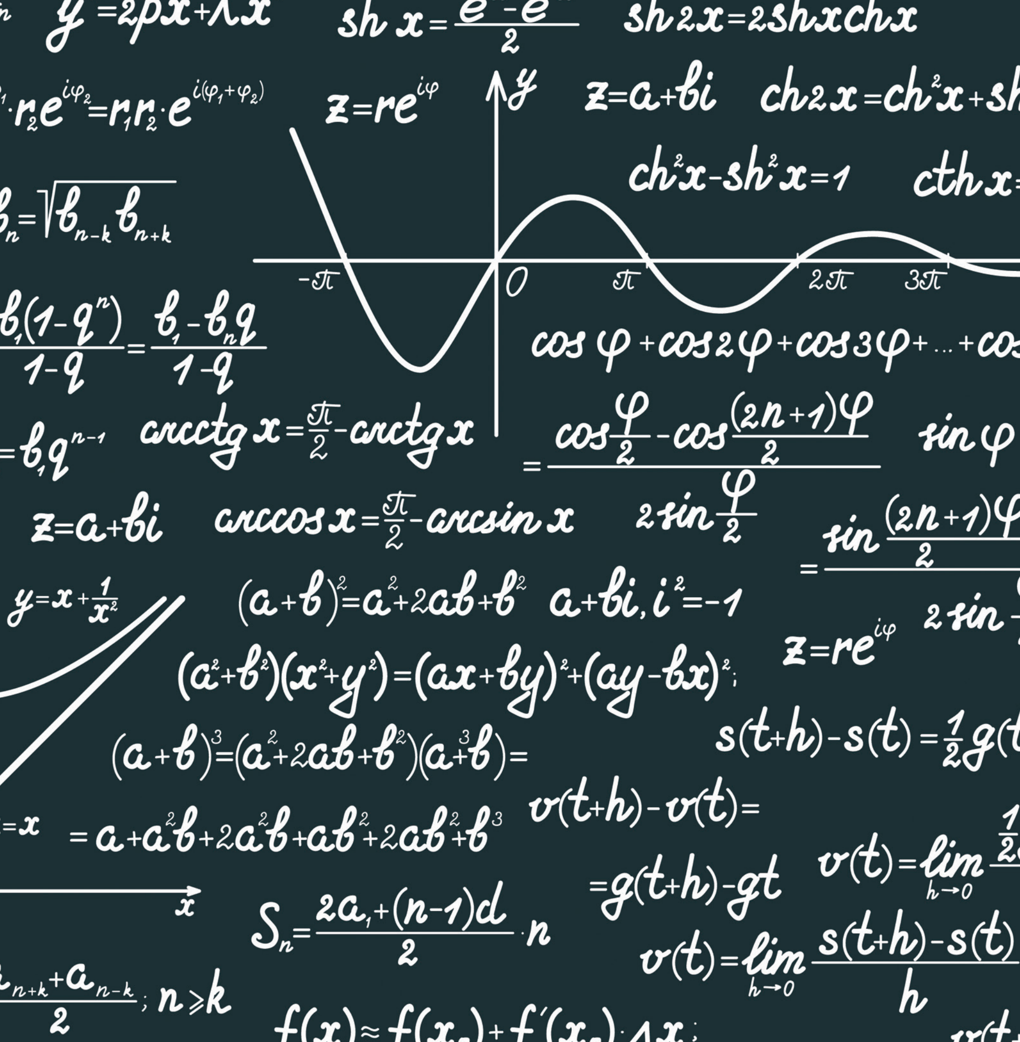


KLS

Análise Matemática

Análise Matemática

Ronaldo Savioli Sumé Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Vieira, Ronaldo Savioli Sumé
V658a Análise matemática / Ronaldo Savioli Sumé Vieira. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2019.
176 p.

ISBN 978-85-522-1355-0

1. Análise matemática. 2. Funções analíticas. 3. Análise real. I. Vieira, Ronaldo Savioli Sumé. II. Título.

CDD 510

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2019
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Construção dos números reais 7

Unidade 1

Seção 1.1
Conjuntos enumeráveis e números naturais 9
Seção 1.2
Números racionais e irracionais 21
Seção 1.3
O corpo dos números reais 36

Unidade 2
Sequências e séries numéricas 51

Seção 2.1
Sequências numéricas e seus limites 53
Seção 2.2
Subsequências 66
Seção 2.3
Convergência de séries numéricas 77

Unidade 3
Limites e continuidade de funções 91

Seção 3.1
Conceitos de topologia 93
Seção 3.2
Limites de funções reais 107
Seção 3.3
Funções contínuas 120

Unidade 4
A derivada e a integral de uma função 135

Seção 4.1
Funções diferenciáveis 136
Seção 4.2
Propriedades da derivada 148
Seção 4.3
Funções integráveis 160

Palavras do autor

O estudo de matemática em nível avançado requer rigor. Cada resultado enunciado precisa ser devidamente obtido dos anteriores por meio das ferramentas da lógica matemática, de modo que a demonstração de teoremas e proposições é necessária para o bom entendimento dos conceitos apresentados. Sem isso não há o que se aprender, existiria apenas uma coleção de resultados sem clara conexão e o avanço do conhecimento matemático seria impossível. Nesse sentido, é fundamental que você, estudante, tenha contato com a análise matemática. A presente disciplina tem como um de seus objetivos fundamentar rigorosamente os resultados vistos no cálculo de uma variável, mas seria ingênuo imaginar que ela se resumiria a isso. Por trás do arcabouço teórico desenvolvido ao longo do texto estão elementos de maior profundidade, como a familiarização com técnicas de demonstração em matemática, o raciocínio crítico e a visão mais global de como a matemática é desenvolvida.

A primeira unidade trata dos números reais. Uma simples pergunta como "o que é um número?" pode parecer tão natural e básica que é difícil formular uma resposta para ela. Nesta unidade serão tratados os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, levando assim à construção dos números reais. Antes de estudar as propriedades das funções do cálculo, é preciso primeiro entender bem o que é a reta real.

A segunda unidade trata de sequências numéricas. Nela serão desenvolvidos os conceitos de limite e de convergência, abrindo caminho para o estudo de funções sob o ponto de vista da análise. Esse tema será abordado na Unidade 3, na qual serão vistas noções básicas de topologia da reta, permitindo introduzir os conceitos de limite e de continuidade de uma função. Já as funções que admitem derivada e integral serão tratadas na Unidade 4, assim como suas principais propriedades.

É importante que cada passo das demonstrações, exemplos ou aplicações apresentadas seja refeito por você, leitor. A persistência é uma virtude. Garantimos que o estudo será muito mais proveitoso e o conteúdo será bem melhor fixado se for feita uma leitura ativa, na qual você refaça cada detalhe e preencha cada lacuna das demonstrações. Ao final, o conhecimento adquirido terá valido a pena.

Unidade 1

Construção dos números reais

Convite ao estudo

Caro estudante, seja bem-vindo à primeira unidade da disciplina de Análise Matemática. Se um aluno de ensino médio lhe perguntasse o que é um número, como você responderia? E se um aluno do ensino superior lhe perguntasse, a resposta seria a mesma? O mesmo questionamento vale para as perguntas seguintes: como são construídas as quatro operações (adição, subtração, multiplicação, divisão)? O que é o infinito? Existe mais de um tipo de infinito? Por que os números reais podem ser apresentados como uma reta, a "reta real”? O estudo dessa unidade lhe permitirá responder a todas essas questões e aprofundar seu conhecimento a respeito da matemática formal. Os conceitos e resultados necessários para isso serão desenvolvidos gradualmente e de forma rigorosa, utilizando as ferramentas da teoria de conjuntos e da lógica matemática, indispensáveis ao longo de toda a sua carreira.

Para motivar os estudos da unidade, imagine que você foi convidado para ministrar um curso de formação continuada para professores de Matemática que lecionam no ensino médio. A primeira parte do curso será sobre o conceito de número e a reta dos números reais. Você deve abordar o conceito de número, a construção dos números naturais, números racionais e, por fim, a construção dos números reais. Você precisará elaborar diferentes atividades para que a classe se familiarize com os conceitos e precisará, também, induzir os professores a se colocarem no papel dos alunos para formular perguntas e dúvidas e para encontrar novas maneiras de transmitir o conteúdo aos estudantes. Ao longo da unidade estão descritas três possíveis situações em sala de aula que podem ser abordadas e que você precisará desenvolver. A primeira aula compreenderá a construção dos números naturais e de três das quatro operações (soma, subtração, multiplicação). Já a segunda aula resgatará o conceito de infinito e introduzirá a operação de divisão. Por fim, a terceira aula versará sobre os números reais.

Para resolver essas questões, primeiramente desenvolveremos na Seção 1.1 o conceito de número natural e a construção dos números naturais. Isso nos levará à noção de infinito e de enumerabilidade e, com isso, serão também desenvolvidas as quatro operações (soma, subtração, multiplicação, divisão) e os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais, estes últimos na

Seção 1.2. Por fim, vale notar que nem todo número pode ser apresentado como um número racional. Esses números, chamados de "irracionais", formam, com o conjunto dos números racionais, a reta real, assunto da Seção 1.3.

Após os estudos de cada seção, você estará apto a vencer os desafios propostos e poderá levar esse conhecimento para aprofundar o ensino dos números reais em sala de aula.

Conjuntos enumeráveis e números naturais

Diálogo aberto

Nesta seção trataremos da construção dos números naturais, assim como da formalização da noção intuitiva de contagem e da noção de infinito. Esta primeira seção também será importante para que você se familiarize mais com as técnicas de demonstração de teoremas; isso lhe trará maior maturidade matemática e o ajudará a seguir os passos traçados ao longo do resto do livro. É esperado que você tenha já familiaridade com conceitos básicos da lógica matemática, assim como da teoria de conjuntos. Caso não se sinta confortável com esses conceitos, é recomendável que faça uma revisão do conteúdo.

O que é um número? Existem diferentes respostas possíveis a essa pergunta, mas do ponto de vista da análise matemática esse conceito precisa ser bem fundamentado, de modo que a construção dos números naturais precisa ser feita rigorosamente. Isso se dá por meio dos axiomas de Peano, como veremos.

Lembre-se de que, para motivar a sua aprendizagem, você se coloca no papel de um professor que está preparando um treinamento para docentes de matemática que estão participando de um curso de formação continuada. A primeira aula versará sobre o conceito de número natural, e mostrará ser preciso desenvolver o conceito primitivo de contagem. Explique em palavras, como se estivesse em uma aula, a construção dos números naturais e os axiomas de Peano. Não utilize fórmulas nessa primeira abordagem e argumente por que o conjunto dos números naturais é infinito.

Note que as aulas precisam conter atividades práticas que utilizem esses conceitos, para melhor fixação do conteúdo. Proponha aos alunos que construam, a partir dos axiomas de Peano, as operações de adição e multiplicação. Peça para eles elencarem os problemas que aparecem ao se tentar fazer as operações inversas (subtração e divisão), e pergunte como estender o conceito de número para além dos números naturais, de forma a englobar essas operações. Prepare um gabarito para a correção, apontando também possíveis erros de raciocínio que você julgue serem mais comuns de aparecer. Quais dicas você daria aos professores para que eles apresentassem esses conceitos em sala de aula?

O conteúdo aprendido nesta seção e nas seguintes desta unidade serão de fundamental importância para o entendimento das unidades seguintes. Aqui, desenvolveremos o conceito de número natural e, a partir do conjunto dos naturais, definiremos o que são conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis. Da construção dos números naturais seguem as operações de adição e multiplicação. Fica a pergunta: as outras duas operações (subtração, divisão) podem ser feitas dentro do conjunto dos naturais? Prepare detalhadamente seu plano de aula, com respostas a questões que você imagina serem de importância para o aprendizado dos alunos.

Não pode faltar

Números naturais

Vamos, então, à construção dos números naturais, cuja ideia central é a noção de que todo número natural tem um sucessor (o equivalente de "somar 1" ao número). Esse sucessor deve ser único para cada número, e números diferentes devem ter sucessores diferentes. Assim, a partir do primeiro elemento do conjunto (o número 1), todos os outros serão obtidos (a questão sobre o zero dever ou não ser incluído nos números naturais não vem ao caso no momento; do ponto de vista descrito anteriormente, bastaria, ao inseri-lo, considerá-lo como o primeiro elemento do conjunto, cujo sucessor será 1). Formalmente, essa construção se dá por meio dos **axiomas de Peano**, nome que faz referência ao matemático Giussepe Peano (1858-1932). Para que possamos compreender os axiomas, consideramos $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (a ser construído) e postulamos que $\mathbb{N}$ tem as seguintes propriedades (LIMA et al., 2006):

1. Todo número natural tem um único sucessor e números naturais distintos têm sucessores distintos. Isto é, existe uma função injetora $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $s(n)$ é o sucessor de n.

2. Existe um único número natural, o número 1 ("um"), que não é sucessor de nenhum outro número, mas tem sucessor como os demais. Isto é, a imagem da função s é $s(\mathbb{N})=\mathbb{N}-\{1\}$.

3. Se $A\subset\mathbb{N}$ é um subconjunto dos números naturais tal que $1\in A$ e, se $n\in A$ então $s(n)\in A$, segue que $A=\mathbb{N}$. Isto é, se $1\in A$ e se todo sucessor de um elemento de A também pertencer a A, então temos $A=\mathbb{N}$.

Essas três propriedades são as chamadas de axiomas de Peano e são suficientes para a construção dos números naturais e das operações de adição e multiplicação, como veremos. Do primeiro axioma segue que se $m\neq n$, então $s(m)\neq s(n)$, isto é, a primeira propriedade faz referência às funções injetoras, ou seja, não há dois elementos distintos no domínio com a mesma imagem, e também fala sobre a sequência de números que têm sucessores (lembro aqui que é imprescindível para a boa fixação dos conteúdos que você, estudante, faça no papel **todas** as passagens mencionadas aqui e que não foram demonstradas, e refaça todas as demonstradas, de preferência consultando o texto somente ao final da demonstração).

O segundo axioma trata especificamente do número 1, que apesar de ter um sucessor é o único que não é sucessor de nenhum outro. O terceiro axioma, denominado **princípio da indução**, é a base para a construção das operações de adição e multiplicação, assim como a demonstração de diversas propriedades dos números naturais.

Lembre-se

O princípio da indução pode também ser enunciado da seguinte maneira: se uma propriedade de números naturais (ou de conjuntos indexados pelos números naturais) for válida para $n=1$, e se, supondo a propriedade válida para algum número natural k arbitrário, mostrarmos por argumentos da Lógica que a propriedade será válida também para k+1, então a conclusão será de que a propriedade será válida para todo número natural. Uma aplicação desse princípio será vista na demonstração das propriedades da adição e multiplicação a seguir.

Sigamos para essas operações. A **adição**, que associa ao par *(m,n)* o número *m+n*, é definida da seguinte maneira a partir dos axiomas de Peano:

$$m+1=s(m)$$

$$m+s(n)=s(m+n)$$

Ao substituir *s(n)* por *n + 1* e *s(m + n)* por *(m + n) + 1*, obtemos:

$$m+(n+1)=(m+n)+1$$

Note que utilizamos aqui somente as definições dadas nos axiomas 1 e 2, de modo que a construção não depende de nenhuma outra estrutura que não as já apresentadas. Ainda mais, as equações apresentadas são válidas para qualquer número natural. Já a **multiplicação** de dois números, que associa ao par *(m,n)* o número $m \cdot n$, é obtida a partir das seguintes definições:

$$m \cdot 1=m$$

$$m \cdot s(n)=m \cdot n+m$$

em que a operação de multiplicação deve ser feita sempre antes da operação de adição.

Rearranjando as equações, temos:

$$m\cdot(n+1)=m\cdot n+m$$

Pelo terceiro axioma de Peano, o princípio da indução, mostra-se que:

$m+(n+p)=(m+n)+p$ (associatividade da adição).

$m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$ (distributividade – relaciona a adição com a multiplicação).

$m+n=n+m$ (comutatividade da adição).

$m\cdot n=n\cdot m$ (comutatividade da multiplicação).

A demonstração dessas propriedades é deixada para você, aluno. A seguir são demonstradas as últimas duas. Lembre-se de que é extremamente importante que você refaça os exemplos no papel após estudá-los, consultando a resolução só ao final, ou que tente resolver o exemplo sem antes ver a solução e, então, comparar depois as respostas. A leitura ativa, destrinchando todas as passagens do texto, é fundamental para o aprendizado em matemática.

Exemplificando

Vamos mostrar que $m+n=n+m$ e $m\cdot n=n\cdot m$. Suponhamos que sejam verdadeiras as outras duas igualdades anteriores, a associatividade da adição e a distributividade das operações. Vamos começar com a comutatividade da adição.

Mostramos primeiro que $m+1=1+m$, pelo princípio da indução (indução em m). Para $m=1$ a equação é trivialmente satisfeita. Suponhamos que a equação valha para um dado m. Então queremos mostrar que $(m+1)+1=1+(m+1)$, para podermos aplicar o princípio da indução. Isto é, queremos mostrar que $s(m)+1=1+s(m)$.

Temos que $s(m)+1=(m+1)+1=(1+m)+1$. Mas $(1+m)+1=1+(m+1)$, de modo que $A-\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Logo, pelo princípio da indução, a igualdade $m+1=1+m$ é válida para todo $m\in\mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

O próximo passo é mostrar que $m+n=n+m$. Para isso, mantemos m fixo e fazemos indução em n. Para $n=1$, acabamos de demonstrar o resultado. Suponhamos que a equação seja satisfeita para algum n. Queremos mostrar que $m+s(n)=s(n)+m$. Pela associatividade da adição, $m+(n+1)=(m+n)+1$. Utilizando nossa hipótese $m+n=n+m$, temos $m+(n+1)=(n+m)+1$. Novamente pela associatividade da adição, temos que $(n+m)+1=n+(m+1)$. Como mostramos anteriormente que $m+1=1+m$, temos então $n+(m+1)=n+(1+m)$ e portanto, pela associatividade da adição,

$n+(m+1)=(n+1)+m$ e $m+s(n)=s(n)+m$, como queríamos demonstrar. Assim, pelo princípio de indução, a comutatividade da adição é válida para quaisquer números naturais.

A comutatividade da multiplicação segue os mesmos passos apresentados aqui. A diferença é que, em vez de utilizarmos a associatividade da adição nos passos intermediários, é preciso utilizar a propriedade distributiva. Fica como exercício para você, aluno, demonstrar a comutatividade da multiplicação utilizando este exemplo como guia.

Embora as noções de adição e multiplicação sejam bastante familiares, notemos que os números naturais, como construídos aqui, precisam ser munidos dessas estruturas adicionais por meio de argumentos lógicos, como feito. A operação de adição permite atribuir ao conjunto $\mathbb{N}$ uma **relação de ordem**: dizemos que ***m*** é menor do que ***n***, e escrevemos $m < n$, quando existir um número $j \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + j$. Nesse caso, dizemos também que ***n*** é maior do que ***m***, e escrevemos $n > m$. Dizemos que ***m* é menor ou igual a *n*** ($m \leq n$) se $\mathbb{Z}$ ou $f : X_n \to A$, e ***m*** é maior ou igual a ***n*** ($m \geq n$) se $m > n$ ou $m = n$.

Temos agora o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, dotado dessas duas operações. O sucessor de 1 é denotado pelo número 2, o sucessor de 2 por 3, e assim por diante, como conhecido. Vale notar que, como todo número natural tem um sucessor, o conjunto dos números naturais tem as propriedades do que gostaríamos de chamar de um conjunto infinito. Veremos a seguir como definir rigorosamente conjuntos finitos e infinitos.

Conjuntos finitos

A noção de conjunto finito é bastante intuitiva, no entanto sua definição parece circular. Não basta dizer que um conjunto finito é aquele que tem um número finito de elementos, pois isso seria transferir o problema: precisaríamos definir o que é um "número finito de elementos". Vejamos então uma definição precisa.

Definição: seja $X_n = \{m \in \mathbb{N} \,;\, m \leq n\}$. Um conjunto *A* é dito **finito** quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f : X_n \to A$ (lembremos que uma função é bijetora se é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora). Nesse caso, dizemos que *A* tem *n* elementos, ou que o número de elementos de *A* é *n*. Um conjunto é dito **infinito** quando não é finito (LIMA, 2016b).

Note que, se existir uma bijeção entre um conjunto finito *A* e um conjunto qualquer *B*, então *B* também será finito. Por quê?

Para ilustrar o conceito, suponhamos que $A = \{\varnothing, \{1\}, \mathbb{N}\}$, isto é, o conjunto formado pelos seguintes elementos: o conjunto vazio $\varnothing$, o conjunto unitário $\{1\}$ e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Vale notar que, embora separadamente $\varnothing$, $\{1\}$ e $\mathbb{N}$ sejam conjuntos, cada um deles é visto como um elemento de A. Assim, definindo a função $f : X_3 \to A$ por $f(1) = \varnothing$, $f(2) = \{1\}$, $f(3) = \mathbb{N}$, vemos que A é finito, segundo a definição apresentada.

Reflita

O número de elementos de um conjunto é bem definido? O que acontece se existir outra bijeção $g : X_m \to A$? Qual a relação entre *m* e *n*?

Então, temos aqui a definição precisa do que é um conjunto finito. Como consequência direta, temos também a definição do que é um conjunto infinito. A seguir, veremos algumas propriedades dos conjuntos finitos.

Lema 1.1: seja $A \subset X_n$ um subconjunto próprio, isto é, $A \neq X_n$. Então não existe bijeção $f : X_n \to A$ (LIMA, 2016a).

Dem.: utilizaremos a demonstração por contradição. Suponha por absurdo que exista tal função para um dado valor de n, por exemplo, n_0. Seja n_0 o menor número natural para o qual isso acontece e $n_0 - 1$ tal que $s(n_0 - 1) = n_0$. Suponha que $n_0 \in A$. Tomemos uma bijeção $g : X_{n_0} \to X_{n_0}$ tal que a composta $h = f \circ g : X_{n_0} \to A$ satisfaça $h(n_0) = n_0$. Então a restrição de h ao subconjunto $X_{n_0} - \{n_0\} = X_{n_0 - 1}$ é uma bijeção entre os conjuntos $X_{n_0 - 1}$ e $A - \{n_0\}$, contradizendo o fato de n_0 ser o menor número natural para o qual existe a bijeção. Já se $n_0 \notin A$, seja $a_0 \in A$ tal que $f(n_0) = a_0$. Então a restrição de f a $X_{n_0 - 1}$ é uma bijeção sobre $A - \{a_0\}$, o que é uma contradição. □

Faça você mesmo

Com base no lema anterior, demonstre o seguinte teorema:

Teorema 1.2: seja A um conjunto finito. Então, para qualquer subconjunto próprio $B \subset A$, não existe bijeção entre A e B.

Um segundo resultado sobre conjuntos finitos é o seguinte teorema:

Teorema 1.3: todo subconjunto de um conjunto finito também é finito.

Dem.: consideremos primeiramente os conjuntos X_n definidos anteriormente, $X_n = \{m \in \mathbb{N} \,;\, m \leq n\}$. Façamos indução em n. Para $n = 1$ o resultado é trivial. Suponha que valha para algum n e consideremos o conjunto X_{n+1}, com $B \subset X_{n+1}$ subconjunto próprio. Se $n + 1 \notin B$, temos $B \subset X_n$ e o resultado está provado. Suponhamos, então, que $n+1 \in B$. O conjunto $B - \{n+1\}$ é finito por hipótese, logo, existe uma bijeção $f : X_m \to B - \{n+1\}$, com $m \leq n$. Façamos a definição da função $g : X_{m+1} \to B$ tal que $g(k) = f(k)$ para $k \leq m$ e $g(m+1) = n+1$. Como *f* é bijeção, segue que *g* é bijeção e, portanto, *B* é finito. Pelo princípio da indução, temos então que o resultado é válido para todo *n*, e o teorema está provado. □

O Teorema 1.2 também nos dá informação sobre conjuntos infinitos. Usando a contrapositiva do teorema, podemos dizer que "se existe bijeção entre um conjunto *A* e um subconjunto próprio, então *A* é infinito" (lembremos que a contrapositiva da afirmação "se *p* é verdade então *q* é verdadeiro" é "se *q* é falso então *p* é falso", em que *p* e *q* são duas proposições). Vale notar aqui que, dessa forma, o Teorema 1.2 implica que o conjunto dos números naturais é infinito. De fato, seja o subconjunto dos números pares, $P = \{k \in \mathbb{N}; k = 2b,\ b \in \mathbb{N}\}$, subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. Então a função $f : \mathbb{N} \to P$ dada por $f(k) = 2k$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e *P* (lembre-se da leitura ativa: mostre este resultado). Dessa forma, pelo Teorema 1.2, $\mathbb{N}$ é infinito.

Conjuntos enumeráveis

Definição: um conjunto *A* é **enumerável** se *A* é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.

No caso em que existe a bijeção, *A* é dito **infinito enumerável**. Se *A* for infinito e não existir bijeção com $\mathbb{N}$, então *A* é dito **não enumerável** (LIMA, 2016b).

Exemplificando

A operação de subtração exige que estendamos o conjunto dos números naturais para um conjunto maior, o dos números inteiros, formado pelos números positivos e negativos: $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Temos que $\mathbb{Z}$ é enumerável. De fato, a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(2n) = n-1$, $f(2n-1) = -n$, é uma bijeção. Lembre-se da leitura ativa, demonstre este resultado!

A noção de enumerabilidade está intrinsecamente ligada ao conjunto dos números naturais, que é utilizado, então, para enumerar os elementos do conjunto. A ideia de que é possível associar um número natural a cada elemento do conjunto nos diz que, em algum sentido, os conjuntos enumeráveis são os "menores" conjuntos infinitos, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.4: todo conjunto infinito tem um subconjunto infinito enumerável.

Dem.: seja A um conjunto infinito. Para demonstrar o teorema, basta definir uma função injetora $f:\mathbb{N}\to A$, pois nesse caso a imagem de $\mathbb{N}$ por *f*, $f(\mathbb{N})$, será um conjunto enumerável. Tomemos um elemento $a_1 \in A$. Definimos então $f(1)=a_1$. Claramente o conjunto $A-\{a_1\}$ é infinito. Além disso, ao retirarmos um subconjunto finito de *A*, o conjunto restante continuará infinito (por quê? Verifique as propriedades da união de dois conjuntos finitos). Assim, prosseguimos por indução, da seguinte maneira: suponhamos que estejam definidos $a_1=f(1)$, $a_2=f(2)$, ..., $a_n=f(n)$. Então o conjunto $A-\{a_1,a_2,...,a_n\}$ é infinito e, portanto, existe um elemento $a_{n+1}\in A-\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Definimos $f(n+1)=a_{n+1}$. O conjunto $A-\{a_1,a_2,...,a_{n+1}\}$ continua infinito e, portanto, tal procedimento nos dá a função *f* desejada, que é injetora. Assim, o conjunto $\{f(i);\ i\in\mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito enumerável de *A*, como queríamos demonstrar. □

Assimile

Assim, você pode notar que existem dois tipos de conjunto infinito: o infinito enumerável e o infinito não enumerável. Em ambos os casos, sendo *A* esse conjunto, temos que existe uma função injetora $f:\mathbb{N}\to A$. A diferença é que no caso de A ser enumerável, existe alguma f que é bijeção. Já no caso em que A é não enumerável, não existe $f:\mathbb{N}\to A$ sobrejetora.

Perceba ainda que, para concluir que um conjunto é não enumerável, não basta encontrar uma função $f:\mathbb{N}\to A$ que seja injetora, mas que não seja sobrejetora. É preciso que **nenhuma** função desse tipo seja sobrejetora. De fato, se considerarmos o exemplo dos números inteiros, a função identidade $id:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $id(k)=k$ é injetora, mas não é sobrejetora. No entanto, vimos anteriormente que $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Estamos trabalhando para desenvolver uma importante habilidade: a de dominar técnicas de demonstração em matemática. Desde a demonstração de resultados básicos como os da construção da soma e da multiplicação (que, apesar de bem conhecidos, não são triviais, tendo em vista somente os axiomas de Peano e utilizando como ferramenta apenas a lógica matemática) até resultados mais complicados sobre conjuntos enumeráveis, o formalismo utilizado para a demonstração dos teoremas é o mesmo que será utilizado ao longo de todo o livro. Dessa forma, é de extrema importância que você, leitor, domine as técnicas aqui apresentadas e consulte as referências ao final da seção, para aprofundamento.

Saiba mais

Apresentamos nesta seção resultados básicos sobre os números naturais e os conjuntos finitos e infinitos. Já para uma visão mais aprofundada do conteúdo apresentado aqui, ver Lima (2016a), capítulo 1, p. 1-11. Essa leitura é de grande importância para o aprofundamento dos conceitos envolvidos nesta seção.

Já como outra sugestão de leitura complementar para aqueles que querem se aprofundar na aplicação dos conceitos em sala de aula, indicamos uma discussão pedagógica sobre os números naturais, voltada a professores do ensino médio, em que os resultados lá apresentados estão em uma linguagem mais próxima à que deve ser utilizada com os alunos dessa fase de escolarização. Ver Lima et al. (2006), capítulo 2, p. 25-37.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. (Coleção Professor de Matemática).

LIMA, Elon Lages. **Análise real:** funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016a. v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

Sem medo de errar

Relembrando, você deve preparar um curso de formação continuada para professores do ensino médio abordando rigorosamente a noção de número, sendo a primeira aula sobre números naturais.

