

KLS

# Controle de Processos



# Controle de Processos

---

Hugo Tanzarella Teixeira

**© 2019 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.**

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Rafael Schincariol da Silva

Roberta Lopes Drekenner

**Editorial**

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Teixeira, Hugo Tanzarella

T266c Controle de processos / Hugo Tanzarella Teixeira. –

Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2019.

216 p.

ISBN 978-85-522-1369-7

1. Estabilidade. 2. Função de transferência. 3. Diagrama de blocos. I. Teixeira, Hugo Tanzarella. II. Título.

CDD 629

2019

**Editora e Distribuidora Educacional S.A.**

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 — Londrina — PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

---

## Unidade 1

Introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle ..... **7**

### Seção 1.1

Introdução aos sistemas de controle ..... **8**

### Seção 1.2

Modelos matemáticos de sistemas ..... **20**

### Seção 1.3

Representação dos modelos matemáticos de sistemas ..... **36**

## Unidade 2

Análise de resposta transitória e regime permanente ..... **57**

### Seção 2.1

Sistemas de primeira e segunda ordem ..... **58**

### Seção 2.2

Erros em regime permanente ..... **73**

### Seção 2.3

Problemas práticos sobre sistemas de controle ..... **83**

## Unidade 3

Estabilidade dos sistemas de controle ..... **101**

### Seção 3.1

Estabilidade de sistemas realimentados ..... **103**

### Seção 3.2

Diagrama de Bode e lugar das raízes ..... **118**

### Seção 3.3

Aplicação de critérios de estabilidade para sistemas realimentados ..... **140**

## Unidade 4

Projeto de controladores ..... **161**

### Seção 4.1

Controladores de processos ..... **162**

### Seção 4.2

Tipos de controladores de sistemas dinâmicos ..... **179**

### Seção 4.3

Aplicação e simulação dos controladores PID ..... **196**



# Palavras do autor

---

**A**s indústrias de processamento podem ser caracterizadas pelo uso de recursos e matérias vindos da natureza em favor da humanidade. O termo processo é utilizado para descrever os métodos de mudança ou refinamento de matérias-primas para obter produtos finais. A necessidade de conhecer e controlar o que está ao nosso redor tem como finalidade alcançar produtos úteis e econômicos à sociedade. Como exemplo de controle de processo temos a proporção de ingredientes em uma mistura, a temperatura dos materiais, como os ingredientes são misturados, entre outros fatores que têm um impacto significativo na qualidade do produto final.

A partir do século XX, os servomecanismos, controladores programáveis e, sobretudo, os computadores passaram a fazer parte da tecnologia de automação, de forma que, atualmente, os computadores podem ser considerados a principal base da automação industrial contemporânea, e podemos ainda considerar o desenvolvimento da tecnologia da automação industrial diretamente ligado à evolução dos computadores.

Para atuar com controle de processos, o profissional dessa área precisa compreender e modelar um sistema para que este possa funcionar segundo seu propósito. Entretanto, no controle de processos, muitas vezes existem novos sistemas que ainda não são conhecidos, são complexos e interligados, como um processo químico, um sistema robótico ou um controle de tráfego, que se apresentará como um desafio para compreensão e execução de uma modelagem adequada.

O foco deste livro é dar o conhecimento necessário para que você, de posse do modelo matemático de um sistema dinâmico, possa atuar nele para que este se comporte da maneira mais adequada ao projeto. Entenda que sistema dinâmico pode ser dos mais variados tipos: mecânico, elétrico, térmico, químico, entre outros, e pode ainda ser uma mistura desses sistemas como, por exemplo, um sistema mecatrônico.

Note que é de grande importância que você aplique os conhecimentos adquiridos ao longo das unidades nos mais variados sistemas dinâmicos em seu dia a dia. Você pode criar um sistema, modelá-lo matematicamente com

todas as hipóteses simplificadoras necessárias e projetar um controle para obter uma resposta desejada. Esta é, sem dúvida, a maneira mais eficiente de você levar dúvidas para a sala de aula a fim de serem sanadas junto ao professor e, conseqüentemente, sedimentar o conhecimento.

Na primeira unidade faremos uma introdução aos sistemas de controle, trazendo conceitos básicos como malha aberta, malha fechada e retroalimentação, apresentaremos alguns modelos matemáticos de sistemas e, para isso, retomaremos nesse contexto os conceitos de equações diferenciais, transformada de Laplace e função de transferência. Por fim, representaremos esses modelos em diagrama de blocos.

A segunda unidade tratará da análise da resposta transitória e em regime permanente nos sistemas de primeira e segunda ordem, do erro em regime permanente, além de trazer aplicações práticas de sistemas de controle no MATLAB.

Enquanto na terceira unidade traremos o conceito de estabilidade dos sistemas de controle, na qual apresentaremos métodos como lugar das raízes e resposta em frequência.

Na quarta unidade apresentaremos técnicas de controle de processos e tipos de controladores como controle P, controle PI e controle PID e, ao final, suas aplicações em MATLAB.

Por fim, talvez a tarefa de controlar adequadamente um processo pode vir a ser não muito trivial, mas conhecer bem a teoria de controle por trás da prática é fundamental para se alcançar o resultado desejado. Vamos trilhar o caminho de maneira que você entenda cada conceito da melhor maneira possível e aplique-os ao longo das unidades.

Mãos à obra!

# Unidade 1

---

## Introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle

### Convite ao estudo

A evolução da ciência e da tecnologia deixou-nos rodeados por sistemas autônomos, dentre os quais podemos citar o sistema de injeção eletrônica, que define automaticamente a mistura da combustão, o freio ABS, que evita o bloqueio da roda (e conseqüentemente a derrapagem do automóvel), mesmo que o condutor pressione totalmente o pedal freio, ou o piloto automático utilizado em aviões (também em embarcações e automóveis).

Em todos esses sistemas são utilizados conhecimentos provenientes da teoria de controle. Todos eles envolvem análise e modelagem de um sistema dinâmico, com a identificação de suas respectivas variáveis de entradas e das variáveis de saída, para então obter as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema, e depois, o projeto do controlador que fará com que o sistema se comporte da maneira desejada (em relação aos exemplos temos, respectivamente: melhoria na qualidade da queima do combustível, prevenção de acidentes e mais segurança durante o voo, pouso e decolagem). Na modelagem e no projeto do controlador, faremos o uso da técnica de resolução de equações diferenciais ordinárias por meio da transformada de Laplace, que simplifica o trabalho e tem uso direto no software MATLAB.

Para iniciarmos os estudos em controle de sistemas dinâmicos ao longo desta unidade, apresentaremos uma série de situações práticas comuns no dia a dia de um profissional que trabalha com controle de processos e relacionadas ao conteúdo teórico apresentado nesta unidade. Nesse sentido, vamos pensar em alguns pontos: é possível modelar o mundo ao nosso redor? Que tipo de linguagem empregamos para modelar um sistema? Se conseguirmos modelar um sistema conseguimos influenciar a sua resposta?

Mãos à obra e um ótimo estudo!

# Introdução aos sistemas de controle

## Diálogo aberto

Os sistemas de controle possuem uma grande quantidade de aplicações e existem diversas formas de projetar um controlador. Mas antes de partir para o projeto propriamente dito, é essencial o conhecimento de algumas terminologias básicas utilizadas no meio, além de saber diferenciar a arquitetura do sistema dinâmico como em malha aberta ou malha fechada.

Para contextualizar o nosso estudo, vamos pensar na seguinte situação prática: uma empresa de sistemas embarcados que oferece soluções em automação de sistemas foi contratada para o desenvolvimento de um projeto de controle automático de temperatura de uma estufa para ovos, também conhecida como chocadeira automática para ovos. Segundo o contratante, o usuário deverá entrar com a temperatura ideal para o tipo de ovos e o sistema deverá manter o valor desta temperatura. E então, qual a melhor forma de realizar o controle da temperatura deste sistema? Quais seriam as variáveis envolvidas neste processo?

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



Fonte: adaptada de <<https://go.olx.com.br/grande-goiania-e-anapolis/agro-e-industria/outros-itens-para-agro-e-industria/chocadeira-automatica-digital-para-120-ovos-de-galinha-690-00-527473433>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

Para auxiliá-lo com esse desafio, introduziremos nesta seção os conceitos de sistemas de controle, arquitetura de sistemas dinâmicos e projetos de malhas de controle.

Bons estudos!

Não é muito difícil ouvir a palavra controle e pensar no controle da televisão, ou do videogame. No futebol, há a brincadeira chamada de “controlinho”, no qual o objetivo é ficar continuamente fazendo embaixadas com a bola sem deixá-la cair no chão.

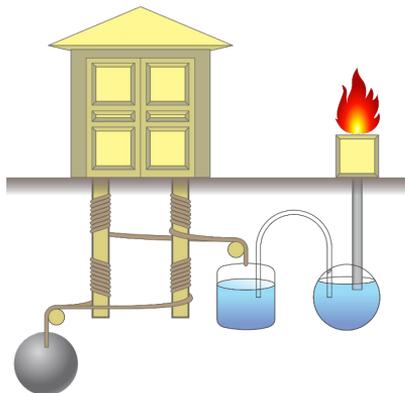
Perceba que há uma mesma ideia por trás do uso da palavra controle:

- Na televisão usamos o controle para encontrar um canal de que gostamos para assistir algo interessante.
- No videogame usamos o controle para fazer com que atuemos no jogo virtual e consigamos completar algum objetivo.
- No “controlinho” atuamos na bola a fim de não deixá-la cair no chão.

Embora sejam circunstâncias totalmente distintas, controlar não deixa de ser a mesma coisa: atuar em algo para que um objetivo seja estabelecido. Pois então, a teoria de controle de sistemas dinâmicos busca exatamente a mesma coisa e, para tal, contamos com conhecimento físico e matemático.

Esta teoria não é tão recente. Um dos primeiros sistemas de controle automáticos de que se tem notícia foi desenvolvido por Heron de Alexandria (10 d.C. – 70 d.C.), no século I. Tratava-se de um sistema de abertura de portões, ilustrado na Figura 1.2.

Figura 1.2 | Ilustração do sistema de controle de abertura e fechamento dos portões



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma pira era acesa e o calor desta aquecia a água e o ar do primeiro reservatório subterrâneo, fazendo com que eles se expandissem. Com isso a água era transferida para outro reservatório que, ficando mais pesado, descia puxando uma corda ligada a um rolete que, finalmente, rotacionava a porta.

Para esse controle, a **entrada** do sistema era a temperatura da pira e a **saída** era o ângulo do portão.

No século XVII, surgiu pela primeira vez uma formalização matemática de um sistema de controle que era muito utilizado para corrigir a velocidade angular de máquinas à vapor. Esse sistema é denominado governador (ou regulador) centrífugo, ilustrado na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Ilustração do governador (ou regulador) centrífugo

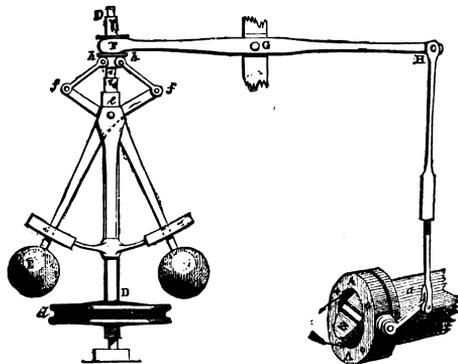


FIG. 4.--Governor and Throttle-Valve.

Fonte: Routledge (1900) apud <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=231047>>. Acesso em: 25 maio 2017.

Os governadores centrífugos eram utilizados para controlar a velocidade das máquinas à vapor, por meio da atuação na válvula que limita o fluxo de ar da admissão das máquinas. O eixo D rotaciona devido à potência gerada pelo motor por meio de algum acoplamento (por exemplo, correias) e, junto com o eixo D, as esferas também rotacionam. O aumento da velocidade angular faz com que as esferas se elevem e o mecanismo no topo suba e reduza a abertura da borboleta de admissão. A restrição da admissão reduz o trabalho gerado pelo motor e, conseqüentemente a velocidade angular desenvolvida pelo eixo. Neste caso, a **entrada** do sistema era a velocidade angular do eixo do motor e a **saída** era o ângulo da borboleta da admissão.



### Refleta

Será que você conhece outro sistema de controle? Qual sistema seria esse? Qual tipo de variável esse sistema pode controlar: posição, fluxo ou potência? Em qual sistema dinâmico ele atua? Quais são as variáveis de entrada e saída desse sistema de controle?

Avançando na história, em 1922 Nicolas Minorsky foi responsável pela primeira proposta de aplicação de controle PID (proporcional – integrativo – derivativo, tipo clássico de controlador que será visto na Unidade 4) aplicado ao sistema automático de direção dos navios da marinha estadunidense.

Na década de 1950 até a década de 1960, com o avanço da ciência, a eletrônica analógica foi muito utilizada para tarefas de controle automático, nas quais os valores das resistências, capacitores e indutores afetavam a performance do controlador. Já na década de 1970, surgiu a teoria do controle digital devido ao desenvolvimento dos sistemas digitais (circuitos integrados e microcontroladores).



### Refleta

Você sabe a diferença entre um sistema analógico e um sistema digital? Qual a vantagem de um em relação ao outro? E desvantagens? Sabemos que a eletrônica digital é vastamente utilizada nos dias atuais. Mas e a eletrônica analógica? Ela continua sendo útil? Você conhece algum exemplo? Você conhece algum exemplo de sistema digital que não seja elétrico nem eletrônico?

O maior avanço na teoria de controle clássico ocorreu até a metade do século XIX, com ferramentas matemáticas muito importantes no projeto e análise de controladores, sendo que as mais importantes serão apresentadas ao longo das unidades deste material.

Na segunda metade do século XIX, houve o surgimento de técnicas avançadas de controle, tais como:

- Controle ótimo – cálculo da atuação no sistema por meio da minimização de uma função custo definida pelo projetista.
- Controle robusto – controle com performance e estabilidade robusta às incertezas da modelagem do sistema.
- Inteligência Artificial.



### Pesquise mais

As técnicas mais avançadas de controle são utilizadas em situações complexas, nas quais as técnicas clássicas não conseguem realizar a tarefa necessária de maneira a alcançar um índice de performance requerido como, por exemplo, quando o sistema real está sujeito a falhas, sendo tarefa do controlador lidar com elas.

Para saber mais, leia sobre o desenvolvimento de técnicas de controle robusto e controle tolerante a falhas.

SIQUEIRA A.; TERRA M.; FRANCISCO T. Controle robusto de robôs móveis em formação sujeitos a falhas. **Revista Controle & Automação**, v. 21, n. 1, p. 29-42, 2010.

Neste contexto, é notório que a teoria de controle seja uma área extensa com aplicação nos mais diversos sistemas dinâmicos. Para começarmos nossos estudos nessa vasta área de conhecimento, é fundamental a introdução de alguns conceitos básicos, como o aprendizado da arquitetura do controlador. Algumas das definições mais usuais no estudo dos sistemas de controle estão apresentadas a seguir:

- **Variável controlada e variável manipulada:** em sistemas de controle, a variável controlada é o estado ou a grandeza que é mensurada e controlada. Essa variável usualmente corresponde à saída do sistema. Já a variável manipulada representa o estado ou a grandeza alterada pelo controlador, de forma que modifique a variável controlada.
- **Planta ou sistema a ser controlado:** consiste no equipamento ou conjunto de componentes que pode ser implementado de maneira integrada, com o objetivo de executar operações específicas. Ao longo desta disciplina, será chamado de planta qualquer sistema a ser controlado.
- **Sistemas:** conjunto de componentes que operam para alcançar um objetivo estabelecido. O conceito de sistema é utilizado tanto para fenômenos físicos quanto para abstratos e dinâmicos, encontrados na Economia e na Biologia, entre outros.
- **Distúrbio:** é chamado de distúrbio todo e qualquer sinal que propende a afetar de maneira inadequada o valor da variável de saída de um sistema. Um distúrbio é classificado como distúrbio interno e distúrbio externo. O primeiro é criado dentro do próprio sistema, enquanto o segundo é gerado fora e comporta-se como um sinal de entrada no sistema.

Imagine-se regulando a temperatura do chuveiro antes de começar o banho. Sendo um chuveiro simples, a temperatura da água é definida pela vazão do chuveiro: quanto menor o fluxo, maior a temperatura da água e quanto maior o fluxo, menor a temperatura.

Imagine ainda duas situações:

a. Você liga o chuveiro, define uma vazão que, por conhecimento prévio do comportamento de seu próprio chuveiro, você julga ser adequada para a temperatura desejada e entra para tomar banho sem interferir na vazão novamente.

b. Você liga o chuveiro e vai se molhando de pouco em pouco, sentindo a temperatura da água e ajustando o fluxo para que a temperatura vá ao encontro daquela que você deseja.

Qual das situações é mais provável de “dar errado” naquele dia mais rigoroso do inverno?

Se você, assim como eu, prefere não correr o risco de entrar no chuveiro frio durante o inverno, então concordamos que a situação (a) envolve mais riscos que a situação (b). Na situação (a) o chuveiro, que pode ser denominado sistema ou planta, e você, que está no papel de controle ou controlador, estão no que é chamado de **malha aberta** (*open-loop*); já na situação (b), vocês estão em **malha fechada** (*closed-loop*). Ou seja, na malha aberta, os cálculos do controlador são baseados em informações que ele recebe do sistema por meio da retroalimentação, diferentemente da arquitetura em malha fechada, na qual o controlador impõe a atuação por meio de valores predefinidos, que não se alteram durante o processo.



### Assimile

Malha aberta: o controlador não recebe informação sobre o estado do sistema.

Malha fechada: o controlador recebe informação sobre o estado do sistema.

Desde as mais simples até as mais complexas tarefas podemos aplicar e explorar o conceito de malha aberta e malha fechada. Muitas vezes, em uma mesma tarefa, temos ambos os tipos de arquitetura funcionando de maneira concomitante.



### Exemplificando

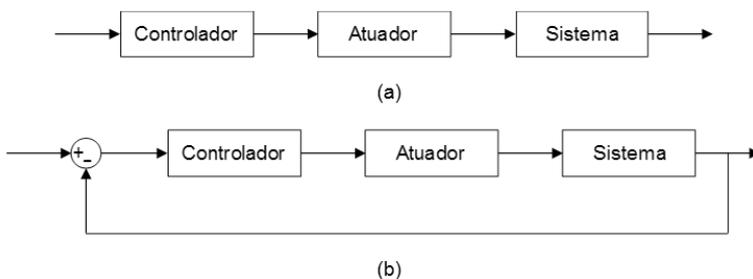
Um outro exemplo que diferencia o controle de malha fechada e malha aberta é a utilização ou não de automação na iluminação residencial. No caso de haver o sistema de automação, as luzes externas podem adequar-se à iluminação solar por meio de um sensor fotossensível: se houver luz do sol, as luzes são desligadas; caso contrário, elas são ligadas e, com isso, você não precisa se preocupar em apagá-las antes de dormir. Esse é um caso em que o controle de iluminação está em malha fechada. Quando não há o sistema de automação, se as luzes ficarem ligadas à noite, quando você acordar, elas estarão no mesmo estado, pois não há retroalimentação, ou seja, o controle das luzes está em malha aberta.

Podemos, então, concluir algumas características da malha aberta e da malha fechada. Na malha aberta, o controle é pré-definido: ele independe do estado do sistema. Com isso, o resultado da atuação deste tipo de arquitetura de controle é altamente suscetível a corresponder ao que se deseja obter o sistema. Por não haver sensoriamento, malha aberta tende a ser mais simples e barata.

Na malha fechada, o controle beneficia-se de informações do sistema para definir o sinal de atuação (ou sinal de controle). Essa informação do sistema que retorna ao controle é chamada de **retroalimentação** (feedback), ou pode-se dizer também realimentação.

Como pode ser visto na Figura 1.4, um sistema de controle básico apresenta algumas estruturas fundamentais: o controlador, o atuador e o sistema. A diferença entre o sistema em malha aberta, Figura 1.4 (a), e o sistema em malha fechada, Figura 1.4 (b), é justamente a retroalimentação.

Figura 1.4 | Arquiteturas básicas um sistema de controle: (a) malha aberta e (b) malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Cada elemento pode ser caracterizado da seguinte maneira:

- Sistema ou sistema dinâmico: é o alvo do controlador. Presente em ambas as arquiteturas. O sistema dinâmico é exatamente o sistema do qual se espera um certo comportamento que pretende ser obtido por meio da atuação do controlador.
- Atuador: é o dispositivo que efetivamente atua no sistema de acordo com comandos vindos do controlador, seja por algum meio, como força, torque, diferença de potencial elétrico, pressão, entre outros. Este elemento também é presente em ambas as arquiteturas.
- Controlador: decide com que intensidade o atuador deve atuar no sistema. Faz parte de ambas as arquiteturas.
- Realimentação: pode existir no sistema, como visto na Figura 1.4 (b) em malha fechada, ou não, como visto na Figura 1.4 (a), em

malha aberta. Este elemento, quando em malha fechada, entrega ao controlador informações sobre estado atual da planta. E, de acordo com estas informações, permite que o controlador ajuste a atuação no sistema a fim de que este alcance o comportamento desejado.

Embora a malha fechada seja mais atraente no quesito de robustez e mitigação de erros, deve-se ter em mente que é também mais complexo de ser aplicado na prática e, com isso, geralmente apresenta maior custo financeiro.

Portanto, antes de se colocar em prática a resolução de um problema, você deve analisar se há realmente a necessidade de desenvolver um sistema de controle em malha fechada para obter a resposta desejada do sistema dinâmico.

## Sem medo de errar

Relembrando nossa situação prática proposta no início desta seção, uma empresa de sistemas embarcados que oferece soluções em automação de sistemas foi contratada para o desenvolvimento de um projeto de controle automático de temperatura de uma estufa para ovos, também conhecida como chocadeira automática para ovos, como a vista na Figura 1.1. Segundo o contratante, o usuário deverá entrar com a temperatura ideal para o tipo de ovos e o sistema deverá manter o valor desta temperatura. E então, qual a melhor forma de realizar o controle da temperatura deste sistema? Quais seriam as variáveis envolvidas neste processo?

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



Fonte: adaptada de <<https://go.olx.com.br/grande-goiania-e-anapolis/agro-e-industria/outras-itens-para-agro-e-industria/chocadeira-automatica-digital-para-120-ovos-de-galinha-690-00-527473433>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

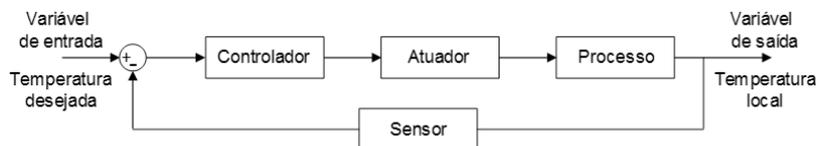
Para iniciarmos o desenvolvimento de um projeto de controle, é fundamental compreendermos o que queremos controlar e como será realizado este controle. Em outras palavras, para o bom funcionamento do sistema de

controle é fundamental definirmos qual será a variável de entrada, de saída e a arquitetura que vai compor este sistema automático.

Neste contexto, como é requisito do projeto que o usuário entre com a temperatura desejada e que o sistema mantenha este valor, o ideal é que a arquitetura deste **sistema** seja em **malha fechada**. Isto é, por mais que ocorra um distúrbio no processo o sistema deve, de forma automática, manter a temperatura desejada pelo usuário. Além disso, o sistema necessita das informações da saída para comparar com o sinal de referência, ou *set point*, para então manter o valor desejado da temperatura.

Considerando que seja usado um sistema resistivo para aquecimento da estufa de ovos, ou seja para planta, a variável de saída é a corrente elétrica, visto que o valor de tensão é constante e o valor da resistência é alterado mecanicamente por meio de um potenciômetro. O valor de corrente elétrica é então aferido e convertido por meio de um conjunto sensor/transdutor que permite então comparar com o valor da variável de entrada, como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, compreendido o sistema de controle torna-se mais fácil desenvolver o projeto de controle de temperatura para ser entregue ao cliente.

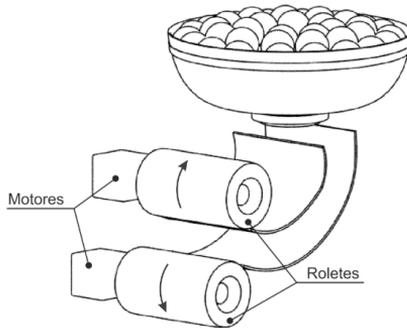
## Avançando na prática

# Sistema para arremesso de bolinhas de tênis de mesa

## Descrição da situação-problema

Você é o profissional responsável por automatizar o centro de treinamento de tênis de mesa de sua cidade e foi encarregado de desenvolver uma máquina de arremessar bolas de tênis de mesa para o treino dos fundamentos do esporte. A Figura 1.6 é um esboço de como seria o sistema: dois roletes, cada um montado no eixo de um motor elétrico, que rotacionam em sentidos contrários para imprimir velocidade na bola que desce de um reservatório de bolas de tênis de mesa.

Figura 1.6 | Representação da máquina de arremesso de bolas de tênis de mesa



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o técnico dos atletas, essa máquina será utilizada para sessões de treinamento de um mesmo tipo de rebatida (saque, *forehand* ou *backhand*) e, por esse motivo, não há exigência de que a máquina altere a maneira de arremessar a bola.

Em relação à arquitetura do controle da máquina de treinamento, qual o tipo de controle que melhor se encaixa nas necessidades do projeto?

### Resolução da situação-problema

A necessidade de funcionamento do equipamento descrita pelo técnico mostra que o sistema não precisa ser complexo, já que basta que as bolas sejam arremessadas de uma mesma maneira durante toda uma sessão de treinamento. Mesmo tendo um custo financeiro maior, a arquitetura de malha fechada seria imprescindível, por exemplo, caso a bola arremessada devesse atingir algum local que mudaria de um arremesso para outro, mas este não é o caso. Uma arquitetura de malha aberta para o controle se mostra suficiente quando o objetivo do sistema é imutável, assim como o projeto em questão, contando com a vantagem de ser um sistema mais econômico e mais simples de ser fabricado.

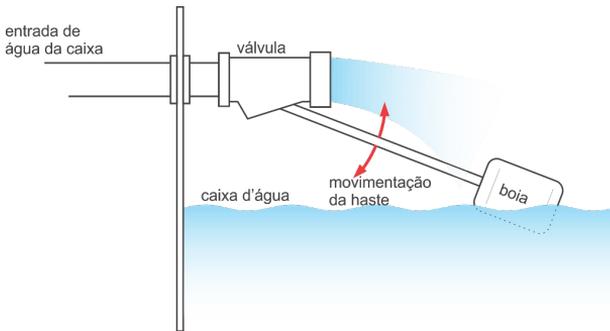
Portanto, a máquina de arremesso de bolas deve ter seu funcionamento em malha aberta.

## Faça valer a pena

**1.** Saber identificar a variável a ser realimentada é de extrema importância para um sistema de controle, pois a seleção de tal variável afeta tanto a modelagem do sistema dinâmico quanto o projeto do controlador para este. Por vezes sua má seleção acarreta em um modelo que, além de estar errado, é impossível de ser submetido à ação de um controlador.

As caixas d'água das residências contam com um simples sistema de controle puramente mecânico para que a água não falte nem transborde da caixa. O sistema é composto por uma boia conectada a uma haste cuja rotação afeta a vazão da válvula, como pode ser visto na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Ilustração do sistema de controle de nível da caixa d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual é propriedade (ou variável) que é realimentada para o sistema de controle?

- a) Altura da boia.
- b) O fluxo de água que sai da caixa.
- c) Posição da válvula.
- d) O nível da água dentro da caixa.
- e) O volume de água presente na caixa d'água.

**2.** Os sistemas de controle podem ser classificados em controle em malha aberta (os que não têm retroalimentação) e controle em malha fechada (os que têm retroalimentação). Embora as diferentes arquiteturas tenham suas peculiaridades tanto na teoria quanto na prática, devemos entender que o uso de uma arquitetura em um sistema de controle não exclui a possibilidade de aplicação da outra arquitetura. Por isso, nos mais variados sistemas de controle que possamos imaginar, existe a presença de ambas arquiteturas. Então, é imprescindível que o projetista usufrua das vantagens de cada tipo de arquitetura sempre que necessário.

Sobre uma máquina de lavar comum, podemos afirmar:

- I. Ao acionar a máquina, é possível escolher o tipo de lavagem que se deseja realizar. Após completar o ciclo de lavagem, a máquina inicia o enxague e, por fim, a centrifugação. Todos os ciclos do processo citados anteriormente ocorrem por um intervalo de tempo, o qual é predeterminado de acordo com cada tarefa. Ao final do processo de lavagem, a máquina não garante que todas as roupas estejam devidamente lavadas.

- II. A vibração do cesto da máquina de lavar é intensa devido à inevitável distribuição não homogênea das peças de roupa durante a centrifugação, então, para não avariar o mecanismo da máquina, absorvedores de vibração são conectados à parte rotativa, que contém as roupas, a fim de diminuir a vibração.
- III. É possível escolher o nível de água da máquina de acordo com a quantidade de roupas que se deseja lavar.

Aplicando o conceito de arquiteturas de um controlador, podemos afirmar que I, II e III se tratam de:

- a) Malha aberta, malha aberta e malha aberta.
- b) Malha aberta, malha aberta e malha fechada.
- c) Malha aberta, malha fechada e malha aberta.
- d) Malha aberta, malha fechada e malha fechada.
- e) Malha fechada, malha fechada e malha fechada.

**3.** Pessoas com deficiência visual são aquelas que, por motivo de acidente, de saúde ou congênito, sofreram a perda ou total parcial do sentido da visão. Com isso, a habilidade de andar de maneira independente pelas ruas fica prejudicada, uma vez que esses indivíduos não têm informação de como o ambiente ao redor deles se encontra nem como ele está se modificando. Para andarem pelas ruas de maneira mais independente, as pessoas com deficiência visual contam com o auxílio de bengala, cão-guia, piso tátil, semáforos sonorizados, etc., pois eles dispõem de pouca ou nenhuma informação sobre o ambiente em que se encontram.

Utilizando-se do contexto de sistema de controle, qual a utilidade desses tipos de auxílio?

- a) Esses auxílios servem para ajudar a pessoa a chegar ao destino com mais rapidez.
- b) Esses auxílios servem de retroalimentação das situações ambiente, permitindo a ele tomar decisão a respeito de sua locomoção com mais segurança e conforto.
- c) São de pouca utilidade pois não são confiáveis para que o deficiente visual possa se locomover, trazendo riscos à sua saúde.
- d) Esses tipos de auxílio caracterizam uma malha aberta para o deficiente visual, pois ele não pode ver o lugar onde se encontra.
- e) Conceitos de sistema de controle não se aplicam, pois se trata de seres biológicos.

# Modelos matemáticos de sistemas

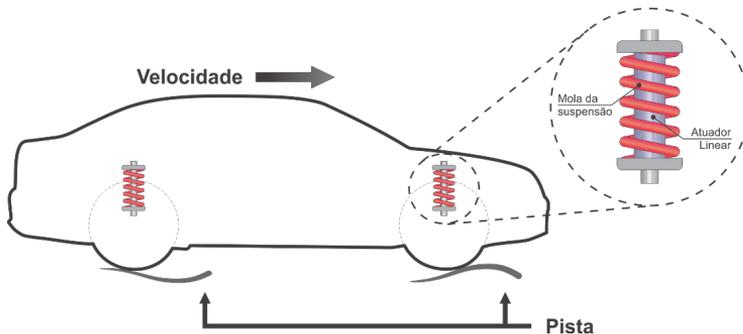
## Diálogo aberto

Agora que você conheceu um pouco da história do controle e aprendeu conceitos básicos como malha fechada (com retroalimentação), malha aberta e identificação das variáveis de entrada e saída, podemos dar continuidade à nossa introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle. Para reforçar o seu aprendizado, vamos pensar em uma situação prática comum no dia a dia do profissional de controle de processos.

Ao projetar um sistema de controle, uma etapa importante do projeto é a simulação do sistema real para reconhecer seu comportamento quando excitado por entradas variadas. Como exemplo, vamos pensar no projeto de um sistema de suspensão automatizada para aumentar o conforto dos passageiros e do motorista do carro.

Um automóvel é composto de inúmeros sistemas dinâmicos e você é responsável pelo desenvolvimento e análise de sistemas de suspensão, conforme mostra a Figura 1.8. Sendo a suspensão um elemento fundamental na dirigibilidade do automóvel e também na de segurança, quanto melhor este for desenvolvido, mais conforto teremos e mais segurança geraremos para os passageiros.

Figura 1.8 | Ilustração de um carro, com detalhe na suspensão da roda



Fonte: elaborada pelo autor.

A suspensão tem papel de mitigar essas vibrações para garantir maior conforto aos ocupantes do veículo. Então podemos dizer que a entrada do sistema é o perfil da pista que passa sob a roda do carro.

O sistema de suspensão ativa conta com um atuador, que exercerá esforço no chassi do carro e no pneu para mitigar a vibração que a pista causa. Portanto, a saída do sistema de controle será a força do atuador.

Devemos realizar a etapa de simulação do sistema real para conhecer o comportamento do sistema quando excitado por entradas variadas. Essa simulação deve ser feita sem que seja levado em consideração o atuador linear da suspensão, pois seu objetivo é visualizar o comportamento do sistema não atuado. Como seria possível descrever o comportamento do sistema de modo a obter esse tipo de resposta?

Para te auxiliar a responder esse questionamento, nesta seção você será apresentado a uma forma eficiente de obter a resposta de um sistema dinâmico linear invariante no tempo, de acordo com a entrada que ele recebe. Você aprenderá a resolver equações diferenciais ordinárias dos modelos matemáticos utilizando as transformadas inversa e direta de Laplace, a fim de simplificar e agilizar o processo de resolução.

Bons estudos!

## Não pode faltar

O modelo matemático serve para descrever matematicamente o comportamento (aproximado) de um sistema dinâmico, então ele é utilizado na análise e projeto de controles, antecipação de comportamentos, realização de ensaios e diversas outras tarefas.

Esses modelos são classificados matematicamente como equações diferenciais, das quais existem dois tipos:

- As Equações Diferenciais Ordinárias (conhecidas pela sigla EDO), que são equações que envolvem derivadas (1ª derivada, 2ª derivada,...) de uma função desconhecida que, quase sempre, dependerá apenas do tempo. Vamos chamar essa função desconhecida de variável, pois ela vai representar quantidades como corrente elétrica, posição, fluxo de um líquido, temperatura, etc., que são variáveis de um sistema dinâmico. Por exemplo, a Equação 1.1 descreve matematicamente o comportamento um circuito elétrico que tem uma fonte de tensão como entrada ( $v_m(t)$ ), um resistor  $R$  e um indutor  $L$ , todos em série e  $i(t)$  é a corrente elétrica:

$$v_m(t) = R \cdot i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.1)$$

- E as Equações Diferenciais Parciais (EDP), que envolvem derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis. Por exemplo,

o problema de condução de calor em um sólido tridimensional, homogêneo e isotrópico (coeficiente de difusão térmica constante em todo seu volume), sem fontes de calor, é dada pela EDP da Equação 1.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

Neste caso,  $u >$  é a temperatura do sólido, que é função do espaço e do tempo, ou seja,  $u = u(x, y, z, t)$ . O termo  $\eta >$  é o coeficiente de difusão térmica. O termo à esquerda da igualdade é a derivada parcial da temperatura em relação ao tempo e os termos dentro dos parênteses são as derivadas segundo parciais da temperatura em relação aos eixos coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

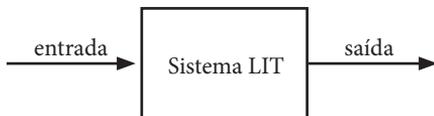
Nós aqui em controle de processos vamos utilizar as EDOs, que são mais simples. Você vai perceber, ao longo deste material, que este tipo de equação é aplicável a inúmeros problemas práticos de controle e modelagem de sistemas dinâmicos.

Uma EDO pode ser classificada em linear ou não-linear. Para uma EDO ser linear, ela deve poder ser escrita da forma apresentada na Equação 1.3, em que os termos  $a_i(t)$  e  $b(t)$  são funções dependentes da mesma variável que  $f(t)$  depende. Os sobrescritos de  $f(t)$  denotam a ordem de sua derivada e a EDO é dita linear de ordem  $n$ . Uma EDO é dita não-linear quando ela não puder ser escrita como na Equação 1.3.

$$a_0(t) \cdot f(t) + a_1(t) \cdot f^{(0)}(t) + a_2(t) \cdot f^{(1)}(t) + \dots + a_n(t) \cdot f^{(n)}(t) = b(t) \quad (1.3)$$

Uma última classificação é necessária para caracterizar os tipos de sistemas dinâmicos com os quais vamos trabalhar, que são de sistemas invariantes no tempo. O termo  $a_i(t)$  geralmente descreve alguma propriedade do sistema real. No nosso caso, estas propriedades serão dadas por valores constantes, ou seja, não dependentes de  $t$ , como a massa de um corpo, a resistência elétrica, capacitância térmica, etc. Tais sistemas são denominados Sistemas Lineares Invariantes no tempo (sistemas LTI ou simplesmente SLIT). Nesses sistemas, a saída depende apenas da variável de entrada, como mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Bloco de um sistema LITa



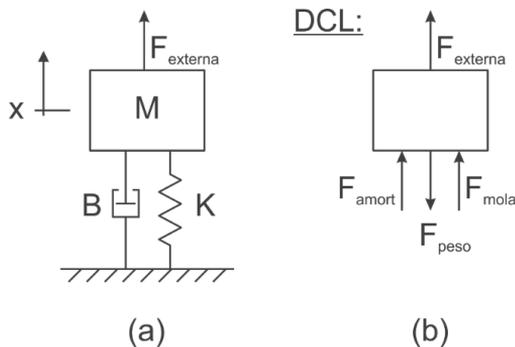
Fonte: elaborada pelo autor.

Embora alguns elementos, na realidade, não tenham suas propriedades completamente lineares, aplicamos a hipótese de que os elementos serão utilizados de forma que seus comportamentos sejam muito próximos do

comportamento linear. Por exemplo: se uma mola for deformada acima de um certo limite de comprimento, a Lei de Hooke ( $f(t) = k \cdot x(t)$ ) não é mais aplicável, pois a mola deixa de se comportar de maneira elástica. Entretanto, se o alongamento da mola não for grande o bastante, a hipótese de comportamento linear é adequada. Durante nossos estudos, todos os elementos terão características constantes.

Agora modelemos um sistema simples como o massa-mola-amortecedor (Figura 1.10) com força externa para aplicar esse conceito.

Figura 1.10 | Ilustração de um sistema massa-mola-amortecedor com Diagrama de Corpo Livre (a) ilustração do sistema (b) Diagrama de corpo livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Façamos com que a posição  $x = 0$  seja definida exatamente na posição em que o sistema se encontra em equilíbrio estático, ou seja, velocidade nula e na posição em que a força da mola é igual à força peso do corpo.

Ao aplicarmos uma força externa, a equação que rege o deslocamento da massa, Equação 1.4, é obtida por meio da 2ª lei de Newton a partir do diagrama de corpo livre da Figura 1.10 (b).

$$\begin{cases} \sum f = -f_{\text{mola}} - f_{\text{amort}} + f_{\text{ext}} \Rightarrow -Kx - B\dot{x} + f_{\text{ext}} = M\ddot{x} \Rightarrow M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f_{\text{ext}} \\ \sum f = M\ddot{x} \end{cases} \quad (1.4)$$

A Equação 1.4 é a dita equação diferencial ordinária (EDO) linear a parâmetros constantes cuja solução é uma função no tempo. Neste caso, a solução será a posição do corpo ao longo do tempo.

Existem vários métodos matemáticos para obter essa solução. Aqui estudaremos o método que envolve a transformada de Laplace pois uma das vantagens deste método é que ele transforma a EDO em uma equação algébrica, tornando mais simples a resolução do problema.



## Pesquise mais

A utilização da transformada de Laplace traz outras vantagens importantes que são atrativas para que o profissional use-a como ferramenta. Confira no livro *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta*, no capítulo 4, mais vantagens da transformada de Laplace na resolução de EDO's.

Felício, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: Rima, 2010.

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é dada conceitualmente pela Equação (1.5).

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (1.5)$$

Esta transformação leva uma função do domínio do tempo ( $t$ ) para o domínio da frequência ( $s$ ).



## Assimile

A transformada de Laplace transforma uma função de uma variável real  $t$  (domínio do tempo) em uma função de uma variável complexa  $s$  (domínio da frequência).

Como pode ser visto na Equação 1.5, a definição da transformada de Laplace se trata de uma integral imprópria. Na prática, para aplicar a transformada, fazemos uso das propriedades da transformada de Laplace juntamente com resultados já conhecido por serem bastante recorrentes.



## Exemplificando

Mais à frente vamos conhecer a maneira mais prática de aplicar a transformada de Laplace. Mas, antes disso, vamos ver um exemplo de como fazer um cálculo de transformada de Laplace utilizando a definição para entendermos melhor como surge um resultado. Utilizemos a equação da pressão hidrostática  $p(t) = \rho \cdot g \cdot h(t)$  no fundo de um tanque com fluido de densidade  $\rho = 500 \frac{kg}{m^3}$ , cujo nível segue a função  $h(t) = 5t$  e a gravidade é  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

$$\mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[500 \cdot 9,81 \cdot 5t] = \int_{0^+}^{\infty} 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

Fazendo substituição por partes  $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$  onde

$u = t \Rightarrow du = dt$  e  $dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p(t)] &= 24.545 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A t \cdot e^{-st} dt \\ &= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{t \cdot e^{-st}}{-s} \right]_{0^+}^A - \int_{0^+}^A \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \left[ \frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_{0^+}^A \right] \\ \mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \left( \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-sA}}{-s^2} \right] + \frac{1}{s^2} \right) \quad (1.6) \end{aligned}$$

O primeiro termo dentro do limite da Equação 1.6 é uma indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , então podemos aplicar a regra de L'Hôpital, que assegura que, no caso de indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  ou  $\frac{0}{0}$ , podemos obter o resultado do limite por meio da divisão da derivada do numerador pela derivada do denominador. O segundo termo podemos resolver por aplicação direta do limite. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \left( \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{-s \cdot e^{sA}} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-sA}}{-s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= 24.525 \cdot \left( \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{-sAe^{sA}} + \frac{1}{s^2} \right) \\ \mathcal{L}[p(t)] &= P(s) = \frac{24.525}{s^2} \end{aligned}$$

Avançando, você verá que poderemos resolver esta transformada em apenas um passo, pois funções afim (conhecidas como rampa) têm transformada conhecida.

Vamos aplicar a transformada de Laplace na Equação 1.4 do sistema da Figura 1.10 para entendermos, na prática, como se realiza o processo. Iniciamos aplicando a transformada, como mostra a Equação 1.7.

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = \mathcal{L}[f_{ext}] \quad (1.7)$$

O lado esquerdo da equação é uma soma de parcelas, cada uma multiplicada por um valor constante. Em um caso como esse, podemos aplicar a **propriedade da linearidade** da transformada de Laplace:

- A transformada da soma das parcelas é igual à soma das transformadas das parcelas ( $\mathcal{L}[\ddot{x} + \dot{x} + x] = \mathcal{L}[\ddot{x}] + \mathcal{L}[\dot{x}] + \mathcal{L}[x]$ ).
- A transformada de uma função multiplicada por uma constante é igual à multiplicação da constante pela transformada da função ( $\mathcal{L}[Kx] = K \cdot \mathcal{L}[x]$ ).

Então, com estas propriedades, podemos reescrever o lado esquerdo da Equação 1.7

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = M \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}] + B \cdot \mathcal{L}[\dot{x}] + K \cdot \mathcal{L}[x] \quad (1.8)$$

Agora temos as transformadas da derivada primeira e da derivada segunda. Estas também são conhecidas (Equações 1.9 e 1.10)

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s - x(0) \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) \quad (1.10)$$

Como temos condições iniciais nulas, tanto a velocidade ( $\dot{x}(0)$ ) quanto a posição ( $x(0)$ ) iniciais são zero.

Então, substituindo as Equações 1.8, 1.9 e 1.10 em 1.7, temos a Equação 1.11.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ M \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot \cancel{x(0)} - \cancel{\dot{x}(0)}) + B \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s - \cancel{x(0)}) + K \cdot \mathcal{L}[x] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[x] \cdot (Ms^2 + Bs + K) &= \mathcal{L}[f_{ext}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para escrever a transformada de Laplace de uma função, é comum usar a função em letra maiúscula, por exemplo: a transformada de uma função  $f(t)$  (ou simplesmente  $f$ ) é denotada pela função  $F(s)$  (ou apenas  $F$ ). Então a Equação 1.12 torna-se:

$$X \cdot (Ms^2 + Bs + K) = F_{ext} \Rightarrow \frac{X}{F_{ext}} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1.12)$$

A forma como se encontra a Equação 1.12 é chamada de função transferência. Este formato é de extrema importância no estudo de modelos dinâmicos e sistemas de controle.

A partir da função transferência e de uma entrada definida, ou seja, uma função temporal para a força externa, podemos obter a resposta do sistema por meio da transformada inversa de Laplace. Algumas entradas amplamente utilizadas têm suas transformadas já conhecidas, como pode ser visto na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Principais transformadas

Função	Transformada de Laplace
$\mu(t - t_0)$ (função degrau ou Heaviside)	$\mathcal{L}[\mu(t - t_0)] = \frac{1}{s} e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$ , então $\mathcal{L}[\mu(t)] = \frac{1}{s}$
$t \cdot \mu(t)$ (função rampa)	$\mathcal{L}[t \cdot \mu(t)] = \frac{1}{s^2}$
$\delta(t - t_0)$ (função impulso ou delta de Dirac)	$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$ , então $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
$\text{sen}(\omega t)$	$\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t)$	$\mathcal{L}[\text{cos}(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Fonte: elaborada pelo autor.



### Pesquise mais

Existem vários outros resultados já conhecidos que você pode utilizar para aplicar tanto a transformada de Laplace direta quanto a inversa.

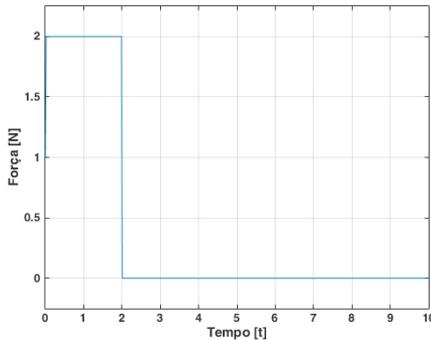
Veja, por exemplo, a tabela presente no apêndice D do livro *Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta*, do Prof. Dr. Luiz Carlos Felício.

Felicio, L. C. Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta, 2 ed. São Carlos – SP, Rima, 2010.

