cong 4{,}5\ \mathrm{m}$.

b) $\omega_n = 2\,\mathrm{rad/s}$ e $l \cong 2{,}45\ \mathrm{m}$.

c) $\omega_n = 4\,\mathrm{rad/s}$ e $l \cong 2{,}45\ \mathrm{m}$.

d) $\omega_n = 2{,}45\,\mathrm{rad/s}$ e $l \cong 2{,}0\ \mathrm{m}$.

e) $\omega_n = 3{,}5\,\mathrm{rad/s}$ e $l \cong 2{,}45\ \mathrm{m}$.

Seção 2.3

Vibração livre com amortecimento viscoso e com amortecimento Coulomb

Diálogo aberto

Caro aluno, você já percebeu que, quando um carro passa por um desnível na estrada, ele oscila, porém não permanece oscilando durante muito tempo? O movimento cessa após alguns segundos, e isso ocorre devido ao amortecimento do veículo. Temos que o amortecimento existe de diversas formas distintas, podendo ser um elemento construtivo ou intrínseco ao sistema.

Para contextualizar os assuntos que serão abordados nesta seção, lembre-se de que, no caso da aeronave que viemos estudando, você e sua equipe de engenharia fizeram algumas análises, desprezando o amortecimento do sistema, porém essa consideração é usada para se observar os esforços máximos sem elementos de dissipação de energia. Uma vez que o sistema não suportaria o pouso sem dissipar a energia vinda dos esforços gerados pelo impacto, nesse momento vamos focar nossos estudos no amortecimento do sistema, que fará com que o esse sistema funcione corretamente. Pode-se dizer que o sistema real possui suspensão para garantir maior conforto e confiança, tanto na decolagem quanto no pouso. Para isso, existem amortecedores instalados para absorver os impactos provenientes de qualquer uma das condições de operação da aeronave. Então, pense que, ao pousar o avião, este não permanece oscilando indefinidamente, justamente pela existência do sistema de amortecimento. Sabendo dos diversos tipos de amortecimento, você saberia definir qual é o amortecimento usado para esse tipo de aplicação?

Desenvolva as equações sobre o sistema amortecido pela suspensão do avião, lembrando que este apresenta uma massa de 45.000 kg para o pouso e que, no momento em que toca o solo, sofre um deslocamento de 150 mm. Com isso, pudemos calcular a rigidez do sistema como sendo $k = 2{,}7 \times 10^6\ \mathrm{N/m}$. Para o sistema de suspensão, devemos assumir um coeficiente de amortecimento de 0,8, pelo menos, e dessa forma garantimos uma pequena oscilação sem muito desconforto, que seria causado por uma parada brusca.

Ainda nesta seção vamos ver os equacionamentos para se dimensionar o amortecimento de um sistema de forma a encontrar o amortecimento crítico e o fator de amortecimento e também as equações de amortecimento viscoso, Coulomb ou por histerese. Além disso veremos algumas aplicações práticas por métodos numéricos para se resolver os equacionamentos. Portanto, não deixe de estudar e de responder as questões ao final de sua leitura. Vamos começar?

Vibrações livres com amortecimento viscoso

Todo sistema real que sofra vibrações terá amortecimento, tendo em vista que seus componentes apresentam atrito entre si e que os sistemas estão em meio fluido como o ar, que possui alguma resistência ao movimento, portanto tendo um coeficiente de amortecimento próprio (HIBBELER, 2011).

Conforme já foi apresentado anteriormente, a força de amortecimento viscoso é uma relação entre a constante de amortecimento (c) de um fluido e a velocidade (v) em que o corpo se movimenta nesse meio, ou seja:

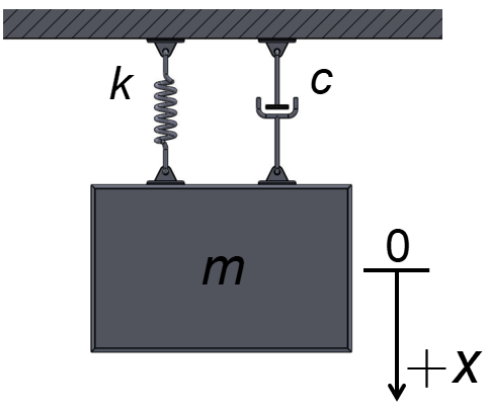
$$F = -c \cdot v = -c \cdot \dot{x} \tag{2.59}$$

O sinal negativo da Equação 2.59 denota que a força ocorre em sentido oposto à velocidade.

Em um sistema massa-mola-amortecedor, como o apresentado na Figura 2.18, se aplicarmos a lei de movimento de Newton, encontraremos que:

$$m\ddot{x}\,? \quad c\dot{x} \quad kx \tag{2.60}$$

Figura 2.18 | Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos reescrever a equação levando-a ao equilíbrio da seguinte forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.61}$$

Sendo a Equação 2.61 referente à vibração livre amortecida, sua solução corresponde à:

$$x(t) = C \cdot e^{st} \tag{2.62}$$

Em que C e s são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema. A inserção dessa função na equação de movimento vibratório (Equação 2.61) nos trará a equação característica:

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{2.63}$$

Cujas raízes serão:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.64}$$

A partir dessas equações, podemos encontrar uma constante chamada coeficiente de amortecimento crítico (c_c) do sistema amortecido. Esse coeficiente garante o mínimo de amortecimento necessário para que se impeça a vibração de um sistema massa-mola. O amortecimento crítico pode ser definido quando o radical da Equação 2.64 é zerado, portanto:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \tag{2.65}$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{2.66}$$

Podemos atribuir um fator de amortecimento (ζ) para qualquer sistema amortecido como sendo uma razão entre o amortecimento crítico e o amortecimento do sistema, tendo assim:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{2.67}$$

Fazendo uma relação entre as Equações 2.66 e 2.67, podemos escrever que:

$$\frac{c}{2\text{˘}} = \frac{c}{{}_c} \cdot \frac{c_c}{2} = \zeta \cdot \omega_n \tag{2.68}$$

Com isso, as raízes da solução podem ser reescritas como:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \tag{2.69}$$

As raízes nos darão duas possíveis soluções, sendo:

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} \tag{2.70}$$

E

$$x_2(t) = C_2 \cdot e^{s_2 t} \tag{2.71}$$

Então, a solução geral será uma combinação das duas soluções, resultando em:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t} \tag{2.72}$$

Em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema. Substituindo as raízes na Equação 2.72, teremos:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} \tag{2.73}$$

Percebemos assim que, quando o fator de amortecimento é nulo ($\zeta = 0$), temos uma vibração não amortecida. Porém, quando $\zeta \neq 0$, teremos três casos distintos, que serão explicados a seguir:

Caso 1: sistema subamortecido, que ocorre quando $\zeta < 1$ ou $c < c_c$ ou $c/2m < \sqrt{k/m}$. Para essa condição, as raízes se tornam:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n \tag{2.74}$$

E a solução pode ser escrita como:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \phi_0) \tag{2.75}$$

$$X_0 = \sqrt{\left(C'\right)^2 + \left(C'\right)^2} \tag{2.76}$$

$$\phi_0 = tg^{-1}\left(-\frac{C_1'}{C_2'}\right) \tag{2.77}$$

Em que ϕ_0 é o ângulo de fase inicial do sistema e C_1' e C_2' são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais, $x_{(t=0)} = x_0$, e $\dot{x}_{(t=0)} = \dot{x}_0$, dando-nos:

$$C_1' = x_0 \tag{2.78}$$

$$C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \tag{2.79}$$

Substituindo as Equações 2.78 e 2.79 em 2.76 e 2.77 e, em seguida, substituindo em 2.75, teremos:

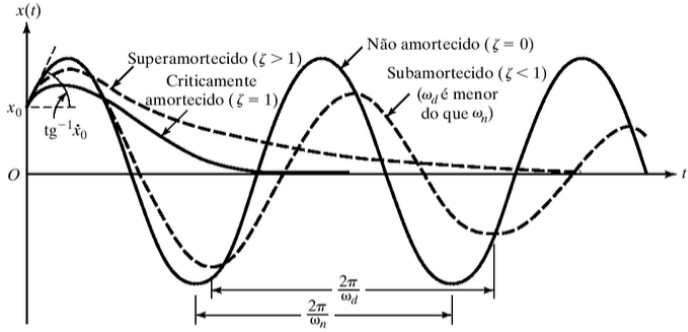
$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right\} \tag{2.80}$$

O movimento descrito por essa equação é um **movimento harmônico amortecido** com frequência angular dada por:

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{2.81}$$

Sendo que, devido ao fator $e^{-\zeta\omega_n t}$, a amplitude sofre um decréscimo, como mostra a Figura 2.19.

Figura 2.19 | Comparação entre os três casos de movimentos amortecidos



Fonte: Rao (2008, p. 69).

Pesquise mais

Para compreender melhor o passo a passo da determinação das equações de uma vibração subamortecida, dê uma olhada na página 67 do livro do Rao, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Caso 2: sistema criticamente amortecido, que ocorre quando $\zeta = 1$ ou $c = c_c$ ou $c/2m = \sqrt{k/m}$. Nesse caso, as raízes s_1 e s_2 são iguais:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \tag{2.82}$$

Portanto, a solução toma a seguinte forma:

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-\omega_n t} \tag{2.83}$$

Sendo que, para as condições iniciais $x_{(t=0)} = x_0 \quad \dot{x}_{(t=0)} = \dot{x}_0$, teremos:

$$C_1 = x_0 \tag{2.84}$$

E

$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \tag{2.85}$$

O que nos permitirá reescrever a Equação 2.83 como:

$$x(t) = \left[x_0 + \left(\dot{x}_0 + \omega_n x_0\right) t\right] e^{-\omega_n t} \tag{2.86}$$

Dessa forma, podemos perceber que, quando $t \to \infty$, o fator $e^{-\omega_n t} \to 0$ e o movimento tornam-se aperiódicos, também sendo representados pela Figura 2.19.

Caso 3: sistema superamortecido, que ocorre quando $\zeta > 1$ ou $c > c_c$ ou $c/2m > \sqrt{k/m}$, ou seja, quando o amortecimento é maior que o amortecimento crítico do sistema. Isso implica que ambas as raízes são reais e distintas, sendo $s_2 \ll s_1$, dadas por:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n < 0 \tag{2.87}$$

Podemos expressar o movimento por:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \tag{2.88}$$

E as constantes C_1 e C_2 podem ser encontradas a partir das condições iniciais $x_{(t=0)} = x_0$ e $\dot{x}_{(t=0)} = \dot{x}_0$, resultando em:

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{2.89}$$

E

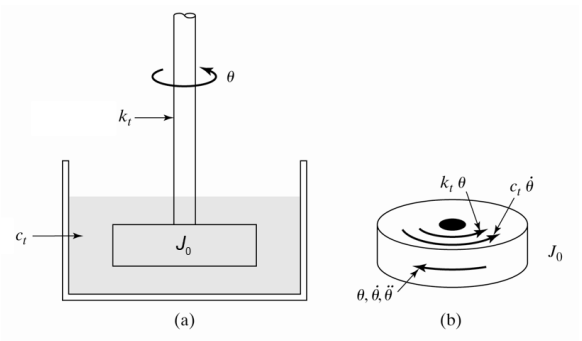
$$C_2 = \frac{-x_0 \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) - \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{2.90}$$

Esse movimento também pode ser percebido na Figura 2.19.

Sistema torcional com amortecimento viscoso

De acordo com a Figura 2.20, podemos observar o movimento vibratório de um sistema torcional de forma a perceber que o torque de amortecimento (T).

Figura 2.20 | Sistema torcional em meio fluido



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 71).

Esse torque é dado por:

$$T = -c_t \dot{\theta} \tag{2.91}$$

Em que c_t é a constante de amortecimento viscoso por torção e $\dot{\theta} = d\theta/dt$ é a velocidade angular do corpo em rotação. Assim podemos perceber a semelhança entre a composição dos movimentos translacional e torcional e inferir a equação do movimento analogamente ao realizado para o sistema translacional como sendo dada por:

$$J_0 \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0 \tag{2.92}$$

Sendo J_0 o momento de inércia de massa, k_t a constante de rigidez do sistema sobre torção, $\ddot{\theta}$ a aceleração angular sofrida pelo corpo e θ o deslocamento angular.

Podemos, ainda, dizer que a frequência angular de um sistema amortecido é dada por:

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{2.93}$$

Em que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.94}$$

E

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{ct}} = \frac{c_t}{2J_0\omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t J_0}} \tag{2.95}$$

Sendo c_{ct} a constante de amortecimento torcional crítica.

Decremento logarítmico

De acordo com Rao (2008, p. 68), "o decremento logarítmico representa a taxa de redução da amplitude de uma vibração livremente amortecida. É definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas". A razão pode ser representada como:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi_0)} \tag{2.96}$$

Sendo t_1 e t_2 os tempos correspondentes a duas amplitudes.

Se assumirmos que $t_2 = t_1 + \tau_d$, considerando que $\tau_d = 2\pi/\omega_d$, então a Equação 2.96 tomará a seguinte forma:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n \tau_d} \tag{2.97}$$

Como o decremento δ é o logaritmo natural (logaritmo neperiano), podemos escrever o decremento como:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \zeta\omega_n\tau_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}\cdot\frac{c}{2m} \tag{2.98}$$

Logo, podemos definir o coeficiente de amortecimento de um sistema a partir de seu decremento, ou seja:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} \tag{2.99}$$

Para um coeficiente de até 0,3, podemos assumir que:

$$\delta \simeq 2\pi\zeta \tag{2.100}$$

E com isso, o coeficiente de amortecimento passa a ser:

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \tag{2.101}$$

Energia dissipada

Nos sistemas viscosamente amortecidos, podemos dizer que a taxa de variação da energia com o tempo dW/dt é dada por:

$$\frac{dW}{dt} = Fv = -cv^2 = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{2.102}$$

Portanto, para um movimento harmônico simples descrito por $x(t) = X\text{sen}(\omega_d t)$, teremos:

$$\Delta W = \int_{t=0}^{(2\pi/\omega_d)} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot dt = \int_{t=0}^{2\pi} cX^2\omega_d\cos^2(\omega_d t)\cdot d(\omega_d t) = \pi c\omega_d X^2 \tag{2.103}$$

Ainda, podemos expressar a fração da energia total do sistema vibratório que é dissipada em cada ciclo, levando em consideração as energias potencial e cinética máximas. Essa fração é denominada de **capacidade de amortecimento específico**, que é dada por:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c\omega_d X^2}{\frac{1}{2}m\omega_d{}^2X^2} = 2\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)\left(\frac{c}{2m}\right) \tag{2.104}$$

Sendo iguais para pequenos amortecimentos e podendo ser expressa como:

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\delta \simeq 4\pi\zeta \tag{2.105}$$

Outra quantidade importante a ser levada considerada é a comparação entre a capacidade de amortecimento em materiais de engenharia, e para tal existe o **coeficiente de perda**, expresso por:

$$\text{Coeficiente de perda} = \frac{\left(\Delta W/2\pi\right)}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W} \tag{2.106}$$

Reflita

Um amortecimento viscoso é o mais comum apresentado em sistemas vibratórios? Podemos dizer que esse tipo de amortecimento é sempre inserido nos sistemas a partir das considerações de projeto ou pode ser encontrado intrinsicamente, sem a necessidade de ser imposto?

Vibração livre com amortecimento Coulomb

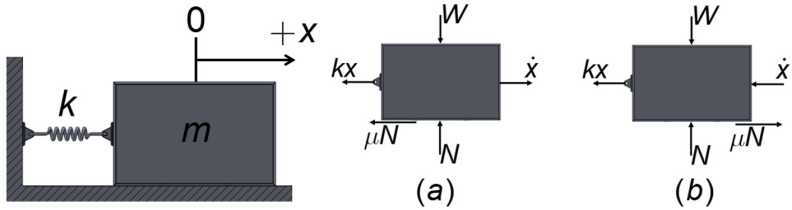
O amortecimento por atrito seco entre partes mecânicas de um sistema é conhecido como amortecimento Coulomb, sendo muito aplicado em estruturas vibracionais devido à sua simplicidade mecânica. A lei de Coulomb para atrito seco diz que, quando dois corpos estão em contato, a força F necessária para que deslizem é proporcional à força normal que age no plano de contato (RAO, 2008, p. 74), ou seja:

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg \tag{2.107}$$

Sendo N a força normal sobre o plano, que é igual ao peso da massa (W=mg), e μ o coeficiente de deslizamento ou atrito cinético.

Observando o sistema da Figura 2.21, tendo em vista que a forma de atrito varia com a direção da velocidade, temos de considerar dois possíveis casos.

Figura 2.21 | Sistema massa-mola com atrito



Fonte: elaborada pelo autor.

Caso 1: quando x é positivo e $\dot{x}$ é positivo ou quando x é negativo e $\dot{x}$ é positivo (massa se desloca da esquerda para a direita, de acordo com a Figura 2.21a). A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = -\mu N \tag{2.108}$$

A Equação 2.109 é uma equação diferencial não homogênea e possui solução:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_n t) - \frac{\mu N}{k} \tag{2.109}$$

Em que ω_n é a frequência angular natural do sistema e A_1 e A_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema.

Caso 2: quando x é positivo e $\dot{x}$ é negativo ou quando x é negativo e $\dot{x}$ é negativo (massa se desloca da direita para esquerda, de acordo com a Figura 2.21b). A equação de movimento se torna:

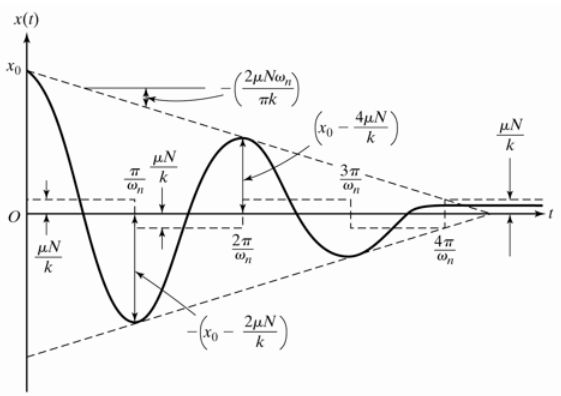
$$-kx + \mu N = m\ddot{x} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + kx = \mu N \tag{2.110}$$

E, portanto, a solução se torna:

$$x(t) = A_3 \cos(\omega_n t) + A_4 \operatorname{sen}(\omega_n t) + \frac{\mu N}{k} \tag{2.111}$$

Sendo que A_3 e A_4 são constantes a serem definidas pelas condições iniciais do sistema, e o termo $\mu N/k$ das equações é uma constante do deslocamento virtual da mola sob a força μN. Essas equações indicam que o termo $\mu N/k$ passa para $-\mu N/k$ e vice-versa, a cada meio ciclo, conforme demonstrado pela Figura 2.22.

Figura 2.22 | Movimento com amortecimento Coulomb



Fonte: Rao (2008, p. 74).

Se levarmos em consideração que $N=mg$, podemos expressar as Equações 2.108 e 2.110 em apenas uma equação da seguinte forma:

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \tag{2.112}$$

Sendo que $\operatorname{sgn}(y)$ é denominada de função *signum*, que assume valor igual a 1 quando $y > 0$, valor igual a -1 para $y < 0$ e valor igual a 0 com

$=0$. A Equação 2.112 é uma equação diferencial não linear e, portanto, não existe uma solução analítica simples. Se assumirmos as condições iniciais para $t = 0$ e dividirmos o eixo do tempo em segmentos separados por intervalos de tempo com direções e movimento diferentes ($\dot{x}=0$), poderemos expressar a amplitude ao final do n-ésimo meio-ciclo por meio da equação:

$$x_n = x_0 - r\frac{2\mu N}{k} \tag{2.113}$$

Em que r é o número de ciclos até o término do movimento que ocorre quando $x_n \leq \mu N/k$. Com isso, podemos escrever:

$$r \geq \left\{ \frac{x_0 - \dfrac{\mu N}{k}}{\dfrac{2\mu N}{k}} \right\} \tag{2.114}$$

Pesquise mais

Para compreender melhor o passo a passo do desenvolvimento da equação 2.114, dê uma olhada nas páginas 74 e 75 do livro do Rao, que pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. Vibrações mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Analogamente, podemos atribuir para um sistema torcional, quando este sofre com um torque de atrito constante, as equações de movimento:

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = -T \tag{2.115}$$

E

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = T \tag{2.116}$$

Sendo T o torque de amortecimento constante. A amplitude do movimento ao final do r-ésimo meio-ciclo é dada por:

$$\theta_r = \theta_0 - r\frac{2T}{k_t} \tag{2.117}$$

Em que θ_0 é o deslocamento inicial para $t = 0$, com $\dot{\theta}=0$. Logo, podemos chegar à equação do número de meio-ciclos como sendo:

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \dfrac{T}{k_t}}{\dfrac{2T}{k_t}} \right\} \tag{2.118}$$

Assimile

Todo sistema vibratório real apresenta amortecimento, seja por meio de fluido (amortecimento viscoso), atrito (amortecimento Coulomb) ou deformação (amortecimento por histerese).

Exemplificando

Para exemplificar o cálculo do coeficiente por atrito em relação à posição medida de massa, temos que um bloco de metal colocado sobre uma superfície irregular está ligado a uma mola e recebe um deslocamento inicial de 10 cm em relação à sua posição de equilíbrio. Após cinco ciclos de oscilação em 2 segundos, constata-se que a posição final do bloco de metal é 1 cm em relação à sua posição de equilíbrio. Qual será o coeficiente de atrito entre a superfície e o bloco?

Solução:

Visto que foi constatado que ocorreram cinco ciclos em 2 s, o período de oscilação é de 2/5 = 0,4 segundos, e, por consequência, a frequência de oscilação é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\tau_n} = \frac{2\pi}{0,4} = 15,708 \, \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

Sabe-se que a amplitude de vibração se reduz, em cada ciclo, de:

$$\frac{4\,\mu N}{k} = \frac{4\,\mu mg}{k}$$

Assim, a redução ao final de cinco ciclos será de 0,10 - 0,01 = 0,09 m:

$$5\left(\frac{4\,\mu mg}{k}\right) = 0,09 \rightarrow \mu = \frac{0,09\,k}{20\,mg}$$

Como $\omega_n = \sqrt{k/m}$, podemos escrever a equação como:

$$\mu = \frac{0,09\omega_n^{\,2}}{20g} = \frac{0,09\left(15,708\right)^2}{20\left(9,81\right)} = 0,1132$$

Portanto, o coeficiente de deslizamento ou atrito cinético entre a superfície e o bloco é igual a 0,1132.

Amortecimento por histerese

O amortecimento por histerese ocorre "devido ao atrito entre os planos internos que escorregam ou deslizam à medida que o material se deforma" (RAO, 2008, p. 77). Também é denominado amortecimento sólido ou estrutural.

Já vimos que, em um sistema massa-mola-amortecedor, a força necessária para o movimento é dada por:

$$F = kx + c\dot{x} \tag{2.119}$$

Em um movimento harmônico de:

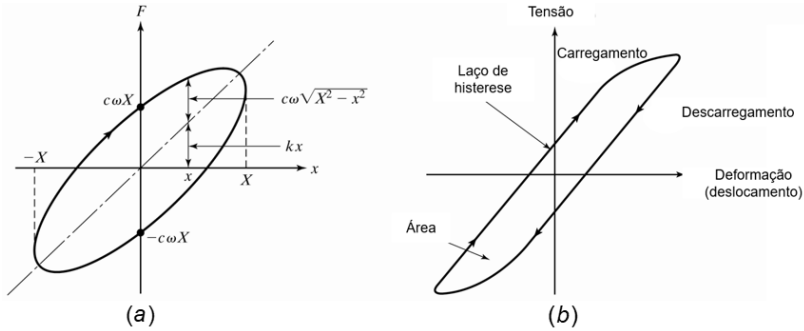
$$x(t) = X\text{sen}(\omega t) \tag{2.120}$$

A força pode ser escrita como:

$$F = kXsen(\omega t) + cX\omega\cos(\omega t) = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - (Xsen(\omega t))^2} = kx \pm \sqrt{X^2 - x^2} \tag{2.121}$$

Se construirmos um gráfico para analisarmos o comportamento dessa força, teremos algo como o demonstrado na Figura 2.23ª, e sabe-se que esse amortecimento gera um laço de histerese que se forma na curva tensão-deformação, como mostra a Figura 2.23b.

Figura 2.23 | Laço (a) força ***versus*** deslocamento e laço (b) tensão ***versus*** deformação



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 77).

A similaridade entre esses laços permite definir a constante de amortecimento por histerese, dado que o coeficiente de amortecimento é considerado como sendo inversamente proporcional à frequência, ou seja:

$$c = \frac{h}{\omega} \tag{2.122}$$

Em que h é a constante de amortecimento por histerese.

Pesquise mais

Dê uma olhada na página 74 do livro do Rao para conseguir mais informações sobre as definições das equações de vibração com amortecimento Coulomb e na página 77 para saber mais sobre as deduções analíticas e os métodos numéricos para solução do amortecimento por histerese. Esse livro pode ser encontrado em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Sem medo de errar

Lembre-se da nossa situação-problema em que você é o engenheiro de uma empresa fabricante de aviões, e o novo modelo de aeronave de grande porte está tendo problemas vibracionais. Podemos dizer que o sistema real possui suspensão para garantir maior conforto e confiança tanto na decolagem quanto no pouso, o que significa que existem amortecedores instalados para absorver qualquer impacto proveniente das condições da aeronave. Levando em conta que o avião apresenta uma massa de 45.000 kg para o pouso e que, quando toca o solo, sofre um deslocamento de 150 mm, foi possível calcular a rigidez do sistema como sendo $2{,}7\times10^{6}\,\mathrm{N/m}$, o que nos permitirá calcular o amortecimento crítico do avião, dado este importante para a equipe. Para o sistema de suspensão, devemos assumir um coeficiente de amortecimento de 0,8, pelo menos, a fim de garantimos uma pequena oscilação sem muito desconforto provindo de uma parada brusca.

Resolução

Para resolver esse sistema, primeiro temos que encontrar a constante de amortecimento crítico, fator importante para que consigamos dimensionar o amortecimento que será empregado no sistema. Podemos definir a constante de amortecimento crítico a partir da equação:

$$c_c = 2\,m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\cdot 45.000\sqrt{\frac{2{,}7\times10^{6}}{45.000}} = 697.137{,}00\,\mathrm{N\cdot m/s}$$

Assumindo um coeficiente de amortecimento de 0,8, como definido pelo padrão apresentado, sabemos que se trata de um sistema subamortecido, pois apresenta $\zeta<1$, e, dessa forma, podemos calcular o amortecedor que será empregado no sistema aplicando-se a razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Ou seja:

$$c = \zeta c_c = 0{,}8\cdot 697137 = 557709{,}6\,\mathrm{N\cdot m/s}$$

Com esses dados em mãos é possível definir a equação do deslocamento do sistema em função do tempo, usando a Equação 2.80 para sistemas subamortecidos, o que nos resultará em:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)+\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)\right\}$$

Assumindo as condições iniciais do sistema como sendo $x(t=0)=x\ =150$ mm e $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0=0$ e substituindo na equação de deslocamento em função do tempo, teremos:

$$x(t)=e^{-0,8\cdot 7,75t}\left\{150\cos\left(\sqrt{1-0,8^2}\cdot 7,75t\right)+\frac{0+0,8\cdot 7,75\cdot 150}{\sqrt{1-0,8^2}\cdot 7,75}\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-0,8^2}\cdot 7,75t\right)\right\}$$

$$x(t)=e^{-6,2t}\left\{150\cos\left(4,65t\right)+200\operatorname{sen}\left(4,65t\right)\right\}[\text{mm}]$$

Essa equação nos traz o decremento do deslocamento ao longo do tempo *t*. Assim, você pode dimensionar o deslocamento sofrido pelo sistema ao longo do tempo, e, com esses dados, a equipe de cálculos computacionais poderá elaborar um programa de cálculo que determinará todos os deslocamentos sofridos ao longo do tempo, chegando a conclusões como se esse fator de amortecimento é realmente o adequado para o sistema ou não.

Avançando na prática

Determinação da constante de amortecimento de um fluido

Descrição da situação-problema

A constante de amortecimento é um dado importante para o dimensionamento dos efeitos vibracionais amortecidos. Você é um engenheiro de um laboratório de vibrações mecânicas e foi incumbido de definir a constante de amortecimento de um fluido, dado que, para isso, utilizou um pêndulo simples de 1 kg. Durante o experimento, você inseriu o pêndulo em uma câmara a vácuo para medir a frequência natural de base que se mostrou de 0,5 Hz. Quando inseriu o aparato em meio fluido e o colocou em movimento, você pôde perceber que ele passou a oscilar com 0,45 Hz. Com base nessas observações, como você faria os cálculos para encontrar a constante de amortecimento desse fluido?

Resolução da situação-problema

Sabe-se que um pêndulo simples apresenta frequência angular natural dada por $\omega_n = \sqrt{g/l}$. Sabendo que, no vácuo, não possui amortecimento, podemos assumir que:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n$$

Ou seja,

$$\omega_n = 2\pi \cdot f_n = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \, \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

Portanto, o comprimento (l) do pêndulo é dado por:

$$= \frac{}{\omega^{\ 2}} = \frac{9{,}81}{\pi^2} = 0{,}9940 \text{ m}$$

Como a frequência amortecida é de 0,45 Hz, podemos usar a equação de frequência angular amortecida, $f_d = \frac{1}{2\pi}\omega_d$, para encontrar o coeficiente de amortecimento. Sendo assim, teremos:

$$\omega_d = 2\pi \cdot f_d = 2\pi \cdot 0{,}45 = 0{,}9\pi \, \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

$$\varnothing_d = \ _n\sqrt{1 - \ ^2}$$

Ou seja,

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega_n^{\ 2} - \omega_d^{\ 2}}{\omega_n^{\ 2}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 - (0{,}9\pi)^2}{\pi^2}} = 1{,}3694$$

Pela equação do movimento do pêndulo, temos que:

$$ml^2\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + mgl\theta = 0$$

O que nos dá uma equação característica:

$$ml^2s^2 + c_t s + mgl = 0$$

Que resulta nas raízes:

$$s_{1,2} = \frac{-c_t}{2ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_t}{2ml^2}\right)^2 - \frac{g}{l}}$$

Lembrando que o amortecimento crítico ocorre quando o radical se torna nulo, teremos:

$$\left(\frac{c_{ct}}{2ml^2}\right)^2 - \frac{g}{l} = 0 \rightarrow c_{ct} = 2ml^2\omega_n = 2\cdot 1\cdot 0{,}994^2\cdot\pi = 6{,}2080\,{}^{\mathrm{N\cdot m\cdot s}}\!/_{\mathrm{rad}}$$

Com isso, obtemos que:

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{ct}} \rightarrow c_t = c_{ct}\zeta = 6{,}208\cdot 1{,}3694$$

$$c_t = 8{,}5013\,{}^{\mathrm{N\cdot m\cdot s}}\!/_{\mathrm{rad}}$$

Isso nos permitiu encontrar a constante de amortecimento do fluido que poderá ser usada para definir os efeitos vibracionais de outros sistemas vibratórios submetidos a esse amortecimento viscoso.

Faça valer a pena

1. Existem basicamente três tipos de amortecimento que podem ser analisados em sistemas vibracionais. Sabe-se que o amortecimento é a dissipação de energia e quando ocorre por meio fluido é denominado _____, ocorrendo por deslizamento entre superfícies de contato denomina-se _____ e quando provém de deformação do material pode ser denominado de _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas do texto-base, respectivamente.

a) Amortecimento viscoso, amortecimento Coulomb e amortecimento por histerese.
b) Amortecimento Coulomb, amortecimento por histerese e amortecimento viscoso.
c) Amortecimento viscoso, amortecimento por histerese e amortecimento Coulomb.
d) Amortecimento Coulomb, amortecimento viscoso e amortecimento por histerese.
e) Amortecimento por histerese, amortecimento Coulomb e amortecimento viscoso.

2. Se um sistema massa-mola possui uma massa de 200 kg e uma rigidez de 1000 N/m, qual será o mínimo de amortecimento necessário para que o sistema não vibre? Em seguida, se aplicarmos um amortecedor de 450 Nm/s, qual seria o coeficiente de amortecimento do sistema?

Assinale a alternativa que traz os valores de c_c e ζ corretos.

a) $c_c \cong 894\,{}^{\mathrm{N\cdot m}}\!/_{\mathrm{s}}$ e $\zeta = 0{,}80$.
b) $c_c \cong 860\,{}^{\mathrm{N\cdot m}}\!/_{\mathrm{s}}$ e $\zeta = 0{,}50$.
c) $c_c \cong 894\,{}^{\mathrm{N\cdot m}}\!/_{\mathrm{s}}$ e $\zeta = 0{,}50$.
d) $c_c \cong 904\,{}^{\mathrm{N\cdot m}}\!/_{\mathrm{s}}$ e $\zeta = 0{,}80$.
e) $c_c \cong 596\,{}^{\mathrm{N\cdot m}}\!/_{\mathrm{s}}$ e $\zeta = 1{,}30$.

3. Os sistemas com amortecimento viscoso podem surgir de três formas diferentes. Sendo um sistema linear, massa-mola-amortecedor, com rigidez de 9.000 N/m, que possui uma massa de 10 kg e um amortecedor de 300 Nm/s, qual seria o tipo de amortecimento desse sistema?