Como primeiro passo você deve apresentar os axiomas de Peano, juntamente com a noção de sucessor, e depois deve introduzir a multiplicação e a adição. Estes axiomas podem ser lidos sem a necessidade de introduzir nenhuma equação. É sua função apresentar a melhor maneira de fazer essa leitura. Intuitivamente, por exemplo, a operação de adição (somar k a um número) equivale a aplicar k vezes a função "sucessor", ou equivalentemente somar "1" k vezes (lembre-se de que a única coisa que está definida nos axiomas de Peano é o sucessor). Analogamente, dada a adição, a operação de multiplicação $m \cdot n$ equivale a somar ao número m outras $(m-1)$ cópias. O foco nos axiomas de Peano e nas operações de adição e multiplicação é extremamente importante para as próximas seções, de modo que estes precisam ser bem assimilados pelos alunos. Proponha, por exemplo, atividades em grupo que envolvam demonstrações utilizando o princípio da indução finita (terceiro axioma de Peano). Prepare os enunciados e gabaritos dessas demonstrações. Consulte livros didáticos (as referências ao final da unidade, por exemplo) para formular essas questões.

Note que a transição entre "somar 1" e "somar k" não é direta; vale a pena sempre ressaltar a limitação dos axiomas de Peano quanto a isso e lembrar da necessidade de aplicá-los recursivamente. Também é importante mencionar novamente que, para que essas operações valham para todos os números naturais, elas precisam satisfazer o princípio da indução (terceiro axioma de Peano). Proponha que os alunos demonstrem, em dupla, as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade da adição e multiplicação, como no exemplo feito no capítulo, e prepare um gabarito para as propriedades não demonstradas ao longo do texto.

Vale notar que os axiomas de Peano não definem a subtração ("inversa" da adição). Se $m > n$, definimos $p = m - n$ como o (único) número natural, tal que $m = n + p$. Já se $m < n$, a quantidade p definida anteriormente não pertence aos números naturais. Logo, para que a operação de subtração faça sentido para quaisquer números naturais, ela precisa estar definida em um conjunto maior, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, que também engloba o zero. Já ao introduzirmos a operação de divisão ("inversa" da multiplicação), também "saímos" de $\mathbb{Z}$. Precisaremos considerar o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais (ou fracionários), assunto da próxima seção. Permita que os alunos elaborem perguntas sobre o conjunto $\mathbb{Z}$, preparando um gabarito-teste, e exponha como deve ser feita essa extensão (o que passa por definir o que é um número negativo).

Os axiomas de Peano podem ser apresentados em sala de aula, introduzindo a ideia de que "somar 1" é suficiente para, recursivamente, somar e subtrair quaisquer números. Para o ensino fundamental, o material dourado é uma boa maneira de introduzir os estudantes a esses conceitos. Escreva detalhadamente seu plano de aula, utilizando os conceitos e dicas aqui apresentados.

Avançando na prática

Palestra para o público não especializado

Descrição da situação-problema

Imagine a situação em que você, estudante, é um matemático que foi contratado para dar uma palestra de divulgação sobre o infinito para um público não especializado, mas com bastante interesse em matemática. Você deve tratar dos conceitos de infinito, abordando o conceito de contagem e depois distinguindo o infinito enumerável do não enumerável. Como você organizaria a palestra? Para quais tópicos você daria mais atenção?

Resolução da situação-problema

O conceito de contagem segue da definição de conjunto finito e do número de elementos do conjunto *A*. Uma contagem é uma bijeção $f : X_n \to A$, isto é, uma maneira de ordenar os elementos do conjunto. Há diferentes contagens (por exemplo, diferentes bijeções), diferentes maneiras de começar a contar os elementos de um conjunto. Um conjunto de bolinhas de gude coloridas pode ser útil para ilustrar o conceito. Argumente que há uma quantidade finita de maneiras de contar as bolinhas. Dar mais ênfase a conjuntos finitos pode ajudar a introduzir brevemente o conceito de infinito enumerável. O conceito de infinito não enumerável está mais distante do cotidiano. Está associado à ideia de um contínuo, como um intervalo de reta.

Faça valer a pena

1. Um conjunto *A* se diz **limitado** se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n\ \forall k \in A$. Queremos mostrar o seguinte resultado: "todo conjunto finito é limitado". Para isso, escrevemos $A = \{a_1, ..., a_m\}$ e definimos __________. Então temos $a_k \leq n\ \forall k \in A$. Por outro lado, se *A* é limitado, segue que *A* é finito. Vemos isso pois, pelo que acabamos de mostrar, $A \subset X_n$, portanto, pelo _________, segue que *A* é finito.

Complete a demonstração preenchendo as lacunas. Há somente uma alternativa correta.

a) $n = a_m$; Teorema 1.3
b) $n = a_1 + ... + a_m$; Teorema 1.2
c) $n = a_1 + ... + a_m$; Teorema 1.3
d) $n = a_m$; Teorema 1.2
e) $n = a_1 + ... + a_m$; Lema 1.1

2. Um importante resultado, bastante intuitivo, mas não trivial de se mostrar, é o seguinte teorema:
Teorema 1.5: todo subconjunto dos números naturais é enumerável.
Vamos demonstrar esse resultado. O procedimento é análogo ao utilizado para demonstrar o Teorema 1.4. Seja $A \subset \mathbb{N}$. Se *A* é finito, então é consequentemente enumerável. Suponhamos *A* infinito. Vamos definir recursivamente uma função $f : \mathbb{N} \to A$, que depois mostraremos ser bijeção. Seja $f(1) =$ menor elemento de *A*, e

$f(k+1) =$ menor elemento de $A - \{f(1),..., f(k)\}$. Claramente, $A - \{f(1),..., f(k)\}$ é infinito para todo *k*, ________. Assim, a função f está definida para todo número natural. Temos que *f* é injetora, pois ___________. Para mostrarmos que *f* é sobrejetora, suponhamos que exista $a \in A$ que não está na imagem de *f*. Então $a > f(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas, como $A \subset \mathbb{N}$, segue que $f(k) \geq k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Logo, _______, o que é impossível. Assim, segue que $f : \mathbb{N} \to A$ é bijeção e *A* é enumerável. □

Complete as lacunas da demonstração com a alternativa correta.

a) pois *A* é infinito ; $f(i) > f(j)$ se $i > j$; $a \geq k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

b) pois *A* é infinito; $f(i) < f(j)$ se $i > j$; $a \geq k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

c) pois *A* é enumerável ; $f(i) > f(j)$ se $i < j$; $a > k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

d) pois *A* é infinito ; $f(i) > f(j)$ se $i > j$; $a > k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

e) pois *A* é enumerável; $f(i) > f(j)$ se $i > j$; $a > k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

3. Sejam *A* um conjunto finito e *B* um conjunto infinito enumerável. Considere as seguintes afirmações:

1. O conjunto das partes de *A*, formado por todos os subconjuntos de *A*, é finito.
2. O conjunto formado por todas as funções $f : A \to A$ é infinito.
3. O produto cartesiano $A \times A = \{(a,b);\ a,b \in A\}$ é finito.
4. Toda função injetora $f : B \to B$ é sobrejetora.
5. Toda função sobrejetora $f : B \to B$ é injetora.

Marque a alternativa que indica todas as afirmações verdadeiras.

a) 1 e 3.

b) 1 e 5.

c) 1, 2 e 4.

d)1, 3 e 5.

e) 2, 3 e 4.

Números racionais e irracionais

Diálogo aberto

Na seção anterior vimos a construção dos números naturais, envolvendo adição e multiplicação, e estendemos esse conjunto ao dos números inteiros para que a operação de subtração estivesse bem definida. Nesta seção trataremos do conceito de divisão de dois números reais, levando assim à construção dos números racionais. Também introduziremos o conceito de corpo e veremos que nem todo número é racional, o que leva ao conjunto dos números irracionais.

Veja que os números racionais estão presentes como conteúdo tanto no ensino fundamental quanto, implicitamente, no ensino médio. Um bom entendimento da operação de divisão nos ajuda, por exemplo, a calcular quocientes de polinômios, ou mesmo futuramente a calcular quocientes de números irracionais (muitas vezes envolvendo a raiz quadrada). Dessa forma, um bom entendimento da estrutura desses números fará com que você possa, além de ter domínio sobre o conteúdo, melhorar sua capacidade didática no ensino básico.

Continuamos a preparação das aulas para o curso de formação continuada de professores do ensino médio. Você agora precisa preparar a segunda apresentação do curso, e se lembra de que uma das maiores dificuldades encontrada em sala de aula é na compreensão do conceito de infinito, sendo importante,então, que os professores discutam e argumentem a respeito. Como já foram abordadas as operações de soma, multiplicação (de números naturais) e subtração (de números inteiros), resta construir a operação de divisão. A partir de exemplos práticos, uma boa continuação é desenvolver o conceito de fração e de número racional. Todo número é racional? Mostre exemplos de números irracionais e dê exemplos de como tais conceitos podem ser desenvolvidos em sala de aula. Como determinar se uma fração é maior do que a outra, se elas não forem irredutíveis? Você decide propor uma dinâmica em que os professores se coloquem na posição dos alunos e formulem dúvidas sobre os conceitos apresentados. Prepare você mesmo uma lista de dúvidas, apresentando também as respostas como gabarito.

Dessa forma é esperado que você, aluno, após estudar esta seção, esteja confortável para lidar com números racionais e irracionais, assim como com o conceito de corpo, que será retomado na próxima seção. Lembre-se do estudo ativo: para uma boa aprendizagem, em que o conteúdo seja, de fato, fixado na memória, é preciso refazer e completar as passagens das demonstrações, assim como trabalhar os exemplos dados e a seção *Faça você mesmo*. Esteja certo de que esses esforços valerão a pena.

Não pode faltar

Na seção anterior vimos a construção dos números naturais, assim como as operações de adição e multiplicação nesse conjunto. Os números naturais levam ao conceito de enumerabilidade de conjuntos infinitos, de modo que demonstramos diferentes resultados sobre conjuntos finitos e enumeráveis. Também introduzimos a operação de subtração como a "inversa" da adição; para isso foi necessário estender o conjunto dos números naturais para os números inteiros, pois a subtração de dois números nem sempre pertence a $\mathbb{N}$.

Após ter visto todos esses conceitos mencionados, podemos avançar nossos estudos e definir a operação de divisão. Assim como no caso da operação de subtração, a divisão nem sempre pertencerá ao conjunto, de modo que também precisamos estendê-lo. Dados dois números naturais p, q, primos entre si (p e q não têm fatores comuns), define-se a razão $r = \dfrac{p}{q}$ como o número r tal que $q \cdot r = p$. Claramente, como p e q não têm fatores comuns, segue que $r \in \mathbb{N}$ somente se $q = 1$. Assim, vemos que para a operação de divisão estar bem definida precisamos estender o conjunto dos números naturais. Definimos assim o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números **racionais**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$$

Veja que, pela definição, o conjunto dos racionais é formado por números que são a razão de dois números inteiros, p e q, com a restrição de que q deve ser diferente de zero.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável

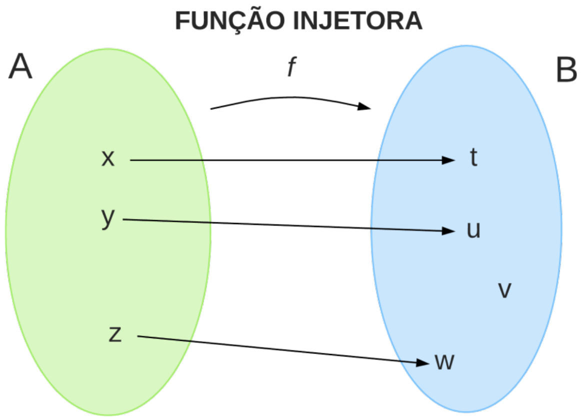
Trataremos aqui de alguns outros resultados sobre conjuntos enumeráveis, de modo que esta é uma boa oportunidade para rever os conceitos da seção anterior (inclusive os resultados apresentados nas questões ao final da seção) caso não se sinta confortável com as demonstrações apresentadas.

Nosso primeiro objetivo é demonstrar que $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável. Para isso, precisamos de resultados adicionais sobre conjuntos enumeráveis, estendendo os obtidos na seção anterior. Os enunciados dos resultados a seguir (Lemas 1.6 e 1.7, Teoremas de 1.8 a 1.10) foram baseados em Lima (2016b, p. 50). A demonstração de cada um, embora siga os moldes apresentados lá, está ora mais detalhada neste texto, ora apresenta uma abordagem um pouco diferente.

Lema 1.6: seja B um conjunto enumerável e $f: A \to B$ injetora (Figura 1.1). Então A é enumerável.

Dem.: sendo B enumerável, existe uma bijeção $g: B \to \mathbb{N}$. Assim, a composta $g \circ f: A \to \mathbb{N}$ é uma função injetora. A imagem de $g \circ f$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e, portanto, é enumerável pelo Teorema 1.5. Logo, segue que A é enumerável. □

Figura 1.1 | *f* injetora. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



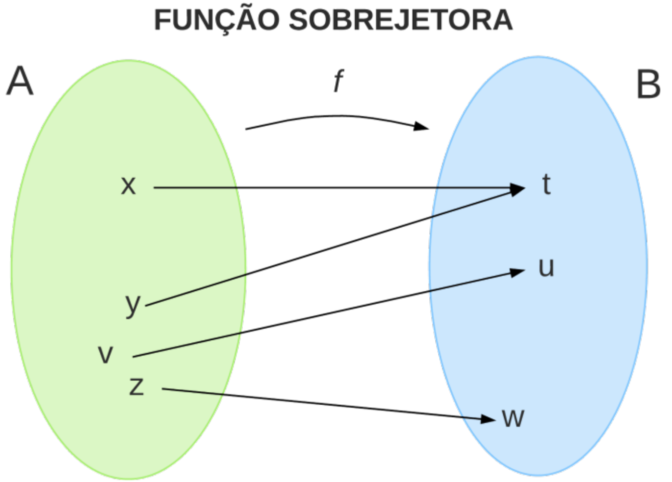
Fonte: elaborada pelo autor.

O Lema 1.6 tem a seguinte interpretação: se tivermos um conjunto enumerável B e uma função injetora $f: A \to B$, intuitivamente A não pode ser "maior" do que B. Matematicamente, isso significa que A precisa ser enumerável.

Lema 1.7: seja A um conjunto enumerável e $f: A \to B$ sobrejetora (Figura 1.2). Então B é enumerável.

Dem.: se $f: A \to B$ é sobrejetora, isso significa, por definição, que para cada $a \in A$ existe $b \in B$ .Queremos utilizar o lema anterior na demonstração; para isso precisamos de uma função injetora $h: B \to A$, tal que $f(a) = b$. Para cada $b \in B$ tomemos algum $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e façamos $h(b) = a$. Assim, h está definida em todo o conjunto B e é injetora. De fato, para $b, b' \in B$ temos elementos distintos $a, a' \in A$ com $h(b) = a$ e $h(b') = a'$. Segue do Lema 1.6 que B é enumerável. □

Figura 1.2 | f sobrejetora. $\forall y \in B,\ \exists x \in A;\ y = f(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

O Lema 1.7 é o recíproco do Lema 1.6: se $f: A \to B$ for sobrejetora, então B precisa ser "menor" do que A, e se A for enumerável, então B precisa ser enumerável.

Precisamos ainda dos seguintes resultados auxiliares:

Teorema 1.8: o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Dem.: a demonstração desse resultado se encontra em diversos textos de análise e baseia-se na decomposição de um número em fatores primos. É um resultado da teoria de números (que está fora do escopo deste texto) que cada natural tem uma única decomposição em fatores primos. Em particular, os números naturais da forma $2^m \cdot 3^n$ são diferentes para cada par *(m,n)*. Isso nos mostra que a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$, é injetora. Segue do Lema 1.6 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

Faça você mesmo

Vimos que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Por outro lado, sabemos que um conjunto A é enumerável se existe bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais. Com essas informações, demonstre o teorema a seguir:

Teorema 1.9: sejam dois conjuntos enumeráveis A e B. O produto cartesiano $A \times B = \{(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$ é enumerável (LIMA, 2016b, p. 50).

Notemos que faz sentido o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis ser enumerável, pois seria o análogo de o produto cartesiano de dois conjuntos finitos ser finito.

Assim, chegamos ao resultado desejado:

Teorema 1.10: o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Dem.: da definição do conjunto dos racionais dada, podemos nos restringir a frações cujo numerador e denominador são primos entre si (caso existam fatores comuns entre o numerador e o denominador, é possível "cancelá-los" a partir da seguinte regra, que é um caso particular da definição de multiplicação que veremos em breve: para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, temos $\frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$).
Então a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f\left(p/q\right) = \left(p, q\right)$ é injetora. Como $\mathbb{Z}$ é enumerável, segue do Teorema 1.9 que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável e então, pelo Lema 1.6, $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

O corpo $\mathbb{Q}$: adição e multiplicação

Podemos também definir em $\mathbb{Q}$ as operações de adição $\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{p \cdot n + m \cdot q}{q \cdot n}\right)$ e multiplicação $\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}\right)$, com as respectivas operações inversas (subtração e divisão; note que a divisão já foi definida entre elementos de $\mathbb{N}$, mas agora estendemos a elementos de $\mathbb{Q}$). Segue que $\mathbb{Q}$ é **fechado** em relação à soma e à multiplicação (a soma e a multiplicação de elementos de $\mathbb{Q}$ também são elementos de $\mathbb{Q}$). Dessas definições, e das propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, segue que a adição e multiplicação de números racionais satisfazem as seguintes propriedades: para $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

1. $\left(a+b\right)+c = a+\left(b+c\right)$ (associatividade de adição).

2. $a+b = b+a$ (comutatividade da adição).

3. $a+0 = 0+a = a$, em que o elemento "zero" existe e é único para todo *a* (elemento neutro da adição).

4. $a+(-a) = 0$, em que $(-a)$ existe e é único para cada elemento *a* (inverso aditivo).

5. $\left(a \cdot b\right) \cdot c = a \cdot \left(b \cdot c\right)$ (associatividade de multiplicação).

6. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação).

7. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, em que o "um" é único para todo *a* (elemento neutro da multiplicação).

8. $a\cdot(a^{-1})=1$, em que (a^{-1}) é único para cada elemento a (inverso multiplicativo).

9. $a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c$ (distributividade).

As propriedades de 1 a 4 são relativas à operação de adição, denotada pelo símbolo "$+$", enquanto as propriedades de 5 a 8 referem-se à multiplicação, denotada pelo símbolo "$\cdot$". Já a propriedade 9 se refere a como essas duas operações "interagem". O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações de adição e multiplicação, satisfazendo essas nove propriedades, é, então, dito um **corpo**, o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais (FIGUEIREDO, 1996).

Reflita

Dos conjuntos numéricos tratados até agora, apenas o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é um corpo com relação às operações usuais de adição e multiplicação. Qual a primeira lacuna ao checarmos se $\mathbb{N}$ é um corpo? Veja qual propriedade faltante nos faz construir o conjunto $\mathbb{Z}$. Da mesma maneira, qual das propriedades apresentadas falha ao tentarmos verificar se $\mathbb{Z}$ é um corpo? Veja qual propriedade faltante nos faz construir o conjunto $\mathbb{Q}$.

Geralmente, dado um conjunto X não vazio, se for possível muni-lo de duas operações, "$+$" e "$\cdot$", de modo que X seja fechado com respeito a essas operações (o resultado das operações entre dois elementos do conjunto é também elemento do conjunto) e satisfazendo as propriedades de 1 a 9, dizemos que a operação "$+$" é uma "soma" e a operação "$\cdot$" é uma multiplicação. Nesse caso, dizemos que $\left(X,\ \cdot\ ,\times\right)$ é um *corpo* com respeito às operações de soma "$+$" e multiplicação "$\cdot$". Note que, caso a propriedade 9 (distributividade) não valha, não há como diferenciar entre as duas operações definidas, já que ambas satisfazem o mesmo conjunto de propriedades (a diferença é que o elemento neutro e a inversa de cada elemento serão diferentes para as operações "$+$" e "$\cdot$"). É a propriedade distributiva que nos permite diferenciar entre as duas operações, dizendo que "$+$" é a soma e "$\cdot$" é a multiplicação. Em outras palavras, temos a seguinte definição de corpo:

Definição: $\left(X,\ \cdot\ ,\times\right)$, isto é, um conjunto X munido das operações "$+$" e "$\cdot$" é dito um **corpo** com respeito a essas operações se as propriedades de 1 a 9 forem satisfeitas para quaisquer elementos do conjunto. Nesse caso, "$+$" é chamada de **soma** e "$\cdot$" é chamada de **multiplicação** (LIMA, 2016a).

Uma digressão: um conjunto com as propriedades de 1 a 4 é dito um **grupo abeliano** com respeito à operação "$+$" (o que também vale para as propriedades de 5 a 8 e a operação " · "). No entanto, o estudo dessas estruturas de grupo está fora do escopo do presente texto e é mencionado aqui apenas como curiosidade; esses conceitos são desenvolvidos em cursos de Álgebra.

Exemplificando

Vejamos um exemplo de um corpo em que as operações de adição e multiplicação não são necessariamente iguais às usuais. Considere o conjunto $A=\{0,1\}$. Primeiramente, definiremos a operação " $\cdot$ " nesse conjunto, que queremos chamar de multiplicação. Para isso, basta definir como essa operação age entre quaisquer elementos do conjunto. Tomamos, como esperado, 1 como o elemento neutro da multiplicação. Definimos $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$. Desse modo, essa operação se reduz à multiplicação usual, restrita ao conjunto *A* e, portanto, satisfaz as propriedades de 5 a 8. No entanto, vemos que, se a operação de adição for definida como a usual, a soma de dois elementos de *A* não necessariamente pertence a *A* (por exemplo, teríamos $1+1=2$, mas $2\notin A$). Assim, a operação " $+$ " não pode ser a adição usual, caso queiramos que A seja um corpo.

Para que *A* seja um corpo, consideraremos a seguinte operação " $+$ " em *A*, com 0 como seu elemento neutro: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$. Assim, *A* é fechado com respeito a ambas as operações. Para que " $+$ " seja considerada uma soma, uma condição necessária é que satisfaça as propriedades de 1 a 4 (fica a seu cargo verificar que isso de fato acontece. Para isso, é necessário trabalhar com " $+$ " aplicada a cada par de elementos do conjunto, em particular a $1+1$). Também, verifica-se que a propriedade distributiva (9) é válida, de modo que, com essas operações, $(A\ ,\ \cdot\ ,\times)$ é um corpo.

Vamos verificar a propriedade distributiva. Como 1 é o elemento neutro da multiplicação, basta verificar que $1\cdot(1+0)=1\cdot 1+1\cdot 0$ e que $1\cdot(1+1)=1\cdot 1+1\cdot 1$. Mas pela definição da soma e adição essas igualdades são válidas, de modo que a propriedade distributiva é verificada.

Além de ser um corpo, o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, no sentido de que existe uma relação de ordem entre os elementos do conjunto que é preservada pelas operações de adição e multiplicação, como veremos a seguir. Embora os números naturais também apresentem uma relação de ordem (dada pela operação de adição), veremos que a estrutura no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é muito mais rica. Vale a pena fazer mentalmente o paralelo com o corpo $\mathbb{Q}$ no que segue.

Definição: um corpo $(F, \cdot, \times)$ é dito **ordenado** se existir um subconjunto $P \subset F$, o subconjunto dos elementos **positivos**, que satisfazem as duas condições a seguir:

1. Se $a, b \in P$, então $a+b \in P$ e $a \cdot b \in P$.

2. Se $a \in F$, então ou $a \in P$, ou $(-a) \in P$, ou $a = 0$.

Definiremos agora o conjunto dos números negativos, $-P = F - (P \cup \{0\})$. Temos então a união disjunta $F = P \cup \{0\} \cup (-P)$. Vale notar que o subconjunto $-P$ não é fechado quanto à adição e multiplicação. A relação de ordem "$<$" em F é definida como foi feito para os números naturais: dizemos que "*a* é menor do que *b*" ($a < b$) quando existir $c \in P$, tal que $b = a + c$. Nesse caso, também dizemos que "*b* é maior do que *a*". Se *a* for menor ou igual a *b* escrevemos $a \leq b$ (e, analogamente, $b \geq a$). A relação de ordem satisfaz as seguintes propriedades:

1. $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$ (transitividade).

2. Dados $a, b \in F$, ou $a < b$, ou $a = b$ ou $a > b$ (tricotomia).

3. Se $a < b$, então $a + c < b + c \ \forall c \in F$ (monotonicidade da adição).

4. Se $a < b$ e $c \in P$, então $a \cdot c < b \cdot c$ (monotonicidade da multiplicação).

Vale notar que dizer que $c \in P$ é o mesmo que dizer que $c > 0$. Isso pode ser visto pela tricotomia (propriedade 2), em que colocando $b = 0$ os número positivos (pertencentes ao conjunto *P*) ficam definidos da seguinte forma: $c \in P$ se, e somente se, $c > 0$.

A relação de ordem definida no conjunto $F = P \cup \{0\} \cup (-P)$ satisfaz as propriedades apresentadas. Isso se dá devido às características do conjunto *P* dos números positivos. Demonstremos, como exemplo, a primeira propriedade, a transitividade: se $a < b$ e $b < c$, isso significa que $b - a \in P$ e $c - b \in P$. Assim, $c - a = (c - b) + (b - a)$ é a soma de dois elementos de *P*, sendo então também um elemento de *P* pela propriedade 1.

Assimile

Com as operações de adição e multiplicação usuais, vimos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo, pois satisfaz todas as propriedades necessárias (de 1 a 9). Além disso, com a relação de ordem usual, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. O conjunto dos números racionais positivos é definido da maneira usual:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{Q} \ ; \ x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Lembremos que essa relação de ordem é dada da seguinte forma: se $q,n \in \mathbb{N}$ e $p,m \in \mathbb{Z}$, então:
$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ se, e somente se, $p \cdot n > q \cdot m$, em que aparece a relação de ordem e a multiplicação dos números inteiros, que são conhecidas.

É um exercício saudável verificar que a relação "$>$" é uma relação de ordem no corpo $\mathbb{Q}$, com respeito ao conjunto dos números positivos P definido anteriormente.

De fato, se $p \cdot n > q \cdot m$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p \cdot n = q \cdot m + k$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que q e n sejam positivos (o sinal do número racional fica então igual ao sinal do numerador). Logo, $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \frac{k}{q \cdot n}$, com $\frac{k}{q \cdot n} \in \mathbb{Q}$ e $k > 0$. Logo, temos a seguinte caracterização da relação de ordem "$>$" em $\mathbb{Q}$, definida anteriormente:

$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{Q}$, tal que $\frac{p}{q} > \frac{m}{n} + c$, justificando o nome "relação de ordem". Assim, temos sempre que ou $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, ou $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$, ou $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. Revise esses conceitos e as demonstrações desses fatos, pois serão importantes para a seção seguinte.

Notemos que nem todo número é racional, isto é, nem todo número pode ser escrito na forma p/q, onde $p,q \in \mathbb{Z}$. De fato, suponhamos que $a = p/q$, com $a^2 = a \cdot a = 2$ (definimos esse número a pelo símbolo $a = \sqrt{2}$. Então $p^2 = 2 \cdot q^2$ e, como $p^2 = p \cdot p$, $q^2 = q \cdot q$, as decomposições em fatores primos desses números p^2 e q^2 contêm um número par de fatores de 2 (tanto para p^2 quanto para q^2, verifique!). Logo, $2 \cdot q^2$ contém um número ímpar de fatores de 2 em sua decomposição em fatores primos e, portanto, chegamos à conclusão de que é necessário que $p^2 \neq 2 \cdot q^2$, o que é uma contradição.

Note que o número 2, no parágrafo anterior, não tem papel especial: outro número natural n poderia ser escolhido tal que $a^2 = a \cdot a = n$. No entanto, esse valor de n não pode ser qualquer um. Por exemplo, para $n = 4$, teremos $a^2 = 4$ que nos dá duas soluções, $a = 2$ ou $a = -2$. Em ambos os casos, $a \in \mathbb{Z}$. Precisamos então encontrar uma propriedade do número 2 que é utilizada na demonstração de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Vemos que a propriedade desejada é a de que 2 é um número primo, para que cheguemos a uma contradição: a de que as decomposições em fatores primos de p^2 e q^2 tenham um número par de fatores de 2, e outra um número ímpar de fatores de 2.

Assim notamos que, para qualquer número primo n escolhido, os mesmos passos nos levam à conclusão de que $\sqrt{n}$ não é um número racional (embora intuitivo, vale a pena fazer a demonstração desse fato seguindo a mesma linha de raciocínio da demonstração anterior). É um resultado da teoria de números (que está fora do escopo do presente texto) que o conjunto dos números primos é infinito. Assim, segue desta discussão que o conjunto dos números irracionais também é infinito, pois contém o seguinte conjunto:

$\left\{\sqrt{n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ é primo}\right\}$, que é infinito (e enumerável; verifique este último fato).

Portanto, sabemos o que é um corpo, quando esse corpo é ordenado e verificamos que $\mathbb{Q}$ é enumerável e é um corpo ordenado. Mais ainda, sabemos agora que nem todo número é racional, o que dá origem ao conjunto dos números irracionais. Veremos na próxima seção que os números racionais, juntamente com os números irracionais, formarão os números reais (a reta real), que também são corpos ordenados, porém não enumeráveis.

Saiba mais

Apresentamos aqui as principais características de corpos e corpos ordenados. Para saber mais estude resultados adicionais, outros exemplos e uma discussão mais aprofundada nas Seções 3.1 e 3.2 do seguinte livro (páginas 61 a 75):

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise.** 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016. v. 1. (Projeto Euclides).