Vamos submeter o sistema massa-mola-amortecedor a uma entrada da forma de um pulso quadrado (Equação 1.13, Figura 1.11) de força de 2 segundos de duração com amplitude de  $2N$ , equivalente a puxar para cima a massa do sistema com uma força de  $2N$  durante 2 segundos, começando em  $t = 0$ .

$$f(t) = 2 \cdot (\mu(t) - \mu(t - 2)) \quad (1.13)$$

Figura 1.11 | Gráfico da entrada de força do sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para aplicar a entrada na função transferência do sistema precisamos primeiro obter sua transformada de Laplace. Observando a propriedade de linearidade e a tabela acima, obtemos a transformada, como pode ser visto na Equação 1.14.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[2 \cdot (\mu(t) - \mu(t-2))] = 2 \cdot (\mathcal{L}[\mu(t)] - \mathcal{L}[\mu(t-2)]) \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s}(1 - e^{-2s}) \quad (1.14)$$

Substituindo a Equação 1.14 na função transferência do sistema (Equação 1.12) obtemos a Equação 1.15.

$$\text{Entrada 1: } \frac{X}{s} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad X = \frac{2 - 2e^{-2s}}{Ms^3 + Bs^2 + Ks} \quad (1.15)$$

A Equação 1.15 descreve a resposta do sistema no domínio da frequência devido à entrada imposta. Para podermos analisar o comportamento do sistema no tempo, precisamos transformar essas equações do domínio da frequência para o domínio do tempo e isso é feito aplicando-se a transformada inversa de Laplace.

Na prática, isto é realizado rescrevendo-se a equação que está no domínio da frequência com o objetivo de se fazer surgir os resultados da tabela de transformadas de Laplace.

Então apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.15 para entender na prática como se deve proceder.

É comum obtermos funções transferência que são divisões de polinômios e, para fazermos surgir resultados conhecidos, usamos o procedimento de expansão em frações parciais, também utilizado no cálculo de integração de divisão de polinômios.

Para aplicarmos a transformada inversa de Laplace no sistema massa-mola-amortecedor em questão, vamos supor as seguintes propriedades para o sistema:  $M = 2\text{kg}$ ,  $K = 20\frac{N}{m}$  e  $B = 14\frac{N \cdot s}{m}$ .

Juntamente com a substituição das propriedades, apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.15.

$$X = \frac{2 - 2e^{-2s}}{2s^3 + 14s^2 + 20s} \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow X = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5} \quad (1.17)$$

Da Equação 1.17, usando a identidade de polinômios, montamos os sistemas de Equações 1.18

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 7A + 5B + 2C = 0 \\ 10A = 1 - e^{-2s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1 - e^{-2s}}{10} \\ B = \frac{e^{-2s} - 1}{6} \\ C = \frac{1 - e^{-2s}}{15} \end{cases} \quad (1.18)$$

Substituindo  $A$ ,  $B$  e  $C$  na Equação 1.17, temos a Equação 1.19

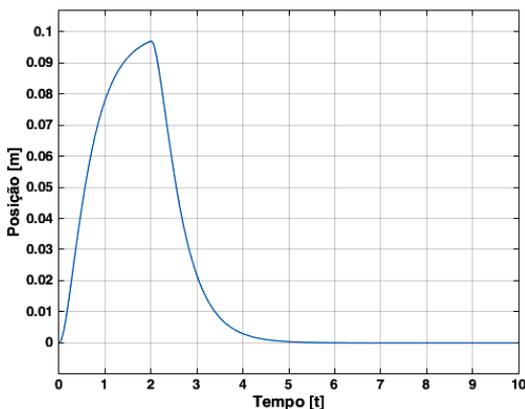
$$\begin{aligned} X &= \frac{1 - e^{-2s}}{10s} + \frac{e^{-2s} - 1}{6(s+2)} + \frac{1 - e^{-2s}}{15(s+5)} \Rightarrow \\ X &= \frac{1}{10} \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right) + \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{e^{-2s}}{s+2} - \frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{15} \cdot \left( \frac{1}{s+5} - \frac{e^{-2s}}{s+5} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Agora, utilizando a tabela de resultados conhecidos das transformadas de Laplace juntamente com a propriedade da linearidade, temos a Equação 1.20.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X] &= \frac{1}{10} \cdot \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-2s}}{s} \right] \right) + \frac{1}{6} \cdot \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-2s}}{s+2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] \right) + \frac{1}{15} \cdot \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+5} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-2s}}{s+5} \right] \right) \\ x(t) &= \frac{1}{10} \cdot (\mu(t) - \mu(t-2)) + \frac{1}{6} \cdot (\mu(t-2) \cdot e^{4-2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{15} \cdot (e^{-2t} - \mu(t-2) \cdot e^{10-5t}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Finalmente, temos a equação que descreve a saída do sistema massa-mola-amortecedor, de acordo com uma entrada pulso quadrado de força. A Figura 1.12 mostra a posição da massa ao longo do tempo. Podemos observar que, para os parâmetros escolhidos, o sistema dinâmico apresenta resposta sobreamortecida.

Figura 1.12 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à entrada pulso quadrado



Fonte: elaborada pelo autor.



### Refleta

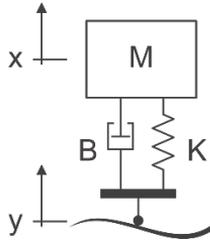
A resposta, no tempo, encontrada para um sistema massa-mola-amortecedor sobreamortecido, com um pulso quadrado como entrada, faz sentido?

### Sem medo de errar

Com a finalidade de projetar o sistema de controle para um sistema dinâmico, é importante conhecer o comportamento deste quando em funcionamento passivo, ou seja, sem atuação. Por isso é importante que você obtenha a resposta no tempo da suspensão veicular passiva a fim de entender seu comportamento “natural”.

A Figura 1.13 representa o modelo de uma suspensão veicular passiva, que é matematicamente descrito pela Equação 1.20, sendo que a posição vertical,  $x$ , da carroceria e a posição vertical da roda (a roda é tratada como uma massa pontual, ou seja, sua massa é desprezível),  $y$ , são definidas nulas de maneira que a somatória de forças no corpo é nula.

Figura 1.13 | Ilustração do modelo da suspensão passiva veicular



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum F = M\ddot{x} - B(\dot{x} - \dot{y}) - K(x - y) = M\ddot{x} \quad (1.20)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 1.20:

$$-BXs + BYs - KX + KY = MXs^2$$

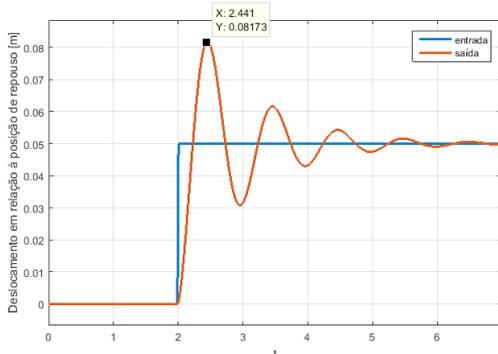
$$\frac{X}{Y} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$$

É sabido que o automóvel tem massa  $10^3 \text{ kg}$  e a suspensão tem rigidez  $4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  e amortecimento  $2 \cdot 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$ . Temos a função transferência e os parâmetros do sistema, mas falta a entrada. Suponha, então, que a entrada seja o automóvel passando por um degrau de  $5 \text{ cm}$  de altura no asfalto aos 2 segundos de simulação (descrita pela Equação 1.21).

$$y(t) = 0,05 \cdot \mu(t - 2) \quad (1.21)$$

Com todos os dados em mãos, é possível obter o comportamento da posição vertical da carroceria, ou seja, a resposta do sistema à entrada da Equação 1.21. A Figura 1.14 mostra o gráfico da resposta no tempo.

Figura 1.14 | Resposta da suspensão passiva à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a oscilação da carroceria é muito grande: um degrau de 5 cm causa uma vibração de amplitude inicial aproximadamente igual a 8 cm. Em termos de um automóvel, tal vibração causa desconforto aos passageiros e pode, inclusive, depreciar a dirigibilidade do automóvel, ou seja, o veículo se torna perigoso tanto para o condutor quanto para os transeuntes e para os outros carros.

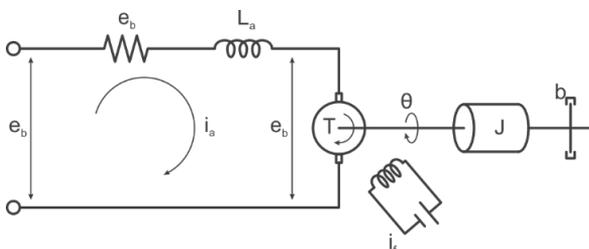
## Avançando na prática

# Resposta de um motor CC

## Descrição da situação-problema

Em um sistema embarcado é comum utilizar um motor CC como atuador. Imagine que você é responsável pela área de testes de uma empresa que fabrica motores de corrente contínua (motor CC). As equações do modelo (Equações de 1.22 a 1.24), baseadas na Figura 1.15, já são conhecidas.

Figura 1.15 | Motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (2003, p. 114).

$$e_b = K_b \dot{\theta}(t) \quad (1.22)$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t) = e_a(t) \quad (1.23)$$

$$J \ddot{\theta}(t) + b \dot{\theta}(t) = K i_a(t) \quad (1.24)$$

em que,  $e_b(t)$  é a força contraeletromotriz [V],  $K_b$  é a constante de força contraeletromotriz  $\left[ \frac{V \cdot s}{rad} \right]$ , e  $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$  são o ângulo (a saída do sistema), a velocidade angular e a aceleração angular do eixo do motor, respectivamente.  $L_a$  é a indutância da armadura [H],  $i_a(t)$  é a corrente de armadura [A],  $R_a$  é a resistência elétrica da armadura [ $\Omega$ ],  $J$  é o momento de inércia equivalente do motor e do carregamento no eixo [ $kg \cdot m^2$ ],  $b$  é coeficiente de atrito

equivalente do motor e carregamento no eixo  $\left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$  e  $K$  é a constante do motor  $\left[ \frac{N \cdot m}{A} \right]$ .

Imagine um novo motor CC, recém-desenvolvido, chega da produção para que alguns testes sejam realizados. Ele foi projetado com o propósito de mover um redutor que é muito sensível a vibrações.

No novo equipamento constam as seguintes características (a resistência de armadura e a inércia do eixo são desprezíveis):

$$\begin{aligned} L_a &= 2,38mH & b &= 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \\ R_a &= 0\Omega & J &= 0kg \cdot m^2 \\ K_b &= 0,81 \frac{V \cdot s}{m} & K &= 1,2 \frac{N \cdot m}{A} \end{aligned}$$

Antes de partir para o experimento real, é necessário rever o equacionamento do modelo com a entrada igual à que foi considerada em seu desenvolvimento: ligá-lo em tensão de alimentação de 10V.

Para que o projeto seja dado como bem-sucedido, é necessário que a posição angular do eixo seja incrementada linearmente com o tempo, para que o redutor não sofra com as vibrações.

Afinal, o projeto foi bem-sucedido?

### Resolução da situação-problema

Aplicando a transformada de Laplace nas Equações 1.22, 1.23 e 1.24 do modelo, com condições iniciais nulas (lembrando que  $R_a = 0$  e  $J = 0$ ), temos:

$$E_b = K_b \Theta s \quad (1.25)$$

$$L_a I_a s + E_b = E_a \quad (1.26)$$

$$b \Theta s = K I_a \quad (1.27)$$

Substituindo a Equação 1.25 na Equação 1.26, obtemos  $I_a$ :

$$I_a = \frac{E_a - K_b \Theta s}{L_a s}$$

Substituindo  $I_a$  na Equação 1.27, obtemos a função transferência para o sistema (Equação 1.28)

$$\frac{\Theta}{E_b} = \frac{K}{L_a b s^2 + K K_b s} \quad (1.28)$$

Substituindo  $E_b$  pela transformada de Laplace da função degrau de entrada (Equação 1.29) juntamente com os valores numéricos para o sistema, temos a Equação 1.30

$$E_b = \mathcal{L}[10\mu(t)] = \frac{10}{s} \quad (1.29)$$

$$\Theta = \frac{12}{1.3328 \cdot 10^{-4} s^3 + 0,972s^2} \quad (1.30)$$

Aplicando frações parciais e, finalmente, a transformada inversa de Laplace, obtemos a Equação 1.31:

$$\theta(t) = 12,3457t + 1,692 \cdot 10^{-4} e^{-7292,92t} - 1,692 \cdot 10^{-4} \quad (1.31)$$

O termo exponencial da Equação 1.31 é desprezível para tempos maiores que poucos microssegundos, ou seja, o regime transitório tem curta duração e, em regime permanente, o ângulo do eixo é linear com o tempo, portanto o projeto foi um sucesso.

## Faça valer a pena

**1.** Na modelagem de sistemas dinâmicos é muito comum a utilização da transformada de Laplace, a qual é de grande utilidade para a resolução de equações diferenciais ordinárias, que são obtidas a partir da modelagem de sistemas dinâmicos.

Sobre a transformada de Laplace, podemos afirmar que:

- Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência.
- Associa a saída à entrada do sistema.
- Facilita a obtenção da entrada de um sistema dinâmico de parâmetros constantes.
- É uma transformação linear pois  $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$ .
- Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio do período da função.

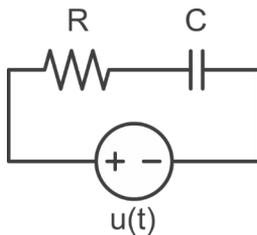
**2.** Ao expressar a entrada de um sistema no domínio da frequência não é muito intuitivo saber como a função de entrada se comporta no domínio do tempo. Para fazer a conversão, é necessário que se obtenha a transformada de Laplace inversa. Considere

a entrada de um sistema de controle como sendo  $F(s) = \frac{s + \omega}{s^2 + \omega^2}$ .

Assinale a alternativa que indica qual é a função de entrada no domínio do tempo.

- $\text{sen}^2(\omega t)$
- $\text{cos}^2(\omega t)$
- $\text{sen}(\omega t) + \text{cos}(\omega t)$
- $t \text{cos}^2(\omega t)$
- $\text{cosh}^2(\omega t)$

3. O sistema elétrico da figura a seguir tem a tensão  $u(t)$  como entrada e a corrente  $i(t)$  como saída, de acordo com a equação abaixo.



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{I}{U} = \frac{s}{Rs + \frac{1}{C}}$$

O sistema possui capacitância  $3,4\mu\text{C}$  e resistência  $220\Omega$  para uma entrada senoidal de frequência  $60\text{Hz}$  e amplitude unitária ( $u(t) = \text{sen}(120\pi t)$ ), supondo condições iniciais nulas.

Qual a resposta do sistema nestas condições?

- a) Não existe, pois transformada de Laplace não é aplicável a sistemas elétricos.
- b) O sistema elétrico é descrito por fasores, que são grandezas complexas, logo não é necessário obter função transferência.
- c)  $i(t) = \text{sen}(120\pi t) + 3,4\mu \cos(120\pi t)$
- d)  $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \text{sen}(120\pi t) + 1,187 \cdot 10^{-3} e^{-1,337 \cdot 10^3 t}$
- e)  $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \text{sen}(120\pi t)$

## Representação dos modelos matemáticos de sistemas

### Diálogo aberto

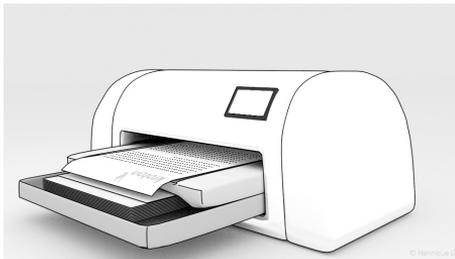
Tudo o que vemos na ciência pode ser, de maneira simplista, resumido em uma tarefa: entender, interpretar e prever o funcionamento da natureza. Cada ramo da ciência especializa-se em estudar uma parte da natureza. Antigamente era mais comum vermos cientistas que contribuíam para várias áreas da ciência. Hoje em dia vemos uma maior especialização de cada um em uma certa área.

Estamos estudando sistemas de controle. Nosso objetivo é fazer com que algum sistema dinâmico real se comporte da maneira que precisamos. Para projetarmos o controle de algo, precisamos saber sobre o seu funcionamento para que alcancemos nosso objetivo dentro da performance necessária.

Esse “saber sobre o seu comportamento” passa por conceito e técnicas de modelagem de sistemas dinâmicos que se baseiam na aplicação de leis físicas que a ciência gerou. Essas leis são amplamente aceitas e profundamente conhecidas, ou seja, sua exatidão e limitações já foram exaustivamente estudadas. Para fazermos uso dessas leis precisamos conhecer bem como aplicá-las e quais são as hipóteses sobre o comportamento do sistema dinâmico que precisamos impor para que não criemos um modelo físico irrealista e, com isso, inutilizável.

Imagine que você é o responsável pelo departamento de engenharia de uma empresa de acessórios de computador. Para o desenvolvimento do novo produto – uma impressora (Figura 1.16), sua tarefa é projetar o controle do cabeçote de impressão.

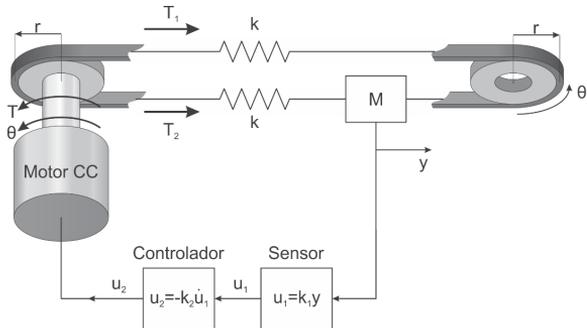
Figura 1.16 | Ilustração da impressora a ser desenvolvida



Fonte: elaborada pelo autor.

Claramente, antes de partir para o projeto do controle em si, é necessário modelar o sistema eletromecânico em questão. A Figura 1.17 mostra como esse sistema pode ser modelado.

Figura 1.17 | Ilustração do modelo de controle de posição do cabeçote da impressora



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011, p. 132).

Dessa forma, como você deve proceder? Quais são as maneiras de compartilhar o modelo que você desenvolveu com o restante da equipe? Para ajudá-lo nessa tarefa, nesta seção faremos uma breve revisão dos conceitos de modelagem, e em seguida você conhecerá novas formas de representar os modelos dinâmicos: variáveis de estados, equações diferenciais de estado e diagrama de blocos. As duas primeiras são abordagens matemáticas complementares, e a última é uma forma gráfica, mas todas têm propriedades valiosas e de grande importância para o desenvolvimento de sistemas de controle.

Bons estudos!

## Não pode faltar

Como você já sabe, ao falarmos em modelo de um sistema, estamos falando em uma ou mais equações que descrevem seu comportamento, seja no domínio do tempo ou no domínio da frequência (após a aplicação da transformada de Laplace). Para equacionarmos um modelo, precisamos ter conhecimento dessas equações, e é neste ponto que lançamos mão da aplicação das leis físicas. É importante também sabermos as equações constitutivas de elementos que surgem com frequência nos sistemas dinâmicos de cada área.

A Tabela 1.2 traz uma comparação entre as variáveis e os elementos de modelos mecânicos e elétricos. Tenha em mente que, na realidade, não existe um componente que funciona puramente como uma mola, ou amortecedor, ou uma resistência ou indutância elétrica. Quando modelamos um sistema, concentramos, na medida do possível, as propriedades dinâmicas

em componentes ideais, ou seja, não levamos em conta as incertezas em seus parâmetros ou não linearidades ou mistura de propriedades.

Tabela 1.2 | Comparação entre os elementos e variáveis mecânicos e elétricos

Mecânica	Elétrica
Variáveis de deslocamento	
Posição $[m]$ $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$	Carga elétrica $[C]$ $q(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(s)$
Variáveis de fluxo	
Velocidade linear $[m/s]$ $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ $v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s)$	Corrente $[A]$ $i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$ $i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s)$
Variáveis de esforço	
Força $[N]$ $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$	Tensão $[V]$ $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$
Elementos inerciais	
Massa $\sum f(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum F(s) = M \cdot sV(s)$ (2ª lei de Newton) Sendo $M$ a massa em $[kg]$	Indutor $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = L \cdot sI(s)$ Sendo $L$ a indutância elétrica $[H]$
Elementos dissipadores de energia	
Amortecedor $f_{amort} = -B \cdot v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{amort} = -B \cdot V(s)$ Sendo $B$ a constante de amortecimento $[N \cdot s/m]$	Resistência $u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = R \cdot I(s)$ Sendo $R$ a resistência elétrica $[\Omega]$
Elementos armazenadores de energia	
Mola $f_{mola} = -K \int v(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{mola} = -\frac{K}{s} V(s)$ (Lei de Hooke) Sendo $K$ a constante de amortecimento $[N/m]$	Capacitor $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$ Sendo $C$ a capacitância elétrica $[F]$

Fonte: elaborada pelo autor.

Observando a Tabela 1.2, podemos ver que é possível obter os modelos mecânicos e elétricos que têm o comportamento semelhante.



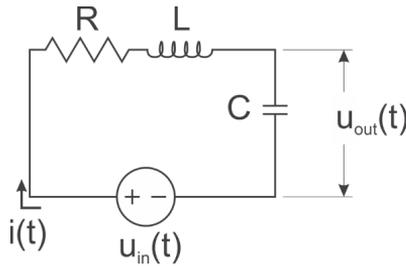
### Pesquise mais

As comparações feitas entre elementos ideais de sistemas mecânicos e elétricos também podem ser feitas com outras áreas, como hidráulica, térmica e pneumática. Para saber um pouco mais, veja a página 51 do seguinte livro:

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos, SP: Rima, 2010.

Por exemplo, um circuito RLC (Figura 1.18) e um sistema massa-mola-amortecedor (Figura 1.19), ambos com condições iniciais nulas, geram os equacionamentos (1.32) e (1.33) análogos.

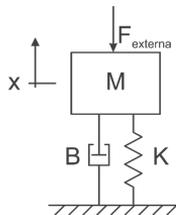
Figura 1.18 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

$$u(t) = LC \cdot \ddot{u}_{out}(t) + RC \cdot \dot{u}(t) + u_{out}(t) \quad (1.32)$$

Figura 1.19 | Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: elaborada pelo autor.

$$F_{externa}(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \quad (1.33)$$

Das Equações 1.32 e 1.33, você já aprendeu a extrair suas funções transferência, resultando nas Equações 1.34 e 1.35, respectivamente, aplicando a transformada de Laplace, que é uma maneira de representar um sistema dinâmico por meio da razão entre saída e entrada no domínio da frequência.

$$\frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (1.34)$$

$$\frac{X}{F_{ext}}(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1.35)$$

Além da função transferência, há outras maneiras de representar um sistema dinâmico, por exemplo o espaço de estados e o diagrama de blocos, os quais veremos a seguir.

A representação por meio de equação diferencial de estado se baseia nas variáveis de estado de um sistema. Segundo Dorf e Bishop (2011), “As variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e podem ser usadas para determinar a resposta futura, dadas as excitações de entrada e as equações descrevendo a dinâmica.” A representação em variáveis de estado, ou representação em espaço de estados, é um par de equações matriciais que tem forma geral mostrada pela Equação 1.36 de estado e pela Equação 1.37 de saída.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \text{ em que } \mathbf{x} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T \quad (1.36)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (1.37)$$

A Equação 1.36 representa as relações dinâmicas do sistema. A variável  $\mathbf{x}$  é um vetor coluna de tamanho  $n \times 1$  em que cada elemento é um estado do sistema. O vetor coluna  $\mathbf{u}$  representa as entradas do sistema e tem tamanho  $m \times 1$ . A matriz  $\mathbf{A}$ , matriz de estados, é quadrada  $n \times n$  e pode ser interpretada como o próprio sistema dinâmico, pois ela depende apenas deste. A matriz  $\mathbf{B}$ , matriz de entrada, tem tamanho  $n \times m$ .

Já a Equação 1.37 representa as saídas do sistema, e, usando este método de representação, um sistema pode ter de uma a quantas saídas forem necessárias: basta definir a matriz  $\mathbf{C}$ , matriz de saída, da seguinte maneira: se o vetor coluna de saídas  $\mathbf{y}$  tem tamanho  $p \times 1$ , a matriz  $\mathbf{C}$  vai ser  $p \times n$ , em que  $p$  é a quantidade de saídas. A matriz  $\mathbf{D}$ , matriz de transmissão direta, será  $p \times m$  e estabelece qual entrada influencia diretamente uma saída, porém essa matriz geralmente é nula.

A representação em espaço de estados sempre consiste em uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, então, para o caso de ambos

os sistemas em questão, por serem de ordem superior, precisamos utilizar mais de uma variável de estado.



### Assimile

A equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem.

No caso do sistema mecânico da Figura 1.19, os estados serão a posição e a velocidade, a saída será apenas a posição e a entrada será a força externa, como podemos ver a seguir:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{dx_1}{dt} \quad (1.38)$$

$$u(t) = F_{ext}(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Substituindo a Equação 1.38 pela 1.33, teremos o seguinte sistema de EDOs de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{F_{externa}(t)}{M} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Reescrevendo matricialmente e simplificando a notação, chegamos à representação do sistema no espaço de estados.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \text{ e } u = F_{ext} \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 0] \mathbf{x} + [0] u \end{aligned} \quad (1.40)$$

Sendo o circuito RLC um sistema análogo ao massa-mola-amortecedor, a representação em espaço de estados é análoga.



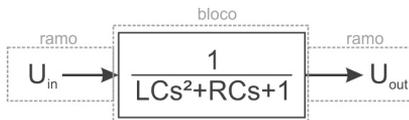
### Refleta

Sabendo que a equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem, quais seriam as variáveis de estados para o circuito RLC e como ficaria a equação diferencial?

Outra maneira de representar um sistema dinâmico é utilizar o diagrama de blocos. Este método é utilizado após aplicar a transformada de Laplace, ou seja, no domínio da frequência. Com o diagrama de blocos, podemos acoplar vários subsistemas independentes e então obter uma função transferência única para o sistema resultante como um todo.

No diagrama de blocos, cada bloco representa uma função de transferência, e o ramo que entra nele é a sua entrada e o ramo que sai, sua saída. Ou seja, a partir de um diagrama de blocos, podemos extrair a equação da saída multiplicando o bloco pela sua entrada, seguindo a mesma lógica que aprendemos com função de transferência. Vamos aplicar este conceito para a função de transferência do circuito RLC da Figura 1.18, resultando na representação em um bloco único, como mostra a Figura 1.20, em que a saída  $U_{out}$  é igual à entrada  $U_{in}$  multiplicada pelo conteúdo do bloco.

Figura 1.20 | Circuito RLC bloco único

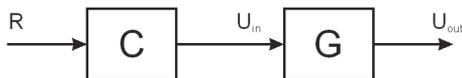


Fonte: elaborada pelo autor.

Como dito, no diagrama de blocos temos relações multiplicativas. Para cada bloco presente no diagrama, a sua saída é igual à sua entrada multiplicada pelo conteúdo do bloco. Vamos supor que temos um controlador  $C(s)$  que tem tensão como saída e um valor numérico adimensional como entrada.

Fazendo  $G(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}}(s)$ , podemos esboçar um sistema em malha aberta (Figura 1.21).

Figura 1.21 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha aberta



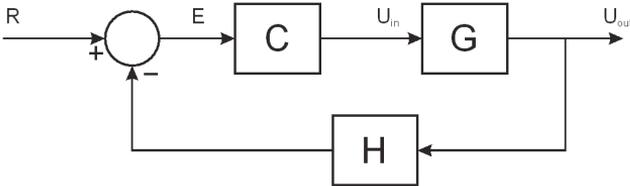
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir do sistema em malha aberta, podemos observar que  $U_{out}$  é o resultado da multiplicação de  $U_{in}$  por  $G$  (função transferência do sistema/planta), e, da mesma maneira,  $U_{in}$  é a multiplicação de  $R$  (referência) por  $C$  (função transferência do controlador). Em uma única equação, temos:

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot R(s) \Rightarrow \frac{U_{out}}{R}(s) = G(s) \cdot C(s) \quad (1.41)$$

Suponhamos que se deseja realizar o controle em malha fechada. Neste caso será necessário um sensor  $H(s)$  na retroalimentação que converte tensão em um número adimensional, conforme Figura 1.22.

Figura 1.22 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Para realizarmos uma soma/subtração, utilizamos um bloco somador, representado por um círculo na Figura 1.22. Podemos ver que o bloco somador tem saída  $E$ , que é igual a  $R$  menos  $H \cdot U_{out}$ , como mostram os sinais que acompanham os ramos que entram no bloco somador.

Em um sistema em malha fechada, precisamos ficar atentos ao extrair a função transferência para não cairmos em um ciclo sem fim. É sempre interessante começarmos pelo fim e seguirmos o ramo principal, que é onde a planta se encontra. Seguindo de  $U_{out}$  (saída) até  $E$  (erro), temos:

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \quad (1.42)$$

$E$  é o erro, pois é a diferença entre a referência  $R$  e o valor medido da saída  $H(s) \cdot U_{out}(s)$ . Então  $E$ , de acordo com o bloco somador, é dado por:

$$E(s) = R(s) - \overbrace{H(s) \cdot \frac{U_{out}(s)}{1}}^{\text{saída do bloco H}} \quad (1.43)$$

entrada do bloco H

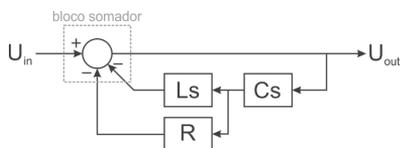
Substituindo a Equação 1.43 pela 1.42 e isolando  $U_{out}$  obtemos a função transferência do sistema em malha fechada:

$$U_{out} = G \cdot C \cdot (R - H \cdot U_{out}) \Rightarrow \frac{U_{out}}{R} = \frac{G(s) \cdot C(s)}{1 + G(s) \cdot C(s) \cdot H(s)} \quad (1.44)$$

Perceba que na Figura 1.22 o ramo da retroalimentação é negativo no ponto de soma. Isso define o sistema como um sistema com retroalimentação negativa (ou feedback negativo). Se fosse positivo, seria retroalimentação positiva (ou feedback positivo).

Com essas informações, podemos representar o circuito RLC da Figura 1.18 em diagrama de blocos. Podemos ainda expandir a representação em mais blocos, como mostra a Figura 1.23.

Figura 1.23 | Circuito RLC diagrama expandido



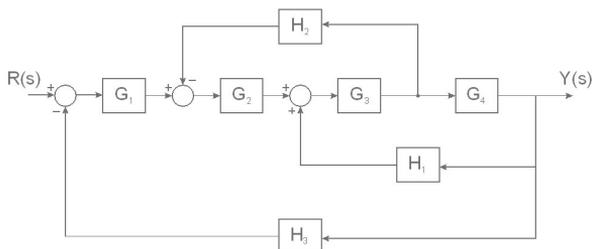
Fonte: elaborada pelo autor.



### Exemplificando

Vamos obter a função transferência  $\frac{Y}{R}(s)$  para o diagrama de blocos da Figura 1.24.

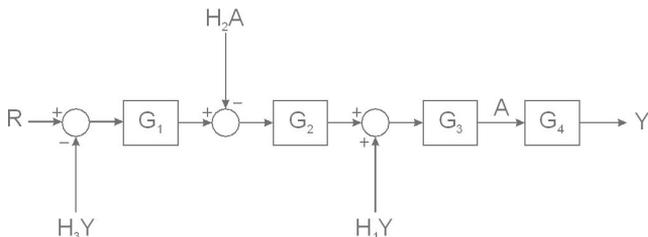
Figura 1.24 | Diagrama de blocos (exemplo)



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011).

Para facilitar a obtenção da função transferência, podemos dar um nome aos ramos que forem necessários. Para o diagrama em questão, vamos denominar  $A$  a saída de  $G_3$ , de forma que podemos redesenhar o diagrama conforme a Figura 1.25.

Figura 1.25 | Redesenho simplificado do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Do diagrama da Figura 1.25, obtemos diretamente as equações que descrevem o sistema:

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 A + G_1 \cdot (R - H_3 Y))) \quad (1.45)$$

$$A = \frac{Y}{G_4} \quad (1.46)$$

Substituindo a Equação 1.46 pela 1.45 e fazendo as manipulações necessárias, obtemos a função transferência  $\frac{Y}{R}(s)$ :

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 \frac{Y}{G_4} + G_1 \cdot (R - H_3 Y)))$$

$$Y = G_4 G_3 H_1 Y - G_4 G_3 G_2 H_2 \frac{Y}{G_4} + G_4 G_3 G_2 G_1 R - G_4 G_3 G_2 G_1 H_3 Y$$

$$Y(1 - G_4 G_3 H_1 + G_3 G_2 H_2 + G_4 G_3 G_2 G_1 H_3) = G_4 G_3 G_2 G_1 R$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_3 G_4 H_3 + G_2 G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 + 1} \quad (1.47)$$

Daí podemos escrever o sistema em apenas um bloco, como mostra a Figura 1.26.

Figura 1.26 | Sistema em bloco único



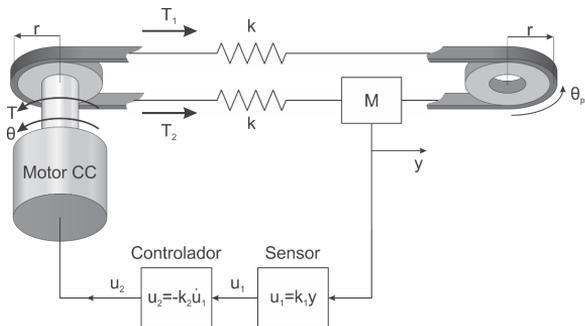
Fonte: elaborada pelo autor.

## Sem medo de errar

Sua tarefa, como membro da equipe de engenharia de uma empresa que fabrica acessórios de computador, é obter o modelo do sistema de controle de posição do cabeçote da impressora. Vamos fazer o modelo aplicando os métodos utilizados nesta seção.

Primeiramente, precisamos equacionar o sistema. A Figura 1.27 mostra como o sistema pode ser modelado, já contando com o modelo de um possível controlador e sensor, e a Tabela 1.3 apresenta os parâmetros do sistema.

Figura 1.27 | Ilustração do modelo de controle de posição do cabeçote da impressora



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011, p.132).

Tabela 1.3 | Parâmetros do sistema de controle de cabeçote de impressão

Massa do cabeçote $m [kg]$	Ganho do controlador $k_2 \left[ \frac{V}{V} \right]$
Ganho do sensor de luz $k_1 \left[ \frac{V}{m} \right]$	Rigidez da correia $K \left[ \frac{N}{m} \right]$
Raio das polias $r [m]$	Tensão superior na correia $T_1 [N]$
Atrito interno à rotação do motor $b \left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$	Tensão inferior na correia $T_2 [N]$
Resistência elétrica do motor $R [\Omega]$	Ângulo do eixo do motor $\theta [rad]$
Constante de torque do motor $K_m \left[ \frac{N \cdot m}{A} \right]$	Ângulo da polia passiva $\theta_p [rad]$
Inércia total à rotação $J [kg \cdot m^2]$	Posição do cabeçote de impressão $y [m]$

Fonte: elaborada pelo autor.

As trações  $T_1$  e  $T_2$  são as forças que as correias do cabeçote de impressão (modeladas como molas e uma massa) fazem no eixo do motor CC. Elas são dadas pelas equações:

$$T_1 = k(r\theta - y) \quad (1.48)$$

$$T_2 = k(y - r\theta) \quad (1.49)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton na massa, temos:

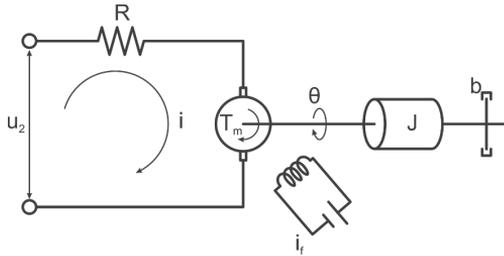
$$T_1 - T_2 = m \cdot \ddot{y} \quad (1.50)$$

Substituindo as Equações 1.48 e 1.49 pela 1.50, chegamos a:

$$2k(r\theta - y) = m \cdot \ddot{y} \quad (1.51)$$

Para o motor CC (Figura 1.28), vamos supor que sua indutância seja desprezível.

Figura 1.28 | Modelo do motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (1990, p.119).

A corrente de campo é  $i = \frac{u_2}{R}$  e o torque do motor é  $T_m = K_m i$ . Esta última equação relaciona a parte elétrica do sistema (por meio da corrente) com a parte mecânica (por meio do torque). A partir dessas duas equações, conseguimos escrever o torque da saída do motor  $T_m$  em função da tensão  $u_2$  que entra no motor.

$$T_m = \frac{K_m}{R} u_2 \quad (1.52)$$

O torque  $T_m$  do motor é igual ao torque que aciona as correias ( $T$ ), somado ao torque de perturbação ou de carga indesejado ( $T_d$ ):

$$T_m = T + T_d \quad (1.53)$$

Usando a 2ª lei de Newton para movimentos angulares, chegamos à equação para o torque  $T$  que aciona o eixo da polia:

$$T = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r(T_1 - T_2) = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r \cdot m\ddot{y} \quad (1.54)$$

Sabendo que, da Figura 1.28,  $u_2 = -k_2 k_1 \dot{y}$ , substituindo pela Equação 1.52 temos que  $T_m = -\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y}$ . Com isso, da Equação 1.53, supondo que não haja distúrbios ( $T_d = 0$ ), temos que  $-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y} = T$ , e, substituindo pela Equação 1.54, teremos:

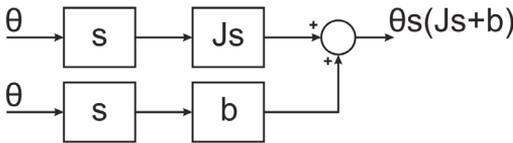
$$-\frac{K_m}{R}k_2k_1\dot{y} = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r \cdot m\dot{y} \quad (1.55)$$

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, temos a função de transferência do sistema:

$$-\frac{K_m}{R}k_2k_1sY = \Theta s(Js + b) + r \cdot mYs^2 \quad (1.56)$$

Com isso, podemos montar o diagrama de blocos do sistema. Vamos fazê-lo passo a passo. Vamos começar pelo termo  $\Theta s(Js + b) = \Theta s \cdot Js + \Theta s \cdot b$ . Trata-se de uma soma, logo usamos um bloco de soma, como mostra a Figura 1.29.

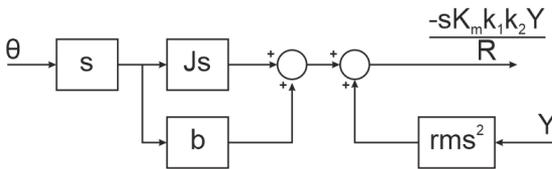
Figura 1.29 | Primeiro passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos o termo  $\Theta s(Js + b)$ , mas perceba que o início do ramo superior é idêntico ao início do ramo inferior, então podemos simplificar o diagrama de blocos e exibir o ramo repetido apenas uma vez, bifurcando para baixo e para cima. O próximo termo que conectaremos no diagrama é o  $r \cdot mYs^2$ , que deve entrar somando com o que já fizemos, como mostra a Figura 1.30.

Figura 1.30 | Segundo passo do diagrama de blocos

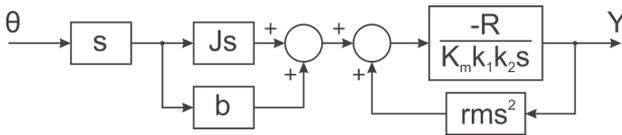


Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que estamos perto de concluir o diagrama: todos os termos da função de transferência (Equação 1.56) estão presentes nele. Queremos o  $Y(s)$  como saída e, no ramo superior à direita, ele aparece multiplicado por uma constante  $\frac{-K_m k_1 k_2}{R}$ , ou seja, basta multiplicarmos o ramo pelo inverso dessa constante para que obtenhamos o  $Y(s)$  desejado. Podemos até mesmo aproveitar o  $Y(s)$  superior para bifurcá-lo para o ramo inferior.

Com isso, fica concluído o diagrama de blocos na Figura 1.31.

Figura 1.31 | Diagrama de blocos da impressora



Fonte: elaborada pelo autor.

## Avançando na prática

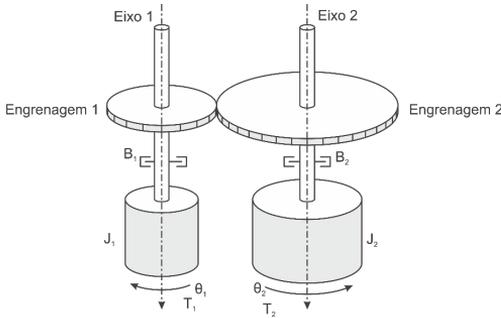
# Modelagem de um trem de engrenagens

### Descrição da situação-problema

Um manipulador robótico industrial pode ser dividido em três partes distintas: mecanismo, acionamento e sistema de controle. Para o bom funcionamento de um robô, essas três partes devem estar bem projetadas e trabalhando em harmonia durante os movimentos desejados nas tarefas de trabalho de um manipulador. Atualmente há duas formas de acionamento das juntas de robôs industriais. Uma é o acionamento direto, em que o motor é montado diretamente no eixo da junta ou utilizando transmissão por engrenagens entre os motores e as juntas, sendo esta última mais vantajosa, pois possibilita que o motor opere com menos carga e em rotações mais altas, além de facilitar o seu posicionamento em braços robóticos.

Imagine, portanto, que você trabalha como responsável técnico no departamento de desenvolvimento de robôs, e uma de suas tarefas é fazer o modelo dinâmico tanto em variáveis de estado quanto em diagrama de blocos dos sistemas de redução. O próximo sistema que você deve modelar está ilustrado na Figura 1.32, no qual a entrada é o torque equivalente (levando em consideração a relação de transmissão) e a saída é a velocidade angular do eixo 2.

Figura 1.32 | Ilustração do trem de engrenagens



Fonte: adaptada de Felício (2010).

Do sistema, temos que  $n_{12} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$  é a relação de transmissão.

O torque equivalente:  $T_e = T_2 + n_{12}T_1 \quad [N \cdot m]$ .

Atritos no sistema:  $B_1$  e  $B_2 \left[ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$ .

Inércias à rotação:  $J_1$  e  $J_2 \left[ kg \cdot m^2 \right]$ .

Ângulos dos eixos:  $\theta_1$  e  $\theta_2 \left[ rad \right]$ .

Como fica cada uma das representações requeridas deste sistema?

### Resolução da situação-problema

Começando pela relação de transmissão, temos que:

$$\theta_1 = \theta_2 n_{12} \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 n_{12} \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 n_{12} \quad (1.57)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton para movimentos rotativos no primeiro eixo, chegamos a:

$$T_1 - B_1 \dot{\theta}_1 + T_i = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (1.58)$$

Onde  $T_i$  é o torque que a engrenagem 2 exerce sobre a engrenagem 1. Substituindo as relações da Equação 1.57 pela 1.58, temos:

$$T_1 - B_1 n_{12} \dot{\theta}_2 + T_i = J_1 n_{12} \ddot{\theta}_2 \quad (1.59)$$

Analogamente, para o eixo 2:

$$T_2 - B_2 \dot{\theta}_2 - T_i n_{12} = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (1.60)$$

Multiplicando (1.59) por  $n_{12}$  e somando (1.60), temos:

$$T_1 n_{12} + T_2 - \dot{\theta}_2 (B_1 n_{12}^2 + B_2) = \ddot{\theta}_2 (J_1 n_{12}^2 + J_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_1 n_{12} + T_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} - \dot{\theta}_2 \frac{B_1 n_{12}^2 + B_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} \quad (1.61)$$

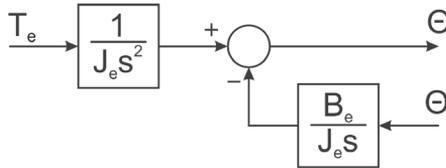
Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, isolamos  $\Theta(s)$ , e usando os atalhos  $B_e = B_1 n_{12}^2 + B_2$  e  $J_e = J_1 n_{12}^2 + J_2$ , obtemos:

$$s^2 \Theta = \frac{T_e}{J_e} - s \Theta \frac{B_e}{J_e}$$

$$\Theta = \frac{T_e}{J_e s^2} - \Theta \frac{B_e}{J_e s} \quad (1.62)$$

Note que não estamos obtendo a saída  $s \cdot \Theta(s)$  requerida para o sistema, mas isso não é problema, pois podemos fazê-la aparecer facilmente no diagrama de blocos. Para montar o diagrama, vamos fazer passo a passo. Primeiramente, precisamos de um bloco de soma para montar o lado direito da equação (Figura 1.33).

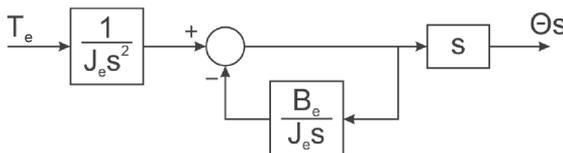
Figura 1.33 | Primeiro passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos que há  $\Theta$  nos dois ramos da direita, então podemos conectá-los para fechar a malha. Como dito anteriormente, a saída esperada é a velocidade angular do segundo eixo do trem de engrenagens, ou seja,  $s \cdot \Theta(s)$ . Para tal, basta conectar ao final um simples bloco com função transferência  $s$ , como mostra a Figura 1.34.

Figura 1.34 | Segundo passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

**1.** A modelagem de sistemas dinâmicos é a técnica de representar sistemas reais por meio de equações matemáticas para os mais diversos propósitos, como o projeto de controladores, predição de respostas, análise de sistemas, entre outros.

Sobre um modelo de sistema dinâmico, considere as afirmativas a seguir:

I. Um modelo matemático representa de modo perfeito o sistema dinâmico real.

II. As hipóteses simplificadoras que são feitas durante qualquer modelagem fazem dela uma equação inútil. Por isso modelagem é pouco utilizada na engenharia.

III. Um modelo de um sistema dinâmico é uma EDO (ou um conjunto delas) que descreve, de modo aproximado, o comportamento de um sistema real.

IV. É possível traçar analogias entre os elementos e variáveis de sistemas dinâmicos de várias áreas, como elétrica, mecânica, fluidica, etc.

É correto o que se afirma em:

- a) Apenas I e II.
- b) Apenas II e III.
- c) Apenas I, II e IV.
- d) Apenas II, III e IV.
- e) Apenas III e IV.