Julgue qual é a alternativa que melhor descreve o amortecimento do sistema e assinale a alternativa correta.

a) O sistema é superamortecido, tendo em vista que $\zeta > 1$.
b) O sistema é subamortecido, tendo em vista que $\zeta > 1$.
c) O sistema é criticamente amortecido, tendo em vista que $\zeta = 1$.
d) O sistema é superamortecido, tendo em vista que $\zeta < 1$.
e) O sistema é subamortecido, tendo em vista que $\zeta < 1$.

Referências

HIBBELER, R. C. **Dinâmica:** mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2011. 591 p.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Unidade 3

Vibrações forçadas

Convite ao estudo

Caro aluno, você já parou para pensar como funcionam as diversas máquinas existentes? Imagine uma pequena furadeira manual usada para reparos (com certeza você já usou uma!). Essa pequena máquina contém um motor elétrico (ou seja, é uma máquina rotativa) e, portanto, apresentará vibração devido ao movimento do motor, que, na prática, sempre terá um desbalanceamento. Com isso, devemos ser capazes de analisar todos os tipos de sistemas, que apresentarão as mais diversas formas de vibração.

O objetivo desta unidade de ensino é que você se torne capaz de dimensionar e avaliar vibrações forçadas e com mais de um grau de liberdade. Para isso, vamos estudar a análise de vibrações forçadas de um grau de liberdade, depois a análise de vibrações forçadas com dois graus de liberdade, finalizando os estudos com vibrações forçadas com vários graus de liberdade.

Agora, pense que você é um engenheiro de uma multinacional fabricante de navios que atualmente está desenvolvendo um novo modelo de navio. Após desenvolver as condições de funcionamento do navio, a equipe passou a você os dados necessários para que você realize alguns cálculos a fim de dimensionar as vibrações que podem causar problemas estruturais no navio, dado que com tais cálculos será possível prever frequências vibracionais que devem ser evitadas e os efeitos que o navio pode sofrer durante o funcionamento.

Devido à complexidade desse problema, podemos dividi-lo em três partes. A primeira parte será responsável pela realização dos cálculos, aproximando o problema em um grau de liberdade para obter dados gerais. Em seguida, vamos dividir o problema em dois graus de liberdade, para assim obter algumas informações mais específicas de pontos-chave do navio. Por final, vamos observar o navio de forma mais ampla, tornando o problema o mais próximo possível da realidade, a fim de explicar outras características que não poderiam ser expressas por demasiadas simplificações.

Você já imaginou como devem ser tratados problemas de vibração provindas do funcionamento de máquinas? Saberia como resolver um problema vibracional por forças externas à máquina?

Nesta unidade vamos percorrer os conteúdos necessários para que possamos resolver e analisar diversos sistemas com vibrações forçadas, o que nos leva a um início de análise de vibrações forçadas com um grau de liberdade, compreendendo seu funcionamento e levando em conta as forças externas, como as forças vindas de uma base ou suporte, bem como as internas em sistemas autoexcitados. Após isso, veremos sistemas com dois e mais graus de liberdade com suas diferentes formas de análise e condições de estabilidade e instabilidade.

Respostas de um sistema

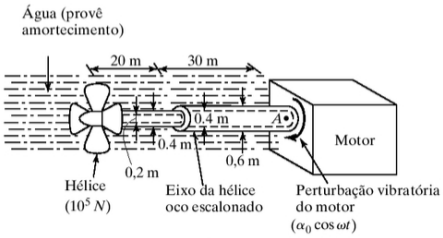
Diálogo aberto

Bem-vindo a mais uma seção de estudos sobre vibrações. Imagine que você está indo para o seu emprego em uma multinacional e, quando vai ligar seu carro, percebe que, quando você dá a partida no motor, o carro oscila brevemente e depois o motor apenas mantém uma vibração mínima, podendo ser ouvido até mesmo de dentro da cabine. Esse efeito é a vibração livre causada pela perturbação inicial devido ao arranque do motor, mas, como o sistema do automóvel é amortecido, essa vibração é dissipada, restando apenas a vibração provinda do funcionamento do motor, ou seja, uma vibração forçada.

Agora você é o engenheiro de uma multinacional fabricante de navios, responsável pelos cálculos de vibrações dessa empresa. Os dados do novo modelo do navio foram passados a você, para que realize alguns cálculos que permitirão que dimensione a vibração, algo que fará com que os outros engenheiros possam analisar os materiais empregados na construção do navio, dimensionar os esforços do sistema de propulsão, definir os tipos de elementos que serão usados, entre outras considerações.

Primeiramente, a equipe pede que você dimensione a resposta vibracional esperada para a hélice do navio na base do seu eixo, quando o motor exercer ao eixo um deslocamento harmônico angular de $0{,}07\ \text{sen}(296\ t)\ \text{rad}$. O intuito dessa análise é garantir à equipe os dados necessários para que ela possa checar se os materiais preditos estão adequados para o projeto. Para tanto, sabe-se que a água é um meio fluido que exerce ao sistema um fator de amortecimento de 0,1. Alguns dados da hélice enviados a você foram: o peso de $10^5\ \text{N}$ e o momento de inércia de massa polar de $10.000\ \text{kgm}^2$. Ainda, a hélice está ligada ao motor por um eixo oco, conforme mostrado pela Figura 3.1, com módulo de elasticidade transversal *G* do aço é 80 GPa.

Figura 3.1 | Sistema da hélice do navio



Fonte: Rao (2008, p. 133).

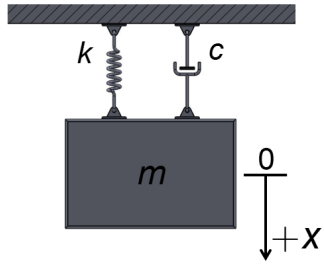
Com base nas informações que lhe foram dadas, você já conseguiria resolver tal problema? Já consegue imaginar como ocorrem as vibrações nesse sistema de propulsão?

Nesta seção vamos analisar as respostas vibracionais com excitação forçada externa e interna para sistemas com um grau de liberdade. Isso nos permitirá resolver diversos problemas de engenharia. Dedique-se aos estudos e boa sorte.

Não pode faltar

Tem-se que as vibrações forçadas ocorrem quando um sistema mecânico, ou estrutural, sofre com esforços externos, como mostra Rao (2018, p. 101). A natureza da excitação pode ser harmônica, não harmônica periódica e não periódica ou aleatória. A **resposta harmônica** é a denominação dada a um sistema submetido a uma excitação harmônica, enquanto que para a perturbação aplicada repentinamente é dado o nome de **resposta transitória**. Observe o sistema massa-mola-amortecedor apresentado pela Figura 3.2.

Figura 3.2 | Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: elaborada pelo autor.

Se aplicarmos uma excitação harmônica da forma $F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ ou; $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ ou; $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$, considerando que F_0 é a amplitude do esforço, ω é a frequência e ϕ é o ângulo de fase (que depende diretamente do valor de *F(t)* na condição inicial, onde $t = 0$, sendo normalmente zero) e considerando que o sistema apresentado na Figura 3.2 é viscosamente amortecido, sua equação de movimento será dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Essa equação é não homogênea, tendo sua solução geral *x(t)* como a soma da solução homogênea ($x_h(t)$) com a solução particular ($x_p(t)$). A solução homogênea representa a vibração livre presente no sistema, ou seja, é a solução da equação $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, vista anteriormente. A vibração

livre em um sistema amortecido se dissipará com o tempo, o que nos deixará apenas com a solução particular ($x_p(t)$).

Assimile

É importante lembrarmos que a **resposta harmônica** é a que ocorre quando um sistema é submetido a excitação harmônica; enquanto que, se a perturbação for não periódica, a resposta recebe o nome de **resposta transitória**.

Resposta de um sistema não amortecido submetido a força harmônica

Se uma força $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ agir em um sistema não amortecido, a equação de movimento tomará a seguinte forma:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \tag{3.2}$$

A solução homogênea para a Equação 3.2 de movimento será, assim como vimos anteriormente, dada por:

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \text{sen}(\omega_n t) \tag{3.3}$$

Dado que, nesse caso, a força é harmônica; portanto, a solução particular também será harmônica e terá a mesma frequência (ω) da força, tomando a seguinte forma.

$$x_p(t) = X \cos(\omega t) \tag{3.4}$$

Em que X é uma constante que denota a máxima amplitude de $x_p(t)$. Se substituirmos a Equação 3.4 em 3.2 e resolvermos para X, teremos:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\omega / \omega_n \right)^2} \tag{3.5}$$

Uma vez que $\delta_{st} = F_0 / k$ expressa a deflexão da massa sob a força F_0 , por vezes conhecida como **deflexão estática**. Lembrando que a solução total da Equação 3.2 (equação de movimento) é a soma das duas soluções, teremos:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \text{sen}(\omega_n t) + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos(\omega t) \tag{3.6}$$

Para definir as constantes da equação, usamos as condições iniciais do sistema, em que $x_{(t=0)} = x_0$ e $\dot{x}_{(t=0)} = \dot{x}_0$. Assim, teremos:

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \tag{3.7}$$

Consequentemente, resltando em:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{{}_0}{k - m\omega^2} \right) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{{}_0}{\omega_n} \right) \text{sen}(\omega_n t) + \frac{{}_0}{k - m\omega^2} \cos(\omega t) \tag{3.8}$$

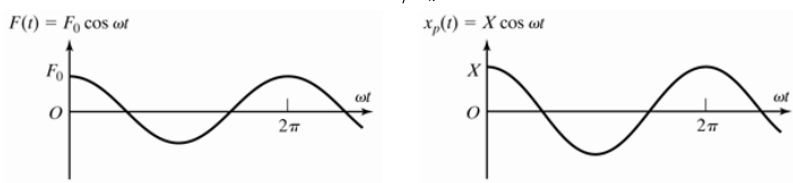
A amplitude máxima desse movimento pode ser expressa em uma razão, conhecida como **fator de ampliação** (que pode ser encontrado na literatura como *M* e *FA*), dada por:

$$M = FA = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\omega / \omega_n \right)^2} \tag{3.9}$$

Temos que a variação do fator de ampliação denota três casos distintos, sendo:

Caso 1: quando $0 < \omega / \omega_n < 1$, diz-se que o denominador da Equação 3.9 será positivo e a resposta particular estará em fase com a força externa, como mostrado pela Figura 3.3.

Figura 3.3 | Resposta harmônica quando $0 < \omega / \omega_n < 1$



Fonte: Rao (2008, p. 103).

Caso 2: quando $\omega / \omega_n > 1$, o denominador da Equação 3.9 é negativo, sendo, portanto, a solução expressa por:

$$x_p(t) = -X \cos(\omega t) \tag{3.10}$$

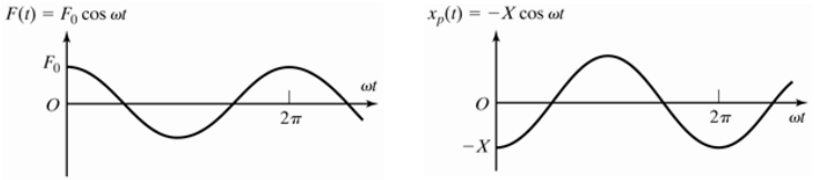
Em que a amplitude é redefinida para ser positiva, dada por:

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\omega / \omega_n \right)^2 - 1} \tag{3.11}$$

Como $x_p(t)$ e *F(t)* têm sinais opostos, apresentam uma defasagem de 180° entre si, o que pode ser percebido na Figura 3.4. Ainda, temos que, quando a razão ω / ω_n se torna muito maior que um, ou seja, tende a infinito

($\omega/\omega_n \to \infty$), teremos então a amplitude tendendo a zero ($X \to 0$).

Figura 3.4 | Resposta harmônica quando $\omega/\omega_n > 1$



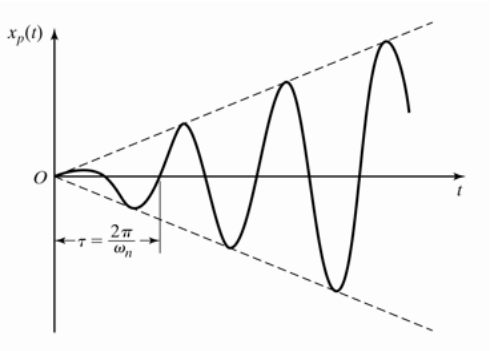
Fonte: Rao (2008, p. 103).

Caso 3: ocorre quando $\omega/\omega_n = 1$, ou seja, quando a frequência excitadora é igual à frequência natural. Com isso, a amplitude X se torna ∞, e essa condição é conhecida como ressonância, dado que sua resposta é obtida por:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) + \frac{\delta_{st}\omega_n t}{2} \operatorname{sen}(\omega_n t) \tag{3.12}$$

Assim, podemos considerar o efeito da ressonância como um ganho na amplitude, representado pela Figura 3.5.

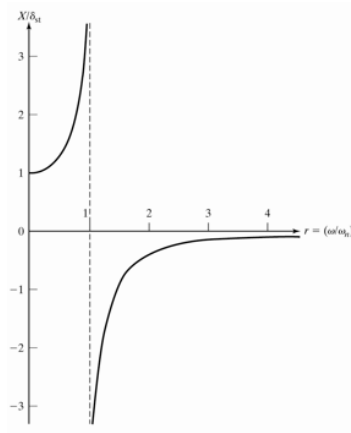
Figura 3.5 | Efeito da ressonância



Fonte: Rao (2008, p. 103).

Os três casos apresentados anteriormente podem ser representados pelo gráfico do fator de ampliação mostrado na Figura 3.6, no qual é possível perceber que quanto mais a razão de frequências se aproxima de 1, mais a amplitude tem um aumento de valor.

Figura 3.6 | Fator de ampliação em sistemas não amortecidos



Fonte: Rao (2008, p. 103).

Resposta de um sistema amortecido à força harmônica

Tem-se que um sistema massa-mola viscosamente amortecido submetido a uma força harmônica terá a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{x} + cx + kx = F_0 \cos(\omega t) \tag{3.13}$$

Para tanto, de acordo com Hibbeler (2011, p. 525), existirá uma solução homogênea que, representando a vibração livre do sistema, tenderá a se dissipar com o tempo, restando apenas a solução particular da Equação 3.13 para ser analisada, dada por:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t + \phi) \tag{3.14}$$

Sendo X e ϕ constantes a serem determinadas como:

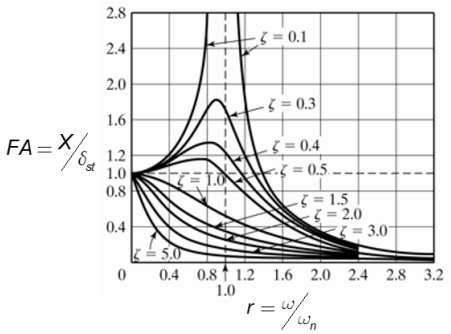
$$X = \frac{F_0}{\left[\left(k - m\omega^2\right)^2 + c^2\omega^2\right]^{1/2}} \text{ e } \phi = tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \tag{3.15}$$

Lembrando que $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/c_c$, $\delta_{st} = F_0/k$ e $r = \omega/\omega_n$, podemos substituir para X e ϕ, obtendo o fator de ampliação (X/δ_{st}) e o ângulo de fase como sendo:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}} \text{ e } \phi = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{3.16}$$

Com base na Figura 3.7 podemos observar os efeitos do amortecimento para o gráfico de ampliação, diminuindo o efeito da ressonância e inibindo o ganho de amplitude.

Figura 3.7 | Fator de amplitude amortecido



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 106).

Reflita

É possível perceber o quão diferente são os comportamentos dos sistemas vibracionais livre e amortecido. No entanto, você acha que o amortecimento anula a ressonância ou ela é apenas atenuada?

Vibração com amortecimento Coulomb

Tem-se que o movimento vibratório de um sistema com amortecimento Coulomb submetido a uma força harmônica $F(t) = \text{sen}(\omega t)$ é expressa pela seguinte equação:

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t) \tag{3.17}$$

De acordo com Rao (2008, p. 115), apesar de a solução da Equação 3.17 ser muito complicada de se obter, podemos simplificá-la, tendo em mente que, se a força de atrito for grande, o movimento será descontínuo, e se a força de atrito for pequena comparada a F_0, podemos aproximar o amortecimento devido a esse atrito à energia dissipada por um amortecedor viscoso equivalente, durante um ciclo completo. Assim, é dito que a energia dissipada pelo atrito é dada por:

$$\Delta W = 4\mu NX \tag{3.18}$$

Em que μ é o coeficiente de atrito cinético, N é a força normal do sistema e X é a amplitude. Assim, energia dissipada por um amortecimento viscoso é dada por:

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \tag{3.19}$$

Em que c_{eq} denota a constante de amortecimento viscoso equivalente. Igualando as Equações 3.18 e 3.19, teremos:

$$4\mu NX = \pi c_{eq} \omega X^2 \rightarrow c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \tag{3.20}$$

Sendo assim, podemos resolver a solução particular $x_p(t) = X\text{sen}(\omega t - \phi)$ a fim de se encontrar a amplitude, que é dada por:

$$X = \frac{F_0}{\left[\left(\ - \ \omega^2\right)^2 + \left(\ _{eq}\omega\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{F_0/k}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}\right)^2 + \left(2\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{3.21}$$

Com

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} = \frac{4\mu N}{2m\omega_n \pi \omega X} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega_n \omega X} \tag{3.22}$$

Substituindo 3.22 em 3.21, temos que:

$$X = \frac{F_0}{k}\left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{3.23}$$

Para evitarmos valores imaginários de X e ϕ, devemos atribuir algumas condições para a utilização dessa equação, que, conforme já foi dito, deve ter a força de atrito menor que a amplitude da força harmônica (F_0). As condições são:

$$1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right) > 0 \ \text{ ou } \ \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}.$$

Se obedecermos a essas condições, permaneceremos dentro do campo dos valores reais e racionais tanto para a amplitude quanto para o ângulo de fase, sendo que este último é dado por:

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{c_{eq}\omega}{k - m\omega^2}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta_{eq}\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\dfrac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}}\right) \tag{3.24}$$

Substituindo 3.23 em 3.24 teremos:

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}}\right] \tag{3.25}$$

Vibração forçada com amortecimento por histerese

Conforme já vimos, o amortecimento por histerese dissipa a energia do movimento vibratório a partir da deformação do sistema. Se uma força harmônica $F(t) = F_0 \mathrm{sen}(\omega t)$ for aplicada a um sistema submetido a esse tipo de amortecimento, teremos a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \mathrm{sen}(\omega t) \tag{3.26}$$

Dado que $(\beta k/\omega)\dot{x} = (h/\omega)\dot{x}$ expressa a força de amortecimento por histerese. Assim, obtemos a amplitude e o ângulo de fase para a solução particular $x_p(t) = X\mathrm{sen}(\omega t)$, como sendo:

$$X = \frac{F_0}{k\left[\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)^2 + \beta^2\right]^{1/2}} \tag{3.27}$$

E

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\beta}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)}\right] \tag{3.28}$$

O amortecimento viscoso é o mais simples para ser utilizado na prática, visto que apresenta equações de movimento lineares. Nos casos de amortecimento Coulomb, por histerese e outros amortecimentos, mesmo que sendo complexos, podemos definir uma constante de amortecimento viscoso equivalente, assim como apresentado anteriormente (RAO, 2008, p. 118).

Pesquise mais

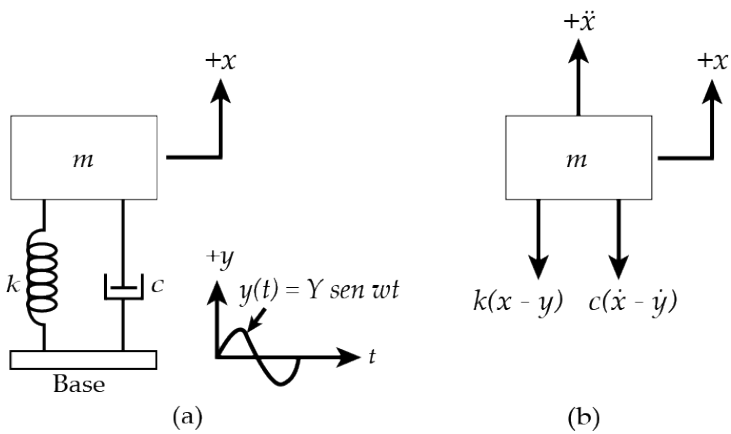
Para saber mais sobre os equacionamentos e as definições dos movimentos amortecidos por amortecimento Coulomb e histerese, dê uma olhada nas páginas 115 a 118 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Resposta a um sistema amortecido com movimento harmônico de base

De acordo com Rao (2008, p. 110), é muito comum os sistemas vibratórios serem excitados pela base ou suporte. A Figura 3.8(a) mostra um sistema com vibração de base, sendo *y(t)* o deslocamento da base e *x(t)* o deslocamento da massa em relação à base. Tem-se que o alongamento da mola será $x - y$ e a velocidade relativa será $\dot{x} - \dot{y}$, conforme pode ser percebido pelo diagrama de corpo livre apresentado na Figura 3.8(b).

Figura 3.8 | Movimento harmônico de base



Fonte: Rao (2008, p. 111).

Com isso, a equação de movimento passa a ser:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{3.29}$$

Se tivermos um deslocamento $y(t) = Y\text{sen}(\omega t)$ vindo da base, então a Equação 3.32 torna-se:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY\text{sen}(\omega t) + c\omega Y\cos(\omega t) = A\text{sen}(\omega t - \alpha) \tag{3.30}$$

Uma vez que $A = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$ e $\alpha = \text{tg}^{-1}(-c\omega/k)$. Podemos perceber que a excitação da base é análoga à imposição de uma força de amplitude A a um sistema; portanto, sua solução será:

$$x_p(t) = \frac{Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{1/2}}\text{sen}(\omega t - \phi_1 - \alpha) \tag{3.31}$$

Em que:

$$\phi_1 = \text{tg}^{-1}\left[\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right] \tag{3.32}$$

Se aplicarmos identidades trigonométricas, podemos reescrever a Equação 3.31 como sendo:

$$x_p(t) = X\text{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.33}$$

Portanto, X e ϕ são dados por:

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2} \tag{3.34}$$

E

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left[\frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (\omega c)^2}\right] = \text{tg}^{-1}\left[\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right] \tag{3.35}$$

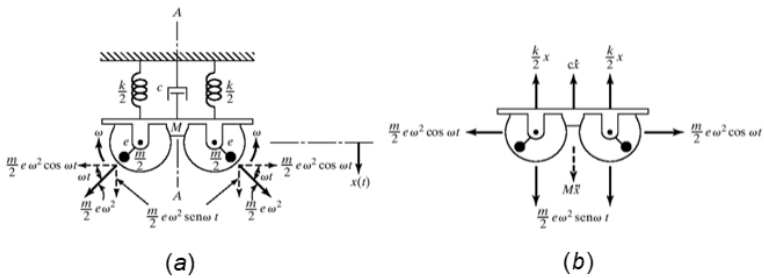
Resposta de um sistema amortecido ao desbalanceamento rotativo

O desbalanceamento é uma das principais causas de vibrações em máquinas rotativas. Nesse tipo de sistema, consideramos a massa total do sistema como sendo M, e $m/2$ o valor das massas de desbalanceamento que

giram a uma velocidade angular ω, conforme pode ser observado na Figura 3.9(a). Com isso, as massas geram uma força centrifuga $me\omega^2/2\omega$ que causará uma vibração na massa *M*. No sistema apresentado, tem-se que a simetria *A – A* garante que a oscilação ocorra somente no eixo vertical com força periódica $F(t) = me\omega^2 \text{sen}(\omega t)$, e com isso a equação de movimento se torna (RAO, 2008, p. 114):

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \text{sen}(\omega t) \qquad (3.36)$$

Figura 3.9 | Vibração por desbalanceamento rotativo



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 114).

A resposta para essa equação continua sendo $x_p(t) = X\text{sen}(\omega t - \phi)$, e ω_n passa a ser $\sqrt{k/M}$. Sendo assim, a amplitude toma a forma:

$$X = \frac{me\omega^2}{\left[\left(k - M\omega^2\right)^2 + \left(c\omega\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (3.37)$$

E

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - M\omega^2}\right) \qquad (3.38)$$

Definindo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, podemos reescrever 3.37 e 3.38 como sendo:

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\left[\left(1 - r^2\right)^2 - \left(2\zeta r\right)^2\right]^{1/2}} \quad \text{e} \quad \phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \qquad (3.39)$$

Pesquise mais

Para saber mais sobre os equacionamentos e as definições de desbalanceamento rotativo, dê uma olhada nas páginas 113 a 115 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Com isso, podemos afirmar que:

A ressonância é afetada pelo amortecimento.

Impondo-se velocidades muito altas, o amortecimento é desprezível.

Para $0<\zeta<1/\sqrt{2}$, temos a ocorrência do máximo de MX/me quando a solução nos dá que $r=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}>1$, assim:

$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{máx}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.40}$$

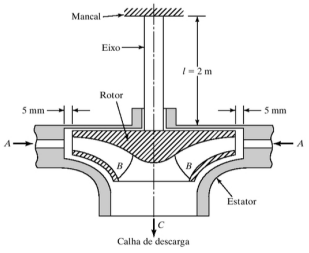
Portanto, os picos ocorrem à direita da ressonância de $r = 1$.

Para $\zeta>1/\sqrt{2}$, temos que $\left(\frac{MX}{me}\right)$ não atinge um máximo; seu valor cresce de 0 a 1 com $r=0$ e $r\to\infty$, respectivamente.

Exemplificando

O diagrama esquemático de uma turbina hidráulica Francis é mostrado na Figura 3.10, no qual a água escoa de *A*, passa pelas pás *B* e desce até a pista de descarga *C*. O rotor tem uma massa de 195 kg e um desbalanceamento (*me*) de 3,5 kg.mm. A folga radial entre o rotor e o estator é de 5 mm. A turbina opera na faixa de velocidade de 600-6000 rpm. Podemos admitir que o eixo de aço suporta o rotor e está fixado nos mancais. Determine o diâmetro do eixo de modo que o rotor fique sempre afastado do estator em todas as velocidades de operação da turbina. Suponha que o amortecimento seja desprezível.

Figura 3.10 | Turbina hidráulica Francis



Fonte: Rao (2008, p. 114).

Solução: podemos encontrar a amplitude máxima do desbalanceamento a partir da Equação 3.38. Considerando o amortecimento desprezível, temos que:

$$X = \frac{me\omega^2}{\left[\left(k - M\omega^2\right)^2 + \left(0\omega\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{me\omega^2}{\left(k - M\omega^2\right)} = \frac{me\omega^2}{k\left(1 - r^2\right)}$$

Em que $me = 3{,}5\ \mathrm{kg \cdot mm}$, $M = 195\ \mathrm{kg}$ e o valor-limite de $X = 5\ \mathrm{mm}$. O valor de ω está na faixa de:

$$600 \times \frac{2}{60} = 20\ \ \mathrm{rad/s} \quad \text{a} \quad 6.000 \times \frac{2\pi}{60} = 200\pi\ \mathrm{rad/s}$$

Enquanto que $\omega_n = \sqrt{k/M} = \sqrt{k/195} = 0{,}0716\sqrt{k}\ \mathrm{rad/s}$, se k estiver em N/m. Para $\omega = 20\pi\ \mathrm{rad/s}$ teremos:

$$0{,}005 = \frac{\left(3{,}5 \times 10^{-3}\right) \times \left(20\pi\right)^2}{k\left[1 - \dfrac{\left(20\pi\right)^2}{\left(0{,}0716\sqrt{k}\right)^2}\right]} = \frac{1{,}4\pi^2}{k - 7{,}8 \times 10^4 \pi^2} \rightarrow k = 7{,}83 \times 10^4 \pi^2\ \mathrm{N/m}$$

Para $\omega = 200\pi\ \mathrm{rad/s}$ teremos:

$$0{,}005 = \frac{\left(3{,}5 \times 10^{-3}\right) \times \left(200\pi\right)^2}{k\left[1 - \dfrac{\left(200\pi\right)^2}{\left(0{,}0716\sqrt{k}\right)^2}\right]} = \frac{200\pi^2}{k - 7{,}8 \times 10^6 \pi^2} \rightarrow k = 7{,}8 \times 10^6 \pi^2\ \mathrm{N/m}$$

Pela Figura 3.10 podemos perceber que, se $r \rightarrow \infty$ a amplitude de vibração do eixo pode ser minimizada. Para isso, sendo $r = \omega/\omega_n$ e sabendo que $\omega_n = \sqrt{k/m}$, teremos que ter uma rigidez k pequena. Isso pode ser conseguido selecionando o valor de k como sendo $k = 7{,}83 \times 10^4 \pi^2\ \mathrm{N/m}$, tendo em vista que a rigidez de uma viga de secção circular com massa na extremidade é dada por:

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3}\left(\frac{\pi d^4}{64}\right)$$

Podemos determinar o diâmetro do eixo como sendo:

$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} = \frac{(64)(7{,}83\times10^4\pi^2)(2^3)}{3\pi(2{,}07\times10^{11})} = 2{,}0281\times10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

Ou seja,

$$d = 0{,}11934\ \mathrm{m} = 119{,}34\ \mathrm{mm}$$

Assim, teremos que ter um eixo com diâmetro de 119,34 mm para garantir que o deslocamento vibracional se mantenha dentro de uma amplitude de 5 mm, garantindo assim a integridade do sistema.

Autoexcitação é bem comum em máquinas

De acordo com Rao, podemos definir como autoexcitação:

> A força que age sobre um sistema vibratório normalmente é externa ao sistema e independente do movimento. Todavia, há sistemas para os quais a força excitadora é função dos parâmetros de movimento do sistema, como deslocamento, velocidade ou aceleração. Tais sistemas são denominados sistemas vibratórios auto-excitados, visto que o próprio movimento produz a força excitadora. A instabilidade de eixos rotativos, a tremulação de pás de turbinas, a vibração de tubulações induzida pelo escoamento de fluido, a vibração nas rodas de um automóvel e o movimento aerodinâmico induzido nas pontes são exemplos típicos de vibrações auto-excitadas. (RAO, 2008, p. 119)

Análise de estabilidade dinâmica

Um sistema é dinamicamente estável se o movimento convergir ou permanecer estável com o tempo. Porém, se a amplitude do deslocamento aumentar continuamente com o tempo, o sistema será dinamicamente instável (isso ocorre devido à autoexcitação que alimenta o sistema com energia). Para exemplificar, vejamos um sistema amortecido com um grau de liberdade:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.41}$$

Se admitirmos uma solução $x(t) = Ce^{st}$, que já conhecemos, teremos uma equação característica dada por:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{3.42}$$

Resultando nas seguintes raízes:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2} \tag{3.43}$$

Assim, o movimento se torna aperiódico e divergente se as raízes forem reais e positivas, dado que essa condição pode ser evitada se *k/m* e *c/m* forem positivos. Para analisar essa condição, teremos que expressar as raízes como sendo:

$$s_1 = p + iq \quad \text{e} \quad s_2 = p - iq > \tag{3.44}$$

Uma vez que *p* e *q* são números reais, de modo que:

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{3.45}$$

As Equações 3.44 e 3.45 nos resultarão que:

$$\frac{c}{m} = -(\breve{}_1 + {}_2) = -2 \qquad \text{e} \qquad \frac{k}{m} = s_1 s_2 = p^2 + q^2 \tag{3.46}$$

Essas equações mostram que *c/m* será positiva para todo valor de *p* negativo e que *k/m* deve ser positivo para $p^2 + q^2$. Assim, o sistema será dinamicamente estável se *c* e *k* forem positivas (RAO, 2008, p. 119).

Pesquise mais

Estude mais sobre estabilidade e instabilidade dinâmica nas páginas 119-123 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

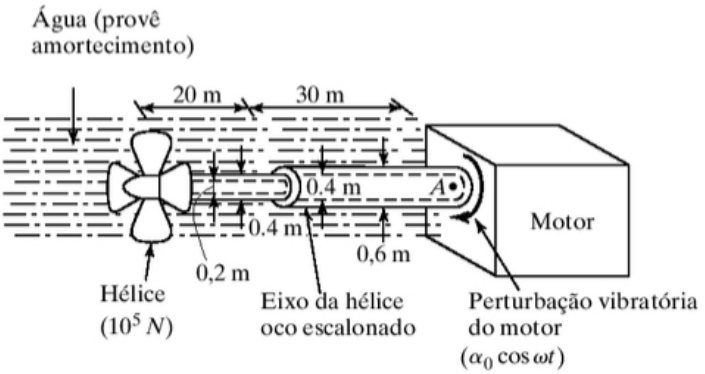
RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Sem medo de errar

Você, engenheiro de uma fabricante de navios, recebeu uma tarefa da equipe de engenharia para dimensionar a vibração torcional da hélice do novo modelo de navio que estão projetando, e com os resultados de sua análise a equipe poderá pensar em estratégias para resolver problemas, caso necessário. Os primeiros cálculos pedidos foram para a resposta vibracional esperada da hélice do navio na base do eixo, quando o motor exercer um

deslocamento harmônico angular de $0{,}07\text{sen}(296t)$ rad. Para efetuar os cálculos, sabe-se que a água exerce ao sistema um fator de amortecimento de 0,1. E a equipe lhe deu os seguintes dados da hélice: peso de 10^5N e o momento de inércia de massa polar de $10.000\ \text{kgm}^2$, dado que a hélice está ligada ao motor por um eixo oco de aço, conforme mostrado na Figura 3.1. O módulo de elasticidade transversal *G* do aço é 80 GPa.

Figura 3.1 | Sistema da hélice do navio



Fonte: Rao (2008, p. 133).