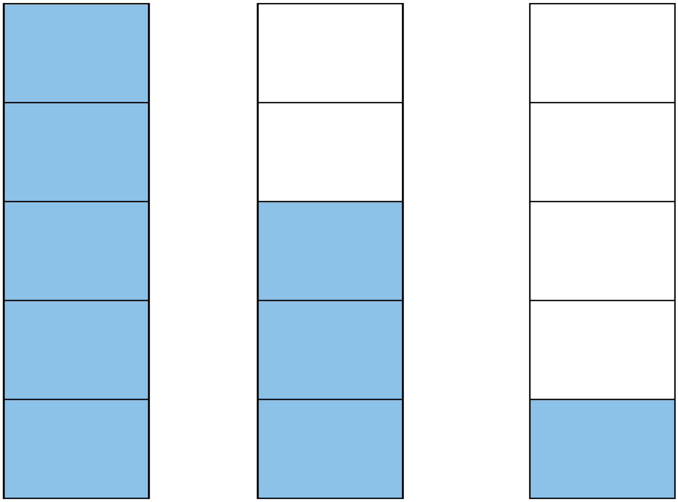
Sem medo de errar

Relembrando, você deve preparar um curso de formação continuada para professores do ensino médio abordando rigorosamente a noção de número, sendo esta aula sobre os números racionais e irracionais.

Para fixar os conceitos da aula anterior, vale a pena perguntar aos alunos a definição de conjunto infinito. Note que podem surgir respostas do tipo "um conjunto é infinito se existir uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais", ou "um conjunto é infinito se contém os números naturais", ou outro argumento similar. Note que, no primeiro caso, essa é a definição de infinito enumerável (veremos que nem todo conjunto é enumerável). No segundo caso, conjuntos que não são numéricos ou não contêm todos os números naturais estariam desconsiderados. A resposta correta, por mais óbvia que possa ser, é "um conjunto é infinito se não é finito". Claro, isso remete à definição de conjunto finito, que é o passo seguinte. A definição de conjunto finito, por sua vez, é precisa, e foi apresentada na seção anterior. Atente-se a esses detalhes, pois são sutilezas que precisam ser esclarecidas e fazem parte do desenvolvimento da maturidade matemática.

Posteriormente, pode ser interessante praticar com os seus alunos uma atividade didática para apresentação em sala de aula e que envolva o conceito de fração, como a divisão de uma barra de chocolate em seus pedaços. A ideia serve mais para a apresentação aos alunos do ensino fundamental/médio, mas ilustra o conceito de contagem dentro do conjunto dos racionais.

Figura 1.3 | Exemplo ilustrativo de frações



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.3 apresenta uma opção de atividade para inspirá-lo, baseada no exemplo do chocolate. Veja que a partir de um chocolate foram extraídos pedaços que correspondem a frações. Do total de cinco pedaços (esquerda), deixamos três na figura do meio e um na figura da direita. Desenvolver esse exemplo, variando o tamanho do chocolate e suas frações, pode ser um bom exercício a ser apresentado para alunos do ensino fundamental, por exemplo.

Após apresentar o conjunto dos números racionais, essa ideia de repartir números em frações motiva a demonstração de que esse conjunto é (infinito) enumerável. É importante que os professores do curso sejam capazes de demonstrar sozinhos (ou em grupo) essa afirmação e os lemas que a precedem, que podem ser enunciados, e você precisa de um gabarito completo. Uma atividade em grupo pode, então, ser proposta, incluindo a comparação das demonstrações dos diferentes grupos (corrigindo os possíveis erros e apontando como as demonstrações podem ser melhoradas).

Com a operação de divisão, que dá origem aos números racionais, um bom exemplo para mostrar que nem todo número é racional é o $\sqrt{2}$, o que pode ser demonstrado rigorosamente após uma discussão com os alunos sobre decomposição em fatores primos.

Já o conceito de uma fração ser maior do que a outra pode render discussões que comparam a relação de ordem nos números racionais com a relação de ordem nos números inteiros. Isso foi realizado no quadro *Assimile*. Para ilustrar, veja o exemplo a seguir, que seria a comparação das frações 3/5 e 4/7: qual é maior? Utilizaremos a definição dada, supondo, sem perda de generalidade, que p e m são inteiros e q e n são naturais:

$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ se, e somente se, $p \cdot n > q \cdot m$

de modo que $p = 3$, $q = 5$, $m = 4$ e $n = 7$. Como $3 \cdot 7 = 21$ e $5 \cdot 4 = 20$, temos que $3/5 > 4/7$. Vale passar exemplos com outras frações, para fixar o conceito.

Propondo que os professores se coloquem na posição dos alunos para os quais darão aula, eles podem, depois de todas essas discussões, elaborar possíveis dúvidas que estão respondidas ao longo desta seção. Pense nos conceitos que são mais difíceis de se assimilar do seu ponto de vista e liste as questões que podem surgir (ou que surgiram para você durante o estudo), e elabore as respostas para elas.

Avançando na prática

A fábrica de sabonetes

Descrição da situação-problema

Um fabricante de sabonetes tem participação de mercado em várias cidades do estado de São Paulo. As vendas em cada cidade variam em lucratividade, de modo que o fabricante está pensando em quais cidades investir mais. Dessa forma contratou você, matemático, no papel de consultor externo. Além de realizar algumas análises mais urgentes, consta no contrato que você deve treinar o time responsável da própria empresa para que eles possam realizar sozinhos análises similares no futuro. Durante o treinamento, você percebeu uma grave dificuldade por parte dos funcionários da empresa com questões de matemática básica, e julgou que faz parte do escopo da consultoria prestada sanar essas dúvidas. Além disso, para aumentar o interesse na apresentação, você decidiu ensinar matemática no contexto de negócios da própria fabricante.

Tenha em mente que o conceito de contagem e de números inteiros (com as operações de adição, subtração e divisão) são familiares, no entanto, para muitas pessoas a operação de divisão é a mais difícil de ser efetuada. Prepare uma apresentação em que você defina e exemplifique as operações entre frações, focando também na relação de ordem do conjunto dos racionais. Essa apresentação terá o intuito de guiar os funcionários no entendimento dos números fracionários e no conceito de qual fração é maior que a outra.

Resolução da situação-problema

A apresentação deve conter uma introdução aos números naturais e aos números inteiros, levando assim à conclusão de que não é possível realizar a operação de divisão nesses conjuntos. Para que ela se efetue, a introdução das frações se torna necessária. Após a apresentação dos resultados básicos, pode ser interessante introduzir a relação de ordem entre frações baseada na relação de ordem entre os números inteiros, para que os funcionários possam perceber em qual cidade é mais vantajoso investir. Assim, a comparação entre frações se transforma em comparação entre números inteiros.

As vendas totais da empresa trazem os valores chamados de receita, a qual poderíamos analisar em cada cidade. Descontando todos os custos (produção, marketing, etc.) e os impostos e juros de empréstimos, chegamos ao valor conhecido como lucro, que deve ser maximizado. Queremos um quantificador que meça em qual cidade é melhor concentrar os investimentos. Poderíamos então comparar a receita por cidade com os custos por cidade, definindo a **margem** como (receita-custos)/receita.

Vejamos um exemplo, na Tabela 1.1, com quatro cidades, em que é apresentada a margem calculada na última coluna:

Tabela 1.1 | Amostra do banco de dados por cidade

Cidade	Receita	Custos em reais	Margem
Cidade 1	3 milhões	2 milhões e 200 mil	$4/15 = 8/30$
Cidade 2	5 milhões	4 milhões	$1/5 = 6/30$
Cidade 3	6 milhões	5 milhões	$1/6 = 5/30$
Cidade 4	1 milhão	700 mil	$3/10 = 9/30$

Fonte: elaborada pelo autor.

A partir do exemplo vemos que, embora a cidade 4 seja a que tem menor receita, a análise nos mostra que ela é a melhor cidade para se investir, pois é a que tem a maior margem. Aumentando os investimentos espera-se aumentar a receita e, assim, aumentar o lucro da empresa. Já a cidade 3, embora tenha a maior receita, é a que apresenta a menor margem.

Faça valer a pena

1. Foi evidenciado que o conjunto dos números racionais é enumerável. Para isso, utilizamos o resultado de que o produto cartesiano $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável. Mas será que o produto $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}$ é enumerável?

Para isso, prosseguimos por indução. Notemos que o conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ é enumerável, pois o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é enumerável. Segue que, supondo $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}$ enumerável, então __________ também é enumerável. Prosseguindo por indução, temos que $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}$ é enumerável para todo k. Segue também que o produto cartesiano de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável, da mesma maneira que no Teorema 1.2.

Assinale qual alternativa preenche corretamente a lacuna da demonstração.

a) __ $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k+1 vezes}}=\mathbb{N}\cup\left(\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}\right)$

b) __ $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{n vezes}}=\mathbb{N}\times\left(\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}\right)$

c) __ $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k+1 vezes}}=\mathbb{N}\times\left(\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}\right)$

d) __ $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{m vezes}}$

e) __ $\overbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}^{\text{k vezes}}$

2. Em um corpo ordenado *F*, definimos o valor absoluto de um elemento *a* como: *a* se $a>0$, $-a$ se $a<0$ e 0 se $a=0$. Denotamos o valor absoluto de *a* por $|a|$. Demonstraremos a seguinte propriedade (desigualdade triangular): se $a,b\in F$, então $|a+b|\leq|a|+|b|$. Para isso, notemos que se $a=0$ ou $b=0$, a igualdade é trivialmente satisfeita. Já se $a>0$, $b>0$, então $|a+b|=|a|+|b|$. Também, se $a<0$, $b<0$, temos ______, $|a|=-a$ e $|b|=-b$. Assim, como $-(a+b)=-a-b$, segue também que $|a+b|=|a|+|b|$. Já no caso em que um dos elementos é positivo e outro negativo, sem perda de generalidade $a>0$ e $b<0$, então $|a|=a$ e $|b|=-b$, de modo que _______ e $|a+b| < \max\{a+b, -(a+b)\}$, isto é, o máximo entre essas duas quantidades. Mas, como b é negativo, $a-b > a+b$ e $a-b > -a-b$, de modo que nesse caso _______.

Assinale a alternativa que completa corretamente a sequência lógica da demonstração.

a) __ $|a+b| = -(a+b)$; __ $|a|+|b| = a-b$; __ $|a+b| = |a|+|b|$

b) __ $|a+b| = a-b$; __ $|a|+|b| = b-a$; __ $|a+b| = |a|+|b|$

c) __ $|a+b| = (a+b)$; __ $|a|+|b| = a-b$; __ $|a+b| < |a|+|b|$

d) __ $|a+b| = -(a+b)$; __ $|a|+|b| = a-b$; __ $|a+b| < |a|+|b|$

e) __ $|a+b| = -(a+b)$; __ $|a|+|b| = b-a$; __ $|a+b| < |a|+|b|$

3. Consideremos o conjunto $A = \{0,1,2\}$ com operações "$+$" e "$\cdot$" entre seus elementos. Queremos que $(A, \cdot, +)$ seja corpo. Definimos "$\cdot$" da seguinte maneira: 1 é o elemento neutro da multiplicação, $0\cdot 1 = 0\cdot 2 = 0$ e $2\cdot 2 = 1$ e impomos que a multiplicação é comutativa. Temos que essa operação satisfaz os axiomas de corpo.

Para qual operação "$+$" definida a seguir $(A, \cdot, +)$ é corpo, sendo "$+$" a operação de soma, suposta comutativa, com 0 seu elemento neutro?

a) $1+1=2$, $2+1=0$, $2+2=0$

b) $1+1=0$, $2+1=0$, $2+2=1$

c) $1+1=0$, $2+1=2$, $2+2=1$

d) $1+1=2$, $2+1=0$, $2+2=1$

e) $1+1=2$, $2+1=0$, $2+2=2$

Seção 1.3

O corpo dos números reais

Diálogo aberto

Caro aluno, vimos nas seções anteriores os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Esses conjuntos foram elaborados gradativamente, no intuito de construir com rigor as quatro operações algébricas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Como uma consequência disso, foram desenvolvidos os conceitos de conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis, assim como o de corpo algébrico.

Esta seção fecha a Unidade 1 e trata da construção do corpo dos números reais, assim como dos conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto. Trataremos também da não enumerabilidade do conjunto dos números reais. Veremos que o conjunto dos números racionais não é completo, no sentido que será definido ao longo da seção. Intuitivamente, veremos que existem conjuntos de números racionais limitados por números que não são racionais (os irracionais, vistos na seção anterior). Assim, a fim de podermos trabalhar com um "contínuo" de números, é necessário "completar" o conjunto dos racionais para conter todos os "limites" de seus subconjuntos; surge, então, a reta real. As noções de convergência e de continuidade, que serão vistas nas próximas unidades, baseiam-se fortemente na propriedade de completude dos números reais.

Lembramos que você está ministrando um curso de formação continuada para professores do ensino médio. O tema da aula de hoje será o conjunto dos números reais e suas propriedades. Mostrando aos professores do curso como são construídos os números reais, aparece, então, o conceito de supremo e ínfimo. A partir da definição, surge o questionamento: o supremo e o ínfimo de um conjunto são sempre números que pertencem a esse conjunto?

Para esclarecer as ideias, proponha para a classe um exemplo simples, como o indicado a seguir.

Considere o conjunto $A=\left\{\frac{5}{k_1}-\frac{5}{k_2};k_1,k_2\in\mathbb{N}\right\}$. Em seguida, apresente números que não pertencem a ele, independentemente dos valores adotados para $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. É correto afirmar que o número 5 pertence a esse conjunto se tomarmos valores suficientemente grandes para $k_1,k_2\in\mathbb{N}$? Em que a determinação do supremo e do ínfimo desse conjunto pode ser útil para você responder a essas questões?

Prepare outros exemplos, utilize gráficos ou ilustrações (que podem ser criadas por você mesmo) para a resolução dos exercícios propostos. Qual a melhor maneira de apresentar o conteúdo, de modo a garantir que eles possam fixá-lo? Exercícios, demonstração de teoremas, debates entre os alunos sobre os conceitos? Proponha essas atividades, sempre se lembrando de preparar o gabarito correspondente.

Para vencer o desafio proposto aqui, é necessário dedicar-se aos estudos desta seção, pois o conteúdo apresentado será fundamental para a compreensão de sequências, séries e continuidade de funções, temas centrais da análise matemática.

Não pode faltar

Na seção anterior estendemos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ para o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, a fim de permitir a operação de divisão. O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável e, com as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), é um corpo, como vimos. No entanto, também vimos que existem (infinitos) números que não pertencem ao conjunto dos racionais (ou seja, que não podem ser representados por frações cujo numerador e denominador são inteiros). Chamaremos o conjunto desses números de números irracionais, e o denotaremos pelo símbolo I.

Assim, definimos o conjunto dos **números reais**, denotado por $\mathbb{R}$, como sendo a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$. Trabalharemos nesta seção as propriedades desse conjunto e a sua representação como uma reta "contínua", conceito que será utilizado ao longo de todo o restante do curso.

A relação de ordem nos números reais

Queremos que o conjunto dos números reais tenha estrutura de corpo e "herde" a relação de ordem dos números racionais. Isto é, dados a,b números reais queremos definir, como na seção anterior, uma relação de ordem "<" tal que apenas uma das situações a seguir ocorre: ou $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$. Além disso, como é de se desejar, essa relação de ordem, quando restrita aos racionais, deve se reduzir à relação já definida na seção anterior. Para isso é necessário introduzir os conceitos de supremo e ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$, assim como de cotas superiores e inferiores de um conjunto. Como nossa relação de ordem está definida apenas em $\mathbb{Q}$, consideraremos apenas esse conjunto por enquanto.

Então consideraremos um conjunto $A \subset \mathbb{Q}$. Seguiremos as definições dadas em Lima (2016b, p. 74). Mas vale notar que essas definições são as mesmas em qualquer livro-texto de análise (como de fato precisam ser), como pode ser visto, por exemplo, em Figueiredo (1996, p. 7-8). Dizemos que um número $x \in \mathbb{Q}$ é **cota inferior** de *A* se, para todo elemento $y \in A$, tivermos $x \leq y$. Nesse caso dizemos que *A* é **limitado inferiormente**. Analogamente, $x \in \mathbb{Q}$ é **cota superior** de *A* se, para todo elemento $y \in A$, tivermos $x \geq y$, e, nesse caso, A é **limitado superiormente**. O ínfimo de *A*, inf(*A*), é a maior das cotas inferiores de *A* em $\mathbb{Q}$ (lembrando que *A* é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, o corpo que está sendo estudado). Já o **supremo** de *A*, sup(*A*), é a menor das cotas superiores de *A* em $\mathbb{Q}$. Ou seja, um número $x \in \mathbb{Q}$ é ínfimo de *A* se for cota inferior de *A* e se, para qualquer outra cota inferior *y* de *A*, tivermos $x > y$. Por outro lado, $x \in \mathbb{Q}$ é supremo de *A* se for cota superior de *A* e se, para qualquer outra cota superior *y* de *A*, tivermos $x < y$.

Exemplificando

Consideremos o conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$, isto é, o conjunto dos números racionais da forma $1/n$, onde *n* é um número natural. Temos que $A \subset \mathbb{Q}$, e vemos que *A* é limitado inferiormente e superiormente. Afirmamos que sup(A)=1. De fato, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $1/n < 1$. Assim, 1 é cota superior de *A*. Mostraremos, então, que 1 é a menor cota superior possível. Mas isso segue do fato de que $1 \in A$, pois se tivermos algum outro elemento *x*, que é cota superior de *A*, x será maior que todos os elementos do conjunto *A*. Como $1 \in A$ segue que $x > 1$ e, portanto, temos de fato $\sup(A) = 1$.

Quanto ao ínfimo de *A*, notamos que todo número racional negativo é cota inferior de *A*, visto que este é formado somente por números positivos. Pelo mesmo argumento, 0 é cota inferior de *A*. Afirmamos que 0 é a maior cota inferior de *A*, isto é, que $\inf(A) = 0$. De fato, tomemos *y* uma outra cota inferior de *A*, e suponhamos $y > 0$ racional. Então $y = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Mostraremos que existe um elemento de *A*, que é menor que *y* e maior que zero. Se $p = 1$, temos que $y = 1/q \in A$ e, portanto, tomando $q = 2$, segue que $y/2 \in A$. Como $y/2 < y$, *y* não é cota inferior de *A*. Por outro lado, se $p > 1$ escrevendo $z = y/p$, temos que $z < y$ e também que *z* é da forma $z = 1/q \in A$. Assim, obtemos que *y* não pode ser cota inferior de A, o que é uma contradição. Logo, temos, de fato, $\inf(A) = 0$.

O exemplo apresentado nos mostra que que o ínfimo (e analogamente o supremo) de um conjunto A não necessariamente pertence ao conjunto A. No entanto, se A tiver um elemento mínimo, isto é, um elemento $y \in A$ tal que $y < x \ \forall x \in A$, então $\inf(A) = y$ (analogamente para o supremo, como vimos no exemplo). Temos, então, o seguinte lema, que traduz o que dissemos anteriormente:

Lema 1.11: Se $y \in A$ for elemento máximo de A, então $\sup(A) = y$. Se y for elemento mínimo de A, então $\inf(A) = y$.

Na discussão apresentada é necessário enfatizar que a todo momento supusemos que $A \subset \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é o corpo em que nossa relação de ordem está definida. Surge, então, uma pergunta natural de se fazer: será que o ínfimo (ou o supremo) de um conjunto A sobre o corpo $\mathbb{Q}$ sempre é um elemento de $\mathbb{Q}$? Isto é, será que $\mathbb{Q}$ é **completo**, no sentido de que sempre conterá o supremo e o ínfimo de seus subconjuntos e, dessa forma, poderia ser representado por uma "reta"?

Temos a ideia intuitiva de que isso não é possível, pois vimos na seção anterior a existência dos números irracionais, que não podem ser representados como uma fração de números inteiros. Retomemos o exemplo da raiz quadrada de 2, que vimos ser um número irracional na seção anterior. Consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{Q}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q};\ x > 0 \text{ e } x^2 < 2\right\}$$

Como no exemplo anterior, vemos que $\inf(A) = 0$, pelos mesmos argumentos lá utilizados. Procuremos agora, no corpo $\mathbb{Q}$, o supremo desse conjunto. Suponhamos que $\sup(A) = p/q$, onde p e q são tomados primos entre si. Isso implica, em particular, que p/q é cota superior de A, isto é, que $p/q > x$ para todo $x \in A$. Claramente não podemos ter $p/q \in A$, pois nesse caso existe um número racional b tal que $(p/q + b)^2 < 2$, isto é, tal que $p/q + b \in A$. De fato, tomando $0 < b < 1$, temos que $(p/q + b)^2 = (p/q)^2 + 2p \cdot b/q + b^2$ e

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\frac{p}{q} \cdot b^2 + b^2 < \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\frac{p}{q} \cdot b + b^2 = \left(\frac{p}{q} + b\right)^2$$

Assim,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(2\frac{p}{q} + 1\right)b^2 < \left(\frac{p}{q} + b\right)^2$$

De modo que o lado direito da inequação é menor do que 2 sempre que:

$$b^2 < \frac{2 - (p/q)^2}{2p/q + 1}$$

Em particular, como $0<b<1$, segue que $b^2<b$. Tomando então o número racional b menor do que o lado direito da inequação apresentada, por exemplo:

$$b<\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\left(p/q\right)^2}{2\,p/q+1}$$

temos $\left(p/q+b\right)^2<2$. Logo, precisamos ter $p/q \notin A$. Se tivermos $\left(p/q\right)^2>2$, existirá um racional *c*, tal que $\left(p/q-c\right)^2<2$ (para demonstrar essa parte basta repetir os argumentos expostos anteriormente, trocando *b* por $-c$ e invertendo o sinal da igualdade). Então só nos resta uma opção: devemos ter $\left(p/q\right)^2=2$, isto é, $\sup(A)=p/q=\sqrt{2}$. Mas vimos na seção anterior que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, de modo que o conjunto A definido não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Dizemos, então, que $\mathbb{Q}$ não é um corpo completo (isto é, um corpo em que todo subconjunto limitado superiormente tem supremo dentro do próprio corpo).

A propriedade mencionada nos mostra que, se quisermos trabalhar com um corpo em que o supremo e ínfimo de um conjunto limitado também pertença ao corpo, precisamos estender o corpo $\mathbb{Q}$ a um conjunto maior. Este conjunto maior será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que queremos que seja um corpo ordenado e completo, preservando a relação de ordem já existente entre elementos de $\mathbb{Q}$. Uma construção rigorosa dos números reais, demonstrando que um corpo com tais propriedades existe, está fora do escopo deste livro. Suporemos aqui a existência da relação de ordem usual dos números reais e veremos, então, que o supremo de todo conjunto $A\subset\mathbb{R}$ limitado superiormente existe em $\mathbb{R}$. Se esse supremo não pertencer a $\mathbb{Q}$, então por definição sup(A) é irracional, pertencendo também a $\mathbb{R}$. O argumento apresentado pode parecer tautológico e, de fato, não contém o rigor necessário a um curso de Análise Matemática. Deixamos os detalhes da demonstração de que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo para que você, aluno dedicado, pesquise na literatura especializada. Para o que segue, tomamos por axioma que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

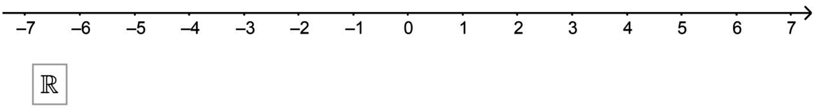
Saiba mais

A construção dos números reais como um corpo ordenado completo pode ser feita a partir dos chamados cortes de Dedekind. Embora fora do escopo do presente texto, sugerimos a leitura do livro de Geraldo Ávila, em que há uma boa discussão sobre o assunto, nas páginas de 53 a 64.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006. p. 53-54.

Supondo, então, definida a estrutura de corpo dos números reais, o fato de esse corpo ser completo nos permite uma representação pictórica de $\mathbb{R}$, a chamada "reta real" (ver Figura 1.4). Nela, os números reais são representados sobre uma reta "contínua" (ver Figura 1.1), o que reflete a **propriedade do supremo** dos números reais, que enfatizamos novamente: **todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, tem supremo em $\mathbb{R}$** (ver também Figueiredo (1996), página 8, assim como os comentários nas páginas 11 e 12).

Figura 1.4 | A reta real



Fonte: elaborada pelo autor.

Intervalos

A relação de ordem nos números reais permite definir a noção de intervalo como sendo um subconjunto B de $\mathbb{R}$ em que, dados $x, y \in B$, temos que $z \in B$ para todo $x < z < y$. Para $b > a$, definimos:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \qquad [a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

Os intervalos do tipo (a,b) são ditos **abertos**, enquanto os intervalos do tipo $[a,b]$ são ditos **fechados**. Já os intervalos do tipo $(a,b]$ ou $[a,b)$ não são nem abertos nem fechados. Mas dizemos que, por exemplo, $(a,b]$ é aberto à esquerda e fechado à direita. Podemos, então, formular a definição de supremo e ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ como a seguir: um número $x \in \mathbb{R}$ é **supremo** do conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se:

1. $x > y$ para todo $y \in A$

2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $y \in (x - \varepsilon, x]$

A primeira propriedade nos diz que x é cota superior de A. Já a segunda propriedade diz que x é a menor cota superior de A. De fato, se $b > x$ for também cota superior de A, definindo $\varepsilon = b - x$ temos que o intervalo $(b - \varepsilon, b]$ não contém nenhum elemento de A, e portanto não satisfaz a propriedade 2. Analogamente, w é ínfimo do conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se:

1. $w < y$ para todo $y \in A$

2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $y \in [w, w + \varepsilon)$

Notemos que $\sup(a,b) = \sup[a,b] = b$ e $\inf(a,b) = \inf[a,b] = a$, isto é, o supremo e o ínfimo de um intervalo encontram-se em seus extremos (não importando se estes são abertos ou fechados).

Assimile

É importante ressaltar que o conceito de supremo depende do conjunto em que estamos trabalhando (o que também vale para o ínfimo). Como vimos, existem conjuntos que têm supremo em $\mathbb{R}$, mas não têm supremo em $\mathbb{Q}$.

Também vale notar que existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não apresentam supremo. Esses conjuntos, ditos **ilimitados**, são tais que seus elementos "tendem ao infinito" quando ordenados do menor para o maior. Isto é, um conjunto *A* é ilimitado superiormente se, para qualquer $a > 0$, existir $x \in A$ com $x > a$. Uma definição análoga pode ser dada para conjuntos ilimitados inferiormente. Exemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ ilimitados (superiormente e inferiormente) são os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Exemplos de subconjuntos ilimitados superiormente são as semirretas:

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}, \qquad (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}.$$

Já exemplos de subconjuntos ilimitados inferiormente são as semirretas:

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}, \qquad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}.$$

Temos o seguinte resultado sobre a relação entre o supremo e o ínfimo de conjuntos distintos, que retiramos de Lima (2016a, p. 121-122):

Teorema 1.12: sejam *A* e *B* subconjuntos de $\mathbb{R}$ limitados. Suponha que, para todo $a \in A$ e $b \in B$, tenhamos $a \leq b$. Então segue que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Além disso, temos que $\sup(A) = \inf(B)$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existirem $a \in A$, $b \in B$ com $b - a < \varepsilon$.

Dem.: demonstremos primeiramente que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Temos que todo $b \in B$ é cota superior para *A*, por hipótese. Como $\sup(A)$ é a menor cota superior para o conjunto *A*, segue que $b \geq \sup(A)$ para todo $b \in B$. Reescrevendo essa última desigualdade, $\sup(A) \leq b$ para todo $b \in B$. Mas isso significa que $\sup(A)$ é uma cota inferior para *B*. Pela definição de ínfimo de um conjunto, $\inf(B)$ é a maior cota inferior para *B*, de modo que, então, devemos ter $\inf(B) \geq \sup(A)$.

Vamos agora à segunda parte da demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $\sup(A)=\inf(B)$. Utilizaremos as definições de supremo e ínfimo dadas em termos de intervalos (as propriedades 2 do supremo e do ínfimo mencionadas anteriormente). Dado $\varepsilon>0$, pela definição de $\sup(A)$ existe $a\in A$ tal que $a\in\left(\sup(A)-\varepsilon/2,\sup(A)\right]$. Isto é, $\sup(A)-\varepsilon/2<a\leq\sup(A)$. Por outro lado, pela definição de $\inf(B)$, existe, para o mesmo ε, um número $b\in B$ tal que $b\in\left[\inf(B),\inf(B)+\varepsilon/2\right)$, ou seja, $\inf(B)\leq b<\inf(B)+\varepsilon/2$. Assim, como por hipótese $\sup(A)=\inf(B)$, juntando as desigualdades, obtemos $\sup(A)-\varepsilon/2<a\leq b<\inf(B)+\varepsilon/2$. Utilizando novamente a igualdade $\sup(A)=\inf(B)=k$, chegamos a $a,b\in(k-\varepsilon/2,k+\varepsilon/2)$ e, portanto, $b-a<\varepsilon$.