**2.** Uma maneira de representar um sistema dinâmico é por meio do uso de variáveis de estado e equação diferencial de estado. Trata-se de uma maneira matricial de apresentar o equacionamento do modelo dinâmico. A equação a seguir representa o modelo de um circuito integrador:

$$u_m(t) = RC\dot{u}_{out}(t) + LC\ddot{u}_{out}(t) + u_{out}(t)$$

Assinale a alternativa que mostra a escolha correta das variáveis de estado.

a)  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{out} \\ \dot{u}_{out} \end{bmatrix}$

b)  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$

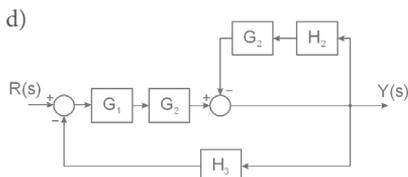
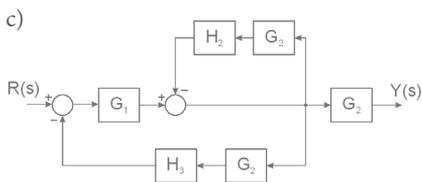
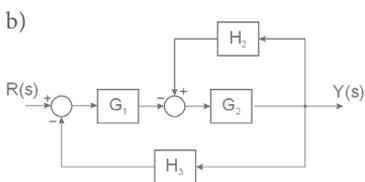
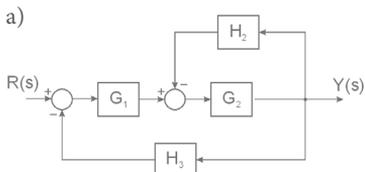
c)  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ L \\ C \end{bmatrix}$

$$d) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{out} \\ \dot{\mathbf{u}}_{out} \end{bmatrix}$$

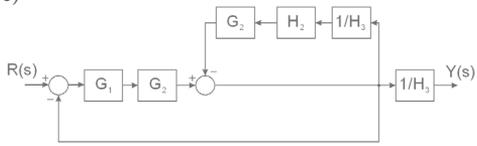
$$e) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{in} \\ \mathbf{u}_{out} \end{bmatrix}$$

**3.** A representação de diagrama de blocos de sistemas dinâmicos é uma maneira bastante flexível de se representar um sistema dinâmico, pois há mais de uma maneira de desenhar um diagrama. Mas, mesmo que haja inúmeras maneiras de desenhá-lo, cada diagrama deve sempre ser reduzido à mesma função transferência.

Assinale a alternativa que mostra um par de diagrama de blocos cuja função transferência difere dos demais.



e)



## Referências

---

- FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.
- DORE, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- ROUTLEDGE, R. **Discoveries & Inventions of the Nineteenth Century**. 13. ed. [S.l.: s.n.], 1900.
- SIQUEIRA, A.; TERRA, M.; FRANCISCO, T. Controle robusto de robôs móveis em formação sujeitos a falhas. **Revista Controle & Automação**, v. 21, n. 1, p. 29-42, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ca/v21n1/v21n1a03>. Acesso em: 8 jun. 2017.



# Unidade 2

---

## Análise de resposta transitória e regime permanente

### Convite ao estudo

Caro aluno, na unidade anterior, você conheceu uma maneira muito utilizada de representar matematicamente um sistema dinâmico: a função de transferência.

Nesta unidade, mais especificamente na primeira seção, exploraremos um pouco mais as informações que podem ser extraídas dessa forma de representação de um sistema dinâmico e veremos o porquê de uma função de transferência ser tão importante no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT). Além disso, vamos aprender a encontrar os polos e zeros da função transferência de um sistema dinâmico, assim como prever o comportamento de dois tipos fundamentais de sistemas: de primeira e de segunda ordem.

Na segunda seção introduziremos o conceito de erro em regime permanente e mostraremos como modelar esse erro, bem como veremos a influência do erro em regime permanente em sistemas com realimentação unitária.

Por fim, na última seção, aprenderemos a lidar e tratar alguns problemas práticos de sistemas de controle no Matlab, um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico.

Para aprofundar o seu conhecimento, além da teoria, proporemos uma série de situações práticas para instigar sua curiosidade e fomentar sua habilidade em resolver problemas de controle de processos. Uma vez que já sabemos modelar um sistema dinâmico, o que fazer com esse conhecimento? Como isso pode ser usado em nosso benefício na interação com o mundo?

Boa jornada e bons estudos!

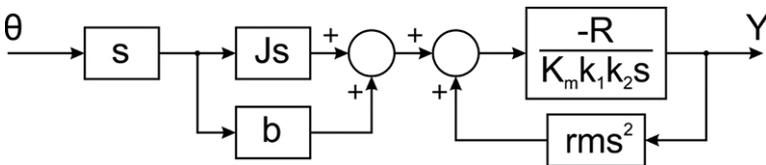
## Sistemas de primeira e segunda ordem

### Diálogo aberto

Até este momento, durante os estudos, você já se deparou com sistemas de ambas as ordens, mas agora vamos analisá-los com mais profundidade. É possível obter informações sobre o comportamento desses tipos de sistemas por meio da adequação da função transferência a um formato específico (de cada ordem de sistema dinâmico) de escrevê-la, que veremos ao longo da seção.

Agora, vamos prosseguir com a seguinte tarefa: imagine que você é membro da equipe de engenharia de uma empresa que fabrica acessórios para computador e já obteve o modelo dinâmico do sistema em três representações: no tempo, em espaço de estados e em diagrama de blocos. Suponha que você então esteja trabalhando com o diagrama de blocos conforme apresentado na Figura 2.1.

Figura 2.1 Diagrama de blocos da impressora



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora você deve escolher a melhor entrada e saída para o sistema e conseguir a representação do modelo dinâmico em função transferência para obter seus polos e zeros. Como você realizaria essa tarefa?

No decorrer do estudo desta seção você vai ter os conhecimentos necessários para executar essa tarefa com êxito. Contudo, é necessário ter dedicação e empenho, por isso mãos à obra!

### Não pode faltar

A função de transferência é uma maneira de representar um sistema dinâmico e é definida pela relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada de um sistema dinâmico linear invariante no tempo (SLIT) para condições iniciais nulas. Um SLIT com condições iniciais nulas pode ser descrito da forma como mostrada na Equação 2.1, sendo  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  e  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$  as propriedades do sistema,  $y$  a saída e  $x$  a entrada.

$$a_0 y^{(n)} + a_2 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (n \leq m) \quad (2.1)$$

Então, a partir da Equação 2.1, com condições iniciais nulas, podemos obter a função de transferência do sistema (Equação 2.2):

$$\text{Função de transferência} = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.2)$$

Sendo  $n$  a maior potência de  $s$  no denominador da função transferência, dizemos que o sistema é de ordem  $n$ .



### Assimile

O conceito de função de transferência é limitado a sistemas SLIT, e a maior potência do denominador da função de transferência define a ordem de um sistema dinâmico.

Seja  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  a função de transferência do sistema dinâmico, então podemos dizer que, para uma entrada  $X(s)$ , a saída será  $Y(s) = G(s)X(s)$ .

Ao aplicarmos uma entrada de impulso unitário no sistema ( $\delta(t)$ ), já sabemos como realizar o procedimento matemático da obtenção da resposta temporal do sistema dinâmico.

$$X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$Y(s) = G(s) \quad (2.3)$$

Ou seja, de acordo com a Equação 2.3, a resposta temporal do sistema para a entrada impulso será a  $g(t)$ , que é a transformada inversa de Laplace de  $G(s)$ . Perceba a importância da resposta do sistema à entrada impulso: ela é a própria função de transferência do sistema dinâmico em questão. Tanto que a resposta  $g(t)$  é denominada como a função característica do sistema e apresenta as mesmas informações dinâmicas que a função de transferência.

A técnica de submeter um sistema a uma entrada impulso e obter a sua resposta (por meio de sensores) é utilizada para obter a função de transferência em uma técnica denominada identificação de sistemas.

Vale ressaltar que na prática é impossível obter um impulso unitário perfeito, pois para tal é necessário transferir uma certa quantidade de energia ao sistema dentro de um período de tempo infinitamente pequeno, então, de acordo com as constantes de tempo do sistema dinâmico sujeito ao teste, um pulso de duração relativamente rápida é considerado um impulso.

A constante de tempo de um sistema refere-se ao quão rápido o sistema responde a uma excitação. Tal propriedade é amplamente conhecida para dois tipos de sistemas muito importantes: de primeira e de segunda ordem. Começemos a discutir sobre o sistema de primeira ordem.

De forma geral, um sistema de primeira ordem pode ter sua função de transferência escrita em sua forma padrão, como mostra a Equação 2.4, onde o parâmetro  $\tau$  é a constante de tempo do sistema.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.4)$$

O denominador da função de transferência é um polinômio em  $s$ , e suas raízes são denominadas polos do sistema. Veja que, para o sistema de primeira ordem, seu único polo é  $s = -\frac{1}{\tau}$ . Ao fazermos a transformada inversa de Laplace, vemos que o polo do sistema de primeira ordem aparece no expoente da função exponencial da resposta no tempo ( $y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ). Caso o sistema também tenha no numerador um polinômio, as raízes desse polinômio são os zeros do sistema.

A constante de tempo nos informa quanto tempo dura a resposta transitória do sistema até que seja atingida a resposta em regime permanente. Para entendermos melhor, apliquemos uma entrada degrau unitário ( $X(s) = \mathcal{L}[\mu(t)] = \frac{1}{s}$ ) ao sistema (Equação 2.5).

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(\tau s + 1)} \quad (2.5)$$

Aplicando frações parciais (Equação 2.6):

$$Y(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{A(\tau s + 1) + Bs}{s(\tau s + 1)} \quad (2.6)$$

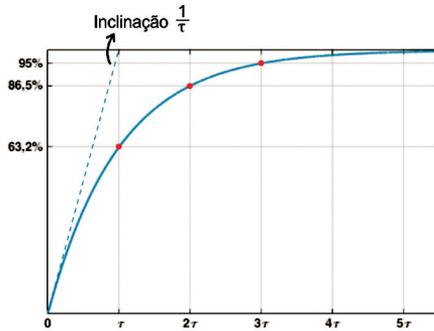
Resolvendo por meio de identidade polinomial, temos que  $A=1$  e  $B=-\tau$ , então, substituindo na Equação 2.6 e aplicando a transformada inversa de Laplace, temos a resposta do sistema de primeira ordem à entrada degrau (Equação 2.7).

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1/\tau}\right] \Rightarrow$$

$$y_{\text{entrada degrau}}(t) = \mu(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.7)$$

A Figura 2.2 mostra o formato da resposta:

Figura 2.2 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que, após um período de tempo equivalente a  $\tau$ , o sistema alcança 63,2% da resposta de regime permanente. Matematicamente a resposta de regime permanente é definida como o estado em que o sistema se encontrará após decorrido um período infinito de tempo do início, ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$ . Na prática podemos dizer que o sistema entra em regime permanente quando alcança em torno de 2% de seu valor final. Mas, matematicamente, como sabemos qual é o valor final? Podemos utilizar o teorema do valor final, que é dado pela Equação 2.8.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \quad (2.8)$$

Ou seja, podemos obter a resposta de um sistema dinâmico em regime permanente (valor final) por meio do cálculo do limite para  $s \rightarrow 0$ , de  $s$  multiplicado pela resposta do sistema a determinada entrada (no domínio de Laplace).



### Exemplificando

Vamos calcular matematicamente o valor final da resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau qualquer, para podermos saber quando o sistema atinge um valor em torno de 2% em relação ao seu regime permanente.

Uma entrada degrau de amplitude  $A$  pode ser dada pela Equação 2.9.

$$x(t) = A \cdot \mu(t) \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s} \quad (2.9)$$

Substituindo na Equação 2.4, temos a Equação 2.10

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} \quad (2.10)$$

Aplicando o teorema do valor final, temos o resultado na Equação 2.11

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = s \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = A \quad (2.11)$$

Ou seja, para uma entrada degrau de amplitude  $A$ , o valor final de qualquer sistema dinâmico de primeira ordem será  $A$  também.

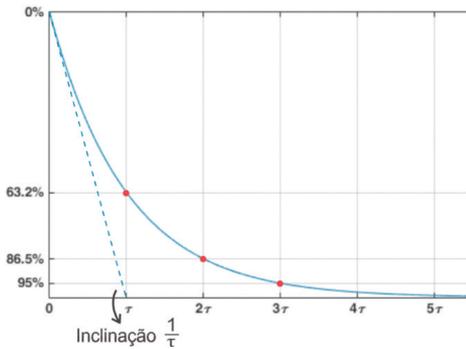
Para entrada impulso, como visto anteriormente, cuja transformada de Laplace é 1, a resposta temporal do sistema é simplesmente a transformada inversa de Laplace de sua própria função transferência, que podemos ver na Equação 2.12.

$$y_{\text{entrada impulso}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\tau s + 1}\right] \Rightarrow$$

$$y_{\text{entrada impulso}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.12)$$

O formato da resposta à entrada impulso é mostrado pelo gráfico da Figura 2.3.

Figura 2.3 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada impulso



Fonte: elaborada pelo autor.

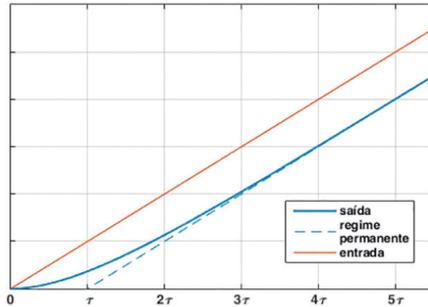
Perceba que em ambos os casos o sistema de primeira ordem inicia com derivada igual a  $\frac{1}{\tau}$  e leva um tempo equivalente a  $\tau$  para atingir 63,2% de seu regime permanente.

Outra entrada importante para analisar a resposta de sistemas dinâmicos é a entrada rampa unitária ( $x(t) = t \Rightarrow X(s) = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ ), por ser uma função de entrada simples (uma função afim), que revela o comportamento do sistema quando sob a influência de uma função que muda ao longo do tempo.

Seguindo os mesmos passos anteriores, a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada rampa unitária é dada pela Equação 2.13, e seu gráfico é mostrado na Figura 2.4.

$$y_{\text{entrada rampa}}(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.13)$$

Figura 2.4 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada rampa



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso da entrada rampa, o sistema de primeira ordem nunca chega a atingir a referência (ou entrada), então dizemos que há um erro de regime permanente (ou simplesmente um erro de regime). E, novamente, o sistema demora um período de  $3\tau$  para atingir 95% de seu regime permanente.

Aplicando o teorema do valor final, descobrimos que o valor de regime permanente para entrada rampa tende ao  $\infty$  (tendência que pode ser observada no gráfico da Figura 2.4). Então podemos usar o teorema do valor final para calcular outro valor: o erro de regime permanente. O conceito de erro é sempre aplicado da mesma maneira: uma referência (no nosso caso, a entrada do sistema) subtraída do sinal que contém o erro (no caso, a saída do sistema). Sendo o erro em função do tempo dado por  $e(t)$ , aplicamos o teorema do valor final como mostra a Equação 2.14.

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \Rightarrow \\
 \left( \begin{aligned} e(t) &= x(t) - y(t) \Rightarrow \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[x(t)] - \mathcal{L}[y(t)] \Rightarrow \\ E(s) &= X(s) - Y(s) \end{aligned} \right) \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (X(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \right) \Rightarrow \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1}{(\tau s + 1)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \frac{\tau s}{(\tau s + 1)} + \frac{1}{(\tau s + 1)} - \frac{1}{(\tau s + 1)} \right) \Rightarrow \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau}{(\tau s + 1)} = \tau \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \tau \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Ou seja, em regime permanente, a resposta do sistema dinâmico de primeira ordem sempre estará defasado de  $\tau$  da entrada rampa.



## Refleta

Para as entradas impulso e degrau unitário, podemos ver pelos gráficos das Figuras 2.1 e 2.2 que o erro de regime permanente tende a ser zero. Mas, ao invés de unitárias, considere tais entradas de qualquer magnitude. Você consegue calcular qual é o erro de regime quando um SLIT de primeira ordem é submetido a cada uma delas?

Agora vamos falar um pouco sobre sistema de segunda ordem. A função transferência de um sistema dinâmico de segunda ordem pode ser escrita em sua forma padrão, conforme demonstrado na Equação.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.15)$$

Os parâmetros  $\omega_n$  e  $\zeta$  representam, respectivamente, a frequência natural de oscilação do sistema e o amortecimento. O valor desses parâmetros define como será a resposta do sistema dinâmico. O valor do amortecimento  $\zeta$  define o formato da curva da resposta do sistema, pois afeta os polos do sistema dinâmico. Os polos de um sistema são os valores de  $s$  para os quais o valor da função transferência de um sistema dinâmico tende ao infinito, ou seja, como explicado anteriormente, podemos encontrar os polos de um sistema dinâmico ao igualar a zero o polinômio do denominador de sua função transferência, como mostra a Equação 2.16.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s = \zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.16)$$

Da Equação 2.16, podemos perceber que o valor de  $\zeta$  define a classificação do sistema e se os polos serão números complexos ou não. Veja a Equação 2.17.

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} \ 0 < \zeta < 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \\ \text{(ii)} \ \zeta = 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 = 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \\ \text{(iii)} \ \zeta > 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 > 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Se  $0 < \zeta < 1$ , o sistema é classificado como subamortecido. Ele tem dois polos complexos conjugados, e o termo  $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ , que multiplica a unidade imaginária  $j$ , é denominado frequência amortecida do sistema:  $\omega_n$ . Sua resposta a uma entrada degrau unitária é dada pela Equação 2.18.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}\omega_d t \right) \quad (2.18)$$

Se  $\zeta = 1$ , o sistema é classificado como criticamente amortecido. Como

temos uma raiz real de multiplicidade 2 para o polinômio do denominador da função transferência, então dizemos que o sistema tem um polo de ordem 2. A resposta a uma entrada degrau unitário é dada pela Equação 2.19.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (2.19)$$

Se  $\zeta > 1$ , dizemos que o sistema é sobreamortecido. Veja que agora temos dois polos reais. A resposta do sistema é dada pela Equação 2.20.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \quad (2.20)$$

onde:  $s_1 = \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$ , e  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$

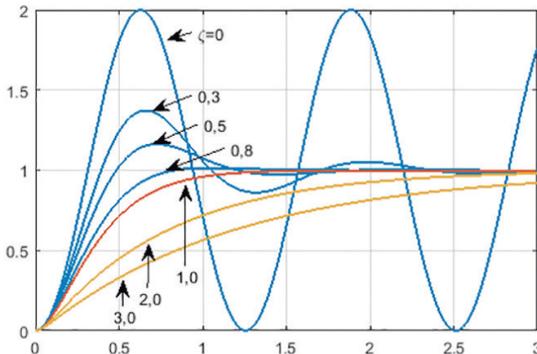
A Figura 2.5 mostra um comparativo entre os tipos de sistemas de segunda ordem. Veja que os sistemas subamortecidos (em azul) mostram oscilações na resposta, dado que, para  $\zeta=0$ , como a parte real do polo (ou taxa de decaimento) é nula, as oscilações nunca cessam: é como se não houvesse dissipação de energia no sistema, fato que praticamente não ocorre na realidade. Esse tipo de sistema também exibe uma resposta que supera a entrada (ou referência), e, quanto menor o  $\zeta$ , mais o sistema supera sua referência, sendo a medida dessa magnitude denominada sobressinal.

Nos sistemas criticamente amortecidos ( $\zeta$  igual a 1), vemos que sua resposta tende a ir ao encontro da referência de maneira assintótica.

Os sistemas sobreamortecidos ( $\zeta$  menor que 1) seguem o mesmo comportamento anterior, mas de forma mais lenta.

Perceba ainda que todos os sistemas, independentemente de seu coeficiente de amortecimento, iniciam a resposta com derivada nula.

Figura 2.5 | Respostas de sistemas de 2ª ordem à entrada degrau unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim como as raízes do polinômio do denominador de uma função transferência é denominado polo do sistema, a raiz do polinômio do numerador é denominada zero da função transferência. Essa variedade de comportamentos vista na resposta dos sistemas de segunda e primeira ordem fez surgir várias métricas para avaliar tais sistemas (veja a Figura 2.6). As métricas mais utilizadas são:

- Tempo de subida,  $t_r$  : tempo necessário para que o sistema passe de:
  - 0% a 100% do seu valor final para sistemas subamortecidos.
  - 10% a 90% do seu valor final para sistemas sobreamortecidos ou de 1ª ordem.

O tempo de subida é dado pela Equação 2.21.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.21)$$

Sendo  $s$  um número complexo, o valor  $\beta$  é o ângulo feito entre o semieixo real negativo, a origem e o polo no plano real-complexo.

- Tempo de pico,  $t_p$  : é o tempo para que o sistema alcance o primeiro pico de sobressinal (Equação 2.22).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.22)$$

- Sobressinal,  $M_p$  : é definido como o percentual máximo em que o valor da resposta do sistema fica acima do valor final (Equação 2.23).

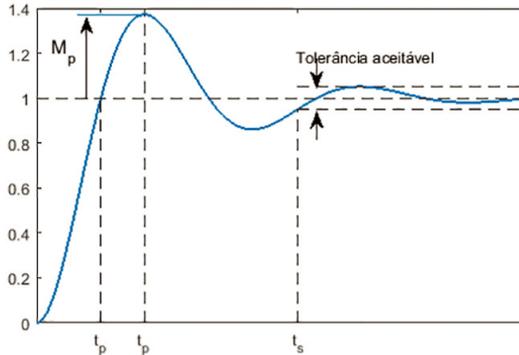
$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} \quad (2.23)$$

- Tempo de acomodação,  $t_s$  : é o tempo necessário para que a resposta do sistema fique limitada a uma faixa de valores (geralmente 2% ou 5%) em torno de seu valor final (Equação 2.24).

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ para 2\%, ou} \quad (2.24)$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \text{ para 5\%}$$

Figura 2.6 | Representação gráfica das métricas



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 155).



### Pesquise mais

Todas as métricas para os sistemas dinâmicos são obtidas por meio de cálculo e manipulações matemáticas com as respostas temporais dos modelos. Para saber um pouco mais, veja no livro *Engenharia de Controle Moderno* (OGATA, 2010, p. 154-158) como podemos chegar, matematicamente, nas definições das métricas aqui mostradas.

## Sem medo de errar

Agora retomemos a tarefa a ser realizada com o modelo do sistema de controle de posição do cabeçote de impressão. O objetivo do sistema é mitigar os efeitos que torques de perturbações indesejados podem causar. Assim, como entrada, é definido o torque  $T_d$ .

Como saída, seria interessante que a massa  $m$  do sistema se movimentasse exatamente de acordo com a rotação  $\theta$ , ou seja, queremos que a variável  $x_1 = r\theta - y$  seja nula. Então podemos escolher a variável de estado  $x_1$  como saída do sistema.

Observando o diagrama de blocos da Figura 2.1, é exatamente o que temos. Podemos traduzi-lo para a função transferência ou obtê-la a partir das equações de estado. Vamos realizar a segunda opção.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + rx_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2k}{m}x_1 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{2kr}{J}x_1 - \frac{K_m k_1 k_2}{JR}x_2 - \frac{b}{J}x_3 - \frac{T_d}{J}\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace a condições iniciais nulas nas duas primeiras equações, temos respectivamente:

$$X_2 = \frac{2k}{ms} X_1$$

$$X_3 = X_1 \left( \frac{s}{r} + \frac{2k}{mrs} \right)$$

Realizando o mesmo procedimento na equação de  $\dot{x}_3$  e substituindo as equações obtidas para  $X_2$  e  $X_3$ , temos a função transferência:

$$\frac{X_1}{T_d}(s) = \frac{-\frac{r}{J}s}{s^3 + \frac{b}{J}s^2 + \left( \frac{2k}{m} + \frac{2kr^2}{J} \right)s + \left( \frac{2kb}{Jm} + \frac{2kK_m k_1 k_2 r}{JmR} \right)}$$

Os parâmetros dos sistemas são dados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Valores dos parâmetros do sistema

Massa	$m = 0,2 \text{ kg}$
Sensor de luz	$k_1 = 1 \frac{V}{m}$
Raio	$r = 0,15 \text{ m}$
Atrito do motor	$b = 0,25 \frac{Nms}{rad}$
Resistência elétrica do motor	$R = 2 \Omega$
Constante de torque do motor	$K_m = 2 \frac{Nm}{A}$
Inércia total	$J = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Ganho do controlador	$k_2 = 0,1 \text{ s}$
Rigidez da correia	$k = 20 \frac{N}{m}$

Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 132).

Observando o numerador da função transferência, podemos ver que temos um zero em  $s = 0$ , independentemente dos parâmetros do sistema.

Para encontrarmos os polos da função transferência, vamos utilizar o comando *roots* do Matlab (MATHWORKS, 2018) para calcular os polos do sistema. Nesse comando, precisamos inserir o valor dos coeficientes do polinômio. Então vamos substituir os valores da tabela no denominador da função transferência e igualarmos a zero.

$$1 \cdot s^3 + 25 \cdot s^2 + 290 \cdot s^1 + 5300 \cdot s^0 = 0$$

Utilizando uma calculadora gráfica, obtemos as raízes do polinômio do denominador, ou seja, os polos do sistema.

$$s = \begin{cases} -22,56 \\ -1,22 + 15,28i \\ -1,22 - 15,28i \end{cases}$$

Logo, os polos do sistema são  $(-22,56)$ ,  $(-1,22+15,28i)$  e  $(-1,22-15,28i)$ .

É importante conhecermos os polos do sistema, pois, mais à frente, veremos que eles impactam na performance e estabilidade dele.

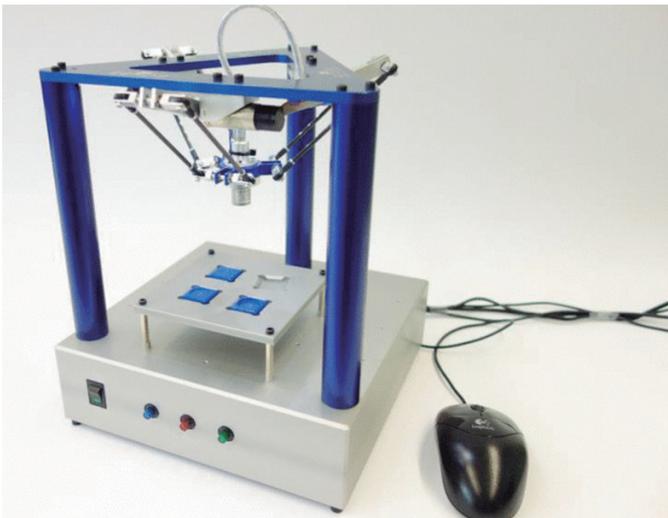
## Avançando na prática

### Adequação métrica do manipulador delta

#### Descrição da situação-problema

Um sistema mecatrônico, denominado manipulador delta (Figura 2.7), é muito utilizado em tarefas de pega-e-põe (*pick-and-place*) por sua característica de desenvolver altas acelerações, devido à sua cadeia cinemática fechada.

Figura 2.7 | Manipulador delta



Fonte: <http://www.ntb.ch/en/project/eeduro-low-cost-eeros-roboter-familie/>. Acesso em: 6 dez. 2018.

Por causa de suas altas acelerações, pode ocorrer de, durante a desaceleração, parar em uma dada posição, e a ponta do robô mover-se mais do que o desejado.

O controle de posição utilizado na tarefa de embalar produtos cosméticos de uma linha de produção faz com que o manipulador delta comporte-se como um sistema de segunda ordem.

Uma vez que os cosméticos são objetos frágeis e passam, durante a tarefa de embalar, suficientemente próximos às embalagens, o erro de movimentação não deve passar de 15% da posição desejada a cada entrada de tensão nos motores do manipulador.

Além de tornar a movimentação do manipulador um sistema de segunda ordem, devido a características construtivas, o coeficiente de amortecimento só pode assumir certos valores predefinidos, a saber: 0,4; 0,5; 0,6 ou 0,7.

Para uma entrada de tensão da forma degrau unitário, de acordo com o requerimento de máximo sobressinal, qual dos fatores de amortecimento disponíveis é o mais adequado para a tarefa de embalar?

### Resolução da situação-problema

De acordo com a equação do sobressinal  $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}$ , podemos calcular o sobressinal para cada caso.

$$\zeta = 0,4 \Rightarrow M_p = e^{-\frac{0,4\pi}{\sqrt{1-0,4^2}}} = 0,254$$

$$\zeta = 0,5 \Rightarrow M_p = 0,163$$

$$\zeta = 0,6 \Rightarrow M_p = 0,095$$

$$\zeta = 0,7 \Rightarrow M_p = 0,046$$

Sabendo que não podemos ter sobressinal maior que 15%, então 0,6 e 0,7 são adequados. Mas, da equação do tempo de subida,  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$ ,

sabemos que, quanto maior o coeficiente de amortecimento, maior é o tempo de subida, ou seja, mais tempo leva para o sistema se aproximar da referência, então, obedecendo o máximo de 15% de sobressinal e escolhendo o valor que resulta no sistema de resposta mais rápida, escolhemos  $\zeta = 0,6$ .

**1.** Sistemas de primeira ordem e sistemas de segunda ordem sobreamortecidos mostram comportamento semelhante quando submetidos à entrada degrau, pois não apresentam sobressinal e tendem assintoticamente ao seu valor final, que coincide com a referência.

Qual das alternativas a seguir apresenta uma afirmação correta em relação a ambos os sistemas em questão?

- a) Um sistema de primeira ordem e um sistema de segunda ordem sobreamortecido apresentam a mesma constante de tempo.
- b) Um sistema de primeira ordem se assemelha ao sistema de segunda ordem sobreamortecido, pois ambos compartilham do coeficiente de amortecimento maior que 1.
- c) Um sistema de segunda ordem sobreamortecido se assemelha a um sistema de primeira ordem, pois o denominador de sua função transferência pode ser reescrito como um polinômio de primeira ordem.
- d) A única diferença entre um sistema de primeira ordem e um sistema de segunda ordem sobreamortecido é que o primeiro sempre apresenta polos complexos de ordem 2, o que nunca ocorre no segundo.
- e) Na resposta à entrada degrau, o sistema de primeira ordem apresenta derivada não nula, diferentemente do sistema de segunda ordem (independentemente do seu coeficiente de amortecimento), que sempre apresenta derivada nula.

**2.** Apenas com a observação da função transferência de um sistema de segunda ordem, podemos obter métricas da sua resposta no tempo por meio de fórmulas conhecidas. Considere um sistema massa-mola-amortecedor, descrito pela função transferência a seguir.

$$G(s) = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K}$$

Sabe-se que um sistema de segunda ordem tem o seguinte formato padrão:

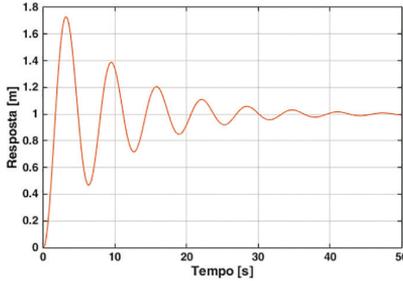
$$G(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Qual é a frequência natural do sistema?

- a)  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$
- b)  $\omega_n = \sqrt{K}$
- c)  $\omega_n = \frac{K}{M}$
- d)  $\omega_n = MBK$
- e)  $\omega_n = K$

3. A partir das métricas da resposta de um SLIT de segunda ordem, podemos inferir as suas características utilizando fórmulas. Observe na Figura 2.8 a resposta de um sistema de segunda ordem subamortecido a uma entrada degrau unitário obtida experimentalmente.

Figura 2.8 | Resposta de um SLIT de segunda ordem



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que a máxima amplitude foi de 1,729 m (aos 3,16 s) e o tempo de acomodação dos 5% foi de aproximadamente 30 s.

Dados:

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \text{ para 5\%}$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Qual é a frequência natural, frequência amortecida e coeficiente de amortecimento do sistema em questão?

- a)  $\omega_n = 0,1$ ,  $\zeta = 1$  e  $\omega_d = 0$
- b)  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0,01$  e  $\omega_d = 0,9999$
- c)  $\omega_n = 0,1$ ,  $\zeta = 0,1$  e  $\omega_d = 0,0995$
- d)  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 1$  e  $\omega_d = 0$
- e)  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0,1$  e  $\omega_d = 0,9950$

## Erros em regime permanente

### Diálogo aberto

Como vimos, no estudo de sistemas de controle a determinação de um modelo matemático é fundamental para uma boa análise. Por meio desse modelo, pode-se validar o desempenho do sistema com base em outros métodos disponíveis. A análise e o projeto de sistemas de controle são focados em três especificações: a resposta transitória do sistema, sua estabilidade e o erro em regime permanente, levando em consideração a robustez do projeto juntamente com aspectos econômicos e sociais. Na seção anterior, vimos que alguns elementos da análise transitória foram apresentados para sistemas de primeira e de segunda ordens. Reservaremos a Unidade 3 inteiramente para tratar do estudo da estabilidade de um sistema de controle e falaremos aqui dos erros em regime permanente.

Para fixar os conhecimentos apresentados aqui vamos imaginar a seguinte situação prática: no processo de fabricação de memórias de acesso aleatório (RAMs) de semicondutor, semelhantes às utilizadas em computadores pessoais, são utilizados robôs, como o visto na Figura 2.9. O erro em regime permanente é um aspecto de projeto importante para robôs de linha de montagem (NISE, 2017).

Figura 2.9 | Robô utilizado na linha de montagem de memórias de acesso aleatório (RAMs) de semicondutor



Fonte: Nise (2017, [s.p.]).

A constante de posição,  $K_p$ , a constante de velocidade,  $K_v$ , e a constante de aceleração,  $K_a$ , podem ser utilizadas como especificações para os erros em regime permanente de um sistema de controle. Nesse contexto, que informações estão contidas na especificação de uma constante de erro estático? Se o sistema de controle a ser avaliado é estável e possui a especificação  $K_v = 1000$ , que conclusões podemos tirar?

Para ajudá-lo com isso, a seguir apresentaremos os fundamentos sobre erro em regime permanente para um sistema de controle estável.

Bons estudos!

## Não pode faltar

Um dos objetivos de um sistema de controle é fazer com que o comportamento na saída siga um determinado sinal de referência. A diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência é chamada de erro em regime permanente.

Em um sistema de controle, os erros podem ocorrer por diferentes aspectos. Componentes que apresentam mau funcionamento, ou algum desgaste, podem gerar um erro estacionário no sistema. Mudanças na entrada de referência apresentam-se também como um dos fatores capazes de atribuir erro em sistema. De um modo geral, todo sistema apresenta um erro estacionário intrínseco na resposta de um sistema, gerado por certas entradas. O único modo de eliminar esse erro é alterando a estrutura do sistema (OGATA, 2010).

Uma das classificações em sistemas de controle estabelece a capacidade do sistema de seguir os sinais de entrada em degrau, rampa, parábola, etc. Esse critério de classificação é bastante conveniente, uma vez que os valores dos erros estacionários referentes a essas entradas individuais apresentam-se como modelos de qualidade de um sistema.



### Assimile

Dada a função de transferência de um sistema de controle com realimentação unitária:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)} \quad (2.25)$$

o termo  $s^N$  no denominador representa um polo de multiplicidade  $N$  na origem. O presente método classifica como sistema do tipo 0, tipo 1, tipo 2, ..., se  $N = 0$ ,  $N = 1$ ,  $N = 2$ , ..., respectivamente (OGATA, 2010).

Vale ressaltar que essa classificação é diferente da que se refere à ordem de um sistema. Por exemplo, seja a função de transferência a seguir,

$$G(s) = \frac{11,35(s+1)(s+3)}{s^2(s+2)(s+2)} \quad (2.26)$$

Esse sistema é do tipo 2, dado o termo isolado de  $s$  com expoente igual a 2 ( $s^2$ ). Entretanto, a ordem desse mesmo sistema é 4, uma vez que o denominador no formato expandido corresponde a  $s^4 + 4s^3 + 4s^2$ , ou seja, o maior expoente de  $s$  é igual 4.

Uma forma oportuna de determinar o desempenho em um regime permanente de um sistema estável é a utilização do teorema do valor final. Para melhor compreensão, será utilizado um exemplo retirado de Ogata (2010, p. 204). Considerando o sistema da Figura 2.10, sua função de transferência de malha fechada é expressa por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.27)$$

E a relação do erro  $e(t)$  e o sinal de entrada  $r(t)$  correspondem a:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (2.28)$$

Sendo  $e(t)$  a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

Dado o erro  $E(s)$  como:

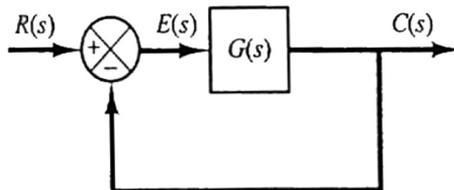
$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (2.29)$$

Aplicando o teorema do valor final, o erro estacionário pode ser obtido como:

$$e = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (2.30)$$

Por meio desse teorema, é possível definir o valor do erro em regime permanente para diferentes tipos de entrada, como degrau, rampa, parábola entre outros.

Figura 2.10 | Sistema de controle de malha fechada genérico



Fonte: Ogata (2010, p. 204).



### Exemplificando

Determine o erro em regime permanente para o sistema da Figura 2.9,

para  $G(s) = \frac{5}{s^2 + 7s + 5}$ , para uma entrada degrau unitário.

Sendo a entrada um degrau unitário, temos que  $R(s) = \frac{1}{s}$ , então, substituindo em (2.29), resulta em:

$$E(s) = \frac{s^2 + 7s + 5}{s^2 + 7s + 10} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)}$$

Substituindo  $E(s)$  em (2.30), temos  $e(\infty) = \frac{1}{2}$ .

Na análise do regime permanente são utilizadas algumas constantes estáticas como figuras de mérito do sistema de controle, e quanto maiores forem os valores das constantes, menor será o erro. Em um sistema, a saída pode se apresentar como posição, velocidade, temperatura, pressão, entre diferentes fatores. No entanto, para a análise do erro, não é necessário conhecer essa natureza física da saída. Dessa forma, a saída do sistema será chama de “posição”, a taxa de variação da saída de “velocidade”, e assim por diante.

Dessa forma, para a constante de posição  $K_p$ , dada uma entrada degrau,

$R(s) = \frac{1}{s}$ , o erro será expresso por:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s}$$
$$e = \frac{1}{1 + G(0)} \quad (2.31)$$

De modo que a constante de erro estático de posição  $K_p$  é definida como (OGATA, 2010):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

Assim, em termos da constante do erro estático de posição  $K_p$ , o erro estacionário equivale a:

$$e = \frac{1}{1 + K_p} \quad (2.32)$$

Seja um sistema do tipo 0,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K \quad (2.33)$$

Seja um sistema do tipo 1 ou superior:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \text{ para } N \geq 1 \quad (2.34)$$

Logo, um sistema do tipo 0 possui constante de erro estático de posição  $K_p$  de valor finito, na medida em que, para um sistema do tipo 1 ou ordem superior,  $K_p$  é infinita.

Dada uma entrada de degrau unitário, o erro estacionário é resumido a:

$$e = \frac{1}{1 + K} \quad (2.35)$$

para sistema do tipo 0, e,

$$e = 0 \quad (2.36)$$

para sistema do tipo 1 ou ordem superior.

Para a constante de velocidade  $K_v$ , para um sistema com entrada em rampa unitária, o erro estacionário é descrito como (OGATA, 2010):

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} \quad (2.37)$$

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \quad (2.38)$$

Nesse caso, a constante de velocidade do erro estático ( $K_v$ ) é dado por:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (2.39)$$

Dessa forma, o erro estacionário em função de  $K_v$  é definido por:

$$e = \frac{1}{K_v} \quad (2.40)$$

É utilizada a nomenclatura erro de velocidade para representar o erro estacionário em um sistema com entrada em rampa. O erro do sistema apresenta a mesma dimensão do erro de velocidade. Em outras palavras, o erro de velocidade aqui exposto corresponde a um erro de posição em decorrência de uma entrada em rampa, e não um erro na velocidade propriamente dito. Para um sistema do tipo 0, tem-se:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0 \quad (2.41)$$

Em sistema do tipo 1:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K \quad (2.42)$$

Em sistema do tipo 2 ou ordem superior:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty, \text{ para } N \geq 2 \quad (2.43)$$

De forma resumida, o erro estacionário para uma entrada em rampa unitária corresponde a (a):

$$e = \frac{1}{K_v} = \infty \quad (2.44)$$

para sistema do tipo 0, (b):

$$e = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

para sistema do tipo 1, e (c):

$$e = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (2.45)$$

para sistema do tipo 2 ou ordem superior.

A constante de aceleração  $K_a$  para sistemas com entrada em parábola unitária (entrada em aceleração), ou seja:

$$r(t) = \frac{t^2}{2}, \text{ para } t \geq 0 \quad (2.46)$$

$$r(t) = 0, \text{ para } t < 0 \quad (2.47)$$

O erro estacionário é dado por (OGATA, 2010):

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3}$$

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} \quad (2.48)$$

Nesse caso, a constante estática de aceleração ( $K_a$ ) é escrita por:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (2.49)$$

Dessa forma, o erro estacionário em termos de  $K_a$  equivale a:

$$e = \frac{1}{K_a} \quad (2.50)$$

Novamente, o termo erro de aceleração é referente a um erro de posição para uma entrada em parábola, e não ao erro da aceleração no sistema.

Em um sistema do tipo 0,  $K_a$  corresponde a:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0 \quad (2.51)$$

Em um sistema do tipo 1:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0 \quad (2.52)$$

Em um sistema do tipo 2:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K \quad (2.53)$$

Por fim, para um sistema do tipo 3 ou ordem superior:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \text{ para } N \geq 3 \quad (2.54)$$

Desse modo, para um sistema com entrada em parábola, o erro estacionário pode ser resumido em (a):

$$e = \infty \quad (2.55)$$

para sistemas do tipo 0 e 1, (b):

$$e = \frac{1}{K} \quad (2.56)$$

para sistemas do tipo 2, e (c):

$$e = 0 \quad (2.57)$$

para sistemas do tipo 3 ou ordem superior.



### Refleta

Como o tipo do sistema influencia na determinação do erro em regime permanente?

Os erros estacionários para os sistemas dos tipos 0, 1 e 2 submetidos a diferentes entradas são resumidos na Tabela 2.2 | Relações entre entrada, tipo do sistema, constantes de erro estático e erros em regime permanente. A tabela reúne os conceitos de erro em regime permanente, constantes de erro estático e tipo do sistema. A tabela mostra as constantes de erro estático e os erros em regime permanente como funções da forma de onda da entrada e do tipo do sistema. Vale ressaltar que os termos erro de posição, erro de velocidade e erro de aceleração indicam o desvio em regime permanente na posição da saída. E as constantes de erro estático,  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$ , correspondem a indicadores de desempenho em regime estacionário (NISE, 2017).

Tabela 2.2 | Relações entre entrada, tipo do sistema, constantes de erro estático e erros em regime permanente

Entrada	Fórmula do erro em regime permanente	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante	Erro	Constante	Erro	Constante	Erro
Degrau	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \text{cte}$	$\frac{1}{1+K}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	$\infty$	$K_v = \text{cte}$	$\frac{1}{K}$	$K_v = \infty$	0
Parábola	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = \text{cte}$	$\frac{1}{K}$

Fonte: Nise (2017, [s.p.]).



### Pesquise mais

A determinação do erro em regime permanente de um sistema de controle é uma ótima forma de medir o seu desempenho. Para saber um pouco mais sobre as definições do erro de regime permanente e também algumas de suas aplicações, acesse o material:

NOVAES, Carlos Eduardo de Brito. **Erro de estado estacionário.**

## Sem medo de errar

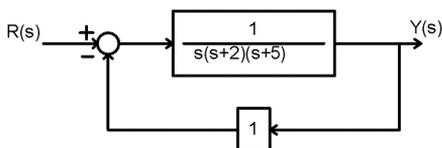
Considerando que estamos lidando com um sistema de controle estável que possui a especificação  $K_v = 1.000$ , podemos concluir que:

- O sistema é do tipo 1, uma vez que apenas os sistemas do tipo 1 possuem  $K_v$  com um valor constante finito. Lembrando que  $K_v = 0$  para sistemas do tipo 0 e  $K_v = \infty$  para sistemas do tipo 2.
- O sinal de teste deve ser uma rampa. Como  $K_v$  é especificado como uma constante finita e o erro em regime permanente para uma entrada em rampa é inversamente proporcional a  $K_v$ , sabemos que o sinal de teste é uma rampa.
- O erro em regime permanente entre a rampa de entrada e a rampa de saída é  $\frac{1}{K_v}$  por unidade de inclinação da rampa de entrada.

## Faça valer a pena

**1.** Um dos objetivos de um sistema de controle é que a resposta na saída siga um determinado sinal de referência, em regime permanente. A diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência, em regime permanente, é definido como erro em regime permanente. Para o sistema de controle da Figura 2.11 utilize o teorema do valor final para determinar o valor do erro estacionário do sistema.

Figura 2.11 | Sistema de controle



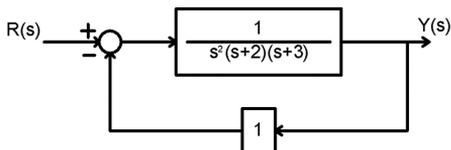
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

- a) 0,08
- b) 11,33
- c) -0,5
- d) 2,45
- e) 10

**2.** A determinação do erro em regime permanente de um sistema de controle é uma ótima forma de medir o seu desempenho. Considere o sistema da Figura 2.12 e obtenha o erro de regime permanente utilizando a(s) constante(s) de erro estático da tabela para uma entrada em parábola unitária.

Figura 2.12 | Sistema de controle



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

- a) 1/6
- b) 6
- c) 0
- d)  $\infty$
- e) 12

**3.** A constante de posição,  $K_p$ , a constante de velocidade,  $K_v$ , e a constante de aceleração,  $K_a$ , podem ser utilizadas como especificações para os erros em regime permanente de um sistema de controle. Considere um sistema estável com  $K_p = 1.000$  e avalie as afirmativas a seguir:

- I. O sistema é do tipo 0.
- II. O sinal de teste de entrada é um degrau.
- III. O erro por unidade do degrau é  $\frac{1}{1.001}$ .

É correto o que se afirma em:

- a) I, apenas.
- b) II e III, apenas.
- c) I e III, apenas.
- d) II, apenas.
- e) I, II e III.

## Problemas práticos sobre sistemas de controle

### Diálogo aberto

Nesta terceira e última seção da segunda unidade veremos, de maneira aplicada, os conceitos apresentados nas seções anteriores desta unidade: espaço de estados, diagramas de blocos, função de transferência e análise de resposta de sistemas de primeira e segunda ordem.

Aplicaremos esses conteúdos usando o Matlab. Serão apresentados comandos básicos necessários e como utilizá-los para obtermos cada tipo de representação, e você verá que, com o auxílio de alguns comandos desse software, é possível migrar facilmente entre alguns tipos de representações.