Resolução:

Se fizermos uma relação com o movimento vindo da base, para um sistema torcional, podemos escrever a equação do movimento vibracional como sendo:

$$J_0\ddot{\theta} + c_t\left(\dot{\theta} - \dot{\alpha}\right) + k_t\left(\theta - \alpha\right) = 0$$

Em que θ é o deslocamento angular do eixo e α é o deslocamento angular da base dada em $\alpha_0\text{sen}(\omega t)$. A solução particular para esse sistema nos dá:

$$\theta_p(t) = \Theta\text{sen}(\omega t - \phi)$$

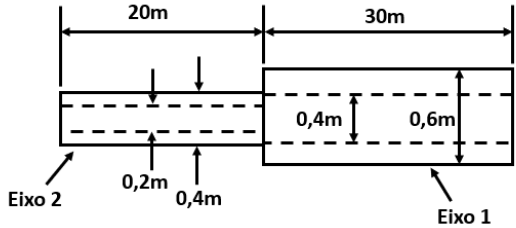
Que nos resulta na resposta harmônica dada pelas equações:

$$\Theta = \alpha_0\left[\frac{k_t^{\,2} + \left(c_t\omega\right)^2}{\left(k_t - J_0\omega^2\right)^2 + \left(c_t\omega\right)^2}\right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \phi = \text{tg}^{-1}\left[\frac{J_0 c_t \omega^3}{k_t\left(k_t - J_0\omega^2\right) + \left(\omega c_t\right)^2}\right]$$

Sendo que $J_0 = 10^4\,\text{kgm}^2$, $\zeta_t = 0{,}1$, e $\omega = 296\,\text{rad/s}$. Ainda, podemos

encontrar a rigidez torcional dos eixos aplicando a equação dada por $k_t = \frac{GJ}{l}$, sendo G o modulo de elasticidade transversal, J o momento de inércia do eixo e l o comprimento do eixo. Observando o esquema mostrado na Figura 3.11, podemos aplicar a equação da rigidez como se segue.

Figura 3.11 | Características do eixo



Fonte: elaborada pelo autor.

$$(k_t)_1 = \frac{G_1 J_1}{l_1} = \frac{80\times10^9\left(\frac{\pi}{32}\left(0,6^4 - 0,4^4\right)\right)}{30} = 27,2272\times10^6\ \mathrm{N\cdot m}/\mathrm{rad}$$

$$(k_t)_2 = \frac{G_2 J_2}{l_2} = \frac{80\times10^9\left(\frac{\pi}{32}\left(0,4^4 - 0,2^4\right)\right)}{20} = 9,4248\times10^6\ \mathrm{N\cdot m}/\mathrm{rad}$$

Aplicando a equivalência de molas em série, teremos:

$$k_t = \frac{(k_t)_1 (k_t)_2}{(k_t)_1 + (k_t)_2} = \frac{\left(27,2272\times10^6\right)\cdot\left(9,4248\times10^6\right)}{27,2272\times10^6 + 9,4248\times10^6} = 7,0013\times10^6\ \mathrm{N\cdot m}/\mathrm{rad}$$

Assim, como a equação de amortecimento pode ser escrita como $c = \zeta\left(2\sqrt{mk}\right)$, podemos fazer a seguinte relação com movimento torcional:

$$c_t = \zeta\left(2\sqrt{J_0 k_t}\right) = 0,1\left(2\sqrt{10^4\cdot\left(7,0013\times10^6\right)}\right) = 52919,8624\ \mathrm{N\cdot m\cdot s}/\mathrm{rad}$$

Agora, substituindo os valores encontrados nas equações de resposta harmônica, teremos:

$$\Theta = 0,07\left[\frac{\left(7,0013\times10^6\right)^2 + \left(\left(5,2920\times10^4\right)\cdot(296)\right)^2}{\left(\left(7,0013\times10^6\right) - \left(10^4\right)\cdot\left(296^2\right)\right)^2 + \left(\left(5,2920\times10^4\right)\cdot(296)\right)^2}\right]^{1/2}$$

$$\Theta \approx 1{,}382 \times 10^{-3}\,\text{rad}$$

e

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left[\frac{\left(10^4\right)\cdot\left(5{,}2920\times10^4\right)\cdot\left(296^3\right)}{\left(7{,}0013\times10^6\right)\cdot\left[\left(7{,}0013\times10^6\right)-\left(10^4\right)\cdot\left(296^2\right)\right]+\left(296\cdot\left(5{,}2920\times10^4\right)\right)^2}\right]$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(-2{,}35013\right) = -66{,}9498^\circ = -1{,}1685\text{rad}$$

Com essa amplitude de deslocamento e esse ângulo de fase, podemos escrever a solução particular como sendo:

$$\theta_p(t) = \left(1{,}382\times10^{-3}\right)\text{sen}\left(296t + 1{,}1685\right)$$

Por fim, com esses dados a equipe poderá concluir alguns cálculos do projeto e chegar a valores importantes para dar continuidade aos testes.

Avançando na prática

Projeto de uma esteira vibratória

Descrição da situação-problema

Você e sua equipe de engenheiros desenvolveram uma nova esteira vibratória para seleção de graus variados, dado que ela foi construída para gerar uma amplitude de vibração de 20 mm quando vazia, por terem determinado durante os cálculos do projeto que essa seria a amplitude máxima para garantir a integridade da máquina. Porém, quando o protótipo foi construído, percebeu-se que a esteira estava apresentando amplitudes maiores que a definida. Para garantir o bom funcionamento da esteira, você foi incumbido de definir a nova massa da esteira para que ela opere na amplitude desejada, sabendo que ela se encontra instalada sobre quatro molas de 1.200 N/m cada e que a máquina trabalha com uma amplitude de força harmônica de 120 N a 6 Hz de frequência.

Resolução da situação-problema

Para resolver o problema apresentado, precisamos primeiramente perceber que se trata de um sistema forçado sem amortecimento, o que nos remete à seguinte equação de amplitude:

$$X = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\omega / \omega_n \right)^2}$$

Rearranjando a equação, temos que:

$$\frac{\delta_{st}}{X} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

Lembrando que $\omega_n = \sqrt{k/m}$, podemos encontrar a massa aplicando $m = k / \omega_n^{\ 2}$. Sendo assim, devemos encontrar o valor de ω_n para então encontrar a massa. Considerando que $\delta_{st} = F_0 / k$, teremos que:

$$\frac{\delta_{st}}{X} = \frac{F_0 / k}{X} = \frac{120 / 4.800}{20 \times 10^{-3}} = 1,25$$

Em que $k = 4 \cdot 1.200 = 4.800$.

Mas temos que:

$$\frac{\delta_{st}}{X} = 1,25 = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

Portanto, teremos que:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \left(1 - 1,25 \right) \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = -0,25$$

Observe que o valor é negativo, o que só poderia ser verdade se o quadrado da razão de frequências fosse negativo, mas sabemos que não é possível, portanto, lembrando que a variação do fator de amplificação permite que invertamos o denominador para garantir um valor positivo, teremos então:

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\omega / \omega_n \right)^2 - 1} \rightarrow \frac{\delta_{st}}{X} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - 1$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - 1 = 1,25 \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = 1,25 + 1 = 2,25$$

Assim temos um valor positivo que nos permite dar continuidade aos cálculos.

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

Assim:

$$\omega_n = \frac{\omega}{1,5} = \frac{6 \cdot 2\pi}{1,5} = 25,23 \, \text{rad}/\text{s}$$

Utilizando a equação deduzida anteriormente teremos:

$$m = k/\omega_n^{\,2} = \frac{4.800}{(25,23)^2} = 7,54\text{kg}$$

Ou seja, para mantermos a esteira vazia oscilando com uma amplitude de 20 mm, precisaremos de uma esteira de 7,54 kg.

Faça valer a pena

1. Um sistema vibratório pode apresentar diversos tipos de excitações. _____ é a denominação dada a um sistema submetido a excitação harmônica, enquanto que para a perturbação não periódica é dado o nome de _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas, respectivamente.
a) Resposta harmônica e resposta não harmônica.
b) Resposta transitória e resposta não transitória.
c) Resposta transitória e resposta harmônica.
d) Resposta harmônica e resposta transitória.
e) Resposta harmônica e resposta periódica.

2. Um motor em funcionamento gera uma força harmônica devido ao desbalanceamento de $F(t) = 400\text{sen}(33,45t)\text{N}$. Tem-se que o motor tem uma massa de 500 kg e está montado sobre uma superfície suportada por 4 molas de 2.000 N/m cada. Determine a razão de frequências a que o sistema está operando.
Assinale a alternativa que representa a razão de frequência do sistema.

a) $\frac{\omega}{\omega_n} = 10,3625 \, \text{rad}/\text{s}$.

b) $\frac{\omega}{\omega_n} = 8,3625 \, \text{rad}/\text{s}$

c) $\frac{\omega}{\omega_n} = 12,25 \, \text{rad}/\text{s}$

d) $\frac{\omega}{\omega_n} = 7,35 \, \text{rad}/\text{s}$

e) $\frac{\omega}{\omega_n} = 4,3625 \, \text{rad}/\text{s}$

3. Um sistema massa-mola com massa de 10 kg e rigidez de 4.000 N/m se desloca sobre uma superfície plana. Se o sistema estiver submetido a uma força periódica de $F(t) = 97,9874\text{sen}(12,57t)$, qual seria o coeficiente de atrito da superfície para que a amplitude de deslocamento não passe de 40 mm?

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto do coeficiente de atrito.

a) $\mu \cong 0,12$.
b) $\mu \cong 0,20$.
c) $\mu \cong 0,06$.
d) $\mu \cong 0,012$.
e) $\mu \cong 0,10$.

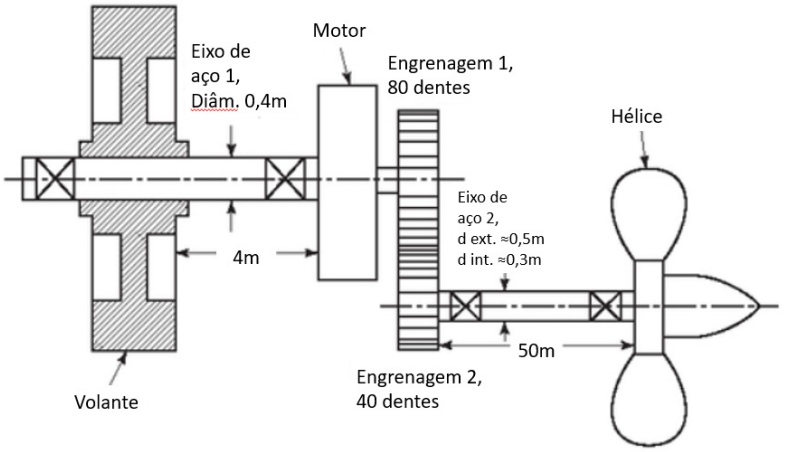
Vibrações sob condições forçantes gerais e sistemas com dois graus de liberdade

Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção vamos focar nossa análise em problemas mais complexos, pois os sistemas vibracionais podem ter mais de um grau de liberdade. Imagine que você está dirigindo uma motocicleta e passa por uma pedra na estrada. Note que a motocicleta não oscila puramente para cima e para baixo. Porém, as suspensões podem fazer como que a oscile alternadamente, primeiro com a roda da frente e depois a traseira, o que faria com que ela rotacionasse em torno do seu centro de gravidade, trazendo uma coordenada linear e uma angular para serem analisadas, totalizando em dois graus de liberdade.

Agora, pense que você é um engenheiro de uma multinacional fabricante de navios, que atualmente está desenvolvendo um novo modelo de navio. Após desenvolver as condições de funcionamento do navio, a equipe passou a você os dados necessários para que você realize alguns cálculos para dimensionar as vibrações que podem causar problemas. Neste segundo momento, vamos analisar a vibração da caixa de transmissão da hélice, mecanismo que está representado na Figura 3.12, para dimensionar suas formas de vibração.

Figura 3.12 | Caixa de redução da hélice náutica



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 185).

Isso se faz importante para que possamos ter mais dados para que a equipe de engenharia dimensione corretamente os componentes da máquina e selecione os materiais que serão empregados para sua fabricação. Os momentos de inércia polar de massa do volante, motor, engrenagem 1, engrenagem 2 e hélice são dados em $[\text{kg.m}^2]$, sendo respectivamente 45.000, 5.000, 1.250, 750 e 10.000. Você já imagina como trabalhar com um sistema com mais de um grau de liberdade? Já consegue imaginar como seria o esquema do sistema apresentado na Figura 3.12?

Nesta seção de estudos vamos finalizar as análises com um grau de liberdade e dar início a análise de sistemas com dois graus de liberdade. Com isso, posteriormente será possível analisar sistemas com vários graus de liberdade. Portanto, veremos as vibrações com excitação não periódica, os resultados provindos dessas forças e como é dado o espectro de resposta de um sistema não periódico. Logo em seguida, vamos analisar os sistemas com dois graus de liberdade, passando por sistemas simples até os mais complexos, de forma a compreender os conteúdos necessários para sua vida profissional.

Lembre-se de ler o conteúdo antes de cada aula e de resolver os exercícios propostos. Vamos lá!

Não pode faltar

Caro aluno, já vimos anteriormente as respostas harmônicas de um sistema. Portanto, aqui vamos nos ater a outros tipos de resposta. Podemos analisar um sistema submetido a uma excitação periódica não harmônica fazendo uso do princípio de superposição. Já um sistema sujeito a uma perturbação não periódica repentina terá uma resposta de vibração transitória e, com isso, deverá ser analisado pelo que é conhecido como integral de convolução.

Resposta à força periódica geral

Se o sistema é submetido a uma força periódica $F(t)$ com período $\tau \quad 2\pi/\omega$, então podemos expandi-la com uma série de Fourier (como já vimos anteriormente), tendo uma equação da forma:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen}(j\omega t) \tag{3.47}$$

Em que:

$$a_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos\left(j\omega t\right)dt\ , \quad j=0,1,2,\cdots \tag{3.48}$$

E

$$b_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\mathrm{sen}\left(j\omega t\right)dt\ , \quad j=1,2,3,\cdots \tag{3.49}$$

Assim, podemos expressar a equação de movimento como:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}a_j\cos\left(j\omega t\right)+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\mathrm{sen}\left(j\omega t\right)$$

Dado que o lado direito dessa equação é uma constante mais uma soma de formas harmônicas; portanto, pelo princípio de superposição, a solução em regime permanente é a soma das soluções das seguintes equações:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2} \tag{3.51}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=a_j\cos\left(j\omega t\right) \tag{3.52}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=b_j\mathrm{sen}\left(j\omega t\right) \tag{3.53}$$

Assim, podemos expressar o resultado dessas equações como sendo:

$$x_p(t)=\frac{a_0}{2k} \tag{3.54}$$

$$x_p(t)=\frac{\left(a_j/k\right)}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\cos\left(j\omega t-\phi_j\right) \tag{3.55}$$

$$x_p(t)=\frac{\left(b_j/k\right)}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\mathrm{sen}\left(j\omega t-\phi_j\right) \tag{3.56}$$

Na qual:

$$\phi_j=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right) \quad \text{e} \quad r=\frac{\omega}{\omega_n}$$

Assim, a solução geral é a soma das soluções, podendo ser expressa por:

$$x_p(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(a_j/k\right)}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\cos\left(j\omega t-\phi_j\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(b_j/k\right)}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\operatorname{sen}\left(j\omega t-\phi_j\right) \tag{3.57}$$

Nessa situação, podemos perceber que, à medida que *j* cresce, a amplitude torna-se cada vez menor, e os termos tendem a zero; com isso, normalmente alguns dos primeiros termos são suficientes para obter uma resposta razoável.

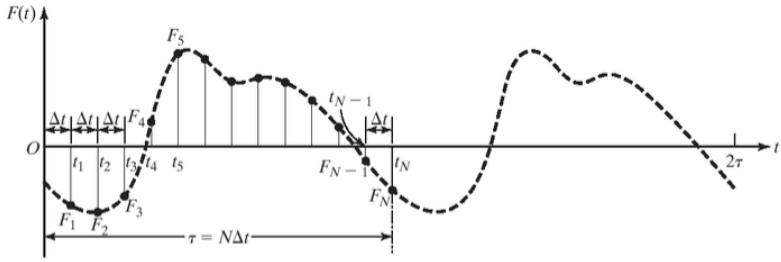
Reflita

Será que é realmente possível representarmos e analisarmos todos os tipos de movimentos vibratórios de forma analítica, ou há casos em que outros métodos são aplicáveis, se não os únicos possíveis?

Resposta a uma força periódica de forma irregular

De acordo com Rao (2008, p. 143), "em alguns casos a força que age sobre um sistema pode ser bastante irregular e só pode ser determinada por procedimentos experimentais. Entre os exemplos de tais forças, citamos a força do vento e as forças induzidas por terremotos". Em casos como esses, as forças tomam a forma gráfica, não sendo possível determinar nenhuma forma analítica para se descrever $F(t)$. Contudo, essa força somente existirá em determinados pontos discretos de tempo $t_1, t_2, \cdots, t_N$. Em todos os casos é possível determinar os coeficientes de Fourier por integração numérica, se $F_1, F_2, \cdots, F_N$ denotarem os valores de $F(t)$ em $t_1, t_2, \cdots, t_N$, como mostrado na Figura 3.13.

Figura 3.13 | Exemplo de resposta a força periódica irregular



Fonte: Rao (2008, p. 144).

Então a aplicação da regra trapezoidal nos resultará em:

$$a_0 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i \tag{3.58}$$

$$a_j = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i \cos\left(\frac{2j\pi t_i}{\tau}\right), \; j = 1,2,\cdots \tag{3.59}$$

$$a_j = \frac{2}{N}\sum_{i=1} F_i \operatorname{sen}\left(\frac{2j\pi t}{\tau}\right), \; j = 1,2,\cdots \tag{3.60}$$

Assim, conhecidos os coeficientes de Fourier, a resposta em regime permanente pode ser determinada pela Equação 3.57, levando-se em conta que r passa a ser $r = \left(2\pi / \tau\omega_n\right)$:

Pesquise mais

Para compreender melhor o conceito de força periódica irregular, dê uma olhada no exemplo 4.3 na página 144 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Resposta a uma força não periódica

Sabemos que as forças periódicas podem ser representadas por séries de Fourier em sobreposições de componentes harmônicos de várias frequências. Porém, quando a força excitadora não for periódica, faz-se necessária a utilização de um método diferente para representar a resposta do sistema. Para tanto, são usadas diversas formas de resolução, sendo, de acordo com Rao (2008, p. 145):

Representar a excitação por uma integral de Fourier.

Usar o método da integral de convolução.

Utilizar o método das transformadas de Laplace.

Primeiramente, aproximar $F(t)$ por um modelo de interpolação adequado e, então, usar um processo numérico.

Integrar numericamente como equação de movimento.

Integral de convolução

A forma mais simples de força não periódica é a força de impulso, que consiste em uma força de magnitude F que ocorre em um curto período de tempo Δt. Se $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ forem as velocidades da massa m antes e depois do impulso, respectivamente, podemos expressar o impulso como:

$$\text{impulso} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \tag{3.61}$$

Podemos chamar a magnitude do impulso de $\underset{\sim}{F}$ e expressar a equação em uma forma geral por:

$$\underset{\sim}{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \tag{3.62}$$

Dessa forma, definimos um impulso unitário como sendo $\underset{\sim}{f}$ dado por:

$$\underset{\sim}{f} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{t+\Delta t} F dt = F dt = 1 \tag{3.63}$$

Apesar de o impulso unitário não ter significado físico, ele nos ajuda na análise da resposta de um impulso. Assim, sendo o impulso dado em um sistema massa-mola amortecido de um grau de liberdade um impulso unitário em $t = 0$, poderemos escrever a equação de movimento como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.64}$$

E sua resposta é dada por:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \operatorname{sen}(\omega_d t)\right\} \tag{3.65}$$

Lembrando que:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

Estando a massa do sistema em repouso antes do impulso, então $x = \dot{x} = 0$ para $t < 0$ ($t = 0^-$), obtendo assim:

$$\underset{\sim}{f} = 1 = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0 \tag{3.66}$$

Nas condições iniciais em que $x(t=0) = x_0 = 0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 1/m$, a solução reduz-se a:

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \operatorname{sen}(\omega_d t) \tag{3.67}$$

Sendo $g(t)$ conhecida como **função resposta ao impulso**. No caso da magnitude do impulso ser $\underset{\sim}{F}$, ou seja, não unitária, a velocidade inicial $\dot{x}_{(0)}$ se torna $\underset{\sim}{F}/m$, e a solução passa a ser:

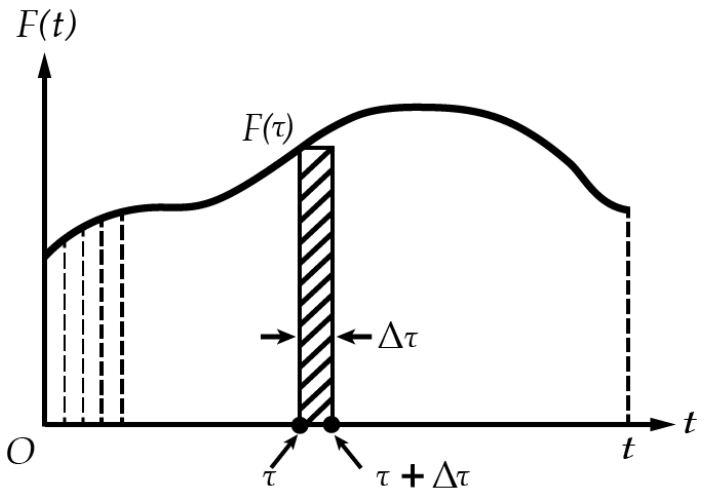
$$x(t) = \frac{\underset{\sim}{F} e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \operatorname{sen}(\omega_d t) = \underset{\sim}{F}\, g(t) \tag{3.68}$$

Considerando que o deslocamento da massa até o impulso é $x = 0$, para qualquer mudança de velocidade devido ao impulso, teremos que substituir na Equação 3.68 o tempo decorrido após o impulso dado por $t - \tau$, e com isso a Equação 3.68 tomará a seguinte forma:

$$x(t) = \underset{\sim}{F}\, g(t - \tau) \tag{3.69}$$

A Figura 3.14 mostra o impulso dado por uma força externa arbitrária $F(t)$. De acordo com Rao (2008, p.147), podemos admitir que a força externa $F(t)$ é uma composição de uma série de impulsos de magnitudes variadas; assim, tem-se que no tempo τ a força excitadora $F(\tau)$ é aplicada por um curto período de tempo ($\Delta\tau$).

Figura 3.14 | Resposta a uma condição forçante geral



Fonte: Rao (2008, p.147).

A resposta a esse impulso em *t* é dada por:

$$\Delta x(t) = F(\tau)\Delta\tau\, g(t - \tau) \tag{3.70}$$

Tem-se que essa equação representa a resposta a apenas um impulso, uma vez que a resposta total será dada pela soma de todos os impulsos, assim:

$$x(t) \simeq \sum F(\tau) g(t-\tau) \Delta\tau \tag{3.71}$$

Levando em consideração que $\Delta\tau \to 0$, poderemos integrar a Equação 3.71 da seguinte forma:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{3.72}$$

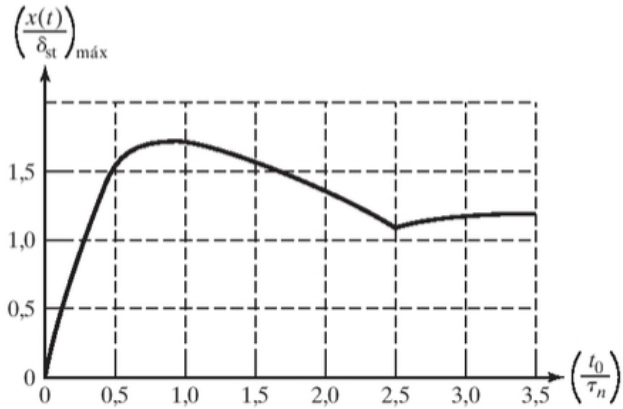
Substituindo a Equação 3.67 em 3.72, teremos:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} sen\left(\omega_d \left[t-\tau\right]\right) dt \tag{3.73}$$

Essa integral é conhecida como **integral de convolução** ou **integral de Duhamel**. É perceptível que essa equação não leva em consideração as condições inicias do sistema, porém essas condições foram utilizadas nos passos de desenvolvimento da equação.

A partir dos equacionamentos que discutimos até aqui, podemos elaborar um gráfico – apresentado na Figura 3.15 – que mostra a variação da resposta de qualquer quantidade máxima com a frequência natural. Esse gráfico é conhecido como **espectro de resposta**, sendo largamente usado em engenharia de projeto para terremoto.

Figura 3.15 | Exemplo de espectro de resposta



Fonte: Rao (2008, p. 151).

Transformada de Laplace

O método da transformada de Laplace pode ser aplicado para se determinar a resposta de um sistema forçado por qualquer tipo de excitação.

Esse método consiste na conversão de equações diferenciais em equações algébricas que são fáceis de se trabalhar (RAO, 2008, p. 157).

A transformada de Laplace de uma função $x(t)$ é definida por $\overline{x}(s) = 1x(t)$, dada por:

$$\overline{x}(s) = 1x(t) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)dt \tag{3.74}$$

Em que s é uma quantidade complexa chamada de **variável subsidiária**, e a função e^{-st} é denominada de **núcleo da transformação**.

Para resolvermos a equação de movimento de uma vibração forçada usando esse método, é necessário determinar as transformadas das derivadas. Assim, utilizando a equação de movimento $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$, definiremos as transformadas das derivadas:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

Dessa forma, podemos determinar a primeira expressão como:

$$1\frac{dx}{dt}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dx}{dt}(t)dt \tag{3.75}$$

Integrando por partes, poderemos definir a transformada como sendo:

$$1\frac{dx}{dt}(t) = e^{-st} x(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} x(t)dt = s\overline{x}(s) - x(0) \tag{3.76}$$

Em que $x(0) = x_0$ é o deslocamento inicial da massa. De maneira análoga, poderemos determinar a transformada de Laplace da derivada de segunda ordem:

$$1\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2x}{dt^2}(t)dt = s^2\overline{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \tag{3.77}$$

Dado que $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ é a velocidade inicial da massa. Podemos ainda definir a transformada da força periódica $F(t)$:

$$\overline{F}(s) = 1F(t) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \tag{3.78}$$

Assim, a equação de movimento vibratório pode ser reescrita como:

$$m1\ddot{x}(t) + c1\dot{x}(t) + k1x(t) = 1F(t) \tag{3.79}$$

Ou

$$\left(ms^2+cs+k\right)\overline{x}(s)=\overline{F}(s)+m\dot{x}(0)+\left(ms+c\right)x(0) \tag{3.80}$$

Assim, podemos escrever a razão $\overline{Z}(s)$ entre atransformada de excitação $\overline{F}(s)$ e a transformada de resposta $\overline{x}(s)$ como sendo:

$$\overline{Z}(s)=\frac{\overline{F}(s)}{\overline{x}(s)}=ms^2+cs+k \tag{3.81}$$

Essa razão é conhecida como **impedância generalizada** do sistema. A **função admitância** ou **função transferência** do sistema é dada pela recíproca da razão $\overline{Z}(s)$, sendo denotada por $\overline{Y}(s)$ da seguinte forma:

$$\overline{Y}(s)=\frac{1}{\overline{Z}(s)}=\frac{\overline{x}(s)}{\overline{F}(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+k}=\frac{1}{m\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2\right)} \tag{3.82}$$

Assim, a transformada da resposta do sistema pode também ser escrita como:

$$\overline{x}(s)=\overline{Y}(s)\overline{F}(s) \tag{3.83}$$

Para se determinar a resposta $x(t)$ por meio de sua transformada $\overline{x}(s)$, teremos que inverter a transformada de Laplace, podendo ser expressa simbolicamente por:

$$x(t)=1^{-1}\overline{x}(s)=1^{-1}\overline{Y}(s)\overline{F}(s) \tag{3.84}$$

O operador 1^{-1} envolve uma integral de linha no domínio complexo. Felizmente, as funções de Laplace mais utilizadas já foram deduzidas, resolvidas e tabeladas, portanto podemos usar as tabelas de conversão de operadores de Laplace para resolver as inversas necessárias.

Pesquise mais

Para saber mais sobre transformadas de Laplace, dê uma olhada nas páginas 157 a 159 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

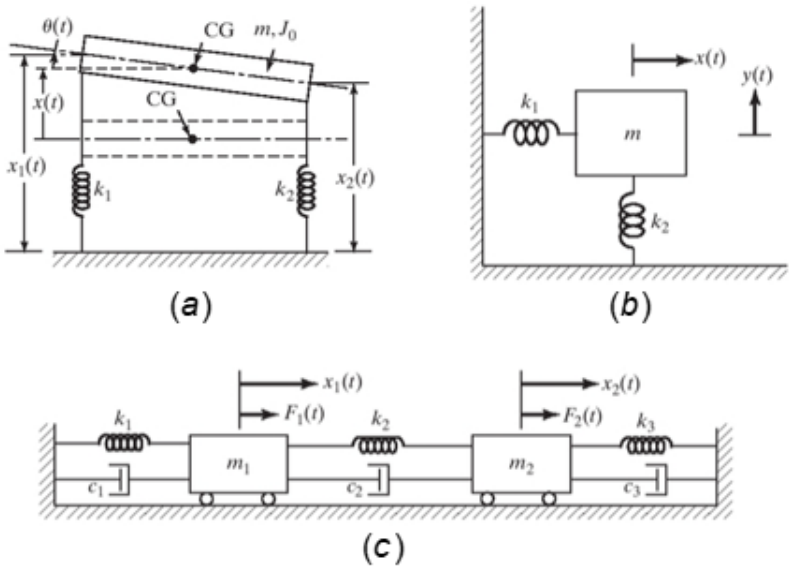
O vídeo sugerido a seguir explica as transformadas de Laplace de uma forma mais simples para facilitar o entendimento:

INTRODUÇÃO à transformada de Laplace.

Sistemas com dois graus de liberdade

Sabemos que os graus de liberdade (GDL) de um sistema são caracterizados pela quantidade de coordenadas independentes para se descrever o movimento do sistema. A Figura 3.16 demonstra três exemplos de sistemas com dois graus de liberdade.

Figura 3.16 | Sistemas com dois graus de liberdade

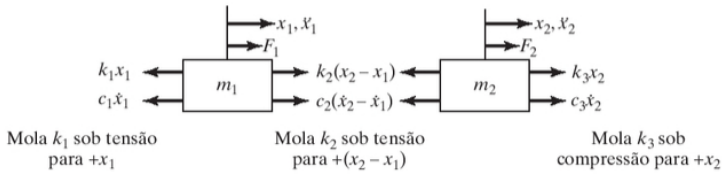


Fonte: adaptada de Rao (2008, p.178-179).

A Figura 3.16a nos mostra um sistema com uma massa que, devido à sua configuração, pode se movimentar tanto na vertical quanto rotacionar a massa pela flexão das molas independentes. Já a Figura 3.16b traz um sistema também com apenas uma massa, porém nesse sistema a massa pode se mover tanto vertical quanto horizontalmente. Por fim, a Figura 3.16c nos mostra um sistema com duas massas que podem se mover independentemente, o que nos garante duas coordenadas horizontais para trabalhar. Todo sistema vibracional terá que trazer quantas equações forem necessárias para sua solução, considerando-se que o número de equações deve ser igual ao número de graus de liberdade. O

sistema demonstrado na Figura 3.16c nos leva ao diagrama de corpo livre apresentado na Figura 3.17.

Figura 3.17 | Diagrama de corpo livre de um sistema com dois GDLs



Fonte: Rao (2008, p. 179).

Sendo uma vibração forçada com dois graus de liberdade, devem existir duas equações de movimento, com isso:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \tag{3.85}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2 \tag{3.86}$$

Por termos duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas, podemos escrever as equações na forma de matricial da seguinte forma:

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\dot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \tag{3.87}$$

Sendo $[m]$, $[c]$ e $[k]$ as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, respectivamente expressas por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Sendo também $x(t)$ e $F(t)$ vetores de deslocamento e força, expressos respectivamente por:

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

Pelas massas estarem acopladas, a solução dessas equações se torna complicada, dado que normalmente as condições iniciais admitidas para sua solução são $x_1(t=0) = x_1(0)$, $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0)$, $x_2(t=0) = x_2(0)$ e $\dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0)$.