Resta, então, mostrar que, se para cada $\varepsilon>0$ existirem $a\in A$, $b\in B$ com $b-a<\varepsilon$, então $\sup(A)=\inf(B)$. Utilizaremos como técnica de demonstração a contrapositiva, isto é, suporemos que o resultado é falso e chegaremos à negação da nossa hipótese. Suponhamos, então, $\sup(A)<\inf(B)$. Tomemos $\varepsilon>0$ dado por $\varepsilon=\inf(B)-\sup(A)$ (note que aqui utilizamos a suposição de que o resultado do teorema é falso). Nosso objetivo é mostrar que $b-a\geq\varepsilon$ para todos $a\in A$, $b\in B$ (note que esta é a negação da hipótese do teorema, isto é, de que existem $a\in A$, $b\in B$ com $b-a<\varepsilon$). Mas, de fato, para quaisquer $a\in A$, $b\in B$, temos que $a\leq\sup(A)$ e $\inf(B)\leq b$, de modo que $b-a\geq\inf(B)-\sup(A)$. Isto é, $b-a\geq\varepsilon$, terminando, assim, a demonstração. □

O lema apresentado pode ser visualizado tomando *A e B* como intervalos, que escolheremos como abertos para ilustração. De fato, dados dois intervalos (a,b) e (c,d), com $b\leq c$, os conjuntos $A=(a,b)$ e $B=(c,d)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 1.12. Como $\sup(A)=b$ e $\inf(B)=c$, temos que, como $b\leq c$, $\sup(A)\leq\inf(B)$. Além disso, temos que $\sup(A)=\inf(B)$ se, e somente se, $b=c$, isto é, $A=(a,b)$ e $B=(b,d)$. Então, dado qualquer $\varepsilon>0$, temos que o intervalo $(b-\varepsilon/2,b+\varepsilon/2)$ contém elementos tanto de *A* quanto de *B*.

$\mathbb{R}$ é não enumerável

Por fim, analisemos a enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Vimos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável, mas que $\mathbb{R}$ contém também o conjunto dos números irracionais, que mostramos na seção anterior ser infinito. Enunciaremos sem demonstrar o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Lima (2016b, p. 85-86). É interessante, antes de consultar a demonstração do teorema, refletir sobre sua plausibilidade e até tentar esboçar uma demonstração.

Teorema 1.13 (teorema dos intervalos encaixados): seja uma sequência de intervalos fechados e limitados $\ell_1\supset\ldots\ell_k\supset\ldots$. Então existe $x\in\mathbb{R}$ tal que x pertence a cada um dos ℓ_k, $k\in\mathbb{N}$.

Utilizaremos o resultado apresentado para demonstrar o resultado final desta seção (baseada fortemente em Ávila (1993, p. 43), que apresenta uma versão mais completa da demonstração):

Teorema 1.14: o conjunto dos números reais é não enumerável.

Dem.: suponhamos que $\mathbb{R}$ seja enumerável, e tomemos uma bijeção com $\mathbb{N}$, tal que os elementos de $\mathbb{R}$ possam ser indexados como x_1, x_2, ... x_n, ... Tomemos um intervalo fechado e limitado ℓ_1 que não contém x_1. Tomemos agora, um segundo intervalo fechado $\ell_2 \supset \ell_1$ que não contém x_2. Prosseguindo iterativamente, tome para cada $k \in \mathbb{N}$ um intervalo $\ell_{k+1} \supset \ell_k$ que não contém x_k. A sequência dos intervalos fechados ℓ_k satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes $\ell_1 \supset ... \ell_k \supset ...$. Logo, pelo teorema dos intervalos encaixantes, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que y pertence a cada um dos ℓ_k, $k \in \mathbb{N}$. Mas como por hipótese a interseção de todos os conjuntos ℓ_k não contém nenhum elemento de $\mathbb{R}$, chegamos a uma contradição. Logo, concluímos que $\mathbb{R}$ é não enumerável. □

Reflita

Vimos que o conjunto dos números reais é não enumerável. Também vimos que o conjunto dos números racionais é enumerável. Fica então a pergunta: o que é possível dizer sobre o conjunto dos números irracionais? É enumerável ou não enumerável? Como você demonstraria isso, utilizando os resultados desta unidade?

Terminamos, assim, nossa primeira unidade de estudo. É importante levar desta seção as noções de supremo e ínfimo de um conjunto, assim como a construção dos intervalos numéricos, pois eles serão bastante importantes nas unidades seguintes. Trabalhar com as noções do "infinitesimalmente pequeno" (o ε das definições) é uma das ferramentas mais importantes da análise, o que só pode ser feito após introduzirmos os números reais. Vale a pena revisar a definição de supremo dada em função dos intervalos, envolvendo essa quantidade ε, assim como os resultados que seguem dessa definição. Esteja certo de que você não se arrependerá.

Sem medo de errar

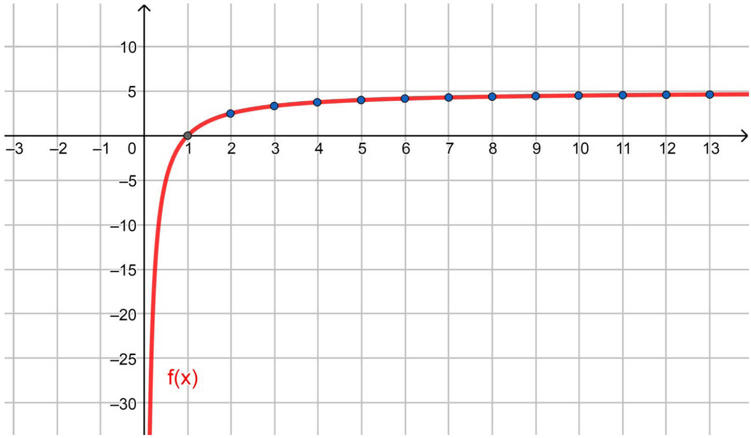
Vale aqui, inicialmente, um comentário sobre a função e a importância da qualificação do professor, que tem como objetivos proporcionar um ensino de qualidade e garantir que o aluno aprenda o conteúdo programático da disciplina, assim como (e às vezes principalmente) capacitar os alunos para que tenham senso crítico em relação ao que lhes é ensinado. Assim, a pergunta "por que é assim?" surge naturalmente na mente dos alunos cada vez que um conceito novo lhes é apresentado e quando são incentivados a refletir sobre os ensinamentos. Agora, para dar respostas satisfatórias aos alunos, fugindo do lugar comum (por exemplo "porque é assim que funciona a matemática"), é de extrema importância que o professor não fique restrito em sua formação apenas ao conteúdo a ser ministrado em sala de aula. Afinal, o conteúdo já está escrito no livro-texto. O papel do professor é ir além do livro do aluno, trazendo novas reflexões e diferentes pontos de vista. Claramente, para isso ser possível, o professor precisa saber mais do que o conteúdo programático. A experiência e o estudo constante são peças fundamentais que permitem a transmissão de conhecimento adicional ao da leitura e estudo do livro didático. É nesse sentido que um curso de formação continuada de professores é importante. E você, leitor, treinando essa habilidade nas situações hipotéticas propostas ao longo da seção ou tendo em vista a atividade de educador, vivendo a sala de aula, também precisa ter assimilados conteúdos que vão além do "necessário".

Lembre-se de que a aula que será dada será sobre a construção dos números reais. No papel de professor, levando em conta o que foi dito no parágrafo anterior, prepare seu plano de atividades resumindo os tópicos a serem apresentados e descrevendo-os da maneira mais simples possível. É interessante dar ênfase nas dúvidas sobre supremo e ínfimo de seus subconjuntos. Vale notar que nem todo subconjunto dos reais contém seu supremo e seu ínfimo. Notamos durante a seção que intervalos abertos do tipo (a,b) têm seu supremo e ínfimo nas extremidades, mas não contêm os a e b.

Vejamos o conjunto proposto $A=\left\{\frac{5}{k_1}-\frac{5}{k_2};k_1,k_2\in\mathbb{N}\right\}$. Mesmo que tomemos o menor valor possível de k_1, $k_1=1$, teremos que $5/k_2>0$ sempre, de modo que o número 5 não pertence a A. De modo análogo, o número -5 também não pertence a A. No entanto, pode-se mostrar que $\sup(A)=5$ e $\inf(A)=-5$, o que nos revela um conjunto com construção um pouco mais complicada, mas que também não contém nem seu supremo nem seu ínfimo.

Vejamos graficamente o que acontece fazendo $k_1=1$. Seja o conjunto $B=\left\{5-\frac{5}{k_2};k_2\in\mathbb{N}\right\}$, isto é, a restrição do conjunto A à condição $k_1=1$. Definimos a função $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ por $f(x)=5-5/x$. Então, vemos que a restrição de f aos naturais nos dá, como imagem, o conjunto B. Vamos construir graficamente a função f (Figura 1.5).

Figura 1.5 | Representação gráfica do conjunto *B*



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, vemos graficamente que, ao fazer k_1 percorrer os naturais, o conjunto *B* é "percorrido" ao longo da função *f* (pontos azuis). Para $k_1 = 1$, temos $f(1) = 0$ (ponto cinza), os outros valores sendo denotados pelos pontos azuis. Vemos da figura que o supremo de *B* (que é igual ao supremo de *A*) é 5 e que esse número não pertencerá ao conjunto. A função *f* "tenderá assintoticamente" a 5. Observamos aqui que uma abordagem gráfica dos conjuntos numéricos que possam ser descritos como a imagem de uma função é bastante útil para se ganhar intuição sobre suas propriedades (em particular as de supremo e ínfimo), de maneira que pode ser bastante interessante apresentar essa ferramenta aos alunos de seu curso. Embora não seja uma demonstração formal, é uma técnica extremamente válida para desenvolver a intuição sobre a extensão dos conjuntos.

É interessante, então, propor uma série de exercícios de cálculo de supremo e ínfimo com conjuntos da forma descrita anteriormente, para que os alunos do curso os solucionem, ou em duplas ou em trios, por exemplo. Esses exercícios podem ser tirados de livros de cálculo ou análise (referências ao final da seção), ou elaborados por você. O importante é que você tenha preparado o gabarito desses exercícios, para poder tirar as possíveis dúvidas dos alunos.

Avançando na prática

Artigo para revista de divulgação

Descrição da situação-problema

Digamos que você foi convidado para escrever um artigo para uma revista que divulga a matemática, cujo tema é "a reta real". Que tópicos você abordaria no seu texto? Qual a melhor ênfase a ser dada, para captar a atenção do público leitor?

Resolução da situação-problema

O texto não pode ser muito técnico, pois é escrito para um público não especializado. É importante mencionar o conceito de enumerabilidade utilizando a ideia de contagem, e argumentar que o conjunto dos racionais é enumerável (fica a tarefa de encontrar uma argumentação boa para um artigo de divulgação). Daí, é possível relacionar a enumerabilidade dos racionais com os "buracos" na reta real, ressaltando, assim, a importância dos números irracionais. É interessante dar a ênfase na ideia intuitiva de "contínuo", que faz a ligação com o preenchimento da reta. Assim, isso leva à ideia intuitiva de que o conjunto dos números racionais não é completo, pois os "extremos" de conjuntos de racionais podem não ser racionais. Vale a pena mencionar o conjunto a seguir, visto no texto:

$$A = \left\{x \text{ racional tal que } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\right\}$$

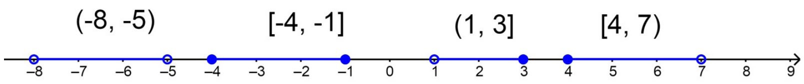
Nele, o "limite superior" (o supremo do conjunto) é a raiz quadrada de 2, que é irracional. Colocando a reta real como a união dos números racionais e irracionais, os "extremos" de qualquer conjunto de números reais também serão números reais. Assim, nesse sentido, o conjunto dos números reais será completo. Vale citar fatos históricos também, como apresentado ao longo dos primeiros capítulos de Ávila (2006).

Por fim, elencamos os demais conceitos da seção que podem ser explicados ao público leigo sem a necessidade de introduzir tecnicalidades, como o conceito de intervalo. Intervalos abertos e fechados são do tipo, respectivamente:

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\right\}, \qquad [a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\right\},$$

e assim por diante. Esses intervalos podem ser representados na reta real com suas próprias notações, ou por pontos em branco (extremidades abertas) e pontos pintados (extremidades fechadas), da maneira que segue:

Figura 1.6 | Intervalos abertos e fechados



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa é apenas uma das possibilidades, cabendo propor outras no texto.

Faça valer a pena

1. Queremos mostrar a seguinte propriedade de um intervalo aberto (a,b): se $x\in(a,b)$, então existe $\varepsilon>0$, tal que $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset(a,b)$. Para isso, consideremos ____________, onde $|x|$ é o valor absoluto de *x*. Temos $|x|=x$ se $x\geq 0$ e $|x|=-x$ se $x<0$. Segue então que $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ também pertence a (a,b), de modo que para esse valor de ε vale $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset(a,b)$. Isso significa que, em um intervalo aberto, nenhum ponto do intervalo está em seu extremo: sempre é possível encontrar um outro intervalo aberto ao redor desse ponto que esteja contido no intervalo original.

Qual alternativa preenche corretamente a lacuna?

a) $\varepsilon=|x-a|$
b) $\varepsilon=|x-b|$
c) $\varepsilon=\max\{|x-a|,|x-b|\}$
d) $\varepsilon=\min\{|x-a|,|x-b|\}$
e) $\varepsilon=|b-a|$

2. Considere as seguintes afirmações a seguir:
1. O conjunto dos números irracionais é não enumerável.
2. Todo conjunto finito contém seu supremo e seu ínfimo.
3. O conjunto dos números irracionais é infinito.
4. A soma de dois números irracionais é sempre irracional.
5. A soma de um número racional com um irracional é sempre um número irracional.

Assinale a alternativa que contém todas (e apenas) as afirmações corretas.
a) Somente as afirmações 1, 2 e 3 estão corretas.
b) Somente as afirmações 1, 3 e 5 estão corretas.
c) Somente as afirmações 1, 2, 3 e 5 estão corretas.
d) Somente as afirmações 2, 3 e 4 estão corretas.
e) As afirmações 1, 2, 3, 4 e 5 estão corretas.

3. Provaremos aqui que o intervalo aberto $(0,1)$ é não enumerável. Para isso, basta construirmos uma bijeção $f:\mathbb{R}\to(0,1)$. Isso pois, se $(0,1)$ fosse enumerável, pela definição de enumerabilidade $\mathbb{R}$ também o seria, o que é uma contradição. Comecemos construindo uma bijeção _________. Definimos, para $x\in(0,\infty)$, $g(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x}$. Então vemos que $g(0)=0$ e g é crescente: se $x<y$, então $g(x)<g(y)$. Em particular, g é injetora (demonstre essas afirmações). Como $\sup\{g(x);x\in[0,\infty)\}=1/2$, segue que g é bijeção. Da mesma forma, definimos a bijeção $h:(-\infty,0)\to(1/2,1)$ por __________. Assim, a função $f:\mathbb{R}\to(0,1)$

definida por $f(x)=g(x)$ se $x \geq 0$ e $f(x)=h(x)$ se $x<0$ é bijeção e, portanto, $(0,1)$ é não enumerável.

Qual das alternativas preenche corretamente as lacunas?

a) $g:(0,\infty)\rightarrow[0,1/2)$; $h(x)=\frac{1}{2}.\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}$

b) $g:[0,\infty)\rightarrow[0,1/2)$; $h(x)=\frac{1}{2}.\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}$

c) $g:[0,\infty)\rightarrow[0,1/2)$; $h(x)=\frac{1}{2}.\frac{x}{x+1}$

d) $g:[0,\infty)\rightarrow[0,1/2)$; $h(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}$

e) $g:[0,\infty)\rightarrow[0,1/2]$; $h(x)=\frac{1}{2}.\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}$

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

______. **Análise Matemática para Licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Análise real:** funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016a. v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

______. **Curso de análise.** 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016b. v. 1. (Projeto Euclides).

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. (Coleção Professor de Matemática).

Unidade 2

Sequências e séries numéricas

Convite ao estudo

Na unidade anterior tratamos da construção dos números reais. Partimos dos axiomas de Peano e construímos os números naturais; a partir da necessidade de definir as quatro operações fundamentais, estendemos esse conjunto para os inteiros e os racionais; por fim, incluímos o conjunto dos racionais, formando, assim, a reta real.

Ao longo do tempo, muitos problemas relacionados a medições geram tabelas em que é possível encontrar um padrão. Se houver a possibilidade de escrever analiticamente uma expressão para esse padrão, então conseguiremos estimar o limite para "tempo infinito" dos valores da tabela; essa é, em linhas gerais, a ideia de sequência numérica, que será desenvolvida nesta unidade.

Analisaremos esses problemas do ponto de vista da convergência de sequências, obtendo os resultados relevantes para as séries numéricas, que são obtidas quando queremos analisar a convergência da soma dos elementos de uma das tabelas mencionadas anteriormente, por exemplo. Vale ressaltar que estamos aqui interessados no estudo de sequências e séries sob o ponto de vista da Análise Matemática, isto é, da obtenção das suas propriedades de convergência, demonstradas rigorosamente.

A unidade também tem o papel de introduzir as técnicas de demonstração em análise que envolvem estimar quantidades muito pequenas, o famoso ε (lê-se "épsilon"), levando, assim, ao conceito de limite de uma sequência. Segundo Lima (2016a, p. 23), "A partir daqui, todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de limite".

Suponha que você atua como um matemático contratado para prestar uma consultoria de métodos quantitativos, na qual deverá resolver problemas de inúmeras áreas: finanças, engenharia, epidemiologia e estatística. É bastante usual que você tenha de utilizar sequências e séries numéricas para obter soluções aproximadas para os problemas com os quais lida.

Primeiramente surgem problemas relacionados à convergência de sequências, sendo necessário treinar os funcionários da empresa para que possam no futuro resolver sozinhos esses tipos de problema. Outro fator que pode gerar insegurança por parte dos funcionários é o fato de as sequências serem infinitas, enquanto a quantidade de dados a serem analisados é sempre finita (mesmo que muito grande).

Como conciliar essas duas características inerentes à análise e aos problemas práticos, respectivamente? Uma vez esclarecida essa questão, chega o momento de aplicá-la aos problemas enfrentados pela empresa. Um exemplo é o crescimento de uma população de bactérias em uma cultura sob condições controladas, e a pergunta é: pode-se conter esse crescimento, tendo como controle somente as condições do ambiente?

Para ajudá-lo a vencer o desafio proposto, a primeira seção apresentará o conceito de sequência numérica, da correspondente convergência (limites de sequência) e suas principais propriedades. Já o conceito de subsequência e suas principais aplicações serão vistos na Seção 2.2. A Seção 2.3, por sua vez, tratará de um tipo especial de sequência, que são as sequências de somas parciais, cujo limite é uma série numérica.

Fique certo de que seus esforços aqui são muito relevantes. A disciplina de Análise Matemática é uma ótima oportunidade para que sua maturidade matemática seja desenvolvida e aprimorada. Bons estudos!

Sequências numéricas e seus limites

Diálogo aberto

Caro estudante, acompanhamos todos os dias notícias sobre a variação de moedas e investimentos nas bolsas de valores ao redor do mundo. Mas, afinal, como podemos descrever a variação cambial de nossa moeda ao longo do tempo? Faz sentido considerar a projeção do que acontecerá para tempos muito longos? E o crescimento de epidemias pode ser visto como um fenômeno cujo comportamento a longo prazo pode ser predito?

O estudo de sequências poderá ajudá-lo a ter uma melhor compreensão sobre esses questionamentos.

Esta seção abordará o conceito de sequência e sua convergência. Perguntas do tipo "quando esta sequência converge?" poderão ser respondidas a partir do estudo do conteúdo aqui apresentado. Do ponto de vista da análise, será também uma introdução às técnicas de demonstração que envolvem a estimativa de grandezas, em particular de quando uma determinada grandeza é pequena o suficiente (o famoso ε).

Lembre-se do contexto de aprendizagem: você foi contratado por uma empresa para dar uma consultoria de métodos quantitativos, tratando de questões de diversas áreas. O projeto atual trata de atender a um problema de epidemiologia que, em sua modelagem matemática, envolve duas sequências x_n e y_n . O problema consiste em avaliar o número de indivíduos infectados por uma certa doença que está se espalhando. Aqui, y_n é o número de indivíduos infectados em função do tempo (medido em intervalos igualmente espaçados, de dias, nesse caso, e denotado pelo número n de dias) e x_n é o número de indivíduos que em algum momento contraíram a doença, mas que se curaram.

Após a contenção da doença, foi identificado um critério que relaciona as duas sequências, sendo ele o seguinte: a partir de um certo instante de tempo, n_0, vale $|x_n - L| < |y_n|$ para $n > n_0$ (um número natural), sendo que $y_n \to 0$. Desse modo, qual a interpretação de L?

Agora o seu desafio é demonstrar, utilizando a definição de limite, que então a sequência $x_n \to L$. Utilizando essa experiência profissional, aproveite a oportunidade e elabore um plano para o treinamento sobre tal desafio, a fim de apresentá-lo aos integrantes de equipe da área de epidemiologia que analisam o comportamento dessa doença, os quais têm bagagem vindas de áreas do conhecimento que não a matemática.

Ao longo desta seção, conheceremos as ferramentas necessárias para se atacar esse tipo de problema.

Não pode faltar

Na unidade anterior tratamos da construção dos números reais. Nesta unidade e nas seguintes suporemos que a reta real já está dada, sendo então utilizada como "pano de fundo" para as estruturas que forem sendo introduzidas.

Nesta seção estudaremos o conceito de sequência, assim como o conceito de limite e de convergência. Demonstraremos diversas propriedades de sequências convergentes, sob o ponto de vista da análise. Para isso, é necessário, em geral, partir da definição precisa de limite de uma sequência e chegar em um majorante para a quantidade desejada. Vejamos a seguir os primeiros conceitos.

Sequências numéricas

Considere um conjunto enumerável de números reais e os ordene da seguinte forma: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Chamamos essa sucessão (enumerável) de números reais de **sequência**. Mais precisamente, uma sequência é uma função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, dos números inteiros com valores nos números reais. "Uma sequência também é chamada de **sucessão**" (FIGUEIREDO, 1996, p. 17). Assim, temos que essa função *f* define a ordem dos elementos x_k mencionados: $f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, etc. Para $k\in\mathbb{N}$ arbitrário, escrevemos $f(k)=x_k$. A sequência apresentada também pode ser denotada da seguinte forma: (x_k), em que fica subentendido que o índice *k* varia entre os números naturais.

Exemplificando

A seguir, apresentamos exemplos de sequências, para melhor assimilação do conceito.

-- A sequência 1, 1, ..., 1, ..., definida por $x_k=1$ para todo *k*, ou equivalentemente $f(k)=1$ para todo *k*, é uma sequência **constante**.

-- A sequência dada pela função identidade $id:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, dada por $x_k=k$ para todo *k*. Nesse caso, os elementos da sequência são 1, 2, 3, ...

-- A sequência alternada 1, -1, 1, -1, ..., isto é, com $x_{2k-1}=1$ e $x_{2k}=-1$, para $k\in\mathbb{N}$.

Note que a sequência não é um conjunto. Por definição, o conjunto $\{x_k; k\in\mathbb{N}\}$ formado pelos elementos da sequência não é ordenado. A ordenação dos elementos vem apenas quando definimos a função *f* do parágrafo anterior. Os “elementos ordenados” x_k da sequência são chamados de **termos** da sequência, sendo x_k o k-ésimo termo (FIGUEIREDO, 1996).

Dizemos que a sequência (x_k) é **limitada** quando existirem a e b reais, tais que todos os seus termos estejam contidos em um intervalo $[a,b]$, isto é, quando tivermos $a \leq x_k \leq b$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se isso não acontecer, dizemos que a sequência é **ilimitada**. Analogamente, dizemos que a sequência (x_k) é **limitada superiormente** se existir $b \in \mathbb{R}$, tal que $x_k \in (-\infty, b]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e **limitada inferiormente** se existir $a \in \mathbb{R}$, tal que $x_k \in [a, \infty)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (LIMA, 2016b).

Assim, temos definido o conceito de sequência. Uma pergunta interessante é o que acontece quando analisamos os termos da sequência para k muito grande, “tendendo ao infinito”. Essa ideia nos leva ao conceito de limite de uma sequência, que exploraremos a seguir.

O limite de uma sequência

Lembremos que a função **valor absoluto** ou **módulo, denotada por** $|\cdot|$**,** é definida da seguinte maneira: se $x \geq 0$ então $|x| = x$, e se $x < 0$ então $|x| = -x$. Lembremos também que vale a desigualdade triangular, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Dizemos que o **limite** de uma sequência (x_n) é L se, quando n tender ao infinito, tivermos que os termos x_n se aproximarão arbitrariamente de L. Escreveremos então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Em linguagem matemática, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. Dizemos também, nesse caso, que a sequência é **convergente** (ver também, por exemplo, Figueiredo (1996, p. 17-18), que apresenta comentários interessantes sobre essa definição).

Reflita

O limite de uma sequência sempre existe? Isto é, dada uma sequência (x_n) arbitrária (porém exigimos que seja limitada), existe $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Um exemplo que pode ajudar a responder a essa pergunta é o seguinte: tome a sequência (x_k) definida por $x_{2k-1} = 1$ e $x_{2k} = -1$, para $k \in \mathbb{N}$. Qual o limite dessa sequência? Voltaremos a esse assunto na seção seguinte.

Também podemos escrever (e essas notações são encontradas em diferentes livros-texto) que $\lim x_n = L$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} L$ ou, simplesmente, que $x_n \to L$ (quando $n \to \infty$).

Vale notar que a condição $|x_n - L| < \varepsilon$ significa que, para n suficientemente grande, os elementos da sequência estarão todos dentro do intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Isto é, para ε suficientemente pequeno, os elementos da sequência estarão bem próximos de L. Note também, no entanto, que a constante N_0, da definição de limite, depende do valor escolhido de ε. Isto é, para cada valor de ε pode ser que precisemos tomar um N_0 diferente. Vejamos isso no exemplo a seguir.

Exemplificando

Seja a sequência (x_n) definida por $x_n = 1/n$. Afirmamos que $\lim x_n = 0$. De fato, tomemos $\varepsilon > 0$, e suponhamos sem perda de generalidade $\varepsilon < 1$ (já que estamos interessados no comportamento da sequência quando $\varepsilon \to 0$). Então, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > 1/\varepsilon$. Logo, para $n > N_0$, temos também $n > 1/\varepsilon$. Isto1 é, $1/n < \varepsilon$.Como $x_n = 1/n$, segue que $|x_n| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$, isto é, $|x_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$. Logo, o limite da sequência é $L = 0$. Notamos então que N_0 depende de ε, pois a condição imposta é de que $N_0 > 1/\varepsilon$. Diminuindo cada vez mais ε, precisamos aumentar cada vez mais N_0. Outros exemplos podem ser encontrados em Ávila (2006, p. 74-78).

Temos também outra propriedade: a condição $\lim x_n = L$, equivalente a dizer que $x_n \to L$ quando $n \to \infty$. Isto é, que x_n se aproxima arbitrariamente de L confirme n tende ao infinito. Logo, não é possível que exista $M \neq L$ tal que $\lim x_n = M$, pois, nesse caso, os elementos x_n da sequência (x_n) se aproximariam arbitrariamente de dois números distintos quando $n \to \infty$. Essa argumentação é traduzida no teorema a seguir, que demonstraremos rigorosamente.

Teorema 2.1: se existe o limite da sequência (x_n), então ele é único. (LIMA, 2016a).

Dem. Sejam $\lim x_n = L$ e $\lim x_n = M$. Queremos mostrar que $L = M$. Suponhamos, por absurdo, que $M \neq L$ (em particular $L > M$, sem perda de generalidade), queremos então chegar a uma contradição na demonstração. Definimos a quantidade $\delta = L - M > 0$. Pela definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. Assim, tomando $\varepsilon = \delta/2$, temos que $|x_n - L| < \delta/2$ para $n > N_0$. Mas então $x_n \in (L - \delta/2, L + \delta/2)$ para todo

$n > N_0$. Mas como $\delta = L - M > 0$, temos que $n > M_0$ e $|x_n - M| > \delta/2$ para todo $n > N_0$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \delta/2$, temos que $|x_n - M| > \delta/2$ para todo $n > N_0$. Logo, como $\delta > 0$, não podemos ter $M \neq L$, o que é uma contradição. O único caso em que a contradição não existe é quando $\delta = 0$ (ou seja, $L = M$), pois então não podemos tomar $0 < \varepsilon < \delta/2$ e não vale a última afirmação feita. □

Faça você mesmo

Segue um corolário da demonstração do teorema apresentado, para que você, aluno, demonstre.

Corolário 2.2: seja $\lim x_n = L$. Então, para $M < L$, existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > M_0$, então $x_n > M$. Também, para $K > L$, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > K_0$, então $x_n < K$ (LIMA, 2016a, p. 27).

Em particular, se $L > 0$ e $M = 0$, o Corolário 2.2 assume a seguinte forma: seja $\lim x_n = L > 0$. Então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $x_n > 0$. Isto é, se o limite de uma sequência for positivo, então, para $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todos os termos x_n com $n > N_0$ também serão positivos. Esse resultado é conhecido como **teorema de permanência do sinal** (LIMA, 2016b).