Você, como um membro da equipe de engenharia de uma empresa de acessórios para computador, já obteve a representação do sistema de controle do cabeçote da impressora em várias formas (função de transferência, espaço de estados e diagrama de blocos). A Tabela 2.3 traz os valores dos parâmetros do sistema com função de transferência:

$$\frac{X_1}{T_d}(s) = \frac{-\frac{r}{J}s}{s^3 + \frac{b}{J}s^2 + \left(\frac{2k}{m} + \frac{2kr^2}{J}\right)s + \left(\frac{2kb}{Jm} + \frac{2kK_m k_1 k_2 r}{JmR}\right)}$$

Tabela 2.3 | Valores dos parâmetros do sistema

Massa	$m = 0,2 \text{ kg}$
Sensor de luz	$k_1 = 1 \frac{V}{m}$
Raio	$r = 0,15 \text{ m}$
Atrito do motor	$b = 0,25 \frac{Nms}{rad}$
Resistência elétrica do motor	$R = 2 \Omega$
Constante de torque do motor	$K_m = 2 \frac{Nm}{A}$
Inércia total	$J = 0,01 \text{ kg} \cdot m^2$
Ganho do controlador	$k_2 = 0,1 \text{ s}$
Rigidez da correia	$k = 20 \frac{N}{m}$

Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 132).

Agora você deve inserir esses modelos no Matlab para que sua equipe possa utilizá-los em testes simulados para prototipagem e ajustes do modelo.

Quais são os procedimentos necessários para completar essa tarefa? Como o software exibirá cada representação do modelo?

Vamos descobrir!

## Não pode faltar

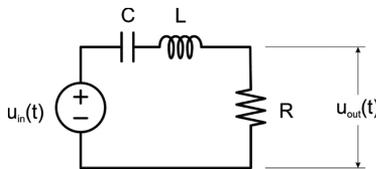
No Matlab é possível lidar com as representações de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (SLIT), que você conheceu ao longo desta unidade. Comecemos pela representação em espaço de estados.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são, respectivamente, as matrizes de estado, entrada, saída e transição direta. No Matlab, podemos criar um modelo em espaço de estados utilizando o comando `ss` (*state space*). Considere o circuito RLC da Figura 2.13.

Figura 2.13 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo  $u_m(t)$  a entrada e  $u_{out}(t)$  a saída, sabemos que o modelo do sistema dinâmico é dado pela Equação 2.58.

$$u_m(t) = u_{out}(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t u_{out}(t) dt + \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{out}(t)}{dt} \quad (2.58)$$

Para a representação em espaço de estados, escolhemos as variáveis de estado, lembrando que a equação diferencial em espaço de estados é sempre de primeira ordem: façamos  $x_1 = \int_0^t u_{out}(t) dt$ ,  $x_2 = u_{out}(t)$ , e  $u = u_m(t)$ . Equacionando as derivadas de ambos os estados, temos as Equações 2.59 e 2.60.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.59)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R}{L}x_2 + \frac{R}{LC}x_1 - \frac{R}{L}u \quad (2.60)$$

Então temos as equações em espaço de estados (2.61 e 2.62).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix} u \quad (2.61)$$

$$\mathbf{y} = [0 \ 1] \mathbf{x} + [0 \ 0] \cdot \mathbf{u} \quad (2.62)$$

Em que  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t u_{out}(t) \\ u_{out}(t) \end{bmatrix}$  e  $u = u_{in}(t)$ .

Analisando o espaço de estados proposto nas Equações 2.61 e 2.62, tomamos conhecimento das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , que são justamente os argumentos que devem ser passados ao comando `ss` do Matlab. Mas o comando `ss` (assim como os comandos que serão utilizados nesta seção) necessita que todas as matrizes contenham apenas valores numéricos. O Quadro 2.1 mostra quais valores foram utilizados para cada elemento do circuito e como é feita a inserção do modelo em espaço de estados no Matlab – lembrando que o `%` é utilizado para fazer comentários no Matlab.

Quadro 2.1 | Inserindo modelo em espaço de estados no Matlab

1	<code>&gt;&gt; R = 2200; %ohm</code>
2	<code>&gt;&gt; L = 3.8e-3; %henry</code>
3	<code>&gt;&gt; C = 2.2e-6; %farad</code>
4	<code>&gt;&gt; a = [0, 1; -1/(L*C), -R/L];</code>
5	<code>&gt;&gt; b = [0; R/L];</code>
6	<code>&gt;&gt; c = [0, 1];</code>
7	<code>&gt;&gt; d = 0;</code>
8	<code>&gt;&gt; RLCSs = ss(a, b, c, d, 'InputName', 'u_in', 'outputname', 'u_out')</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

No Matlab, o resultado da linha 8 (Quadro 2.1) nos apresenta todas as matrizes do sistema em espaço de estados, inserida com o comando `ss`. A última linha diz “modelo em espaço de estados no tempo contínuo”, pois com o mesmo comando é possível fazer um modelo com tempo discretizado, mas esse assunto foge de nosso escopo. Na mesma linha, veja que podemos

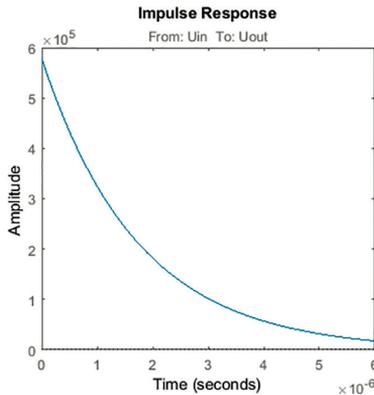
inserir os nomes da entrada ( $U_{in}$ ) e da saída ( $U_{out}$ ) do sistema, definindo `InputName` e `OutputName`, respectivamente, ao final do comando `ss`, mas eles não são obrigatórios. A documentação de ajuda do Matlab, obtida com o comando `help`, mostra outras propriedades que podem ser definidas ao criar um modelo em espaço de estados. O modelo em espaço de estados é uma variável do tipo `ss` no Matlab. Com esse tipo de variável, podemos utilizar algumas funções interessantes. Temos, por exemplo, as funções `step` e `impulse`, que dão uma entrada degrau e impulso unitário no modelo, respectivamente. Essas funções têm como argumentos o modelo do sistema (obrigatoriamente) e o vetor de tempo (facultativo), e como saída podemos obter os vetores de saída do modelo e de tempo, mas, se utilizarmos as saídas, os comandos não traçarão os gráficos automaticamente. O Quadro 2.2 mostra como utilizar o comando para o modelo `RLCss` que acabamos de obter, e o gráfico gerado na linha 10 é exibido na Figura 2.14.

Quadro 2.2 | Uso dos comandos `step` e `impulse`

9	<code>&gt;&gt; [ystep, tstep] = step(RLCss);</code>
10	<code>&gt;&gt; impulse(RLCss, 0:1e-7:6e-6); %figura 2.13</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 2.14 | Resposta ao impulso unitário do sistema `RLCss`



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora vamos inserir o mesmo modelo de circuito RLC no Matlab na forma de função de transferência. Já sabemos qual é a função transferência do circuito (Equação 2.63).

$$\frac{U_{out}}{U_{in}}(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.63)$$

Na última seção da primeira unidade deste material você aprendeu a lidar com variáveis e funções simbólicas no Matlab para aplicar as transformadas direta e inversa de Laplace e, conseqüentemente, obter funções de transferência de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (SLIT).

Agora utilizaremos outro método de representar e manipular funções de transferência no Matlab: o comando `tf` (*transfer function*). Com esse comando, há duas maneiras de inserir o modelo de um sistema. O primeiro é mostrado no Quadro 2.4. O comando `tf` tem como argumentos, respectivamente, o numerador e o denominador da função de transferência, e devemos tratá-los como polinômios e inserir apenas os coeficientes de maneira decrescente com a potência de  $s$  – por exemplo: na Equação 2.63, o numerador é  $\frac{R}{L}s$ , então ele entrará como argumento no comando `tf` da seguinte maneira: `[R/L, 0]`, pois o coeficiente  $\frac{R}{L}$  multiplica  $s^1$  e o coeficiente zero multiplica  $s^0$ . Da mesma maneira, o denominador  $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$  será representado como `[1, R/L, 1/(L*C)]`.

Quadro 2.3 | 1º modo de inserir função de transferência no Matlab

```

9  >> R = 2200; %ohm
10 >> L = 3.8e-3; %henry
11 >> C = 2.2e-6; %farad
12 >> RLctf1 = tf([R/L, 0],[1, R/L, 1/(L*C)])

RLctf1 =

          5.789e05 s
-----
s^2 + 5.789e05 s + 1.196e08

Continuous-time transfer function.

```

Fonte: elaborada pelo autor.

Outra maneira de obter exatamente o mesmo resultado é mostrado no Quadro 2.4.

```

13 >> R = 2200; %ohm
14 >> L = 3.8e-3; %henry
15 >> C = 2.2e-6; %farad
16 >> s = tf('s');
17 >> RLctf2 = (R*s/L) / (s^2+R*s/L+1/(L*C))

RLctf2 =

           8.36 s
-----
1.444e-05 s^2 + 8.36 s + 1727

Continuous-time transfer function.
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Veja que o segundo método é similar ao que você realizava na última seção da unidade anterior, mas o resultado é distinto, pois função de transferência é uma variável do tipo `tf`, que é diferente de uma variável ou função do tipo simbólica. Assim como uma variável do tipo `ss`, variáveis do tipo `tf` também podem ser utilizadas nos comandos `step` e `impz`.



### Refleta

Mesmo entrando duas vezes com o mesmo modelo no Matlab, obtivemos resultados distintos: compare o resultado do Quadro 2.3 com o do Quadro 2.2. Isso significa que fizemos algo de errado? Ou é realmente possível que duas funções de transferência aparentemente distintas nos retornem o mesmo resultado?

Podemos ainda, por meio do comando `ss2tf`, converter o quarteto de matrizes do espaço de estados para numerador e denominador de uma função transferência e fazer o oposto com o comando `tf2ss`. O Quadro 2.5 traz um exemplo do uso da função `tf2ss`, utilizando a função de transferência da Equação 2.63.

Quadro 2.5 | Convertendo tf para ss

```
>> R = 2200; %ohm
>> L = 3.8e-3; %henry
>> C = 2.2e-6; %farad
>> num = [R/L, 0];
>> den = [1, R/L, 1/(L*C)];
>> [a, b, c, d] = tf2ss(num,den);
```

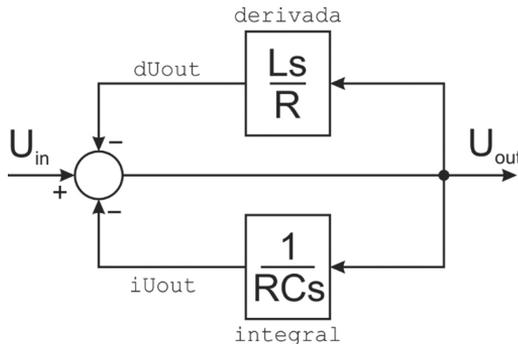
Fonte: elaborado pelo autor.

Também podemos inserir modelos por meio da representação em diagrama de blocos no Matlab. A Equação 2.58, do circuito RLC, após a transformada de Laplace e o isolamento o termo  $U_{out}(s)$ , resulta na Equação 2.64:

$$U_{out}(s) = U_{in}(s) - \frac{1}{RCs} U_{out}(s) - \frac{Ls}{R} U_{out}(s) \quad (2.64)$$

E seu diagrama de blocos é mostrado na Figura 2.15.

Figura 2.15 | Diagrama de blocos circuito RLC



Fonte: elaborado pelo autor.

Existem várias maneiras de se obter o mesmo diagrama de blocos no Matlab. Para o método que vamos utilizar, é necessário que ramos e blocos sejam nomeados no diagrama de blocos, como pode ser visto na Figura 2.14. Veja o Quadro 2.6, que mostra como inserir o diagrama de blocos da Figura 2.14.

```

>> R = 2200; %ohm
>> L = 3.8e-3; %henry
>> C = 2.2e-6; %farad
>> s = tf('s');
>> derivada = L*s/R; % bloco derivada
>> derivada.inputname = 'Uout'; % entrada do bloco
derivada
>> derivada.outputname = 'dUout'; % saída do bloco
derivada
>> integral = 1/(R*C*s); % bloco integral
>> integral.inputname = 'Uout'; % entrada do bloco
integral
>> integral.outputname = 'iUout'; % saída do bloco
integral
>> soma = sumblk('Uout = Uin - dUout - iUout');
>> RLCblock = connect(integral,derivada,soma,
'Uin','Uout')
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Perceba que utilizamos o comando `tf` para criarmos a variável `s`, que é útil para criarmos os blocos. Cada bloco pode ser criado tanto da maneira apresentada, como inserindo numerador e denominador no comando `tf` (como no Quadro 2.3) ou ainda com o comando `ss`. Após criar cada bloco, devemos dar nomes para sua entrada (`inputname`) e para sua saída (`outputname`), que são propriedades das variáveis do tipo `tf` (e `ss` também). O bloco de soma é dado, de maneira literal (por meio de *string*), pelo equacionamento que ele representa, sempre utilizando os mesmos nomes de entradas e saídas dos blocos do diagrama. Por fim, utilizamos o comando `connect` para conectar os blocos criados (primeiros argumentos) e indicar quais são as entradas e saídas (últimos argumentos).



### Assimile

É importante que você padronize os nomes que forem dados para os ramos do diagrama de blocos antes de serem inseridos no Matlab. É por meio desses nomes que o programa faz as conexões e monta o modelo do sistema.

O resultado do comando `connect` é uma variável do tipo `ss`, ou seja, o Matlab resolve as conexões do diagrama de blocos criado e retorna um sistema em espaço de estados. Portanto também podemos submeter esse resultado aos comandos `step` e `impulse`.



### Pesquise mais

Existem várias outras funções para criar e manipular ligações entre blocos no Matlab, como `series`, `append`, `feedback`, etc. Navegue por elas para entender melhor seu funcionamento e tentar criar diagramas usando outros métodos. Para saber mais sobre essas funções, digite 'help nome\_da\_função' no Command Window do Matlab.

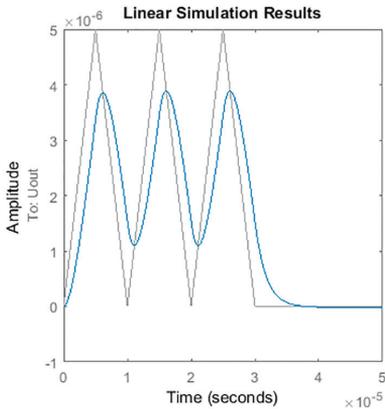
Muitas vezes é necessário impor outras entradas nos sistemas para avaliar suas respostas. Para isso, utilizamos o comando `lsim` (*linear simulation*). Seus argumentos, em ordem, são: o modelo (em `tf` ou `ss`), o vetor de valores da entrada e o vetor de tempo, sendo que os dois últimos argumentos devem ter as mesmas dimensões e, assim como `step` e `impulse`, ao guardar os valores de retorno do comando em alguma variável, o gráfico não é exibido. O Quadro 2.7 mostra como submeter o sistema `RLCblock` a uma entrada do tipo dente de serra (Equação 2.65). A resposta (linha mais escura com menor pico) e a saída (linha mais clara com maior pico) são mostradas na Figura 2.16.

$$\begin{aligned} u_m(t) = & (\mu(t) - \mu(t - 0,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 0,5 \cdot 10^{-5}) \\ & - (\mu(t - 0,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 1,5 \cdot 10^{-5}) \\ & + (\mu(t - 1 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 1,5 \cdot 10^{-5}) \\ & - (\mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 2,5 \cdot 10^{-5}) \\ & + (\mu(t - 2 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 2,5 \cdot 10^{-5}) \\ & - (\mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 3,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 3,5 \cdot 10^{-5}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

```
>> tempo = 0:1e-7:.5e-4;  
  
>> uin = (heaviside(tempo)-heaviside(tempo-.5e-  
-5)).*(tempo-...  
  
(heaviside(tempo-.5e-5)-heaviside(tempo-1e-  
-5)).*(tempo-1e-5)+...  
  
(heaviside(tempo-1e-5)-heaviside(tempo-1.5e-  
-5)).*(tempo-1e-5)-...  
  
(heaviside(tempo-1.5e-5)-heaviside(tempo-2e-  
-5)).*(tempo-2e-5)+...  
  
(heaviside(tempo-2e-5)-heaviside(tempo-2.5e-  
-5)).*(tempo-2e-5)-...  
  
(heaviside(tempo-2.5e-5)-heaviside(tempo-3e-  
-5)).*(tempo-3e-5);  
  
>> lsim(RLCblock,uin,tempo);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 2.16 | Resposta do modelo RLCblock à entrada dente de serra



Fonte: elaborada pelo autor.



### Exemplificando

Podemos submeter o sistema dinâmico a qualquer entrada com o comando `lsim`. Se, por exemplo, for necessário obter a resposta do sistema à entrada rampa (Equação 2.67), podemos fazer como mostra o Quadro 2.8.

$$u_{in}(t) = \frac{1}{2}t \tag{2.67}$$

Quadro 2.8 | Comando `lsim` para aplicação de uma entrada qualquer

```
>> tempo = 0:1e-7:.5e-4;
>> uin=.5*tempo;
>> lsim(RLCblock,uin,tempo);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Por último, veremos as funções `stepinfo` e `lsiminfo`. Esses comandos executam a análise da resposta de um sistema dinâmico. O primeiro retorna métricas já conhecidas do sistema quando submetido à entrada degrau unitário, como tempo de subida (*rise time*), tempo de acomodação (*settling time*, 2%, por padrão) e sobressinal (*overshoot*), além de outras métricas, como subsinal (*undershoot*), tempo de pico (*peak time*), etc. O segundo comando tem como argumentos o vetor de resposta do sistema, o vetor de tempo e o valor final de resposta do sistema, nessa ordem. O comando retorna o tempo de acomodação (2%, por padrão), o valor máximo e mínimo da resposta e o tempo no qual eles ocorrem. O Quadro 2.9 mostra como utilizar os comandos.

Quadro 2.9 | Utilização das funções `stepinfo` e `lsiminfo`

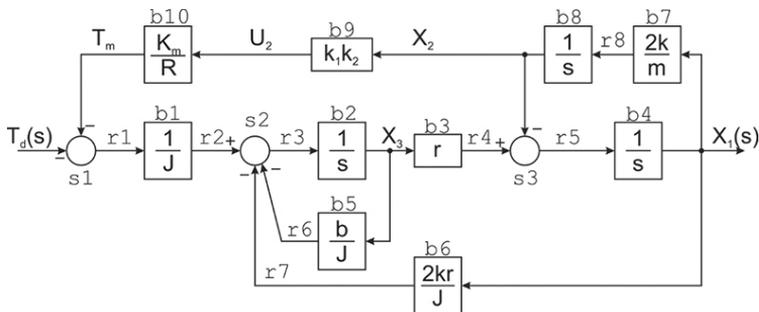
```
>> stepinfo(RLCtfl)
ans =
    RiseTime: 0
    SettlingTime: 0.018942918148707
    SettlingMin: 0.001410620524980
    SettlingMax: 0.997516553192927
    Overshoot: Inf
    Undershoot: 0
    Peak: 0.997516553192927
    PeakTime: 1.336863988474220e-05
```

Fonte: elaborada pelo autor.

## Sem medo de errar

Agora você vai inserir o modelo do sistema de controle do cabeçote de impressão no Matlab usando as representações em função de transferência, espaço de estados e diagrama de blocos, para que toda sua equipe possa utilizar, da maneira que for necessária, o sistema que você já modelou. A Figura 2.17 mostra o diagrama de blocos com seus ramos nomeados.

Figura 2.17 | Diagrama de blocos para inserção no Matlab



Fonte: elaborado pelo autor.

Começando pela representação em espaço de estados, o Quadro 2.10 mostra como inserir o sistema.

Quadro 2.10 | Modelo da impressora em espaço de estados no Matlab

```
>> m = 0.2; %kg
>> k1 = 1; %V/m
>> r = 0.15; %m
>> b = 0.25; %N*m*s/rad
>> R = 2; %ohm
>> Km = 2; %N*m/A
>> J = 0.01; %kg*m^2
>> k2 = 0.1; %s
>> k = 20; %N/m
>> A = [0, -1, r; 2*k/m, 0, 0; -2*k*r/J, -Km*k1*k2/(J*R), -b/J];
>> B = [0; 0; -1/J];
>> C = [1 0 0];
>> D = 0;
>> impressora_ss = ss(A, B, C, D);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 2.11 mostra como podemos obter a função de transferência.

```
>> impressora_tf = tf([-r/J 0],...
    [1b/J (2*k/m+2*k*r^2/J) (2*k*b/(J*m)+2*k*Km*k1*k2*r/
    (J*m*R))]);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 2.12 mostra como montar o diagrama de blocos de acordo com a Figura 2.16.

Quadro 2.12 | Diagrama de blocos

```
>> s1 = sumblk('r1=-Td-Tm');
>> b1 = tf(1,J,'inputname','r1','outputname','r2');
>> s2 = sumblk('r3=r2-r7-r6');
>> b2 = tf(1,[1 0],'inputname','r3','outputname','X3');
>> b3 = tf(r,1,'inputname','X3','outputname','r4');
>> s3 = sumblk('r5=r4-X2');
>> b4 = tf(1,[1 0],'inputname','r5','outputname','X1');
>> b5 = tf(b,J,'inputname','X3','outputname','r6');
>> b6 = tf(2*k*r,J,'inputname','X1','outputname','r7');
>> b7 = tf(2*k,m,'inputname','X1','outputname','r8');
>> b8 = tf(1,[1 0],'inputname','r8','outputname','X2');
>> b9 = tf(k1*k2,1,'inputname','X2','outputname','U2');
>> b10 = tf(Km,R,'inputname','U2','outputname','Tm');
>> impressora_block = connect(s1,s2,s3,b1,b2,b3,...
    b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,'Td','X1')
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Para saber se os modelos realmente são equivalentes, podemos utilizar a função `stepinfo`: se estiver tudo certo, devemos ver os mesmos resultados para cada modelo. O Quadro 2.13 aplica o comando `stepinfo` para cada modelo.

Quadro 2.13 | Aplicação da função stepinfo

```
>> stepinfo(impressora_ss)
ans =
    RiseTime: 0
    SettlingTime: 3.253813204031745
    SettlingMin: -0.019063017485192
    SettlingMax: 0.024496267820023
    Overshoot: 8.274103696966679e+17
    Undershoot: 1.097572121370524e+18
    Peak: 0.032494662408860
    PeakTime: 0.134730519886123

>> stepinfo(impressora_tf)
ans =
    RiseTime: 0
    SettlingTime: 3.253813204031742
    SettlingMin: -0.032494662408859
    SettlingMax: 0.024496267820023
    Overshoot: Inf
    Undershoot: Inf
    Peak: 0.032494662408859
    PeakTime: 0.134730519886123

>> stepinfo(impressora_block)
ans =
    RiseTime: 0
    SettlingTime: 3.253813204031745
    SettlingMin: -0.032494662408860
    SettlingMax: 0.024496267820023
    Overshoot: Inf
    Undershoot: Inf
    Peak: 0.032494662408860
    PeakTime: 0.134730519886123
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos ver que apenas para o overshoot e para o undershoot os valores divergiram. Mas vejam que os valores dessas métricas apresentam ordem de magnitude extremamente alta ( $10^{17}$  e  $10^{18}$ ). Na prática, esses valores são impossíveis de acontecer, ou seja, podem ser interpretados como infinito. Logo, todos os modelos estão igualmente corretos.

## Faça valer a pena

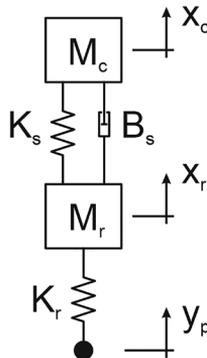
**1.** O Matlab permite que sejam utilizadas diferentes formas de representação de modelos de SLIT. Isso é vantajoso para o projetista, pois dá a ele liberdade para desenvolver o projeto da maneira que ele julgar mais conveniente.

Quais são os tipos de modelo de sistemas dinâmicos para os quais o Matlab permite representação?

- O Matlab permite que sejam representados apenas modelos perfeitos em relação à realidade.
- O Matlab permite apenas a representação em espaço de estados, que é dado por matrizes, pois o nome do software é MATrix LABoratory.
- O Matlab permite a representação apenas de modelos em espaço de estados e função de transferência.
- O Matlab permite a representação de modelos em espaço de estados, diagrama de blocos e função de transferência, dado que os dois primeiros compartilham do mesmo tipo de variável e o último tem um outro tipo de variável.
- O Matlab permite a representação de qualquer tipo de modelo de SLIT, pois tem um único tipo especial de variável que se adapta ao modelo.

**2.** A seguir temos a figura de um modelo de uma suspensão automotiva.

Figura 2.18 | Modelo de suspensão automotiva



Fonte: elaborado pelo autor.

Seu modelo em espaço de estados é dado a seguir.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_s & -B_s & K_s & B_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_s & B_s & -K_s - K_r & -B_s \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_r \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Em que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} \text{ e } u = y_p \quad B_s$$

Para a escolha dos elementos construtivos de um sistema de suspensão é necessário que o modelo seja inserido no Matlab para que ele seja submetido a testes simulados e sua resposta seja analisada de acordo com critérios predeterminados. Suponha que você já tenha no programa os valores corretos de todos os parâmetros do sistema guardado nas seguintes variáveis:

	Variável no Matlab
$M_r$ : massa da roda	Mr
$K_r$ : rigidez do pneu	Kr
$y_p(t)$ : perfil da pista (entrada)	yp
$x_r(t)$ : posição vertical da roda (saída)	Xr
$B_s$ : amortecimento da suspensão	Bs
$x_c(t)$ : posição vertical do carro (saída)	xc
$M_c$ : massa sustentada pela suspensão	Mc
$K_s$ : rigidez da suspensão	Ks

Como você fará para inserir o modelo da suspensão no Matlab?

a) `>> a = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0, 0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];`

```

>> b = [0; 0; 0; Kr];
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
b) >> a = [0; 0; 0; Kr];
>> b = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; Ks, Bs, -Ks-Kr,
-Bs];
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
c) >> a = [0; 0; 0; Kr];
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> c = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; Ks, Bs, -Ks-Kr,
-Bs];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
d) >> sistema = ss(a, b, c, d);
e) São necessários dados numéricos para gerar o modelo em espaços de estados no
Matlab.

```

**3.** No Matlab é possível montar diagrama de blocos com a utilização de funções específicas (como connect, sumblk, tf, etc.) para esse fim.

Veja o código a seguir de diagrama de blocos em Matlab, supondo que as variáveis numéricas M, B e K já foram inseridas.

```

>> b1 = tf([B/K 0], 1, 'inputname', 'y', 'outputname', 'r1');
>> s1 = sumblk('r2 = y + r1');
>> b2 = tf(B/K, 1, 'inputname', 'r6', 'outputname', 'r4');
>> b3 = tf([M/K 0], 1, 'inputname', 'r6', 'outputname', 'r3');
>> b5 = tf([1 0], 1, 'inputname', 'x', 'outputname', 'r6');
>> s2 = sumblk('x = r4 + r3 + r2');
>> sistema = connect(b1, s1, b2, b3, b5, s2);

```

Assinale a alternativa correta.

- O bloco b1 é idêntico ao bloco b2.
- O bloco b2 tem sua saída conectada ao bloco b3.
- O bloco de soma s1 não é utilizado.
- O bloco b5 tem sua saída conectada aos blocos b2 e b4.
- A saída do sistema tem nome 'y'

## Referências

---

MATHWORKS. Matlab. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acesso em: 7 dez. 2018.

NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

# Unidade 3

---

## Estabilidade dos sistemas de controle

### Convite ao estudo

Até o momento, você aprendeu vários conceitos fundamentais que se situam tanto na teoria básica de controle quanto na de modelagem de sistemas dinâmicos.

Nesta terceira unidade, começaremos a aprender conteúdos que se situam menos em modelagem e muito mais na teoria de controle.

De posse de um sistema dinâmico e, talvez, seu controlador, em malha aberta ou malha fechada, como podemos dizer se o sistema é “bem comportado”, ou, em outras palavras, como podemos avaliar se o sistema é estável? Essa é uma questão muito importante, pois temos como objetivo conseguir projetar sistemas de controle que, ao receberem uma entrada (ou referência), sejam capazes de entregar uma saída adequada e, para isso, é necessário que o sistema se comporte de maneira estável.

Por estabilidade, entendemos que, dada uma entrada limitada qualquer, se a resposta temporal do sistema também for limitada, o sistema é estável (NISE, 2010). Já um sistema instável, além de não se comportar como o desejado, pode representar perigo, por exemplo, a operadores usuários do sistema.

Nesta unidade, veremos que a estabilidade do sistema pode ser definida de acordo com a localização dos polos e zeros no plano complexo e, além disso, conheceremos outros métodos de avaliar a sua estabilidade, como o método de Routh-Hurwitz, margens de ganho e de fase no diagrama de Bode. Alguns desses métodos, além de nos mostrarem se o sistema é estável ou não, traz-nos a informação de como podemos manipular o sistema a fim de torná-lo estável.

Sendo assim, para abordarmos os conteúdos desta unidade, proporemos um novo problema de engenharia: suponha que você trabalha no departamento de engenharia de uma agência espacial e esteja envolvido na preparação do lançamento vertical de um veículo espacial (Figura 3.1). Sua tarefa ao longo desta unidade será avaliar o modelo em relação à estabilidade de sua resposta.

Figura 3.1 | Lançamento vertical de um foguete espacial



Fonte: <https://www.nasa.gov/centers/kennedy/about/history/50thgallery/1969-07-16-5.html>. Acesso em: 22 fev. 2019.

**Bons estudos!**

## Estabilidade de sistemas realimentados

### Diálogo aberto

Você já tentou realizar o desafio de equilibrar uma vassoura (ou um guarda-chuva) na posição vertical? Você já parou para pensar por que isso é tão difícil? Essa tarefa é desafiadora, pois, para o ponto de equilíbrio desejado (que consiste em fazer com que o objeto permaneça na posição vertical), o sistema mecânico da vassoura, também conhecido como pêndulo invertido, se trata de um sistema instável.

Sistemas instáveis, por definição, são aqueles cuja saída apresentam valores que divergem, de maneira ilimitada, de seu estado inicial.

Como estudante de controle, é de suma importância que você saiba avaliar se o seu sistema é estável ou instável a fim de saber como controlá-lo e, após desenvolver o sistema de controle, saber avaliar se o sistema como um todo é ou não estável e se atende aos requisitos desejados.

Além da estabilidade de sistemas dinâmicos, veremos também como podem ser analisados sistemas de ordem superior a dois, já que na segunda unidade deste material você já estudou o comportamento de sistemas de primeira e segunda ordem.

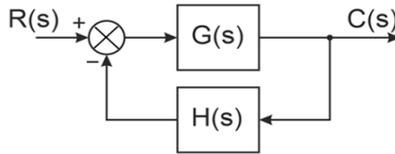
Nesta unidade, você trabalha na equipe de engenharia de uma agência espacial e tem como tarefa estudar o sistema de lançamento vertical de um foguete espacial. Sendo a dinâmica do lançamento do veículo modelada como um pêndulo invertido, como você poderia avaliar a estabilidade do sistema?

Vamos descobrir!

Bons estudos!

Para iniciar o nosso estudo sobre estabilidade, considere o sistema de controle representado no diagrama de blocos da Figura 3.2.

Figura 3.2 | Sistema de controle



Fonte: adaptado de Ogata (2010, p. 163).

Já sabemos que sua função de transferência é dada pela Equação 3.1.

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.1)$$

Se a multiplicação  $G(s)H(s)$  resultar em um polinômio de primeira ou segunda ordem, já sabemos analisar seu comportamento. Agora, focaremos o caso em que a multiplicação  $G(s)H(s)$  resulta em um polinômio de ordem maior do que dois, ou seja, focaremos os sistemas de ordem superior a dois.

Da Seção 2.2, sabemos que toda função de transferência é dada por uma divisão de polinômios em  $s$ . Então, digamos que os blocos  $G(s)$  e  $H(s)$  são dados de acordo com as Equações 3.2 e 3.3, sendo que  $p(s)$ ,  $q(s)$ ,  $n(s)$  e  $d(s)$  são polinômios em  $s$ .

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (3.2)$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (3.3)$$

Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.1, teremos a Equação 3.4.

$$\begin{aligned} \frac{C}{R}(s) &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (m \leq n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (3.5)$$

Podemos reescrever a Equação 3.4 por meio da forma fatorada do numerador e do denominador de  $\frac{C}{R}(s)$ , como mostra a Equação 3.5. Isso pode ser feito utilizando o MATLAB para encontrar as raízes dos polinômios, que são os polos ( $s = p_i$ ) do sistema, por meio do comando `roots`.



### Exemplificando

Para entendermos como utilizar o comando `roots`, encontraremos as raízes do polinômio da Equação 3.6.

$$p(s) = s^5 - 10s^4 + 40s^3 - 70s^2 + 39s \quad (3.6)$$

Assim como no comando `tf`, precisamos inserir os coeficientes do polinômio no comando `roots`, sempre do maior expoente de  $s$ , no caso, 4, até o expoente zero, como mostra o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 | Uso do comando `roots`

1	<code>&gt;&gt; p = [1 -10 40 -70 39 0];</code>
2	<code>&gt;&gt; roots(p);</code>
	<code>ans =</code>
	<code>0.0000 + 0.0000i</code>
	<code>3.0000 + 2.0000i</code>
	<code>3.0000 - 2.0000i</code>
	<code>3.0000 + 0.0000i</code>
	<code>1.0000 + 0.0000i</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Com as raízes obtidas, podemos reescrever a Equação 3.6 da forma como mostram as Equações 3.7 e 3.8.

$$p(s) = (s-0)(s-3+2j)(s-3-2j)(s-3)(s-1) \quad (3.7)$$

$$p(s) = (s-0)(s^2 - 6s + 13)(s-3)(s-1) \quad (3.8)$$

Para estudarmos sistemas de ordem superior, dividiremos os sistemas em dois tipos: aqueles que têm apenas polos reais e aqueles que têm polos complexos.

Começaremos com os sistemas que têm apenas polos reais. Ao submetermos o sistema da Figura 3.2 a uma entrada degrau  $\left\{R(s)=\frac{1}{s}\right\}$ , obtemos a resposta  $C(s)$ , e, aplicando frações parciais, é possível escrevermos  $C(s)$  no formato da Equação 3.9, onde  $a_i$  é denominado como resíduo associado ao polo  $p_i$ .

$$C(s) = R(s) \cdot \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-p_i} \quad (3.9)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace da Equação 3.9, temos a Equação 3.10.

$$c(t) = \mathcal{L}[C(s)] = \mathcal{L}\left[\frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-p_i}\right] = a \cdot \mu(t) + a_i \cdot \sum_{i=1}^n e^{p_i t} \quad (3.10)$$

Perceba que os polos  $p_i$  se tornam os expoentes das exponenciais, ou seja, se houver ao menos um polo positivo, este fará com que a resposta temporal tenda ao infinito (pois  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = \infty$ ). Quando isso ocorre, dizemos que o sistema é instável, então podemos concluir que: sistemas que tenham ao menos um polo real positivo são sistemas instáveis, e sistemas estáveis são aqueles que têm todos os seus polos negativos (com isso, sua resposta não tende ao infinito).

Agora, suporemos que, além de polos reais, o sistema tenha pares de polos complexos conjugados. Com essa suposição, ao aplicarmos frações parciais na Equação 3.5, obtemos a Equação 3.11 e, após a aplicação da transformada de Laplace, temos a Equação 3.12, onde  $a$ ,  $a_j$ ,  $b_k$  e  $c_k$  são números reais.

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2}, \quad (q+2r=n) \quad (3.11)$$

$$c(t) = a \cdot \mu(t) + \sum_{j=1}^q a_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos\left(t\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}\right) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \text{sen}\left(t\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}\right), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.12)$$

Vemos que, para um sistema de ordem superior, sua resposta nada mais é do que a soma das respostas dos sistemas de primeira e segunda ordem que o “compõem”. Para sistemas de segunda ordem, sabemos que seus polos são dados por  $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$  e, neste caso, é a parte real dos polos ( $-\zeta\omega_n$ ) que aparece no expoente das exponenciais da Equação 3.12,

logo, a parte real dos polos dos sistemas de segunda ordem, assim como para sistemas de primeira ordem, também precisa ser negativa para que o sistema não tenha uma resposta tendendo ao infinito, ou seja, para que o sistema não seja instável.

Portanto, de maneira geral, para um sistema ser estável, todos os seus polos devem ter a parte real negativa.



### Assimile

Para que um sistema dinâmico linear invariante no tempo seja estável, é necessário que todos os seus polos tenham a parte real negativa.

Para um sistema representado em equações de espaço de estados, seus polos podem ser obtidos por meio do cálculo dos autovalores da matriz de estado (matriz  $A$ ), logo, a estabilidade em representação de equações de espaço de estados pode ser aferida observando-se se a parte real dos autovalores da matriz de estado é negativa.



### Pesquise mais

O autovalor é uma propriedade matemática intrínseca de uma matriz. Essa propriedade tem significado físico em vários ramos da ciência, como engenharia civil, estudo de vibrações mecânicas na dinâmica, engenharia de controle, entre outros.

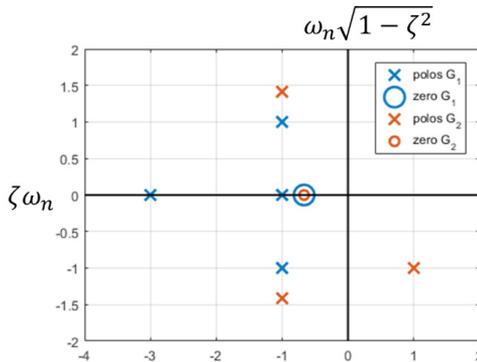
Sendo os polos de um sistema, assim como os zeros, números complexos, podemos utilizar o plano real-complexo para visualizar o posicionamento dos polos e dos zeros dos sistemas. Consideremos dois sistemas representados pelas funções de transferência das Equações 3.13 e 3.14.

$$G_1(s) = \frac{3s + 2}{(-s^2 - 4s - 3)(2s^2 + 4s + 4)} \quad (3.13)$$

$$G_2(s) = \frac{3s + 2}{(s^2 + 2s + 3)(2s^2 - 4s + 4)} \quad (3.14)$$

Podemos localizar seus polos e zeros no plano complexo como mostra a Figura 3.3. Nesse plano, o eixo das abscissas corresponde à parte real dos polos ( $\zeta_{\omega_n}$ ) e o eixo das ordenadas corresponde à parte imaginária dos polos.

Figura 3.3 | Polos no plano real-complexo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você pode ver, os polos das funções de transferência são representados graficamente pelo “×” e os zeros, pelo “○”. Dessa forma, é rápido entender se um sistema é estável ou não pela observação do plano complexo: se os polos estiverem no semiplano esquerdo, o sistema é estável; se o polos estiverem sobre o eixo vertical, o sistema é marginalmente estável; se os polos estiverem no semiplano direito, o sistema é instável.



### Refleta

Para encontrar os polos de sistemas, precisamos resolver equações polinomiais dos mais variados graus. Sabemos muito bem resolver equações polinomiais de primeira e segunda ordem, mas e de quarta ordem, por exemplo? Você saberia resolver?

Sem o auxílio de um software de matemática, ou de calculadoras avançadas, calcular os polos de um sistema de ordem elevada, tanto por meio das raízes do denominador da função de transferência quanto por meio dos autovalores da matriz de estado, pode ser uma tarefa difícil de ser realizada. Para esse caso, podemos aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

A fim de explicar o procedimento, vamos aplicá-lo às funções de transferência das Equações 3.13 e 3.14.

1. Escrever o polinômio do denominador de forma expandida, conforme a Equação (3.15)

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.15)$$

→ Das Equações 3.13 e 3.14, escrevemos as Equações 3.16 e 3.17.

$$-2s^4 - 12s^3 - 26s^2 - 28s - 12 = 0 \quad (3.16)$$

$$2s^4 + 0 \cdot s^3 + 2s^2 - 4s + 12 = 0 \quad (3.17)$$

2. Se houver algum coeficiente  $a_0, a_1, \dots, a_n$  negativo ou nulo, então o sistema é instável.

→ Embora na Equação 3.16 todas as parcelas sejam negativas, ao multiplicarmos ambos os lados da equação por  $-1$ , todas se tornam positivas, então não podemos dizer que o sistema é instável. Já na Equação 3.17, temos um coeficiente nulo (o que multiplica  $s^3$ ) e um coeficiente negativo (o que multiplica  $s$ ), logo, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema  $G_2(s)$  é instável. Logo, não precisamos continuar o procedimento com o sistema da Equação 3.14. Caso não houvesse o termo negativo nem o termo nulo, precisaríamos prosseguir para confirmar (ou negar) a estabilidade do sistema.

3. Organizar os coeficientes dos polinômios em linhas e colunas de uma matriz triangular da seguinte maneira:

$$\begin{array}{cccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array}$$

Sendo que os elementos  $b_1, b_2, b_3$  etc. são calculados como mostra o conjunto de equações 3.18.

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad \dots \quad (3.18)$$

De modo análogo, multiplicando em cruz os termos das linhas superiores, calculamos os elementos  $c, d, e$  etc.

$$\begin{array}{l} c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \quad \dots \\ d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \quad \dots \end{array}$$

De acordo com o critério de Routh-Hurwitz, a quantidade de vezes em que há mudança de sinal na primeira coluna da matriz é exatamente igual à quantidade de polos do sistema que têm parte real positiva, ou seja, se não houver troca de sinal entre quaisquer dois elementos adjacentes na primeira coluna da matriz, o sistema é estável, mas, caso haja, o sistema é instável.

→ Montando a matriz para a Equação 3.16, temos:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 2 & 26 & 12 \\ s^3 & 12 & 28 & 0 \\ s^2 & 21,333 & 12 & \\ s^1 & 21,25 & 0 & \\ s^0 & 12 & & \end{array}$$

Não há mudança de sinal entre nenhum par de elementos adjacentes na primeira coluna, logo, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema não tem nenhum polo com parte real positiva, portanto, trata-se de um sistema estável.



### Exemplificando

Considere o polinômio característico da Equação 3.19. Usaremos o método de Routh-Hurwitz para avaliar sua estabilidade.

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s^2 + 24 \quad (3.19)$$

Montando a matriz, temos:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

Veja que ocorrem duas trocas de sinais: de 1 para -22 e de -22 para 24. Segundo o método de Routh-Hurwitz, esse fato indica que há dois polos cujas partes reais são positivas, ou seja, estão no semiplano direito, logo, o sistema é instável.

Na aplicação do critério de Routh-Hurwitz é possível que surjam casos aos quais sejam aplicadas algumas regras adicionais para a realização do procedimento.



### Pesquise mais

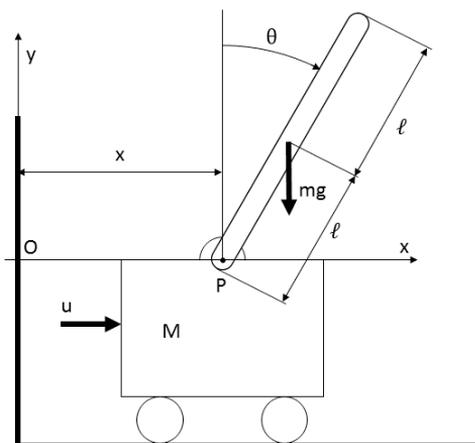
É possível que, durante os cálculos, algum elemento da primeira coluna seja nulo, logo, não é possível que ele se torne o divisor do cálculo dos elementos subsequentes. Para casos como esses e outros ainda, leia a Seção 5.6 do livro *Engenharia de controle moderno* (OGATA, 2010), indicado a seguir:

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

### Sem medo de errar

Como membro da equipe de engenharia, na tarefa de analisar a dinâmica do lançamento vertical de um foguete, você deve primeiro obter o modelo do sistema. A Figura 3.4 mostra, de maneira simplificada, como o modelo pode ser interpretado.

Figura 3.4 | Interpretação da dinâmica do lançamento vertical de um foguete



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 61).

Onde  $M$  é a massa da estrutura de lançamento,  $m$  é a massa do foguete,  $g$  é o valor da aceleração da gravidade local,  $\ell$  é a metade do comprimento total do foguete,  $\theta$  é o ângulo que o foguete forma com a vertical,  $u$  é a força exercida na massa  $M$ ,  $x$  é a posição,  $O$  é a origem do sistema de coordenadas  $(x, y)$  e  $P$  é o ponto no qual o foguete toca o solo.

De acordo com Ogata (2010, p. 61-62), temos as Equações 3.20 e 3.21

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u \quad (3.20)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta \quad (3.21)$$

Isolando  $\ddot{x}$  na Equação 3.21 e substituindo na 3.20, temos a Equação 3.22; aplicando a transformada de Laplace nesta, temos a função de transferência na Equação 3.23.

$$\ddot{\theta} \left( \ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M + m} \right) + \theta(-mg\ell) = u \left( -\frac{m\ell}{M + m} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M + m}}{\left( \ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M + m} \right) s^2 - mg\ell} \quad (3.23)$$

Da Equação 3.23, vemos que sistema é de segunda ordem com amortecimento nulo pela ausência do termo com  $s^1$  (lembrando que o denominador de um sistema de segunda ordem pode ser escrito da seguinte forma:  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega^2$ ). Logo, os polos têm parte real nula e o coeficiente de  $s^0$  é negativo ( $-mg\ell$ ). Então, de acordo com o critério de Routh-Hurwitz, o sistema é definitivamente instável.

Outra maneira de nos certificarmos de sua instabilidade é observando os polos do sistema, que são mostrados na Equação 3.24.

$$s = \pm \sqrt{\frac{mg\ell}{\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M + m}}} \quad (3.24)$$

Analisando os polos, para sabermos como eles estão localizados no plano complexo, precisamos analisar o denominador de dentro da raiz da Equação 3.24: se  $\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M + m} > 0$ , então teremos polos reais e, conseqüentemente, um deles será instável. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por  $M + m$ , temos que  $\ell(M + m) + Mm\ell^2 + \cancel{m^2\ell^2} - \cancel{m^2\ell^2} > 0$ , o que é verdade, pois todas as propriedades do sistema são parâmetros reais e positivos.

Portanto, novamente, provamos que o sistema é instável, com um polo cuja parte real é positiva (está no semiplano direito) e um polo com parte real negativa (está no semiplano esquerdo).

## Avançando na prática

# Estabilidade de um sistema de posicionamento

### Descrição da situação-problema

Um sistema de posicionamento de lasers ópticos se trata de uma massa suspensa, que pode ser representada como um modelo de segunda ordem (Equação 3.25).

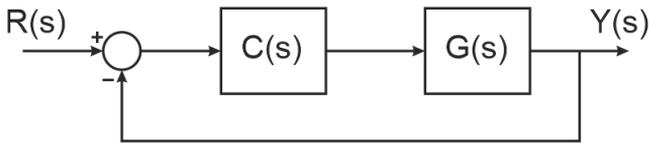
$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (3.25)$$

Esse sistema deve ser controlado de maneira que, caso haja algum impacto em sua base, o posicionamento e direcionamento do laser não deve ser afetado. Esse controle é realizado por meio de um controle proporcional-integrativo-derivativo (PID) (Equação 3.26).

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3.26)$$

O sistema e o controlador interagem de acordo com o diagrama de blocos da Figura 3.5.