Análise de um sistema livre não amortecido

Esse tipo de análise nos permite determinar as frequências naturais e os modos de vibrar de um sistema vibracional qualquer. Para tanto, as forças F_1 e F_2 são igualadas a zero, e os amortecimentos desprezados. Assim a equação de movimento se torna:

$$m_1\ddot{x}_1(t)+(k_1+k_2)x_1(t)-k_2x_2(t)=0 \text{ e } m_2\ddot{x}_2(t)-k_2x_1(t)+(k_2+k_3)x_2(t)=0 \tag{3.88}$$

Assumimos que as massas m_1 e m_2 podem ser mover com a mesma frequência ω e o mesmo ângulo de fase ϕ; assim, teremos as soluções dadas por:

$$x_1(t)=X_1\cos(\omega t+\phi) \text{ e } x_2(t)=X_2\cos(\omega t+\phi) \tag{3.89}$$

Em que X_1 e X_2 são as amplitudes máximas. Substituindo as respostas na Equação 3.88, teremos:

$$\left[\left\{-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\right\}X_1-k_2X_2\right]\cos(\omega t+\phi)=0 \tag{3.90}$$

$$\left[-k_2X_1+\left\{-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right\}X_2\right]\cos(\omega t+\phi)=0 \tag{3.91}$$

Uma vez que, para satisfazer a Equação 3.90 e 3.91 em qualquer instante de tempo *t*, os termos entre colchetes devem ser zero, assim teremos:

$$\left\{-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\right\}X_1-k_2X_2=0 \text{ e } -k_2X_1+\left\{-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right\}X_2=0 \tag{3.92}$$

Que representa duas equações algébricas homogêneas simultâneas com X_1 e X_2. Para uma solução não trivial para as amplitudes, o determinante dos coeficientes deve ser zero, assim:

$$\det\begin{bmatrix}\left\{-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\right\} & -k_2\\ -k_2 & \left\{-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right\}\end{bmatrix}=0 \tag{3.93}$$

A solução desse determinante nos resultará em uma expressão polinomial cujas raízes serão representadas por ω_1 e ω_2, que representam as **frequências naturais** do sistema em forma de autovalores da matriz de coeficientes. Para tanto, de acordo com regras de matrizes, existirão dois autovetores associados a cada autovalor, representados respectivamente por:

$$\vec{X}^{(1)}=\begin{Bmatrix}X_1^{(1)}\\ X_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1^{(1)}\\ r_1X_1^{(1)}\end{Bmatrix} \text{ e } \vec{X}^{(2)}=\begin{Bmatrix}X_1^{(2)}\\ X_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1^{(2)}\\ r_2X_1^{(2)}\end{Bmatrix} \tag{3.94}$$

Esses vetores normais são conhecidos como **vetores modais** ou **formas modais** do sistema, dado que r_1 e r_2 são as razões de amplitude. Visto que a Equação 3.93 é homogênea, as razões podem ser determinadas como:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)} \quad \text{e}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \tag{3.95}$$

Com isso, podemos representar as respostas como:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \text{primeiro} \\ \text{modo} \end{matrix} \tag{3.96}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \text{segundo} \\ \text{modo} \end{matrix} \tag{3.97}$$

Essas equações mostram as respostas em cada forma do sistema, ou seja, os modos da vibração, em que $X_1^{(1)}$, $X_1^{\check{}}$, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes que podem ser obtidas a partir das condições iniciais do sistema.

Assimile

As frequências naturais e modos de vibrar de um sistema só podem ser encontrados considerando o sistema como sendo livre e desprezando os amortecimentos. Isso seria como se uma máquina estivesse desligada e sem nenhum elemento que dissipasse as energias da vibração.

De forma análoga, para um sistema torcional com dois graus de liberdade, teremos:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1} \text{ e } J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2} \tag{3.98}$$

O que para uma análise de vibração livre nos permitirá encontrar as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema. Para isso, teremos que igualar os momentos M_t a zero, obtendo assim:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0 \text{ e } J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = 0 \tag{3.99}$$

Dessa forma, aplicando os mesmos procedimentos vistos para sistemas lineares, teremos as mesmas equações com as seguintes modificações: $x \to \theta$, $m \to J$, $X \to \Theta$ e $k \to k_t$.

Saiba mais

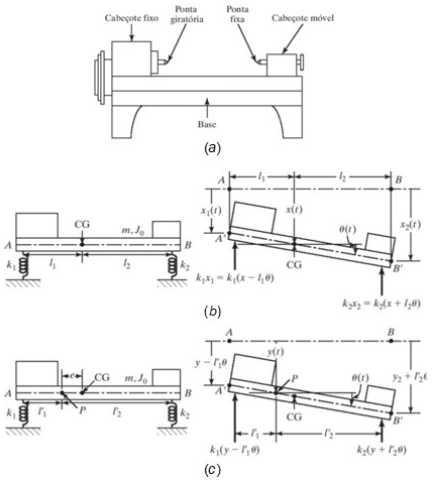
Para saber mais sobre os sistemas torcionais, dê uma olhada nas páginas de 184 a 186 do livro do RAO, que pode ser encontrado na sua biblioteca virtual:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Acoplamento de coordenadas e coordenadas principais

Podemos dizer que os diversos sistemas com *n* graus de liberdade podem, dependendo do interesse da análise, ser simplificados conforme dito anteriormente e vimos até aqui. Tais simplificações podem ser realizadas fazendo uso de aproximações definidas, como a associação de massas, rigidez e amortecimento. Geralmente, as coordenadas que descrevem os *n* graus de liberdade de um sistema são geométricas e independentes, medidas em relação à posição de equilíbrio do corpo vibratório. Lembrando que os sistemas vibratórios podem ser interpretados diferentemente, dependendo da visão do engenheiro e da necessidade da análise. Como exemplo disso, veja o torno mecânico da Figura 3.18ª. Sabemos que ele possui vários elementos associados, porém, se quisermos analisar a vibração geral que o torno como um todo sofre, podemos representá-lo como uma massa equivalente de todos os elementos suportada sobre molas, como mostrado nas Figuras 3.18b e 3.18c.

Figura 3.18 | Torno mecânico representado por coordenadas variadas



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 187-188).

Observe ainda que a Figura 3.18b representa o sistema em dois graus de liberdade, podendo ser representado por qualquer conjunto coordenadas, (x_1, x_2), (x, θ), (x_1, θ) e (y, θ). Como exemplo, para a análise de uma vibração livre sem amortecimento, se usarmos as coordenadas x e θ, teremos a seguinte equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.100}$$

Já se usarmos as coordenadas $y(t)$ e $\theta(t)$, teremos:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 l_{11}' - k_2 l_2') \\ (-k_1 l_1' + k_2 l_2') & (k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.101}$$

Ainda temos os sistemas forçados que nos entregam uma equação de movimento do tipo:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3.102}$$

Considerando que o sistema tem, por característica, que $m_{11} = m_1$, $m_{22} = m_2$ e $m_{12} = 0$, a força excitadora harmônica é dada por:

$$F_j(t) = F_{j0} e^{i\omega t} \ , \ j = 1, 2 \tag{3.103}$$

Como ω é forçante, então teremos como resposta:

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t} \ , \ j = 1, 2 \tag{3.104}$$

Assim, X_1 e X_2 são quantidades complexas que dependem de ω e dos parâmetros do sistema. Dessa forma, substituindo 3.103 e 3.104 em 3.102, teremos:

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \tag{3.105}$$

Definindo uma impedância mecânica $Z_{rs}(i\omega)$ como sendo:

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs} \ , \ r \text{ e } s = 1, 2 \tag{3.106}$$

Podemos reescrever a Equação 3.105 como:

$$\left[Z\left(i\omega\right)\right]\vec{X}=\vec{F}_0 \tag{3.107}$$

Essa equação pode ser resolvida para a resposta do sistema:

$$\vec{X}=\left[Z\left(i\omega\right)\right]^{-1}\vec{F}_0 \tag{3.108}$$

Como a matriz de impedância $\left[Z\left(i\omega\right)\right]$ pode ser dada por:

$$\left[Z\left(i\omega\right)\right]=\begin{bmatrix} Z_{11}\left(i\omega\right) & Z_{12}\left(i\omega\right) \\ Z_{12}\left(i\omega\right) & Z_{22}\left(i\omega\right) \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

Então, podemos escrever sua inversa:

$$\left[Z\left(i\omega\right)\right]^{-1}=\frac{1}{Z_{11}\left(i\omega\right)Z_{22}\left(i\omega\right)-Z_{12}{}^{2}\left(i\omega\right)} \tag{3.110}$$

O que nos leva a:

$$X_1\left(i\omega\right)=\frac{Z_{22}\left(i\omega\right)F_{10}-Z_{12}\left(i\omega\right)F_{20}}{Z_{11}\left(i\omega\right)Z_{22}\left(i\omega\right)-Z_{12}{}^{2}\left(i\omega\right)} \tag{3.111}$$

E

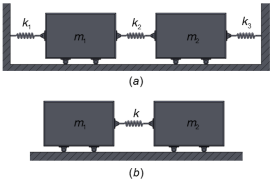
$$m_1\ddot{x}_1+k\left(x_1-x_2\right)=0 \tag{3.112}$$

Assim, só precisaremos substituir as Equações 3.111 e 3.112 em 3.104, para obter as respostas completas do sistema.

Sistemas semidefinidos

Observe o sistema apresentado na Figura 3.19a. Esse sistema é restrito, o que é representado pelas duas molas engastadas, acopladas às massas; já o sistema da Figura 3.19b não apresenta tais restrições. Esses sistemas são denominados de **sistemas semidefinidos** ou **sistemas degenerados**, ou ainda **sistemas irrestritos**.

Figura 3.19 | Diferença entre sistema acoplado e sistema irrestrito



Fonte: elaborada pelo autor.

Para um sistema semidefinido, como o da Figura 3.19b, teremos as equações de movimento definidas como:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \text{ e } m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \tag{3.113}$$

Dado que, para vibração livre, a resposta é harmônica e é dada por:

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \; j = 1,2 \tag{3.114}$$

Substituindo 3.114 em 3.113, teremos:

$$\left(-m_1\omega^2 + k\right)X_1 - kX_2 = 0 \text{ e } -kX_1 + \left(-m_2\omega^2 + k\right)X_2 = 0 \tag{3.115}$$

Em que o determinante da matriz de coeficientes deve ser zero, o que resulta em:

$$\omega^2\left[m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)\right] = 0 \tag{3.116}$$

Na qual as raízes darão as frequências naturais, sendo:

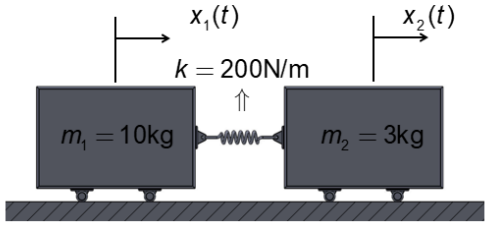
$$\omega_1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \tag{3.117}$$

Esse tipo de sistema apresenta a característica de ter a primeira frequência natural igual a zero.

Exemplificando

Imagine que dois vagões estão interligados por uma mola e se movimentam livremente sobre trilhos, como mostrado na Figura 3.20. Se o vagão m_1 for submetido a um impulso $F(t) = 50\delta(t)$, vamos definir a resposta do sistema, usando o método de transformadas de Laplace.

Figura 3.20 | Vagões sobre trilho



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Considerando que os deslocamentos e as velocidades dos vagões inicialmente são iguais a zero, e sabendo que o sistema sofre com vibração forçada provinda de uma força do tipo $F(t)=F_0\delta(t)$, teremos suas equações de movimento dadas por:

$m_1\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=F_0\delta(t)$ e $-kx_1+m_2\ddot{x}_2+kx_2=0$ Aplicando as transformadas de Laplace, poderemos reescrever as equações como:

$\left(m_1s^2+k\right)\overline{x}_1(s)-k\overline{x}_2(s)=F_0$ e $-k\overline{x}_1(s)+\left(m_2s^2+k\right)\overline{x}_2(s)=0$

Podemos resolver essas equações para $\overline{x}_1(s)$ e $\overline{x}_2(s)$, obtendo:

$$\overline{x}_1(s)=\frac{F_0\left(m_2s^2+k\right)}{s^2\left\{m_1m_2s^2+k\left(m_1+m_2\right)\right\}} \text{ e } \overline{x}_2(s)=\frac{F_0k}{s^2\left\{m_1m_2s^2+k\left(m_1+m_2\right)\right\}}$$

Aplicando frações parciais e lembrando que $\omega^2=k/m$, que nesse caso será $\omega^2=k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$, teremos:

$$\overline{x}_1(s)=\frac{F_0}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{m_2}{\omega m_1}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) \text{ e } \overline{x}_2(s)=\frac{F_0}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

A tabela de conversão do domínio de Laplace para o domínio do tempo – encontrada no apêndice D do livro de Rao (2008, p. 406) – nos dá as seguintes relações:

$$\frac{1}{s^2}\rightarrow t \quad \text{e} \quad \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\rightarrow \operatorname{sen}(\omega t)$$

Sendo assim, teremos:

$$x\ (t)=\frac{F}{m_1+m_2}\left(t+\frac{m}{\omega m_1}\operatorname{sen}(\omega t)\right) \text{ e } x_2(t)=\frac{F_0}{m_1+m_2}\left(t-\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\right)$$

Sabendo que $m_1=10\text{ kg}$, $m_2=3\text{ kg}$, $k=200\text{ N/m}$ e $F_0=50\text{ N}$, podemos fazer as substituições necessárias, começando por ω^2, assim teremos:

$$\omega^2=200\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)\rightarrow\omega=\sqrt{86{,}67}=9{,}31\,\text{rad}/\text{s}$$

Finalmente, as respostas podem ser escritas como:

$$x_1(t)=\frac{50}{10+3}\left(t+\frac{3}{9{,}31\cdot 10}\operatorname{sen}(9{,}31t)\right)=3{,}846\left(t+0{,}0322\operatorname{sen}(9{,}31t)\right)$$

$$x_1(t)=3{,}846t+0{,}124\operatorname{sen}(9{,}31t)$$

e

$$x_2(t) = \frac{50}{10+3}\left(t - \frac{1}{9,31}\text{sen}\left(9,31t\right)\right) = 3,846\left(t - 0,107\,\text{sen}\left(9,31t\right)\right)$$

$$x_2(t) = 3,846t - 0,412\,\text{sen}\left(9,31t\right)$$

Com isso, podemos expressar as respostas em função de qualquer tempo após a excitação do sistema.

Autoexcitação e análise de estabilidade

De acordo com Rao (2008, p. 192-193), quando um sistema com dois graus de liberdade está sujeito a forças autoexcitadoras, os termos das forças podem ser combinados aos termos de amortecimento e de rigidez, e assim a equação de movimento se torna:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.118}$$

Apresentada a seguinte solução:

$$x_j(t) = X_j e^{st}, \quad j = 1,2 \tag{3.119}$$

Substituindo a solução na Equação 3.118 e igualando o determinante a zero, teremos a equação característica do sistema dada por:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \tag{3.120}$$

Realizando alguns procedimentos algébricos, perceberemos que a condição de estabilidade dependerá de todos os coeficientes (a_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4) serem positivos e que seja satisfeita a condição:

$$a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2 \tag{3.121}$$

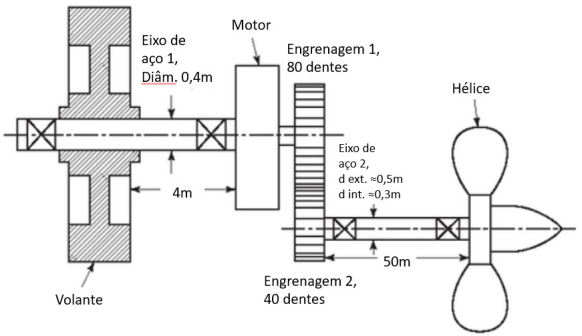
Saiba mais

Consulte o livro a seguir para saber mais sobre acoplamento de coordenadas e coordenadas principais (páginas 186 e 187) e para mais informações sobre os sistemas semidefinidos, autoexcitação e análise de estabilidade (páginas 191 a 193):

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Lembre-se de que você é o engenheiro de uma fabricante de navios e, após desenvolver as condições de funcionamento do novo modelo que estão desenvolvendo, a equipe passou a você os dados necessários para que realize alguns cálculos para dimensionar as vibrações que podem causar problemas. Nesse momento, você e sua equipe vão analisar a vibração da caixa de transmissão da hélice para dimensionar suas formas de vibração, mecanismo que está representado na Figura 3.12. Os momentos de inércia polar de massa do volante, motor, engrenagem 1, engrenagem 2 e hélice são dados em kgm^2, sendo respectivamente 45.000, 5.000, 1.250, 750 e 10.000.

Figura 3.12 | Caixa de redução da hélice náutica



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 185).

Resolução:

Para resolvermos esse problema, devemos levar em conta primeiramente que, como o momento de inércia de massa polar do volante é consideravelmente maior que nos outros componentes, ele pode ser tido como estático em relação ao sistema. Ainda, podemos considerar o motor e as engrenagens como um momento de inércia único e equivalente, tendo em vista que encontram-se bem próximos. Por fim, como a engrenagem 1 é duas vezes maior que a engrenagem 2 e a hélice está acoplada à engrenagem 2, o momento de inércia da engrenagem 2 e da hélice em relação ao motor será, respectivamente:

$$\left(J_{E2}\right)_{eq} = (2)^2\, 750 = 3.000 \text{ kgm}^2 \quad \text{e} \quad \left(J_H\right)_{eq} = J_2 = (2)^2\, 10.000 = 40.000 \text{ kgm}^2$$

Considerando que a distância entre o motor e as engrenagens é pequena, teremos:

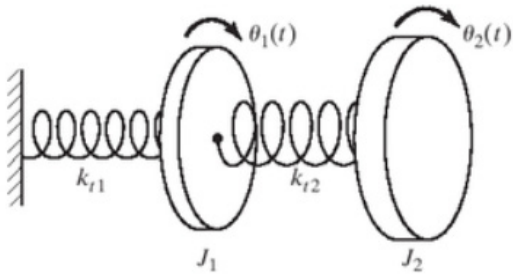
$$J_1 = J_m + J_{E1} + \left(J_{E2}\right)_{eq} = 5.000 + 1.250 + 3.000 = 9.250 \text{ kgm}^2$$

Lembrando que o módulo de elasticidade transversal do aço é $G = 80 \times 10^9 \, \mathrm{N \cdot m^2}$, a rigidez torcional do eixo um pode ser determinada como sendo:

$$k_{t1} = \frac{G}{l_1}\left(\frac{\pi d_1^{\,4}}{32}\right) = \frac{80 \times 10^9}{4}\left(\frac{\pi 0,4^4}{32}\right) = 50,26 \times 10^6 \, \mathrm{N \cdot m}/\mathrm{rad}$$

A rigidez do eixo 2 foi calculada anteriormente e obtivemos $k_{t2} = 7,0013 \times 10^6 \, \mathrm{N \cdot m}/\mathrm{rad}$. Uma vez que o eixo 2 não pode ter seu comprimento desprezado, devemos considerar o sistema como tendo dois graus de liberdade, como indicado na Figura 3.21.

Figura 3.21 | Diagrama de corpo livre do sistema de propulsão



Fonte: Rao (2008, p. 185).

Assim, considerando $k_3 = 0$, $k_1 = k_{t1}$, $k_2 = k_{t2}$, $m_1 \quad J_1$ e $m_2 = J_2$, podemos aplicar a Equação 3.93, para encontrar as frequências naturais do sistema:

$$\det\begin{bmatrix} \left\{-J_1\omega^2 + \left(k_{t1} + k_{t2}\right)\right\} & -k_{t2} \\ -k_{t2} & \left\{-J_2\omega^2 + \left(k_{t2} + k_3\right)\right\} \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, as raízes resultarão em:

$$\omega_1^{\,2}, \omega_2^{\,2} = \left\{\frac{\left(k_{t1} + k_{t2}\right)}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2}\right\} \pm \left[\left\{\frac{\left(k_{t1} + k_{t2}\right)}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2}\right\}^2 - \frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1J_2}\right]^{1/2}$$

Substituindo os valores teremos:

$$\omega_1^{\,2}, \omega_2^{\,2} = \left\{\frac{\left(50,26 \times 10^6 + 7,0013 \times 10^6\right)}{2\left(9.250\right)} + \frac{7,0013 \times 10^6}{2\left(40.000\right)}\right\} \pm$$

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \{3.095,205405 + 87,51625\} \pm \left[\{3.095,205405 + 87,51625\}^2 - 951.041,4541\right]^{1/2}$$

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \{3182,721655\} \pm [9178675,679]^{1/2}$$

Assim teremos:

$$\omega_1^2 = 153,0887269 \rightarrow \omega_1 = 12,373 \, {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}} \quad \text{e} \quad \omega_2^2 = 6.212,354583 \rightarrow \omega_2 = 78,82 \, {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}}$$

Ainda é possível dimensionar as formas de vibrar a partir de:

$$r_1 = \frac{-J_1\omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}} = \frac{-9.250(153,0887269) + (50,26\times10^6 + 7,0013\times10^6)}{7,0013\times10^6} = 7,9764$$

$$r_2 = \frac{-\breve{}_1\omega_2^2 + (\ _{t1} + \ _{t2})}{k_{t2}} = \frac{-9.250(6212,354583) + (50,26\times10^6 + 7,0013\times10^6)}{7,0013\times10^6} = -0,02899$$

Com isso as formas modais serão:

$$\left\{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right\}^{(1)} = \left\{\frac{1}{r_1}\right\} = \frac{1}{7,9764} \quad \text{e} \quad \left\{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right\}^{(2)} = \left\{\frac{1}{r_2}\right\} = \frac{1}{-0,02899}$$

Esses valores denotam as frequências que devem ser evitadas durante o funcionamento do sistema de propulsão e suas formas de vibrar associadas, pois, caso as frequências ω_1 e ω_2 sejam atingidas, haverá picos de amplitude no sistema, que podem ocasionar tensões excessivas e até falhas catastróficas do sistema.

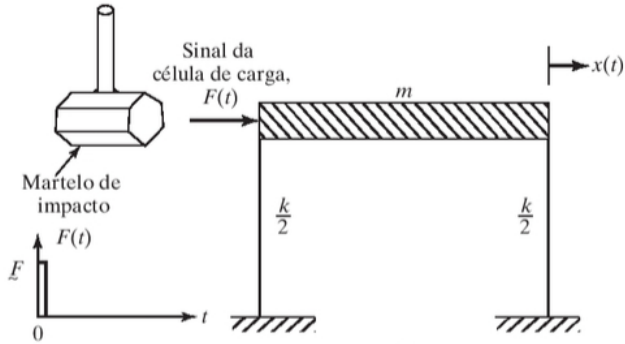
Avançando na prática

Resposta de um sistema amortecido ao impacto

Descrição da situação-problema

Você é dono de uma empresa de testes vibracionais, e sua empresa foi contratada para realizar alguns testes de vibração em uma estrutura. Para isso você utiliza um martelo de impacto com célula de carga para medir a força do impacto, conforme mostrado na Figura 3.22. Supondo que a estrutura tem massa de 15 kg e rigidez de 2.500 N/m, sendo a força de impacto $F = 25\text{N}\cdot\text{s}$, seu trabalho será determinar a resposta do sistema se ele estiver amortecido com $c = 10$ N·s/m.

Figura 3.22 | Impacto martelo versus estrutura



Fonte: Rao (2008, p. 146).

Resolução da situação-problema

Como sabemos a rigidez e a massa do sistema, podemos calcular que a frequência natural é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.500}{15}} = 12{,}91 \, \text{rad}/\text{s}$$

Ainda com os dados que nos foram dados, podemos calcular o fator de amortecimento como sendo:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{2.500 \cdot 15}} = 0{,}026$$

Com isso, poderemos calcular a frequência da excitação dada por:

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0{,}026^2} \cdot 12{,}91 = 12{,}90 \, \text{rad}/\text{s}$$

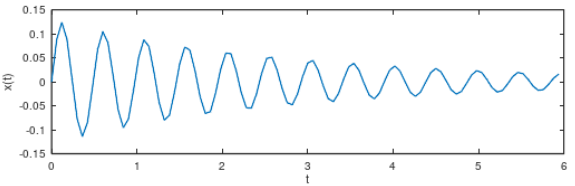
Se admitirmos que o impacto é dado ao sistema em t = 0, então obteremos a resposta dada pela equação:

$$x(t) = F_{\sim} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \text{sen}\left(\omega_d t\right) = \frac{25}{15 \cdot 12{,}90} e^{-(0{,}026 \cdot 12{,}91)t} \cdot \text{sen}\left(12{,}90t\right)$$

$$x(t) = 0{,}129 e^{-0{,}34t} \, \text{sen}\left(12{,}90t\right)$$

Portanto, a resposta do sistema ao impacto pode ser encontrada pela equação definida em qualquer instante de tempo, como o apresentado no gráfico da Figura 3.23.

Figura 3.23 | Gráfico de resposta do sistema submetido a impacto



Fonte: elaborada pelo autor.

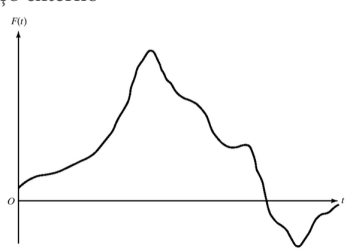
Faça valer a pena

1. A análise de um sistema vibratório segue as leis da física e da matemática, como todos os problemas de engenharia. Temos que uma das regras mais simples da matemática é que, para resolver um sistema, temos que ter a mesma quantidade de equações e variáveis. Assim, se um sistema de equações tem três variáveis, ele terá que apresentar, pelo menos, três equações.

De acordo com o conceito apresentado no texto-base, é correto o que se afirma em:
a) Um sistema vibratório terá que apresentar o número de equações correspondente ao número de graus de liberdade do sistema.
b) Um sistema vibratório segue as leis da física e, portanto, sempre apresentará ressonância.
c) Os sistemas vibracionais são puramente matemáticos e, com isso, extrapolam as leis da física.
d) Sistemas nos quais ocorre vibração podem, sempre, ser simplificados a um grau de liberdade.
e) Todo sistema vibratório apresenta variáveis suficientes para seu número de equações.

2. Os sistemas vibratórios excitados externamente podem apresentar diversos tipos de respostas, dependendo da forma como sofrem a perturbação. Um exemplo é a resposta a um esforço externo, apresentado na figura a seguir:

Figura | Resposta a esforço externo



Fonte: Rao (2008, p. 160).

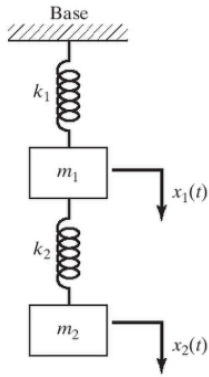
Qual é o tipo de excitação apresentada no gráfico?

Assinale a alternativa que melhor descreve a excitação apresentada no gráfico.

a) O gráfico nos traz uma força de excitação não periódica.
b) O gráfico nos traz uma força de excitação periódica harmônica.
c) O gráfico nos traz uma excitação por impulso.
d) O gráfico nos traz uma força de excitação não periódica irregular.
e) O gráfico nos traz uma força de excitação periódica de forma irregular.

3. Se um sistema com dois graus de liberdade, como o apresentado na figura a seguir, tiver $m_1 = 1.000$ kg e $m_2 = 5.000$ kg, qual seriam as frequências naturais do sistema se a rigidez da primeira mola for $k_1 = 0,3 \times 10^6$ N/m e a da segunda mola for $k_2 = 3 \times 10^6$ N/m ?

Figura | Sistema com dois graus de liberdade



Fonte: Rao (2008, p. 198).

Assinale a alternativa correta.

a) $\omega_1 = 6,8347$ rad/s e $\omega_2 = 58,2701$ rad/s.

b) $\omega_1 = 7,3892$ rad/s e $\omega_2 = 62,0748$ rad/s.

c) $\omega_1 = 6,8347$ rad/s e $\omega_2 = 62,0748$ rad/s.

d) $\omega_1 = 8,2467$ rad/s e $\omega_2 = 65,0495$ rad/s.

e) $\omega_1 = 8,8347$ rad/s e $\omega_2 = 55,7485$ rad/s.

Seção 3.3

Sistemas com vários graus de liberdade

Diálogo aberto

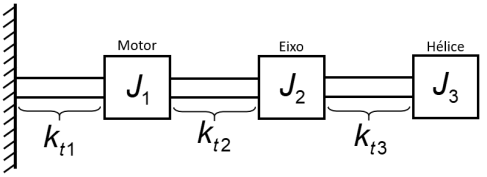
Caro aluno, já vimos que é possível simplificar sistemas complexos de forma a trabalhar com eles mais facilmente e vimos também como simplificar sistemas a apenas um grau de liberdade. Mas quanto mais simplificado for, mais o sistema se distancia da realidade, portanto nem sempre é interessante simplificar demasiadamente um sistema dinâmico. Para fins de compreensão dos efeitos gerais, pense que é válido observar um sistema como um todo, por exemplo um carro que oscila na estrada. No entanto, por vezes queremos ver os efeitos vibracionais nos componentes de um sistema, remetendo-nos a trabalhar com vários graus de liberdade, tal como se quisermos observar as vibrações dos elementos da caixa de câmbio de um automóvel.

Lembre-se de que, nesse momento, você é um engenheiro de uma multinacional fabricante de embarcações que atualmente está desenvolvendo um novo modelo de navio. Você foi colocado como responsável pela equipe de análise vibracional e está realizando os cálculos para o setor de engenharia de construção naval.

Primeiramente, você definiu os efeitos vibratórios na raiz do eixo da hélice, o que foi importante para que a equipe chegasse a algumas conclusões acerca dos materiais empregados no projeto da hélice. Agora, você vai definir as frequências naturais do conjunto de propulsão do navio, a fim de encaminhar tais frequências para a equipe de engenharia naval a fim de que possam examinar se o regime de funcionamento da hélice poderá causar danos à estrutura do sistema.

Para isso, você e sua equipe chegaram à conclusão de que poderiam, para facilitar os cálculos, considerar todo o sistema como um sistema torcional, como mostrado na Figura 3.24, considerando o motor como sendo fixado ao navio por uma haste com rigidez $k_{t1} = 7 \times 10^6 \ \mathrm{N \cdot m/rad}$.

Figura 3.24 | Sistema de propulsão simplificado



Fonte: elaborada pelo autor.

Também foram calculados os momentos de inércia de massa polar do motor, do eixo e da hélice, como sendo respectivamente $J_1 = 4{,}0 \times 10^5 \,\text{kgm}^2$, $J_2 = 43 \times 10^6 \,\text{kgm}^2$ e $J_3 = 5 \times 10^3 \,\text{kgm}^2$. Além disso, sabe-se que as rigidezes do eixo são dadas por $k_{t2} = k_{t3} = 14 \times 10^6 \,\text{N} \cdot \text{m/rad}$ e que o amortecimento da água e as frequências naturais podem ser desprezados, tendo em vista que o coeficiente de amortecimento da água é de 0,1.

Nesta seção veremos como trabalhar com sistemas com vários graus de liberdade, estudando a modelagem, a aplicação da segunda lei de Newton a esses sistemas, a utilização das equações de Lagrange, os teoremas de expansão, bem como as respostas de sistemas com vários graus de liberdade, a análise modal, a autoexcitação e a estabilidade desses sistemas.

Portanto, não se esqueça de ler o conteúdo deste livro com atenção. Bons estudos!

Não pode faltar

Em engenharia, nós tendemos sempre a simplificar ao máximo os sistemas a fim de facilitar a sua análise. Porém, na realidade, as máquinas e estruturas são sistemas com infinitos graus de liberdade, ou seja, são sistemas contínuos. Os cálculos para sistemas contínuos, como já foi dito anteriormente, são complexos e envolvem a utilização de equações diferenciais parciais, que, em parte, não apresentam solução analítica. Porém, geralmente podemos reduzir os graus de liberdade dos sistemas a um número finito de graus, o que nos resultam sistemas de equações diferenciais ordinárias que são relativamente simples de serem resolvidas.

Um método simples para aproximar um sistema contínuo de um sistema de vários graus de liberdade seria substituir a massa ou a inércia distribuída por várias massas concentradas, ligadas por molas e amortecedores com massa desprezada. São utilizadas coordenadas lineares e angulares para se descrever o movimento do sistema. Os modelos gerados por essa simplificação são chamados de sistemas de parâmetros concentrados ou sistemas de massas discretas ou ainda sistemas de massas concentradas (RAO, 2008, p. 207).

Outra forma de simplificar um sistema contínuo é substituir a geometria do sistema por um grande número de pequenos elementos; esse método é conhecido como **método dos elementos finitos** (MEF) – ou FEM, sigla em inglês que significa *Finite Element Method*, amplamente usado em mecânica e em simulação computacional.

Reflita

Será que as simulações computacionais são suficientes para resolver qualquer problema de vibrações? Será que qualquer pessoa pode fazer uma simulação sem nunca ter estudado vibrações?

Dedução de equações de movimento pela segunda lei de Newton

Para se deduzir a equação de movimento de um sistema com vários graus de liberdade, podemos usar a segunda lei de Newton, que para sistemas lineares tomará a forma de:

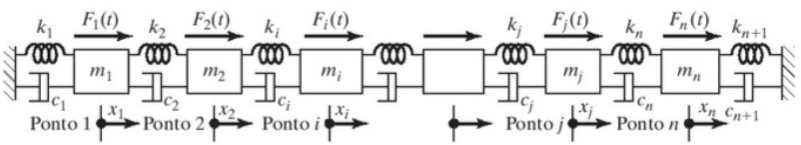
$$m_i\ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \text{ (para a massa } m_i\text{)} \tag{3.122}$$

Ou para sistemas com coordenadas angulares:

$$J_i\ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \text{ (para corpo rígido de inércia } J_i\text{)} \tag{3.123}$$

Podemos aplicar essas deduções ao sistema massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 3.25.

Figura 3.25 | Sistemas com vários graus de liberdade



Fonte: Rao (2008, p. 209).

De acordo com a Figura 3.25, devido ao sistema estar acoplado, teremos uma relação de elementos que nos dará a seguinte equação de movimento:

$$m_n\ddot{x}_n - c_n\dot{x}_{n-1} + \left(c_n + c_{n+1}\right)\dot{x}_n - k_n x_{n-1} + \left(k_n + k_{n+1}\right)x_n = F_n \tag{3.124}$$

Isso nos permite escrever a equação na forma matricial, resultando em:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{3.125}$$

Em que [m], [c] e [k] são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Assim, como vimos anteriormente, essas matrizes tomarão as seguintes formas:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

$$[c]=\begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3+c_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & (c_n+c_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & (k_n+k_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Ainda, $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ e $\vec{F}$ são os vetores aceleração, velocidade, deslocamento e força, respectivamente, dados por:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ \dot{\vec{x}}=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix},\ \ddot{\vec{x}}=\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } \vec{F}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

Isso nos permite trabalhar simultaneamente com as equações, o que é necessário em sistemas acoplados.