Logo, vemos que o limite de uma sequência, quando existe, é único. Notemos também que, quando temos duas sequências convergentes, elas preservam as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Temos então o teorema a seguir:

Teorema 2.3: sejam duas sequências convergentes (x_n) e (y_n), com $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Então valem as seguintes propriedades (LIMA, 2016b, p.115-116):

a) $\lim(x_n + y_n) = L + M$.

b) $\lim(x_n \cdot y_n) = L \cdot M$.

c) $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{L}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

Dem. Ver Lima (2016b, p.115-116) para a demonstração das três propriedades, ou também Ávila (1993, p. 22-23). Vamos, no entanto, demonstrar a seguir a propriedade (a), como ilustração. Sejam $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$, e tomemos $\varepsilon > 0$. Então existem, pela definição de limite, $L_0, M_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para $n > L_0$ temos $|x_n - L| < \varepsilon/2$ e para $n > M_0$ temos

$|y_n - M| < \varepsilon/2$. Tomando $N_0 = \max\{L_0, M_0\}$ e definindo a sequência (x_n) por $z_n = x_n + y_n$, temos $z_n - (L+M) = x_n + y_n - (L+M)$ e portanto $z_n - (L+M) = (x_n - L) + (y_n - M)$. Vale então, pela desigualdade triangular, $|z_n - (L+M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M|$. Agora, se $n > N_0$, cada um dos termos do lado direito é menor do que $\varepsilon/2$, de maneira que $|z_n - (L+M)| < \varepsilon$. Isto é, chegamos à conclusão de que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|(x_n + y_n) - (L+M)| < \varepsilon$. Assim, pela definição, temos $\lim(x_n + y_n) = L + M$. $\square$

Note que, na demonstração apresentada, tomamos, dado $\varepsilon > 0$, $|x_n - L| < \varepsilon/2$ e $|y_n - M| < \varepsilon/2$. Pela definição de limite, no entanto, temos somente que "$|x_n - L| < \varepsilon$". No entanto, para o comportamento da sequência quando $n \to \infty$ é indiferente se, na definição de limite, tomamos $|x_n - L| < \varepsilon$ ou $|x_n - L| < \varepsilon/K$, onde K é uma constante positiva. A única diferença, nesse caso, será o valor de $N_0 \in \mathbb{N}$ tomado. Para a demonstração de boa parte dos resultados em análise é importante ter esse conceito em mente, pois muitas vezes (como no Teorema 2.4, a seguir) esse raciocínio será utilizado, tanto aqui quanto em outros livros-texto sobre o assunto. Isso ocorre pois, geralmente, queremos que no final a quantidade desejada seja menor do que ε (ou seja, é uma razão estética). Vejamos o que ocorreria se, no lugar de $|x_n - L| < \varepsilon/2$ e $|y_n - M| < \varepsilon/2$, na demonstração do Teorema 2.3, tivéssemos $|x_n - L| < \varepsilon$ e $|y_n - M| < \varepsilon$, como na definição. Teríamos então $|z_n - (L+M)| < 2\varepsilon$, chegando à conclusão final de que "dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|(x_n + y_n) - (L+M)| < 2\varepsilon$", o que é perfeitamente válido para nossos propósitos. Veremos então que o resultado é equivalente à conclusão da demonstração do teorema. Para isso, tomando $\varepsilon > 0$, definimos $\lambda = \varepsilon/2$. Assim, como $\lambda > 0$, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > K_0$ vale $|(x_n + y_n) - (L+M)| < 2\lambda$. Mas isso significa que $|(x_n + y_n) - (L+M)| < \varepsilon$. Ou seja, começamos com $\varepsilon > 0$ arbitrário e chegamos à conclusão de que, para $n > K_0$, vale $|(x_n + y_n) - (L+M)| < \varepsilon$. A única diferença quando dividimos

ε por uma constante é que o número $N_0 \in \mathbb{N}$ da definição de limite pode precisar ser mudado; mas isso não influencia as conclusões.

A seguir aprenderemos duas propriedades importantes dos limites de sequências, no que se refere à comparação entre os limites de sequências distintas. Consideraremos dois casos. O primeiro é o caso de uma sequência que tende a zero e outra sequência que supomos limitada. Então o limite da "sequência" produto será zero.

Teorema 2.4: seja (x_n) uma sequência com $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e (y_n) uma sequência limitada (não necessariamente convergente). Então vale $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$ (LIMA, 2016a, p. 28).

Dem. Dado que (y_n) é limitada, então existe $C > 0$ tal que $|y_n| < C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $|x_n \cdot y_n| < C \cdot |x_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Tomemos então $\varepsilon > 0$. Dado que (x_n) é convergente para 0, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > N_0$, temos $|x_n| < \varepsilon/C$. Assim, temos que $|x_n \cdot y_n| < (\varepsilon/C) \cdot C = \varepsilon$, demonstrando assim o resultado. □

A segunda propriedade diz respeito ao "sanduíche" de sequências, em que os "pães" tendem ao mesmo limite. Isto é, tomemos três sequências $(x_n), (y_n)$ e (z_n) tais que $\lim x_n = \lim z_n = L$ e $x_n \le y_n \le z_n$ para todo *n*. Queremos tirar informação sobre o comportamento de (y_n) para *n* grande. Claramente, como $x_n \le y_n \le z_n$, é intuitivo que tenhamos também $\lim y_n = L$. Vamos à demonstração.

Teorema 2.5 (teorema do sanduíche): sejam as sequências (x_n), (y_n) e (z_n) tais que $\lim x_n = \lim z_n = L$, com $x_n \le y_n \le z_n$ para todo *n* -- note que essa é a única restrição à sequência (y_n). Então segue que a sequência (y_n) é convergente, com $\lim y_n = L$ (LIMA, 2016a, p. 27).

Dem. A demonstração usa conceitos similares aos da demonstração do Teorema 2.3a. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existem então $L_0, M_0 \in \mathbb{N}$ tais que para $n > L_0$ temos $|x_n - L| < \varepsilon$ e, para $n > M_0$, temos $|z_n - L| < \varepsilon$. Assim, com $N_0 = \max\{L_0, M_0\}$, valem as duas igualdades: $x_n, z_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Como por hipótese $x_n \le y_n \le z_n$, então temos também $y_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, $x_n, z_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, isto é, $|y_n - L| < \varepsilon$. Ou seja, tomamos $\varepsilon > 0$ e encontramos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, vale $|y_n - L| < \varepsilon$. Pela definição de limite, segue que $\lim y_n = L$. Esse teorema também pode ser encontrado na literatura com o nome de **teorema do confronto** ou **teorema da sequência intercalada** (ÁVILA, 2006, p. 83). □

Assimile

Note que a manipulação dos termos da sequência para demonstrar uma propriedade envolve, geralmente, os seguintes passos: primeiramente, tomamos um dado $\varepsilon > 0$. Então, para demonstrar a propriedade desejada, analisamos os termos das sequências envolvidas de modo a termos algum $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que possamos majorar uma certa quantidade, geralmente da forma $|x_n - L|$, por alguma quantidade que dependa de $\varepsilon > 0$ e que tenda a zero para ε muito pequeno. Geralmente essa quantidade é da forma ε/C, com C constante, de forma que chegamos a desigualdades do tipo $|x_n - L| < \varepsilon/C$. Ajustando essas constantes intermediárias da demonstração, conseguimos chegar ao resultado desejado, que geralmente é da forma $|z_n - L| < \varepsilon$. Esse raciocínio pode ser visto nas demonstrações dos teoremas apresentados, e a introdução das constantes (auxiliárias) intermediárias pode ser vista nas demonstrações dos Teoremas 2.3 e 2.4.

Limites infinitos

Dizemos que uma sequência que não converge é **divergente**. Existem diversos tipos de sequências divergentes, porém uma delas nos chama a atenção aqui: as sequências cujos termos, a partir de um certo valor de *n*, começam a crescer indefinidamente. Isso pode ser feito rigorosamente da seguinte maneira: dado um número real $K > 0$, deve existir um dado $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n > N_0$ os termos x_n da sequência estejam fora do intervalo $[-K, K]$. Isso significaria que $|x_n|$ cresce infinitamente. Mas precisamos ter uma condição adicional: a de que ou $x_n > 0$ para todo $n > N_0$ ou $x_n < 0$ para todo $n > N_0$.

Damos então a seguinte definição: o limite de uma sequência (x_n) é **infinito**, e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, se dado $K > 0$, existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, valer $x_n > K$. Analogamente, dizemos que o limite da sequência (x_n) é **menos infinito**, e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, se existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, valer $x_n < -K$.

Exemplificando

A sequência definida por $x_n = n$ tem $\lim x_n = \infty$. De fato, dado $K > 0$, tomamos $N_0 \in \mathbb{N}$ como o menor número natural que é maior do que *K*. Daí segue que $x_n > K$ para todo $n > N_0$.

A sequência definida por $x_n = (-1)^n \cdot n$ não tem limite, pois o sinal dos termos se alterna indefinidamente. Apesar disso, a sequência $y_n = |x_n|$ tem $\lim y_n = \infty$.
Outros exemplos podem ser encontrados em Ávila (2006, p. 88-90).

Terminamos esta seção com um resultado sobre limites infinitos:

Teorema 2.6: suponha que $\lim x_n = \infty$ ou $\lim x_n = -\infty$ e (y_n) seja uma sequência limitada. Então $\lim(y_n/x_n) = 0$.

Dem. Da definição temos que, dado $K > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n| > K$. Também temos que existe $C > 0$ tal que $|y_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, escrevendo $K = C/\varepsilon$ temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para $n > N_0$, vale $|x_n| > K$, de forma que $|y_n/x_n| < \varepsilon$, demonstrando o resultado. □

Em particular, se $\lim x_n = \infty$ ou $\lim x_n = -\infty$, então $\lim(1/x_n) = 0$.

Saiba mais

O estudo da convergência de sequências numéricas é muito importante, tanto do ponto de vista conceitual quanto de suas aplicações. Para uma visão geral sobre o conteúdo, com teoremas adicionais que estão fora do escopo deste texto, sugerimos o capítulo 3 (páginas 23 a 35) do seguinte material:
LIMA, E. **Análise real:** funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016. v. 1.

Sem medo de errar

Lembre-se, um dos problemas a ser solucionado pela consultoria em que você trabalha envolve duas sequências x_n e y_n tais que $|x_n - L| < |y_n|$ para $n > n_0$ um número natural, sendo que $y_n \to 0$.

Recordemos que o problema da empresa é estimar a disseminação de uma doença entre a população. O surto da doença já foi erradicado, mas, para um melhor entendimento de seus mecanismos (e, portanto, para termos uma melhor chance de prevenir ou controlar um possível próximo surto), é preciso entender como se deram os estágios finais dessa erradicação. Um treinamento matemático dos integrantes da equipe responsável pela elaboração dos preventivos é então extremamente bem-vindo.

Seu desafio é demonstrar, utilizando a definição de limite, que, então, a sequência $x_n \to L$.

Após isso, será preciso utilizar essa demonstração para lecionar uma aula aos clientes da área de epidemiologia, explicando o conceito de limite.

Note que, como $y_n \to 0$, podemos definir que a sequência constante dada por $z_n = 0$, para todo *n*, faz com que valha para todo $n > n_0$, a relação $z_n \leq |x_n - L| < |y_n|$. Temos então uma comparação entre os elementos de três sequências. Pelo teorema do sanduíche temos então que $|x_n - L| \to 0$, e portanto $x_n \to L$.

Vemos então que é verdade a afirmação. No entanto, essa não é a maneira correta de se apresentar o resultado, pois seria primeiro necessário demonstrar o teorema do sanduíche. Primeiramente, introduziremos o conceito de limite como feito na seção, até chegar na definição formal: $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$.

Lembremos que, para analisar a convergência de uma sequência, não precisamos de todos os seus elementos, mas, sim, apenas dos "últimos". Embora o teorema do sanduíche esteja enunciado para o caso em que a relação $z_n \leq |x_n - L| < |y_n|$ vale para todos os elementos da sequência, vemos de sua demonstração que, tomando um valor mínimo de *n* suficientemente grande, os passos utilizados para obter o resultado continuam válidos: isto é, se a relação apresentada valer apenas para valores de *n* satisfazendo $n > n_0$, introduzindo na demonstração do teorema do sanduíche a condição adicional $N_0 > n_0$ (vale a pena aqui voltar a essa demonstração) e mantendo os passos seguintes, o teorema continuará válido. Geralmente, os resultados sobre convergência de sequências continuam válidos se incluirmos nas hipóteses a condição de que estas valem somente para $n > n_0$,com $n_0 \in \mathbb{N}$ dado.

É interessante que você refaça aqui, para constar na apresentação feita aos integrantes da equipe, a demonstração do teorema do sanduíche incluindo essa condição adicional. O resultado a ser provado será então:

Sejam as sequências (x_n), (y_n) e (z_n) tais que $\lim z_n = \lim y_n = L$, com $z_n \leq x_n \leq y_n$ para todo $n > n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ dado -- note que essa é a única restrição à sequência (x_n). Então segue que a sequência (x_n) é convergente, com $\lim x_n = L$.

Assim, voltando ao problema, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (onde impomos também a condição $N_0 > n_0$) tal que, se $n > N_0$, $|y_n| < \varepsilon$. Como $|x_n - L| < |y_n|$, então também $|x_n - L| < \varepsilon$, e portanto $|x_n - L| \to 0$ e $x_n \to L$.

Assim, o conceito de limite pode ser tomado como dizendo que os termos de uma sequência ficam arbitrariamente próximos de um certo número conforme o número *n* que os indexa cresce.

Vale destacar no treinamento:

- A noção de sequência como uma sucessão.
- Exemplos de sequências, como os citados ao longo do texto e nas referências mencionadas; o conceito do limite de uma sequência, tanto de forma rigorosa quanto interpretando em palavras a definição.
- Exemplos de limites de sequências e exemplos de sequências que não têm limite.
- Por fim, ao apresentar todos esses conceitos, uma observação é fundamental: para se absorver o conteúdo de uma explicação matemática não basta apenas seguir o que está escrito ou apresentado. É preciso estudar as demonstrações e os conceitos, refazendo-os, se necessário, até entender cada passo, para que haja um aprendizado de fato.

Avançando na prática

O crescimento de uma população de bactérias

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja contratado para analisar o caso de uma população de bactérias que cresce exponencialmente com o tempo. Foi desenvolvido um composto químico que, ao ser inserido no meio da cultura de bactérias, faz com que sua taxa de crescimento seja cada vez mais reduzida, chegando até a um limiar de 0.001%. Você saberia dizer se o crescimento da bactéria se estagnará, isto é, se ela chegará a um número finito de indivíduos? Como mostraria rigorosamente esse resultado?

Resolução da situação-problema

Para a resolução dessa situação será necessário desenvolver um ferramental adicional, sobre o conceito de limites infinitos. Isso porque a sequência (x_n) que descreve o crescimento da bactéria tende ao infinito, enquanto a sequência (y_n) é limitada entre 1 e 0.00001, de modo que estamos interessados na sequência produto, $z_n = x_n \cdot y_n$. Como (y_n) é tal que $0 < c < y_n \leq 1$ para todo *n*, temos que $|z_n| \geq c \cdot |x_n|$. Assim, como $x_n \to \infty$, temos também $z_n \to \infty$ e, portanto, o crescimento da bactéria nunca se estagnará, mesmo com a introdução do novo composto.

Logo, algumas vezes resolver um problema prático envolve realizar a demonstração de um teorema.

Faça valer a pena

1. Um resultado intuitivo, porém que precisa ser demonstrado, é o seguinte: tomemos duas sequências convergentes (x_n) e (y_n), com $\lim x_n = L$, $\lim y_n = M$ e $x_n \geq y_n$ para todo *n*. Então, segue que $L \geq M$. Para demonstrar esse fato, definiremos a sequência (z_n) por $z_n = x_n - y_n$. Então $z_n \geq 0$ para todo *n*. O objetivo é mostrar então que $\lim z_n \geq 0$. Suponhamos por absurdo que seja o contrário, isto é, que $\lim z_n = K < 0$. Então, pelo teorema da permanência do sinal, que segue do Corolário 2.2, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que ________, o que é uma contradição. Logo, só pode ser $\lim z_n \geq 0$, ou seja, $L \geq M$.

Qual das alternativas a seguir preenche corretamente a lacuna?

a) $z_n < 0$
b) para $n > N_0$ temos $z_n \leq 0$
c) para $n > N_0$ temos $z_n < 0$
d) para $n > N_0$ temos $z_n > 0$
e) para todo *n* temos $z_n < 0$

2. Vejamos outro resultado interessante e intuitivo. Afirmamos que toda sequência (x_n) convergente é limitada. Seja $\lim x_n = L$. De fato, pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$ e o número $N_0 \in \mathbb{N}$ correspondente, temos para $n > N_0$ que $|x_n - L| < 1$ e, portanto, $x_n - L \in (-1,1)$ e $x_n \in (L-1, L+1)$. Segue que $|x_n| < |L| + 1$. Seja *A* o conjunto imagem da função que define a sequência (x_n), isto é,___________. Como *A* é finito, então é limitado. Seja $b = \max\{|x_k|; k < N_0\}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $|x_n| < c$, onde__________ . Acabamos de mostrar então que a sequência (x_n) é limitada.

Qual das alternativas a seguir preenche corretamente as lacunas?

a) $A = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$; $c = \min\{b, |L|+1\}$

b) $A = \{x_k; k < N_0\}$; $c = \min\{b, |L|+1\}$

c) $A = \{x_k; k > N_0\}$; $c = \max\{b, |L|+1\}$

d) $A = \{x_k; k < N_0\}$; $c = \max\{b, |L|+1\}$

e) $A = \{x_k; k < N_0\}$; $c = |L|+1$

3. Vamos definir neste exercício uma sequência de Cauchy. Dizemos que uma sequência (x_n) é de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$ e $m > N_0$, então $|x_m - x_n| < \varepsilon$ (LIMA, 2016b, p. 126). Queremos demonstrar o seguinte resultado: toda sequência convergente é de Cauchy. Tomemos então uma sequência (x_n) convergente, e seja L o limite dessa sequência. Pela definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então ________, onde colocamos a constante ______ por conveniência. Logo, se também $m > N_0$, ________. Assim, $|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)|$ e, pela desigualdade triangular, ___________. Como $m, n > N_0$, chegamos à conclusão de que $|x_m - x_n| < \varepsilon$, demonstrando assim o resultado. A recíproca também é verdadeira (toda sequência de Cauchy é convergente), mas está fora do escopo desta seção.

Qual das alternativas a seguir preenche corretamente as lacunas?

a) $|x_n - L| < \varepsilon$; $C = 1$; $|x_m - L| < \varepsilon$; $|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)|$

b) $|x_n - L| < \varepsilon/2$; $C = 2$; $|x_m - L| < \varepsilon/2$; $|x_m - x_{N_0}| = |(x_m - L) - (x_{N_0} - L)|$

c) $|x_n - L| < \varepsilon$; $C = 1$; $|x_m - L| < \varepsilon$; $|x_m - x_{N_0}| = |(x_m - L) - (x_{N_0} - L)|$

d) $|x_n - L| < \varepsilon/2$; $C = 2$; $|x_m - L| < \varepsilon$; $|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)|$

e) $|x_n - L| < \varepsilon/2$; $C = 2$; $|x_m - L| < \varepsilon/2$; $|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)|$

Subsequências

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos o conceito e as principais propriedades de sequências numéricas, definindo o que é o limite da sequência (quando n tende ao infinito) e desenvolvendo os resultados sobre a convergência dessas sequências.

Na presente seção, estamos interessados em um caso especial de sequências: as **subsequências** de uma dada sequência original.

Subsequências aparecem, por exemplo, quando não temos todos os dados disponíveis de uma série de eventos, com poucos faltando. No entanto, informações sobre subsequências podem nos dar informações sobre a sequência original. Tome como exemplo uma sequência (no sentido informal da palavra) de valores medidos em intervalos discretos de tempo, como a variação do valor em reais de uma moeda, e suponha que esses valores sejam infinitos (lembre-se de que isso nunca é possível na prática, mas suponha que estamos tratando de situações idealizadas, por enquanto). Tais sequências são chamadas de "séries temporais". Obter estimativas para o comportamento qualitativo dessas séries temporais pode ajudar a predizer a taxa futura de variação da moeda, ao menos no curto prazo.

Lembre-se de que, como contexto de aprendizagem, supomos que você atua como um matemático contratado para uma consultoria de métodos quantitativos. Nessa consultoria, você resolve problemas de inúmeras áreas: finanças, engenharia, epidemiologia e estatística, e lida corriqueiramente com séries temporais.

Agora você precisa avaliar o comportamento, em longo prazo, de uma série temporal que diz respeito à quantidade extraída de petróleo, hora a hora, de um reservatório marítimo. Os dados foram medidos por diferentes métodos, cada um com um intervalo de tempo característico de $k \cdot t_0$, onde t_0 é o menor intervalo de tempo que as máquinas conseguem medir. Existem dados para diferentes amostras da série, que podem ser modeladas por sequências convergentes do tipo $x_{k \cdot n} = A + (-1)^{k \cdot n}(k \cdot n)^{-1}$ quando $n_k = k \cdot n$, onde A é uma constante. Todas parecem convergir para o mesmo valor. No entanto, a informação sobre a série temporal completa foi perdida.

Em um pequeno relatório, argumente, primeiramente apenas em palavras, a favor ou contra a convergência da série temporal original, e diga os critérios utilizados para avaliar se ela convergirá ou não. Em caso positivo (a sequência original convergirá), apresente uma demonstração formal para sua argumentação. Em caso negativo (não necessariamente a sequência original convergirá, ou é certo que a sequência não convergirá), apresente exemplos que satisfaçam as condições analisadas, mas cuja sequência original não converge. Nesse caso, quais os possíveis motivos que fariam a sequência original não convergir?

Para responder a essa pergunta, nesta seção você será exposto a diversos resultados referentes a subsequências de uma dada sequência, e à relação entre essas estruturas.

Bons estudos!

Não pode faltar

Nesta seção, trataremos de subsequências, que são exatamente o que o nome diz: são sequências cujos termos também são termos da sequência original, e que são ordenados de maneira a preservar a ordenação da sequência original. O estudo das subsequências é importante, pois algumas vezes é possível obter teoremas que dizem respeito apenas a subsequências, mas não à sequência original. Vejamos uma definição precisa.

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Então uma **subsequência** (x_{n_k}) é uma restrição da sequência de (x_n) a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ (ÁVILA, 1993). Como vimos na seção anterior, uma sequência pode ser vista como uma função $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, dos números inteiros com valores nos números reais. Logo, para cada $A\subset\mathbb{N}$ infinito, a restrição de *f* a *A*, $\bar{f}:A\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $\bar{f}(k)=f(k)$ para $k\in A$, representa uma subsequência de (x_n).

Vemos então que, se todos os termos da sequência original (x_n) forem distintos, esta terá infinitas subsequências, tantas quantos forem os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Antes de prosseguirmos, vejamos que de fato esse tipo de sequência tem infinitas subsequências. Para isso, de acordo com o que foi dito anteriormente, basta mostrar que o conjunto formado por subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ também é infinito. Ou seja, que o conjunto $V=\{A\subset\mathbb{N};\ A \text{ é infinito}\}$ é um conjunto infinito. A maneira que vimos na Unidade 1 de demonstrar esse fato é obtendo uma função injetora $g:\mathbb{N}\rightarrow V$; lembre-se da demonstração do Teorema 1.4 da Seção 1.1 (todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável). Assim, como na demonstração do Teorema 1.4, a imagem $g(\mathbb{N})$ será um subconjunto enumerável de *A*. Claramente, então, A será infinito.

Agora, construiremos essa função *g*. Tome, para cada $k\in\mathbb{N}$, os conjuntos $A_k=\{m\in\mathbb{N};m=k\cdot n,\ \text{com n}\in\mathbb{N}\}$. Podemos também escrevê-los na notação compactada $A_k = k \cdot \mathbb{N}$, isto é, o conjunto dos múltiplos naturais de *k*. Sabemos que cada A_k é infinito, de modo que $A_k \subset V$ para todo *k*. Definimos então a função *g* por $g(k) = A_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $A_k \neq A_m$ para $k \neq m$, segue que *g* é injetora e, portanto, pelos argumentos apresentados, o conjunto *V* das subsequências de uma sequência (x_n), cujos termos são todos distintos, é infinito. Mais geralmente, se uma sequência tiver uma infinidade de termos distintos, também terá infinitas subsequências distintas.

Vale notar, no entanto, que isso não ocorre se a sequência original tiver somente um número finito de elementos distintos, como é de se esperar. Vejamos o caso da sequência constante dada por $x_n = 1$ para todo *n*. Então, essa sequência tem uma única subsequência, cujos elementos também serão todos iguais a 1.

Exemplificando

Como mencionado, a única subsequência de uma sequência constante também é a sequência constante (de mesmo valor). Vejamos outros exemplos:

-- $x_n = n$; vemos que qualquer subsequência dessa sequência deve ser crescente e não limitada, como a sequência dos números pares, dos números ímpares ou dos múltiplos de *k*.

-- (x_n) definida por $x_{2k-1} = 1$ e $x_{2k} = -1$. Podemos ver que as subsequências de (x_n) são todas as sequências cujos termos são elementos da forma 1 ou -1. Cada ordenação desses elementos produzirá uma subsequência diferente (vale parar e refletir sobre essa afirmação, para se convencer do resultado). Casos particulares são as sequências constantes (com todos os termos iguais a 1 ou a -1).

Utilizamos anteriormente a notação (x_{n_k}) para denotar uma subsequência de (x_n), onde fica entendido que o subíndice *k* indica que estamos selecionando termos específicos da sequência original. Assim, fazendo *k* variar em $\mathbb{N}$, temos os termos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$, com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Isso nos traz de volta a visão de que uma subsequência é, antes de tudo, uma sequência propriamente dita: (x_{n_k}) é equivalente a uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com $f(k) = x_{n_k}$. Vejamos a seguir as propriedades de subsequências, de acordo com as propriedades da sequência original.

Assimile

Vale a pena reforçar que, dada uma sequência (x_n), qualquer subsequência (x_{n_k}) é também uma sequência por si só, de modo que todos os resultados válidos para sequências, demonstrados na seção anterior, valem também para subsequências.

Sendo $\left(x_{n_k}\right)$ também uma sequência, definimos seu **limite** da mesma forma que na seção anterior: temos $\lim x_{n_k} = L$ se para cada $\varepsilon > 0$ existir $K_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $k > K_0$, então $\left|x_{n_k} - L\right| < \varepsilon$. Temos a seguinte propriedade, que faz sentido, intuitivamente, mas que é necessário demonstrar (LIMA, 2016a):

Teorema 2.7: seja uma sequência $\left(x_n\right)$ com $\lim x_n = L$. Então toda subsequência de $\left(x_n\right)$ também converge para *L*.

Dem. Pela definição de limite, $\lim x_n = L$ significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $\left|x_n - L\right| < \varepsilon$. Tomemos uma subsequência $\left(x_{n_k}\right)$ de $\left(x_n\right)$. Então existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{K_0} > N_0$. Então, para todo $k > K_0$, temos $n_k > n_{K_0} > N_0$ e portanto $\left|x_{n_k} - L\right| < \varepsilon$. Organizando os resultados, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > K_0$, então $\left|x_{n_k} - L\right| < \varepsilon$. Desse modo a subsequência $\left(x_{n_k}\right)$ é convergente e seu limite é *L*. Como $\left(x_{n_k}\right)$ é arbitrária, toda subsequência de $\left(x_n\right)$ converge para *L*. Veja também Ávila (1993, p. 29), para outra demonstração.

O teorema apresentado nos confirma que a noção de "proximidade" se aplica também a subsequências, justamente por estas serem sequências por si próprias. Assim, é natural que, conforme *k* cresce, x_{n_k} se aproxime de *L*, já que a aplicação $k \mapsto n_k$, que leva *k* em n_k, é crescente. Note, no entanto, que a recíproca não é verdadeira: se uma sequência $\left(x_n\right)$ tiver uma subsequência convergente, isso não significa que $\left(x_n\right)$ será convergente. Também, se uma subsequência de $\left(x_n\right)$ convergir para *L*, não necessariamente uma outra subsequência distinta também convergirá para *L* (a menos, claro, que $\left(x_n\right)$ seja convergente). Isso é fácil de ver, uma vez que consideremos o exemplo dado anteriormente da sequência $\left(x_n\right)$ dada por $x_{2k-1} = 1$ e $x_{2k} = -1$. Os termos da sequência então vão se alternando, no formato 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... e, portanto, a sequência não converge (vale a pena treinar as técnicas de demonstração introduzidas na seção anterior e demonstrar esse resultado a partir da definição do limite de uma sequência; lembre-se da importância da leitura ativa).

Vejamos agora condições necessárias e suficientes para que uma sequência $\left(x_n\right)$ tenha uma subsequência convergente. Esse tópico culminará no teorema de Bolzano-Weierstrass, cuja demonstração é o objetivo final desta seção.

Faça você mesmo

O objetivo aqui é demonstrar o seguinte teorema, apresentado em Lima (2016b, p. 120-121):

Teorema 2.8: seja (x_n) uma sequência (não necessariamente convergente). Uma condição necessária e suficiente para que *L* seja limite de uma subsequência de (x_n) é que, para cada $\varepsilon > 0$ exista uma infinidade de termos x_n com $|x_n - L| < \varepsilon$.

Para isso, são necessárias duas etapas. Na primeira, demonstra-se que a condição é necessária (isto é, se existe *L* limite de uma subsequência então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma infinidade de termos x_n com $|x_n - L| < \varepsilon$). A segunda parte é demonstrar que essa condição é suficiente (se, para cada $\varepsilon > 0$, existir uma infinidade de termos x_n com $|x_n - L| < \varepsilon$, então *L* é limite de uma subsequência de (x_n)). A ideia da demonstração é similar à do Teorema 2.7, e os detalhes da demonstração podem ser encontrados na referência citada (LIMA, 2016b, p. 120-121), caso haja dúvidas ou dificuldades.

Trataremos a seguir de subsequências de sequências limitadas. Primeiramente, definimos que uma sequência (x_n) é **monótona** se for não decrescente ou não crescente, isto é, se $x_{n+1} \geq x_n$ para todo *n* ou se $x_{n+1} \leq x_n$ para todo *n* (FIGUEIREDO, 1996). Se $x_{n+1} > x_n$ para todo *n* dizemos que a sequência é (monótona) crescente e se $x_{n+1} < x_n$ para todo *n* dizemos que é (monótona) decrescente. Inicialmente consideraremos apenas sequências monótonas. O teorema a seguir caracteriza o limite de uma sequência monótona e limitada:

Teorema 2.9: seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Então (x_n) é convergente e seu limite é o supremo (se não decrescente) ou o ínfimo (se não crescente) do conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ (LIMA, 2016a, p. 26).