Figura 3.5 | Diagrama de blocos do sistema de controle de lasers ópticos



Fonte: elaborada pelo autor.

O Quadro 3.2 apresenta os parâmetros de projeto que foram predefinidos para serem utilizados na construção do sistema real, de acordo com o diagrama de blocos em malha fechada da Figura 3.5.

	Parâmetro [variável]	Valor [unidade]
Sistema $G(s)$	Massa suspensa [M]	0,25 [kg]
	Rigidez [K]	1 [N/m]
	Amortecimento [B]	0,5 [Ns/m]
Controlador $C(s)$	Ganho proporcional [kp]	100 [N/m <sup>2</sup> ]
	Ganho integral [ki]	1000 [N/m <sup>2</sup> s]
	Ganho derivativo [kd]	15 [Ns/m <sup>2</sup> ]

Fonte: elaborado pelo autor.

Seu papel, como responsável técnico, é analisar a estabilidade do sistema para validar, ou não, as decisões tomadas acerca do sistema projetado. Como você pode proceder?

### Resolução da situação-problema

Para executar a tarefa de analisar a estabilidade, devemos aplicar os conhecimentos apresentados durante esta seção. Uma maneira relativamente simples e rápida de descobrir se o sistema de posicionamento de lasers ópticos é estável ou não é por meio da aplicação do método de Routh-Hurwitz.

Da Figura 3.3 e das Equações 3.25 e 3.26, podemos escrever a função de transferência do sistema (Equação 3.27).

$$\begin{aligned} \frac{Y}{R}(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}}{1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}} \Rightarrow \\ \frac{Y}{R}(s) &= \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{Ms^3 + Bs^2 + Ks + k_p s + k_i + k_d s^2} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{Ms^3 + (B + k_d)s^2 + (K + k_p)s + k_i} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo valores, temos a Equação 3.28.

$$\frac{Y}{R}(s) = \frac{15s^2 + 100s + 1000}{0,25s^3 + 15,5s^2 + 101s + 1000} \tag{3.28}$$

No denominador da Equação 3.28 não há nenhum coeficiente negativo ou nulo, então não é possível afirmar se o sistema é estável ou instável. Devemos proceder ao método e montar a matriz.

$s^3$	$\frac{1}{4}$	101
$s^2$	$\frac{31}{2}$	1000
$s^1$	$\frac{2631}{31}$	0
$s^0$	1000	

Observando a primeira coluna, vemos que não houve nenhuma troca de sinal entre dois elementos adjacentes, logo, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema é estável.

### Faça valer a pena

**1.** Com a análise dos polos de um sistema dinâmico, além de ser possível prever o seu comportamento de acordo com uma entrada, podemos indicar se o sistema é estável ou não.

Sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, analise as afirmações a seguir:

- I. Um sistema dinâmico só é estável se for possível separá-lo em sistemas de primeira e segunda ordem.
- II. Um sistema estável é mais seguro para ser operado do que um sistema instável.
- III. Apenas os coeficientes do denominador da função de transferência que multiplicam  $s^n$ , com  $n > 0$  são relevantes para a determinação da estabilidade ou instabilidade de um sistema dinâmico.
- IV. Sendo os polos de um sistema um conjunto de números complexos, se todos os polos tiverem parte real negativa, independentemente da entrada, o sistema será estável.

É correto o que se afirma em:

- a) Apenas I e II.
- b) Apenas II.
- c) Apenas IV.
- d) Apenas II e IV.
- e) Apenas II e III

**2.** Durante o projeto de um controlador para um sistema dinâmico, você pode lançar mão das ferramentas de análise de estabilidade para certificar-se de que o controlador se comportará de maneira estável, antes mesmo de iniciar seu desenvolvimento no sistema real.

Observe o exemplo a seguir de função de transferência de um controlador de terceira ordem:

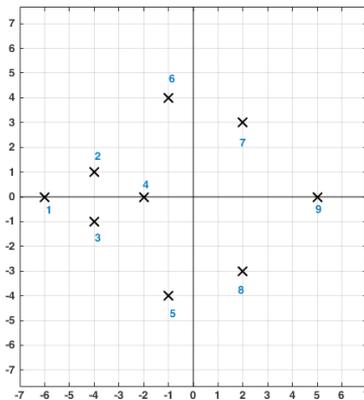
$$C(s) = \frac{1}{s^3 + 2s + 5}$$

Assinale a alternativa correta em relação ao controlador.

- a) O controlador é estável, pois todos os coeficientes do polinômio do denominador são positivos.
- b) O controlador é estável, pois ele pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem juntamente com um de segunda ordem, que são sempre estáveis.
- c) O controlador é instável, pois não está em malha fechada.
- d) O controlador é instável, pois o coeficiente que multiplica a segunda potência de  $s$  é nulo.
- e) Não é possível atestar se o controlador é estável ou não sem realizar um teste físico.

**3.** Uma maneira gráfica de observar os polos de um sistema dinâmico é por meio da utilização do plano complexo. Com ele, podemos ver quais polos do sistema são mais estáveis ou instáveis.

Um certo sistema dinâmico com controlador, em malha aberta, tem os polos indicados no plano complexo a seguir.



Fonte: elaborada pelo autor.

O que podemos afirmar sobre o sistema como um todo?

- a) É um sistema estável, pois não tem nenhum polo nulo.
- b) É um sistema instável, pois tem polos com parte imaginária negativa (3, 5, 8).
- c) É um sistema marginalmente estável, pois tem polos com parte imaginária nula (1, 4 e 9).

- d) É um sistema instável, pois tem polos com parte imaginária positiva (2, 6 e 7).
- e) É um sistema instável, pois tem polos com parte real positiva (7, 8 e 9).

## Diagrama de Bode e lugar das raízes

### Diálogo aberto

Na seção anterior, você começou a conhecer maneiras de aferir a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (SLIT) por meio do método de Routh-Hurwitz e da localização dos polos no plano complexo. O primeiro método fundamenta-se em um método de cálculo que leva em consideração os coeficientes do polinômio do denominador da função de transferência, enquanto o segundo baseia-se na identificação direta dos polos do sistema e em sua localização no plano complexo. Ambos os métodos culminam na determinação acerca da estabilidade do sistema estudado.

Nesta seção, continuaremos nesse caminho: você aprenderá sobre o diagrama de Bode (lê-se “bôdi”) e o método do lugar das raízes. Ambas as ferramentas podem ser utilizadas tanto na simples análise de resposta em frequência do sistema quanto na determinação de parâmetros do sistema ou de controle.

Com essas ferramentas, podemos analisar sistemas de qualquer ordem, ou seja, independentemente do sistema que estamos trabalhando, temos como avaliar se o sistema é bem-comportado, assim como saber para quais valores de seus parâmetros construtivos (ou de controle) podemos assegurar que ele terá um bom funcionamento. É com esse objetivo que serão discutidas a técnicas de margens de ganho e de fase no diagrama de Bode, além do lugar das raízes no plano complexo. A margens de ganho e de fase denotam o quanto podemos ajustar o sistema, respectivamente, em relação à sua amplitude e fase de resposta. Já o método do lugar das raízes permite-nos observar o efeito da variação de algum parâmetro do sistema em sua resposta.

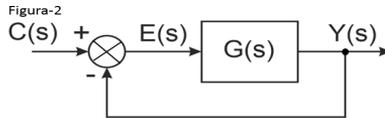
Lembrando: você é o responsável técnico do departamento de engenharia de uma agência espacial e está envolvido na preparação do lançamento vertical de um veículo espacial. Na primeira etapa do projeto, você constatou que o sistema é instável. Com um controlador adequado, por exemplo, em malha fechada, é possível tornar o sistema estável. Mas como podemos comprovar isso analisando-o com as ferramentas de resposta em frequência?

Vamos descobrir?

Bons estudos!

Nesta seção, aprenderemos a analisar um sistema linear invariante no tempo (SLIT) de acordo com sua resposta em frequência. Um SLIT, representado pelo diagrama de blocos da Figura 3.6, pode ser expresso como mostra a Equação 3.29.

Figura 3.6 | Diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{Y(s)}{C(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (3.29)$$

Em que:  $G(s)$  é o sistema e  $C(s)$  é a entrada que resulta na saída  $Y(s)$ .  $E(s)$ , que é a entrada de  $G(s)$ , representa o erro de  $Y(s)$  em relação a  $C(s)$ . Já sabemos que, após submetermos o sistema a uma entrada, sua resposta passa por um período transitório e, somente depois disso, entra em regime permanente. Para a análise da resposta em frequência, estamos interessados na resposta do SLIT estável em regime permanente. Podemos obter a função de transferência do sistema em regime permanente substituindo  $s$  por  $j\omega$ , como mostra a Equação 3.30. Lembrando que a função de transferência é um número complexo, podemos representá-la como mostram as Equações 3.31 (separação da parte real e imaginária) e 3.32 (representação fasorial). Além disso, podemos relacionar essas duas últimas equações como mostram as Equações 3.33 (cálculo da fase do fasor) e 3.34 (cálculo da magnitude do fasor), em que  $j$  é a unidade imaginária  $\sqrt{-1}$ .

$$\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = G(j\omega) \quad (3.30)$$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.31)$$

em que  $R(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega))$  e  $X(j\omega) = \text{Im}(G(j\omega))$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega) \quad (3.32)$$

$$\phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad (3.33)$$

$$|G(j\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2 \quad (3.34)$$

Em regime permanente, um SLIT submetido a uma entrada senoidal apresenta uma saída também senoidal de mesma frequência de oscilação que a entrada. Porém, geralmente a amplitude ( $|G(j\omega)|$ , Equação 3.32) da oscilação da resposta e sua fase ( $\phi(\omega)$ , Equação 3.32) diferem da amplitude e da fase da senoide da entrada, sendo que tanto a defasagem de fase quanto a relação de amplitudes da saída com a entrada (denominada ganho) dependem da frequência de oscilação do sinal senoidal de entrada.

Para observarmos esse fenômeno, utilizamos o diagrama de Bode, que consiste em um par de gráficos que mostra o comportamento do sistema em relação à amplitude de resposta em um gráfico e a fase da resposta do sistema em outro gráfico, ambos em função da frequência do sinal de entrada e sempre em regime permanente. O diagrama de Bode permite avaliar a estabilidade relativa do sistema de malha fechada (como o sistema da Figura 3.6) a partir da função de transferência em malha aberta (que é apenas a função de transferência  $G(s)$  no sistema da Figura 3.6), sem a necessidade de calcular a função de transferência em malha fechada.

O gráfico da amplitude mostra a relação da amplitude do sinal de saída ( $|Y(j\omega)|$ ) com o sinal de entrada ( $|E(j\omega)|$ ) no eixo das ordenadas (em decibéis), ou seja, a relação é um valor adimensional em decibéis (dB), obtido de acordo com a Equação 3.35, que utiliza o logaritmo na base 10. No eixo das abcissas, temos a frequência  $\omega$  em  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  em escala logarítmica, que veremos um pouco mais adiante (como na Figura 3.7, por exemplo).

$$20 \log \frac{|Y(j\omega)|}{|E(j\omega)|} = 20 \log |G(j\omega)| \text{ dB} \quad (3.35)$$

Ou seja, se  $|G(j\omega)| < 1$ , seu valor em dB é negativo. Se  $|G(j\omega)| = 1$ , seu valor em dB é zero; e se  $|G(j\omega)| > 1$ , seu valor em dB é positivo.

Para estudarmos o diagrama de Bode, vamos ver o efeito de fatores básicos, que são encontrados nas funções de transferência, sobre o diagrama, tanto na amplitude quanto na fase da resposta do sistema. Os fatores básicos são:

- O ganho, que é um número real  $K$ .
- Fator integral  $j\omega$  no denominador e fator derivativo  $j\omega$  no numerador.
- Fatores de primeira ordem, que são  $1 + j\omega T$  no numerador ou  $1 + j\omega T$  no denominador.
- Fatores quadráticos, que são  $\left[ 1 + 2\zeta \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$  no numerador ou no denominador.



## Exemplificando

Considere a função de transferência da Equação 3.36.

$$G(s) = \frac{s+3}{(s^2+s+1)(s^2-0,2s+25,01)} \quad (3.36)$$

Inicialmente, vemos que há três fatores: dois de primeira ordem no denominador e um de primeira ordem no numerador, mas nenhum deles está na forma padrão. É necessário que eles sejam manipulados para serem colocados no formato padrão. As Equações 3.37, 3.38 e 3.39 mostram o resultado das manipulações.

$$s+3 = j\omega + 3 = 3 \left( \frac{1}{3} j\omega + 1 \right) \quad (3.37)$$

$$s^2 + s + 1 = (j\omega)^2 + (j\omega) + 1 = \left( \frac{j\omega}{1} \right)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \left( \frac{j\omega}{1} \right) + 1 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} s^2 - 0,2s + 25,01 &= (j\omega)^2 - 0,2(j\omega) + 25,01 \\ &= 25,01 \left[ \frac{(j\omega)^2}{(\sqrt{25,01})^2} - \frac{0,2j\omega}{25,01} \left( \frac{\sqrt{25,01}}{\sqrt{25,01}} \right) + 1 \right] \\ &= 25,01 \left[ \left( \frac{j\omega}{\sqrt{25,01}} \right)^2 - 2 \cdot 0,01 \left( \frac{j\omega}{\sqrt{25,01}} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Podemos ver que nas Equações 3.37 e 3.39 sobram ganhos fora dos fatores. Por conseguinte, temos um fator de ganho na função de transferência. Remontando  $G(s)$ , temos a Equação 3.40.

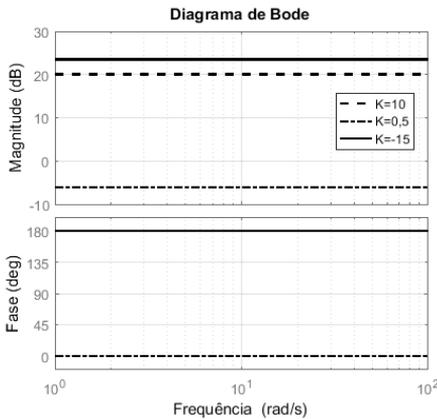
$$G(s) = \frac{0,12 \left( \frac{1}{3} j\omega + 1 \right)}{\left[ \left( \frac{j\omega}{1} \right)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \left( \frac{j\omega}{1} \right) + 1 \right] \left[ \left( \frac{j\omega}{\sqrt{25,01}} \right)^2 - 2 \cdot 0,01 \left( \frac{j\omega}{\sqrt{25,01}} \right) + 1 \right]} \quad (3.40)$$

O ganho  $K$  é um número real que multiplica a função de transferência e, como já dito, se for maior que a unidade, será positivo em decibéis e, se for menor que a unidade, será negativo em decibéis.

Vemos, na Figura 3.7, o diagrama de Bode para  $K = 10$ ,  $K = 0,5$ ,  $K = -15$  que, em decibéis, correspondem a  $K = 20 \log(10) = 20$  dB,  $K = -6,02$  dB,

$K = 23,52 \text{ dB}$  (para esse último caso, logaritmo de número negativo é um número complexo, mas, em decibéis, leva-se em consideração apenas a parte real do resultado do logaritmo).

Figura 3.7 | Diagrama de Bode para o ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

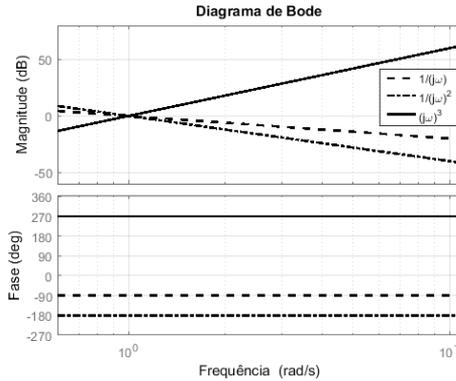
Podemos observar que, na magnitude e na fase, independentemente do valor do ganho, o gráfico é uma linha reta horizontal, pois  $20\log|K| \text{ dB}$  é constante independentemente de  $\omega$ . Em relação à fase, se  $K > 0$ , a fase será de  $0^\circ$ , mas, se  $K < 0$ , a fase será de  $180^\circ$ .

Para os fatores integrativos, supondo que podemos ter uma quantidade  $n$  desses fatores, podemos agrupar todos e dizer que temos um termo  $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$ . Então, para esse caso, temos uma amplitude em decibéis de acordo com o cálculo da Equação 3.41.

$$20\log\left|\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n\right| = 20\log\left(\frac{|1|}{|j\omega|^n}\right) = 20\log\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) = -20\log(\omega^n) = -20n\log(\omega) \text{ dB} \quad (3.41)$$

Analogamente, para  $n$  fatores derivativos, ou seja,  $(j\omega)^n$ , teremos uma amplitude de  $20n\log(\omega) \text{ dB}$ . Em ambos os casos, quando  $\omega = 1$ , os fatores integrativos e derivativos passam por 0 dB e, para qualquer  $\omega$ , apresentam uma inclinação de  $-20 \text{ dB}$  e  $20n \text{ dB}$  por década, respectivamente, sendo que uma década equivale à distância de  $\omega$  a  $10\omega$ , para qualquer  $\omega$ . Em relação à fase, o fator integral contribui com  $-n \times 90^\circ$  e o fator derivativo, com  $n \times 90^\circ$ . O diagrama de Bode é mostrado na Figura 3.8 com três exemplos desses fatores.

Figura 3.8 | Diagrama de Bode de fator integral e derivativo



Fonte: elaborada pelo autor.

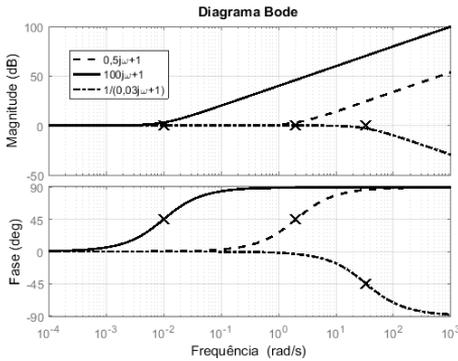
Fatores de primeira ordem no denominador, ou seja,  $G_D(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$ , representam um sistema de primeira ordem (por exemplo, um circuito resistor-capacitor (RC) em série cuja entrada é uma tensão também em série e a saída é a tensão no capacitor) e têm sua magnitude calculada de acordo com a Equação 3.42.

$$20 \log |G_D(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = -20 \log \left( \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right) \text{ dB} \quad (3.42)$$

Para o fator de primeira ordem no numerador  $G_N(j\omega) = j\omega T + 1$ , sua amplitude é  $20 \log \left( \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right)$  dB. Para baixas frequências, com  $\omega \ll \frac{1}{T}$ , tanto  $G_D(j\omega)$  quanto  $G_N(j\omega)$  conservam a magnitude do sinal de entrada, pois  $1 + \omega^2 T^2 \rightarrow 1$ , representando um ganho unitário, ou seja, 0 dB. Para altas frequências, teremos comportamentos distintos entre  $G_D(j\omega)$  e  $G_N(j\omega)$ . Com  $\omega \gg \frac{1}{T}$ ,  $G_D(j\omega)$  apresenta um decaimento de 20 dB por década na magnitude e  $G_N(j\omega)$  apresenta um ganho de 20 dB por década. Enquanto  $G_D(j\omega)$  tende a atenuar a magnitude do sinal de entrada para zero,  $G_N(j\omega)$  tende a amplificar a magnitude do sinal de entrada para infinito com o aumento da frequência. Essas assíntotas, para ambos os casos, se cruzam quando  $\omega = \frac{1}{T}$ , que é denominada frequência de corte. Essa frequência divide a resposta do sistema em região de baixa frequência, com  $\omega < \frac{1}{T}$  e, em região de alta frequência, com  $\omega > \frac{1}{T}$ .

Em relação à fase, para baixas frequências,  $G_D(j\omega)$  e  $G_N(j\omega)$  contribuem com fase de  $0^\circ$ . Para altas frequências,  $G_D(j\omega)$  tende a uma fase de  $-90^\circ$ , passando por  $-45^\circ$  na frequência de corte. O fator  $G_N(j\omega)$  tende a uma fase de  $+90^\circ$ , passando por  $+45^\circ$  na frequência de corte. A Figura 3.9 apresenta três exemplos desse tipo de fator.

Figura 3.9 | Exemplos de diagrama de Bode de fatores de primeira ordem



Fonte: elaborada pelo autor.



### Refleta

Na Figura 3.9, o fator de primeira ordem  $\frac{1}{0,03j\omega+1}$  apresenta 0 dB, ou seja, ganho unitário para baixas frequências (menores que  $33,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ) e atenuação de 20 dB/década para altas frequências (maiores que  $33,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ). Esse comportamento é observado em circuitos elétricos que funcionam como filtro passa-baixa.

Há também os filtros passa-alta, que têm funcionamento oposto: atenuam com 20 dB/década para frequências menores que a de corte e apresentam 0 dB para frequências maiores que a de corte. Com os fatores estudados até aqui, fazemos uma pergunta: a composição de quais deles (integrativo, derivativo e primeira ordem) resultaria em uma função de transferência que geraria um diagrama de Bode cujo gráfico da magnitude apresenta atenuação de 20 dB/década para frequências menores que a de corte e ganho unitário para frequências maiores que a de corte?

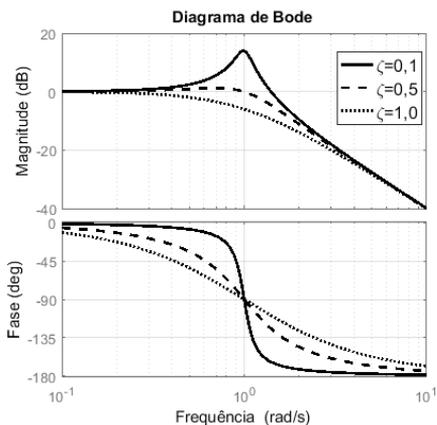
Por último, temos os fatores quadráticos  $+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ , em que  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento. A amplitude de  $G_{QD}(j\omega)$  em decibéis é dada na Equação 3.43.

$$20\log|G_{QD}(j\omega)| = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.43)$$

Da Equação 3.40, vemos que, assim como os fatores de primeira ordem, fatores de segunda ordem apresentam 0 dB para frequências baixas ( $\omega \ll \omega_n$ ). Para frequências altas ( $\omega \gg \omega_n$ ) o fator de segunda ordem do tipo  $G_{QD}(j\omega)$

contribui com um decaimento de 40 dB por década em altas frequências no gráfico da amplitude, e um fator de segunda ordem do tipo  $G_{\text{ov}}(j\omega) = 1 + 2\zeta \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$  contribui com um aumento de 40 dB por década. As duas assíntotas se cruzam em  $\omega = \omega_n$ , e, perto dessa frequência, ocorre um pico de ressonância, cuja magnitude é definida por  $\zeta$ : quanto menor for  $\zeta$ , maior será o pico de ressonância e, quanto maior for  $\zeta$ , menor o pico. A fase do fator de segunda ordem tende a zero para frequências muito baixas, é igual a  $-90^\circ$  para  $\omega = \omega_n$  e tende a  $-180^\circ$  para altas frequências. O diagrama de Bode é mostrado na Figura 3.10 para demonstrar o efeito do coeficiente de amortecimento de um fator de segunda ordem no denominador com  $\omega_n = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Figura 3.10 | Influência de  $\zeta$  no diagrama de Bode do fator quadrático



Fonte: elaborada pelo autor.



### Pesquise mais

Perceba que o estudo que estamos fazendo não leva em consideração o valor da amplitude e da fase do diagrama de Bode quando próximo da frequência de corte para os fatores de primeira ordem ou próximo da frequência de ressonância para o fator de segunda ordem. Por isso, dizemos que estudamos as assíntotas dos fatores. Pesquise, na referência indicada a seguir, a diferença entre os valores verdadeiros dos gráficos em relação às assíntotas estudadas.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. p. 375-379.

Conhecendo a contribuição de cada um desses fatores no diagrama de Bode de um sistema, podemos analisar uma função de transferência e vislumbrar seu diagrama sem a necessidade de fazermos muitos cálculos, pois basta somarmos o efeito de cada fator para termos uma boa e rápida aproximação de seu diagrama tanto na amplitude em decibéis quanto na fase.



### Assimile

Após o estudo da influência de cada fator, podemos resumir as assíntotas das magnitudes e fases de cada um:

- Ganho  $K$  tem magnitude constante  $20 \log |K|$  dB e fase constante  $0^\circ$  para  $K \geq 0$  ou  $180^\circ$  para  $K < 0$ .
- Integrativo  $\frac{1}{(j\omega)^n}$ ,  $n > 0$  tem na magnitude um decaimento constante de  $20 \cdot n$  dB/década e fase constante de  $-90^\circ \cdot n$ .
- Derivativo  $(j\omega)^n$ ,  $n > 0$  tem ganho constante de  $20 \cdot n$  dB/década na magnitude e fase constante de  $90^\circ \cdot n$ .
- Primeira ordem no denominador  $\frac{1}{j\omega T + 1}$  tem 0 dB/década na magnitude e  $0^\circ$  na fase para  $\omega \ll \frac{1}{T}$  e  $+20$  dB/década na magnitude e  $90^\circ$  na fase para  $\omega \gg \frac{1}{T}$ .
- Primeira ordem no numerador  $j\omega T + 1$  tem 0 dB/década na magnitude e  $0^\circ$  na fase para  $\omega \ll \frac{1}{T}$  e  $-20$  dB/década na magnitude e  $-90^\circ$  na fase para  $\omega \gg \frac{1}{T}$ .
- Quadrático no denominador  $\frac{1}{1 + 2\zeta \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2}$  tem 0 dB/década na magnitude e  $0^\circ$  na fase para  $\omega \ll \omega_n$  e  $-40$  dB/década e  $-180^\circ$  na fase para  $\omega \gg \omega_n$ .
- Quadrático no numerador  $1 + 2\zeta \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2$  tem 0 dB/década na magnitude e  $0^\circ$  na fase para  $\omega \ll \omega_n$  e  $40$  dB/década e  $+180^\circ$  na fase para  $\omega \gg \omega_n$ .

A Equação 3.44 mostra uma função de transferência com um fator integrativo com expoente 1 e dois fatores de primeira ordem no denominador.

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)} \quad (3.44)$$

- O fator integrativo  $\frac{1}{j\omega}$  contribui com  $-20$  dB/década e com  $-90^\circ$  de fase, ambos constantes.
- O fator de primeira ordem  $\frac{1}{j\omega + 1}$  contribui com 0 dB e  $0^\circ$  para

$\omega \ll 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e com  $-20$  dB/década e  $-90^\circ$  para  $\omega \gg 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

- O fator  $\frac{1}{0,2j\omega + 1}$  contribui com  $0$  dB/década e  $0^\circ$  para  $\omega \ll 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e com  $-20$  dB/década e  $-90^\circ$  para  $\omega \gg 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Logo, como pode ser visto na Figura 3.11, para baixas frequências, o diagrama de Bode inicia em  $\omega = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  com  $40$  dB e decaimento de  $20$  dB por década. Em  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  tem um canto e, a partir disso, decai com  $40$  dB por década e, a partir de  $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , tem um decaimento de  $60$  dB por década. Na fase, o diagrama começa com  $-90^\circ$  e termina em  $-270^\circ$  (Figura 3.11).

Com o diagrama de Bode, podemos avaliar a estabilidade de um sistema em relação à sua margem de fase e de ganho. Segundo Dorf (2011), a margem de fase é a quantidade de deslocamento de fase do sistema que resultará em um comportamento marginalmente estável (estabilidade crítica), com fase igual a  $-180^\circ$  quando a amplitude for  $0$  dB.

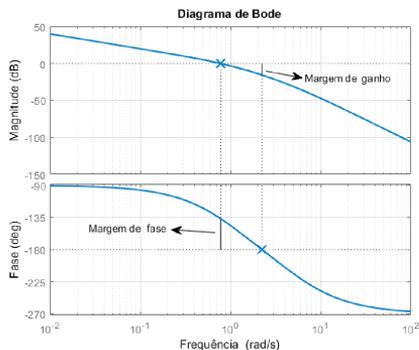
A margem de ganho é o acréscimo que pode ser feito no ganho do sistema, quando a fase for  $-180^\circ$ , o que resultará em um comportamento marginalmente estável em  $0$  dB. Graficamente, a margem de fase e a de ganho são interpretadas como mostra a Figura 3.11 para o exemplo de sistema da Equação 3.44. Para calcularmos a margem de ganho ( $MG$ ), basta encontrarmos o inverso do módulo da função de transferência.

Para o exemplo da Equação 3.44, temos  $MG$  conforme a Equação 3.45.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|} = |j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)| = |-0,2j\omega^3 - 1,2\omega^2 + j\omega| \Rightarrow$$

$$MG = \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} \quad (3.45)$$

Figura 3.11 | Interpretação gráfica das margens de ganho e de fase



Fonte: adaptada de Dorf (2011, p. 424).

Vamos descobrir o  $\omega$  que precisamos substituir em 3.43, calculando-o ao igualar a fase da função de transferência da Equação 3.45 a  $-180^\circ$  (Equação 3.46).

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= -180^\circ \\ \angle \left( \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0,2j\omega+1)} \right) &= -180^\circ \\ \angle (-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)) &= -180^\circ \\ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-0,2\omega^3 + \omega}{-1,2\omega^2} \right) &= -180^\circ \\ \frac{1}{-1,2\omega} (-0,2\omega^2 + 1) &= \operatorname{tg}(-180^\circ) \\ -0,2\omega^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{5} = 2,236 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (3.46)$$

Substituindo a Equação 3.46 na Equação 3.45, temos a Equação 3.47.

$$\begin{aligned} MG &= \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} \\ MG &= \sqrt{\left[ -0,2(\sqrt{5})^3 + \sqrt{5} \right]^2 + \left[ -1,2(\sqrt{5})^2 \right]^2} \\ MG &= 6 \quad (3.47) \end{aligned}$$

$$20 \log MG = 15,563 \text{ dB} \quad (3.48)$$

A Equação 3.48 mostra o valor da margem de ganho em dB. No caso, a margem de ganho (em dB) é positiva: isso significa que o sistema é estável, pois podemos colocar um ganho nele de até 15,563 dB antes de ele se tornar um sistema marginalmente estável.

Se por acaso a margem de ganho (em dB) fosse negativa, o sistema seria instável. Nesse caso, a margem de ganho indicaria o valor do ganho a ser diminuído para tornar o sistema estável.

Para calcularmos a margem de fase, precisamos encontrar a frequência  $\omega$  em que o sistema se encontra com 0 dB, ou seja, quando  $|G(j\omega)|$  é unitário (Equação 3.49).

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= 1 \\
 \frac{1}{\sqrt{j\omega(j\omega+1)(0,2j\omega+1)}} &= 1 \\
 \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} &= 1 \\
 (-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2 &= 1 \\
 0,04\omega^6 + 1,4\omega^4 + \omega^2 - 1 &= 0 \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Entre esses valores, que são solução da Equação 3.49, temos quantidades reais positivas, negativas e números complexos. Como sabemos que, fisicamente, a frequência tem de ser uma quantidade real e positiva, por exclusão, o único valor possível para a frequência  $\omega$ , entre os calculados, é de  $0,779 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Agora, precisamos calcular a fase de  $G(j\omega)|_{\omega=0,779}$  (Equação 3.50). Observe que o argumento de  $tg^{-1}$  representa um número complexo que se encontra no terceiro quadrante, ou seja, devemos tomar cuidado para não confundirmos o ângulo calculado como se estivesse no quarto quadrante.

$$\begin{aligned}
 \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= \angle \left( \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0,2j\omega+1)} \right) = \angle \left( \frac{1}{-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)} \right) \\
 \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= \angle(1) - \angle(-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)) \\
 \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= -tg^{-1} \left( \frac{-0,2 \times 0,779^3 + 0,779}{-1,2 \times 0,779^2} \right) = -136,79^\circ \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

A margem de fase ( $MF$ ) é dada pela Equação 3.51, que significa o quanto de fase o sistema pode ter de atraso (por isso o sinal negativo em  $MF$ ) antes de se atinja a fase de  $-180^\circ$  e o sistema se torne marginalmente estável.

$$\begin{aligned}
 \angle G(j\omega) - MF &= -180^\circ \Rightarrow MF = \angle G(j\omega) + 180^\circ \quad (3.51) \\
 \Rightarrow MF &= 43,21^\circ
 \end{aligned}$$

Os valores de margem de ganho (15,563 dB) e margem de fase (43,21°) são quantidades compatíveis com o que pode ser observado no diagrama de Bode da Figura 3.11.

Para a análise da resposta em frequência, podemos utilizar, ainda, o método do lugar das raízes, que consiste na utilização do plano complexo para entendermos a variedade de resposta em frequência que um sistema pode ter e, inclusive, para sabermos em que circunstância ele pode se tornar instável, para tomarmos decisões sobre a escolha de parâmetros do sistema. Existem alguns métodos para esboçarmos o lugar das raízes de forma manual.

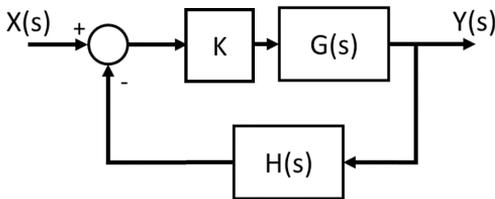


## Pesquise mais

Você pode estudar um dos métodos de esboçar o lugar das raízes de forma manual na referência indicada a seguir. Ele consiste em uma sequência de passos que envolvem conceitos já estudados aqui em disciplinas como Cálculo e Geometria Analítica, mas aplicados na análise da função de transferência (OGATA, 2010, p. 249-255).

No método do lugar das raízes, é dado um sistema em malha fechada, como o da Figura 3.12.

Figura 3.12 | Diagrama de blocos em malha fechada



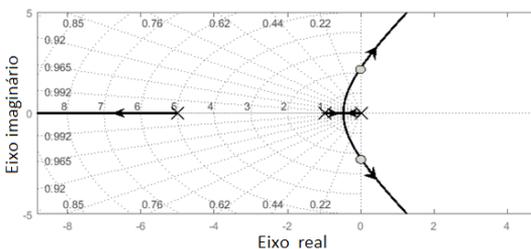
Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando o mesmo  $G(s)$  da Equação 3.44, fazendo  $H(s)=1$  e deixando  $K$  como um valor real variável, temos a Equação 3.52 para a função de transferência de malha fechada.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{K}{s(s+1)(0,2s+1) + K} \quad (3.52)$$

Da Equação 3.52, podemos calcular os polos de malha fechada do sistema e constataremos que não há zeros. Utilizando métodos de traçar o lugar das raízes, obtemos, com o auxílio de software, o gráfico da Figura 3.13.

Figura 3.13 | Lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

No método do lugar das raízes, os polos são representados no plano complexo por cruces, e os zeros, por círculos. Em uma função de transferência, a quantidade de polos é sempre maior ou igual à quantidade de zeros, e a quantidade a mais que há de polos em relação a zeros é exatamente a quantidade de trechos do lugar das raízes que tendem ao infinito positivo ou negativo, complexo ou real. No caso da função transferência da Equação 3.52, há três polos a mais que zeros. Então, o lugar das raízes apresentará três trechos tendendo para infinito. O lugar das raízes inicia em  $K=0$  nos polos do sistema e caminha para os zeros, com  $K \rightarrow \infty$ . Nessa variação do parâmetro  $K$ , o sistema pode passar de estável para instável. No sistema em questão, para  $K > 6$ , o sistema se torna instável (os círculos com preenchimento cinza indicam o lugar no gráfico onde  $K=6$  e as setas apresentam o sentido em que os polos caminham com o aumento do valor de  $K$ ), pois os polos se movem para o semiplano direito na Figura 3.13.

O eixo horizontal e o vertical da Figura 3.13 são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária dos polos, ou seja, relembrando os polos de um sistema de segunda ordem  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ , para  $\zeta \leq 1$ , o eixo horizontal é  $\zeta\omega_n$  e o eixo vertical é  $j\omega_d$  (sendo que  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ). Com isso em mente, podemos ajustar o valor de  $K$  para que o sistema se comporte com determinado coeficiente de amortecimento e/ou frequência natural, o que é um ajuste importante, pois essa é uma maneira de fazer que a resposta de um sistema se aproxime àquela que, por motivos de projeto, desejamos que ele tenha.

É possível gerarmos um gráfico de lugar das raízes para qualquer parâmetro do sistema que possa vir a sofrer alteração. Assim, é possível encontrar um intervalo de valores desse parâmetro para o qual o sistema é estável. No caso, o sistema é estável para o intervalo  $0 < K < 6$ , mas é sempre importante evitarmos que os polos se aproximem muito do semiplano direito, pois, como o processo de modelagem de sistemas dinâmicos envolve certas aproximações, é possível que, mesmo que o modelo aproximado se comporte de maneira estável, o sistema real pode tornar-se instável justamente por causa das aproximações que não levam em consideração aspectos dinâmicos que, embora possam ser desprezados durante a modelagem, no limiar da estabilidade, podem vir a causar efeitos indesejados. Portanto, é sempre uma boa conduta trabalhar com uma distância segura dos polos do sistema até o semiplano direito ao utilizar o método do lugar das raízes.

Agora, você, como membro da equipe de engenharia e desenvolvimento de uma agência espacial, continuará sua tarefa no desenvolvimento do sistema de lançamento vertical de veículos espaciais. Além de já ter em mãos a função de transferência do sistema (Equação 3.53), você deve avaliar o diagrama de Bode do sistema, quando submetido a um controle representado pela função de transferência da Equação 3.54. O Quadro 3.3 mostra os valores dos parâmetros do sistema da Equação 3.53.

$$\frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M+m}}{\left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m}\right)s^2 - mg\ell} \quad (3.53)$$

$$C(s) = (s + 0,2) \cdot (s^2 + 0,4s + 0,05) \quad (3.54)$$

Quadro 3.3 | valores dos parâmetros do sistema de lançamento

Parâmetro	Variável	Valor
Massa do veículo	m	2.938.314,674 kg <sup>[1]</sup>
Massa do sistema de lançamento	M	$\cong 10 \cdot m$ [kg]
Comprimento do veículo	$\ell$	110,67288 m <sup>[2]</sup>
Aceleração da gravidade local	G	$9,81 \frac{m}{s^2}$

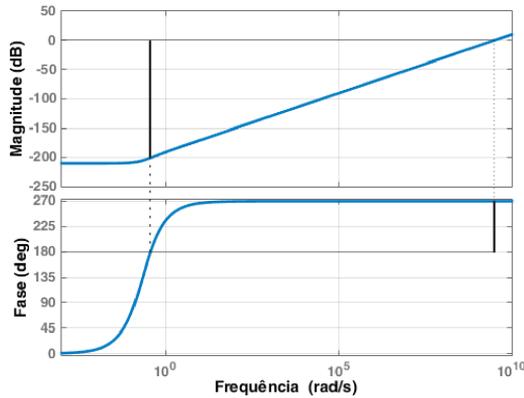
Fonte: adaptado de <sup>[1]</sup> [https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo\\_18-19\\_Ground\\_Ignition\\_Weights.htm](https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-19_Ground_Ignition_Weights.htm) e <sup>[2]</sup> [https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo\\_18-13\\_Launch\\_Vehicle-Spacecraft\\_Key\\_Facts.htm](https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-13_Launch_Vehicle-Spacecraft_Key_Facts.htm). Acesso em: 22 ago. 2017.

Aplicando os valores do Quadro 3.3, obtemos a função de transferência da Equação 3.55.

$$G(s) = \frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-10,06}{3,272 \times 10^{10} s^2 - 3,19 \times 10^9} \quad (3.55)$$

O diagrama de Bode de  $C(s) \cdot G(s)$  é mostrado na Figura 3.14.

Figura 3.14 | Diagrama de bode do sistema com controlador



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo diagrama de Bode, podemos observar que a magnitude é de -210dB para baixas frequências e tende a um ganho de 20 dB/década para altas frequências. Podemos ver, ainda, que a margem de ganho é de, aproximadamente, 200 dB, e a margem de fase é de  $90^\circ$ .

O sistema dinâmico do lançador vertical era um sistema originalmente instável. A influência do controlador fez que o sistema, em malha fechada, se tornasse estável. Isso ocorreu porque os zeros de malha aberta que o controlador adicionou ao lugar das raízes possibilitou que os polos do sistema em malha fechada caminhassem para o semiplano esquerdo do plano complexo.

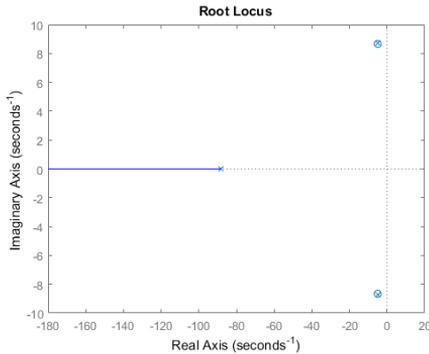
## Avançando na prática

# Análise da estabilidade do controle de vibração da máquina de lavar

## Descrição da situação-problema

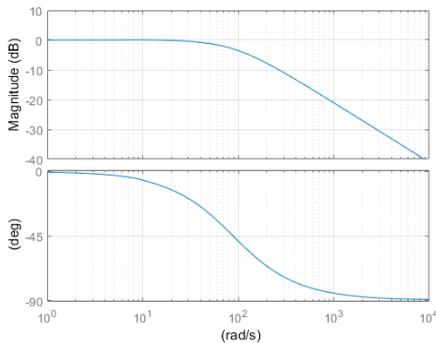
O diagrama de Bode e o lugar das raízes do sistema dinâmico de uma máquina de lavar com seu controle de vibração são mostrados nas Figuras 3.15 e 3.16.

Figura 3.15 | Lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.16 | Diagrama de Bode



Fonte: elaborada pelo autor.

Você é o consultor de projetos de uma empresa de máquinas de lavar e recebe da equipe técnica os diagramas ilustrados nas Figuras 3.15 e 3.16. Observando ambas as figuras, o que você poderia afirmar sobre o sistema em relação à sua estabilidade?

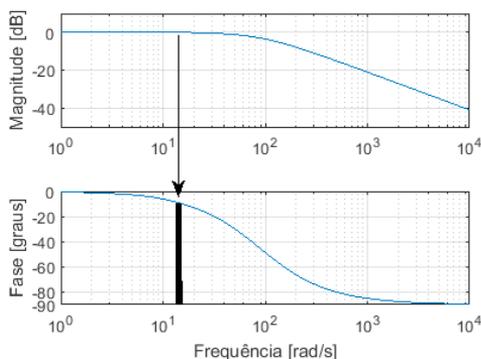
### Resolução da situação-problema

A partir do lugar das raízes da Figura 3.15, como nenhum trecho do gráfico passa para o semiplano direito, pode-se dizer que não há ganho real positivo que se possa impor ao sistema que fará que ele se torne instável.

Isso é mostrado mais uma vez pelo diagrama de Bode da Figura 3.16. Traçando as margens de ganho e fase (Figura 3.17), vemos que,

independentemente do ganho real positivo inserido no sistema, ele não chega a ficar instável, ou seja, sua margem de ganho é infinita. Por outro lado, há uma margem de fase: pelo gráfico da Figura 3.17 percebe-se que o sistema tem uma margem de fase de aproximadamente  $170^\circ$  a uma frequência de  $15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Figura 3.17 | Margens de fase e de ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, constatamos que o sistema é estável, pois, tanto pela análise de seu lugar das raízes quanto pela análise de seu diagrama de Bode, qualquer valor positivo de ganho pode ser aplicado ao sistema que ele continuará estável.

## Faça valer a pena

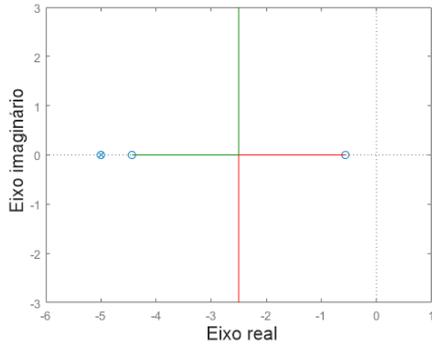
**1.** A equação característica do sistema é aquela que nos informa quais são seus polos. Embora essa não seja toda a informação necessária sobre o sistema para que ele seja analisado de maneira completa, de posse dessa informação, é possível tirarmos algumas conclusões.

Um sistema tem sua equação característica apresentada a seguir:

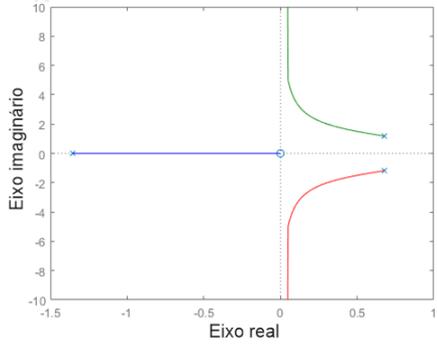
$$s(s + 5) + 2,5 = 0$$

Qual das alternativas apresenta um possível lugar das raízes para esse sistema?

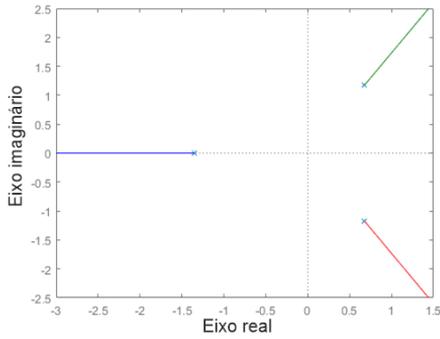
a



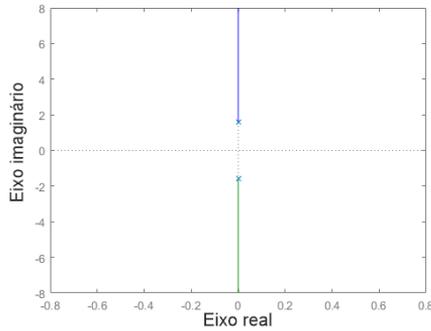
b



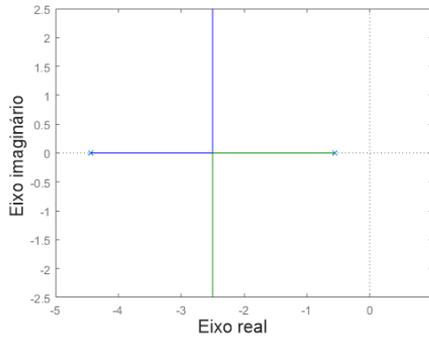
c



d

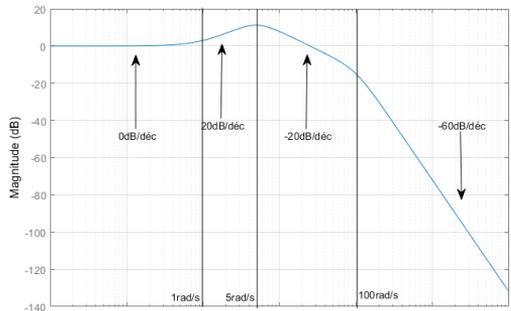


e



**2.** Um profissional experiente na área de controle tem a capacidade de rapidamente vislumbrar os fatores que podem estar presentes na função de transferência de um sistema dinâmico por meio da observação do diagrama de Bode do sistema. Por exemplo: a inclinação do gráfico da amplitude em decibéis discrimina a presença dos fatores de ganho derivativos e integrativos, de primeira e de segunda ordem.