Coeficiente de influência

De acordo com Rao (2008, p. 220), por vezes é útil representar as equações de movimento de sistemas com vários graus de liberdade em termos de coeficientes de influência. Para isso, devemos associar os coeficientes de influência a cada uma das matrizes das equações de movimento. O coeficiente de inércia é associado à matriz de massas, e o coeficiente de rigidez à matriz de rigidez. Existem, ainda, casos em que é conveniente reescrever as equações de movimento utilizando a inversa da matriz de rigidez ou a inversa da matriz de massa. Assim, temos que os coeficientes correspondentes a essas matrizes são, respectivamente, o coeficiente de influência de flexibilidade e o coeficiente de inércia inverso.

Pesquise mais

Para saber mais sobre a aplicação e o desenvolvimento dos equacionamentos por coeficientes de influência, veja as páginas de 210 a 217 do livro:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Utilização de equações de Lagrange para deduzir equações de movimento

Podemos deduzir as equações de movimento de um sistema vibracional fazendo uso das equações de Lagrange; isso é útil, pois utilizam-se das teorias de energia, cuja importância já foi demonstrada. Podemos expressar essas equações para um sistema de n graus de liberdade como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=Q_j^{(n)}\,,\ j=1,2,3,\cdots,n \tag{3.126}$$

Na qual $\dot{q}_j$ é a velocidade generalizada e $Q_j^{(n)}$ é a força generalizada não conservativa correspondente à coordenada generalizada q_j. As forças $Q_j^{(n)}$ podem ser tanto forças dissipativas quanto forças externas que não são deriváveis de uma função potencial. Ainda, temos que T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema.

Podemos calcular a força $Q_j^{(n)}$ que age sobre a k-ésima massa do sistema pela seguinte equação:

$$Q_j^{(n)}=\sum_k\left(F_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}+F_{yk}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}+F_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) \tag{3.127}$$

Sendo F_{xk}, F_{yk} e F_{zk} as forças externas que agem sobre a k-ésima massa nas coordenadas x, y e z. Ainda, x_k, y_k e z_k são os deslocamentos da k-ésima massa. Para um sistema torcional, podemos substituir as forças F pelos momentos M, tendo os deslocamentos lineares x, y e z, substituídos por deslocamentos angulares em torno de cada eixo de rotação dados por θ_x, θ_y e θ_z.

Se o sistema for conservativo, então a somatória das forças não conservativas será nula, ou seja, $Q_j^{(n)}=0$, e a equação toma a forma de:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=0\,,\ j=1,2,3,\cdots,n \tag{3.128}$$

Com isso, é possível utilizar as equações de Lagrange para deduzir as equações de movimento na forma matricial. Vejamos a equação de Lagrange na forma linear, dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) \varnothing \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad F_i, \quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{3.129}$$

Em que F_i corresponde à força generalizada na i-ésima coordenada generalizada x_i, e $\dot{x}_i$ é a velocidade generalizada. Assim, podemos expressar as energias cinética e potencial, respectivamente, como formas matriciais dadas por:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T [m] \dot{\vec{x}} \tag{3.130}$$

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T [k] \vec{x} \tag{3.131}$$

Em que $\vec{x}$ é o vetor coluna de deslocamentos, dado por:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Aplicando a teoria de matrizes juntamente com a simetria de [m] e [k], obteremos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2}\vec{\delta}^T [m] \dot{\vec{x}} + \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T [m] \vec{\delta} = \vec{\delta}^T [m] \dot{\vec{x}} = \vec{m}_i^T \dot{\vec{x}} \quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{3.132}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\vec{\delta}^T [k] \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T [k] \vec{\delta} = \vec{\delta}^T [k] \vec{x} = \vec{k}_i^T \dot{\vec{x}} \quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{3.133}$$

Em que δ_{ij} é o delta de Kronecker (sendo igual a 1 quando $j = i$ e igual a 0 quando $j \neq i$); $\vec{\delta}$ é o vetor coluna dos deltas de Kronecker; $\vec{m}_i^T$ é o vetor linha correspondente à i-ésima linha da matriz [m]; e $\vec{k}_i^T$ é o vetor linha correspondente a i-ésima linha da matriz [k]. Ainda, devemos diferenciar a Equação 3.132 em função do tempo, obtendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = \vec{m}_i^T \ddot{\vec{x}}, \quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{3.134}$$

Assim, se substituirmos as Equações 3.132, 3.133 e 3.134 em 3.129, teremos a equação de movimento na forma matricial de um sistema massa--mola com vários graus de liberdade, representada por:

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=\vec{F} \tag{3.135}$$

Na qual,

$$\vec{F}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

E, no caso de não existir forças não conservativas atuando sobre o sistema, então a equação se torna:

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=0 \tag{3.136}$$

Essa equação corresponde à vibração livre e não amortecida do sistema. Nesse caso, se aplicarmos uma perturbação inicial ao sistema, ele vibrará indefinidamente. Podemos aplicar uma solução para equação da seguinte forma:

$$x_i(t)=X_i(t)T(t)\,,\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{3.137}$$

Em que X_i é uma constante, e T é uma função do tempo t. Essa solução mostra que a razão entre as amplitudes das duas coordenadas $x_i(t)/x_j(t)$ é independente do tempo, ou seja, todas as coordenadas têm movimentos síncronos. Com isso, a configuração do sistema não muda de forma, mas as amplitudes se alteram. A configuração do sistema é dada pelo vetor (autovetor):

$$\vec{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Dado que esse vetor é conhecido como a **forma modal** do sistema. Substituindo 3.137 em 3.136, obtemos:

$$[m]\vec{X}\ddot{T}(t)+[k]\vec{X}T(t)=0 \tag{3.138}$$

Isso nos leva à seguinte equação:

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\vec{X}=0 \tag{3.139}$$

Que tem como solução:

$$T(t)=C_1\cos(\omega t+\phi) \tag{3.140}$$

Em que C_1 é a amplitude e ϕ é o ângulo de fase. Nesse caso, a Equação 3.140 mostra que as coordenadas podem ter um movimento harmônico com a mesma frequência ω e o mesmo ângulo de fase, mas ω não é um valor arbitrário e deve satisfazer a Equação 3.139. Para uma solução não trivial da Equação 3.139, o determinante de $\vec{X}$ é zero e, portanto:

$$\Delta=\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0 \tag{3.141}$$

Isso resulta em uma equação polinomial de n-ésima ordem em ω^2. A solução desse polinômio dará n valores de ω^2 (autovalores) em ordem ascendente, ou seja, suas raízes quadradas darão $\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n$. Os valores de ω são as frequências naturais do sistema, e ω_1 é chamada de **frequência fundamental**, por ser a primeira. Essas frequências representam todos os possíveis pontos de ressonância do sistema e, conforme já foi discutido, devem ser evitados, pois apresentarão picos de amplitude (RAO, 2008, p. 221).

Assimile

Os sistemas vibratórios com vários graus de liberdade apresentam em sua solução os autovetores e autovalores, que correspondem à forma modal e às frequências naturais correspondentes.

Teorema de expansão

Os autovetores possuem propriedades de ortogonalidade, sendo linearmente independentes. Com isso, formam uma base no espaço n-dimensional. Assim, qualquer vetor pode ser representado pela combinação linear dos n vetores linearmente independentes. Se $\vec{x}$ for um vetor qualquer nesse espaço n-dimensional, este pode ser expresso por:

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{X}^{(i)} \tag{3.142}$$

Em que c_i é uma constante. Se multiplicarmos esse vetor por $\vec{X}^{(i)T}[m]$, poderemos expressar c_i como:

$$c_i=\frac{\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{x}}{\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)}}=\frac{X^{(i)T}[m]\vec{x}}{M_{ij}} \tag{3.143}$$

Em que M_{ij} é a massa generalizada no i-ésimo modo normal. Se os vetores modais $X^{(i)}$ forem normalizados, temos que será dado por:

$$c_i = \vec{X}^{(i)T}[m]\vec{x}\ ,\quad i = 1,2,3,\cdots,n \tag{3.144}$$

Essa equação é conhecida como **teorema de expansão** e é muito útil para se representar a resposta de sistemas com vários graus de liberdade, sujeitos a condições forçantes gerais, por um procedimento conhecido como **análise modal**.

Pesquise mais

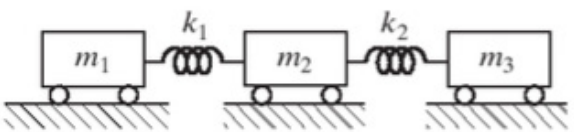
Para compreender melhor as teorias por trás do desenvolvimento das equações dos modos normais, autovalores, autovetores e as propriedades que os precedem, dê uma olhada nas páginas 219 a 226 do livro:

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Sistemas irrestritos

Sistemas não acoplados ou sistemas que podem se mover sem restrições nem suportes são chamados de **sistemas irrestritos**. Um exemplo desse caso seria a aplicação de vagões unidos por elementos de mola, como mostrado na Figura 3.26.

Figura 3.26 | Vagões unidos por elemento de mola



Fonte: Rao (2008, p. 227).

Esse sistema move-se por inteiro como um corpo rígido e, devido a isso, pode ser considerado um modo de oscilação com frequência zero. A energia cinética é sempre positiva, sendo então a matriz de massas positiva e definida. Já a energia potencial é zero sem que $\vec{x}$ seja zero. Portanto, a matriz de rigidez é semidefinida (RAO, 2008, p. 226).

Vibração livre de sistemas não amortecidos

Um sistema livre e não amortecido tem sua equação de movimento dada na forma matricial por:

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=0 \tag{3.136}$$

Sua solução pode ser expressa por uma combinação de soluções lineares representadas por:

$$\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\vec{X}^{(i)}A_i\cos\left(\omega_i t+\phi_i\right) \tag{3.145}$$

Em que $\vec{X}^{(i)}$ é o i-ésimo vetor modal e ω , sua frequência natural correspondente. A_i e ϕ_i são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema dadas por:

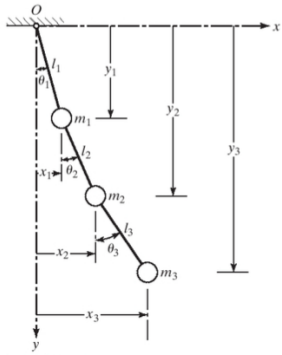
$$\vec{x}(0)=\sum_{i=1}^{n}\vec{X}^{(i)}A_i\cos\left(\phi_i\right) \tag{3.146}$$

$$\text{e}\quad \dot{\vec{x}}(0)=-\sum_{i=1}^{n}\vec{X}^{(i)}A_i\omega_i\,\text{sen}\left(\phi_i\right) \tag{3.147}$$

Exemplificando

Um pêndulo composto pode ser observado na Figura 3.27.

Figura 3.27 | Pêndulo composto



Fonte: Rao (2008, p. 218).

Esse pêndulo teve sua equação de movimento encontrada a partir das equações de Lagrange e se apresenta da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2+m_3)l_1^2 & (m_2+m_3)l_1l_2 & m_3l_1l_3 \\ (m_2+m_3)l_1l_2 & (m_2+m_3)l_2^2 & m_3l_2l_3 \\ m_3l_1l_3 & m_3l_2l_3 & m_3l_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (m_1+m_2+m_3)gl_1 & 0 & 0 \\ 0 & (m_2+m_3)gl_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3gl_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com isso, podemos determinar as frequências naturais do sistema tendo $l_1 = 20\text{ cm}$, $l_2 = 30\text{ cm}$, $l_3 = 40\text{ cm}$, $m_1 = 1\text{ kg}$, $m_2 = 2\text{ kg}$ e $m_3 = 3\text{ kg}$. Devemos substituir os valores na equação de movimento, resultando em:

$$\begin{bmatrix} (1+2+3)0{,}02^2 & (2+3)0{,}02\cdot 0{,}03 & 3\cdot 0{,}02\cdot 0{,}04 \\ (2+3)0{,}02\cdot 0{,}03 & (2+3)0{,}03^2 & 3\cdot 0{,}03\cdot 0{,}04 \\ 3\cdot 0{,}02\cdot 0{,}04 & 3\cdot 0{,}03\cdot 0{,}04 & 3\cdot 0{,}04^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (1+2+3)9{,}81\cdot 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & (2+3)9{,}81\cdot 0{,}03 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 9{,}81\cdot 0{,}04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}24 & 0{,}30 & 0{,}24 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}36 \\ 0{,}24 & 0{,}36 & 0{,}48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 11{,}772 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}715 & 0 \\ 0 & 0 & 11{,}772 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para o movimento harmônico temos que $-\omega^2[m]\vec{X} + [k]\vec{X} = 0$ e, no caso de ser movimento angular, podemos substituir o $\vec{X}$ por $\vec{\Theta}$, ou seja:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}24 & 0{,}30 & 0{,}24 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}36 \\ 0{,}24 & 0{,}36 & 0{,}48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 11{,}772 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}715 & 0 \\ 0 & 0 & 11{,}772 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como o determinante da matriz de coeficientes deve ser zero, então $\Delta = 0 = \left|[k] - \omega^2[m]\right|$, assim, podemos encontrar a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \omega^2(0{,}24) - 11{,}772 & \omega^2(0{,}30) & \omega^2(0{,}24) \\ \omega^2(0{,}30) & \omega^2(0{,}45) - 14{,}715 & \omega^2(0{,}36) \\ \omega^2(0{,}24) & \omega^2(0{,}36) & \omega^2(0{,}48) - 11{,}772 \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante da matriz e igualando a zero, temos:

$$\omega^6 - 600,8625\omega^2 + 54132,806\omega^2 - 590047,6 = 0$$

Utilizando o método de polinômios para resolver, encontraremos as seguintes raízes:

$\omega_1^{\ 2} = 12,6335 \rightarrow \omega_1 = 3,554364\,\text{rad/s}$

$\omega_2^{\ 2} = 94,6116 \rightarrow \omega_2 = 9,726849\,\text{rad/s}$

$\omega_3^{\ 2} = 493,619 \rightarrow \omega_3 = 22,217538\,\text{rad/s}$

Com isso, encontramos as frequências de pico de amplitude do sistema.

Vibração forçada de sistemas não amortecidos utilizando análise modal

Analogamente a um sistema livre, a equação de movimento de um sistema com mais de um grau de liberdade não amortecido, submetido a excitação, é dada por:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{3.148}$$

Para resolver essa equação por análise modal, primeiramente devemos resolver o problema de autovalor:

$$\omega^2 [m]\vec{X} = [k]\vec{X} \tag{3.149}$$

Além disso, temos também que determinar as frequências naturais e modos correspondentes. Pelo teorema de expansão, a solução da Equação 3.148 pode ser expressa como vetor, pela combinação linear dos modos normais:

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)} \tag{3.150}$$

Em que $q_n(t)$ são as coordenadas generalizadas dependentes do tempo, conhecidas como coordenadas principais ou coeficientes de participação modal. Podemos reescrever a Equação 3.150 como:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}_n(t) \tag{3.151}$$

Sendo [X] e $\vec{q}_n(t)$ a matriz modal e o vetor das coordenadas principais, respectivamente, dados por:

$$[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} & \cdots & \vec{X}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{q}_n(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}$$

Como [X] não é em função do tempo, podemos determinar a aceleração como:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [X]\ddot{\vec{q}}(t) \tag{3.152}$$

Assim, podemos reescrever a Equação 3.148 como:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}} + [k][X]\vec{q} = \vec{F} \tag{3.153}$$

Pré-multiplicando a Equação 3.153 por $[X]^T$, obtemos:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \tag{3.154}$$

Normatizando os modos normais pela ortogonalidade, temos:

$$[X]^T[m][X] = [I] \tag{3.155}$$

e

$$[X]^T[k][X] = \left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right] \tag{3.156}$$

Se definirmos um vetor de forças generalizadas $\vec{Q}(t)$ associado às coordenadas generalizadas $q_n(t)$ como sendo $\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t)$, podemos reescrever a Equação 3.154, aplicando as Equações 3.155 e 3.156, tendo assim a equação reduzida dada por:

$$\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{3.157}$$

Essa equação denota um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem não acopladas, do tipo:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \qquad \text{i = 1, 2, ..., 3}$$

Que apresenta a seguinte solução:

$$q_i(t) = q_i(0)\cos(\omega_i t) + \left(\frac{\dot{q}(0)}{\omega_i}\right)\text{sen}(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t Q_i(\tau)\,\text{sen}\left[\omega_i(t-\tau)\right]d\tau \qquad \text{i = 1, 2, ..., n} \tag{3.158}$$

Para encontrar os deslocamentos e as velocidades generalizadas iniciais ($q_i(0)$ e $\dot{q}_i(0)$), devemos encontrar os deslocamentos e as velocidades físicas iniciais ($x_i(0)$ e $\dot{x}_i(0)$). E uma vez determinados $q_i(t)$, podemos determinar os deslocamentos físicos $x_i(t)$.

Vibrações forçadas em sistemas com amortecimento viscoso

Por vezes, o amortecimento do sistema não pode ser desprezado, como em casos em que a resposta do sistema é exigida em tempos longos e quando as frequências de excitação estão próximas das frequências naturais. É

conveniente, a fim de analisar sistemas com amortecimento viscoso, introduzir na dedução das equações de movimento uma função R conhecida como função de dissipação de Rayleigh, dada por:

$$R = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T [c] \dot{\vec{x}} \tag{3.159}$$

Em que [c] é a matriz de amortecimento. Nesse caso, a equação de movimento será:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{3.160}$$

Para simplificar os cálculos, faremos uma aproximação da matriz de amortecimento, para uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez. Assim, teremos:

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\alpha[I] + \beta\left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right]\right]\dot{\vec{q}}(t) + \left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{3.161}$$

Esse amortecimento é conhecido como amortecimento proporcional, sendo α e β constantes. Substituindo a Equação 3.161 em 3.160, teremos:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + \left[\alpha[m] + \beta[k]\right]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{3.162}$$

Como vimos anteriormente, podemos expressar o vetor solução como uma combinação dos modos naturais; assim, teremos:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t) \tag{3.163}$$

Portanto, a Equação 3.162 pode ser reescrita como:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\alpha[m] + \beta[k]\right][X]\dot{\vec{q}}(t) + [k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}(t) \tag{3.164}$$

Analogamente ao procedimento realizado na Equação 3.153, pré-multiplicando a Equação 3.164 por $[X]^T$ e normalizando pela ortogonalidade, teremos a equação reduzida:

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\alpha[I] + \beta\left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right]\right]\dot{\vec{q}}(t) + \left[\nwarrow \omega^2 \searrow\right]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{3.165}$$

Sendo assim, teremos uma combinação de equações diferenciais de segunda ordem não acopladas que pode ser reescrita como:

$$\ddot{q}_i(t) + \left(\alpha + \omega_i^2 \beta\right)\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad \text{i = 1, 2, ..., n} \tag{3.166}$$

Podemos escrever que:

$$\alpha + \omega_i^2 \beta = 2\zeta_i \omega_i \tag{3.167}$$

Em que ζ_i é o fator de amortecimento modal, correspondente ao i-ésimo modo normal. Assim, a Equação 3.166 se torna:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad \text{i} = 1, 2, ..., \text{n} \tag{3.168}$$

Dessa forma, a solução, quando $\zeta_i < 1$, pode ser expressa como:

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t}\left\{\cos\left(\omega_{di} t\right) + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_{di} t\right)\right\} q_i(0) + \left\{\frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i \omega_i t} \operatorname{sen}\left(\omega_{di} t\right)\right\} \dot{q}(0) + \text{i}=1, 2, ..., \text{n} \tag{3.169}$$
$$+ \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \operatorname{sen}\left[\omega_{di}\left(t-\tau\right)\right] d\tau$$

Sendo $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}$.

Pesquise mais

Veja o livro a seguir para saber mais sobre as definições dos equacionamentos de vibração forçada não amortecida e amortecida (páginas de 229 a 235) e para compreender melhor a ortogonalidade por meio do **problema de autovalor** e sua solução (páginas de 221 a 224):

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Autoexcitação e análise de estabilidade

Temos que o atrito gera um amortecimento negativo em sistemas vibratórios, o que leva o sistema à instabilidade. Para sistemas com n graus de liberdade, a equação de movimento é dada por:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{3.170}$$

Já vimos anteriormente a solução para análise de estabilidade de sistemas com dois graus de liberdade, sendo que essa mesma solução pode ser estendida para resolver problemas com n graus. Assim, podemos deduzir uma solução como:

$$x(t) = \vec{C} e^{st} \tag{3.171}$$

Em que s é um número complexo a ser determinado e $\vec{C}$ é o vetor de amplitudes de $\vec{x}$, dado por:

$$\vec{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}$$

A parte real de s determina o amortecimento do sistema e a parte imaginária determina a frequência natural. Assim, a substituição da Equação 3.171 em 3.170, para vibrações livres em que $\vec{F} = 0$, resulta:

$$\left([m]s^2 + [c]s + [k]\right)\vec{C}e^{st} = 0 \tag{3.172}$$

Para uma solução não trivial de C_j, o determinante dos coeficientes de C_j é igualado a zero:

$$D\check{}s = \left\|[m]s^2 + [c]s + [k]\right\| = \tag{3.173}$$

A Equação 3.173 resulta em uma equação polinomial de ordem m = 2n, tendo assim:

$$D(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_{m-1}s + a_m = 0 \tag{3.174}$$

Para resolver a equação polinomial de forma simplificada, podemos aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Para aplicar esse critério, devemos montar o seguinte determinante de m-ésima ordem (T_m) como sendo:

$$T_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2m-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & a_m \end{vmatrix} \tag{3.175}$$

Assim, as subdeterminantes serão dadas como:

$$T_1 = a_1 \text{ , } T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \text{ , } T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \cdots \tag{3.176}$$

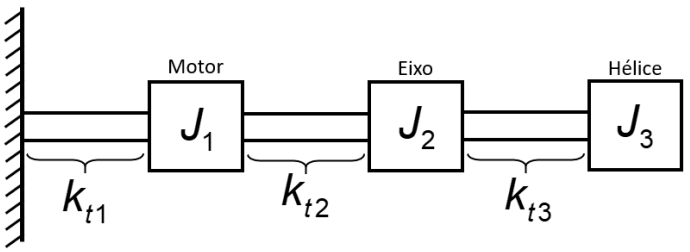
Nesses subdeterminantes, todos os coeficientes a_i com i > m e i < 0 devem ser substituídos por zero. Pelo critério de Routh-Hurwitz, para que

a estabilidade do sistema seja satisfeita, todos os coeficientes a_i e todos os subdeterminantes T_i devem ser positivos.

Sem medo de errar

Você e sua equipe já resolveram alguns cálculos sobre o navio e obtiveram alguns dados que lhes permitirão encontrar as frequências naturais do sistema de propulsão. Assim, vocês chegaram à conclusão de que poderiam facilitar os cálculos se considerassem todo o sistema como um sistema torcional, como mostrado na Figura 3.24, considerando o motor como sendo fixado ao navio por uma haste com rigidez $k_{t1} \varnothing 7 \quad 10^6 \text{ N m/rad}$. Vocês encontraram que, $J_1 = 4\times10^5 \text{kgm}^2$, $J_2 = 43\times10^6 \text{kgm}^2 >$ e $J_3 = 5\times10^3 \text{kgm}^2$. E, além disso, sabe-se que as rigidezes do eixo são dadas por <<Eqn_s3191.wmf>>, uma vez que, para seus cálculos, vocês desprezarão o amortecimento da água e as frequências naturais, já que o coeficiente de amortecimento da água é de 0,1.

Figura 3.24 | Sistema de propulsão simplificado



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Para encontrarmos as frequências naturais, aplicaremos as equações de Lagrange, lembrando que, para as frequências naturais, o sistema estará em regime de vibração livre e, ainda desprezando o amortecimento, teremos uma vibração livre não amortecida. Com isso, a equação de Lagrange será:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Considerando que nosso sistema é torcional teremos que $q_i = \theta_i$. Para $i = 1,2,3$, teremos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \text{ e } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_3} + \frac{\partial V}{\partial \theta_3} = 0$$

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2$$

A energia potencial devido à rigidez do sistema será:

$$V = \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}\left(\theta_3 - \theta_2\right)^2$$

Substituindo as energias na equação de Lagrange, teremos três equações dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_1}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}\left(\theta_3 - \theta_2\right)^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_2}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}\left(\theta_3 - \theta_2\right)^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_3}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}\left(\theta_3 - \theta_2\right)^2\right) = 0$$

E aplicando a derivação teremos:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + \left(k_{t1} + k_{t2}\right)\theta_1 + k_{t2}\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + \left(k_{t2} + k_{t3}\right)\theta_2 - k_{t2}\theta_1 - k_{t3}\theta_3 = 0$$

$$J_3\ddot{\theta}_3 + k_{t3}\theta_3 - k_{t3}\theta_2 = 0$$

Isso nos permite gerar a seguinte equação de movimento em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(k_{t1} + k_{t2}\right) & -k_{t2} & 0 \\ -k_{t2} & \left(k_{t2} + k_{t3}\right) & -k_{t3} \\ 0 & -k_{t3} & k_{t3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo os valores de J e k, teremos:

$$\begin{bmatrix} 4\times10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 43\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times10^3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \left(7\times10^6+14\times10^6\right) & -14\times10^6 & 0 \\ -14\times10^6 & \left(14\times10^6+14\times10^6\right) & -14\times10^6 \\ 0 & -14\times10^6 & 14\times10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\times10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 43\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times10^3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 21\times10^6 & -14\times10^6 & 0 \\ -14\times10^6 & 28\times10^6 & -14\times10^6 \\ 0 & -14\times10^6 & 14\times10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para conseguirmos encontrar as frequências naturais, teremos que igualar a equação acima à equação característica de frequências dada por $-\omega^2[m]\vec{X}+[k]\vec{X}=0$. Assim, teremos:

$$-\omega^2\begin{bmatrix} 4\times10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 43\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times10^3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 21\times10^6 & -14\times10^6 & 0 \\ -14\times10^6 & 28\times10^6 & -14\times10^6 \\ 0 & -14\times10^6 & 14\times10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Agora, temos que igualar o determinante da matriz de coeficientes a zero:

$$\Delta=0=-\omega^2\begin{bmatrix} 4\times10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 43\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times10^3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 21\times10^6 & -14\times10^6 & 0 \\ -14\times10^6 & 28\times10^6 & -14\times10^6 \\ 0 & -14\times10^6 & 14\times10^6 \end{bmatrix}$$

O que nos resultará em:

$$0=\begin{bmatrix} -\omega^2\left(4\times10^5\right)+21\times10^6 & -14\times10^6 & 0 \\ -14\times10^6 & -\omega^2\left(43\times10^6\right)+28\times10^6 & -14\times10^6 \\ 0 & -14\times10^6 & -\omega^2\left(5\times10^3\right)+14\times10^6 \end{bmatrix}$$

$$-\omega^6\left(8{,}6\times10^{16}\right)+\omega^4\left(2{,}45371\times10^{20}\right)-\omega^2\left(1{,}272356\times10^{22}\right)+1{,}372\times10^{21}=0$$

Esse polinômio nos retornará as seguintes raízes:

$$\omega_1^{\,2}=0{,}10806\rightarrow\omega_1=0{,}32872\ \text{rad/s}$$

$$\omega_2^{\,2}=52{,}72257\rightarrow\omega_3=7{,}26103\ \text{rad/s}$$

$$\omega_3^{\,2}=2800{,}32054\rightarrow\omega_3=52{,}91805\ \text{rad/s}$$

Assim, encontramos as raízes do polinômio que representam as frequências naturais do sistema. Concluindo, temos que essas frequências devem ser

evitadas, pois são as frequências nas quais ocorre ressonância e, consequentemente, os picos de tensão do sistema que podem levá-lo a falhas catastróficas.

Avançando na prática

Resposta de vibração por análise modal

Descrição da situação-problema

Imagine que você é responsável por uma equipe de engenheiros de uma empresa que presta consultoria em análise de sistemas dinâmicos. Nesse momento, sua equipe está analisando uma máquina de uma indústria química que está apresentando picos de vibração, e você e sua equipe modelaram o sistema obtendo a seguinte equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Assim, para dimensionar a resposta da máquina, vocês decidiram aplicar a análise modal, sabendo que as massas são $m_1 = 20\ \text{kg}$ e $m_2 = 2\ \text{kg}$, $k_1 = 60\,\text{N/m}$, $k_2 = 10\,\text{N/m}$ e $k_3 = 0$. Além disso, as condições iniciais do sistema foram medidas como:

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolução da situação-problema

Primeiramente, devemos encontrar as frequências naturais e os modos de vibrar da máquina. Para isso, vamos aplicar um equacionamento já conhecido e levar em conta que as frequências naturais são dadas quando o sistema é livre, portanto, quando F = 0. Dessa forma, teremos a matriz de correlação dada por:

$$\begin{bmatrix} \left\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\right\} & -k_2 \\ -k_2 & \left\{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\right\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \left\{-20\omega^2+70\right\} & -10 \\ -10 & \left\{-2\omega^2+10\right\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Em seguida, devemos igualar a zero o determinante da matriz que correlaciona tanto as frequências quanto as amplitudes X_1 e X_2, assim:

$$\det \begin{bmatrix} \left\{-20\omega^2+70\right\} & -10 \\ -10 & \left\{-2\omega^2+10\right\} \end{bmatrix} = 0$$

O que nos resulta na seguinte equação polinomial:

$$40\omega^4 - 340\omega^2 + 600 = 0$$

E a equação polinomial tem duas raízes:

$$\omega_1^{\,2} = 2{,}5 \, {}^{\mathrm{rad}}\!/_{\mathrm{s}} \;\text{ e }\; \omega_2^{\,2} = 6 \, {}^{\mathrm{rad}}\!/_{\mathrm{s}}$$

O que nos dá:

$$\omega_1 = 1{,}5811 \, {}^{\mathrm{rad}}\!/_{\mathrm{s}} \;\text{ e }\; \omega_2 = 2{,}4495 \, {}^{\mathrm{rad}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Substituindo $\omega_1^{\,2}$ na matriz de correlação, encontraremos que $X_2^{(1)} = 2X_1^{(1)}$, e substituindo $\omega_2^{\,2}$ na matriz, obtemos $X_2^{(2)} = -5X_1^{(2)}$, o que nos permite montar os vetores modais como:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)} \;\text{ e }\; \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)}$$

Pela ortogonalização dos modos normais em relação à matriz de massas, obteremos os valores de $X_1^{(1)}$ e $X_1^{(2)}$. Dessa forma:

$$\vec{X}^{(1)T}[m]X^{(1)} = 1 \Rightarrow \left(X_1^{(1)}\right)^2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{14}} = 0{,}1890$$

E

$$\vec{X}^{(2)T}[m]X^{(2)} = 1 \Rightarrow \left(X_1^{(2)}\right)^2 \begin{Bmatrix} -5 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{14}} = 0{,}1195$$

Assim, a matriz modal se torna:

$$[X] = \left[\vec{X}^{(1)} \quad \vec{X}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0{,}1890 & 0{,}1195 \\ 0{,}3780 & -0{,}5975 \end{bmatrix}$$

Para determinarmos a resposta, podemos escrever a equação de movimento em relação às coordenadas generalizadas:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0$$

A resposta generalizada do sistema será:

$$q_i(t) = q_{i0}\cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i}\operatorname{sen}(\omega_i t)$$

Em que q_{i0} e $\dot{q}_{i0}$ são os valores iniciais de $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$, respectivamente. Podemos definir essas condições por meio das condições iniciais do sistema dadas anteriormente. Assim, teremos:

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_{10}(0) \\ q_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T [m]\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}1890 & 0{,}3780 \\ 0{,}1195 & -0{,}5975 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} 3{,}78 \\ 2{,}39 \end{Bmatrix}$$

E

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} q_{10}(0) \\ q_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T [m]\dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultando nas respostas generalizadas de cada frequência natural, que são dadas por:

$$q_1(t) = 3{,}78\cos(1{,}5811t) \text{ e } q_2(t) = 2{,}39\cos(2{,}4495t)$$

Assim, podemos determinar o deslocamento das massas como sendo:

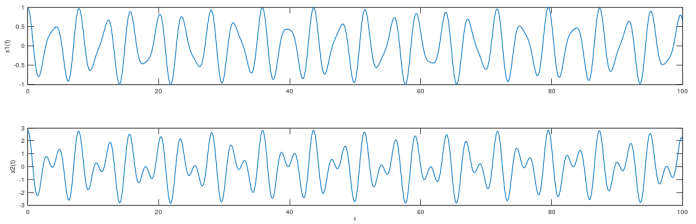
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}1890 & 0{,}1195 \\ 0{,}3780 & -0{,}5975 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 3{,}78\cos(1{,}5811t) \\ 2{,}39\cos(2{,}4495t) \end{Bmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,7144\cos(1,5811t) + 0,2856\cos(2,4495t) \\ 1,4288\cos(1,5811t) + 1,4280\cos(2,4495t) \end{Bmatrix}$$

Essa equação nos denota o comportamento de cada uma das massas quando passam por suas frequências naturais, como mostrado nos gráficos da Figura 3.28.

Figura 3.28 | Resposta do sistema por análise modal



Fonte: elaborada pelo autor.