Dem. Suponhamos, sem perda de generalidade, que (x_n) seja não decrescente. Seja $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos então $\varepsilon > 0$. O objetivo na demonstração é relacionar a definição de supremo de um conjunto com a definição de limite de uma sequência, pois ambos envolvem a quantidade $\varepsilon > 0$. Então $a = L - \varepsilon$ não pode ser limite da sequência. De fato, como $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ com $x_{N_0} \in (L-\varepsilon, L]$. Como a sequência é não decrescente, segue que para todo $n > N_0$, $x_n \in (L-\varepsilon, L]$. Em particular, com $b = |a - x_{N_0}|$, segue que $|x_n - a| > b$ para todo $n > N_0$. Assim, não podemos ter $\lim x_n = a$. Por outro lado, segue também da argumentação apresentada que, como para todo $n > N_0$, $x_n \in (L-\varepsilon, L]$, então $|x_n - L| \leq \varepsilon$ para todo $n > N_0$, de modo que provamos o resultado. Recapitulando, começamos tomando $\varepsilon > 0$. Da definição de supremo, obtivemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ com $x_{N_0} \in (L-\varepsilon, L]$. Como a sequência é monótona não decrescente, então para todo $n > N_0$, $x_n \in (L-\varepsilon, L]$. Isto é, para todo $n > N_0$, $|x_n - L| \leq \varepsilon$, que pela definição de limite quer dizer que $\lim x_n = L$. Se a sequência fosse, no entanto, monótona não crescente, consideraríamos então $L = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ e a demonstração seguiria os mesmos passos apresentados há pouco, adequando os sinais quando necessário. É uma boa ideia completar a demonstração para abranger esse caso (você pode se basear nos passos descritos), no intuito de fixar o aprendizado. □

Outras demonstrações similares podem ser encontradas em Lima (2016a, p. 26), Figueiredo (1996, p. 27) e Ávila (2006, p. 85). A interpretação do Teorema 2.9 é simples: se a sequência é não decrescente, $x_{n+1} \geq x_n$ para todo n. Mas, como é limitada, os termos x_n não podem crescer indefinidamente. De fato, com $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, temos que os termos da sequência vão se "aglomerando" nas vizinhanças de L, chegando cada vez mais perto. No limite, obtém-se $\lim x_n = L$.

Reflita

O que se pode dizer sobre uma sequência monótona ilimitada? Como fazer para enunciar (e demonstrar) resultados semelhantes aos do Teorema 2.9 nesse caso, utilizando os conceitos de limites infinitos da Seção 2.1? Lembramos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ se, dado $K > 0$, existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, valer $x_n > K$. Para mais detalhes, veja o final da Seção 2.1.

Nem sempre conseguimos lidar com sequências monótonas. Contudo, o resultado exposto é importante pois, muitas vezes, deparamo-nos com sequências monótonas. É o caso do teorema a seguir, que mostra que uma sequência limitada arbitrária tem ao menos uma sequência monótona. O resultado a seguir fará parte do que chamaremos de teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 2.10: seja (x_n) uma sequência limitada. Então (x_n) tem uma subsequência monótona.

Dem. Ver Lima (2016a, p. 26). □

Estamos no ponto de enunciar e demonstrar o teorema de Bolzano-Weierstrass. Demonstrações equivalentes à dada aqui podem ser encontradas em Ávila (1993, p. 36) e Figueiredo (1996, p. 29). Duas demonstrações alternativas podem ser encontradas em Lima (2016a, p. 26) e em Lima (2016b, p. 123).

Teorema 2.11 (teorema de Bolzano-Weierstrass): seja (x_n) uma sequência limitada. Então (x_n) apresenta uma subsequência convergente.

Dem. Seja $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Queremos mostrar então que existe uma subsequência de (x_n) monótona não decrescente. Definamos o conjunto A como sendo composto pelos elementos $a \in \mathbb{R}$, tais que, existe somente um número finito de termos $x_n < a$ na sequência. Como $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, segue que precisamos ter $a \leq L$ para todo $a \in A$ (pois se $a > L$ então a seria maior do que todos os termos da sequência, gerando uma contradição). Como então A é limitado superiormente, seja $K = \sup A$. Temos que $K \leq L$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ com $a \in (K - \varepsilon, K]$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ afirmamos que existem infinitos termos x_n da sequência, tais que $K - \varepsilon < x_n$. Isso segue da definição de supremo, pois se $K = \sup A$ então existe $a \in A$, tal que $K - \varepsilon < a$. Considerando que, pela definição do conjunto A, existe somente um número finito de termos $x_n < a$, segue que existe um número infinito de termos $x_n \geq a$, e, portanto, um número infinito de termos $x_n > K - \varepsilon$. Além disso, como $K = \sup A$, existem infinitos termos no intervalo $(K - \varepsilon, K + \varepsilon)$. Se esse número fosse finito, então existiriam infinitos termos $x_n > K + \varepsilon$, de modo que então somente um número finito de termos x_n seria menor do que $K + \varepsilon$ e, portanto, $K + \varepsilon \in A$. Mas isso contradiz o fato de que $K = \sup A$, logo não pode ser verdade.

Tomando $\varepsilon = 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos a seguinte situação: para $k = 1$, sabemos que existe $x_{n_1} \in (K - 1, K + 1)$. Já para $k = 2$, podemos tomar $x_{n_2} \in (K - 1/2, K + 1/2)$ com $n_2 > n_1$, já que há uma infinidade de termos da sequência no intervalo $(K - 1/2, K + 1/2)$. Prosseguindo, para um dado k genérico, podemos tomar $x_{n_k} \in (K - 1/k, K + 1/k)$. Desse modo, construímos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \in (K - 1/k, K + 1/k)$ para um dado K, de onde segue que (x_{n_k}) é convergente com limite $\lim x_{n_k} = K \leq L$, o que conclui a demonstração. □

O teorema de Bolzano-Weierstrass pode nos dizer mais ainda: dada uma sequência (x_n) limitada, esta tem uma subsequência convergente que é monótona.

Teorema 2.12: seja (x_n) uma sequência limitada. Então existe uma subsequência monótona de (x_n), que é convergente.

Dem. Ver Lima (2016a, p. 26). □

Saiba mais

Para uma visão diferente do modo de lidar com subsequências, em que são introduzidos novos conceitos e apresentada uma demonstração nova do teorema de Bolzano-Weierstrass, sugerimos que consulte a Seção 4.4, páginas 120-125, do material a seguir:

LIMA, E. **Curso de análise.** 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016. v. 1.

Sem medo de errar

Lembremos que você está analisando subsequências de uma série temporal. Você precisa avaliar o comportamento em longo prazo de uma série temporal que diz respeito à quantidade extraída de petróleo, hora a hora, de um reservatório marítimo. Os dados foram medidos por diferentes métodos, cada um com um intervalo de tempo característico de $k \cdot t_0$, onde t_0 é o menor intervalo de tempo que as máquinas conseguem medir. Existem dados para diferentes amostras da série, que podem ser modeladas por sequências convergentes do tipo $x_{k \cdot n} = A + (-1)^{k \cdot n} (k \cdot n)^{-1}$ quando $n_k = k \cdot n$. Muitas dessas subsequências são conhecidas (isto é, existem diversas tabelas com subsequências definidas pelo valor de k adotado), e todas parecem convergir para o mesmo valor. No entanto, a informação sobre a série temporal completa foi perdida.

Pelo fato de todas as amostras serem do mesmo tipo de fenômeno, sob as mesmas condições controladas de laboratório, é bastante provável, levando em conta argumentos de plausibilidade assim como leis físicas, que a série temporal original (à qual você não tem acesso) convirja.

Utilizando esse argumento, as subsequências $x_{k \cdot n} = A + (-1)^{k \cdot n} (k \cdot n)^{-1}$ podem então fazer parte da sequência $x_m = A + (-1)^m m^{-1}$, fórmula válida para todo m. Nesse caso, é imediato ver que o limite da sequência será A e, portanto, em longo prazo, a extração de petróleo tende a se estabilizar (isso desprezando outros efeitos adversos que podem vir a aparecer).

No entanto, é impossível afirmar ou demonstrar esse fato. Primeiramente, note que as séries temporais são finitas. Isso impossibilita qualquer tratamento rigoroso da convergência das subamostras (que seriam o equivalente às subsequências), já que estas só existem para um número infinito de termos.

Mesmo que as amostras fossem de fato infinitas, todos os resultados obtidos logicamente por meio da Análise só dizem respeito às propriedades da sequência original se tivermos em mãos todas, no sentido amplo da palavra, as subsequências. Não todas as disponíveis, mas sim todas as possíveis. Esse é um dos motivos pelos quais argumentos de análise que são afirmativos (isto é, argumentam a favor de certo resultado) geralmente não têm tanto poder preditivo em aplicações práticas. Argumentos de análise também não permitem, em geral, obter o valor do limite de uma sequência; permitem apenas constatar que ele existe ou não existe.

Argumentos “negativos” (em que a obtenção de um dado resultado nega uma propriedade, geralmente obtendo contraexemplos) são muito mais úteis no dia a dia. Por exemplo, no caso aqui descrito, bastaria encontrar uma subsequência que não convergisse (ou que parecesse não convergir, já que as séries temporais têm um número finito (apesar de grande) de termos, para garantir (ou afirmar com bastante grau de confiabilidade) que a série temporal original não convergirá. Por exemplo, levando em conta nosso contexto da análise da extração de petróleo, podemos ter as subsequências $x_{k\cdot n} = A + (-1)^{k\cdot n}(k\cdot n)^{-1}$ para diversos valores de k mas, se para um dado valor j tivermos $x_{j\cdot n} \neq A + (-1)^{j\cdot n}(j\cdot n)^{-1}$, pode ser que a sequência original não convirja. Isso certamente ocorrerá se $\lim x_{j\cdot n} \neq A$. Assim, se, por exemplo, ocorrer de termos $x_{j\cdot n} = B + (-1)^{j\cdot n}(j\cdot n)^{-1}$, com B muito próximo (mas diferente) de A, então a sequência original terá duas subsequências que convergem para limites distintos e, portanto, não será convergente. Mas vale ressaltar que, no contexto do problema em questão, isso não é plausível, a menos que se encontre algum fator externo que gere essa modulação. Inclusive, essa subsequência $x_{j\cdot n} = B + (-1)^{j\cdot n}(j\cdot n)^{-1}$ pode indicar algum fator externo periódico (de período $j\cdot t_0$) que age sobre o sistema de extração de petróleo, levando assim à possível descoberta de novos fenômenos.

Também é importante escrever os argumentos apresentados em um modelo de relatório, destacando os prós e os contras dos argumentos de análise nesse tipo de problema.

Avançando na prática

Professor substituto

Descrição da situação-problema

Imagine que você foi contratado como professor substituto para ministrar parte da disciplina de Análise Matemática de um curso universitário de Matemática. A aula de hoje será sobre sequências e suas subsequências. Você deverá elaborar um plano de aula que parta da definição de subsequência até a demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Resolução da situação-problema

O plano de aula deverá conter o seguinte conteúdo:

- Definição de sequência, definição de subsequência e exemplos.
- Argumentação de que uma subsequência é, por si só, uma sequência.
- Conceito e definição precisa do limite de uma subsequência.
- Propriedades da convergência de subsequências, valores de aderência, relação entre sequências convergentes e suas subsequências.
- Sequências monótonas e limitadas.
- O teorema de Bolzano-Weierstrass.

Toda a argumentação que se refere a subsequências tem um objetivo final bastante claro e importante: a demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass, que diz que toda sequência limitada tem ao menos uma subsequência convergente (Teorema 2.12).

Vale a pena selecionar o conteúdo da seção mais adequado à aula e também verificar nas referências bibliográficas outros exemplos e resultados, assim como estudar/apresentar as demonstrações de alguns dos teoremas que foram apenas enunciados no texto.

Exemplos simples de sequências divergentes mas que têm subsequências convergentes (porém para limites distintos), como a sequência dada por $x_n = (-1)^n$, podem ajudar no entendimento dos conceitos. Apresentar duas demonstrações distintas do teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser bastante elucidativo, como adicionando à aula as demonstrações apresentadas em Lima (2016a, p. 26) e em Lima (2016b, p. 123). A comparação entre as duas demonstrações (a do texto e a das referências aqui mencionadas) também é bastante útil para ilustrar diferentes técnicas de demonstração em matemática.

Note que este não é um mero exercício; pensar em como se deve ensinar um conceito (e se possível colocar isso em prática) é a melhor forma de aprendê-lo verdadeiramente.

Faça valer a pena

1. Seja (x_n) uma sequência convergente, e (x_{n_k}) uma subsequência. Considere as seguintes afirmações:

1. Se $\lim x_n = L$, então $\lim x_{n_k} = L$.
2. Se $\lim x_{n_k} = L$, então $\lim x_n = L$.
3. Se (x_n) não converge, então nenhuma de suas subsequências converge.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente a afirmação 1 está correta.

b) Somente a afirmação 2 está correta.

c) Somente a afirmação 3 está correta.

d) Somente as afirmações1 e 2 estão corretas.

e) Somente as afirmações1 e 3 estão corretas.

2. Temos o seguinte resultado: "se uma sequência monótona (x_n) possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente" (LIMA 2016b, p. 111). Demonstraremos esse resultado a seguir. De acordo com o Teorema ____, o que precisa ser feito é mostrar que (x_n) é limitada. Suponha que (x_n) seja não decrescente. Mas vemos que, sendo (x_{n_k}) a subsequência convergente, então (x_{n_k}) é limitada (e não decrescente). Como pelo mesmo teorema $\lim x_{n_k} = \sup\{x_{n_k}\}$, e como (x_n) é monótona, vale _________, segue que (x_n) é limitada.

Qual alternativa preenche corretamente as lacunas?

a) 2.9; $\sup\{x_{n_k}\} < \sup\{x_n\}$

b) 2.10; $\sup\{x_{n_k}\} = \sup\{x_n\}$

c) 2.9; $\sup\{x_{n_k}\} = \sup\{x_n\}$

d) 2.9; $\sup\{x_{n_k}\} > \sup\{x_n\}$

e)2.10; $\sup\{x_{n_k}\} < \sup\{x_n\}$

3. "Dizemos que um número $x \in \mathbb{R}$ é **valor de aderência** de uma sequência (x_n) se for limite de alguma subsequência (x_{n_k}) de (x_n)" (LIMA, 2016b, p. 121). Considere as afirmações a seguir:

1. O conjunto de valores de aderência das sequências de racionais é dado por toda a reta real.
2. Toda sequência apresenta um valor de aderência.
3. Uma sequência limitada (x_n) é convergente se, e somente se, tiver um único valor de aderência.
4. Toda sequência limitada tem um valor de aderência.
5. Toda sequência limitada tem mais de um valor de aderência.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmações 1, 3 e 5 estão corretas.

b) Somente as afirmações 1, 3 e 4 estão corretas.

c) Somente as afirmações 1, 2 e 3 estão corretas.

d) Somente as afirmações 1, 2 e 4 estão corretas.

e) Somente as afirmações 1, 2, 3 e 5 estão corretas.

Convergência de séries numéricas

Diálogo aberto

Nas seções anteriores tratamos da convergência de sequências e de subsequências, demonstrando vários resultados interessantes. Já nesta seção, trataremos de uma aplicação do conceito de convergência de sequências: a convergência de séries numéricas. Uma série numérica é, como veremos, um caso especial de sequência, e os resultados demonstrados para sequências podem ser adaptados para as séries, chegando a conclusões bastante úteis. Um exemplo é o crescimento cumulativo de alguma quantidade; se em cada mês a população de um vírus aumenta e você sabe o quanto ela aumentou no mês (ou seja, o incremento no número de indivíduos naquele mês), a série que mede o número total de indivíduos será representada pela soma ao longo do tempo de todos os incrementos até o instante considerado.

Séries são bastante úteis para estimar a soma de uma quantidade de elementos medida ao longo do tempo, por exemplo. Embora nosso foco aqui não seja o cálculo do valor obtido para a soma total, e sim o conteúdo de análise (isto é, a demonstração das propriedades de convergência, ou não, da série), veremos que esses conhecimentos são de fundamental importância em casos em que a convergência da série é um fator crucial, como na disseminação de epidemias geradas por um dado vírus. A análise feita pode ser passada integralmente a outras situações matematicamente análogas, por exemplo na predição dos lucros de uma empresa ou na avaliação em longo prazo dos juros de alguma dívida.

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa para dar uma consultoria de métodos quantitativos, e que os integrantes da companhia têm formação interdisciplinar. O projeto atual consiste em resolver problemas matemáticos que os pesquisadores da área de epidemiologia têm enfrentado, como o crescimento de bactérias em um ambiente controlado, a fim de testar a eficácia do princípio ativo de um antibiótico que querem produzir.

Os pesquisadores têm tabelas com a quantidade de bactérias para cada hora passada, uma para cada tipo de condição imposta ao ambiente. Você encontrou padrões nessas tabelas, de modo que pode agora escrevê-las como uma regra simples dada por funções conhecidas. Embora haja um número finito desses valores, parece razoável tratar cada tabela como uma sequência (infinita). Qual o significado dessa sequência? Qual a relação entre a série correspondente ao número total de bactérias e os valores da tabela? Quais os primeiros critérios a serem testados para verificar se essas séries convergem?

Suponha que, avaliando essa série criada a partir da tabela, você chegue à conclusão de que a quantidade de crescimento de indivíduos hora a hora, que denotaremos por c_n, satisfaz $\lim \sqrt[n]{c_n} = 0{,}54$. Você saberia dizer se a série convergirá, isto é, se o número de bactérias atingirá um limite para tempos muito grandes? Ou esse número crescerá indefinidamente? Como você argumentaria isso em um relatório técnico para o seu cliente? Há algum resultado nos livros de análise que o ajude a tirar uma conclusão rigorosa?

O estudo de séries, do ponto de vista da análise matemática, pode então lhe proporcionar muita intuição sobre problemas práticos. Bons estudos!

Não pode faltar

Nas duas seções anteriores vimos o conceito de sequência, assim como de sua convergência, e também o conceito de subsequência. Alguns resultados sobre a convergência de sequências foram rigorosamente demonstrados, e outros foram deixados para a pesquisa em diferentes referências.

Nesta seção, estudaremos um tipo especial de sequências: as séries numéricas. Depois de dada a definição de uma série, veremos tanto exemplos quanto resultados referentes à convergência (ou não) de séries, sob o ponto de vista da análise matemática. É de se esperar que esses resultados estejam relacionados à convergência de sequência, motivo pelo qual um bom entendimento das seções anteriores é um passo fundamental para a apreciação dos resultados sobre séries apresentados aqui.

Acompanhemos então a seguinte situação: é dada uma sequência (c_n) de números reais. Não estamos no momento interessados nas propriedades dessa sequência em si, mas sim na propriedade da sequência formada por suas **somas parciais**, (x_n), definida da seguinte forma: para $n=1$, fazemos $x_1 = c_1$. Para $n=2$, $x_2 = c_1 + c_2 = x_1 + c_2$, e assim por diante. O n-ésimo termo dessa sequência será definido indutivamente por $x_n = x_{n-1} + c_n$. Assim, temos que x_n é a soma dos termos c_k para k variando de 1 até n, e denotamos isso utilizando o símbolo de somatório $\sum$, de forma que $x_n = c_1 + \dots + c_n$ é escrito como $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$. Logo, cada x_n é uma soma parcial da sequência original (c_n), e dizemos que (x_n) é a **sequência de somas parciais** de (c_n). A sequência (x_n), por ser formada por somas parciais de (c_n), é chamada então de **série**, cujo **termo geral** (de ordem n) é c_n. Quando não houver perigo de confusão, utilizaremos para (x_n) a notação mais conveniente $\sum c_n$, que já mostra que a sequência considerada é uma série com termo geral c_n.

Vamos então olhar para o limite dessa sequência de somas parciais ou, em outras palavras, o limite da série. Utilizaremos a seguinte notação: para a sequência (x_n) apresentada, escreveremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$. A interpretação é que estamos somando os infinitos termos da sequência . . que representa os termos gerais. Isso, na verdade, é impossível de se fazer, de forma que recorremos ao processo de limite. Dizemos então que, se o limite exposto existe, a série $\sum c_n$ é **convergente**, e o limite $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ é chamado de **soma** da série. Caso contrário, a série é dita **divergente**. Outras apresentações similares desse mesmo conceito podem ser encontradas na seção IV.7 de Lima (2016b) e no capítulo 3 de Ávila (1993).

Exemplificando

Seja $a > 0$, e consideremos a série geométrica $\sum a^n$, onde $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$. Calcularemos as somas parciais. Seja $x_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + \ldots + a^n$. Afirmamos que $x_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1}$ se $a \neq 1$. Relembremos a demonstração desse fato. Para isso, note que $a \cdot x_n = a \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k = \sum_{k=2}^{n+1} a^k$. Então $a \cdot x_n = \sum_{k=2}^{n} a^k + a^{n+1}$. Queremos fazer com que o termo x_n também apareça no lado direito dessa igualdade. Para isso, escrevemos $x_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = \sum_{k=2}^{n} a^k + a$, de modo que $\sum_{k=2}^{n} a^k = x_n - a$. Substituindo na igualdade anterior, temos $a \cdot x_n = (x_n - a) + a^{n+1}$, isto é, $(a-1) \cdot x_n = a^{n+1} - a$, de onde segue que, se $a \neq 1$, $x_n = \dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1}$, isto é, $\sum_{k=1}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1}$.

Agora tomemos o limite $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$. Pela última igualdade, $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1} \right)$. Precisamos avaliar então o limite $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}$. Para $a > 1$ temos que $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$ cresce indefinidamente com *n*, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = \infty$. Já para $a < 1$ temos o oposto: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ (caso não esteja convencido desses fatos, aproveite a oportunidade para demonstrá-los utilizando a definição de limites infinitos para o primeiro caso e a definição usual de limite no segundo caso, ambas vistas na Seção 2.1).

Um outro fato é que, para $a = 1$, $a^k = 1$ para todo *k* e portanto $\sum_{k=1}^{n} a^k = n$. Logo, nesse caso, $\sum_{k=1}^{n} a^k$ diverge. Desse modo, juntando os resultados apresentados, chegamos à seguinte conclusão: dado $a > 0$, a série $\sum a^n$ converge para $a < 1$ e diverge para

$a \geq 1$. Nesse caso específico, também é possível calcular o limite para quando a série converge: como $a<1$, temos $\lim_{n\to\infty} a^{n+1}=0$ e portanto $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{n+1}-a}{a-1}\right)=\frac{a}{a-1}$.

Resumindo o que foi dito no início da seção, nosso objetivo é analisar os critérios de convergência de séries numéricas. Não estamos preocupados aqui com o valor que assume a soma $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, mas sim se está bem definida (ou se é infinita, por exemplo). Sob o ponto de vista da análise matemática, nosso interesse se distancia um pouco de saber aplicar as propriedades de convergência em exemplos específicos (na verdade, esse **não é** nosso interesse aqui). Estamos interessados nas propriedades de convergência, isto é, queremos saber se $\sum c_n$ converge ou não. O cálculo da soma de uma série está fora do escopo deste texto.

Olhemos mais de perto a série $\sum c_n$, em particular o termo geral c_n. Suponha, apenas como exemplo, que todos os termos c_n são positivos. Então a série $\sum c_n$ é uma sequência crescente. Imagine que essa série convirja. Então não pode existir um número $a>0$ tal que $c_n > a$ para todo *n*. Se isso acontecesse, teríamos que o limite $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ seria maior do que o limite da sequência dada por $y_n = n \cdot a$. Mas $\lim y_n = \infty$, de modo que então o limite da série $\sum c_n$ também é infinito, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$. Outra maneira de ver isso é utilizando a definição de limite infinito, vista no final da Seção 2.1. Escrevamos $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$. Então, dado $K>0$, seja N_0 dado pelo menor número natural que é maior do que K/a. Então, se $n>N_0$, segue que $n \cdot a > K$. Como $x_n > n \cdot a$, chegamos a $c_n > K$. Ou seja, dado $K>0$, encontramos $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > N_0$, então $\sum_{k=1}^{n} c_k > K$. Mas essa é justamente a definição de limite infinito que já vimos e, portanto, chegamos à conclusão de que $\lim x_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$. Baseando-se nos argumentos expostos, podemos enunciar o seguinte teorema (LIMA, 2016a):

Teorema 2.13: se $\sum c_n$ é convergente, então temos $\lim c_n = 0$.

Dem. Se $c_n > 0$ para todo *n*, então a demonstração foi feita logo acima. Mas, claro, não precisa ser assim. Seguindo os passos de Lima (2016a, p. 40), escreveremos $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$. Definiremos uma nova sequência (y_n), da seguinte forma: escolhemos $y_1 = 0$ e $y_n = x_{n-1}$. Assim, vemos que $x_n = y_n + c_n$. Como nossa hipótese é de que (x_n) é convergente, seja $a = \lim x_n$. Então, como $y_n = x_{n-1}$ para $n>1$, temos que também $\lim y_n = a$. Agora, escrevendo $c_n = x_n - y_n$, do fato de que tanto (x_n) quanto (y_n) são convergentes e utilizando os resultados sobre a soma de limites do Teorema 2.3, temos que $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = a - a = 0$. Isto é, $\lim c_n = \lim(x_n - y_n) = 0$, completando a demonstração. □

Dessa forma, independentemente do sinal de cada termo c_n, vemos que uma condição necessária para que $\sum c_n$ seja convergente é a de que $\lim c_n = 0$, ou, em outras palavras, que os termos c_n vão ficando arbitrariamente pequenos conforme n tende ao infinito.

Reflita

O Teorema 2.13 afirma então que, se a série $\sum c_n$ convergir, seu termo geral c_n deve ir a zero para *n* tendendo ao infinito. Surge naturalmente uma pergunta: e a recíproca, é verdadeira? Isto é, será que, dada uma sequência (c_n) convergindo para 0, a série correspondente $\sum c_n$ será sempre convergente?

Temos também, para séries, o análogo do Teorema 2.3 (que relaciona os limites de duas sequências convergentes com as operações de soma, multiplicação e divisão). Isto é, se duas séries $\sum b_n$ e $\sum c_n$ forem convergentes, com $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ e $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = C$, então $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + c_k) = B + C$. No entanto, é fácil ver que a série definida pela multiplicação ou divisão dos termos gerais de duas séries convergentes nem sempre converge. Ou seja, para as séries $\sum b_n$ e $\sum c_n$ nem sempre vale $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / c_k) = B/C$. Isso é fácil de se ver com um contraexemplo: tome $b_k = c_k$ para todo *k*. Então $b_k / c_k = 1$ para todo k e, apesar de as duas séries originais convergirem, temos $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / c_k) = \infty$. Logo, nos restringiremos apenas à propriedade de adição de séries.

Enunciamos então o seguinte teorema (ÁVILA, 1993, p. 49):

Teorema 2.14: sejam $\sum b_n$ e $\sum c_n$ duas séries convergentes, com $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ e $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = C$, e seja z um número real. Então valem:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + c_k) = B + C$, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (z \cdot b_k) = z \cdot B$, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty} (z \cdot b_k) = z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Em particular, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + c_k)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot b_k)$ serão convergentes. Em outras palavras, o sinal de somatório "comuta" com as operações de soma e de multiplicação por escalar quando as séries originais convergem.

Faça você mesmo

Demonstre o Teorema 2.14. Para isso, siga os mesmos passos do Teorema 2.3, onde foram demonstradas propriedades análogas para sequências convergentes. Lembre-se de que toda série é uma sequência!

Enunciaremos agora um teorema, sem demonstração. Dizemos que uma série $\sum c_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum |c_n|$ converge (ÁVILA, 2006, p. 124). Então, temos o seguinte resultado referente a séries absolutamente convergentes:

Teorema 2.15: se a série $\sum c_n$ for absolutamente convergente, então ela também é convergente.

Dem. Ver Lima (2016b, p. 139). □

Critérios de convergência

Dada uma série $\sum c_n$, muitas vezes é difícil avaliar se ela converge ou não apenas inspecionando a forma de seu termo geral c_n. Para avaliar a convergência da série existem diversos testes que podem ser aplicados ao termo geral. Veremos aqui dois deles: o teste da comparação e o teste da razão. Lembremos que nosso objetivo não é aqui o de verificar se séries específicas convergem ou não, mas sim de demonstrar, com o rigor matemático necessário, a validade desses testes. As demonstrações desses testes podem ser encontradas, por exemplo, em Ávila (2006) ou Lima (2016a; 2016b), com enfoques diferentes em cada uma das referências. Note que, nos testes descritos a seguir, nada pode ser dito sobre o valor da soma $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$; a única informação é sobre a convergência (ou não) da série $\sum c_n$.

Mencionamos antes do Teorema 2.13, em outras palavras, o seguinte fato: se duas sequências (c_n) e (y_n) de números não negativos forem tais que $c_n > y_n$ para todo *n*, então, se $\sum y_n$ diverge, segue que $\sum c_n$ também diverge. Deixemos preciso esse resultado (LIMA, 2016a, p. 39):

Teorema 2.16 (teste da comparação): sejam $\sum c_n$ e $\sum d_n$ duas séries numéricas. Suponha que exista $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > N_0$, temos $|c_n| < |d_n|$. Então, se $\sum d_n$ for absolutamente convergente, $\sum c_n$ também será absolutamente convergente. Já se $\sum |c_n|$ for divergente (não convergente), então $\sum |d_n|$ também será divergente.