De acordo com a amplitude em decibéis do diagrama de Bode a seguir, qual das alternativas apresenta o sistema que corresponde ao diagrama? Se necessário, suponha que todos os coeficientes de amortecimento sejam iguais a 0,7.



$$a) \quad G(j\omega) = \frac{\left( \left( \frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}{(j\omega + 1) \left( \left( \frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}$$

$$b) \quad G(j\omega) = \frac{\left( \left( \frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right) \left( \left( \frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}{(j\omega + 1)}$$

$$c) \quad G(j\omega) = (j\omega + 1) \left( \left( \frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right) \left( \left( \frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)$$

$$d) \quad G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1) \left( \left( \frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}{\left( \left( \frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}$$

$$e) \quad G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{\left( \left( \frac{j\omega}{5} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{5} \right) + 1 \right) \left( \left( \frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}$$

**3.** É de suma importância que um profissional responsável por elaborar sistemas de controle e por lidar com sistemas dinâmicos tenha conhecimento das técnicas utilizadas para a investigação da estabilidade de sistemas dinâmicos, como as técnicas baseadas no diagrama de Bode e no lugar das raízes, pois, com a utilização delas, além de aferir a estabilidade (ou não) do sistema, o profissional consegue descobrir como (ou se) é possível ajustá-lo a fim de torná-lo estável.

Sobre o diagrama de Bode e o método do lugar das raízes, quais das alternativas estão corretas?

- I. Só podemos utilizar o digrama de Bode e o lugar das raízes em sistemas estáveis.
- II. O diagrama de Bode mostra um pico de ressonância na frequência em que o sistema apresenta maior sobressinal em sua resposta transitória.
- III. No método do lugar das raízes, a quantidade de trechos que vão para o infinito é igual à quantidade de polos que existem a mais que zeros no sistema.
- IV. A margem de fase no diagrama de Bode é uma das maneiras de aferir a estabilidade do sistema, além de permitir que sejam feitas alterações nele até um limite de estabilidade marginal.

- V. A saída de um SLIT em regime permanente apresenta a mesma frequência de oscilação que sua fonte de excitação.
- a) Apenas V está correta.
  - b) Todas estão corretas.
  - c) Apenas II, IV e V.
  - d) Apenas I, III e IV.
  - e) Apenas III, IV e V estão corretas.

# Aplicação de critérios de estabilidade para sistemas realimentados

## Diálogo aberto

Nas seções anteriores, você aprendeu a avaliar a resposta em frequência de sistemas dinâmicos invariantes no tempo (SLIT) e entendeu de maneira teórica como prosseguir com a análise da estabilidade desses sistemas utilizando as técnicas da margem de ganho e de fase, lugar das raízes, critério de Routh-Hurwitz e cálculo dos autovalores na representação em espaço de estados.

Nesta seção, veremos como aplicar esses conhecimentos com o uso do software de matemática MATLAB e analisar os resultados exibidos pelos programas, assim como entender como utilizar as funções que o MATLAB disponibiliza para esse fim, a saber: `bode`, `margin`, `rlocus`, `eig` e `damp`.

Já sabemos que o sistema do lançador vertical pode ser modelado como um pêndulo invertido, que é um sistema intrinsecamente instável. Na seção anterior, o controlador proposto atingiu o objetivo de estabilizar o sistema, mas ainda falta investigar como esse controlador pode ser ajustado: há limites para o ajuste de ganho desse controlador? Quais são eles? Como podemos encontrá-los utilizando o MATLAB como ferramenta?

Então, nesta última seção, você deverá avaliar a estabilidade do controlador que foi proposto por parte da equipe para um ganho de malha fechada variável, pois, como se trata de um sistema extremamente caro de ser fabricado, é importante que sejam obtidas informações corretas acerca de seu funcionamento e, mais especificamente, se o sistema se comportará de maneira estável e quais ajustes podem ser feitos sem que sua estabilidade seja comprometida.

Bons estudos!

## Não pode faltar

---

Na última seção da unidade anterior, aprendemos a inserir modelos de sistemas dinâmicos no MATLAB utilizando as representações em função de transferência, diagrama de blocos e matrizes de espaço de estados. Nesta seção, vamos avaliar a estabilidade dos sistemas, independentemente da

forma de representação escolhida, por meio de comandos mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 | Comandos utilizados para analisar a estabilidade

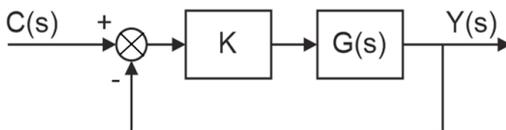
<code>bode</code>	Traça o diagrama de Bode
<code>margin</code>	Traça o diagrama de Bode exibindo as margens de ganho e de fase
<code>rlocus</code>	Traça o lugar das raízes
<code>eig</code>	Obtém os autovalores de uma matriz quadrada
<code>damp</code>	Imprime na tela uma lista dos polos do sistema e suas respectivas informações

Fonte: elaborada pelo autor.

Como já sabemos, o diagrama de Bode apresenta o ganho (em decibéis) e a fase (em graus) da saída de um sistema em relação à sua entrada em regime permanente.

Vamos considerar um sistema que pode ser representado como a função de transferência  $G(s)$  (Equação 3.56) com um ganho ( $K$ ) em malha fechada, como mostram a Figura 3.18 e a Equação 3.57.

Figura 3.18 | Diagrama de bloco do sistema  $G(s)$  com ganho  $K$  em malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 15s^2 + 50s} \quad (3.56)$$

$$\frac{Y(s)}{C(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} \quad (3.57)$$

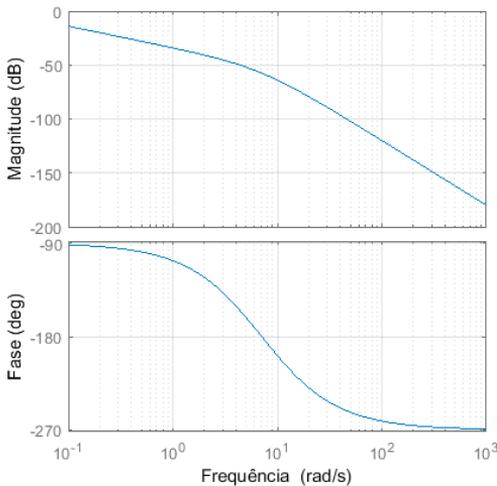
Observe o Quadro 3.4 para compreender como traçar o diagrama de Bode do sistema em malha aberta com ganho  $K=1$ , utilizando o comando `bode`, que exibe o gráfico mostrado na Figura 3.19 (no MATLAB, os eixos têm legenda em inglês). O comando `bode` necessita que seu argumento seja uma variável do tipo `tf` (função de transferência) ou `ss` (espaço de estados ou diagrama de blocos).

Quadro 3.4 | Obtendo o diagrama de Bode

```
3 >> G = tf(1,[ 1, 15, 50, 0]);  
4 >> bode(1*G);  
5 >> grid;
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.19 | Diagrama de Bode traçado pelo MATLAB



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo diagrama de Bode, podemos avaliar as margens de fase e de ganho de um sistema. Analisando o diagrama da Figura 3.19, verificamos que o sistema  $K \cdot G(s)$  em malha aberta com  $K=1$  nunca chegará a uma fase de  $180^\circ$ , ou seja, sua margem de ganho é infinita: independentemente do valor (real e positivo) que  $K$  assumir, o sistema não ficará instável. Por outro lado, vemos que o diagrama de Bode cruza 0 dB em uma frequência de aproximadamente  $4,5 \frac{rad}{s}$ . No gráfico da fase, vemos que em  $4,5 \frac{rad}{s}$  a fase é bem próxima de  $-180^\circ$ , ou seja, a margem de fase é bem pequena.

Podemos obter no MATLAB o valor para ambas as fases com o comando `margin` (Quadro 3.5). O comando `margin` requer o mesmo tipo de argumento que o comando `bode`. A fim de observar o comportamento de diferentes valores para o ganho  $K$  nas margens de estabilidade, traçaremos conjuntamente os gráficos com  $K=40$ ,  $K=4$  e  $K=1$ , sendo que o último dos três terá suas margens de ganho exibidas no título do gráfico (Figura 3.20).

Quadro 3.5 | Obtendo as margens de fase e de ganho

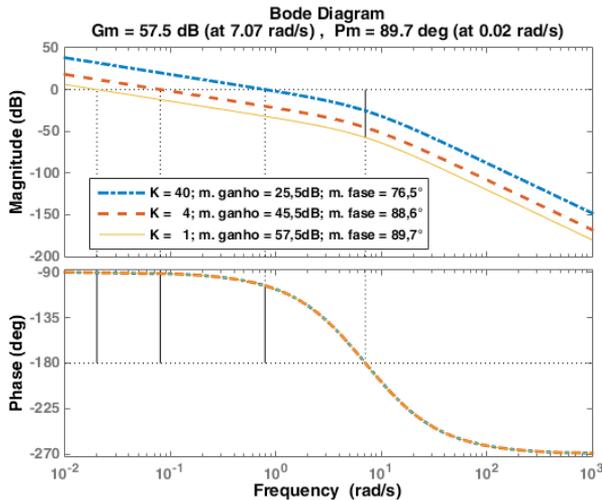
```

6 >> margin(40*G);
7 >> hold on;
8 >> margin(4*G);
9 >> margin(1*G);
10 >> grid on;
11 >> legend('K=40', 'K=4', 'K=1');

```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.20 | Margens de fase e de ganho para vários valores de K



Fonte: elaborada pelo autor.

No título da Figura 3.20, abaixo de *Bode Diagram*, temos a informação de que, para  $K = 1$  (que foi o último sistema a ser traçado, assim sobrescrevendo as informações dos anteriores no título do gráfico), a margem de ganho ( $G_m$ , do inglês, *gain margin*) é de 57,5 dB e ocorre na frequência  $7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (at  $7,07 \text{ rad/s}$ ). A margem de fase ( $P_m$ , do inglês, *phase margin*) vale  $89,7^\circ$  ( $89,7 \text{ deg}$ ) e ocorre aos  $0,02 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (at  $0,02 \text{ rad/s}$ ).

Como já estudado na seção anterior, a multiplicação do sistema por qualquer valor real positivo, ou seja, por um ganho, não altera a fase do sistema, e isso é o que pode ser observado no gráfico de fase da Figura

3.20: os três sistemas têm fases idênticas e se sobrepõem. Assim como o comando `bode`, o comando `margin` traça o diagrama de Bode e, além disso, indica os valores das margens no título e nos próprios gráficos, como pode ser visto no gráfico da fase (*phase*) da Figura 3.20, com as linhas pretas verticais.

Com o comando `margin`, também é possível obter os valores das margens de ganho e de fase, além das respectivas frequências nas quais cada um ocorre, como mostra o Quadro 3.6, em que  $G$  é o sistema para o qual se deseja calcular as margens. As saídas dessa forma de utilizar o comando são a margem de ganho em adimensional (`m_ganho`), margem de fase em graus (`m_fase`), frequência na qual ocorre a margem de ganho (`w_m_ganho`) e frequência na qual ocorre a margem de fase (`w_m_fase`), ambas em  $\frac{rad}{s}$ .

Quadro 3.6 | Obtenção das margens de fase e de ganho sem apresentar o diagrama de Bode

```
12 >> [m_ganho, m_fase, w_m_ganho, w_m_fase] = margin(G);
```

Fonte: elaborado pelo autor.



### Assimile

Os comandos `bode` e `margin` traçam o diagrama de Bode do sistema dado. Contudo, `margin` traz informações acerca das margens de fase e de ganho no gráfico traçado, diferentemente do `bode`. Além disso, vale ressaltar que o comando `margin` pode omitir o diagrama de Bode quando utilizado da maneira apresentada no Quadro 3.6.

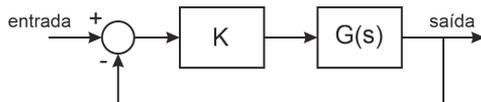
Para visualizarmos as margens do sistema em malha fechada da Figura 3.18, podemos utilizar o comando `feedback` para inseri-lo no MATLAB. O comando `feedback` requer como argumento um sistema dinâmico (variável do tipo `tf` ou `ss`), seguido da representação do sistema que representa o ramo da retroalimentação.



### Exemplificando

Para visualizarmos as margens do sistema em malha fechada da Figura 3.18, podemos utilizar o comando `feedback` para inseri-lo no MATLAB. O comando `feedback` requer como argumento um sistema dinâmico (variável do tipo `tf` ou `ss`), seguido da representação do sistema que representa o ramo da retroalimentação.

Figura 3.21 | Diagrama de Blocos em malha fechada com ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

Quadro 3.7 | Obtendo as margens de ganho e de fase para o sistema com ganho

13	<pre>&gt;&gt; [m_ganho, m_fase, w_m_ganho, w_m_fase] = margin(10*G)  m_ganho =      75  m_fase =      86.5673  w_m_ganho =      7.0711  w_m_fase =      0.1998</pre>
----	--

Fonte: elaborado pelo autor.

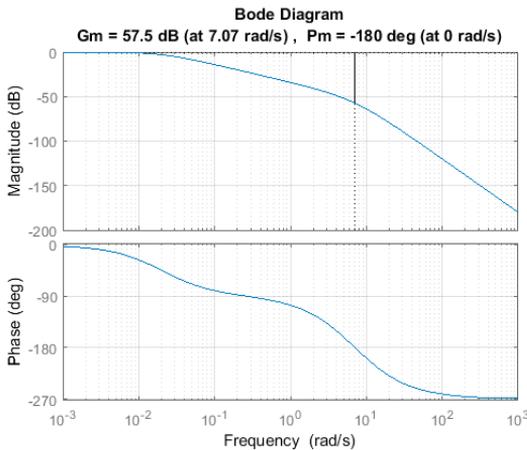
Como vamos utilizar uma retroalimentação unitária, o segundo argumento do comando `feedback` (linha 15 do Quadro 3.8) é o número 1, lembrando que também utilizaremos  $K=1$  para o ganho. O resultado é atribuído à variável `MF1` para depois ser utilizado no comando `margin` (linha 16 do Quadro 3.8), que gera a Figura 3.22.

Quadro 3.8 | Obtendo as margens de fase e de ganho para o sistema em malha fechada

```
14 >> close all;
15 >> MF1 = feedback(1*G,1);
16 >> margin(MF1);
17 >> grid on;
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.22 | Diagrama de Bode de malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a margem de ganho do sistema em malha fechada (Figura 3.22) é a mesma que a do sistema em malha aberta (Figura 3.20). Isso é verdade para um sistema SLIT: para encontrarmos a margem de ganho de um sistema em malha fechada, basta obtermos a margem de ganho do sistema em malha aberta, pois ambas serão iguais.



## Refleta

Realize o teste desse conceito no MATLAB: invente uma função de transferência e obtenha sua margem de ganho. Agora, faça um sistema em malha fechada com ele e obtenha a nova margem de ganho. Os valores de margem de ganho são iguais? É necessário que calculemos sua função de transferência em malha fechada para estudarmos sua estabilidade?

A margem de ganho de  $G(s)$  é de 57,5 dB que, em ganho adimensional, equivale a aproximadamente 750, ou seja, se impusermos um ganho de 750 a  $G(s)$ , o sistema ficará marginalmente estável, logo sua margem de fase será 0 dB ou 1 em adimensional. Isso pode ser notado ao observarmos o resultado do comando exibido no Quadro 3.9.

Quadro 3.9 | Nova margem de fase ao tornar  $G(s)$  marginalmente estável

18	<pre>&gt;&gt; [m_ganho, m_fase, w_m_ganho, w_m_fase] = margin(750*G)  m_ganho =  1  m_fase =  2.3353e-05  w_m_ganho =  7.0711  w_m_fase =  7.0711</pre>
----	---

Fonte: elaborado pelo autor.

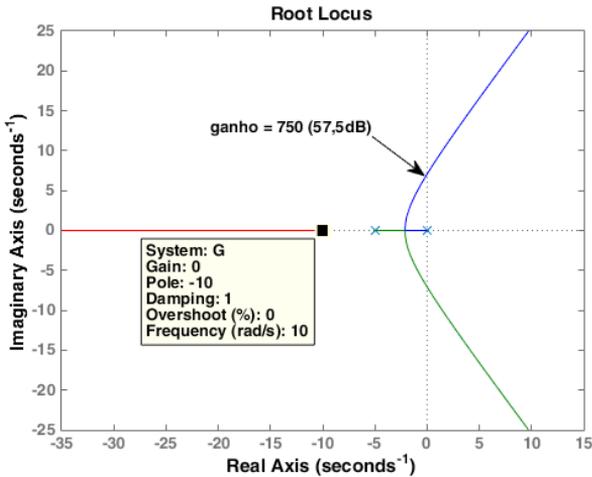
Para obtermos o lugar das raízes do sistema da Figura 3.18 com o ganho  $K$  como variável, basta que passemos a função de transferência  $G(s)$  como argumento para o comando `rlocus`, como mostra o Quadro 3.10, para obtermos o gráfico da Figura 3.23.

Quadro 3.10 | Traçando o lugar das raízes

19	<pre>&gt;&gt; close all;</pre>
20	<pre>&gt;&gt; rlocus(G);</pre>
21	<pre>&gt;&gt; grid on;</pre>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.23 | Gráfico do lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

Para  $K \rightarrow 0$ , as raízes da equação característica do sistema da Equação 3.53, ou seja, seus polos, tendem a  $-10$ ;  $-5$  e  $0$ , indicadas pelas cruzeiras na Figura 3.23. Com a ferramenta *data cursor* (  ), podemos clicar no gráfico e obter valores para o ganho (*gain*) e seus efeitos no sistema de malha fechada, representados pelos parâmetros: amortecimento (*damping*), sobressinal (*overshoot*) e frequência natural (*frequency*).



### Assimile

Podemos obter importantes dados do gráfico do lugar das raízes utilizando a ferramenta *data cursor*, acessível na barra de ferramentas da janela do gráfico.

O que observamos no diagrama de Bode da Figura 3.19 se repete no lugar das raízes da Figura 3.23: para um valor de 750 (ou 57,5 dB) no ganho  $K$ , o sistema torna-se marginalmente estável. Alterando o valor para o ganho  $K$ , alteramos o comportamento dinâmico do sistema. Podemos fazer que ele responda de maneira mais ágil, mais lenta, com maior ou menor sobressinal etc. Como já conhecemos as métricas no tempo (tempo de subida, sobressinal, tempo de acomodação) e suas dependências com o coeficiente de

amortecimento e frequência natural do sistema, podemos calcular o valor do ganho  $K$  para que os polos se encontrem na região do plano complexo que cause o comportamento desejado para o sistema dinâmico. Nessa tarefa, podemos utilizar o comando `damp`, que imprime na tela informações acerca de cada polo do sistema, como pode ser visto seu resultado no Quadro 3.11 quando aplicado ao sistema  $G(s)$ .

Quadro 3.11 | Utilização do comando `damp`

22	>> damp(G)			
	Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
	0.00e+00	-1.00e+00	0.00e+00	Inf
	-5.00e+00	1.00e+00	5.00e+00	2.00e-01
	-1.00e+01	1.00e+00	1.00e+01	1.00e-01

Fonte: elaborado pelo autor.

Há também o critério de Routh-Hurwitz para avaliar a estabilidade de um SLIT. Já sabemos que o critério de Routh-Hurwitz é um método que pode ser aplicado de modo iterativo. Então, para utilizá-lo no MATLAB, devemos aplicar os cálculos repetidamente, percorrendo os coeficientes da equação característica para sistemas que necessitam que a matriz seja calculada, ou seja, para sistemas que tenham todos os coeficientes de sua equação característica com o mesmo sinal (positivo ou negativo). A Equação 3.58 mostra a equação característica do sistema da Figura 3.18 com  $K = 5$ . O Quadro 3.12 mostra como podemos aplicar o critério de Routh-Hurwitz para o caso da Equação 3.58.

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 5 \quad (3.58)$$

Quadro 3.12 | Aplicando o critério de Routh-Hurwitz

```

23 >> coef = [1 15 50 5]
    coef =
         1    15    50     5
24 >> a(1) = coef(1);
25 >> a(2) = coef(2);
26 >> a(3) = coef(3);
27 >> a(4) = coef(4)
    a =
         1    15    50     5
28 >> b(1) = (a(2)*a(3)-a(4)*a(1))/a(2)
    b =
    49.6667
29 >> c(1) = (b(1)*a(4)-a(2)*0)/b(1)
    c =
     5
30 >>[a(1); a(2); b(1); c(1)] %primeira coluna
    ans =
     1.0000
    15.0000
    49.6667
     5.0000

```

Fonte: elaborado pelo autor.

O vetor  $a$  corresponde às primeira e segunda linhas da matriz do método, que vem diretamente do vetor  $c \in \mathbb{F}$ , que são os coeficientes do polinômio do denominador. O vetor  $b$  (que, nesse caso, possui apenas um elemento) são os da terceira linha, calculados a partir das primeira e segunda linhas; o vetor  $c$  (também um único elemento para esse caso), que é a quarta linha, depende da segunda e terceira linhas. A linha 28 do Quadro 3.12 calcula o que é mostrado na Equação 3.59, de acordo com o método do critério de Routh-Hurwitz.

$$b_1 = \frac{a_2 \cdot a_3 - a_4 \cdot a_1}{a_2} \quad (3.59)$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, como não há mudança de sinal na primeira coluna, o sistema é, como já esperado, estável.



### Dica

O software MATLAB não disponibiliza um comando pronto que performe o método do critério de Routh-Hurwitz, mas alguns usuários desenvolveram e disponibilizaram o algoritmo do critério. Você pode fazer o download, testá-lo e estudar o código para entender como as operações são realizadas.

Por último, temos a representação em espaço de estados do sistema em malha fechada da Equação 3.53, com  $K=1$ , como mostra a Equação 3.60.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -50 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.60)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Por meio do cálculo dos autovalores da matriz de estados, podemos aferir a estabilidade de um sistema dinâmico. Os autovalores de uma matriz quadrada podem ser calculados no MATLAB por meio do uso do comando `eig` (do inglês, *eigenvalues*), e seu argumento é justamente a matriz para a qual se deseja calcular os autovalores, como mostra o Quadro 3.13.

### Quadro 3.13 | Calculando os autovalores para aferir a estabilidade de um sistema em espaço de estados

```
31 >> A = [-15, -50, -1; 1 0 0; 0 1 0];
32 >> eig(A)

ans =

-10.0199
-4.9600
-0.0201
```

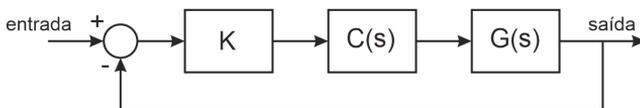
Fonte: elaborado pelo autor.

Como esperado dos resultados anteriores das margens de ganho e de fase e do lugar das raízes, a parte real dos autovalores da matriz de estados é negativa, por isso o sistema é estável.

### Sem medo de erro

Você, como projetista membro da equipe de engenharia de uma agência espacial, recebeu a tarefa de avaliar a estabilidade do controlador projetado para o sistema de lançamento de veículos espaciais. É necessário que seja conhecido o limite de ajuste do ganho do controlador para o qual o sistema se torne marginalmente estável, pois, com essa informação, você e sua equipe saberão qual valor máximo de ajuste do ganho garante que não serão causadas avarias no sistema e que ele não ficará inseguro, ou seja, você conhecerá quais são os valores de ganho abaixo desse máximo para que o sistema seja estável. A Figura 3.24 mostra a representação em diagrama de blocos da configuração do sistema.

Figura 3.24 | Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controlador e ganho ajustável



Fonte: elaborada pelo autor.

Para alcançar o objetivo, você deve analisar o gráfico do lugar das raízes do sistema para encontrar o valor do ganho  $K$  que estabiliza o sistema.

A função de transferência do sistema é dada pela Equação 3.61 e o controlador é dado pela Equação 3.62. Os parâmetros estão apresentados no Quadro 3.14.

$$G(s) = \frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M+m}}{\left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m}\right)s^2 - mg\ell} \quad (3.61)$$

$$C(s) = (s+0,2) \cdot (s^2 + 0,4s + 0,05) \quad (3.62)$$

Quadro 3.14 | Valores dos parâmetros do sistema de lançamento

Parâmetro	Variável	Valor
Massa do veículo	$m$	2.938.314,674 kg <sup>[1]</sup>
Massa do sistema de lançamento	$M$	$\cong 10 \cdot m$ [kg]
Comprimento do veículo	$\ell$	110,67288 m <sup>[2]</sup>
Aceleração da gravidade local	$G$	$9,81 \frac{m}{s^2}$

Fonte: adaptado de <sup>[1]</sup> [https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo\\_18-19\\_Ground\\_Ignition\\_Weights.htm](https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-19_Ground_Ignition_Weights.htm) e <sup>[2]</sup> [https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo\\_18-13\\_Launch\\_Vehicle-Spacecraft\\_Key\\_Facts.htm](https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-13_Launch_Vehicle-Spacecraft_Key_Facts.htm). Acesso em: 22 ago. 2017.

Inserindo as equações no MATLAB, podemos utilizar o comando `rlocus`, como mostra o Quadro 3.15, para avaliar para quais valores de ganho o sistema se torna estável.

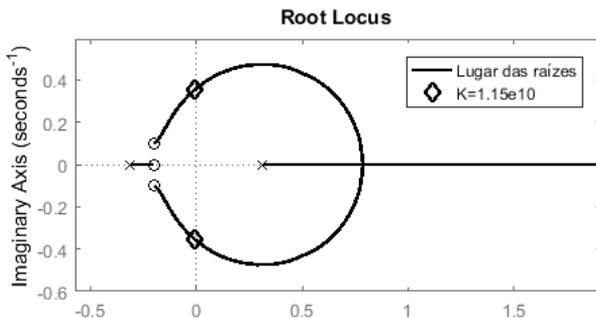
Quadro 3.15 | Obtendo o lugar das raízes para o sistema de lançamento

33	>> close all	% fecha tudo
34	>> clear all	% apaga tudo
35	>> clc	% limpa tela
36	>> m = 2938314.674;	% [kg]
37	>> M = 10*m;	% [kg]
38	>> l = 110.67288;	% [m]
39	>> g = 9.81;	% [m/s^2]
40	>> G = tf(-(m*l/(M+m)), [ 1+m*l^2-1-(m*m*l^2/(M+m)) 0	
41	-m*g*l]);	
42	>> C = tf(1, [ 1, .6, .13, .01 ]);	
	>> rlocus(C*G);	

Fonte: elaborado pelo autor.

Você já sabe que, no lugar das raízes, os polos (representados pelas cruzes) caminham do seu valor em malha aberta, em que  $K \rightarrow 0$ , para os zeros (representados pelos círculos), em que  $K \rightarrow \infty$ .

Figura 3.25 | Lugar das raízes dos sistemas de lançamento vertical com controle



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.25, percebe-se que há um valor para  $K$  em que o sistema caracteriza-se como marginalmente estável (parte real do polo é nula), e esse valor, indicado pelos losangos, é de aproximadamente  $K = 1,15 \cdot 10^{10}$ . Com isso, pode-se concluir que, para o sistema e controlador em questão, em malha fechada, se  $K > 1,15 \cdot 10^{10}$ , o sistema é estável.

## Avançando na prática

# Estabilidade da mesa da impressora 3D

## Descrição da situação-problema

Você, em sua nova aposta de empreendedorismo, monta uma empresa que fabrica impressoras de prototipagem rápida, as famosas impressoras 3D. No sistema da impressora, é importante que a mesa que sustenta o protótipo durante a impressão mantenha-se nivelada para que não haja problemas durante o processo. A mesa da impressora 3D é apoiada sobre molas para que a vibração da movimentação do cabeçote de impressão não interfira no posicionamento da peça. Porém, como a estrutura da impressora 3D não é totalmente rígida e as acelerações desenvolvidas pelos motores de passo que movem o cabeçote durante o processo de impressão não são desprezíveis, é necessário que haja um controle ativo da posição da mesa para que

o processo de impressão não resulte em erros no objeto impresso. Nesse controle, a entrada do sistema em malha fechada é a posição desejada, e a saída é a posição real da mesa.

O modelo da mesa é apresentado na Equação 3.63 (sua entrada é a força de atuação do controlador e sua saída é a própria posição da mesa) e a equação do controlador se encontra na Equação 3.64 (sua entrada é o erro de posição da mesa e sua saída é a força que será exercida na mesa).

$$G(s) = \frac{0,8}{0,003s^2 + 0,02s + 0,8} \quad (3.63)$$

$$C(s) = s + 10 \quad (3.64)$$

Para esse sistema e controlador, qual é o comportamento esperado da resposta em frequência? Como isso afeta o processo de ajuste do parâmetro do ganho?

### Resolução da situação-problema

O Quadro 3.16 mostra como podemos inserir as funções de transferência no MATLAB e obter informações sobre elas como comando `damp`.

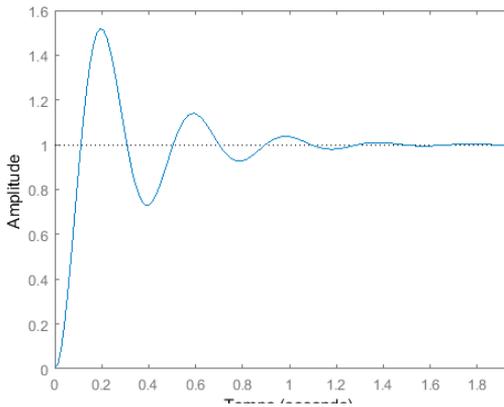
Quadro 3.16| Inserindo o sistema da impressora 3D no MATLAB e traçando o lugar das raízes

43	>> close all	% fecha tudo
44	>> clear all	% apaga tudo
45	>> clc	% limpa tela
46	>> G = tf(.8, [0.003, 0.02, 0.8]);	
47	>> C = tf([1, 10]);	
48	>> damp(G)	
49	>> damp(feedback(C*G,1))	

Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado da linha 48 do Quadro 3.16 demonstra que os coeficientes de amortecimento dos polos de malha aberta, ou seja, a mesa sem malha de controle ativo fechada, é 0,2. Esse coeficiente de amortecimento faz que o sistema tenha grande sobressinal e grande tempo de acomodação, causando a oscilação do sistema. A resposta da mesa em malha aberta a uma entrada degrau unitário de força pode ser vista na Figura 3.26.

Figura 3.26 | Resposta da mesa em malha aberta ao degrau unitário

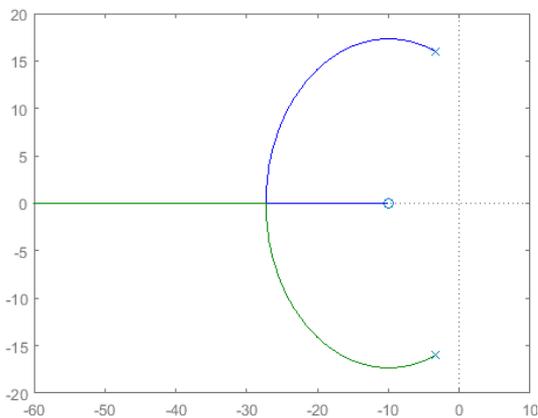


Fonte: elaborada pelo autor.

Com o controlador e em malha fechada, o sistema apresenta fator de amortecimento 1 (resultado da linha 48 do Quadro 3.16), que, como já sabemos, não permite que o sistema oscile ou tenha qualquer sobressinal.

Ao traçar o lugar das raízes da mesa com o controlador (Figura 3.27), vemos que o sistema pode ser submetido a qualquer valor de ganho real, pois isso não fará que o sistema se torne instável. Desse modo, o projetista pode ficar livre para escolher um ganho que vá ao encontro de específicas necessidades de performance do sistema de controle da mesa.

Figura 3.27 | Lugar das raízes da mesa com controlador



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

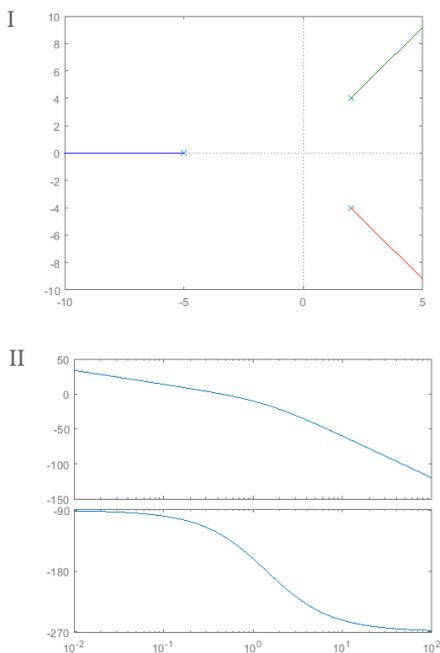
**1.** O MATLAB é um software poderoso que pode auxiliar o projetista de controle a desenvolver controladores para sistemas dinâmicos e avaliar sua estabilidade com base em diferentes métodos desenvolvidos pela ciência.

Sobre a utilização do MATLAB para aferir a estabilidade de sistemas dinâmicos, assinale a alternativa correta.

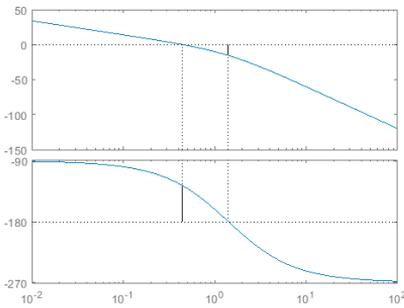
- a) Os comandos `bode` e `margin` são idênticos, pois ambos traçam o diagrama de Bode.
- b) O comando `rlocus` é utilizado para, a partir do sistema em malha aberta, com ganho variável, aferir a estabilidade do sistema em malha fechada, observando-se seus polos no plano complexo.
- c) O comando `eig` retorna se um sistema em espaço de estados é estável ou não.
- d) O MATLAB tem um comando específico que realiza o critério de Routh-Hurwitz.
- e) O comando `tf` não tem utilidade no sentido de avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos.

**2.** Os principais comandos utilizados no MATLAB para avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos requerem como argumento simplesmente a variável que representa o sistema.

Observando as imagens a seguir, qual comando foi utilizado para gerá-las? Suponha que o sistema em questão já tenha sido inserido no MATLAB na variável `G`.



II



- a) I. rlocus (G) ;  
II. bode (G) ;  
III. margin (G) ;
- b) I. rlocus (G) ;  
II. margin (G) ;  
III. bode (G) ;
- c) I. eig (G) ;  
II. bode (G) ;  
III. margin (G) ;
- d) I. eig (G) ;  
II. margin (G) ;  
III. bode (G) ;
- e) I. bode (G) ;  
II. margin (G) ;  
III. rlocus (G) ;

**3.** Com a aplicação do critério de Routh-Hurwitz, podemos avaliar a estabilidade de um sistema dinâmico e, se houver uma variável do sistema não definida, podemos utilizar o critério para estabelecer limites de variação para essa variável e, com isso, garantir a estabilidade do sistema.

No MATLAB, não há uma função que realize os cálculos do critério de Routh-Hurwitz. Com base nesse contexto, analise as afirmações a seguir:

- I. Não há como realizar os cálculos do critério no software.
- II. A única forma de realizar os cálculos é fazendo o download de comandos criados por outros usuários do MATLAB.
- III. É possível fazer os cálculos do método passo a passo para analisar a estabilidade do sistema dinâmico.

IV. É possível que nós mesmos elaboremos o algoritmo de um comando que realize os passos do critério de Routh-Hurwitz.

Assinale a alternativa que apresenta as afirmações corretas:

- a) Apenas I e II.
- b) Apenas I e III.
- c) Apenas II e III.
- d) Apenas III e IV.
- e) Apenas II e IV.

## Referências

---

DORE, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

# Unidade 4

---

## Projeto de controladores

### Convite ao estudo

Olá, aluno! Ao longo deste material, você conheceu os primórdios do controle automático e seus fundamentos, passando pelas nomenclaturas básicas e diferentes arquiteturas de controle, além das maneiras mais comuns de se representar os sistemas dinâmicos e seus modelos matemáticos. Você aprendeu também como se deve proceder para analisar os sistemas dinâmicos tanto no domínio do tempo com as métricas temporais de desempenho, quanto no domínio da frequência. Foram apresentadas técnicas para análise de estabilidade e métodos de estudo da faixa de valores de parâmetros do sistema na qual este se torna estável ou instável.

Nesta unidade, lhe serão apresentados os tipos de controladores mais utilizados na indústria, entre eles, o controlador PID, além de aprender métodos utilizados para ajustá-los, os chamados métodos de sintonia de PID. E, na aplicação desses conceitos, você utilizará o MATLAB tanto para fazer a sintonia manualmente quanto automaticamente.

Nesta unidade, você é responsável pelo projeto de aprimoramento do sistema de controle de posição de uma fresadora para que a máquina se torne mais eficiente, o que, no caso, significa diminuir o tempo de acomodação e o sobressinal máximo da resposta do sistema. A fresadora é uma máquina de usinagem que desenvolve o processo de fresamento por meio da movimentação (rotacional e translacional) de uma ferramenta chamada fresa. Seu objetivo é projetar e validar o controlador que será responsável pelo posicionamento da fresa durante o processo de corte das peças. Ao longo deste material, você obterá as ferramentas necessárias para desempenhar esse papel.

Bons estudos!

# Controladores de processos

## Diálogo aberto

Nesta seção, você aprenderá quais são as ações básicas de controle, que são as constituintes dos controladores vastamente utilizados na indústria:

- Liga-desliga
- Proporcional
- Derivativo
- Integral

Cada uma das ações básicas causa efeitos característicos ao serem aplicados em uma malha de controle. É importante que você, futuro profissional da área, conheça esses efeitos pois, ao desenvolver o projeto de um controlador, saber ajustar empiricamente cada uma das ações permite que sejam resolvidos problemas de adequação de desempenho da resposta do sistema com maior facilidade.

Serão introduzidos também, exemplos esquemáticos de circuitos elétricos que funcionam como as ações de controle proporcional, derivativa e integral, assim como esquemáticos pneumáticos e hidráulicos de controladores que são uma junção desses três tipos de ações.

Nesta seção, você dará seus primeiros passos na tarefa a ser desenvolvida com a fresadora. A máquina, que está funcional, tem um controlador já embarcado na sua malha de controle de posição da ferramenta de corte (a fresa). Como o controlador causa grande impacto na eficiência da máquina e sua produtividade é de grande importância, você deve analisá-lo para descobrir de que tipo é esse controlador atualmente. Sendo o objetivo principal aumentar a produtividade da fresadora, o controlador atual atende aos novos requisitos de desempenho?

Vamos descobrir! Mãos à obra!

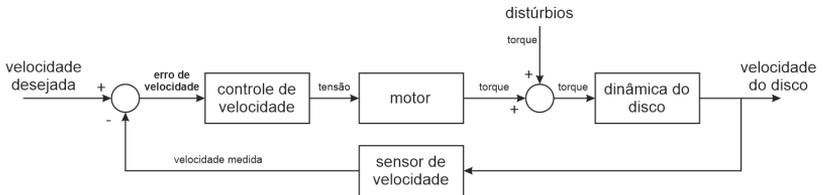
## Não pode faltar

---

Quando vamos controlar algum sistema dinâmico, geralmente desejamos que o sistema siga uma referência definida de alguma maneira. O *Hard Disk Drive* (HDD) de um notebook, por exemplo, necessita girar a uma velocidade constante (geralmente 7.200 rpm) mas, ao mover o computador de um lado ao

outro enquanto ligado, isso pode fazer com que cargas dinâmicas atrapalhem a rotação do disco, levando a erros de escrita e leitura de dados e talvez até os corrompendo, avariando o HDD. Para evitar esses problemas, o motor que gira o disco recebe uma entrada (tensão) a partir de um controlador que, por sua vez, tem como entrada o erro (valor desejado menos o valor real atual) de velocidade angular do disco (obtido por um sensor). A partir dessa informação, calcula-se a tensão que deve ser aplicada ao motor, de forma que, mesmo com os distúrbios de uma movimentação do notebook, o sistema continue a girar com sua velocidade predefinida. A Figura 4.1 apresenta o diagrama de blocos do sistema.

Figura 4.1 | Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade de um HDD



Fonte: elaborada pelo autor.

Em controle, geralmente utilizamos o valor do erro de operação de um sistema para definirmos, ou seja, calcularmos qual será a ação de controle a qual o sistema será submetido. Podemos criar e aplicar qualquer lei de controle que desejarmos, mas existem algumas ações básicas de controle que tendem a ser as primeiras a serem testadas e analisadas no início do projeto de um controlador. São elas:

- Ação liga-desliga (também conhecida como de duas posições ou *on-off*).
- Ação proporcional.
- Ação derivativa.
- Ação integral.

A ação liga-desliga se trata do tipo mais simples de controle. Matematicamente, temos a Equação 4.1.

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & , \text{ para } e(t) \geq 0 \\ U_2 & , \text{ para } e(t) < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1, sendo  $u(t)$  a ação de controle e  $e(t)$  o erro (ambos temporais), se o erro for negativo, a ação será  $U_2$ ; se for positivo, a ação será

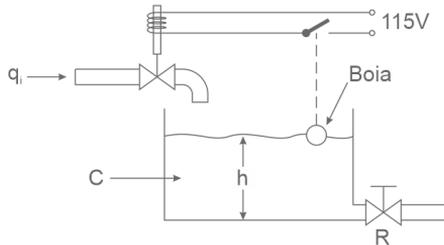
$U_1$ . É comum encontrarmos controladores desse tipo em que temos  $U_2$  nulo ou até mesmo igual a  $-U_1$ . Para ocorrer o chaveamento, é possível ainda que seja inserido um intervalo diferencial entre os valores de erro para os quais o valor da ação de controle é alterado. Com isso, a ação de controle atual é mantida, mesmo que o erro se encontre dentro da faixa de valores que o intervalo diferencial representa.



### Exemplificando

Um sistema de controle de nível de um tanque tem um controle liga-desliga na válvula de entrada do líquido, acionada automaticamente por uma boia, que funciona como sensor do nível (Figura 4.2).

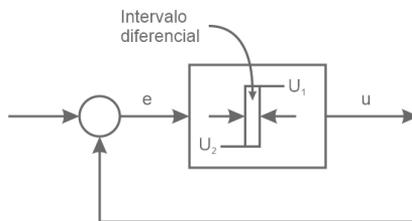
Figura 4.2 | Sistema de tanque com controle liga-desliga de nível



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

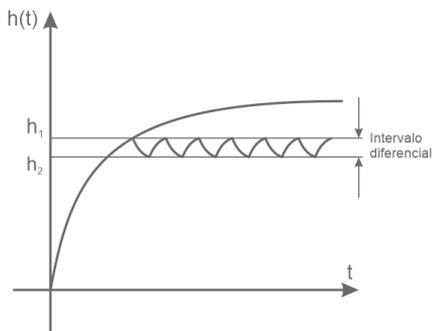
Com a presença do intervalo diferencial (Figura 4.3), há uma faixa de valores entre o erro máximo e o erro mínimo permitidos, para a qual a ação de controle não muda de valor. Com isso, a quantidade de chaveamentos diminui e, conseqüentemente, a vida útil do componente que faz o papel da chave aumenta. O resultado da presença do intervalo diferencial é mostrado na Figura 4.4: quanto maior o intervalo, maior a faixa de erro permitida.

Figura 4.3 | Diagrama de bloco do controlador liga-desliga



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

Figura 4.4 | Comportamento do sistema submetido à ação de controle liga-desliga



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

Na Figura 4.4, o nível  $h_1$  é o nível máximo permitido, e o nível  $h_2$  é o mínimo permitido.

Na ação de controle proporcional, o sinal de controle é dado pela multiplicação do erro por um número real. No domínio do tempo, temos a Equação 4.2 e, no domínio da frequência, a Equação 4.3.

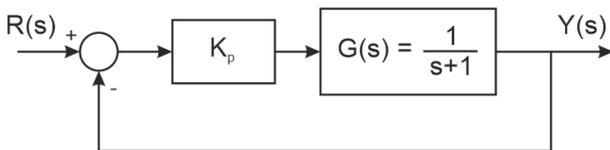
$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4.3)$$

Na unidade anterior, vimos que  $K_p$  também pode ser chamado de ganho. Como ele também representa uma ação proporcional, é chamado de ganho proporcional. A sua aplicação em um sistema em malha fechada faz com que o sistema controlado apresente um erro de regime permanente em sua resposta. A Figura 4.5 mostra um exemplo de diagrama de blocos com sistema de primeira ordem (Equação 4.4) submetido a uma ação de controle proporcional em malha fechada, e a Figura 4.6 mostra a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para diferentes valores de ganho proporcional.

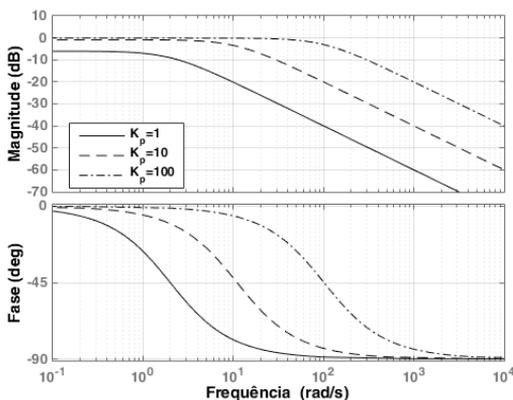
$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (4.4)$$

Figura 4.5 | Diagrama de blocos em malha fechada do sistema de primeira ordem com ação de controle proporcional



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.6 | Diagrama de Bode para diferentes valores do ganho proporcional



Fonte: elaborada pelo autor.

No gráfico da magnitude do sistema em malha fechada (Figura 4.6) é perceptível que, com o aumento de  $K_p$ , a amplitude da resposta do sistema em regime permanente tende a se igualar à amplitude da entrada  $R(s)$  (Figura 4.5) para uma maior faixa de frequências (ganho de 0 dB), assim como a fase tende a ser nula. Em outros sistemas, como os de segunda ordem, apesar de anular o erro de regime permanente, o aumento do ganho proporcional faz com que o sistema responda com um maior sobressinal e grande oscilação, o que geralmente não é um comportamento desejável.



### Refleta

Crie um modelo, um sistema dinâmico de segunda ordem estável (você pode encontrar o formato padrão do sistema de segunda ordem na Seção 2.2 deste material) e obtenha a sua função de transferência em malha fechada com uma ação de controle proporcional (baseie-se no

diagrama de blocos da Figura 4.5), cuja função de transferência em malha fechada é dada por  $\frac{Y(s)}{R(s)}$ . Aplique uma entrada degrau ao sistema para vários valores de ganho e observe o gráfico da saída no tempo. O que ocorre com a resposta observada em relação ao seu período transitório? E em relação ao seu valor de regime permanente?