Como podemos perceber, os gráficos mostram os deslocamentos das massas a qualquer instante de tempo, para as frequências naturais do sistema. Com isso, concluímos com êxito a resolução da problematização proposta.

Faça valer a pena

1. Os sistemas vibratórios que apresentam uma quantidade determinada de graus de liberdade são conhecidos como sistemas discretos, enquanto que um sistema com infinitos graus de liberdade pode ser chamado de sistema contínuo, sendo este último muito complexo de ser resolvido.

Em relação aos sistemas apresentados no texto-base, assinale a alternativa correta.

a) Os sistemas contínuos podem ser satisfatoriamente simplificados em sistemas discretos, a fim de facilitar sua resolução.

b) Sistemas discretos podem ser transformados em sistemas contínuos, para que sejam mais complexos de serem resolvidos.

c) Para facilitar a resolução de determinados sistemas discretos, podemos dividi-los em vários sistemas de um grau de liberdade.

d) Sempre que um sistema vibratório for complexo para ser resolvido, podemos contratar alguém para resolvê-lo.

e) Uma vez que os sistemas contínuos são complexos, não existe forma de resolvê-los sem o uso de simulação computacional.

2. Os sistemas vibratórios com vários graus de liberdade podem ser resolvidos com métodos matriciais que têm uma forma característica como $[m]\ddot{\vec{x}}+[c]\dot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=\vec{F}$. Considere que um sistema vibratório acoplado qualquer com três graus de liberdade apresenta a seguinte equação de movimento:

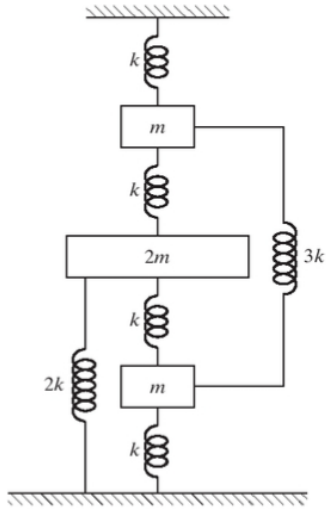
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+1.000\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com base na equação de movimento apresentada, qual é o tipo de vibração e quais os valores das massas do sistema? Considere que as massas são dadas em quilogramas (kg). Assinale a alternativa correta.

a) Vibração forçada não amortecida, sendo as massas: $m_1=3\text{ kg}$, $m_2=4\text{ kg}$ e $m_3=7\text{ kg}$.
b) Vibração livre amortecida, sendo as massas: $m_1=3\text{ kg}$, $m_2=4\text{ kg}$ e $m_3=7\text{ kg}$.
c) Vibração livre não amortecida, sendo as massas: $m_1=3\text{ kg}$, $m_2=4\text{ kg}$ e $m_3=7\text{ kg}$.
d) Vibração forçada não amortecida, sendo as massas: $m_1=7\text{ kg}$, $m_2=4\text{ kg}$ e $m_3=3\text{ kg}$.
e) Vibração livre não amortecida, sendo as massas: $m_1=7\text{ kg}$, $m_2=4\text{ kg}$ e $m_3=3\text{ kg}$.

3. Observe o sistema acoplado mostrado na figura a seguir:

Figura | Sistema acoplado



Fonte: Rao (2008, p. 245).

Durante a análise desse sistema vibratório, foram deduzidas algumas equações de movimento, dadas por:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) - 3k(x_1 - x_3)$$

$$2m\ddot{x}_2 = -2kx_2 - k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$$

$$m\ddot{x}_3 = -kx_3 - 3k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2)$$

A partir das equações apresentadas no texto-base, defina a equação de movimento na forma matricial, que rege o sistema vibratório.

Assinale a alternativa que apresenta a equação matricial correta.

a) $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k & -k & -3k \\ -k & 4k & -k \\ -3k & -k & 5k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & -k & -3k \\ -2k & -k & -k \\ -k & -3k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & -k & -3k \\ -2k & -k & -k \\ -k & -3k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -5k & k & 3k \\ k & -4k & k \\ 3k & k & -5k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$

e) $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k & -3k \\ -k & 4k & -k \\ -3k & -k & 5k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$

Referências

HIBBELER, R. C. **Dinâmica:** mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2011. 591 p.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Unidade 4

Controle e medições de vibração

Convite ao estudo

Caro aluno, imagine que você está em seu carro, dirigindo em uma autoestrada e, de repente, quando atinge uma certa velocidade, o carro se torna instável e começa a emitir ruídos muito altos, ficando quase que insuportável dirigir. Este efeito ocorre devido a vibrações causadas pelos esforços gerados por problemas no veículo e a condições adversas de rugosidade do asfalto, movimento das partes do carro, rotação do motor, dentre outros fatores. Nós podemos medir e reduzir estas vibrações através das estratégias corretas.

Para isso, nessa unidade de ensino você verá as ferramentas necessárias para que conheça e aplique o controle e medições de vibrações, a fim de compreender e aplicar a melhor forma de controlar vibrações para minimizar seus efeitos.

A fim de contextualizar, imagine que você é o engenheiro mecânico responsável pela análise de vibrações mecânicas do departamento de desenvolvimento de motores de uma fabricante de motores para caminhões de grande porte. Nesse momento, sua equipe está desenvolvendo um novo motor de alta potência em tamanho reduzido. Durante o processo de prototipagem, foi montado um protótipo preliminar do caminhão e, nos testes iniciais, foram observadas vibrações de grande magnitude na cabine. Essas vibrações devem ser analisadas com cautela, a fim de se propor soluções viáveis para o problema. Você já consegue imaginar como devem ser feitas as abordagens para reduzir as vibrações? Como podemos medir e controlar as vibrações de um sistema?

Num primeiro momento iremos analisar o sistema quanto ao balanceamento das partes mecânicas do motor, em seguida iremos conhecer ferramentas utilizadas para inibição da vibração e posteriormente iremos inserir um sistema de medição de vibrações a fim de monitorar a perda de eficiência do motor, devido a vibrações.

Nesta última unidade de ensino, você verá quais são as estratégias para redução e controle de vibrações, assim como serão apresentadas as formas de medição e os elementos utilizados para medir e controlar vibrações, além de aprender a aplicar os métodos propostos.

Seção 4.1

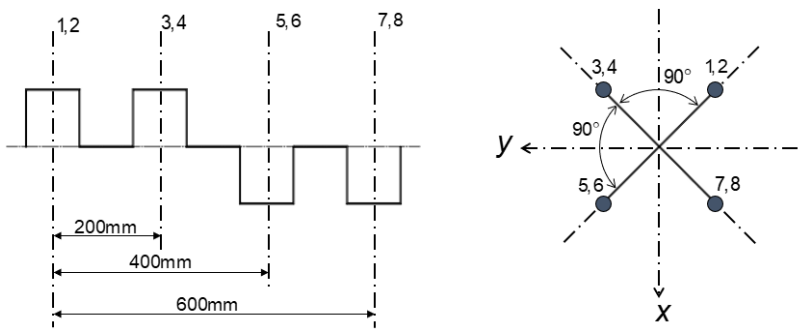
Parâmetros de controle de vibração

Diálogo aberto

Você já notou que quando estamos com o carro estacionado e ligamos o motor podemos sentir o trepidar do carro devido ao funcionamento do motor? Isto ocorre por diversos fatores, como, por exemplo, a explosão do combustível nas câmaras dos cilindros, o movimento das partes do motor e principalmente, o desbalanceamento do motor. Nessa seção, iremos dar enfoque em como controlar certas vibrações diretamente na fonte da vibração.

Para contextualizar esse assunto, imagine que você é o engenheiro mecânico responsável pela análise de vibrações do departamento de desenvolvimento de motores de uma fabricante de motores para caminhões. Sua equipe está desenvolvendo um novo motor de alta potência em tamanho reduzido, sendo que, para isto, estão testando um protótipo preliminar de um motor de 8 cilindros configurado em *V*. O protótipo foi montado em um caminhão de testes e foram observadas vibrações de grande magnitude na cabine. A primeira hipótese levantada pela equipe seria o dimensionamento incorreto dos cilindros, que se encontram desbalanceados, tendo em vista que os cilindros estão dispostos em 90° cada, como pode ser observado na Figura 4.1. Assim, cabe a você determinar se o motor está devidamente balanceado ou não e, ainda, verificar quais são as possíveis causas das vibrações que devem ser analisadas.

Figura 4.1| Posicionamento dos cilindros do motor *V8*



Fonte: elaborada pelo autor.

Você já imagina como se deve proceder para averiguar o balanceamento dos cilindros do motor? Consegue imaginar quais as outras possíveis causas de vibrações que podem ocorrer no motor?

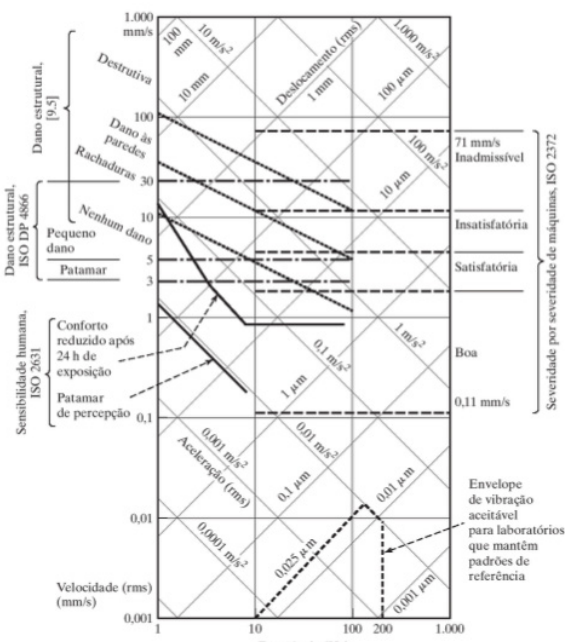
Nesta seção de estudos, você compreenderá os efeitos do desbalanceamento de motores alternativos e elementos rotativos, bem como verá como podem ser balanceados e o que tal correção causa de efeitos positivos nos sistemas. Isto te dará insumo para realizar uma análise crítica acerca das causas, efeitos e controle de vibrações. Bons estudos!

Não pode faltar

Nomograma

Os limites dos níveis aceitáveis de vibração são mostrados em um gráfico chamado **nomograma de vibração**, sendo especificados em termos da resposta de um sistema livre sem amortecimento com um grau de liberdade, sujeito à vibração harmônica. Este gráfico apresenta as variações de amplitude de deslocamento, velocidade e aceleração em função da frequência de vibração, como pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2| Nomograma de vibração



Fonte: Rao (2008, p. 306).

Para entendermos o nomograma, devemos ter em mente os equacionamentos que o produzem; assim, tendo o movimento harmônico dado por $x(t) = X\,\mathrm{sen}(\omega t)$, a velocidade e a aceleração serão dadas respectivamente por:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t) = 2\pi f X \cos(\omega t) \tag{4.1}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X\,\mathrm{sen}(\omega t) = -4\pi^2 f^2 X\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{4.2}$$

Em que ω é a frequência circular (rad/s), f é a frequência linear (Hz) e X é a amplitude de deslocamento. Assim, a amplitude de deslocamento e os valores máximos de velocidade e de aceleração estão relacionados como:

$$v_{máx} = 2\pi f X \tag{4.3}$$

$$a_{máx} = -4\pi^2 f^2 X = -2\pi f v_{máx} \tag{4.4}$$

Aplicando o logaritmo nestas relações acima, nos resultará as seguintes reações lineares:

$$\ln(v_{máx}) = \ln(2\pi f) + \ln(X) \tag{4.5}$$

$$\ln(v_{máx}) = -\ln(a_{máx}) - \ln(2\pi f) \tag{4.6}$$

Desta forma, para um valor constante de amplitude X, temos que $\ln(v_{máx})$ varia com $\ln(2\ \ f)$ em linha reta com inclinação +1 para a Eq. 4.5. Já com o valor constate de $a_{máx}$, temos que o $\ln(v_{máx})$ varia com $\ln(2\pi f)$ em linha reta com inclinação -1 para a Eq. 4.6. Assim, cada ponto do nomograma denota uma vibração harmônica específica (RAO, 2008 p.305).

Com isto, é possível encontrar e documentar várias faixas de vibração que são usuais na engenharia. Sabendo que f é a frequência e X a amplitude de deslocamento, podemos citar algumas, como:

1. Vibrações atômicas: $f = 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ com $X = 10^{-8}$ a $10^{-6}\,\mathrm{mm}$.
2. Microssismos ou pequenos deslocamentos da crosta terrestre: $f = 0{,}1$ a $1\,\mathrm{Hz}$ com $X = 10^{-5}$ a $10^{-3}\,\mathrm{mm}$.
3. Vibrações de maquinaria e edifícios: $f = 10$ a $100\mathrm{Hz}$ com $X = 0{,}01$ a $1\,\mathrm{mm}$.
4. Oscilação de edifícios altos: $f = 0{,}1$ a $5\mathrm{Hz}$ com $X = 10$ a $1000\mathrm{mm}$.

A severidade de vibração de maquinaria é definida pela norma ISO 20816-1:2016 em quinze faixas de severidade para quatro classes de máquinas, sendo: (1) pequenas, (2) médias, (3) grandes, (4) turbomáquinas. A norma ISO 4866 fornece a severidade de vibração para edifícios, causada por explosão e para vibração em regime permanente na faixa de frequência

de 1 a 100 Hz. Por fim, é importante comentar que a sensibilidade humana às vibrações tem seus limites recomentados pela norma ISO 2631. A fim de exemplificar, podemos citar a cabeça com 25 Hz, os globos oculares de 30 a 60 Hz, as pernas de 2 a 20 Hz e a coluna vertebral de 10 a 12 Hz.

Assimile

É importante ressaltar que a tolerância do ser humano à vibração de corpo inteiro é a mais baixa, de acordo com a norma ISO 2631, estando na faixa de frequência de 4 a 8 Hz. Ainda, é interessante saber que, em estudos realizados, foram observadas as seguintes faixas de frequência para os efeitos em seres humanos: tontura e náusea (0,1 a 1 Hz), turvamento da visão (2 a 20 Hz), perturbação da fala (1 a 20 Hz), interferência com tarefas (0,5 a 20 Hz) e fadiga posterior (0,2 a 15 Hz). (Rao, 2008 p. 306 e 307).

Redução de vibração na fonte

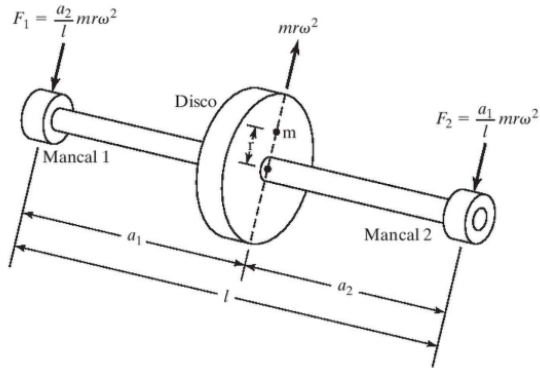
De acordo com Rao (2008, p. 306), "a primeira coisa a ser explorada no controle de vibrações é tentar alterar a fonte de vibração de modo que ela produza menos vibração". Sabemos que isto por vezes é inviável, seja por inviabilidade financeira ou pela impossibilidade devido à fonte de vibração. Vibrações provindas de terremotos, turbulências atmosféricas, irregularidades nas estradas e trepidação de motores à combustão são exemplos de vibrações que não podem ser controladas a partir da alteração da fonte. Porém, fontes como o desbalanceamento de máquinas alternativas ou rotativas são facilmente alteradas para que se controle suas vibrações.

Balanceamento de máquinas rotativas

A fabricação de componentes, na prática, sempre apresentará desvios devido a diversas variáveis incontroláveis, como, por exemplo, desgaste de equipamentos, falta de manutenção adequada, vibrações na planta da fábrica, dentre infinitos outros motivos. Portanto, as máquinas rotativas terão pequenos desvios que resultam, basicamente, em uma massa excêntrica ou desbalanceada. É possível reduzir os efeitos deste desbalanceamento a partir da remoção de um pouco de material ou acrescentando uma massa igual em uma posição que cancele os efeitos da outra. Assim, podemos ter dois tipos de balanceamento, sendo:

1. **Balanceamento em um plano ou estático:** este é o mais comum, sendo bastante aplicado em diversos sistemas, como o balanceamento das rodas de um carro. Um exemplo deste balanceamento pode ser visto na Figura 4.3.

Figura 4.3| Balanceamento de um disco em um plano



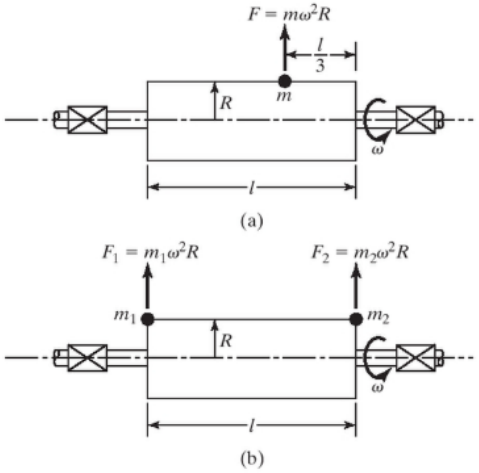
Fonte: Rao (2008, p. 308).

Observe que, por ser um disco montado sobre um eixo, a massa desbalanceada encontra-se em um único plano, gerando esforços nos mancais da ordem de:

$$F_1 = \frac{a_2}{l} mr\omega^2 \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{a_1}{l} mr\omega^2 \tag{4.7}$$

2. **Balanceamento em dois planos ou dinâmico**: ocorre quando o elemento rotativo é um corpo rígido alongado. Por isto, a massa desbalanceada estará em um ponto qualquer do corpo ou distribuída sobre o mesmo. Para resolver este problema, é possível considerar a massa de desbalanceamento como sendo duas massas equivalentes nas extremidades do corpo, como mostrado na Figura 4.4.

Figura 4.4| Representação do balanceamento em dois planos



Fonte: Rao (2008, p. 310).

Pesquise mais

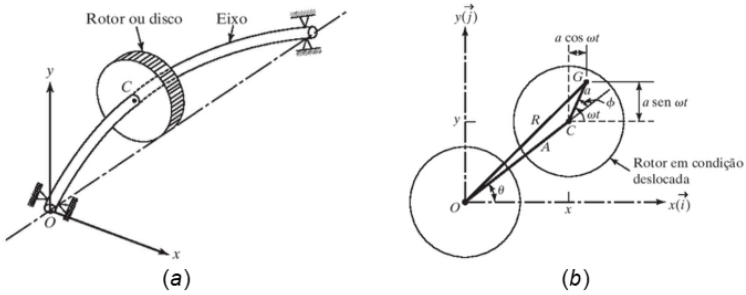
Para ver o passo a passo dos procedimentos de balanceamento estático e dinâmico, veja as páginas de 308 a 312 do livro do Rao, disponível em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Rodopio (w*hirling)* de eixos rotativos

Os balanceamentos de eixos rotativos vistos anteriormente consideram os eixos como sendo corpos rígidos, ou seja, sem deformação. Porém, em alguns casos, essa consideração não é plausível, como é o caso de compressores, motores elétricos, turbinas, bombas, dentre outros dispositivos em que existe um elemento rotativo pesado, montado sobre um eixo leve e flexível apoiado em mancais (RAO, 2008, p. 312). O desbalanceamento dos elementos rotativos, juntamente com a rigidez e amortecimento do eixo, os efeitos giroscópicos e o atrito de fluido nos mancais, causam a deflexão do eixo, isto pode gerar instabilidades no sistema devido à rotação. Este efeito é conhecido como rodopio (*whirling*) ou chicoteio (*whipping*) ou velocidade crítica. A Figura 4.5a mostra um eixo em rodopio.

Figura 4.5| Eixo em rodopio



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 312).

A Figura 4.5b mostra o deslocamento do rotor devido a flexão do eixo em rotação, dado em coordenadas lineares x e y. Assim, a vibração causada por este efeito terá a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{w}+\left(c_i+c\right)\dot{w}+kw-i\omega c_i w=m\omega^2 a e^{i\omega t} \tag{4.8}$$

Sendo que a é a excentricidade do rotor, c_i é o amortecimento interno do eixo e w é uma quantidade complexa definida por $w=x+iy$.

Devido às configurações do sistema em rodopio, podemos encontrar a seguinte equação de velocidade angular:

$$\omega=\frac{\omega_n}{\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\omega_n}\right)^2\right\}^{1/2}} \tag{4.9}$$

Na qual ω_n é a frequência angular natural do sistema e c é o amortecimento do sistema. Esta velocidade angular ocorre quando a amplitude é máxima, o que a denota a velocidade crítica de rodopio. Assim, podemos perceber que quando o sistema não possui amortecimento, a velocidade crítica será igual a frequência angular natural. Portanto, a velocidade crítica, por apresentar a amplitude máxima, deve ser evitada. Na prática, um sistema com vários graus de liberdade apresentará várias frequências naturais e, desta forma, várias velocidades críticas.

Pesquise mais

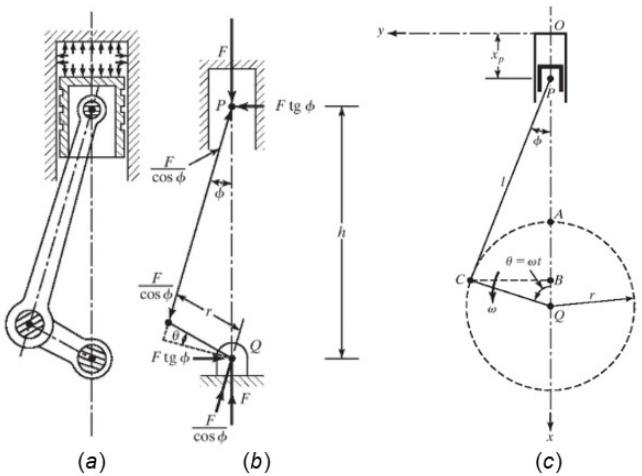
Para saber mais sobre o rodopio (*whirling*) de eixos flexíveis e ainda ver como são feitos os cálculos para resposta de um sistema submetido a este tipo de vibração, veja as páginas de 313 a 315 do livro do Rao, disponível em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Balanceamento de motores alternativos

As vibrações em motores alternativos advêm primeiramente das variações periódicas da pressão dos gases no interior do cilindro e, em segundo das forças de inércia associadas às partes móveis do sistema. Sabemos que as partes essenciais de um motor alternativo são: o pistão, a biela e a manivela. A Figura 4.6a mostra um conjunto de um cilindro do motor alternativo.

Figura 4.6| Cilindro do motor alternativo



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 315 e 316).

Podemos perceber pelo diagrama da Figura 4.6b que a força gerada a partir da queima do combustível induz um torque M_t que tende a girar o eixo da manivela e, também, verificamos que a resultante das forças tende a se anular, mas que produz um torque resultante $M_Q = Fh\,\mathrm{tg}(\phi)$ no corpo do motor, sendo h dado pela geometria do sistema:

$$h = \frac{r\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\phi)} \tag{4.10}$$

Sendo r, θ e ϕ mostrados na Figura 4.6b, podemos reescrever M_Q como:

$$M_Q = \frac{Fr\cos(\theta)}{\cos(\phi)} \tag{4.11}$$

Temos que M_Q varia com a pressão do cilindro, a velocidade de rotação do motor e o tipo de ciclo operacional, sendo F governada pela quantidade de cilindros no motor.

Ainda, para encontrar as forças desbalanceadoras da inércia das partes móveis, devemos levar em consideração a geometria de funcionamento que é mostrada na Figura 4.6c, que nos dará a força vertical e a força horizontal gerada pela inércia das partes móveis, que são dadas respectivamente, por:

$$F_x = (m_p + m_c) r\omega^2 \cos(\omega t) + m_p \frac{r^2\omega^2}{l} \cos(2\omega t) \tag{4.12}$$

E,

$$F_y = -m_p r\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \tag{4.13}$$

Sendo m_p a massa do pistão (massa recíproca ou alternativa) e m_c a massa do pino da manivela com a massa concentrada da biela (massa rotativa).

Reflita

Será possível balancear qualquer tipo de motor utilizando estes métodos, ou apenas os motores alternativos?

Com isto, é possível realizar o balanceamento dos cilindros de um motor com N cilindros, se considerarmos d_i como a distância entre os cilindros e α_i o ângulo de defasagem entre as manivelas de cada cilindro, sabendo que todos os cilindros devem ter as mesmas dimensões r e l e a mesma velocidade angular ω.

Assim o balanceamento é feito a fim de anular as resultantes das forças horizontais e verticais, sendo:

$$(F_x)_{total} = \sum_{i=1}^{N} (F_x)_i = 0 \quad \text{e} \quad (F_y)_{total} = \sum_{i=1}^{N} (F_y)_i = 0 \tag{4.14}$$

Podemos reescrever as forças como:

$$\left(F_x\right)_i = \left(m_p + m_c\right)_i r\omega^2 \cos\left(\omega t + \alpha_i\right) + \left(m_p\right)_i \frac{r^2\omega^2}{l} \cos\left(2\omega t + 2\alpha_i\right) \quad (4.15)$$

$$\left(F_y\right)_i = -\left(m_c\right)_i r\omega^2 \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha_i\right) \quad (4.16)$$

Com isto, teremos os momentos em torno dos eixos *z* e *x*, dados respectivamente por:

$$M_z = \sum_{i=2}^{N} \left(F_x\right)_i l_i = 0 \quad \text{e} \quad M_x = \sum_{i=2}^{N} \left(F_y\right)_i l_i = 0 \quad (4.17)$$

Sendo que as massas de todos os cilindros são iguais, então $\left(m_p\right)_i = m_p$ e $\left(m_c\right)_i = m_c$ e, considerando as condições iniciais do sistema, onde *t*=0, podemos encontrar as condições que devem ser satisfeitas para que o motor alternativo esteja com a montagem balanceada, dadas para as forças de inércia como sendo:

$$\sum_{i=1}^{N} \cos\left(\alpha_i\right) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N} \cos\left(2\alpha_i\right) = 0 \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\alpha_i\right) = 0 \quad (4.19)$$

E para os momentos no eixo *z* e *x*, teremos as condições:

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \cos\left(\alpha_i\right) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^{N} l_i \cos\left(2\alpha_i\right) = 0 \quad (4.20)$$

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \operatorname{sen}\left(\alpha_i\right) = 0 \quad (4.21)$$

Assim, é possível arranjar os cilindros do motor alternativo, para que o motor fique balanceado, reduzindo assim os níveis de vibração.

Pesquise mais

Para compreender completamente as equações e ver as deduções das equações para o balanceamento de um motor alternativo, dê uma olhada nas páginas de 315 a 318 do livro do Rao, disponível em sua biblioteca virtual.

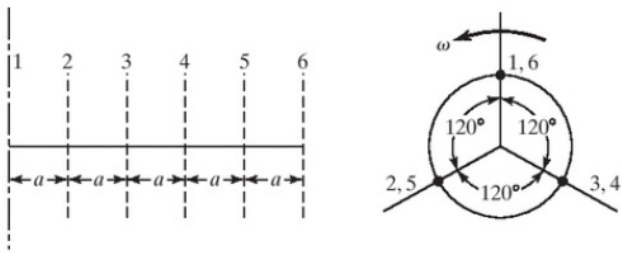
RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Para melhor compreender como dever ser realizado o balanceamento de um motor alternativo, observe o exemplo a seguir:

Exemplificando

O arranjo das manivelas em um motor de 6 cilindros em linha é mostrado na Figura 4.7. Se os cilindros estiverem separados por uma distância $a = 200\text{mm}$ na direção axial, e as posições das manivelas forem $\alpha_1 = \alpha_6 = 0°$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120°$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 240°$, o motor estará balanceado ou não? Considere uma massa rotativa de $m_c = 2{,}5\text{kg}$ e uma velocidade de 3500 rpm.

Figura 4.7| Desenho esquemático de motor com seis cilindros



Fonte: Rao (2008, p. 341).

Resolução

Para saber se o motor se encontra balanceado, basta checar se as condições dadas pelas equações 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20, são satisfeitas. Assim, teremos:

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\alpha_i) = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{N} \cos(2\alpha_i) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N} \text{sen}(\alpha_i) = 0$$

E para os momentos no eixo *z* e *x*, teremos as condições:

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \cos(\alpha_i) = 0\,, \quad \sum_{i=2}^{N} l_i \cos(2\alpha_i) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^{N} l_i \,\text{sen}(\alpha_i) = 0$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{6} \cos(\alpha_i) = 0 \rightarrow \left(2\cos(0°) + 2\cos(120°) + 2\cos(240°)\right) = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(2\alpha_i) = 0 \rightarrow \left(2\cos(0°) + 2\cos(240°) + 2\cos(480°)\right) = 0\,; \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \text{sen}(\alpha_i) = 0 \rightarrow \left(2\,\text{sen}(0°) + 2\,\text{sen}(120°) + 2\,\text{sen}(240°)\right) = 0$$

E para os momentos, temos:

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \cos(\alpha_i) = 0 \rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}\cos(120°)+2\cos(240°)+\\ +3\cos(240°)+4\cos(120°)+5\cos(0°)\end{pmatrix}=0\ ;$$

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \cos(2\alpha_i) = 0 \rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}\cos(240°)+2\cos(480°)+\\ +3\cos(480°)+4\cos(240°)+5\cos(0°)\end{pmatrix}=0\ ;\ \text{e}$$

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \operatorname{sen}(\alpha_i) = 0 \rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(120°)+2\operatorname{sen}(240°)+\\ +3\operatorname{sen}(240°)+4\operatorname{sen}(120°)+5\operatorname{sen}(0°)\end{pmatrix}=0$$

Assim, conclui-se que como todas as condições foram satisfeitas, o motor dado se encontra devidamente balanceado.

Controle de vibração

Na prática, é possível reduzir as forças que causam vibrações, mas não conseguimos eliminá-las. Aqui, veremos alguns dos métodos mais utilizados para se reduzir tais esforços. A forma mais básica e simples de se controlar vibrações é o controle das frequências naturais. Sabe-se que quando uma vibração alcança a frequência natural, o sistema entra em ressonância causando grandes deslocamentos, o que pode ocasionar grandes deformações e tensões indesejáveis (RAO, 2008, p. 318).

De acordo com a equação de frequência natural ($\omega_n = \sqrt{k/m}$), podemos alterar a frequência, alterando a rigidez (k) ou a massa (m) do sistema. Isto pode ser feito substituindo materiais, partes, inserindo elementos, dentre outras ações comuns na engenharia.

Outra forma para se controlar vibrações é a introdução de amortecimento ao sistema, a partir da utilização de juntas pinadas e parafusadas, que garantem a movimentação entre as partes do sistema, dissipando energia pelo atrito entre as partes. Ainda, podemos inserir elementos de amortecimento ao sistema. Para ilustrar este método, podemos escrever a equação de movimento de um sistema com um grau de liberdade com amortecimento interno submetido à força harmônica ($F(t) = F_0 e^{i\omega t}$), como:

$$m\ddot{x} + k(1+i\eta)x = F_0 e^{i\omega t} \tag{4.22}$$

Sendo η o fator de perda dado por:

$$\eta = \frac{(\Delta W/2\pi)}{W}\left(\frac{\text{energia dissipada em um ciclo de deslocamento harmônico}}{\text{máxima energia de deformação no ciclo}}\right) \tag{4.23}$$

A amplitude da ressonância $(\omega = \omega_n)$ é dada por:

$$\frac{F_0}{k\eta} = \frac{F_0}{aE\eta} \tag{4.24}$$

Tendo em vista que a rigidez do sistema é proporcional ao módulo de *Young* (E), sendo $k = aE$ onde a é uma constante, podemos perceber, portanto, que quão maior for o modulo de elasticidade menor será a amplitude da ressonância. A Tabela 4.1 mostra alguns valores de fator de perda para materiais viscoelásticos.

Tabela 4.1| Fator de Perda de alguns materiais viscoelásticos

Material	**Fator de Perda (η)**
Poliestireno	2,0
Borracha dura	1,0
Tapetes de fibra com matriz	0,1
Cortiça	0,13 a 0,17
Alumínio	1×10^{-4}
Ferro e aço	2 a 6×10^{-4}

Fonte: Rao (2008, p. 319).

Os materiais viscoelásticos são amplamente usados para amortecimento de sistemas, tendo como desvantagem as mudanças de propriedades devido à temperatura, frequência e deformação. Outra forma de inserir amortecimento ao sistema é a partir da construção/arranjo do sistema. A Tabela 4.2 nos mostra a equivalência de amortecimento devido ao arranjo do sistema.

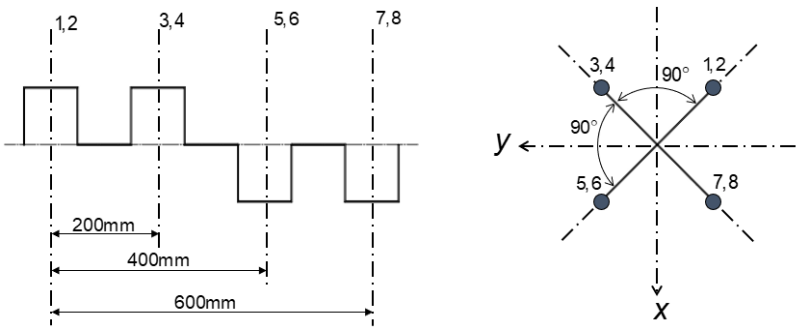
Tabela 4.2| Amortecimento equivalente devido à construção/arranjo

Tipo de Construção/ Arranjo	**Fator de Amortecimento Viscoso Equivalente (%)**
Construção soldada	1 a 4
Construção aparafusada	3 a 10
Estrutura de aço	5 a 6
Camada viscoelástica não restringida sobre viga de aço-concreto	4 a 5
Camada viscoelástica restringida sobre viga de aço-concreto	5 a 8

Fonte: Rao (2008, p. 319).