Dem. Mostremos primeiro que se $\sum d_n$ for absolutamente convergente, $\sum c_n$ também será absolutamente convergente. Sejam $x_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$ e $y_n = \sum_{k=1}^{n} |d_k|$. Então x_n e y_n são não negativos para todo *n* e $x_n < y_n$ para todo *n*. Além disso, (x_n) e (y_n) são sequências monótonas não decrescentes. Se $\sum d_n$ for absolutamente convergente, então (y_n) será convergente e, portanto, limitada. Segue que (x_n) será também limitada e, pelo Teorema 2.9 (toda sequência monótona limitada é convergente), segue que (x_n) será convergente. Em outras palavras, $\sum c_n$ será absolutamente convergente. A segunda afirmação, se $\sum |c_n|$ for divergente então $\sum |d_n|$

também será divergente), é a negação da primeira e, portanto, também é verdadeira. Mas vejamos explicitamente: se (x_n) for divergente, então isso significa que $\lim x_n = \infty$, pois (x_n) é não decrescente. Dado que $x_n < y_n$ para todo n, então segue que $\lim y_n = \infty$ e, portanto, $\sum |d_n|$ será divergente (demonstre essa afirmação utilizando a definição de limites infinitos, para fixação do conteúdo). □

Em particular, se tivermos no teorema apresentado $|c_n| < z \cdot |d_n|$ para alguma constante z positiva e para todo n, o resultado continuará valendo. Isso porque, se $\sum d_n$ for convergente, pelo Teorema 2.14 a série $\sum (z \cdot d_n)$ também será convergente.

Consideraremos agora o teste da razão, que determina a convergência da série $\sum c_n$ em função do quociente c_{n+1}/c_n (LIMA, 2016a, p. 42):

Teorema 2.17 (teste da razão): seja $\sum c_n$ uma série e considere a sequência (c_n) correspondente. Suponha que exista $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > N_0$, o quociente $|c_{n+1}/c_n|$ seja menor do que uma constante $K < 1$, isto é, $|c_{n+1}/c_n| < K < 1$ para $n > N_0$. Então a série $\sum c_n$ é convergente.

Dem. Ver Lima (2016a, p. 42). Uma demonstração alternativa pode ser encontrada em Figueiredo (1996, p. 36). Vale ressaltar que teorema é válido quando existe o limite $\lim |c_{n+1}/c_n| < 1$ (ÁVILA, 1993, p. 58). □

Assimile

Os testes de convergência baseados no comportamento do termo geral c_n funcionam, em geral, da seguinte maneira: ou compara-se o termo c_n com o termo seguinte c_{n+1} e toma-se o limite de *n* indo para o infinito, ou constrói-se uma função $f(c_n)$ e analisa-se seu comportamento para *n* indo para o infinito (caso, por exemplo, da convergência absoluta), ou compara-se os termos gerais de duas séries distintas para *n* indo para o infinito. Mas sempre devemos focar o limite $n \to \infty$, pois é nesse limite que é possível testar se a série converge ou não. De fato, dado $N_0 \in \mathbb{N}$, a soma parcial $x_{N_0} = \sum_{k=1}^{N_0} c_k$ é um número real (finito) e, portanto, a convergência da série depende somente do comportamento do termo geral para $n > N_0$. Como $N_0 \in \mathbb{N}$ é arbitrário, vemos de fato que a convergência de $\sum c_n$ depende somente do comportamento do termo geral da série limite $n \to \infty$.

Os testes da razão e da raiz foram enunciados aqui sem demonstração, e foram indicadas referências onde a demonstração está feita. Veremos mais sobre esses testes nas questões ao final da seção.

Assim, chegamos ao final da unidade. Nela, aprendemos sobre sequências (e séries) e sobre o significado de convergência. Esse conceito de convergência será estendido na próxima seção para englobar também o caso de funções de uma variável real, dando sentido à noção de continuidade de uma função. Mas não há com o que se preocupar: construiremos esses conceitos de forma rigorosa e embasada. A parte mais importante de se notar é que o conhecimento é sempre acumulativo: desse modo, um bom entendimento dos conceitos e resultados sobre convergência de sequências apresentados aqui (em particular o entendimento das demonstrações dos teoremas) será de grande valia para a melhor compreensão das noções de convergência e continuidade de funções apresentadas na próxima unidade.

Saiba mais

É interessante consultar referências que apresentem uma grande quantidade de exemplos, assim como resultados adicionais aos apresentados aqui no texto (com as respectivas demonstrações). Isso permite que você tenha uma visão mais ampla do conteúdo apresentado e um olhar mais crítico sobre o assunto, já que terá estudado diferentes abordagens. Uma boa referência para complementar o estudo desta seção são as páginas 47 a 61 pertencentes ao capítulo 3 do livro a seguir:

ÁVILA, G. S. de S. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

É interessante, se possível, estudar todo o capítulo 3. Outros conceitos não abordados aqui estão presentes lá, aumentando assim a gama de ferramentas que você dominará após o estudo.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa para dar uma consultoria de métodos quantitativos, e que os integrantes da companhia têm formação interdisciplinar.

Uma das situações que chegou até você foi a de um problema de epidemiologia que trata da taxa de crescimento em função do tempo de uma determinada bactéria.

Os pesquisadores têm tabelas com a quantidade de bactérias que cresce em cada hora passada, e você encontrou padrões nessas tabelas, de modo que pode agora escrevê-las como uma regra simples dada por funções conhecidas.

Vejamos então: para cada hora, você sabe o número de bactérias que aumentou na população de bactérias da hora anterior. Somando os números obtidos em cada hora você terá a soma ao longo do tempo (que podemos parametrizar por um número natural *n*) do número de bactérias que cresceu naquele período (que podemos chamar de c_n). Logo, a soma dos elementos da tabela seria equivalente a uma série $\sum c_n$. Analisando a tabela, você chegou a uma expressão para os termos c_n em função do número *n*, da mesma maneira que tratamos ao longo da seção.

No entanto, vale salientar aqui que você não tem infinitos valores na tabela (e nunca terá, em uma situação prática). Isso significa que, rigorosamente falando, você nunca terá uma resposta definitiva para a pergunta dos pesquisadores: "a população de bactérias atingirá um limite ou se expandirá indefinidamente?". Isso porque a convergência da série é dada, como vimos, pelos seus "últimos" termos, isto é, para o comportamento de seu termo geral quando *n* tende ao infinito. Nesse momento é importante se lembrar de que a natureza é sábia, e a maioria dos fenômenos naturais segue regras bem definidas. Dessa forma, se a quantidade de horas avaliada pelos pesquisadores for grande o suficiente, você terá muitos valores c_n para os termos iniciais da série, de modo que a predição obtida pela relação que você encontrou tem grandes chances de ser válida. Mas vale fazer essa ressalva no relatório: pode ser que, para tempos muito longos, um outro fator (por enquanto desconhecido) influencie esse crescimento, como a limitação no espaço total em que a cultura de bactérias está inserida. Se não há espaço suficiente, as bactérias podem parar de se proliferar, e a relação que você encontrou pode não ser mais válida.

Mas ignoraremos esse ponto por enquanto e focaremos o resultado que você obteve, em que sua relação funcional para c_n prediz que $\lim \sqrt[n]{c_n} = 0.54$. Assim, você tem de elaborar um relatório técnico explicando se a série que você obteve, que descreve os dados da tabela, converge ou não, e por quê. Consultando livros de análise, você provavelmente se deparará com o **teste da raiz**, que diz o seguinte (LIMA, 2016a, p. 43): seja a série $\sum c_n$ de termos todos não negativos. Se $\lim \sqrt[n]{c_n} =< 1$, então a série é convergente.

Esse é exatamente o resultado que você procurava, pois você tem que $\lim \sqrt[n]{c_n} = 0.54$. Mas isso não é suficiente para o relatório técnico, pois você precisa explicar o porquê de o teste da raiz ser verdadeiro. Para isso, você deve consultar os livros de análise para encontrar a demonstração desse resultado, ou demonstrar você mesmo. Apresentaremos aqui a demonstração desse resultado, e nos referiremos a Lima (2016a, p. 43), para detalhes adicionais.

Pela definição de limite, se $\lim \sqrt[n]{c_n} = L$ dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $\left|\sqrt[n]{c_n} - L\right| < \varepsilon$. Logo, supondo $L < 1$ e tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que exista $a < 1$ positivo, tal que $\sqrt[n]{c_n} < a < 1$ para $n > N_0$ (demonstre que isso é possível), teremos que, para $n > N_0$, $c_n < a^n$.

Mas já vimos as propriedades da série geométrica ao longo da seção (vale recapitular os resultados; os passos intermediários podem, e devem, ser consultados ou feitos aqui por você). Escrevendo $x_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + \ldots + a^n$ a soma parcial de ordem *n*, obtivemos que $x_n = \dfrac{a^{n+1} - a}{a-1}$, isto é, $\sum_{k=1}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1} - a}{a-1}$. Assim, tomando o limite de *n* tendendo ao infinito, vimos que a série geométrica é convergente para $a < 1$ e obtivemos a soma da série geométrica como $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{n+1} - a}{a-1}\right) = \dfrac{a}{a-1}$.

Dessa maneira, pelo teste da comparação, como $c_n < a^n$ para todo $n > N_0$, segue que $\sum c_n$ também converge. Em particular, no caso específico do problema tratado, temos $L = \lim \sqrt[n]{c_n} = 0.54$, de modo que $L < 1$ e a série obtida para o crescimento da população de bactérias também convergirá (mas lembre-se da ressalva de que você não tem acesso aos infinitos termos da série, somente a um número finito; o que você faz aqui é uma extrapolação com base em modelos matemáticos).

Portanto, é aconselhável que conste no relatório a demonstração do teste da raiz assim como dos resultados auxiliares utilizados na demonstração. Em particular, seria desejável incluir a definição de limite de uma sequência, a definição de convergência de uma série, a demonstração de que a série geométrica converge para $A < 1$, como feito no exemplo ao longo da seção (aqui é um bom momento para revisar esse exemplo), e também o enunciado e a demonstração do teste da comparação. Note que para elaborar o relatório técnico foi necessário demonstrar um teorema, o que mostra mais uma vez o poder e a abrangência das técnicas de análise.

Avançando na prática

Vírus nos celulares

Descrição da situação-problema

Imagine que você foi contratado para fazer parte do time de análise de sistema de uma empresa que fabrica smartphones. Por algum motivo desconhecido, existe na loja de aplicativos um aplicativo que instala um vírus no celular, inutilizando-o. Esse vírus atinge, na verdade, a interface desenvolvida por algumas marcas de celular, entre as quais está a sua. Os cientistas e engenheiros de computação do time estão tentando resolver essa falha de segurança no sistema, mas a você coube a tarefa de avaliar se todos os celulares serão afetados, ou se apenas uma parcela deles será, para tentar avaliar a rapidez com que a nova atualização do sistema, que está sendo desenvolvida, precisa ser disponibilizada aos usuários. Analisando os dados sobre a quantidade de usuários afetados, você chegou à conclusão de que, a cada hora, a quantidade de celulares afetados cresce cada vez mais, aproximadamente aumentando de $\frac{1}{n(n+1)}$ na n-ésima hora. Existe esperança de que a quantidade de celulares infectados atinja um limite?

Resolução da situação-problema

Você precisa então avaliar as propriedades de convergência da série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Vale sempre ressaltar que essa é uma estimativa confiável, porém não certeira. Você não tem acesso aos infinitos termos da série, de modo que há sempre a possibilidade de a regra que você descobriu analisando os dados existentes deixar de valer para tempos mais longos. Mas, baseado só no que foi disponibilizado até agora, isso é o melhor que você pode fazer. A demonstração da convergência dessa série (sim, a série converge) é então seu objetivo de pesquisa aqui, e para tanto vale consultar a referência em que isso está demonstrado: Lima (2016b, p. 136). Uma dica é a seguinte: escreva $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e pesquise sobre a definição e as propriedades das séries telescópicas.

Faça valer a pena

1. Consideremos a série $\sum (-1)^{n+1} a^n$ para $a > 0$. Essa série é muito parecida com a série geométrica apresentada ao longo da seção. Queremos avaliar aqui sua convergência. Para isso, lançamos mão de um dos resultados do capítulo, que nos diz que dada uma série $\sum c_n$, se tivermos que ______________, então $\sum c_n$ também converge. Assim, chegamos à conclusão de que $\sum (-1)^{n+1} a^n$ converge para $a < 1$ e, portanto, a série geométrica $\sum a^n$ convergirá para $-1 < a < 1$.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna:

a) $\sum (-1)^{n+1} c_n$ é convergente.

b) $\sum |c_n|$ é convergente.

c) $\lim c_n = 0$.

d) $\lim |c_{n+1}/c_n| < 1$.

e) $\sum_{k=1}^{\infty} (z \cdot c_k) = z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ para $z \in \mathbb{R}$.

2. Demonstraremos aqui o Teorema 2.15: se a série $\sum c_n$ for absolutamente convergente, então ela também é convergente. Seguiremos os passos da demonstração dada por Lima (2016a, p. 41-42). Suponhamos $\sum |c_n|$ convergente. Então, definiremos duas séries auxiliares: $\sum P_n$ e $\sum N_n$, que chamaremos respectivamente de parte positiva e parte negativa de $\sum c_n$. Essas partes serão definidas da seguinte forma: para a parte positiva, colocamos $P_n = c_n$ se $c_n \geq 0$ e $P_n = 0$ se $c_n < 0$. Para a parte negativa, fazemos $N_n = -c_n$ se $c_n < 0$ e $N_n = 0$ se $c_n \geq 0$. Assim, para cada *n*, $c_n = P_n - N_n$, e, portanto, $\sum c_n = \sum (P_n - N_n)$. Se as séries $\sum P_n$ e $\sum N_n$ convergirem, então $\sum c_n$ também convergirá. Utilizaremos agora nossa hipótese e o teste da comparação. Primeiro notamos que tanto $\sum P_n$ quanto $\sum N_n$ são séries formadas apenas por termos não negativos. Além disso, vemos que _________ para todo *n*. Então segue pelo teste de comparação que, como $\sum |c_n|$ é convergente, tanto $\sum P_n$ quanto $\sum N_n$ também serão convergentes. Mas então, pelo Teorema 2.14, ________________ de modo que, como as duas somas do lado direito são finitas, a série $\sum c_n = \sum (P_n - N_n)$ é convergente.

Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas:

a) $P_n < |c_n|$ e $N_n < |c_n|$; $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k - N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k - \sum_{k=1}^{\infty} N_k$

b) $P_n \leq |c_n|$ e $N_n \leq |c_n|$; $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k - N_k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} P_k$

c) $P_n \leq |c_n|$ e $N_n < |c_n|$; $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k - N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k - \sum_{k=1}^{\infty} N_k$

d) $P_n \leq |c_n|$ e $N_n \leq |c_n|$; $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k - N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k - \sum_{k=1}^{\infty} N_k$

e) $P_n \leq |c_n|$ e $N_n \leq |c_n|$; $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k + N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \sum_{k=1}^{\infty} N_k$

3. Demonstraremos aqui o teste da razão (Teorema 2.17): seja $\sum c_n$ uma série e considere a sequência (c_n) correspondente. Suponha que exista $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para $n > N_0$, o quociente $|c_{n+1}/c_n|$ seja menor do que uma constante $0 \leq K < 1$, isto é, $|c_{n+1}/c_n| < K < 1$ para $n > N_0$. Então a série $\sum c_n$ é convergente. Para isso, suponhamos, sem perda de generalidade, que todos os termos da série são não negativos. Se não forem, chegaremos à conclusão de que a série $\sum c_n$ será ____________. Mas, pelo Teorema 2.15, seguirá que $\sum c_n$ é convergente.

Seguiremos as demonstrações dadas em Ávila (1993, p. 58) e Lima (2016a, p. 42). Outras demonstrações alternativas podem ser encontradas em Figueiredo (1996) e Lima (2016b). De $c_{n+1}/c_n < K < 1$ segue que $c_{n+1} < K \cdot c_n$, e, portanto, $c_n < K^{n-N_0} \cdot c_{N_0}$ para $n > N_0$. Escrevemos então $c_n < K^{-N_0} \cdot c_{N_0} \cdot K^n$. Assim, temos que $\sum c_n$ é majorada pela série $\sum k_n$, onde $k_n = c_n$ para $n \leq N_0$ e __________ para $n > N_0$. A menos de uma constante, então, podemos considerar $\sum k_n$ como uma série geométrica em *K* (argumente por quê). Como $0 \leq K < 1$, segue do que vimos ao longo da seção que $\sum k_n$ é convergente. Logo, pelo ________, $\sum c_n$ também é convergente.

Qual alternativa preenche corretamente as lacunas?

a) absolutamente convergente; $k_n = K^n$; teste da comparação.

b) absolutamente convergente; $k_n = K^{-N_0} \cdot c_{N_0} \cdot K^n$; teste da comparação.

c) divergente; $k_n = K^{-N_0} \cdot c_{N_0} \cdot K^n$; teste da comparação.

d) absolutamente convergente; $k_n = c_{N_0} \cdot K^n$; teste da comparação.

e) divergente; $k_n = K^n$; teste da raiz.

Referências

ÁVILA, G. S. de S. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

______. **Análise matemática para licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

LIMA, E. **Análise real:** funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016a. v. 1.

______. **Curso de análise.** 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016b. v. 1.

Unidade 3

Limites e continuidade de funções

Convite ao estudo

Caro aluno, avançamos bastante no estudo da análise matemática. Até aqui, você aprendeu sobre a construção dos principais conjuntos numéricos, culminando na construção dos números reais, conteúdo que é de extrema importância para o bom entendimento do que significa a reta real. Também vimos os conceitos de sequências e séries numéricas, e uma importante propriedade: a de limite de uma sequência e sua correspondente convergência, estudando e demonstrando rigorosamente diversos resultados sobre convergência.

Aqui, nesta unidade, nosso objetivo é estender o conceito de limites de sequências para abordar um caso mais geral, o de limites de funções. Para isso devemos olhar para a "vizinhança" completa de um ponto: não só para um conjunto enumerável (os termos da sequência), mas sim para um conjunto não-enumerável (um intervalo). O estudo do comportamento de funções na vizinhança de um ponto também é interessante do ponto de vista físico: muitos sistemas eletrônicos podem ser modelados por funções descontínuas, como sistemas liga-desliga ou a influência de forças de impulso.

Como uma aplicação do conteúdo aprendido durante a unidade, consideremos que você foi convidado a construir um curso de formação continuada para professores de matemática do ensino médio, que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos. O curso deve abordar conceitos básicos de limites de funções e de continuidade, assim como aplicações no dia a dia para servirem de exemplos em sala de aula.

Três encontros mensais consolidarão os ensinamentos de cada tópico, nos quais serão apresentados conceitos e situações em que o conteúdo ensinado possa ser passado para os alunos de maneira didática. Seu objetivo é elaborar sobre essas situações de forma a permitir que os professores ensinem esses conceitos a partir do material ensinado no ensino médio.

Toda a base dos conceitos de limite e continuidade se baseia na ideia de intervalos, e com base nela, no primeiro encontro, é interessante desenvolver os conceitos de vizinhança de um ponto e, generalizando, de conjuntos abertos. Esses conceitos podem ser passados de modo a manter uma didática compatível com a sala de aula do ensino médio, e é sua tarefa desenvolver essa abordagem. Já num segundo encontro, é esperado que seja ensinado o conceito de limite. Para uma melhor familiarização desse conceito, uma possibilidade é a introdução de limites no infinito e a exemplificação com situações concretas. Uma terceira parte compreenderia o assunto de funções contínuas, e por consequência de funções descontínuas.

A primeira seção abordará conceitos da topologia da reta, como conjuntos abertos e fechados e vizinhanças, que serão a base para as construções realizadas nas seções posteriores. A segunda seção trará o conceito e as principais propriedades de limites de funções, enquanto a terceira seção versará sobre funções contínuas. Aqui, as técnicas e conceitos da unidade anterior serão muito valiosas: o conhecimento é sempre cumulativo. Esteja certo de que este aprendizado valerá a pena!

Conceitos de topologia

Diálogo aberto

Como podemos definir a vizinhança de um ponto? Qual a intuição que temos sobre esse conceito? Notamos que, no dia a dia, a vizinhança de um local (ou suas redondezas) consiste em tudo que está ao seu redor. Assim, conseguimos visualizar o que seriam os arredores de um ponto no plano cartesiano, por exemplo. A área da matemática que trata desse tipo de estrutura é a **topologia**. Ela responde perguntas como: o que significa chegar "arbitrariamente próximo" de um ponto? O que é um conjunto aberto? O que é um conjunto fechado? O que todas essas coisas significam?

Como contexto de aprendizagem, suponhamos que você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos. Mas de nada adianta falar desses conceitos sem primeiramente explicar quais são as estruturas da reta real em que se baseiam os conceitos de limite. Desse modo, no primeiro encontro com os professores é preciso abordar conceitos de topologia da reta, para familiarizá-los com as estruturas como vizinhanças de um ponto, conjuntos abertos, fechados, e assim por diante. Para isso, é possível começar com conteúdos que são de conhecimento dos alunos de ensino médio, como intervalos abertos e fechados. Daí pode-se colocar um problema/objetivo ao qual queremos chegar, como: enunciar (e se possível demonstrar) o seguinte resultado: $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de X convergir para um elemento de X. Você pode então colocar a pergunta: e o que mais podemos dizer sobre as sequências em X se ele também for limitado? Prepare um gabarito com a resposta para poder tirar as dúvidas durante esse debate.

Nesta seção estudaremos conceitos básicos de topologia, focando na topologia da reta real. Definiremos precisamente o conceito de vizinhança de um ponto, de interior de um conjunto, assim como os conceitos de conjuntos abertos e fechados. Demonstraremos os principais resultados sobre o assunto. Mas será que isso é suficiente?

Os conceitos desenvolvidos aqui, assim como as técnicas de demonstração abordadas (baseado no conceito de intervalos arbitrariamente pequenos), serão fundamentais para o entendimento das seções seguintes do livro. Além disso, a topologia é um ramo muito bonito da matemática. Desejamos que você, leitor, possa apreciar essa beleza, que também lhe trará grande maturidade matemática.

Não pode faltar

Vamos começar nossa seção com uma reflexão: o que é a vizinhança de um ponto? Ou, em outras palavras, o que seria uma boa definição da vizinhança de um ponto? Faz sentido falar na "fronteira" de um conjunto? Como podemos estudar esses conceitos?

A topologia é uma área da matemática que estuda as relações entre vizinhanças, limites e de continuidade em diferentes contextos. Embora essa área trate de conjuntos de uma forma geral, os chamados espaços topológicos, é aqui nosso interesse tratar da topologia da reta real. Desse modo, todos os conceitos apresentados serão baseados em estruturas já existentes no conjunto dos números reais, embora valha mencionar aqui, que os conceitos apresentados admitem extensão para conjuntos e espaços mais gerais.

Vamos relembrar um conceito fundamental para a construção de todos os demais desta seção: **os intervalos**. Temos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e a partir dele definimos os seguintes subconjuntos, exemplificados na Figura 3.1:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}; a<x<b\}, \qquad [a,b]=\{x\in\mathbb{R}; a\leq x\leq b\},$$

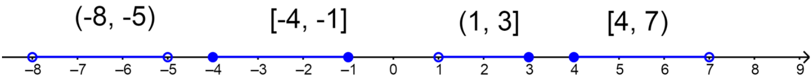
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}; a\leq x<b\}, \qquad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}; a<x\leq b\}$$

Onde, em particular, (a,b) é chamado de **intervalo aberto** e $[a,b]$ de **intervalo fechado**. Também definimos as **semirretas**:

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}; x>a\}, \qquad (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}; x<b\},$$

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}; x\geq a\}, \qquad (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}; x\leq b\}.$$

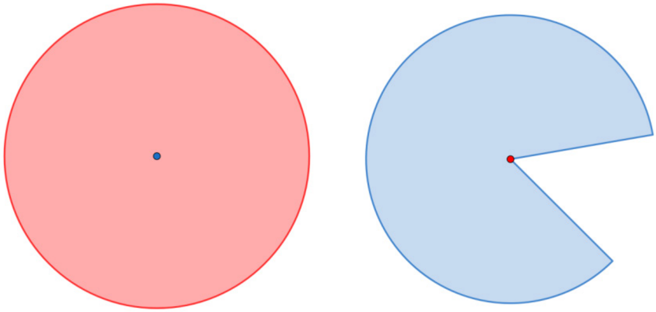
Figura 3.1 | intervalos abertos e fechados



Fonte: elaborada pelo autor.

Também nos referiremos a cada número real como um **ponto** de $\mathbb{R}$, isto é, um ponto sobre a reta. Vamos então definir o que é uma vizinhança de um ponto. Intuitivamente, vizinhança é tudo o que está ao redor. Por exemplo, se tomarmos um disco de raio R no plano cartesiano, esse disco intuitivamente será uma vizinhança do ponto central (ver Figura 3.2). Já se retirarmos desse disco um setor circular, se nos aproximarmos do ponto central por qualquer curva que venha de fora do conjunto restante, "chegaremos" a esse ponto sem ter que "entrar" no conjunto. Assim, um disco do qual foi retirado um setor angular não será uma vizinhança de seu ponto central.

Figura 3.2 | Vizinhanças no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, podemos definir uma **vizinhança** de um ponto $p \in \mathbb{R}$ como sendo um conjunto $V \subset \mathbb{R}$ tal que existe $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset V$, isto é, tal que o intervalo aberto $(p-\delta, p+\delta)$ está contido em *V*. Nesse caso, dizemos também que um ponto p que satisfaz essa propriedade é um **ponto interior** a *V*, e o conjunto dos pontos interiores a *V* é chamado de **interior** de *V* (LIMA, 2016b).

Vemos que faz sentido essa definição, se compararmos com a noção intuitiva apresentada na Figura 3.2: se existe $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset V$, então todo ponto "arbitrariamente próximo" de p também será elemento de *V*. Nesse sentido, embora estejamos apenas sobre a reta real, podemos dizer que se $V \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de $p \in \mathbb{R}$ então p está "cercado" de elementos de *V*.

Notemos uma propriedade interessante, que também é bastante intuitiva:

Lema 3.1: Se $V \subset \mathbb{R}$ é vizinhança de $p \in \mathbb{R}$ e o conjunto B é tal que $V \subset B \subset \mathbb{R}$, então B também é vizinhança de p.

Dem. Temos que $V \subset \mathbb{R}$ é vizinhança de $p \in \mathbb{R}$. Então, pela definição, existe $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset V$. Mas como $V \subset B$, então $(p-\delta, p+\delta) \subset V \subset B$, de maneira que B é então vizinhança de p. $\square$

Desse modo, se encontrarmos uma vizinhança *V* de um ponto, todo conjunto que contiver *V* também será vizinhança desse ponto. Nesse sentido, e como esperado, o conceito de vizinhança é local: depende somente do que acontece bem próximo ao ponto.

Exemplificando

Vejamos os dois exemplos mais simples de vizinhanças: os intervalos. Tomemos um intervalo aberto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ e $p \in (a,b)$. Então afirmamos que (a,b) é vizinhança de *p*. Para mostrarmos isso, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$. Mas então vamos escolher $\delta = \frac{1}{2}\min\{|p-a|,|b-p|\}$. Então claramente $\delta > 0$ e, para esse valor de δ, temos $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$, demonstrando o resultado.

Notemos que, se $p \in (a,b)$, então também $p \in [a,b)$, $p \in (a,b]$ e $p \in [a,b]$. Dessa forma, se (a,b) for vizinhança de *p*, então pelo lema anterior $[a,b)$, $(a,b]$ e $[a,b]$ também serão. Mas note que, se tomarmos $p = b$, o intervalo $[a,b]$ não será vizinhança de *p*. Isso porque $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$ e então, para qualquer $\delta > 0$, $p + \delta \notin [a,b]$ e portanto $(p-\delta, p+\delta) \not\subset [a,b]$.

Observação: lembre-se da negação de uma afirmação. Se queremos negar que $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset [a,b]$, temos que mostrar que **para todo** $\delta > 0$ teremos $(p-\delta, p+\delta) \not\subset [a,b]$.

Chegamos então a um ponto importante de nossa discussão: a definição de um conjunto aberto. Intuitivamente, uma região aberta é aquela que não tem fronteira. Na reta, isso significa que nenhum ponto será extremo do conjunto. Vamos deixar mais preciso: um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito **aberto** se, para todo ponto $p \in A$, A for vizinhança de *p*. Em linguagem matemática, *A* é aberto se, para cada $p \in A$, existir $\delta > 0$ (possivelmente diferente para cada *p*) tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset A$ (LIMA, 2016b).

Exemplificando

Do exemplo anterior, vemos que todo intervalo do tipo $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ é um conjunto aberto, segundo a definição acima. Assim, não é à toa que o chamamos de intervalo aberto. Nas seções anteriores, essa denominação foi dada pois (a,b) não contém seus extremos. Mas agora vemos que (a,b) também é aberto no sentido "topológico" definido aqui, ou seja, no sentido referente à definição das vizinhanças de um ponto.

Também, as semirretas (a,∞) e $(-\infty,b)$ são conjuntos abertos, como você, leitor, pode verificar. E, também, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é aberto, pois para todo $p \in \mathbb{R}$, qualquer $\delta > 0$ que tomarmos será tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que o conjunto vazio, $\varnothing \subset \mathbb{R}$, também é aberto. Isso porque, pela definição, $\varnothing$ será aberto se, para todo ponto $p \in \varnothing$, $\varnothing$ for vizinhança de p. Mas $\varnothing$ não tem nenhum elemento, de modo que essa propriedade é satisfeita pelo que chamamos de "vacuidade".