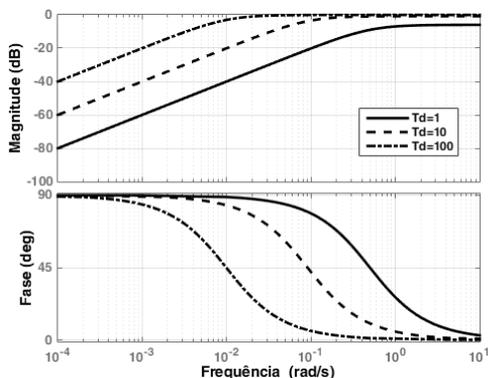
A ação derivativa é definida pela derivada do erro. Matematicamente, temos a Equação 4.5 no tempo e, aplicando a transformada de Laplace, temos a Equação 4.6, em que  $T_d$  é denominado tempo derivativo.

$$u(t) = T_d \frac{d}{dt} e(t) = T_d \dot{e}(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = T_d s \quad (4.6)$$

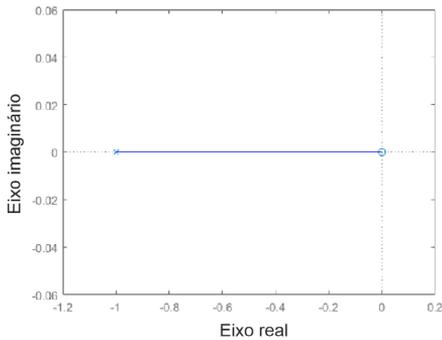
O diagrama de Bode de um sistema em malha fechada é similar ao da Figura 4.5, mas com o controlador sendo uma ação derivativa, conforme apresentado na Figura 4.7, mostra que, com o aumento do tempo derivativo  $T_d$ , a magnitude de 0dB e a fase de  $0^\circ$  vai se estendendo para as baixas frequências, e isso torna a resposta do sistema mais sensível às variações do erro. Por outro lado, no regime transiente, o aumento de  $T_d$  faz com que o sistema tenha um maior tempo de acomodação (veja o tempo de acomodação e outras métricas de resposta temporal na Seção 2.2 deste material), como pode ser visto no gráfico do lugar das raízes (Figura 4.8), devido ao zero que o controlador adiciona na origem do plano complexo. O aumento do tempo derivativo faz com que as raízes do sistema caminhem para os zeros e quanto menor for a parte real da raiz, maior é o seu tempo de acomodação.

Figura 4.7 | Diagrama de Bode para diferentes valores da ação de controle derivativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.8 | Lugar das raízes do sistema de primeira ordem ação derivativa



Fonte: elaborada pelo autor.



### Pesquise mais

Conhecer as implicações da utilização de cada ação de controle é muito importante. Para ver mais detalhes dos efeitos da ação derivativa, pesquise na referência indicada.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

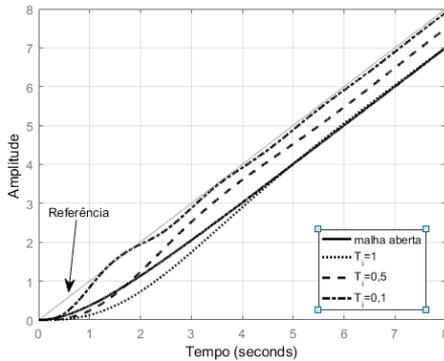
A ação integral de controle é dada pela integral do sinal de erro, representada pela Equação 4.7 no domínio tempo e 4.8 no domínio da frequência, em que  $T_i$  é denominado tempo integrativo.

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (4.7)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad (4.8)$$

A ação integrativa tende a mitigar o erro de regime que pode haver na resposta do sistema, mas pode fazer com que a resposta apresente oscilações que decrementem lentamente, o que geralmente é um comportamento indesejável. A Figura 4.9 mostra a resposta à entrada rampa do sistema de primeira ordem  $G(s)$  (Equação 4.4) em malha aberta e em malha fechada para diferentes ações integrais.

Figura 4.9 | Comparação de resposta do sistema não controlado com sistema controlado por ação integral



Fonte: elaborada pelo autor.

A ação integral adiciona um polo na origem e seu tempo integrativo encontra-se no denominador, logo, assim como na ação derivativa, o sistema tem um aumento no tempo de acomodação com o aumento de  $T_i$ .



### Assimile

- **Ação proporcional**

- Não adiciona zeros nem polos ao sistema.
- Aumento do ganho  $K_p$  diminui o tempo de subida, mas pode deixar o sistema com resposta muito oscilatória ou até instável.

- **Ação derivativa**

- Adiciona um zero na origem do plano complexo no lugar das raízes do sistema.
- Sua aplicação deixa o sistema mais sensível à variação do erro e pode aumentar o tempo de acomodação da resposta.

- **Ação integral**

- Adiciona um polo na origem do plano complexo no lugar das raízes do sistema.

Sua aplicação elimina o erro de regime permanente, mas pode tornar a resposta do sistema excessivamente oscilante.

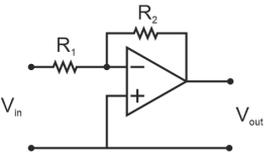
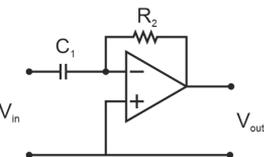
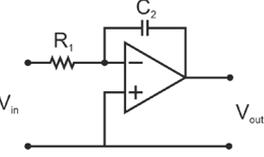
Agora, vamos ver como podemos realizar essas ações básicas de controle na prática utilizando sistemas eletrônicos, pneumáticos e hidráulicos.

Com sistemas eletrônicos, é extremamente mais simples de se obter cada um desses tipos de ações de controle do que com sistemas pneumáticos e hidráulicos.

Para a ação liga-desliga, em uma aplicação em que a frequência de chaveamento é baixa (abaixo de 5Hz), podemos utilizar relês que têm como entrada uma corrente baixa (da ordem de 0,1 A) e podem chavear circuitos com altas tensões. Caso a frequência de chaveamento seja alta, podemos utilizar transistores, que podem chegar a uma frequência de chaveamento de 1,5 GHz.

Para as ações proporcional, derivativa e integral, utiliza-se amplificadores operacionais. O Quadro 4.1 exibe um exemplo de circuito amplificador para cada ação.

Quadro 4.1 | Ações básicas de controle com circuitos eletrônicos

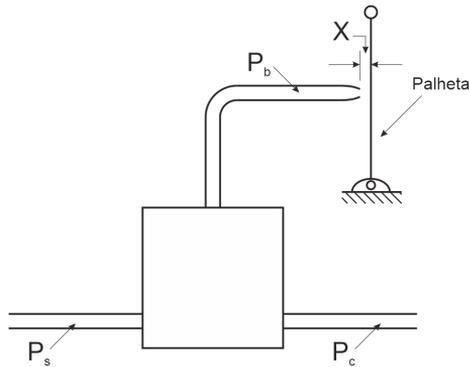
Circuito	Função de transferência
<p>Ação proporcional</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{R_1}{R_2}$ $K_p = -\frac{R_1}{R_2}$
<p>Ação derivativa</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -R_2 C_1 s$ $T_d = -R_2 C_1$
<p>Ação integrativa</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{1}{R_1 C_2 s}$ $T_i = -R_1 C_2$

Fonte: elaborado pelo autor

Para um sistema pneumático, a ação de controle liga-desliga pode ser obtida com um controlador, como o mostrado na Figura 4.10: a pressão

$P_s$ , que alimenta o sistema, pode escapar por  $P_b$  (e não passa por  $P_c$ , não enviando sinal de controle para o sistema) dependendo da distância da  $X$  entre a palheta e o bocal. Se o bocal estiver suficientemente fechado pela palheta, a pressão  $P_c$  tende a ser igual a  $P_s$ . Caso contrário,  $P_c$  é nulo.

Figura 4.10 | Controlador liga-desliga pneumático

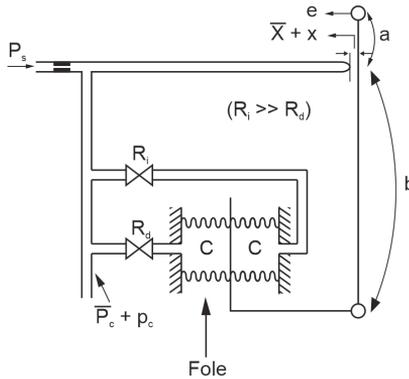


Fonte: Ogata (2010, p. 104).

A Figura 4.11 mostra o esquemático de um controlador pneumático, alimentado pela pressão  $P_s$ , que é formado de três ações básicas: proporcional, derivativa e integral. A distância  $X$  da palheta até o bocal é definida pelo erro  $e$  pela posição do fole (formado por duas capacitâncias fluidicas de valor  $C$ ), sendo que essas distâncias são ponderadas pela alavanca, de comprimento total  $a + b$ , da própria palheta. O aumento do erro  $e$  faz com que a palheta se aproxime do bocal e, com isso, aumente a pressão  $\bar{P}_c + p_c$  e a pressão do fole (que funciona como uma ação proporcional). Mas, como a resistência fluidica  $R_i$  é muito maior que a resistência fluidica  $R_d$ , o fole da esquerda se expande mais rápido e faz com que a palheta se distancie do bocal, diminuindo a pressão de saída. Após um tempo, as pressões dos foles se igualam e a posição da palheta retorna à posição de equilíbrio. O fole da esquerda, em conjunto com a resistência  $R_d$  e a realimentação na haste, compõe a ação de controle derivativa. Analogamente, o fole da direita com a resistência  $R_i$  e a realimentação para a haste compõem a ação de controle integral. Para utilizar esse tipo de controlador, o erro que se deseja eliminar deve ser convertido mecanicamente em uma movimentação linear, para que possa ser conectada ao ponto  $e$  da palheta. A pressão de saída  $\bar{P}_c + p_c$  do controlador deve ser conectada ao atuador da planta ou processo que gerou o sinal de erro, fechando, assim, a malha do sistema. A pressão de saída é  $\bar{P}_c + p_c > p_c$  pois, como dito anteriormente, sistemas fluidicos são geralmente

modelados por meio de linearização em torno de um ponto de operação que, no caso, é indicado pela pressão  $\bar{P}_c$ , enquanto que a parcela  $p_c$  da pressão total de saída (que alimenta o atuador) indica a flutuação de valor em torno do ponto de operação.

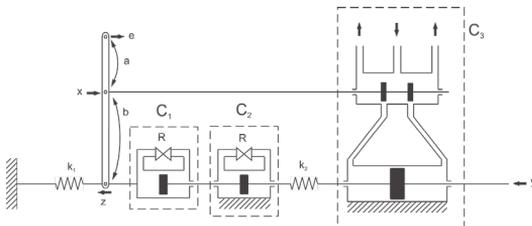
Figura 4.11 | Controlador pneumático com ações proporcional, derivativa e integral



Fonte: Ogata (2010, p. 111).

Em sistemas hidráulicos, um controlador que apresenta as ações de controle proporcional, derivativa e integral é exibido na Figura 4.12. O erro  $e$  define a posição superior da haste que, de acordo com sua alavanca, move o eixo da válvula piloto do servomotor. Se a válvula se mover para a direita, o fluxo de óleo sob pressão que entra no servomotor fará com que o cilindro de potência se mova para a esquerda, movimentando consigo todo o eixo do cilindro de potência que moverá a haste para a esquerda, mitigando o movimento que o erro impôs a esta no início. Em conjunto, o controlador  $C_1$  e a mola  $k_1$ , desenvolvem a ação integral de controle e configuram um amortecedor hidráulico.  $C_2$ , por sua vez, desenvolve a ação derivativa; e  $C_3$ , em conjunto com a haste de comprimento  $a + b$ , desenvolve a ação de controle proporcional.

Figura 4.12 | Controlador hidráulico com ações proporcional, derivativa e integral



Fonte: Ogata (2010, p. 122).



## Pesquise mais

Os sistemas pneumáticos e hidráulicos são tipos de sistemas com comportamento intrinsecamente não lineares, o que torna difícil a obtenção matemática de seus modelos. Para lidar com esses tipos de sistemas, costuma-se linearizá-los em torno do seu ponto (ou estado) de operação. Embora essa técnica acarrete em perda de generalidade, ela traz muitas vantagens em termos de manipulação matemática, como a simulação prévia dos efeitos de utilização do sistema. Para entender melhor como se procede para realizar a linearização desses tipos de sistemas, assim como vantagens e desvantagens de se utilizar cada um deles e, ainda, mais detalhes do funcionamento dos controladores, leia o capítulo 4 do livro a seguir:

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

## Sem medo de errar

Sua tarefa é analisar o controlador de posição que se encontra implementado em uma fresadora (a Figura 4.13 mostra um exemplo de máquina fresadora) para avaliar se ele se encontra dentro das novas especificações de desempenho.

O modelo do sistema dinâmico da fresadora é dado pela Equação 4.9 e o controlador é dado pela Equação 4.10. Após análise do tempo de fabricação de uma peça na fresadora, percebeu-se que esse tempo deve ser diminuído pois, atualmente, o processo de fabricação precisa ser mais ágil para atender às demandas de entrega do produto, ou seja, a máquina tem que ser capaz de responder de maneira mais rápida aos comandos de posicionamento da ferramenta. De acordo com a nova necessidade de agilizar o processo e com estudos do que deve ser alterado para atender a essa demanda, decidiu-se que o tempo de acomodação do sistema não deveria ser maior que 10 segundos. Para não ter perigo de o erro de posição ser grande o suficiente para piorar a qualidade final das peças, o valor máximo de sobressinal foi definido como sendo de 10% o tempo de acomodação. Embora estes

Figura 4.13 | Máquina fresadora



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DeckelMahok-DMU50e-MachiningCenter.jpg>. Acesso em: 5 fev. 2019.

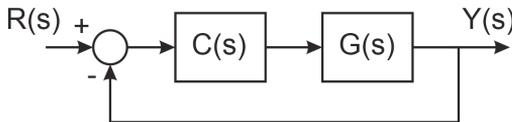
valores pareçam elevados, devemos lembrar que a inércia do sistema como um todo é muito grande. Na prática, o sistema nunca receberia um sinal com alteração tão brusca como é o exemplo da entrada degrau, mas se o sistema se comportar de acordo com as especificações desejadas para a entrada degrau, então, estarão satisfeitas as necessidades do projeto.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.9)$$

$$C(s) = 4,622 \left( \frac{1}{12s} + 1 \right) \quad (4.10)$$

O sistema funciona como mostrado no diagrama de blocos da Figura 4.14.

Figura 4.14 | Diagrama de blocos do sistema de posição da fresa



Fonte: elaborada pelo autor.

A função de transferência do sistema é mostrada na Equação 4.11.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{110,9s + 9,244}{12s^4 + 72s^3 + 60s^2 + 110,9s + 9,244} \quad (4.11)$$

Obtendo as informações da resposta do sistema com o controlador à entrada degrau utilizando o MATLAB, vemos que o tempo de acomodação é de 13,9 segundos e o sobressinal é de 55,8%. O controlador utilizado possui uma ação proporcional ( $K_p = 4,622$ ) somada a uma ação integral  $\left( \frac{1}{2,596s} \right)$ .

Como o controlador utilizado até então não atende às novas especificações de desempenho, é necessário que seus ganhos sejam reajustados, ou mesmo que o controlador seja substituído.

## Controle de posição da porta de um forno

### Descrição da situação-problema

Uma empresa de pintura eletrostática tem sua linha de produção totalmente automatizada. As peças são penduradas em um trilho suspenso que as levam por toda a linha para passar pelos estágios do processo: limpeza, pintura e secagem. Para a secagem da tinta, são utilizados fornos montados sobre a linha (Figura 4.15) de modo que, ao saírem do forno, as peças estejam prontas para serem entregues.

Você recebe um telefonema do proprietário da empresa pedindo-lhe para averiguar o problema que apareceu: a empresa está tendo um grande aumento de gasto com energia e as peças não estão saindo secas do forno. Sabe-se que o controle de temperatura, em malha fechada, é composto pelas ações proporcional, derivativa e integral, sendo que cada ação é executada por uma placa de circuito independente. O sintoma é: embora o técnico responsável pelo equipamento tenha aumentado o ganho do controlador, ainda assim, há defasagem entre o valor observado e o valor desejado.

O que pode ter acontecido?

### Resolução da situação-problema

Como os circuitos responsáveis por cada ação de controle estão montados em placas independentes, podemos começar a análise supondo que o possível mau funcionamento da placa de uma das ações não influencia no mau funcionamento da outra ação de controle. O proprietário da empresa informou que o sintoma do problema é a não eliminação do erro de regime permanente do sistema de aquecimento do forno, ou seja, a temperatura necessária para o bom processo de cura da tinta não é atingida.

Figura 4.15 | Forno utilizado no processo



Fonte: <https://bit.ly/2l0RfUH>. Acesso em: 5 fev. 2019.

Sabemos que as ações de controle responsáveis pela mitigação e eliminação do erro de regime permanente são, respectivamente, as ações proporcional e integral, mas o proprietário também informou que embora o técnico responsável pelo equipamento ter aumentado o ganho do controlador causou uma aproximação da temperatura do forno à temperatura desejada, o erro de regime não foi eliminado. Esse fato nos diz que a placa da ação proporcional está funcionando bem, pois tal comportamento é o esperado para esse tipo de ação.

Por fim, podemos concluir que possivelmente a placa do circuito da ação de controle integral deixou de funcionar adequadamente pois, como há erro de regime, essa ação não está sendo aplicada.

## Faça valer a pena

---

**1.** Existem ações básicas de controle que podem ser aplicadas nos sistemas dinâmicos que, em geral, são as mais simples de serem implementadas na prática e solucionam uma grande gama de problemas de controle quando bem ajustadas.

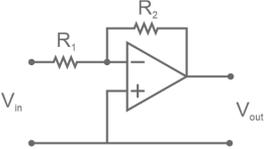
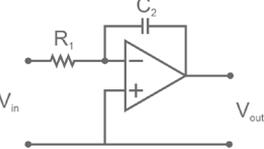
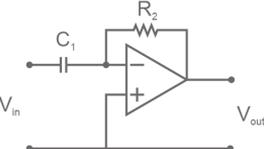
Em relação às ações básicas de controle, leia as afirmações a seguir:

- I. A ação de controle proporcional corresponde ao fator de ganho do diagrama de Bode.
- II. A ação de controle liga-desliga não pode ser utilizada em sistemas pneumáticos, pois não é possível desligar o ar atmosférico.
- III. As ações básicas de controle devem ser utilizadas separadamente.
- IV. A ação de controle proporcional é pouco utilizada por causa de sua impossibilidade de atuar no erro de regime.

É correto o que se afirma em:

- a) I e II, apenas.
- b) I, apenas.
- c) II e III, apenas.
- d) III, apenas.
- e) I, II e III.

**2.** Em circuitos elétricos, de posse do conhecimento do comportamento de seus elementos básicos, é relativamente simples criar ações de controle liga-desliga, proporcional, derivativo e integrativo utilizando-se relés, transistores e/ou amplificadores operacionais, também conhecidos como AmpOp. Nesse contexto, considere os circuitos, dispostos de I a III, e as ações de controle, dispostos de A a C, na tabela a seguir.

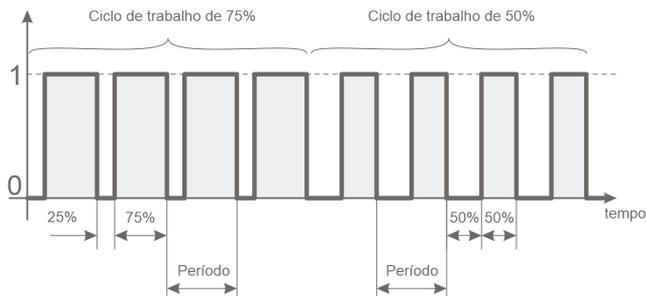
Circuito	Ação de controle
<p>I</p> 	<p>A. Ação proporcional.</p>
<p>II</p> 	<p>B. Ação derivativa.</p>
<p>III</p> 	<p>C. Ação integral.</p>

Fonte: elaborado pelo autor

Assinale a alternativa que relaciona corretamente os circuitos com suas respectivas ações de controle.

- a) A-I, B-III, C-II.
- b) A-I, B-II, C-III.
- c) A-II, B-III, C-I.
- d) A-III, B-II, C-I.
- e) A-II, B-I, C-III.

**3.** Uma técnica muito utilizada para controlar motores elétricos é o *PWM* (do inglês *pulse-width-modulation*, ou modulação por largura de pulso, em português). Nessa técnica, a potência necessária é entregue pelo controle ao sistema por meio de um trem de pulsos, ou seja, por uma onda quadrada, ilustrada a seguir, na qual o valor binário 1 corresponde a ligar, e o valor binário 0 corresponde a desligar.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com esse tipo de técnica, ao utilizar um período de tempo de chaveamento muito menor que a constante de tempo do sistema controlado, o sinal de controle será “assimilado” pelo sistema como uma onda, cuja potência é dada de acordo com o ciclo de trabalho.

O *PWM* é gerado, majoritariamente, por um circuito eletrônico de baixa potência, que tem o papel de controlador (circuito I). Seu sinal passa por um outro circuito (circuito II), que faz a interface entre a baixa e a alta potência por meio de amplificação do sinal para controlar, por exemplo, motores trifásicos.

Assinale a alternativa que caracteriza corretamente os circuitos I e II.

- a) Circuito I: ação de controle liga-desliga; circuito II: ação de controle proporcional.
- b) Circuito I: ação de controle liga-integral; circuito II: ação de controle derivativo.
- c) Circuito I: ação de controle derivativo; circuito II: ação de controle integral.
- d) Circuito I: ação de controle liga-desliga; circuito II: ação de controle liga-desliga.
- e) Circuito I: ação de controle proporcional; circuito II: ação de controle proporcional.

# Tipos de controladores de sistemas dinâmicos

## Diálogo aberto

Na seção anterior, você conheceu as ações básicas de controle (ação proporcional, ação derivativa e ação integral) por meio de suas equações e efeitos no lugar das raízes do sistema em malha fechada. Essas três ações constituem controladores muito utilizados na indústria:

- Controlador P (apenas ação proporcional).
- Controlador PI (ação proporcional e integral).
- Controlador PID (ação proporcional, integral e derivativa).

Esses tipos de controladores se mostram muito importantes pois, mesmo sem conhecimento físico-matemático (modelo dinâmico) do sistema a ser controlado, é possível obter um comportamento adequado utilizando-se principalmente o PID.

Nesta seção, estudaremos os efeitos que esses controladores têm nos sistemas dinâmicos utilizando análise temporal e no domínio da frequência. Além disso, veremos como podemos ajustar os parâmetros de controle para obtermos um comportamento desejado na resposta do sistema em malha fechada. Veremos também os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols, que nos auxiliarão na obtenção dos valores dos parâmetros desses controladores.

Neste contexto, continuaremos com a aplicação dos conhecimentos no problema sobre o qual você é o responsável técnico: controle de posição de uma máquina fresadora. Você já percebeu que o controlador atual da máquina não é adequado às novas especificações de resposta no tempo (menos de 10% de sobressinal e um minuto de tempo de acomodação). O que pode ser feito em relação ao controlador para adequar a resposta da máquina?

Vamos descobrir! Bons estudos!

## Não pode faltar

Na última seção, você conheceu as ações básicas de controle: a proporcional, a derivativa e a integral. Utilizando essas ações, podemos criar controladores vastamente utilizados na indústria, como controladores P (apenas

proporcional), PD (proporcional-derivativo), PI (proporcional-integral), PID (proporcional-integrativo-derivativo), PI-D e I-PD (controladores proporcional-integral-derivativo modificados), entre outras possibilidades. Os dispositivos do tipo Controlador Lógico Programável (CLP), por exemplo, geralmente vêm com algoritmo de controle PID pré-implementados, ficando a cargo do usuário ajustar (sintonizar) os parâmetros do controlador. Esse tipo de dispositivo é muito utilizado para controlar motores, por exemplo.

Aqui focaremos nos controladores P, PI e PID, assim como em métodos de sintonia, pois, incrementando a complexidade do controlador, podemos entender o efeito de cada ação de controle.



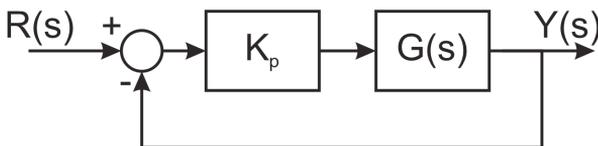
### Pesquise mais

Como já mencionado, existem os controladores PID modificados, como o PI-D e o I-PD, no qual a realimentação não é unitária ou há mais de uma retroalimentação. Esses tipos de controladores são relativamente mais complexos e têm um diagrama de blocos modificado, mas têm vantagens em relação ao esquema PID básico. Siga a referência indicada para obter mais informações sobre os controladores PID modificados.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

Sabemos que a ação de controle P não acrescenta polos nem zeros no sistema em malha fechada. Ele apenas faz com que as raízes do sistema caminhem dos polos para os zeros de malha fechada. Ao utilizar o controlador P, a resposta de um sistema como o da Figura 4.16 a uma entrada degrau apresenta um erro estacionário de regime calculado utilizando-se o teorema do valor final, como mostra a Equação 4.12. O sistema utilizado no exemplo é apresentado na Figura 4.16, em que  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ .

Figura 4.16 | Sistema de controle em malha fechada com ganho proporcional

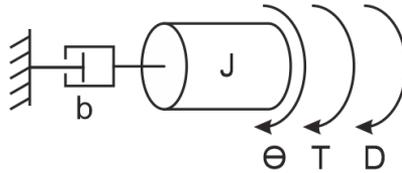


Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 197).

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{K_p}{Ts + 1 + K_p} \right) \\
 &= \frac{1}{1 + K_p}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

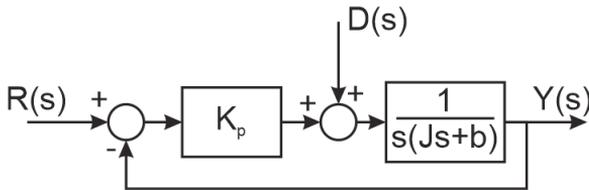
Ainda com o controlador proporcional, vamos ver como ele se comporta com um sistema onde há distúrbios. O exemplo é o da Figura 4.17, que apresenta um sistema rotacional com inércia  $J$  e amortecimento viscoso  $b$ , cuja entrada é um torque  $T$ ; o distúrbio do sistema é o torque  $D$ ; e a saída é o ângulo  $\theta$ . Seu modelo em diagrama de blocos com controlador proporcional é mostrado na Figura 4.18.

Figura 4.17 | Sistema mecânico rotacional



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.18 | Diagrama de blocos do sistema rotacional com distúrbio



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 199).

Pelo teorema do valor final, temos que, com entrada  $R(s) = 0$  e o distúrbio sendo uma perturbação em degrau de amplitude  $\alpha$ , o sistema apresenta erro de regime permanente de valor  $-\frac{\alpha}{K_p}$ , como mostra a Equação 4.13.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( 0 - \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{1}{Js^2 + bs + K_p} \right) \\
&= -\frac{\alpha}{K_p}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para diminuir o erro, podemos melhorar a resposta desses tipos de sistemas adicionando a ação de controle integral, ou seja, utilizando um controlador PI. O modelo matemático do controlador PI é dado pela Equação 4.14.

$$C_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_p}{T_i s} = \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \tag{4.14}$$

A adição da ação integral de controle ao sistema faz com que sejam adicionados um polo de malha aberta na origem do plano complexo e um zero de malha aberta em  $-\frac{1}{T_i}$ , em que  $T_i$  é o tempo integral da ação de controle integral.

Ao substituírmos o controlador tipo P da Figura 4.16, por um controlador PI, o erro de regime permanente a uma entrada degrau se torna nulo, como pode ser observado na Equação 4.15.

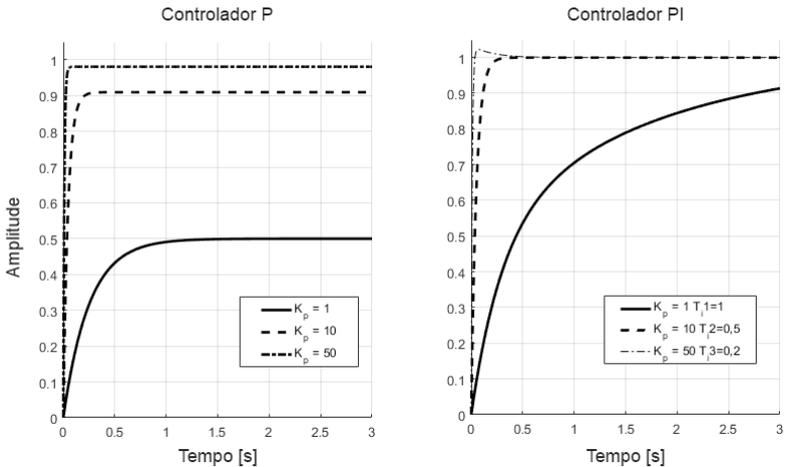
$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i T s^2 + (T_i + K_p) s + K_p} \right) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{K_p (T_i s + 1)}{T_i T s^2 + (1 + K_p) T_i s + K_p} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

O mesmo acontece com o sistema cujo diagrama de blocos se encontra na Figura 4.18. Ao substituir o controlador P ( $K_p$ ) por um controlador PI, o erro de regime permanente desaparece (Equação 4.16).

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( 0 - \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{T_i s}{J T_i s^3 + b T_i s^2 + K_p T_i s + K_p} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A Figura 4.19 mostra as respostas ao degrau de um sistema de primeira ordem  $\frac{1}{0,5s+1}$  em malha fechada (configuração da Figura 4.16) com diferentes configurações de controladores P e PI.

Figura 4.19 | Resposta temporal de um sistema de primeira ordem com controladores P e PI



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que o controlador PI, diferentemente do controlador P, consegue eliminar o erro de regime permanente para a entrada degrau unitário.



### Refleta

Para o mesmo sistema dinâmico de primeira ordem, qual é o erro de regime permanente para uma entrada rampa quando utilizamos um controlador P? E com relação a um controlador PI? Qual é a diferença?

O controlador do tipo PID, com a presença das três ações de controle, permite maior poder de manipulação da resposta do sistema por parte do projetista. A vantagem de se utilizar a ação derivativa é que ela torna o sistema mais sensível a variações no erro, atuando, assim, de maneira antecipada sobre o erro, mas também causa aumento no tempo de acomodação do sistema. Veja a Equação 4.17, que corresponde ao controlador PID.

$$C(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s} \quad (4.17)$$

Vemos que o controlador PID adiciona um polo de malha aberta na origem e dois zeros em  $\frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_d T_i}}{2}$ . Se observarmos as fórmulas das métricas temporais

da resposta de um sistema, como o tempo de subida ( $t_r$ , Equação 4.18), o tempo de pico ( $t_p$ , Equação 4.19) e o valor do sobressinal ( $M_p$ , Equação 4.20), percebemos que, alterando os valores  $T_d$  e  $T_i$ , juntamente com o ganho  $K_p$ , podemos fazer com que a resposta temporal do sistema se aproxime da resposta desejada, de acordo com os requisitos das métricas temporais.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \beta = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} \quad (4.18)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (4.19)$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (4.20)$$

Uma das maneiras de escolher os valores  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  para o controlador PID é utilizar as especificações de desempenho do projeto a ser desenvolvido de modo a limitar os valores aplicáveis aos parâmetros do controlador. De posse do modelo dinâmico do sistema, existem métodos analíticos de alocação de polos nos quais o gráfico do lugar das raízes é utilizado para fazer com que os parâmetros do controlador utilizado forcem as raízes do sistema a aproximarem-se dos resultados desejados.



### Pesquise mais

O gráfico do lugar das raízes de um sistema apresenta muitas informações sobre cada um dos polos e zeros. Os métodos analíticos fazem uso dessas informações para alocar estrategicamente os polos e, consequentemente, definir os parâmetros do controlador para obter o comportamento desejado. Acompanhe a utilização de métodos analíticos na referência indicada a seguir.

NISE, N. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3. ed. São Paulo: LTC, 2002. p. 378-380.

Por outro lado, pode ser muito comum surgir a tarefa de se controlar um processo ou sistema sem que haja informação sobre o modelo, ou pode não ser possível (por motivos financeiros e de tempo necessários) modelar o sistema.

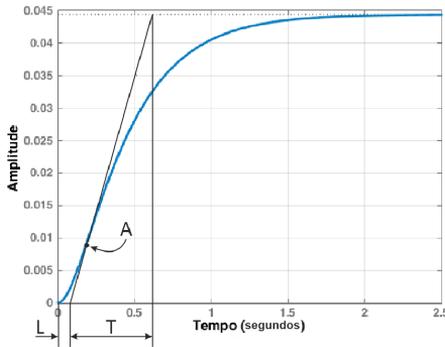
Mesmo para esse caso, existem vários métodos de sintonia de PID. Estudaremos os de Ziegler-Nichols, que são dois métodos de ajuste de

parâmetros que resultam em um trio de valores  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  que fornecem uma operação estável para o sistema, mas não garantem quaisquer requisitos de desempenho. Esses métodos devem ser encarados como um valor inicial para os três valores, para aí então, com um sistema estável e, tendo o conhecimento do efeito que o ajuste de cada uma das ações de controle do PID causa, refinar a resposta do sistema para ir ao encontro do comportamento desejado. Um dos métodos baseia-se na resposta do sistema em malha aberta a um degrau. O outro inicia seu processo com o ajuste do ganho proporcional de malha fechada para tornar o sistema marginalmente estável. Aqui apresentaremos o primeiro método que se aplica a sistemas que respondem à entrada degrau com uma curva que tem um formato em S.

Considere o sistema  $G(s)$  (Equação 4.21). Embora conheçamos seu modelo, aplicaremos o método (sem perda de generalidade) a ele. Como dito, devemos impor uma entrada degrau ao sistema e observar sua resposta (Figura 4.20).

$$G(s) = \frac{s + 8}{(s + 3)(s + 6)(s + 10)} \quad (4.21)$$

Figura 4.20 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a resposta em mãos, devemos encontrar o ponto A, que é o ponto de inflexão da curva (ponto no qual a segunda derivada da função é nula) e traçar uma reta tangente à curva nesse ponto. A distância horizontal da origem do sistema de coordenadas até o ponto de cruzamento da reta com o eixo horizontal define a quantidade  $L$  que, no caso, vale 0,055 segundos. A distância horizontal entre o ponto de cruzamento da reta com o eixo horizontal e o ponto de cruzamento da reta com o valor de regime permanente define a quantidade  $T$  que, no caso, vale 0,6270 segundos. Ambos os

valores estão indicados na Figura 4.20. De posse de  $T$  e  $L$ , recorreremos ao quadro de valores indicados (Quadro 4.2) pelo método de Ziegler-Nichols para os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ .

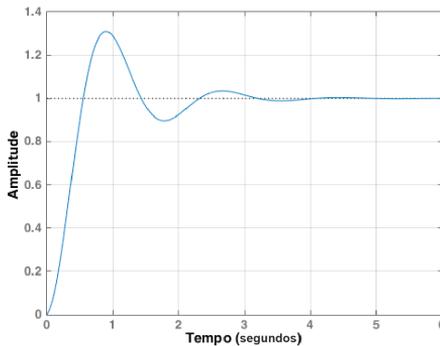
Quadro 4.2 | Valores do método de Ziegler-Nichols para os parâmetros do controlador

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
PI	$0,9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Fonte: Ogata (2010, p. 524).

Perceba que o método de sintonia de controladores não se limita aos do tipo PID, mas também indica valores para os controladores P e PI. Para o sistema da Equação 4.21, de acordo com o método, seu controlador PID é ajustado com  $K_p = 13,5168$ ,  $T_i = 0,1113$  e  $T_d = 0,0278$ . A resposta em malha fechada à entrada degrau desse sistema com o controlador proposto é mostrada na Figura 4.21.

Figura 4.21 | Reposta do sistema controlado após a aplicação do método de Ziegler-Nichols



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, obtemos um sistema com uma resposta estável, com erro de regime permanente nulo, sobressinal de 30,9%, tempo de acomodação de 2,95 segundos e tempo de subida de 0,386 segundos.

Perceba que não utilizamos nenhuma especificação de desempenho para calcularmos os ganhos do controlador, ou seja, não devemos esperar que o fato de sintonizar um controlador usando método de sintonia resolverá um problema de controle. A vantagem que métodos como esse apresentam é a garantia de se iniciar o projeto com um controlador pelo menos estável.

O outro método de sintonização inicia-se colocando-se o modelo  $G(s)$  em malha fechada com um controlador do tipo P. O ganho do controlador é ajustado até encontrar-se o valor que faz o sistema responder de maneira marginalmente estável à entrada degrau. Esse valor de ganho é denominado ganho crítico ( $K_{cr}$ ). Observando-se a resposta oscilatória do sistema (em regime permanente), devemos obter o seu período de oscilação, denominado período crítico ( $P_{cr}$ ). A partir desses dois valores, obtemos os valores dos controladores do tipo P, PI e PID, segundo este método, como mostra o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Cálculo dos parâmetros do controlador

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

$K_{cr}$  : ganho crítico;  $P_{cr}$  : período crítico

Fonte: Ogata (2010, p. 525).



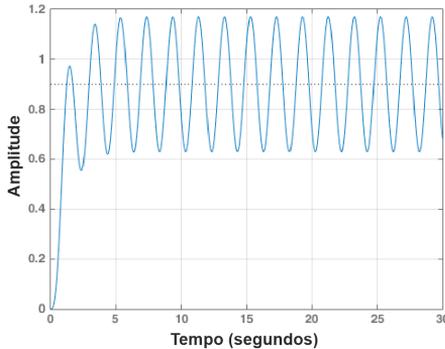
### Exemplificando

Para exemplificar, apliquemos o método no sistema da Equação 4.22.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 10s + 1} \quad (4.22)$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz (veja o procedimento na primeira seção da Unidade 3), temos que o ganho crítico para esse sistema é  $K_{cr} = 9$ . A Figura 4.22 mostra que, com esse ganho, o sistema realmente se torna marginalmente estável.

Figura 4.22 | Sistema com comportamento marginalmente estável



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, precisamos calcular o período de oscilação da resposta do sistema. Na segunda seção da Unidade 3, vimos que se substituirmos a variável  $s$  por  $j\omega$ , obtemos a função de transferência do sistema em regime permanente. Com isso, podemos calcular a frequência de oscilação do sistema (igualando a equação característica do sistema de malha fechada a zero para calcular seu polo) e, então, encontrar o período de oscilação crítico.

A Equação 4.23 mostra o resultado para a frequência de oscilação.

$$\begin{aligned}
 s^3 + s^2 + 10s + 1 + K_{cr} &= 0 \\
 -j\omega^3 + \omega^2 + 10j\omega + 1 + K_{cr} &= 0 \\
 (\omega^2 + 10) + j(-\omega^2 + 10\omega) = 0 \Rightarrow \omega &= \begin{cases} -10 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ rad/s} \\ 10 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Como o período (em segundos) é dado por  $\frac{2\pi}{\omega}$  (com  $\omega$  em rad/s), temos que  $P_{cr} = 3,173$  segundos. Agora, basta substituirmos os valores de  $K_{cr}$  e  $P_{cr}$  no Quadro 4.3 para encontrar os valores do controlador desejado. Se procuramos, por exemplo, apenas um controlador P, então, de acordo com o método, seu ganho deve ser  $K_p = 0,5K_{cr} = 4,5$ .



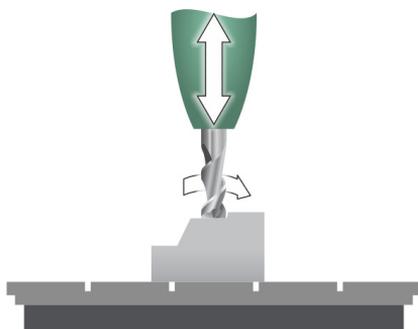
### Assimile

Para ambos os métodos de Ziegler-Nichols de sintonia de controladores, não é necessário conhecer a função de transferência do sistema para aplicá-los. Mas, de posse da função de transferência, podemos aplicar ambos os métodos analiticamente.

Agora, vamos continuar a tarefa iniciada na seção anterior: a análise do controle de posição da fresadora. Conforme Figura 4.23, esse controlador é responsável pela movimentação vertical.

Vimos que o controlador PI (Equação 4.22), com o ajuste existente, não é adequado às novas necessidades de produção da fresa (modelo na Equação 4.23). Então, você, como responsável pelo projeto de aprimoramento da máquina, deve atualizar o controlador atual, substituindo-o por um controlador que seja adequado.

Figura 4.23 | Ilustração da movimentação estudada



Fonte: elaborada pelo autor.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.24)$$

$$C(s) = 4,622 \left( \frac{1}{12s} + 1 \right) \quad (4.25)$$

Ao analisarmos a resposta do sistema em malha fechada a uma entrada degrau, vemos que o controlador realmente não se adequa às novas especificações de desempenho, pois apresenta sobressinal de 55,8% (sendo que o limite é de 10%) e tempo de acomodação de 13,9 s (sendo que o limite é de 10 s).

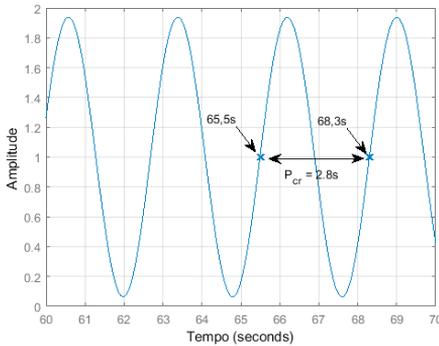
Para iniciar o processo de sintonia de um novo controlador PID, utilizaremos o segundo método de Ziegler-Nichols (pois esse sistema não apresenta saída em formato S para uma entrada degrau), cujo primeiro passo é tornar o sistema marginalmente estável. Para descobrir qual é o ganho que torna o sistema marginalmente estável (ganho crítico), podemos recorrer ao critério de Routh-Hurwitz, sendo que a função de transferência em malha fechada (saída  $Y(s)$  por entrada  $R(s)$ ) do sistema com um controlador P é a Equação 4.26.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p} \quad (4.26)$$

$$\begin{array}{r}
 s^3 \quad 1 \quad 5 \quad 0 \\
 s^2 \quad 6 \quad 2K_p \quad 0 \\
 s^1 \quad \frac{30-2K_p}{6} \quad 0 \\
 s^0 \quad 2K_p
 \end{array}$$

Então, como pelo critério de Routh-Hurwitz todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos para que o sistema seja estável, para que o sistema seja marginalmente estável, basta que um desses elementos seja nulo. Para fazer com que o terceiro elemento seja nulo,  $K_p$  deve ser 15. Agora, precisamos encontrar o período crítico, que é o período de oscilação da resposta marginalmente estável em regime permanente. A resposta do sistema com  $K_p = 15$  é mostrada na Figura 4.24.

Figura 4.24 | Resposta do sistema em malha fechada com ganho crítico



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a resposta do sistema marginalmente estável (Figura 4.24), o período crítico é  $P_{cr} = 2,8s$ . Com os valores de ganho e período críticos, recorreremos ao quadro de cálculo dos parâmetros do controlador PID.

Quadro 4.4 | Tabela de cálculo dos parâmetros do controlador

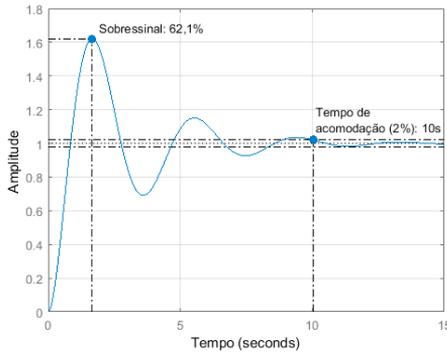
Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2} P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

$K_{cr}$  : ganho crítico;  $P_{cr}$  : período crítico

Fonte: Ogata (2010, p. 525).

De acordo com a última linha do Quadro 4.4,  $K_p = 9$ ,  $T_i = 1,4$  e  $T_d = 0,35$ . Com esses valores, temos um novo controlador PID (Equação 4.25), cuja resposta ao degrau unitário é exibida na Figura 4.25.

Figura 4.25 | Reposta do sistema em malha fechada com controlador PID sintonizado



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que, embora o método tenha levado à obtenção de um controlador PID estável para o sistema com um tempo de acomodação adequado (10 segundos), o sobressinal está em 62,1%, o que é inaceitável para o propósito do projeto, pois o máximo aceito é de 10%. Então, precisamos efetuar ajustes nos parâmetros do PID para que encontremos valores que façam a resposta do sistema adequar-se às necessidades impostas. Podemos, por exemplo, aumentar o tempo integrativo, pois o sistema demonstra bastante oscilação. Com isso, o alto pico de resposta também deve diminuir. Da maneira que estão os ganhos, aumentar o proporcional fará com que o sistema responda de maneira mais rápida, mas tende a aumentar a oscilação da resposta. O aumento do tempo derivativo é benéfico para o sistema, pois irá agir como um amortecimento, diminuindo tanto a oscilação quanto o pico do sobressinal.

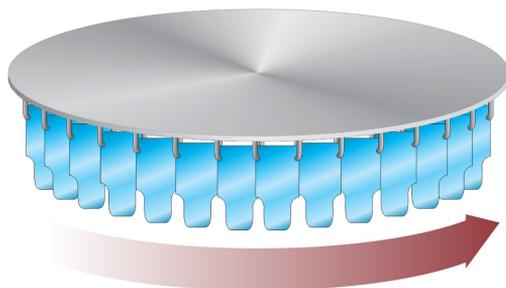
## Avançando na prática

# Controlador PI para sistema de rotação de peças

## Descrição da situação-problema

O modelo do sistema de rotação de grandes peças dentro de um forno industrial de uma empresa de tratamento térmico, ilustrado na Figura 4.26, é mostrado na Equação 4.25.

Figura 4.26 | Ilustração do sistema rotativo



Fonte: elaborada pelo autor.

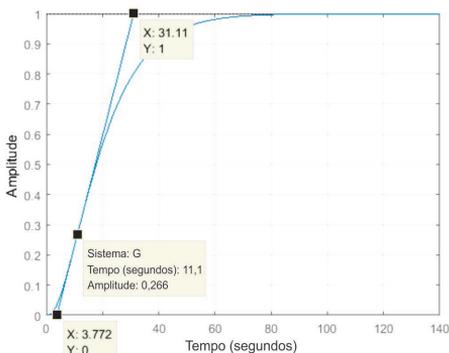
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(10s+1)^2} \quad (4.25)$$

Sua tarefa é obter um controlador para o sistema. Embora ele não apresente erro de regime permanente, é necessário que tenha resposta rápida para que o processo de cura da tinta ocorra de maneira uniforme e haja aumento na velocidade de produção.