Lembre-se de que você é o engenheiro mecânico responsável pela análise de vibrações do departamento de desenvolvimento de motores de uma fabricante de motores para caminhões. Sua equipe está desenvolvendo um novo motor de alta potência em tamanho reduzido, para isto estão testando um protótipo preliminar de um motor em *V* de 8 cilindros. O protótipo foi montado em um caminhão de testes e foram observadas vibrações de grande magnitude na cabine. A primeira hipótese levantada pela equipe seria o dimensionamento errôneo dos cilindros, encontrando-se desbalanceados, tendo em vista que os cilindros se encontram dispostos em 90° cada, podendo ser observado na Figura 4.1. Assim, cabe a você determinar se o motor está devidamente balanceado ou não e, ainda, verificar quais as possíveis causas das vibrações que devem ser analisadas.

Figura 4.1| Posicionamento dos cilindros do motor *V8*



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução

Para o sistema do motor V8 apresentado no problema, devemos, primeiramente, observar se o motor se encontra balanceado, sendo que, para isto, devemos checar as condições para os esforços:

$$\sum_{i=1}^{N}\cos(\alpha_i)=0\,,\quad \sum_{i=1}^{N}\cos(2\alpha_i)=0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N}\operatorname{sen}(\alpha_i)=0$$

Para os momentos no eixo *z* e *x*, teremos as condições:

$$\sum_{i=2}^{N}l_i\cos(\alpha_i)=0\,,\quad \sum_{i=2}^{N}l_i\cos(2\alpha_i)=0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^{N}l_i\operatorname{sen}(\alpha_i)=0$$

Considerando 0° no eixo *x*, para as forças do motor, teremos:

$$\sum_{i=1}^{6}\cos(\alpha_i)=0\rightarrow\left(2\cos(315°)+2\cos(45°)+2\cos(135°)+2\cos(225°)\right)=0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\cos(2\alpha_i)=0\rightarrow\left(2\cos(630°)+2\cos(90°)+2\cos(270°)+2\cos(450°)\right)=0\text{ ; e}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\text{sen}(\alpha_i)=0\rightarrow\left(2\,\text{sen}(315°)+2\,\text{sen}(45°)+2\,\text{sen}(135°)+2\,\text{sen}(225°)\right)=0$$

E para os momentos:

$$\sum_{i=2}^{N}l_i\cos(\alpha_i)=0\rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}0\cdot 2\cos(315°)+1\cdot 2\cos(45°)+2\cdot 2\cos(135°)+\\+2\cdot 3\cos(225°)\end{pmatrix}=-1{,}13\text{ ;}$$

$$\sum_{i=2}^{N}l_i\cos(2\alpha_i)=0\rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}0\cdot 2\cos(630°)+1\cdot 2\cos(90°)+2\cdot 2\cos(270°)+\\+2\cdot 3\cos(450°)\end{pmatrix}=0\text{ ; e}$$

$$\sum_{i=2}^{N}l_i\,\text{sen}(\alpha_i)=0\rightarrow 0{,}2\begin{pmatrix}0\cdot 2\,\text{sen}(315°)+1\cdot 2\,\text{sen}(45°)+2.2\,\text{sen}(135°)+\\+2\cdot 3\,\text{sen}(225°)\end{pmatrix}=0$$

Com isso, podemos perceber que, devido aos momentos, existe um desbalanceamento do motor, o que deve estar gerando parte da vibração registrada. Com isso, temos que o projeto deve retornar para a equipe de balanceamento a fim de realizar os ajustes; caso seja impossível, teremos que resolver de outras maneiras. Outras fontes de vibração que podem ocorrer são: devido à explosão do combustível ou devido às partes rotativas desbalanceadas do motor, como, por exemplo, engrenagens e eixos.

Avançando na prática

Dimensionamento da velocidade crítica de um rotor em rodopio

Descrição da situação-problema

Imagine que você é o engenheiro responsável por uma fabricante de kits didáticos para experimentos universitários, sendo que sua equipe está desenvolvendo um novo modelo de turbina de teste para túnel de vento. Os dados técnicos da turbina e suas características de funcionamento te permitirão dimensionar a velocidade crítica do sistema, que deve ser evitada durante o funcionamento do equipamento.

Os dados apresentados descrevem um rotor com 20 kg de massa concentrada, montado no ponto central de um eixo de aço de 1 metro de

comprimento com rigidez de $19\times10^4\ \mathrm{N/m}$. Sabe-se ainda que a turbina deve funcionar a 6000 rpm e o sistema apresenta coeficiente de amortecimento estimado em 0,01.

Resolução da situação-problema

Para resolver o problema proposto, podemos encontrar a frequência natural do sistema usando:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19\times10^4}{20}} = 97,47\ \mathrm{rad/s}$$

Ainda, podemos encontrar o amortecimento do sistema utilizando a equação:

$$c = 2\zeta\sqrt{km} = 2\cdot0,01\sqrt{19\times10^4\cdot20} = 38,987\ \mathrm{N\cdot s/m}$$

Com isto, aplicando a equação da velocidade crítica de rodopio, teremos:

$$\omega = \frac{\omega_n}{\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\omega_n}\right)^2\right\}^{1/2}} = \frac{97,47}{\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{38,987}{97,47}\right)^2\right\}^{1/2}} = 101,62\ \mathrm{rad/s}$$

Sabendo que o sistema opera a 6000 rpm, temos que:

$$\omega = \frac{6000}{60}2\pi = 628,32\ \mathrm{rad/s}$$

Concluindo, podemos perceber que a turbina irá funcionar muito acima da velocidade crítica; portanto, não haverá problema em sua operação, considerando-se que, ao iniciar o movimento, a turbina passe rapidamente pela velocidade crítica.

Faça valer a pena

1. O primeiro aspecto a ser explorado no controle de vibrações é tentar alterar a fonte de vibração, de modo que ela produza menos vibração. No entanto, sabe-se que por vezes isto é inviável. Vibrações provindas de terremotos, turbulências atmosféricas, irregularidades nas estradas e trepidação de motores à combustão são exemplos de vibrações que não podem ser alteradas na fonte.

De acordo com o texto-base, assinale a alternativa que traz exemplos de vibrações que podem ser alteradas na fonte.

a) Máquinas submetidas a vibrações externas.
b) Máquinas rotativas e máquinas alternativas, desbalanceadas.
c) Máquinas submetidas a condições ambientais.
d) Máquinas rotativas e máquinas alternativas, balanceadas.
e) Máquinas de impacto, como prensas rotativas e puncionadeiras.

2. Um sistema rotativo de um torno CNC, encontra-se gerando vibrações excessivas que causam desconforto para o operador e para os trabalhadores ao redor. Nas últimas semanas, alguns funcionários faltaram ao trabalho, apresentando atestados médicos devido a enxaquecas.

Analisando o texto-base, assinale a alternativa correta.
a) A máquinas deve estar operando sem fluido de lubrificação.
b) A norma ISO 2372 traz recomendações que devem ser aplicadas para a sensibilidade humana.
c) De acordo com o diagrama do corpo humano, a frequência que a máquina deve estar gerando é da faixa de 30 a 40Hz.
d) A ISO 2631 traz recomendações de vibrações para a sensibilidade humana, deve-se, então, aplicar o controle de vibrações para mantê-las dentro dos níveis recomendados.
e) A empresa deveria empregar pessoas com menor sensibilidade a vibrações.

3. Em um sistema sem amortecimento submetido ao rodopio, a velocidade critica será igual à frequência natural. Sabendo disso, avaliando um sistema em rodopio com frequência natural de 20 rad/s, que funciona a 30 rad/s, sabe-se que este não apresenta problemas. Mas se inserirmos um amortecedor de 20 N.s/m ao sistema, isto melhorará o funcionamento do sistema?

Assinale a alternativa correta.
a) Melhora o funcionamento do sistema, pois uma vez que o sistema ganha amortecimento, o mesmo sofrerá menos efeitos de vibração.
b) Melhora o funcionamento do sistema, já que a frequência natural decai com o amortecimento.
c) Piora o funcionamento do sistema, uma vez que a velocidade crítica do rodopio aumenta para 28,28rad/s, o que é mais próximo da frequência de funcionamento.
d) Piora o funcionamento do sistema, uma vez que a frequência natural se eleva com o amortecimento, gerando ressonância.
e) Piora o funcionamento do sistema, já que a frequência natural fica diferente da velocidade crítica, o que pode ocasionar falhas no sistema.

Seção 4.2

Introdução de amortecimento

Diálogo aberto

Caro aluno, você certamente já esteve no interior de uma construção no instante em que passou um caminhão pesado em uma rua próxima, episódio que fez com que toda a estrutura da construção vibrasse intensamente. Esse efeito é bastante comum nos prédios e casas brasileiras, tendo em vista que nossas construções são feitas, em sua grande maioria, de alvenaria, que absorve praticamente toda a vibração do solo, o que pode causar grandes danos à estrutura.

A fim de contextualizar os conteúdos dessa seção, lembre-se de que você é o engenheiro mecânico responsável pelo departamento de vibrações de uma fabricante de motores para caminhões, que ficou responsável pela análise de vibração do novo modelo de motor da empresa. Na última análise, foi realizado o cálculo de balanceamento do motor alternativo, que evidenciou que o mesmo se encontrava desbalanceado. Ao encaminhar o pedido de balanceamento ao departamento competente, o mesmo retornou dizendo que o motor estava em seu limite de viabilidade e que recomendavam a utilização de um absorvedor de vibrações para o motor. Para avaliar a viabilidade dessa recomendação, sabe-se que as especificações técnicas do motor trazem que o motor tem massa igual a 360 kg e permanece na maior parte do tempo funcionando em 4500 rpm. Você fez alguns testes e constatou que a magnitude da força desbalanceadora é de 250 N. Finalizando, o intuito dessa análise é manter a amplitude de vibração em torno de 1,5 mm. Preliminarmente, você já consegue pensar em como resolver este problema com os dados fornecidos pela equipe de projeto? Imagina como deve ser o absorvedor e como ele deve ser utilizado?

Nesta seção de estudos, você deverá se tornar capaz de aplicar as mais diversas formas de controle de vibrações, passivas e ativas, isolando sistemas ou utilizando absorvedores dinâmicos de vibração. Preparado para mais esse desafio? Bons estudos!

Isolamento de vibração

Temos que "o isolamento de vibração é um procedimento pelo qual os efeitos indesejáveis da vibração são reduzidos" (RAO, 2008, p. 320). Podemos isolar um sistema de forma passiva inserindo um membro resiliente (ou isolador) entre a massa vibratória (ou equipamento, ou carga útil) e a fonte de vibração. Alguns exemplos de isoladores são: molas de metal, molas de borracha, feltros e molas pneumáticas. Outra maneira seria isolar um sistema de forma ativa, inserindo um sistema com sensores, servomecanismos, processadores de sinal e acionadores.

A forma de saber a efetividade de um isolador é através de sua transmissibilidade (T_r), que é definida pela razão entre a amplitude da força transmitida e a força excitadora. Basicamente, aplicamos o isolamento para dois tipos de vibração:

(1) para isolar a vibração de uma máquina ao suporte; ou

(2) para isolar a vibração vinda do suporte para a máquina.

Para um sistema com um grau de liberdade, podemos escrever a equação da força transmitida à base como sendo:

$$F_t(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \tag{4.21}$$

Já se o sistema estiver recebendo a vibração da base, a equação se torna:

$$F_t(t) = m\ddot{x}(t) = k\left[x(t) - y(t)\right] + c\left[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\right] \tag{4.22}$$

Em que $\left[x - y\right]$ e $\left[\dot{x} - \dot{y}\right]$ denotam o deslocamento e velocidade relativos da mola e amortecedor, respectivamente.

Assimile

A transmissibilidade de um isolador de vibração é definida pela razão da força transmitida pela força excitadora. Com isto, é possível perceber a porcentagem de transmissão de força que demonstra a qualidade do isolador.

A **redução da força transmitida à fundação por uma máquina** submetida à uma força harmônica $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ nos gera a já conhecida equação de movimento $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos(\omega t)$ que nos dará uma (também já conhecida) resposta harmônica $x(t)=X\cos(\omega t-\phi)$, sendo X a amplitude de deslocamento e ϕ o ângulo de fase, dados por:

$$X=\frac{F_0}{\left[\left(k-m\omega^2\right)^2+\omega^2c^2\right]^{1/2}} \quad \text{e} \quad \phi=\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega c}{k-m\omega^2}\right) \tag{4.23}$$

Temos que a força transmitida será representada pela equação:

$$F_t(t)=kx(t)+c\dot{x}(t)=kX\cos(\omega t-\phi)-c\omega X\,\text{sen}(\omega t-\phi) \tag{4.24}$$

Assim, a magnitude da força total transmitida será:

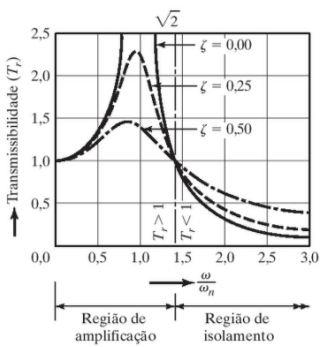
$$F_T=\left[(kx)^2+(c\dot{x})^2\right]^{1/2}=X\sqrt{k^2+\omega^2c^2}=\frac{F_0\left(k^2+\omega^2c^2\right)^{1/2}}{\left[\left(k-m\omega^2\right)^2+\omega^2c^2\right]^{1/2}} \tag{4.25}$$

A transmissibilidade é expressa pela equação a seguir, em que $r=\omega/\omega_n$.

$$T_r=\frac{F_T}{F_0}=\left\{\frac{k^2+\omega^2c^2}{\left(k-m\omega^2\right)^2+\omega^2c^2}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{1+(2\zeta r)^2}{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}\right\}^{1/2} \tag{4.26}$$

A Figura 4.8 mostra a variação de T_r com r, sendo perceptível que, para se obter um isolamento, a força transmitida à fundação do sistema deve ser menor que a força de excitação no isolador. A Figura 4.8 ainda mostra que a frequência forçante deve ser $\sqrt{2}$ vezes maior que a frequência natural para o isolamento.

Figura 4.8| Transmissibilidade (T_r) pela razão de frequências (r)



Fonte: Rao (2008, p. 321).

Saiba mais

Para saber mais sobre o gráfico apresentado na Figura 4.8, dê uma olhada nas observações feitas por RAO em seu livro na página de 321: RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Para a **redução da força transmitida à massa**, ou seja, para isolar um sistema submetido a uma vibração vinda da base, a equação governante será:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{4.27}$$

Em que $z = x - y$ denota o deslocamento relativo da massa em relação à base. Se o movimento da base for harmônico, então o movimento da massa também o será. Portanto, a transmissibilidade será a razão dos deslocamentos, dada por:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} \tag{4.28}$$

Sendo exatamente igual a equação 4.29, que também é igual a razão entre as acelerações do sistema. Assim, para grandes valores de r e baixos valores de ζ, temos que o termo $(2\zeta r)^2$ se torna pequeno, podendo ser desprezado para simplificar a análise. Com isto, a equação se torna:

$$T_r = \frac{1}{r^2 - 1} \left(r > \sqrt{2}\ ,\ \zeta = \text{pequeno} \right) \tag{4.29}$$

A frequência natural e a frequência de excitação são dadas por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi N \tag{4.30}$$

Em que δ_{st} é a deflexão da mola e N é a frequência de excitação em rpm, então a razão se torna:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi N}{60} \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = \sqrt{\frac{2 - R}{1 - R}} \tag{4.31}$$

Sendo que a relação $R = 1 - T_r$ pode ser usada como indicador de qualidade do isolador, denotando a porcentagem de redução obtida na força transmitida. Assim, a equação pode ser representada como:

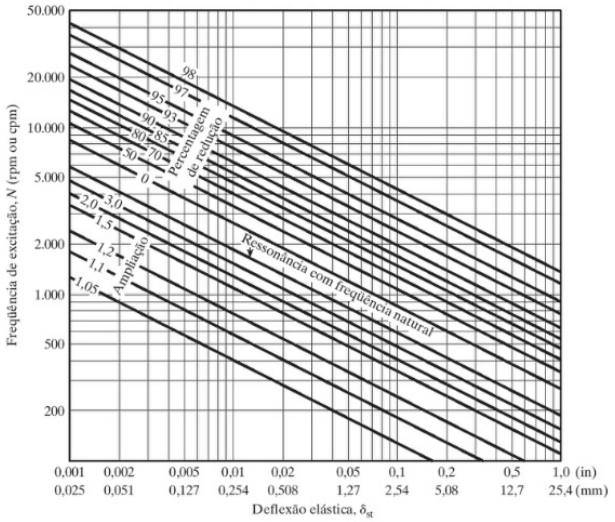
$$N = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}} \left(\frac{2 - R}{1 - R} \right)} = 29{,}9092 \sqrt{\frac{2 - R}{\delta_{st} (1 - R)}} \tag{4.32}$$

Esta equação gera um gráfico entre o $\log N$ e $\log \delta_{st}$, que é usado em projetos de engenharia para definir molas adequadas para o sistema, como mostrada na Figura 4.9.

Reflita

É possível termos um sistema dinâmico exercendo esforços vibratórios sobre uma base (flexível ou semiflexível) e; também podemos ter um sistema dinâmico recebendo vibração da base. Mas será que existem apenas estas duas configurações?

Figura 4.9 | Gráfico de eficiência de isolador



Fonte: Rao (2008, p. 322).

Exemplificando

Um sistema vibratório de um grau de liberdade deve ser isolado de sua base, de modo a limitar a transmissibilidade em ressonância de $T_r = 4$. Assim, se fizermos $\omega = \omega_n$, por estar em ressonância, devemos usar a equação:

$$T_r = \frac{\sqrt{1+(2\zeta)^2}}{2\zeta}$$

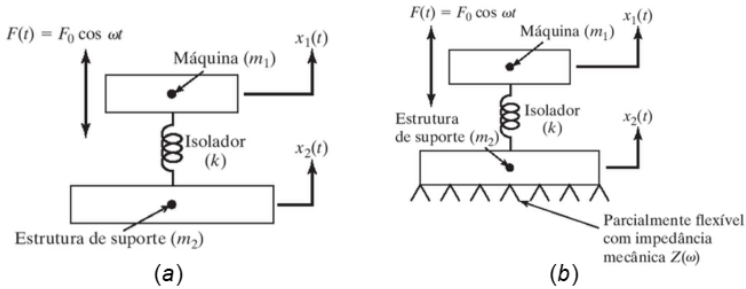
Assim, podemos definir o fator de amortecimento ζ, como sendo:

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{T_r^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{15}} = 0{,}1291$$

Que é o fator de amortecimento do sistema para que o isolador do sistema mantenha a transmissão do esforço limitada a $T_r = 4$.

Para sistemas práticos, por vezes a fundação na qual o elemento vibratório é montado se move com a vibração, podendo ser fundações flexíveis como, por exemplo, o motor montado no carro, ou a turbina montada na asa de um avião. Esses sistemas podem ser representados como sistemas com dois graus de liberdade, como mostra a Figura 4.10a.

Figura 4.10| Diferença entre sistema montado sobre base flexível e semiflexível



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 323 e 324).

Assim, teremos duas massas m_1 e m_2. Considerando um movimento harmônico, teremos duas amplitudes e duas frequências naturais, sendo a primeira frequência natural igual a zero, pois o sistema não é acoplado (restringido), assim teremos:

$$\omega_1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2^2 = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2} \tag{4.33}$$

A força transmitida é dada por:

$$F_t = -m_2 \omega^2 X_2 = \frac{-m_2 k \omega^2 F_0}{\left[\left(k - m_1\omega^2\right)\left(k - m_2\omega^2\right) - k^2\right]} \tag{4.37}$$

Assim, a transmissibilidade passa a ser:

$$T_r = \frac{F_t}{F_0} = \frac{-m_2 k\omega^2}{\left[\left(k - m_1\omega^2\right)\left(k - m_2\omega^2\right) - k^2\right]} = \frac{1}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} - \frac{m_1\omega^2}{k}\right)} = \frac{m_2}{\left(m_1 + m_2\right)}\left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}}\right) \quad (4.34)$$

Nota-se que, conforme a frequência natural ω_2 é reduzida, a força transmitida se torna menor.

Por outro lado, para uma fundação semiflexível, como a mostrada pela Figura 4.10b, temos a aplicação da impedância mecânica $\left(Z(\omega)\right)$ da base, dada por:

$$Z(\omega) = \frac{\text{força aplicada de frequência } \omega}{\text{Deslocameto}}$$

Podemos considerar como um sistema de dois graus de liberdade que terá a força transmitida dada por:

$$F_t = X_2 Z(\omega) = \frac{kZ(\omega)F_0}{\left[Z(\omega)\left(k - m_1\omega^2\right) - km_1\omega^2\right]} \quad (4.35)$$

Então, a transmissibilidade será:

$$T_r = \frac{F_t}{F_0} = \frac{kZ(\omega)}{\left[Z(\omega)\left(k - m_1\omega^2\right) - km_1\omega^2\right]} \quad (4.36)$$

De acordo com Rao (2008, p. 324), "a impedância mecânica $Z(\omega)$ depende da natureza da estrutura da base e pode ser determinada por meios experimentais medindo-se o deslocamento produzido por um vibrador que aplique uma força harmônica à estrutura da base."

Pesquise mais

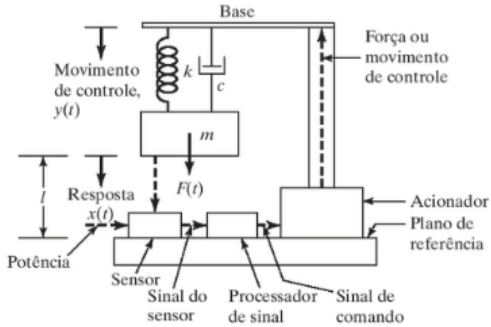
Para saber as deduções das equações das forças transmitidas e dos valores de transmissibilidade, dê uma olhada nas páginas de 320 a 325 do livro do Rao disponível em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Controle ativo de vibração

Temos que o controle ativo é definido pela inserção de um sistema que utiliza de potência externa para operar o controle de vibração, podendo ser denominado eletromecânico, eletrofluídico, eletromagnético, piezelétrico ou fluídico, dependendo do tipo de sensor, processador e acionador, empregado para o controle. Um sistema ativo de controle de vibração, como observado na Figura 4.11, consiste em manter uma distância l constante entre a massa e o plano de referência, sendo que, para isto, toda vez que uma força excitadora variar a distância, o sensor irá captar o deslocamento emitindo um sinal ao processador que, ao processá-lo, envia um sinal ao acionador, gerando uma força contrária, que tende a estabilizar o sistema, mantendo a distância$l$constante.

Figura 4.11| Sistema submetido a controle ativo de vibração

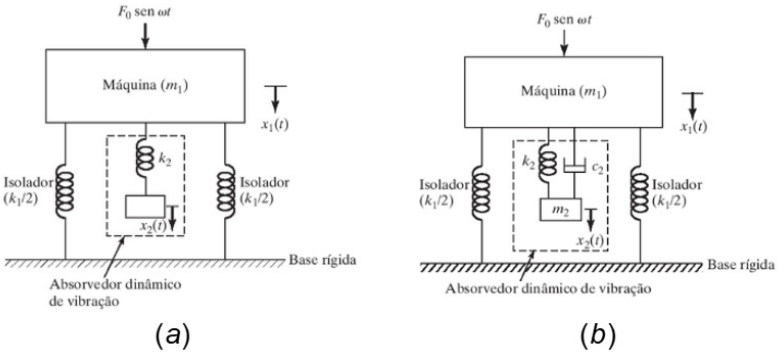


Fonte: Rao (2008, p. 326).

Absorvedores de vibração

Podemos apresentar dois tipos de **absorvedores de vibração** ou **neutralizadores de vibração**, conforme ilustra as Figuras 4.12a e 4.12b, respectivamente. São eles: (1) absorvedor dinâmico de vibração não amortecido; e (2) absorvedor dinâmico de vibração amortecido.

Figura 4.12| Diferenças entre absorvedor não amortecido e amortecido



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 327 e 329).

Podemos perceber pela Figura 4.12 que os absorvedores são basicamente um sistema massa-mola que é inserido no sistema base, o que permite dois graus de liberdade. O objetivo é neutralizar a amplitude de vibração da máquina (X_1), com base na amplitude de vibração do absorvedor (X_2). Para um absorvedor não amortecido, podemos escrever a amplitude do sistema principal e do absorvedor como sendo, respectivamente:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}} \tag{4.37}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}} \tag{4.38}$$

Quando $\omega = \omega_1$, temos que $X_1 = 0$. Assim, podemos reescrever a Eq. 4.38 como:

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2}\delta_{st} = -\frac{F_0}{k_2} \tag{4.39}$$

É perceptível que a força da mola k_2 é oposta à força excitadora anulando-a; portanto:

$$k_2 X_2 = m_2 \omega^2 X_2 = -F_0 \tag{4.40}$$

O absorvedor não amortecido retira o sistema da ressonância quando o mesmo funciona em regime próximo da frequência natural ($\omega = \omega_1$), porém, gera duas novas frequências de ressonância (Ω_1 e Ω_2) que devem ser evitadas, dadas por:

$$\left.\begin{matrix}\left(\dfrac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2\end{matrix}\right\} = \frac{\left\{\left[1+\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] \mp \left\{\left[1+\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2 - 4\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}\right\}}{2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \tag{4.41}$$

Com estes dois picos, temos que a máquina experimenta grandes amplitudes quando passa pelo regime de partida. Portanto, para se reduzir a amplitude da máquina, deve-se adicionar um absorvedor amortecido (RAO, 2008, p. 329).

Devido ao amortecimento do absorvedor, como mostrado na Figura 4.12b, se definirmos:

$\mu = m_2/m_1$, como sendo a razão de massas;

$\delta_{st} = F_0/k_1$, como sendo a deflexão estática do sistema;

$\omega^2 = k_2/m_2$, como sendo o quadrado da frequência natural do absorvedor;

$\omega_n^2 = k_1/m_1$, como sendo o quadrado da frequência natural da massa principal;

$f = \omega_a/\omega_n$, como sendo o quadrado das frequências naturais;

$g = \omega/\omega_n$, como sendo a razão de frequência forçada;

$c_c = 2m_2\omega_n$, como sendo a constante de amortecimento crítico e;

$\zeta = c_2/c_c$, como sendo o fator de amortecimento;

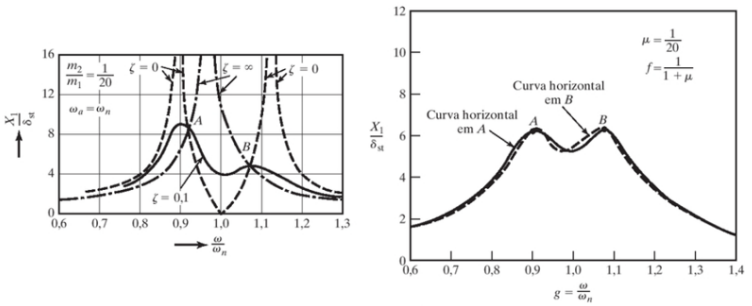
Poderemos expressar as magnitudes X_1 e X_2 como sendo:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + \left(g^2 - f^2\right)^2}{(2\zeta g)^2\left(g^2 - 1 + \mu g^2\right)^2 + \left\{\mu f^2 g^2 - \left(g^2 - 1\right)\left(g^2 - f^2\right)\right\}^2}\right]^{1/2} \tag{4.42}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + f^4}{(2\zeta g)^2\left(g^2 - 1 + \mu g^2\right)^2 + \left\{\mu f^2 g^2 - \left(g^2 - 1\right)\left(g^2 - f^2\right)\right\}^2}\right]^{1/2} \tag{4.43}$$

A Figura 4.13a mostra o gráfico de X_1/δ_{st} em relação a ω/ω_n para $f=1$ e $\mu=1/20$ em alguns valores de ζ. Quando $c_2=0$ ou $c_2=\infty$, então X_1 será infinito. Com isto, X_1 terá seu mínimo em algum ponto entre estas configurações de c_2. O gráfico da Figura 4.13b mostra uma curva AB que deve ser a mais horizontal possível para se ter um valor de X_1 ótimo.

Figura 4.13| Gráficos de resposta de sistema com absorvedor amortecido



(*a*) (*b*)

Fonte: Adaptada de Rao (2008, p.330 e 331).

Na prática, podemos definir o fator de amortecimento ótimo através da equação:

$$\zeta^2_{ótimo}=\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \tag{4.44}$$

Assim, o valor de X_1/δ_{st} se torna:

$$\left(\frac{X_1}{\delta_{st}}\right)_{ótimo}=\left(\frac{X_1}{\delta_{st}}\right)_{máx}=\sqrt{1+\frac{2}{\mu}} \tag{4.45}$$

Pesquise mais

Para saber mais sobre absorvedores dinâmicos de vibração, veja as páginas de 327 a 331 do livro do Rao disponível em sua biblioteca virtual. RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Sem medo de errar

Relembrando que você ficou responsável pela análise de vibração do novo modelo de motor para caminhões da empresa, temos que o cálculo de balanceamento do motor alternativo foi realizado e se constatou que o mesmo se encontrava desbalanceado. Com isso, o pedido de balanceamento foi encaminhado ao departamento competente. O departamento retornou dizendo que o motor estava em seu limite de viabilidade e, com isso, recomendaram a utilização de um absorvedor de vibrações. Para avaliar a viabilidade dessa recomendação, sabe-se que as especificações técnicas do motor trazem que o motor tem massa igual a 360 kg e permanece a maior parte do tempo com funcionamento em 4500 rpm. A partir de alguns testes, você constatou que a magnitude da força desbalanceadora é de 250 N. Finalizando, o intuito dessa análise é manter a amplitude de vibração em torno de 1,5 mm.

Solução

Primeiramente, podemos definir a frequência de vibração da máquina como:

$$f = \frac{4500}{60} = 75\text{Hz}$$

Ou seja, como $f = \frac{\omega}{2\pi}$, temos que:

$$\omega = f \cdot 2\pi = 471{,}24 \, \text{rad}/\text{s}$$

A partir daí, podemos definir o absorvedor, sabendo que o motor estará montado sobre um suporte que deverá ter amplitude igual a zero. Então, a amplitude da massa do absorvedor deve ser igual e oposta à da força excitadora, ou seja:

$$\left|F_0\right| = m_2 \omega^2 X_2$$

Assim, substituindo os valores de $F_0 = 250N$ e de $X_2 = 1{,}5\text{mm} = 0{,}0015\text{m}$ na equação, teremos:

$$250 = m_2 \cdot 471{,}24^2 \cdot 0{,}0015$$

Ou seja,

$$m_2 = \frac{250}{471{,}24^2 \cdot 0{,}0015} = 0{,}75052\text{kg}$$

Considerando que a amplitude principal deve ser zero na frequência de funcionamento; então, podemos definir a rigidez do absorvedor através da equação:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

Isolando a rigidez, temos que:

$$k_2 = m_2\omega^2$$

Como sabemos a massa do absorvedor e a frequência de funcionamento, podemos definir a rigidez como sendo:

$$k_2 = 0,75052 \cdot 471,24^2 = 166665,8281 \, \mathrm{N}/\mathrm{m}$$

Com isto, foi possível determinar os parâmetros do absorvedor dinâmico não amortecido para o motor que são suficientes para que o absorvedor dinâmico anule a vibração no suporte do motor na frequência de funcionamento do mesmo, finalizando com êxito a resolução da problematização proposta.

Avançando na prática

Definição de um isolador de uma máquina de lavar

Descrição da situação-problema

Imagine neste momento que você é o engenheiro da equipe de projetos de uma multinacional fabricante de máquinas de lavar roupas. O novo modelo que está sendo desenvolvido será uma máquina de grande porte, com 30 kg de massa, com funcionamento em 1200 rpm. Foi definido que um isolamento de 80% é adequado para a máquina. Considerando um fator de amortecimento de 7% para o sistema, você foi incumbido de definir a rigidez do isolador da máquina.

Resolução da situação-problema

Sabendo que a máquina tem massa de 30 kg, fator de amortecimento de $\zeta = 7\% = 0,07$ e $\omega = (1200/60)2\pi = 125,664 \, \mathrm{rad/s}$, podemos definir a transmissibilidade a partir do isolamento de 80% como sendo $T_r = 0,2$. Assim, teremos:

$$T_r = \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2}$$

$$0,2^2 = \frac{1+\left(2\left(0,07\right)r\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\left(0,07\right)r\right)^2}$$

Isolando-se a razão (r) das frequências naturais, teremos:

$$0,04r^4 - 0,018816r^2 - 0,96 = 0$$

Resolvendo a equação, teremos as raízes $r_1^2 = 5,1398$ e $r_2^2 = -4,6694$. Usando a raiz positiva, teremos: $r_1^2 = 5,1398$ ou $r_1 = 2,267$. Assim:

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{r_1} = \frac{125,664}{2,267} = 55,4318 \, \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

Com isso, é possível calcular a rigidez dada por:

$$k = m\omega_n^2 = 30 \cdot 55,4318^2 = 92,18 \, \mathrm{kN}/\mathrm{m}$$

Resumindo, você definiu que a rigidez do isolador para garantir um isolamento do sistema de 80%, deve ser $k = 92,18 \, \mathrm{kN}/\mathrm{m}$, finalizando com êxito a resolução da problematização proposta.

Faça valer a pena

1. O controle ativo de vibrações é definido por um sistema que gera esforços contrários e iguais ao de uma vibração para que a mesma seja anulada. Dependendo dos tipos de elementos aplicados a um sistema de controle ativo, o mesmo pode ser denominado eletromecânico, eletrofluídico, eletromagnético, piezelétrico ou fluídico.

Assinale a alternativa que traz os elementos básicos de um sistema de controle ativo de vibrações.

a) Sensor, microcontrolador e acelerador.
b) Acelerômetro, acionador e sensor.
c) Sensor, acionador e processador gráfico.
d) Sensor, processador de sinal e acionador.
e) Processador interno, sensor e acelerômetro.

2. Em uma fábrica, uma máquina estampadora de placas de aço deve ser isolada da fundação, pois gera forças de vibração muito grandes para as outras máquinas, causando o desbalanceamento e manutenção frequente das mesmas. Se a força harmônica causada pela máquina for $F(t) = 300\,\text{sen}(27t)$ e a eficiência do isolador for de 70%, qual seria a força transmitida para uma máquina localizada nas proximidades da estampadora?

A partir da pergunta realizada no texto-base, assinale a alternativa correta:

a) $F_T = 90\text{N}$.
b) $F_T = 80\text{N}$.
c) $F_T = 210\text{N}$.
d) $F_T = 120\text{N}$.
e) $F_T = 290\text{N}$.

3. Se um sistema de leitura de DVD's tem massa de 0,7 kg e gera uma frequência de 4 Hz na leitura do DVD, qual deve ser o valor da rigidez do isolador de borracha para que o aparelho reduza 85% da vibração para a base do sistema?

A partir da pergunta realizada no texto-base, assinale a alternativa correta:

a) $k = 67\,\text{N}/\text{m}$.
b) $k = 58\,\text{N}/\text{m}$.
c) $k = 55\,\text{N}/\text{m}$.
d) $k = 68\,\text{N}/\text{m}$.
e) $k = 57\,\text{N}/\text{m}$.

Seção 4.3

Medições de vibração e aplicações

Diálogo aberto

Caro aluno, imagine que você se encontra em uma fábrica na qual existe uma máquina que está gerando um ruído muito grande, sendo difícil até mesmo de permanecer perto dela. Nesta situação rotineira, suponha que já foram realizadas várias manutenções e substituições de peças que acreditavam ser o motivo do problema, porém, nada resolveu. Note que isto poderia ser evitado com a medição de vibrações e monitoramento da máquina.

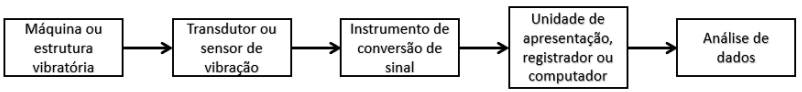
Para contextualizar esses assuntos, lembre-se de que você é o engenheiro mecânico responsável pela análise de vibrações do departamento de desenvolvimento de uma empresa fabricante de motores para caminhões. Sua equipe está desenvolvendo um novo motor de alta potência, que será o novo modelo que irá para o mercado de caminhões de grande porte. Você e sua equipe montaram um protótipo do motor em um caminhão de testes, que apresentou grandes vibrações na cabine que foram resolvidas aplicando-se um absorvedor de vibrações de rigidez de $167\ \mathrm{kN/m}$. Com isto, você deve determinar a melhor forma de coletar os dados dos próximos testes, para dimensionar os níveis de vibrações e ruídos no caminhão, sendo que estes dados serão analisados e armazenados para posterior consulta. Além disso, você deve ainda elaborar uma estratégia de monitoramento de vibrações para esse projeto. Você já sabe quais equipamentos são usados para medição vibrações? Com o seu conhecimento adquirido até aqui, você conseguiria pensar em um sistema de monitoramento de vibrações para o motor?

Nesta seção, veremos os métodos e elementos de um sistema de medição de vibração, testes dinâmicos para determinação das características dinâmicas de máquinas e estruturas. Além disso, veremos como deve ser feita a monitoração de vibração em sistemas para auxiliar nos processos de diagnóstico e manutenção de equipamentos. Portanto, para se tornar capaz de aplicar os conceitos de medição de vibração, lembre-se de estudar todo o conteúdo deste livro e ir além, buscando complementar seus conhecimentos. Bons estudos!

Na prática, a medição de vibrações é importante devido a vários fatores, como níveis de produção excessivos, na qual as máquinas tendem a funcionar em condições forçantes que geram grandes vibrações. O monitoramento das frequências naturais ajuda na configuração das condições de operação das máquinas; além disso, é de grande importância o monitoramento das vibrações causadas por terremotos, ventos e ondas do mar em estruturas.

A medição de vibrações segue o esquema apresentado na Figura 4.14, na qual é possível perceber que o movimento vibratório é captado pelo transdutor ou sensor; porém, como o movimento é razoavelmente pequeno, deve-se utilizar um conversor de sinal que amplifica o sinal para uma magnitude desejada para ser apresentada ou armazenada para análise dos dados obtidos.

Figura 4.14| Esquema básico de medição de vibração



Fonte: Rao (2008, p. 345).

Reflita

Seria possível realizar o monitoramento e análise de vibração sem os equipamentos adequados, apenas de forma visual? É realmente necessário medir e monitorar as vibrações em máquinas e estruturas?

Descreveremos agora alguns dos principais equipamentos para um sistema de medição de vibrações.

Transdutores e sensores

Os transdutores são dispositivos que transformam variáveis físicas em sinais elétricos equivalentes, sendo que alguns transdutores são menos utilizados devido a sua lentidão de resposta e não linearidade. (RAO, 2008 p. 345). Os mais usados em medições de vibração são:

(1) **transdutor de resistência variável**, no qual um movimento mecânico modifica a resistência elétrica de um reostato, extensômetro ou semicondutor, modificando assim sua tensão ou corrente elétrica de saída;

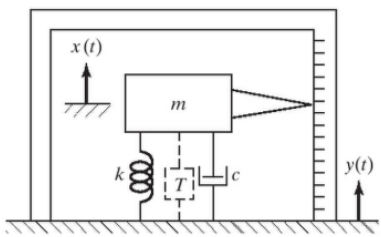
(2) **transdutor piezelétrico**, utilizam materiais piezelétricos como conversor de sinal, como, por exemplo, quartzo, turmalina, sulfato de lítio e sal de Rochelle, que geram carga elétrica quando sujeitos a uma deformação ou tensão mecânica;

(3) **transdutores eletrodinâmicos**, consiste em um condutor elétrico em forma de solénoide que gera uma carga elétrica enquanto se movimenta em um campo magnético;

(4) **transdutor transformador diferencial (LVDT)**, consiste em um dispositivo com uma bobina primária no centro e duas secundárias nas extremidades de um núcleo magnético. Temos que quando o núcleo se movimenta, faz com que uma tensão se desloque entre as bobinas gerando um sinal de saída.

Por definição, temos um sensor de vibração quando um transdutor é usado em conjunto com outro dispositivo para medir vibrações. Os sensores mais comuns são denominados de instrumentos sísmicos, que consistem em um sistema massa-mola-amortecedor montado sobre o corpo vibratório. Assim, o movimento de vibração é medido pelo deslocamento da massa em relação à base, como mostra a Figura 4.15.

Figura 4.15| Instrumento sísmico



Fonte: Rao (2008, p. 348).

Para se medir o deslocamento da vibração podemos usar um transdutor de deslocamento, também conhecido como sismômetro ou vibrômetro, que mede o deslocamento relativo entre a massa e a base. Os acelerômetros são amplamente usados para medir vibração e registrar terremotos. A partir destes é possível determinar o deslocamento e velocidade de vibração através da integração dos dados obtidos. Ainda podemos usar um transdutor de velocidade para medição de vibração.

Por serem um sistema massa-mola amortecido, temos que os sensores de vibração montados sobre um sistema vibratório apresentam uma defasagem no ângulo de fase que varia com a construção do instrumento, sendo um fenômeno conhecido como distorção de fase, que é um atraso de tempo entre a vibração medida e a medição, dado por $t' = \phi/\omega$, em que ϕ é o ângulo de fase e ω a frequência de vibração. Na prática, a distorção de fase somente é percebida nas primeiras interações de medida, sendo que o registro de saída do acelerômetro é razoavelmente verdadeiro após as primeiras frequências de operação.

Pesquise mais

Para saber mais sobre os transdutores e sensores de vibração, veja as páginas de 345 a 352 do livro do Rao, disponível em sua biblioteca virtual. RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Instrumentos de medição de frequência

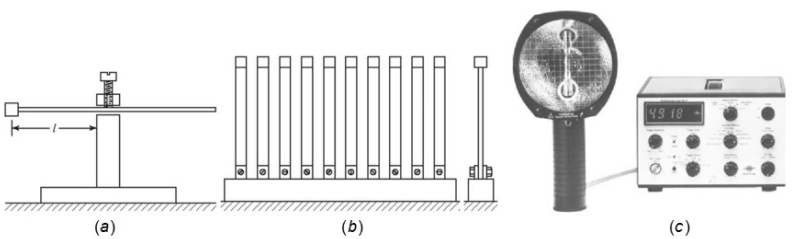
Os instrumentos de medição de frequência são, em sua maioria, mecânicos e baseados na ressonância. Alguns dos instrumentos mais comuns são:

1. **Instrumento com uma palheta** ou **tacômetro de Fullarton**, composto por uma tira em balanço que pode ter seu comprimento variável, com marcações de frequências e uma massa presa à extremidade da tira. Este mecanismo é colocado sobre a superfície do sistema vibratório e a tira é modificada até obter o maior deslocamento, sendo este o ponto de ressonância ou frequência natural. Um instrumento deste tipo pode ser visto na Figura 4.16a.

2. **Instrumento com várias palhetas** ou **tacômetro de Frahm**, consiste em várias palhetas em balanço com massas diferentes em suas extremidades, como observado na Figura 4.16b, que garantem uma ampla faixa de frequências. Quando colocado na superfície do sistema vibratório, a palheta correspondente irá vibrar com amplitude maior, indicando a frequência de ressonância.

3. **Estroboscópio**, instrumento que produz pulsos de luz intermitentes com frequência indicada pelo gerador de pulso. Temos que uma marca é feita no sistema (rotativo) e quando em rotação, uma vez exposto à luz, quando a marcação for vista de forma estática, a frequência natural do sistema coincide com a frequência de pulso do estroboscópio. Este instrumento é mostrado na Figura 4.16c.

Figura 4.16| Instrumentos de medição de frequência



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 352 e 353).

Excitadores de vibração

Os excitadores de vibração (ou vibradores) são usados em várias aplicações, como na determinação de características das máquinas e estruturas, em ensaios de fadiga de materiais, em testes de vibração localizados, dentre outros. Podem ser mecânicos, eletrodinâmicos ou hidráulicos.

Os vibradores mecânicos podem ser um sistema com um garfo escocês, que é usado para frequências de até 30 Hz e cargas menores que 700 N, ou um sistema rotativo desbalanceado que pode gerar cargas entre 250 N e 25000 N, em altas frequências.

Os excitadores eletrodinâmicos são o inverso de um transdutor eletrodinâmico, sendo que a bobina, ao receber a tensão elétrica, gera um deslocamento com intensidade proporcional à corrente I e o fluxo magnético D, dado por $F = DIl$, sendo l o comprimento da bobina. Este é um dos excitadores mais comuns, por ser relativamente barato e exercer cargas de até 30000 N em frequências de 5 Hz a 20 kHz.

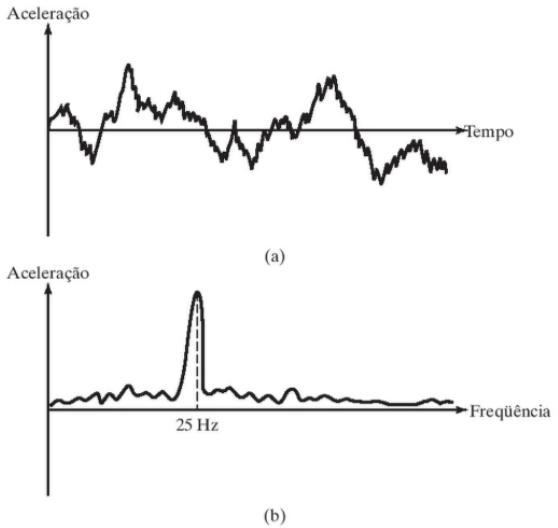
Assimile

Existem diversos tipos de excitadores de vibração ou vibradores, cada qual para uma aplicação, dependendo da frequência e intensidade de perturbação que se deseja oferecer ao sistema.

Análise de sinal

A análise de sinal do sistema vibratório é de suma importância, pois é através dela que os engenheiros serão capazes de definir estratégias de resolução de problemas. A análise de sinal pode ser feita tanto visualmente quanto computacionalmente, através de tratamento de sinal. Isto dependerá da aplicação e necessidade da medição, e só poderá ser definida pela equipe de engenharia ao avaliar um sistema. Diversas vezes, na análise de sinal, a resposta no domínio do tempo não nos é útil; para tanto, devemos converter a resposta para o domínio da frequência. Observando a aceleração no domínio do tempo, como indicado na Figura 4.17a, não conseguimos tirar nenhuma conclusão. Porém, quando convertemos para o domínio da frequência, como mostrado na Figura 4.17b, podemos perceber um acumulo de energia na frequência de 25 Hz, que pode indicar um componente gerando uma vibração indesejada.

Figura 4.17| Diferença entre o domínio do tempo e o domínio da frequência



Fonte: Rao (2008, p. 354).

Os analisadores de espectro garantem a visualização no domínio da frequência de um sinal separado em várias bandas simultâneas. Este dispositivo é amplamente usado para monitoração de vibração em tempo real, a partir do método de filtragem digital ou do método de transformada rápida de Fourier (FFT). Sendo o filtro digital mais adequado para análise de largura de faixa percentual constante, e o FFT o mais adequado para análise de largura de faixa constante.

Ensaios dinâmicos de máquinas e estruturas

Existem basicamente dois métodos de ensaios dinâmicos usados em vibração, as **medições da forma operacional de deflexão** (ODS) e a **análise modal**. No primeiro método são medidas as vibrações na frequência de regime permanente da máquina, usando-se um acelerômetro em um ponto da máquina ou estrutura para servir de referência e outro acelerômetro móvel para medir as vibrações em vários outros pontos e direções, o que permite observar os movimentos absolutos e os esforços, permitindo identificar problemas e elaborar estratégias para resolvê-los.

A **análise modal experimental** é usada para a determinação das frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais. A ideia básica é que, quando uma máquina ou estrutura sofre uma excitação, então apresentará um pico acentuado quando passar por sua frequência natural (frequência de ressonância).

Para realizar este tipo de teste são necessários:

1. Um excitador para aplicar uma força conhecida à estrutura;
2. Um transdutor para converter o movimento em um sinal elétrico;
3. Um amplificador de sinal para condicionar o sinal emitido pelo transdutor, para que este seja compatível com o analisador;
4. Um analisador de dados para processar o sinal com uso de *software* adequado.

Saiba mais

Estude mais sobre a análise de sinal e ensaios dinâmicos, nas páginas de 354 a 364 do livro do Rao disponível em sua biblioteca virtual.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

Monitoração e diagnóstico de falha de máquinas

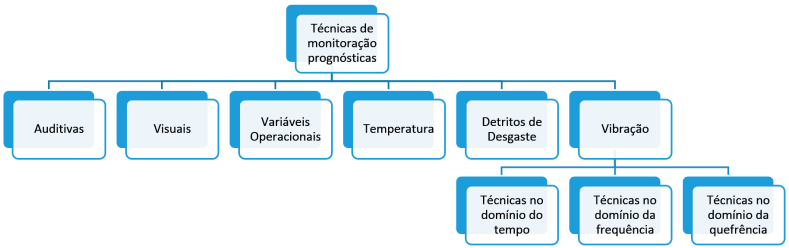
De acordo com Rao (2008, p. 364), as máquinas produzem baixos níveis de vibração quando projetadas adequadamente; porém, devido ao seu funcionamento, começam a apresentar folgas devido ao desgaste natural das partes, desvios e desbalanceamentos que aumentam os níveis de vibração. Para tanto, os critérios de severidade para vibrações dados por normas como a ISO 2372 são bons parâmetros para checagem e análise de vibrações.

Para que possamos manter uma máquina ou estrutura em boas condições, são necessárias manutenções que podem ocorrer de três formas básicas:

1. **Manutenção após avaria ou manutenção corretiva:** este tipo de manutenção é usado para máquinas baratas e que não oferecem riscos devido a falhas, que consiste na utilização da máquina ou estrutura até sua falha para, então, substituir a mesma ou parte dela.
2. **Manutenção preventiva:** são manutenções programadas, feitas em períodos fixos, estipulados por dados estatísticos de manutenções anteriores. É um método caro, pois envolve paradas de produção, substituição de partes sem necessidade e não elimina a possibilidade de falha.
3. **Manutenção prognóstica por monitoração contínua:** envolve o monitoramento das condições de funcionamento das máquinas a fim de garantir a detecção de condições de falha. Com isto, há uma redução de custos, pois elimina manutenções desnecessárias e falhas catastróficas.

A Figura 4.18 mostra diversas técnicas de manutenção prognóstica, ressaltando a importância da técnica de monitoração de vibração.

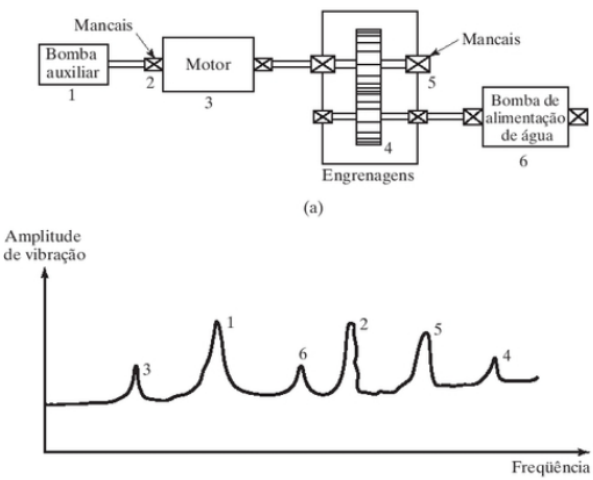
Figura 4.18| Diagrama das técnicas de manutenção



Fonte: elaborada pelo autor.

O monitoramento da vibração nos oferece diversas análises que nos mostram dados importantes sobre as condições da máquina. A análise no domínio do tempo nos fornece dados sobre a forma de funcionamento da máquina com relação ao desgaste natural, que nos permite criar dados estatísticos de manutenção para prever períodos de monitoramento. Já a análise no domínio da frequência nos fornece dados que nos permite comparar como a máquina está e identificar partes com problema, já que cada parte da máquina ou estrutura possui uma frequência identificável, como mostrado na Figura 4.19.

Figura 4.19| Relação entre resposta de vibração e componentes de máquina



Fonte: Rao (2008, p. 367).

Pesquise mais

Para saber mais sobre monitoramento de vibrações e as posições dos instrumentos, dê uma olhada no site da *Dinamox* na página intitulada "Saiba onde monitorar a vibração e quais as vantagens. Lá há algumas informações muito interessantes sobre o monitoramento de vibrações.

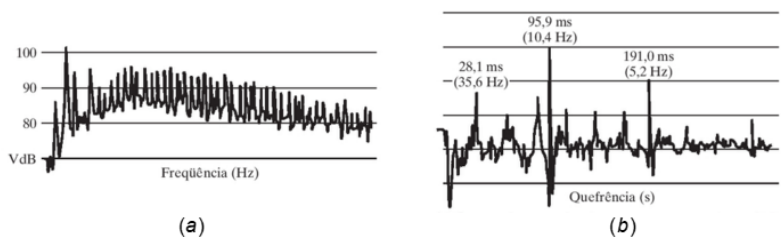
A análise no domínio da quefrência leva em consideração o inverso da transformada de Fourier do logaritmo do espectro de energia denominado de *cepstro*, sendo:

$$c(\tau) = F^{-1}\left\{\log Sx(\omega)\right\} \tag{4.46}$$

Onde $F\{\}$ é a transformada de Fourier e $Sx(\omega)$ é o espectro de energia do sinal $x(t)$. O espectro pode ser definido como o espectro do espectro da energia do sinal $x(t)$. Permite-nos identificar, de forma mais rápida, partes com defeito ou mau funcionamento.

Observe a diferença entre um gráfico no domínio da frequência de uma caixa de câmbio em mau funcionamento e um gráfico do mesmo componente no domínio da quefrência, dados na Figura 4.20a e b, respectivamente.

Figura 4.20| Diferenças entre o domínio da frequência e o domínio da quefrência



Fonte: adaptado de Rao (2008, p. 368).

É possível observar que o gráfico indicado na Figura 4.20 nos traz picos mais perceptíveis que os da Figura 4.20a, permitindo uma melhor visualização.

Exemplificando

Se um sistema vibratório com amplitude de 4 mm, for analisado usando-se um sensor de vibração com massa de 0,5 kg e rigidez de 10000 N/m, sem amortecimento, que ao ser montado sobre o sistema vibratório apresentou amplitude de 12 mm, qual seria a frequência do sistema?

Solução:
Temos que o sensor analisa a vibração através do deslocamento relativo entre a massa do sensor e o sistema vibratório. Assim, teremos que o deslocamento relativo *Z* é dado por *Z=X-Y*, sendo *Y* o deslocamento do corpo e *X* o deslocamento do sensor. Portanto, sendo *x* = 12 mm e y = 4 mm, teremos:

$$Z = X - Y = 0{,}012 - 0{,}004 = 0{,}008\text{m}$$

Sabendo que o deslocamento relativo é dado por:

$$Z = \frac{Yr^2}{1-r^2} \rightarrow 0{,}008 = \left\{\frac{0{,}004r^2}{1-r^2}\right\} \rightarrow r^2 = \frac{2}{3}$$

Como $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ e $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ então, teremos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10000}{0{,}5}} = 141{,}42 \, \text{rad}/\text{s}$$

Assim, podemos dizer que:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \omega = r\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}}141{,}42 = 115{,}47 \, \text{rad}/\text{s}$$

Desta forma, sabemos que o sistema está vibrando com uma frequência de 115,47 rad/s.

Sem medo de errar

Como responsável pela análise de vibrações do departamento, você e sua equipe definiram um absorvedor de vibrações para que as vibrações do motor não sejam transmitidas para a cabine do caminhão. Nesse momento, você deve elaborar uma estratégia de monitoramento e coleta de dados vibracionais para análise, incluindo as características dinâmicas do motor.

Resolução:

Para um sistema vibratório, é importante termos em mente que as vibrações naturais são de suma importância, pois é nelas que o sistema sofrerá com os maiores picos de tensão, deslocamento, velocidade e aceleração, considerando que as vibrações naturais ocorrem devido ao tão conhecido fenômeno de ressonância.

Para que possamos determinar as frequências naturais de forma prática, ou seja, as frequências de ressonância reais, devemos aplicar o teste modal, que nos fornecerá as características dinâmicas do motor, que inclui as frequências que devem ser evitadas e suas formas modais, permitindo-nos

elaborar estratégias de modificação de tais frequências se algumas coincidirem com as frequências de operação do motor: (1) motor em fase neutra sem aceleração, (2) em regime de troca de marcha e (3) em regime normal de funcionamento.

Para realizar uma análise modal, devemos usar alguns equipamentos de excitação como, por exemplo, vibradores ou um martelo de impacto, sendo que devemos aplica-los em pontos-chave do motor, como os suportes, centros das faces do motor e pontos variados, a fim de definir as frequências naturais e formas modais.

Para o correto monitoramento das vibrações do motor, devemos nos preocupar com o conforto acústico da cabine e, portanto, devemos inserir instrumentos de medição tanto no motor quanto na cabine. Alguns dos pontos que devem ter sensores de vibração e sensores acústicos são: (1) suportes do motor, (2) painel de instrumentos da cabine, (3) encostos de cabeça dos bancos (passageiro e motorista), (4) volante de direção, (5) caixa de câmbio, dentre outras posições, dependendo das necessidades de cada modelo de caminhão.

O monitoramento deve ser feito com o motor ligado e passando por várias frequências de funcionamento. Com isto, os sensores captarão as vibrações de perturbações acústicas e enviarão os dados para um conversor/amplificador/condicionador de sinal, passando por um analisador que processará os dados e, finalmente, os mostrará em uma tela ou armazenará os dados. O monitoramento poderá mostrar partes com problema que podem ser substituídas, fornecer dados para banco de dados estatístico de tempo de vida útil de partes do motor e tempo de manutenção de peças.

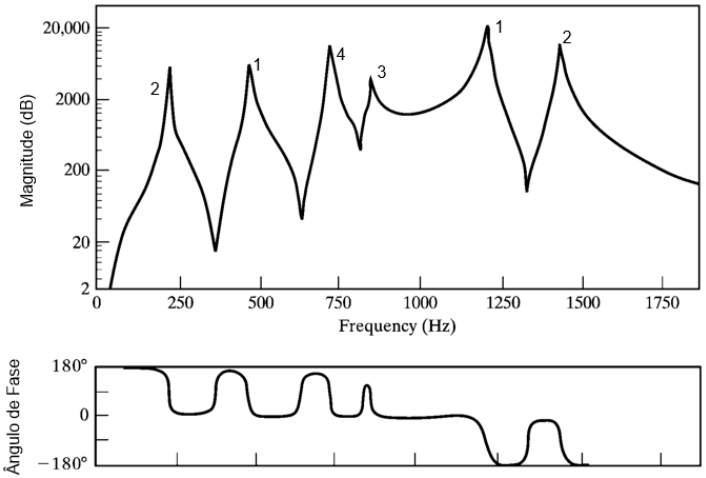
Portanto, finalizamos a estratégia de medição e monitoramento de vibrações, o que é de extrema importância para garantir o bom funcionamento do sistema vibratório.

Determinação de frequências naturais a partir da análise gráfica

Descrição da situação-problema

Agora você trabalha para uma montadora de automóveis como engenheiro mecânico, sendo o responsável pela equipe de análise vibracional. Você e sua equipe foram chamados para realizar uma análise modal no novo carro da frota de sedans de pequeno porte. Para tanto, foram definidos quatro pontos de análise, sendo: (1) suporte do motor, (2) suportes das suspensões, (3) eixo da direção e (4) painel de instrumentos. Foram instalados sensores nos pontos descritos e inseridos acelerômetros nos principais pontos de geração de vibração em um carro: motor e eixos das rodas. Ao realizar o teste, foi obtido o gráfico mostrado na figura 4.21.

Figura 4.21| Função de transferência experimental



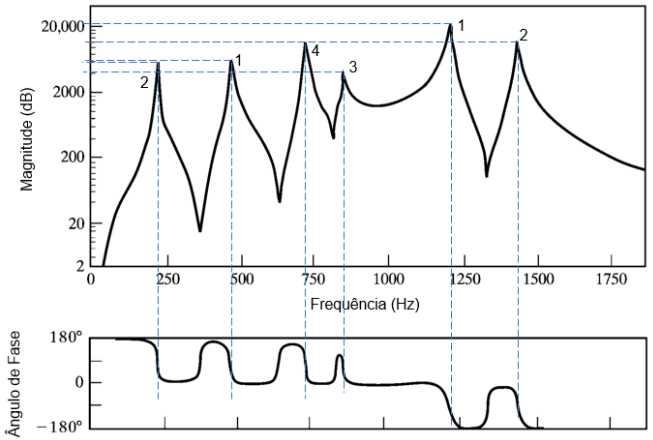
Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 375).

Para analisar este gráfico é importante saber que a ressonância ocorre nos picos de magnitude e quando a ângulo de fase muda em 180°. Quais as conclusões que você e sua equipe podem inferir a partir deste gráfico?

Resolução da situação-problema

Analisando o gráfico mostrado na Figura 4.21, podemos observar que existem seis picos de magnitude. Se traçarmos uma linha em cada pico até seu ângulo correspondente, teremos algo parecido com o que é mostrado na Figura 4.22.

Figura 4.22| Analise do gráfico



Fonte: adaptada de Rao (2008, p. 375).

Podemos perceber que, dos seis picos, somente quatro ocorrem com mudança de 180° do ângulo de fase, sendo que nos pontos centrais do gráfico a mudança de fase não atinge 180° e, portanto, nos pontos 3 e 4 correspondentes ao eixo da direção e ao painel de instrumentos do carro não ocorrerá ressonância. Já nos outros quatro pontos ocorrem ressonância, sendo os pontos 1 e 2 correspondentes ao suporte do motor e aos suportes das suspenções. Como o eixo das frequências possui crescimento linear, se aplicarmos uma interpolação simples poderemos encontrar que as frequências naturais do sistema que ocorrem, aproximadamente em:

A primeira ressonância no suporte do motor, ocorre em: $\omega_1^{(1)} \simeq 469,39\text{Hz}$

A segunda ressonância no suporte do motor, ocorre em: $\omega_2^{(1)} \simeq 1201,65\text{Hz}$

A primeira ressonância nos suportes das suspenções, ocorre em: $\omega_1^{(2)} \simeq 220,59\text{Hz}$

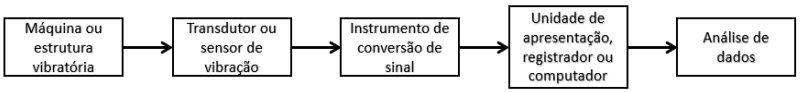
A primeira ressonância nos suportes das suspenções, ocorre em: $\omega_2^{(2)} \simeq 1437,93\text{Hz}$

Com isto, estes dados podem ser encaminhados para a equipe de projetos para auxiliar na tomada de decisões para o projeto, finalizando assim a resolução da problematização proposta.

Faça valer a pena

1. A medição de vibração é realizada para que possamos compreender melhor o comportamento de uma máquina ou estrutura, sabendo suas características dinâmicas, monitorando a eficiência em seu funcionamento e prevendo possíveis falhas catastróficas. Um sistema de medição de vibração é composto por três elementos básicos, sendo que um exemplo de esquema de medição é mostrado na figura a seguir.

Figura| esquema de medição de vibrações



Fonte: elaborada pelo autor.

Quais são os três elementos usados para medição de vibração? Assinale a alternativa correta:
a) Transdutor ou sensor, conversor de sinal e processador.
b) Sensor, conversor de sinal e computador.
c) Transdutor, sensor e conversor de sinal.
d) Sensor, condicionador de sinal e amplificador de sinal.
e) Transdutor ou sensor, amplificador e condicionador de sinal.

2. As medições de vibração podem ser usadas para monitorar sistemas vibratórios como máquinas e estruturas, sendo uma importante ferramenta auxiliar nas tomadas de decisão para manutenção, além de ser uma ótima alternativa para outros métodos de monitoração prognóstica.

O texto-base nos traz uma aplicação de medição de vibração. Como o monitoramento pode auxiliar na manutenção de máquinas e estruturas?
a) A monitoração de vibração só é útil para prever falhas, o que garante a manutenção no tempo certo, eliminando outros tipos de manutenção.
b) Ao monitorar vibrações eliminamos o desgaste natural da máquina, uma vez que esta passa a ser observada a todo momento.
c) O monitoramento de vibração é aplicável apenas em máquinas e estruturas de alto custo, portanto, não sendo uma ferramenta boa para auxiliar a manutenção de todos os tipos de máquinas.

d) A monitoração de vibração é útil para observar as condições de funcionamento, com isto, mostra quando e onde uma máquina ou estrutura está apresentando problemas, facilitando a manutenção, além de reduzir as manutenções desnecessárias e prevenir falhas catastróficas.
e) Aplicando a monitoração regular nas máquinas e estruturas, podemos evitar que as mesmas sofram falhas catastróficas, evitando assim a substituição das máquinas ou partes com defeito, com isto pode-se eliminar qualquer tipo de manutenção e garantir que os equipamentos não se deteriorem.

3. Imagine que você é o engenheiro responsável pelos testes de vibração em aeronaves de um hangar de manutenção. A aeronave que se encontra em manutenção no momento está apresentando ruídos altos na parte interna, gerando reclamações por parte dos passageiros, sendo que a hipótese é que a junção das asas com a fuselagem está entrando em ressonância. Como você faria as medições de vibração para definir os níveis do problema?

A partir da pergunta feita no texto-base, assinale a alternativa correta.
a) A substituição das placas da fuselagem próximas das asas, resolveria o problema, não necessitando de medições de vibração.
b) Uma vez que a hipótese é a raiz da asa, o correto é instalar sensores de vibração nas junções e alguns sensores acústicos dentro da aeronave para medir as vibrações destes que são os pontos críticos.
c) A aeronave deve ser completamente desmontada para que os mecânicos aeronáuticos possam encontrar o problema.
d) O correto é que insiram sensores na cabine dos pilotos, nos trens de pouso e nos motores da aeronave para diversificar os pontos de medição.
e) Sendo que o problema são as asas, basta que sejam substituídas por asas novas.

Referências

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 2631-2:** Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 2: General requirements. Switzerland, 2003. 11 p.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 2631-1:** Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements. Switzerland, 2010. 52 p.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 4866**: Mechanical vibration and shock - Vibration of fixed structures - Guidelines for the measurement of vibrations and evaluation of their effects on structures. Switzerland, 2010. 36 p.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 20816-1**: Mechanical vibration - Measurement and evaluation of machine vibration - Part 1: General guidelines. Switzerland, 2016. 33 p.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prince Hall, 2008. 424 p.

ISBN 978-85-522-1370-3

9 788552 213703 >