### Resolução da situação-problema

Para o caso, como o único problema é o erro de regime, podemos utilizar um controlador PI para o sistema, que é mais simples que um PID, mas conta com a ação integral, que elimina o erro de regime. No caso em estudo, um simples controlador P não eliminaria o erro de regime em malha fechada. Os controladores PI e PID o fariam. Como a preocupação é sobre o erro de regime e é necessário que o sistema responda mais rapidamente, a ação de controle derivativa pode atrapalhar o objetivo a ser alcançado. Então, escolhe-se utilizar o controlador do tipo PI.

Figura 4.27 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

A resposta à entrada degrau é mostrada na Figura 4.27.

Observando a resposta, calcula-se os valores  $T$  e  $L$  do método de Ziegler-Nichols:  $T$  é dado pela distância horizontal entre o mais superior (Figura 4.27), e o mais inferior, ou seja,  $T = 31,11 - 3,772 = 27,338$ ; e  $L$  é dado pela distância do ponto mais inferior à origem. Logo,  $L = 3,772 - 0 = 3,772$ . Portanto, de acordo com o Quadro 4.4, temos o controlador PI na Equação 4.26.

$$C_{PI}(s) = 6,523 \left( 1 + \frac{1}{12,573s} \right) \quad (4.26).$$

## Faça valer a pena

**1.** As ações básicas de controle são muito utilizadas na indústria por serem fáceis de implementar e por haver técnicas de sintonia para seus parâmetros, que permitem que seja obtida uma resposta estável de maneira ágil, sem ser necessário que se tenha conhecimento do modelo físico-matemático da planta (ou processo).

Sobre as ações básicas de controle proporcional, integral e derivativo, analise as afirmações a seguir:

- I. O ganho do controlador proporcional geralmente é aquele que analisamos no gráfico do lugar das raízes de um modelo dinâmico.
- II. O controlador do tipo proporcional-integral só deve ser utilizado quando houver erro de regime.
- III. O controlador PID pode ser utilizado e sintonizado mesmo quando não houver conhecimento do modelo dinâmico do sistema a ser controlado.

É correto o que se afirma em.

- a) I e II, apenas.
- b) II e III, apenas.
- c) II, apenas.
- d) I e III. Apenas.
- e) I, II e III.

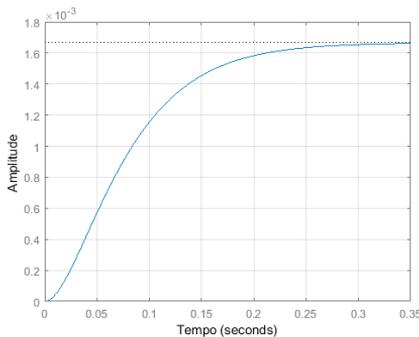
**2.** O controlador PID e os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols são de extrema utilidade quando não se conhece o modelo dinâmico do sistema a ser controlado, mas esse fato não limita sua utilização apenas a esse caso. Mesmo conhecendo-se o modelo do sistema, é possível aplicar esses métodos.

Considere o sistema dinâmico a seguir.

$$G(s) = \frac{1}{(s+20)(s+30)}$$

Este sistema, em malha aberta, tem a seguinte resposta à entrada degrau:

Figura 4.28 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta, de forma sucinta, um método de sintonia de um controlador PID para o sistema.

- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto de inflexão. Obtém-se a distância horizontal  $L$  (da origem até o cruzamento da reta com o eixo horizontal) e a distância horizontal  $T$  (do cruzamento da reta com eixo horizontal até o cruzamento da reta tangente com o valor de resposta de regime permanente). Usa-se  $L$  e  $T$  para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto de inflexão. Obtém-se a distância horizontal  $L$  (da origem do eixo do tempo até o ponto de inflexão da curva) e a distância horizontal  $T$  (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto de inflexão da curva). Usa-se  $L$  e  $T$  para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal  $L$  (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal  $T$  (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto crítico da curva). Usa-se  $L$  e  $T$  para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta perpendicular à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal  $L$  (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal  $T$  (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto crítico da curva). Usa-se  $L$  e  $T$  para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal  $L$  (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal  $T$  (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto

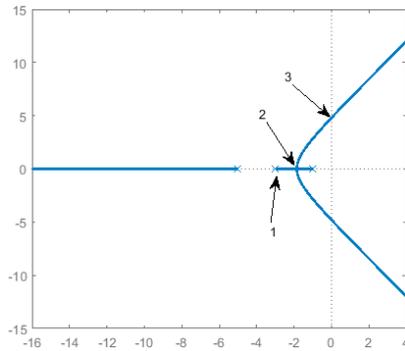
crítico da curva). Usa-se T e L para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.

**3.** Um dos métodos de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID começa com a aplicação de um controlador P ao modelo. Encontra-se o ganho de malha fechada que faz com que o sistema responda de maneira marginalmente estável. Esse ganho será chamado  $K_{cr}$  e o período de oscilação do sistema será  $P_{cr}$ . Então, de posse desses valores, recorre-se à tabela de cálculo dos parâmetros do controlador.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5P_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,42K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Fonte: Ogata (2010, p. 525).

Suponha que já tenha sido obtido o gráfico do lugar das raízes do sistema, ao qual será aplicado o método descrito para a sintonia de controladores (eixo horizontal é real e eixo vertical é imaginário).



Fonte: elaborado pelo autor.

Assinale a alternativa que indica o ponto correto do ganho a ser utilizado no método?

- Ponto 1.
- Ponto 2.
- Ponto 3.
- Qualquer valor de ganho que faça o polo do sistema ficar após o ponto 3.
- É necessário observar a resposta temporal do sistema para aplicar o método.

## Aplicação e simulação dos controladores PID

### Diálogo aberto

Nesta última unidade, você teve contato com as ações básicas dos controles Proporcional (P), Integral (I) e Derivativo (D). Você também aprendeu sobre os controladores formados a partir dessas ações básicas (P, PI e PID) e aprendeu a sintonizá-los de acordo com o método de Ziegler-Nichols, que tem a propriedade de ser utilizado sem que haja conhecimento da função transferência da planta (ou processo) a ser controlada.

Nesta seção, você aplicará a metodologia aprendida, utilizando o MATLAB e também conhecerá uma poderosa ferramenta que o auxiliará no projeto de controladores: *Control and Estimation Tools Manager* (gerenciador de tarefas de controle e estimação), também conhecida como *sisotool*.

Com essa ferramenta, veremos como é possível utilizar um sintonizador automático de controladores P, PI e PID, alterar o ganho de controladores diretamente no gráfico do lugar das raízes ou no diagrama de Bode e observar o efeito causado por essa mudança em tempo real no gráfico de resposta do sistema. Será possível editar o gráfico do lugar das raízes adicionando ou retirando polos e zeros do controlador.

Esses conhecimentos são necessários uma vez que você é o projetista responsável pela atualização do controlador PID do sistema de posicionamento da ferramenta da fresadora. Ao realizar essa análise, quando submetido a um PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols, notou-se que o tempo máximo de acomodação foi de 10 segundos e sobressinal de 62,1%.

Dessa forma, surgem os seguintes questionamentos: o sobressinal está dentro do permitido? O que pode ser realizado para ajustá-lo (caso necessário)?

Ao final, aplicaremos esses novos conhecimentos à sua tarefa de atualizar o controlador da máquina de fresar para que esta torne-se adequada às novas necessidades do processo de fabricação de sua linha de produção.

Para encerrar esta última unidade com chave de ouro, tenha bons estudos e mãos à obra!

Na seção anterior, conhecemos os métodos de Ziegler–Nichols para sintonização de controladores PID. Um dos métodos é iniciado em malha aberta, que depende da resposta da planta em forma de S a uma entrada degrau, e o outro em malha fechada com controlador proporcional, que torna o sistema marginalmente estável.

Com o auxílio do MATLAB, podemos aplicar ambos os métodos de maneira mais precisa do que valores obtidos apenas pela observação de gráficos. Primeiramente, de acordo com o método de malha aberta, vamos encontrar um controlador PID para o sistema da Equação 4.27.

$$G(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)^2} \quad (4.27)$$

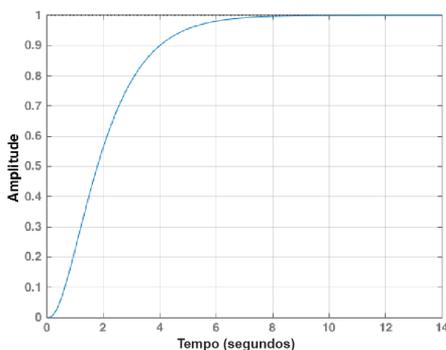
Ao submeter o sistema da Equação 4.27 a uma entrada degrau, de acordo com o Quadro 4.5, obtemos a Figura 4.29.

Quadro 4.5 | Obtenção da resposta do sistema à entrada degrau

1	<code>&gt;&gt; s = tf('s');</code>
2	<code>&gt;&gt; G = 10 / ((s+10) * (s+1)^2);</code>
3	<code>&gt;&gt; step(G);</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.29 | Resposta ao degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o método, é preciso encontrar o ponto de inflexão do gráfico por meio do cálculo da segunda derivada para a função de transferência

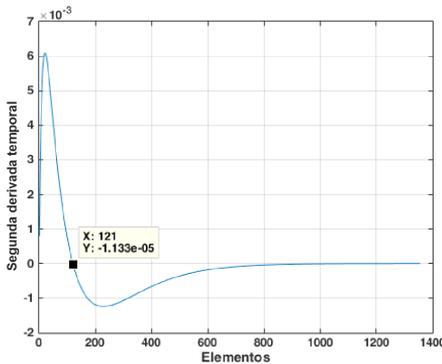
(4.27). Para isso, é necessário obter o vetor resposta dessa função. Isso pode ser feito utilizando-se o comando *step* do MATLAB, conforme pode ser visto na linha 4 do Quadro 4.6. Depois disso o gráfico é gerado e com ele obtemos o ponto de inflexão, que é definido como o ponto onde a segunda derivada da curva é nula, conforme pode ser visto na Figura 4.30.

Quadro 4.6 | Obtenção da resposta do sistema à entrada degrau

```
4 >> [resposta, tempo] = step(G);
5 >> derivada2 = diff(resposta,2)/(tempo(2)-tempo(1));
6 >> plot(derivada2);
7 >> xlabel('Elementos');
8 >> ylabel('2^a derivada temporal');
9 >> grid;
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.30 | Segunda derivada da resposta temporal



Fonte: elaborada pelo autor.

Para obtermos o valor mais próximo de aceleração nula, utilizamos a ferramenta *Data Cursor* (☒) da barra de ferramentas da janela do gráfico gerado. Perceba que o eixo horizontal da Figura 4.30 não corresponde ao tempo, mas sim aos elementos do vetor (ou *array*) segunda derivada. Então, com o *Data Cursor*, vemos que a menor aceleração em módulo é o 121º elemento do vetor segunda derivada. Logo, como o vetor tempo é coerente com o vetor segunda derivada, conclui-se que o ponto de inflexão ocorre no tempo relativo ao 121º elemento do vetor tempo, cujo valor de 1,105 segundos é obtido no Quadro 4.7, juntamente com a resposta do sistema, cujo valor é 0,266.

```

10 >> tempo (121)
    ans =
11     1.105240844637117
    >> resposta (121)
    ans =
     0.266312676507214
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, é necessário traçar uma reta tangente à curva no seu ponto de inflexão. Sabe-se que a equação da reta é representada como  $y = a \times t + b$ , sendo que  $a$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear. O valor de  $a$  será o valor da derivada temporal da resposta no ponto de inflexão (linha 13 do Quadro 4.8). O valor de  $b$  será obtido substituindo-se os valores de tempo do ponto de inflexão  $t_{inf}$  e da resposta  $y_{inf}$  na equação da reta, de acordo com a Equação 4.28, que corresponde à linha 14 do Quadro 4.8.

$$y_{inf} = a \times t_{inf} + b \Rightarrow b = y_{inf} - a \times t_{inf} \quad (4.28)$$

Quadro 4.8 | Cálculo dos coeficientes angular e linear

```

12 >> derivada1 = diff(resposta,1) / (tempo(2)-tempo(1));
13 >> a = derivada1(121);
14 >> b = resposta(121)-a*tempo(121);
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.



### Refleta

O comando `diff`, quando aplicado a um vetor de valores, realiza a subtração entre dois elementos consecutivos. Por exemplo, se temos um vetor  $a = [1, 3, 10, 33]$ , o comando `diff(a)` retornará o vetor  $[2, 7, 23]$ , que é resultado das subtrações dos elementos de  $a$ , respectivamente:  $3-1$ ,  $10-3$  e  $33-10$ .

Na linha 12 do Quadro 4.8 foi utilizado o comando `diff` dividindo-o pela subtração de dois elementos consecutivos do vetor temporal para se obter a derivada do vetor resposta. Matematicamente, qual é o sentido de se dividir o resultado do comando `diff` pela subtração dos dois elementos consecutivos do vetor tempo?

Com a equação da reta tangente definida, calcula-se em quais tempos a reta cruza a resposta de regime permanente (no caso, 1), como mostra a

Equação 4.29, e o eixo do tempo, como mostra a Equação 4.30.

$$1 = a \times t_1 + b \Rightarrow t_1 = \frac{1-b}{a} \quad (4.29)$$

$$0 = a \times t_0 + b \Rightarrow t_0 = -\frac{b}{a} \quad (4.30)$$

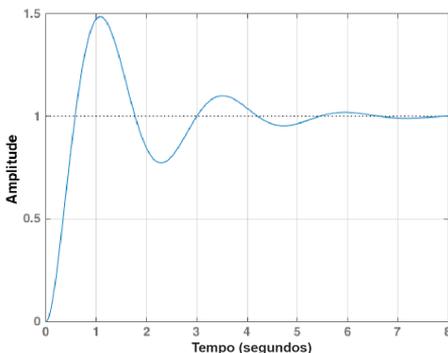
Dessa maneira,  $t_1 = 3,111$  s e  $t_0 = 0,377$  s. Então, pode-se calcular os parâmetros  $T$  e  $L$  do método de Ziegler-Nichols de malha aberta:  $T = t_1 - t_0 = 2,734$  s e  $L = t_0 - 0 = 0,377$  s. De acordo com a Quadro 4.2 (Seção 4.2 desta quarta unidade), tem-se os valores  $K_p = 8,698$ ,  $T_i = 0,754$  e  $T_d = 0,188$ . Utilizando o sistema da Equação 4.27 em malha fechada com o controlador PID encontrado, obtém-se a resposta ao degrau como indicado no Quadro 4.9, que exibe o gráfico da Figura 4.31 e apresenta sobressinal de 48,6%, tempo de subida de 0,400 segundos e tempo de acomodamento de 6,025 segundos.

Quadro 4.9 | Aplicação do controlador encontrado de acordo com o método de Ziegler-Nichols

15	>> t1 = (1-b)/a;
16	>> t0 = -b/a;
17	>> T = t1 - t0;
18	>> L = t0 - 0;
19	>> Kp = 1.2*t/L; Ti = 2*L; Td = 0.5*L;
20	>> PID = Kp*(1+Td*s+1/(Ti*s));
21	>> step(feedback(PID*G,1));

Fonte: elaborado pelo autor.

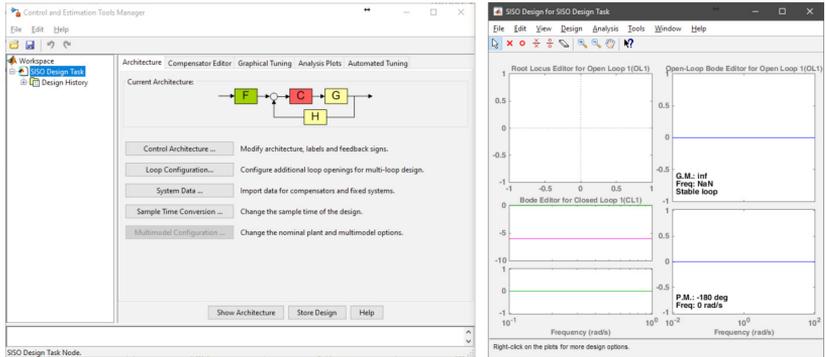
Figura 4.31 | Resposta do sistema submetido ao controlador PID



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao invés de aplicarmos manualmente esse método de sintonia de controlador PID, no MATLAB podemos projetar e modelar nosso PID (ou outro controlador qualquer) com o comando `sisotool` para utilizarmos a ferramenta *SISO Design* (projeto de sistema de uma entrada e uma saída). Ao entrar com o comando, as janelas da ferramenta são apresentadas, como mostrado na Figura 4.32 (é importante ressaltar que foi utilizada a versão R2015a do MATLAB, pois versões mais novas podem sofrer alterações).

Figura 4.32 | Ferramenta SISO Design do MATLAB

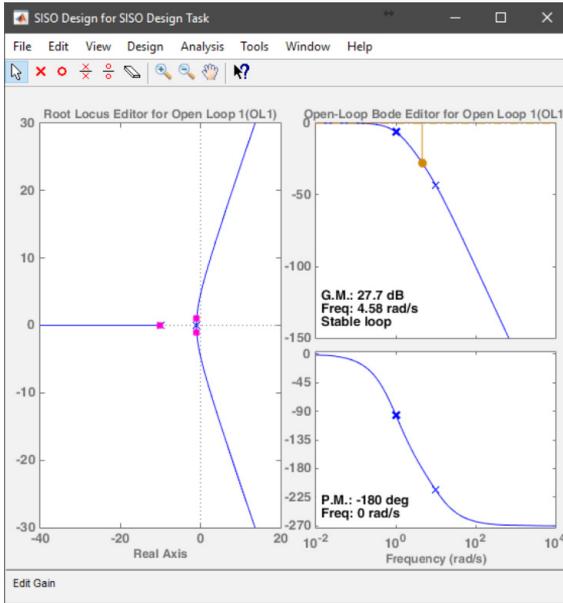


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

A malha de controle padrão considerada é exibida na janela *Control and Estimation Tool Manager* (ferramenta de gerenciamento de controle e estimação), e podemos ver que é aplicável ao nosso problema. Caso deseje utilizar uma malha diferente, você pode escolher dentre as opções disponíveis em “*Control Architecture ...*” (arquitetura do controle) e até customizar a malha que está sendo utilizada.

Agora, vamos importar nosso sistema ( $G(s)$ , Equação 2.47): basta clicar em “*System Data...*” (dados do sistema) selecionar o bloco G da lista que aparece; clicar em “*Browse ...*” (navegar); selecionar a variável G, que representa o nosso sistema dinâmico e já tínhamos inserido no MATLAB previamente; e então clicar em “*Import*” (importar). Deixe os blocos C, H e F com valor 1, pois não há nenhum sistema influenciando a entrada da nossa malha fechada (logo  $F=1$ ), não estamos aplicando nenhum controle ( $C=1$ ) e nossa retroalimentação é unitária (logo  $H=1$ ). Ao fecharmos a janela que usamos para fazer a importação e clicarmos em “OK” na janela *System Data*, a janela *SISO Design for SISO Design Task* (projeto de sistema SISO para tarefa de projeto de sistema SISO) é atualizada com gráficos do sistema e controlador que importamos.

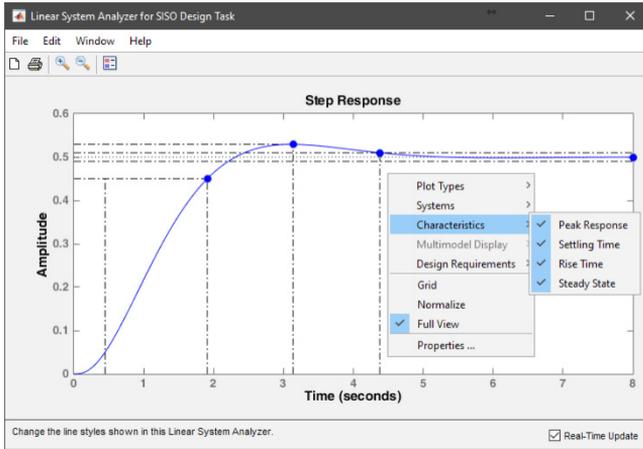
Figura 4.33 | Ferramenta SISO Design do MATLAB



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

Na Figura 4.33 (parte esquerda), vemos o lugar das raízes do sistema, sendo que os polos (e zeros, se existissem) são indicados em azul. À direita, vemos seu diagrama de Bode com o gráfico da magnitude acima e da fase abaixo, que indica a margem de ganho (ponto amarelo e G. M. na magnitude) e a margem de fase (ponto amarelo – caso houvesse – e P.M. na fase). No lugar das raízes, os pontos representam as raízes do sistema para o ganho atual que, no caso, é unitário. Com a ferramenta seta (  ), podemos arrastar os pontos ao longo do lugar das raízes, alterando o ganho (que era unitário). Isso é equivalente a arrastar o gráfico da magnitude do diagrama de Bode. Enquanto realizamos essa operação, no canto inferior esquerdo da janela é indicada a localização da raiz concomitante à movimentação. É possível observar os efeitos da alteração do ganho para a resposta à entrada degrau. Para tal, dentro do menu superior, devemos clicar em “*Analysis*” (análise), e então em “*Response to Step Command*” (resposta ao comando degrau), e a janela *Linear System Analyzer for SISO Design Task* aparecerá. Para observar as métricas de resposta temporal diretamente no gráfico, basta clicar com o botão direito sobre ele e escolhê-las: *peak response* (sobressinal), *settling time* (tempo de acomodação de 2%), *rise time* (tempo de subida) e *steady state* (valor de regime permanente). As métricas temporais são indicadas diretamente no gráfico, como mostra a Figura 4.34.

Figura 4.34 | Resposta à entrada degrau exibida pela ferramenta de projeto SISO

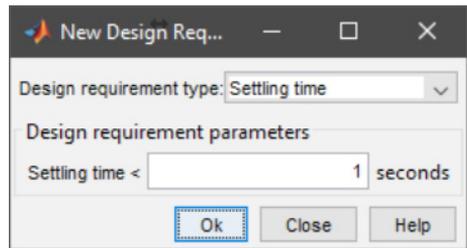


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.

Quando estamos projetando um controlador para um sistema dinâmico, é comum termos que levar em consideração as especificações de desempenho necessárias para o funcionamento adequado do sistema controlado. Para essa finalidade, podemos inserir as especificações tanto no gráfico do lugar das raízes, quanto na própria resposta ao degrau.

Basta clicarmos com o botão direito sobre o gráfico, e então em “*Design Requirements*” e “*New*”. No lugar das raízes, se abrirá uma pequena janela (Figura 4.35), que nos permite inserir especificações relacionadas ao *settling time* (tempo de acomodação), *percent overshoot* (sobressinal percentual), *damping ratio* (fator de amortecimento), *natural frequency* (frequência natural) e *region of interest* (região de interesse). No gráfico da resposta à entrada degrau, a janela que se abre (Figura 4.36) permite que adicionemos especificações de três maneiras diferentes: “*Step response bound*” (limite de resposta ao degrau), na qual preenchemos valores de tempo de subida, tempo de acomodação, valor de sobressinal, etc.; “*Upper time response bound*” (limite superior

Figura 4.35 | Janela de especificação das restrições de resposta temporal no gráfico do lugar das raízes

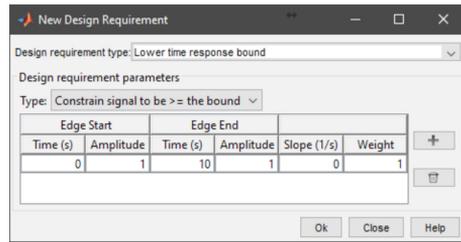


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.

de resposta temporal) e “*Lower time response bound*” (limite inferior de resposta temporal), nos quais podemos definir limites superiores e inferiores, respectivamente, para a resposta temporal de maneira customizada.

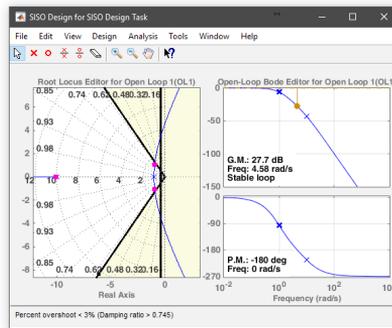
Adicionemos as seguintes restrições no gráfico do lugar das raízes e na resposta ao degrau: sobressinal máximo de 10% e tempo de acomodação de até 10 segundos, além do erro de regime nulo. Então o gráfico do lugar das raízes fica como mostra a Figura 4.37, e o gráfico da resposta ao degrau fica de acordo com a Figura 4.38.

Figura 4.36 | Janela de especificação das restrições de resposta temporal no gráfico de resposta ao degrau



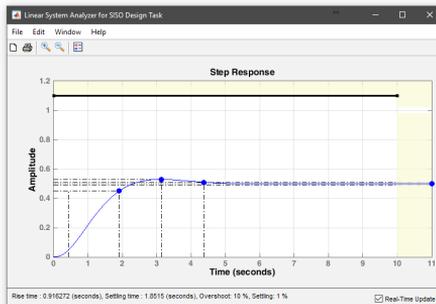
Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.

Figura 4.37 | Representação das restrições de desempenho no gráfico do lugar das raízes



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.

Figura 4.38 | Representação das restrições de desempenho na resposta ao degrau



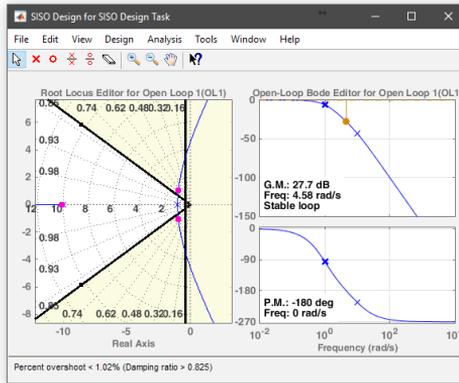
Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.



## Exemplificando

Após adicionarmos as especificações de desempenho, podemos editá-las clicando com o botão direito sobre elas e selecionando “Edit...” ou excluí-las, selecionando “Delete”. Podemos ainda editá-las graficamente tanto no gráfico do lugar das raízes quanto no gráfico da resposta temporal, simplesmente arrastando as linhas que são suas representações gráficas. Por exemplo, a partir da Figura 4.37, ao arrastarmos as linhas que representam o sobressinal especificado de modo a deixar mais estreita a faixa de valores aceitáveis, obtemos o que é exibido na Figura 4.39, na qual a restrição de sobressinal foi editada graficamente para ser aproximadamente 1%.

Figura 4.39 | Especificação de desempenho alterada graficamente



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

O sistema em malha fechada e sem controlador (ou com um controlador de ganho proporcional unitário) não é adequado, pois não apresenta erro de regime permanente nulo, como mostra o gráfico da Figura 4.38, e a variação do ganho não fará com que o sistema responda satisfatoriamente, pois sabemos que o controlador proporcional sozinho não elimina o erro de regime permanente. Logo, é necessário modificar o controlador. Vamos propor um controlador PI para executar a tarefa. O controlador PI tem um zero real e um polo na origem. Podemos adicioná-los utilizando as ferramentas de edição do gráfico do lugar das raízes que podem ser encontradas na parte superior da janela (Figura 4.37):  adiciona um polo real,  adiciona um zero real,  adiciona um par de polos complexos conjugados,  adiciona um par de polos complexos conjugados e  pode ser utilizado para apagar zeros ou polos do gráfico, clicando-se em cada um deles.

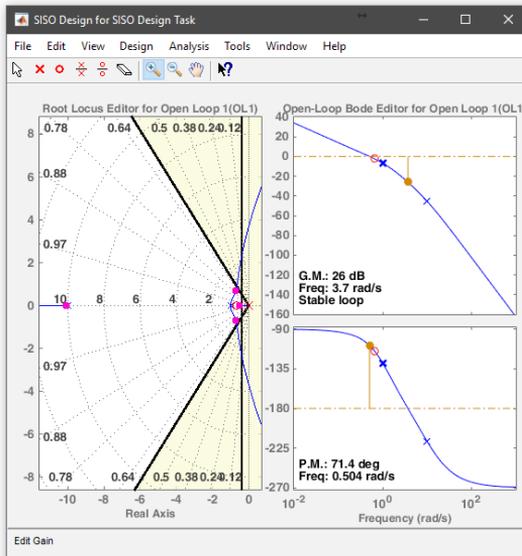


## Assimile

A adição, exclusão ou edição (movimentar com o mouse) de polos e zeros do gráfico de lugar das raízes apenas afeta o controlador ( $C(s)$ ), e não a planta ( $G(s)$ ).

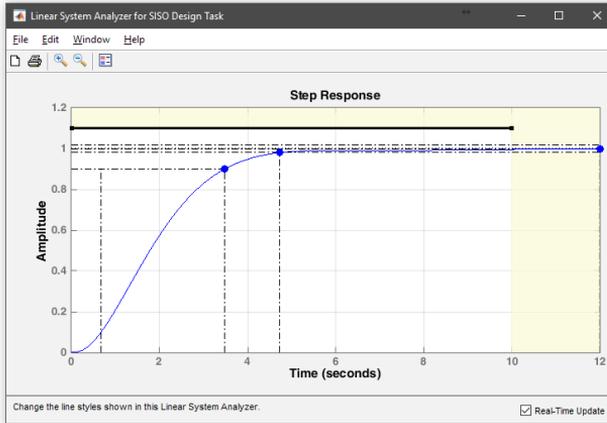
Após adicionar os polos ou zeros, podemos movê-los pelo plano (respeitando o fato de eles serem complexos ou reais), assim como podemos mover as raízes ao longo do gráfico (alterando o ganho proporcional). Experimentando os posicionamentos para o único zero do controlador PI, podemos perceber que a localização  $-0,65 + 0 \cdot i$  no plano complexo para o zero juntamente com um ganho proporcional de 0,5 atendem às especificações de desempenho impostas (10% de máximo sobressinal e 10 segundos de tempo de acomodação). Os valores exatos do controlador podem ser observados e editados numericamente clicando-se com o botão direito no gráfico do lugar das raízes e escolhendo-se “Edit Compensator...” (editar compensador). As Figuras 4.39 e 4.41 apresentam o resultado do controlador PI projetado no lugar das raízes e na resposta à entrada degrau, respectivamente. Obtemos sobressinal e erro de regime permanente nulos e tempo de acomodação de 4,74 segundos, que são adequados aos requisitos propostos.

Figura 4.40 | Lugar das raízes resultante com o controlador PI projetado



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

Figura 4.41 | Resposta à entrada degrau com o controlador PI projetado

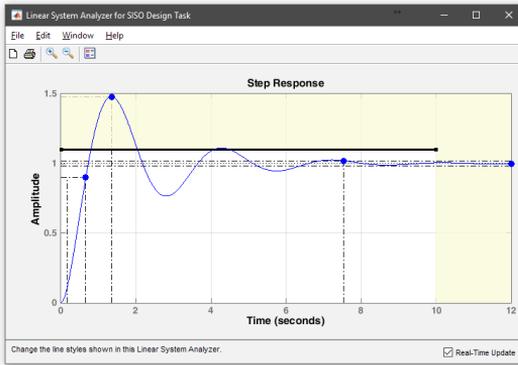


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

Dependendo do sistema dinâmico com o qual estamos trabalhando, pode ser oneroso obter um controlador que seja estável para o sistema. Nesses casos, pode ser interessante iniciar o projeto do controlador com métodos conhecidos de sintonia de controladores. Essa ferramenta do MATLAB disponibiliza alguns métodos automatizados de sintonia de controladores. Podemos acessá-los clicando em “Tools” (ferramentas) e em “Automated Tuning...” (sintonia automatizada) no menu superior, que está representado na Figura 4.40. A janela que aparece permite-nos utilizar vários métodos além do “PID Tuning”, mas aqui focaremos apenas neste. O controlador C exibido é exatamente o controlador que você projetou até o momento. Na lista “Tuning method” (método de sintonia), ao selecionarmos “Classical design formulas” (fórmulas clássicas de projeto), e depois “Ziegler-Nichols step response” (resposta ao degrau de Ziegler–Nichols), podemos selecionar entre os tipos de controladores P, PI, PID e PID com filtro derivativo (“PID with derivative filter”), sendo que foi selecionada a opção PID, e, ao clicarmos em “Update Compensator” (atualizar compensador), o MATLAB aplicará o método de Ziegler-Nichols, que já estudamos, e sobrescreverá nosso controlador. Ao aplicarmos o método, obtemos o controlador da Equação 4.31, e a resposta tem sobressinal de 47,9%, tempo de subida de 0,507 segundos e tempo de acomodamento de 7,54 segundos, como mostra a Figura 4.42.

$$C(s)_{\text{PID automatizado}} = 7,8695 \frac{(1 + 0,38s)^2}{s} \quad (4.31)$$

Figura 4.42 | Resposta à entrada degrau do sistema com controlador obtido pela sintonização automática de controlador PID

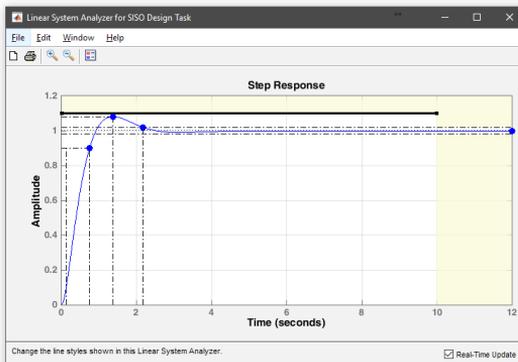


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

A partir do ganho, zero e polo definidos com a sintonia automática, tendo-se conseguido estabilizar o sistema, o processo de ajuste de localização dos zeros e polos do sistema é simplificado, potencialmente levando a uma resposta que, além de estar dentro das especificações de desempenho, mostra-se muito boa em termos de sobressinal, tempo de acomodação, tempo de subida, etc., como podemos ver na Figura 4.43, cuja resposta foi obtida após movermos os zeros e o ganho no lugar das raízes, o que resultou no controlador da Equação 4.33.

$$C_{PID \text{ automatizado ajustado}}(s) = 2,7931 \frac{(1 + 1,5s)(1 + 0,43s)}{s} \quad (4.32)$$

Figura 4.43 | Reposta obtida com controlador PID sintonizado automaticamente e ajustado manualmente



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.



### Pesquise mais

O `sisotool` da *Control System Toolbox* do MATLAB é uma ferramenta bastante completa, que facilita grandemente o projeto de controladores para os mais diversos sistemas dinâmicos. Existem muitas possibilidades de uso da ferramenta que não foram exploradas aqui. Veja no site da *MathWorks* mais exemplos relacionados a essa ferramenta.

Caro aluno, chegamos ao final de mais uma unidade, encerrando nossos estudos relacionados à disciplina de Controle de Processos. Esperamos que essa jornada tenha sido de grande aprendizado e que os conteúdos aprendidos possam lhe auxiliar em sua atuação profissional!

### Sem medo de errar

Você, como projetista responsável pela atualização do controlador PID do sistema de posição da ferramenta da fresadora, já percebeu que o sistema dinâmico da máquina (Equação 4.33) submetido a um PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols (Equação 4.34) atende à especificação de tempo máximo de acomodação (10 segundos), mas tem um sobressinal de 62,1%, que é maior que o máximo permitido (10%).

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} PID(s) &= 9 \left( 1 + \frac{1}{1,4s} + 0,35s \right) \quad (4.34) \\ &= \frac{4,41s^2 + 12,6s + 9}{1,4s} \end{aligned}$$

Assim, utilizando a ferramenta `sisotool`, vamos ajustar o controlador PID para atingirmos o nosso objetivo de fazer o sistema responder de acordo com as restrições impostas. Primeiramente, devemos inserir tanto o sistema  $G(s)$  quanto o controlador  $PID(s)$  no MATLAB, e então, abrimos o `sisotool`, como mostra o Quadro 4.10.

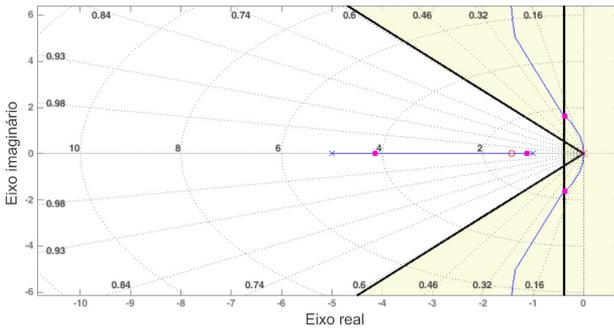
```

22 >> s = tf('s');
23 >> G = 2/(s*(s+1)*(s+5));
24 >> PID = tf([4.41 12.6 9],[1.4 0]);
25 >> sisotool
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Após aparecer a janela da ferramenta, importamos a planta G para o bloco G e o controlador PID para o bloco C. Logo após, adicionamos as restrições de sobressinal (10%) e de tempo e acomodação (10 segundos) no gráfico do lugar das raízes, que fica como mostra a Figura 4.44.

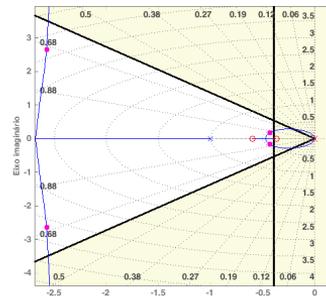
Figura 4.44 | Lugar das raízes com PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

Observando a Figura 4.44, podemos ver que não há ganho proporcional que faça com que as raízes do sistema se situem na região adequada às restrições impostas. Logo, é necessário ajustar a posição dos zeros do controlador PID sintonizado. Arrastando ambos os zeros para mais próximos da origem, mas sem retirá-los da região delimitada pela restrição do tempo de acomodação, vemos que podemos fazer com que as raízes do sistema se encontrem dentro da região de interesse. Por fim, ajustamos o ganho arrastando os pontos observando a

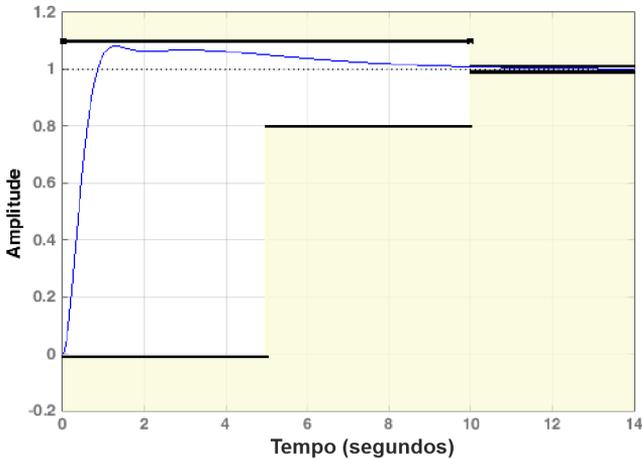
Figura 4.45 | Lugar das raízes do sistema após o ajuste manual do controlador PID



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

curva de resposta à entrada degrau. O gráfico do lugar das raízes é mostrado na Figura 4.45 e a resposta à entrada degrau é exibida na Figura 4.46.

Figura 4.46 | Resposta à entrada degrau com controlador PID ajustado



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Versão R2015a.

Por fim, com essas alterações feitas no gráfico do lugar das raízes do sistema, obtemos o seguinte controlador PID – que, embora não seja o único controlador possível a ser obtido, mas é o mais adequado a esse projeto, resultando na Equação 4.35.

$$C_{PID}(s) = 1,4579 \cdot \frac{(1 + 1,7s)(1 + 2,7s)}{s} \quad (4.35)$$

## Avançando na prática

# Melhoria do conforto dos passageiros veiculares com uso de controlador PID

### Descrição da situação-problema

O sistema de suspensão de um veículo tem sua função de transferência de acordo com a Equação 4.36, em que  $X(s)$  é a saída, ou seja, a posição vertical do modelo simplificado do carro; e  $Y(s)$  é a entrada, ou seja, a posição vertical da pista.

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1200s + 23000}{319s^2 + 1200s + 23000} \quad (4.36)$$

Para uma entrada degrau, esse sistema apresenta tempo de acomodação de 1,95 segundos e sobressinal de 54,1%. Esses valores se encontram fora das especificações de desempenho necessárias: tempo de acomodação de 0,5 segundos e sobressinal máximo de 8%. É necessário, portanto, que seja projetado um controlador que faça com que o sistema responda adequadamente a esses novos parâmetros.

### Resolução da situação-problema

Primeiramente, devemos inserir a função de transferência no MATLAB e, então, entrar com o comando `sisotool`.

Quadro 4.11 | Inserindo o modelo no MATLAB e abrindo a ferramenta `sisotool`

```

22 >> G = tf ([1200 23000], [319 1200 23000]);
23 >> sisotool

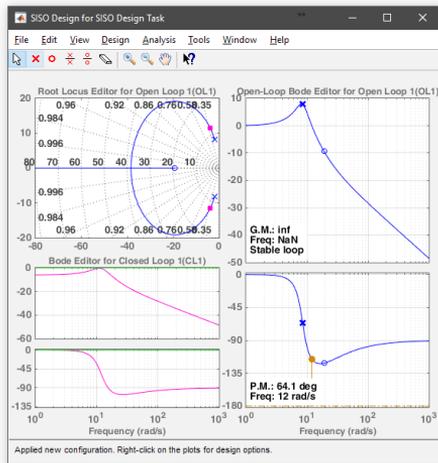
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Na ferramenta, precisamos importar nosso sistema para o bloco G da planta. Com isso, já podemos observar seu gráfico do lugar das raízes e o diagrama de Bode, como mostra a Figura 4.47.

Como primeiro passo, podemos utilizar a sintonia automatizada de PID de acordo com o método de Ziegler-Nichols de malha aberta para obtermos valores iniciais dos parâmetros do controlador. Com isso, obtemos o controlador PID da Equação 4.37.

Figura 4.47 | Lugar das raízes e diagrama de Bode do sistema da suspensão (`sisotool`)

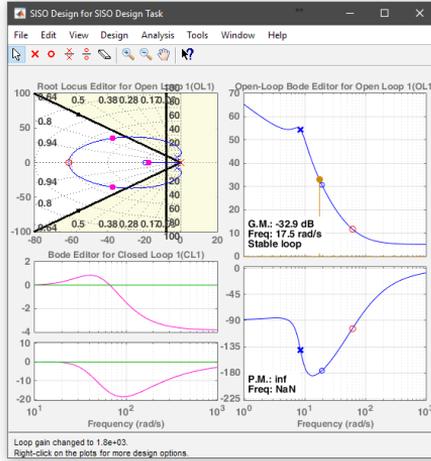


Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

$$C_{auto\ PID}(s) = 213,16 \frac{(1 + 0,016s)^2}{s} \quad (4.37)$$

Inserindo as restrições de máximo sobressinal 8% e tempo de acomodação de 0,5 segundos, podemos observar que, com um ganho maior que 1800, o sistema atende às restrições de desempenho (Figura 4.47). Por exemplo, com um ganho de 2000, a resposta do sistema à entrada degrau é apresentada na Figura 4.48.

Figura 4.48 | Sistema com controlador PID automaticamente ajustado



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

Figura 4.49 | Resposta controlada do sistema de suspensão veicular



Fonte: captura de tela do programa MATLAB. Version R2015a.

**1.** O MATLAB é um programa de matemática muito utilizado para estudo e simulação de sistemas dinâmicos. Seu ferramental disponível pode ser expandido com a utilização *Control system toolbox*, que apresenta importantes ferramentas, como o *Control and Estimation Tool Manager*, que auxiliam o projetista e facilitam o processo de projeto de controladores.

Das alternativas a seguir, qual apresenta uma afirmação verdadeira acerca do comando `sisotool`?

- a) Com o comando `sisotool`, é possível simplificar sistemas complexos para que eles possam ser controlados.
- b) O comando `sisotool` permite ao projetista manipular sistemas dinâmicos sem ter o conhecimento de seu modelo ou de sua função de transferência.
- c) Com a ferramenta `sisotool`, podemos desenhar qualquer diagrama de blocos que seja necessário.
- d) A ferramenta `sisotool` permite extrair o lugar das raízes de um sistema dinâmico a partir de sua resposta à entrada degrau.
- e) Com o comando `sisotool`, é possível avaliar o sistema dinâmico de diversas maneiras e projetar controladores.

**2.** Sendo o método de Ziegler-Nichols uma sequência de passos lógicos e de cálculos, a *toolbox* de controle do MATLAB disponibiliza esse e outros métodos de sintonia de controladores. Com apenas um clique, podemos obter um controlador P, PI ou PID ajustado para a planta ou processo com o qual estamos trabalhando.

Das alternativas a seguir, qual melhor apresenta como poderia ser programado, de maneira resumida, o método de sintonia de controlador PID de Ziegler-Nichols?

- a)
  - 1. Obter a resposta do sistema com o comando `step`.
  - 2. Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.
  - 3. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.
  - 4. Com a equação da reta, obter os valores T e L.
  - 5. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI ou PID).
- b)
  - 1. Obter a resposta do sistema com o comando `t.f.`
  - 2. Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.
  - 3. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.
  - 4. Com a equação da reta, obter os valores T e L.
  - 5. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI ou PID).

c)

1. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.
2. Com a equação da reta, obter os valores T e L.
3. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI ou PID).

d)

Obter a resposta do sistema com o comando `impulse`.

Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.

4. Obter os valores T e L.
5. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI ou PID).

e)

1. Basta utilizar a tabela do método de sintonia de controladores de Ziegler-Nichols para calcular os parâmetros de cada ação de controle desejada.

**3.** Com a ferramenta `sisotool`, temos a possibilidade de criar qualquer controlador de que precisarmos, com quantos zeros ou polos quanto forem necessários, em qualquer posição do plano complexo simplesmente arrastando-os. Lembrando que:

 : inserção de polos reais;

 : Inserção de polos complexos;

 : Inserção de zeros reais;

 : Inserção de zeros complexos.

Assinale a alternativa que descreve como criar graficamente um controlador PID qualquer na interface gráfica da ferramenta `sisotool`?

a) Basta importar o controlador pronto utilizando o menu da ferramenta.

b) É necessário utilizar o comando de adicionar polos reais (  ) para incluir os três polos do controlador.

c) É necessário utilizar o comando de adicionar zeros reais (  ) para incluir os três zeros do controlador.

d) É necessário utilizar o comando de adicionar polos complexos (  ) para adicionar um polo complexo para cada ação integral e derivativa, e o comando de adicionar zeros reais (  ) para adicionar um zero para a ação proporcional.

e) É necessário utilizar o comando  para adicionar um polo real na origem o comando de adicionar zeros complexos (  ) ou reais (  ) para adicionar mais dois zeros no plano complexo.

## Referências

---

DORE, R. C., BISHOP, R. H. **Sistemas de controles modernos**. 11. ed. São Paulo: LTC, 2011.

FELICIO, L. C. **Dinâmicas de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: Rima, 2010.

GARCIA, H. B. **Teoria de controle moderno**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A. 2017. 240p.

MATHWORKS. **Control System Designer**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/controlsystemdesigner-app.html>. Acesso em: 5 set. 2017.

NISE, N. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3. ed. São Paulo: LTC, 2002. p. 378-380.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.



ISBN 978-85-522-1369-7



9 788552 213697 >