Vamos verificar então abaixo algumas propriedades dos conjuntos abertos, que definem a topologia da reta. Primeiramente, veremos que a união de conjuntos abertos é um conjunto aberto, o que faz sentido se pensarmos em termos das vizinhanças de p.

Teorema 3.2: A união finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Dem. Sejam $A_1,...,A_n$ conjuntos abertos, e considere a união $B = A_1 \cup ... \cup A_n$, isto é, $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Então, tomando $p \in B$ arbitrário, existirá $k \le n$ tal que $p \in A_k$. Mas então, como A_k é aberto, pela definição existirá um número $\delta_k > 0$ tal que $(p-\delta_k, p+\delta_k) \subset A_k$. Desse modo, como $A_k \subset B$, teremos $(p-\delta_k, p+\delta_k) \subset A_k \subset B$. Ou seja, tomamos $p \in B$ arbitrário e obtivemos um número $\delta_k > 0$ (embora não explicitamente, mas isso não é importante para a demonstração) tal que $(p-\delta_k, p+\delta_k) \subset B$. Mas essa é exatamente a definição de que B é aberto e, portanto, o teorema está demonstrado. □
Segue do teorema anterior um outro teorema, mais forte, mas cuja demonstração é essencialmente a mesma:

Teorema 3.3: A união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Dem. Por "arbitrária", queremos dizer aqui que essa união pode ser finita ou infinita (e enumerável ou não). Ou seja, existirá um parâmetro α, que pode ser tomado como número natural ou real, por exemplo, que indexará os conjuntos abertos, de modo a termos uma **família** de conjuntos abertos $\{A_\alpha\}$ indexadas por α. O teorema afirma então que a união de todos esses conjuntos, $B = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, será um conjunto aberto. A parte importante da demonstração consiste em notar que, se $p \in B = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, então existirá um valor β tal que $p \in A_\beta$. Então podemos seguir com a demonstração da mesma maneira que no teorema 3.2. Uma boa sugestão é que você, leitor, adapte a demonstração do teorema 3.2 para terminar esta. Qualquer dúvida, consulte Lima (2016b), p. 165, onde esta demonstração está completa e na qual nos baseamos. □

Vemos então que a união de conjuntos abertos também é um aberto. Isso, como dito anteriormente, está de acordo com a conceito de vizinhança enunciado no início desta seção. Mas, e a interseção de conjuntos abertos, como se comporta? Será que a interseção de conjuntos abertos continua sendo um aberto, ou de alguma maneira conseguimos chegar na "fronteira" dos conjuntos ao fazermos essas interseções? O teorema a seguir nos dá uma pista.

Teorema 3.4: A interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Dem. Vejamos. Tomemos dois conjuntos abertos A_1 e A_2. Tomemos

$p \in A_1 \cap A_2$. Como A_1 é aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que o intervalo $(p-\delta_1, p+\delta_1) \subset A_1$. Da mesma maneira, como A_2 é aberto, existe $\delta_2 > 0$ tal que o intervalo $(p-\delta_2, p+\delta_2) \subset A_2$. Assim, a interseção $(p-\delta_1, p+\delta_1) \cap (p-\delta_2, p+\delta_2)$ está contida em $A_1 \cap A_2$. Definindo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que essa interseção é dada por $(p-\delta_1, p+\delta_1) \cap (p-\delta_2, p+\delta_2) = (p-\delta, p+\delta)$. Mas, da definição de δ dada acima, temos que $\delta > 0$. Assim, juntando os resultados, chegamos à conclusão de que, dado $p \in A_1 \cap A_2$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \subset A_1 \cap A_2$. Isto é, todo elemento de $A_1 \cap A_2$ possui uma vizinhança contida em $A_1 \cap A_2$ ou, equivalentemente, $A_1 \cap A_2$ é vizinhança de todos os seus elementos. Dessa forma, segue da definição de conjunto aberto que $A_1 \cap A_2$ é aberto. $\square$

O teorema anterior admite uma generalização para uma quantidade finita de conjuntos abertos, da seguinte forma, que fica como exercício para você, leitor, demonstrar (ÁVILA, 1993, p. 76):

Teorema 3.5: A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Para isso considere $A_1, ..., A_n$ conjuntos abertos e encontre $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta)$ esteja na interseção de todos esses conjuntos.

Reflita

O teorema 3.5 nos garante que a interseção finita de conjuntos abertos continua sendo um conjunto aberto. Mas o que acontece quando consideramos uma interseção arbitrária de conjuntos abertos, nos moldes da demonstração do teorema 3.3? Será que essa interseção arbitrária continua sendo um conjunto aberto?

Como ponto de partida, veja o que acontece com os conjuntos $A_n = (-1/n, 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos definido o que é um conjunto aberto e demonstradas suas principais propriedades. Trataremos agora de uma outra classe de conjuntos, a de conjuntos fechados.

Vejamos então a definição de conjunto fechado. Na verdade, a definição é simples: um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se seu complementar $\mathbb{R} - F$ for aberto (ver ÁVILA 1993, p. 77, ou também Lima (2016b), p. 169-171, para uma outra abordagem). Veremos abaixo que, devido às propriedades de conjuntos complementares, os principais resultados sobre conjuntos fechados seguem dos resultados análogos aqui já provados para conjuntos abertos.

Exemplificando

Vemos que um intervalo $[a,b]$ é um conjunto fechado, pois seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ e é aberto (união de dois conjuntos abertos). Daí a nomenclatura “intervalo fechado” para esse tipo de conjunto. Em particular, o conjunto formado por um ponto, $\{a\} \subset \mathbb{R}$, é fechado por ser o complementar do conjunto aberto $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$. Na verdade, todo conjunto finito de pontos é um conjunto fechado, pois seu complementar é uma reunião de intervalos abertos.

As “semirretas fechadas” $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ e $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ também são conjuntos fechados, pois seus complementares são abertos.

Também, tanto $\mathbb{R}$ quanto $\varnothing$ são conjuntos fechados, pois $\mathbb{R}$ é o complementar do conjunto vazio (que é aberto) e $\varnothing$ é o complementar de $\mathbb{R}$ (que também é aberto). Vale notar que $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são os únicos conjuntos de números reais que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados (LIMA, 2016a).

Vamos então relembrar brevemente algumas propriedades da interseção e união de conjuntos e a relação com seus complementares. Para uma revisão completa, contendo a demonstração desses resultados, ver Lima (2016b), capítulo 1. Consideremos n subconjuntos quaisquer $X_1, \ldots, X_n$ de um conjunto Y, chamado de “conjunto universo”. Escrevemos $X_1 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ e $X_1 \cap \ldots \cap X_n = \bigcap_{k=1}^{n} X_k$. Denotando o complementar de um conjunto $A \subset Y$ por $A^c = Y - A$, temos as seguintes igualdades:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k)^c \qquad \text{e} \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} (X_k)^c.$$

Além disso, $(A^c)^c = A$ para todo $A \subset Y$.

Assimile

Sejam dois conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ e $F \subset \mathbb{R}$. Sabemos que *F* é fechado, por definição, se $F^c = \mathbb{R} - F$ for aberto. Isto é:

Suponha agora que o complementar do conjunto *A*, $A^c = \mathbb{R} - A$, seja fechado. Então, pela definição, $(A^c)^c$ é aberto. Mas como $(A^c)^c = A$, segue que *A* é aberto.

Agora considere que *A* é um conjunto aberto. Então, como $(A^c)^c = A$, segue que $(A^c)^c$ é aberto. Mas, pela definição de conjunto fechado, isso significa que A^c é fechado. Temos então o seguinte:

1. *A* é aberto se, e somente se, seu complementar $A^c = \mathbb{R} - A$ for fechado;
2. *F* é fechado se, e somente se, seu complementar $F^c = \mathbb{R} - F$ for aberto.

Podemos então enunciar e demonstrar os teoremas sobre a união e interseção finitas de conjuntos fechados. Primeiramente, mostraremos o análogo do teorema 3.2, que fala sobre a união de conjuntos abertos.

Teorema 3.6: A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Dem. Sejam $F_1,...,F_n$ conjuntos fechados. Então, definindo seus complementares $A_k = (F_k)^c = \mathbb{R} - F_k$, temos $A_1,...,A_n$ abertos e, das relações há pouco citadas que $\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} (F_k)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Ou seja, $\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Mas pelo teorema 3.5, a interseção finita de conjuntos abertos é também um conjunto aberto. Assim, $\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c$ é um conjunto aberto. Mas então isso significa que $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ é fechado, como queríamos demonstrar. □

Reflita

O teorema 3.6 nos garante que a união finita de conjuntos fechados continua sendo um conjunto fechado. Mas o que acontece quando consideramos uma união arbitrária de conjuntos fechados? Será que essa interseção arbitrária continua sendo um conjunto fechado?

Como ponto de partida, considere conjuntos fechados formados por apenas um ponto, e faça uniões do tipo $\bigcup_{a<p<b} \{p\}$, onde *a* e *b* são dois números reais.

Agora consideraremos o análogo do teorema 3.5, que fala sobre a interseção de conjuntos abertos.

Teorema 3.7: A interseção finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Dem. Sejam $F_1,...,F_n$ conjuntos fechados. Então, definindos seus complementares $A_k = (F_k)^c = \mathbb{R} - F_k$, temos $A_1,...,A_n$ abertos, como na demonstração do teorema anterior. Das relações entre as interseções, uniões e os complementares de conjuntos, vale $\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} (F_k)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Mas, pelo teorema 3.2, a união finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Logo, $\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)^c$ é aberto e, portanto, $\bigcap_{k=1}^{n} F_k$ é fechado. □

Na verdade, vale um resultado mais forte: a interseção arbitrária de conjuntos fechados é também um conjunto fechado. A demonstração desse resultado é feita da mesma maneira que no teorema 3.7, porém utilizando como resultado auxiliar na demonstração o teorema 3.3, em vez do teorema 3.2. Os detalhes podem ser encontrados em Lima (2016a), por exemplo.

Saiba mais

Falamos aqui sobre as definições e as principais propriedades de conjuntos abertos e fechados. O assunto pode ficar tão extenso quanto se queira. Para mais informações, assim como para a introdução de outros conceitos importantes como pontos de acumulação, o fecho e a fronteira de um conjunto, assim como conjuntos compactos nos referimos ao capítulo 5, p. 49-62, do livro:

LIMA, Elon. **Análise Real**. V. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Sem medo de errar

Lembremos de que você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos. No primeiro encontro do curso não adianta já começar a falar de limites, pois falta uma base conceitual sobre as estruturas existentes intrínsecas à reta real (bom, até se pode falar, mas perderíamos muito da beleza matemática). Sua função então é primeiramente apresentar conceitos simples, baseados nos conhecimentos do ensino médio, para depois introduzir os conceitos novos.

Intervalos são objetos bem conhecidos dos alunos de ensino médio. E, talvez por coincidência (mas provavelmente não por isso), são os objetos básicos para o estudo da topologia da reta. Quanto mais simples as estruturas, mais fácil a compreensão dos conceitos, e os intervalos são as vizinhanças mais simples de um ponto a serem consideradas (e, na reta, não há muitas outras opções, a não ser que consideremos uma vizinhança “exótica” formada por dois intervalos disjuntos, por exemplo. Mas, nesse caso, o intervalo que não contém o ponto considerado é irrelevante.

Bom, a introdução de intervalos abertos leva então ao conceito de conjuntos abertos, como no texto. Diversos comentários sobre conjuntos abertos podem ser feitos, como de que esses são os conjuntos que “não têm fronteira” (o que de fato pode ser formalizado matematicamente, ver Lima (2016a), p. 59).

Daí a introdução dos conjuntos fechados que pode ser feita de duas maneiras distintas. A maneira que adotamos nesta seção não é a convencional, porém acreditamos ser mais natural para nossos propósitos. Há dois caminhos: no primeiro, adotado aqui, parte-se da definição de conjunto fechado como aquele que é complementar de um aberto, e chega-se que isso é equivalente a dizer que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de X convergirá para um elemento de *X*. De maneira equivalente, pode-se partir da definição de conjunto fechado $X \subset \mathbb{R}$, como aquele em que toda sequência convergente de elementos de *X* convergirá para um elemento de *X*, e daí chegar ao resultado de que um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar for aberto. Vale a pena que você teça comentários sobre essas duas abordagens, suas vantagens e desvantagens didáticas. Para isso, você pode consultar a abordagem tradicional em Ávila (1993), Lima (2016a) ou Lima (2016b), por exemplo.

Após introduzir os conceitos acima e comentar sobre os principais teoremas, é esperado que você chegue ao resultado do seguinte teorema: " $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de *X* convergirá para um elemento de *X*". Surge então a pergunta, que pode ser colocada em debate para a classe: E o que acontece se, além de fechado, *X* for também limitado? O que pode se dizer sobre as sequências de elementos de *X*?

Há todo um arcabouço teórico por trás desse tipo de conjunto. Os conjuntos fechados e limitados da reta são chamados de **compactos**. Depois de ouvir as opiniões e dúvidas dos alunos, você pode apresentar o resultado procurado da seguinte maneira:

Teorema: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto (fechado e limitado) se, e somente se, toda sequência em *X* possuir uma subsequência convergente em *X* (isto é, cujo limite também é um elemento de *X*).

Note que nada se fala no teorema sobre a convergência da sequência original.

Bom, como dito, você vai precisar de um gabarito para poder guiar os alunos. Uma demonstração completa desse resultado pode ser encontrada em Lima (2016a, p. 54-55), e nos baseamos nela para desenvolver aqui uma demonstração para o teorema.

Vejamos primeiro como deve ser a demonstração "*X* compacto $\Rightarrow$ toda sequência em *X* possuir uma subsequência convergente em *X*". Para isso, note que, como *X* é limitado, toda sequência formada por elementos de *X* também será limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (teorema 2.12), toda sequência de elementos de *X* possuirá uma subsequência convergente (mas esse teorema nada diz sobre o limite pertencer ou não a *X*). Mas, como *X* é compacto, *X* é em particular fechado. Logo, o limite de toda sequência estará também em *X*, demonstrando essa parte do teorema.

Como na questão 2 ao final do texto, vamos seguir aqui as definições de

Lima (2016a, p. 50). Seja um conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}$ é **aderente** a X se p for limite de alguma sequência cujos termos pertencem todos a X. Assim, vemos que todo ponto de X é aderente a X. Definimos também o **fecho** de X como o conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos aderentes a X.

Para demonstrar a outra direção, isto é, "toda sequência em X possui uma subsequência convergente em $X \Rightarrow X$ é compacto", primeiramente notamos que X precisa ser limitado. Caso contrário, seria possível obter uma sequência monótona (crescente, por exemplo) com limite infinito, e nenhuma de suas subsequências seria convergente. Então nos resta mostrar que X é fechado. Para isso, tomemos um ponto aderente a X. Queremos mostrar que esse ponto também pertencerá a X, pois assim seguirá que $\overline{X} \subset X$ e, portanto, $\overline{X} = X$.

Tomemos então um ponto aderente a X, $p \in \overline{X}$. Então existe uma sequência (y_n) de elementos de X tal que $y_n \to p$. Suponhamos, por contradição, que X não seja fechado. Então existe um elemento de $\overline{X}$ que não é elemento de X, isto é, existe um ponto $q \in \overline{X}$ aderente a X que não pertence a X. Então existe uma sequência (z_n) de elementos de X, tal que $z_n \to q$. Mas aí toda subsequência de (z_n) também convergirá para q, o que é uma contradição, pois deveria existir uma subsequência que converge em X. Esse, portanto, é o gabarito que você poderá usar durante a atividade.

Avançando na prática

Intervalos ou vizinhanças?

Descrição da situação-problema

Imagine que você está lecionando a disciplina de Análise Matemática em um curso universitário de licenciatura em Matemática. Um dos estudantes levanta a mão, após você explicar o conceito de vizinhança de um ponto e de interior de um conjunto, então você é confrontado com a seguinte pergunta: "Professor, eu tenho muita dificuldade em lidar com as quantidades ε e δ. Como eu posso escrever as definições de limite de sequências sem me referir a essas quantidades? Dá para escrever as definições de convergência somente em termos de vizinhanças?"

Como você responderia a essa questão? Primeiramente, é possível?

Resolução da situação-problema

De fato, trabalhar com demonstrações em termos de ε e δ exige um tanto de cuidado e de experiência. Vale ressaltar ao aluno, e à classe, que é extremamente importante manter o propósito de se acostumar com esse tipo de demonstração, pois só assim será possível internalizar o significado dessas quantidades. Ler outras abordagens, como estudar o assunto por outros livros-texto, pode também ser bastante útil para uma compreensão baseada em diferentes pontos de vista: embora a matemática seja sempre a mesma, a maneira de apresentar os resultados e de fazer as demonstrações, assim como a escolha dos principais conceitos, varia de autor para autor (lógico, dentro do possível: às vezes só há uma maneira de se demonstrar o resultado).

Mas não se pode deixar o estudante sem resposta: mesmo que a sua resposta inicial seja "não sei no momento, vou pensar sobre o assunto e te respondo na próxima aula", o estudante merece um retorno. Então, após estudar novamente o conceito de convergência de sequências, você relembra a definição:

Seja (x_n) uma sequência numérica. Então $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. Dizemos também, nesse caso, que a sequência é convergente. Mas o que significa dar $\varepsilon > 0$ tal que se $n > N_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$? Em particular, o que significa $|x_n - L| < \varepsilon$?

Note que dizer que $|x_n - L| < \varepsilon$ é equivalente a dizer que $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Ou seja, x_n pertence então a uma vizinhança de *L*. Então a definição de convergência de uma sequência pode ser reformulada como: $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e significa que, dada uma vizinhança *V* de *L*, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $x_n \in V$.

Utilize a definição de vizinhança de um ponto, apresentada na seção, para demonstrar a equivalência dessas duas definições. Assim, é aconselhável nesse caso enunciar a definição e mencionar a equivalência acima. Com a solução em mãos, agora você pode auxiliar o estudante, tirando suas dúvidas e orientando-o para que obtenha por conta própria a demonstração.

Faça valer a pena

1. Vimos ao longo do texto da seção um caso especial de conjuntos fechados, os conjuntos que contêm um número finito de pontos. Como generalização, vamos definir um conjunto discreto $X \subset \mathbb{R}$ como sendo aquele em que, dado $p \in X$, existe uma vizinhança de p que não contém nenhum outro ponto de *X* (ÁVILA, 1993). Pela definição de vizinhança, isso é equivalente a dizer que para cada $p \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \cap X = \{p\}$. Queremos mostrar que todo subconjunto finito $X \subset \mathbb{R}$ é discreto. Para isso, escrevemos $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Então, definindo

__________, vemos que, para cada $k=1,\ldots,n$, vale $(p_k-\delta, p_k+\delta)\cap X=\{p_k\}$. Então vemos que X é discreto, completando assim a demonstração.

Marque a alternativa que completa corretamente a lacuna:

a) $\delta=\min\{(p_k-p_j); j,k\leq n\}$

b) $\delta=\min\{|p_k-p_j|; j,k\leq n\}$

c) $\delta=\min\{|p_n-p_j|; j\leq n\}$

d) $\delta=\max\{|p_k-p_j|; j,k\leq n\}$

e) $\delta=\max\{|p_n-p_j|; j\leq n\}$

2. Vamos seguir aqui as definições de Lima (2016a). Seja um conjunto $X\subset\mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $p\in\mathbb{R}$ é **aderente** a *X* se p for limite de alguma sequência cujos termos pertencem todos a *X*. Assim, vemos que todo ponto de *X* é aderente a *X*. Definimos também o **fecho** de *X* como o conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos aderentes a *X*. Vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.8: $\overline{X}$ é fechado para qualquer conjunto $X\subset\mathbb{R}$.

Dem. Consideremos o conjunto $\left(\overline{X}\right)^c$ dado pelos pontos que não são aderentes a X. Então precisamos mostrar que $\left(\overline{X}\right)^c$ é aberto. Mas suponha que $\left(\overline{X}\right)^c$ não seja aberto. Então, pela definição, existe um ponto $p\in\left(\overline{X}\right)^c$ tal que __________. Mas então tomando $\delta=1/n>0$, conseguimos uma sequência (y_n) em $\overline{X}$ que converge para _______, e portanto p é aderente a *X*. Mas pela definição do fecho de um conjunto isso significa que $p\in\overline{X}$. Isso significaria que $p\in\overline{X}\cap\left(\overline{X}\right)^c$, o que é uma contradição. □

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas:

a) existe $\delta>0$ com $(p-\delta,p+\delta)\subset\overline{X}$; $p\in X^c$

b) para todo $\delta>0$ existe $y\in(p-\delta,p+\delta)\cap\overline{X}$; $p\in X^c$

c) para todo $\delta>0$ existe $y\in(p-\delta,p+\delta)\cap\overline{X}$; $p\in\left(\overline{X}\right)^c$

d) existe $\delta>0$ com $(p-\delta,p+\delta)\subset\left(\overline{X}\right)^c$; $p\in\left(\overline{X}\right)^c$

e) para todo $\delta>0$ existe $y\in(p-\delta,p+\delta)\cap X$; $p\in\left(\overline{X}\right)^c$

3. Suponhamos válido o teorema 3.8. Queremos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 3.9: $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$.

Dem. Primeiramente, notamos que $X \subset \overline{X}$, pois todo ponto de X é aderente a X (basta tomar a sequência constante).
Suponhamos primeiramente que X é fechado. Então seu complementar X^c é aberto. Logo, para todo $p \in X^c$ existe $\delta > 0$ tal que ____________. Mas então não pode existir nenhuma sequência em X que convirja para p, de modo que p não é aderente a X. Mas pela definição do fecho de um conjunto, isso significa que $p \notin \overline{X}$. Logo temos __________, o que é equivalente a $p \in \overline{X} \Rightarrow p \in X$, isto é, $\overline{X} \subset X$.

Por outro lado, suponhamos agora que $X = \overline{X}$. Pelo teorema 3.8, temos que $\overline{X}$ é fechado para qualquer conjunto X, de modo que então X é fechado, completando a demonstração. □
Podemos interpretar os resultados dos teoremas 3.8 e 3.9 da seguinte maneira: Alguém "passeando" os elementos de X atingirá ao máximo o conjunto $\overline{X}$, se for andando por uma sequência convergente. Já se X for fechado, isso significa que esse passeio começará e terminará em X; não há como escapar.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas:

a) $(p-\delta, p+\delta) \cap X^c \neq \varnothing$; $p \notin X \Rightarrow p \not\subset \overline{X}$

b) $(p-\delta, p+\delta) \subset X^c$; $p \notin X \Rightarrow p \notin \overline{X}$

c) $(p-\delta, p+\delta) \subset X^c$; $p \notin X \Rightarrow p \not\subset \overline{X}$

d) $(p-\delta, p+\delta) \cap X^c \neq \varnothing$; $p \notin \overline{X} \cap X$

e) $(p-\delta, p+\delta) \subset X^c$; $p \notin X \Rightarrow p \notin \overline{X}$

Limites de funções reais

Diálogo aberto

Caro aluno, a matemática é uma importante ferramenta para o mundo dos negócios. Você já deve ter ouvido falar que a bolsa de valores varia constantemente, alcançando em um determinado dia um valor máximo e um mínimo. Será que essa variação poderia ser representada por uma função? A resposta é sim! E, a partir dessa modelagem é possível extrair diversas informações, inclusive analisando pontos específicos. A análise matemática nos permite entender o que acontece com uma função nas vizinhas de um ponto. Já sabemos o conceito de vizinhança, mas qual sua utilidade? Veremos nesta seção como essas perguntas podem ser respondidas de maneira precisa.

Lembremos de que, como contexto de aprendizagem, você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos.

Neste segundo encontro você deverá apresentar situações reais para as quais são aplicados os limites no infinito e limites infinitos, como o decaimento exponencial da quantidade de elementos radioativos em um objeto, a carga em um capacitor quando sendo carregado por uma corrente constante, a velocidade terminal de uma partícula caindo sujeito à resistência do ar (limites no infinito). Pesquise outros exemplos práticos de limites no infinito e encontre aplicações de limites infinitos. Deverá então mostrar como se determinam cada um desses limites de forma rigorosa (definindo matematicamente esses conceitos e enunciando/demonstrando os principais resultados nesse contexto), e formular como que esses conceitos podem ser apresentados para os alunos do ensino médio.

Para isso, veremos nesta unidade a definição de limite de uma função e as principais propriedades desse limite, como sua unicidade e a relação com as operações algébricas usuais (adição, subtração, divisão, multiplicação).

Os limites de funções são a base para todo o estudo de funções em Análise Matemática, sendo assim fundamentais em diversos aspectos. Noções futuras como a continuidade e diferenciabilidade de funções estão fortemente baseadas no conceito de limites. Assim, o estudo desta seção é essencial. O conhecimento é sempre cumulativo, e a sensação de ter avançado no aprendizado é extremamente prazerosa.

Não pode faltar

Na seção anterior estudamos alguns conceitos de topologia da reta. Esses conceitos, principalmente o de vizinhança, são essenciais para o entendimento do conceito de limite de uma função e de suas propriedades, que são os assuntos desta seção. O conceito de limite de uma função é muito parecido com o limite de uma sequência: o limite envolve considerar intervalos muito pequenos nos quais a função é limitada, de forma que "no limite" o valor da função "tende" a um certo número.

Vamos então às definições formais. Para isso, é preciso introduzir um novo conceito de topologia, como veremos a seguir. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ e tome $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Dizemos que o ponto a é um ponto de acumulação do conjunto A se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $x \neq a$ tal que $x \in A \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (LIMA, 2016b). Isto é, a é ponto de acumulação do conjunto A se, dada uma vizinhança arbitrária de a, existir algum elemento de A nessa vizinhança. Assim, dizer que a é **ponto de acumulação** de um conjunto significa que existe uma sequência composta por elementos de A, todos distintos de a, que converge para a.

A importância dos pontos de acumulação é fundamental para o conceito de limite de uma função. Queremos definir o limite de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, em um ponto $a \in \mathbb{R}$, como o número L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próximo de L conforme x fica arbitrariamente próximo de a (LIMA, 2016a). Mas também queremos que o processo de limite tenha de fato o caráter de "proximidade": não adiantaria definir o limite de uma função no ponto $a \in \mathbb{R}$ se existir uma vizinhança V de a onde a função não está definida. Da mesma forma, não adianta definir o limite de uma função no ponto $a \in \mathbb{R}$ se existir uma vizinhança V de a tal que a função esteja definida apenas em a. Pois, aí não existiria nenhum elemento do domínio de f "próximo" a a. Dessa forma, exigimos que a seja um ponto de acumulação do domínio de f para que a definição de limite faça sentido.

Matematicamente, as noções desenvolvidas acima podem ser sistematizadas da seguinte maneira. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Então, seguindo Ávila (1993), com algumas adaptações, dizemos que o **limite** de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$, tal que, se x pertencer a A com $0 < |x-a| < \delta$, tivermos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Se não existir um número L com essas propriedades, dizemos que o limite de f não existe em a.

Notemos que a definição acima realmente traduz matematicamente nossas ideias intuitivas sobre proximidade. Podemos também reescrever a definição de limite em termos de vizinhanças, utilizando os conceitos de topologia da seção anterior. Nesse caso, vemos que podemos trocar os intervalos acima definidos pelos números ε e δ, podendo ser substituídos por vizinhanças de a e de L, sem medo: notemos que uma vizinhança de um ponto sempre conterá um intervalo ao redor desse ponto. Assim, sendo $f: A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A, podemos dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando para toda vizinhança U de L existir uma vizinhança V de a tal que, se $x \in U - \{a\}$ então $f(x) \in V$.

Essa definição de limite em termos de vizinhanças (que é equivalente à definição de limite em termos de ε e δ) fica mais condizente com a noção de "proximidade" que queremos formalizar, e pode nos dar mais luz sobre o conceito. No entanto, para a maioria dos desenvolvimentos práticos, como demonstrações e cálculos de limites de funções específicas, a definição em termos de ε e δ será mais útil. A definição em termos de vizinhanças é então dada aqui apenas para ilustrar que o conceito de limite pode ser dado utilizando apenas o que vimos de topologia da reta na seção anterior.

Assimile

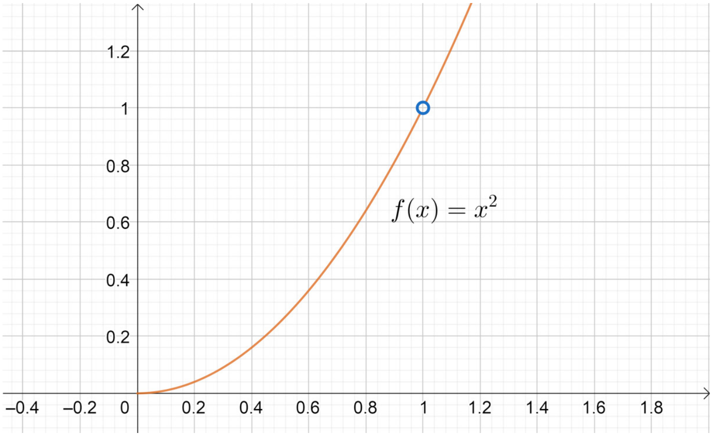
A definição de limite não exige que o ponto a pertença ao domínio da função. Vemos que a condição $0 < |x - a| < \delta$ nos diz que não precisamos ter informação nenhuma sobre o que acontece em a, isso porque essa condição implica $x \neq a$. Em particular, se a pertence ao domínio da função, esta pode assumir qualquer valor $f(a)$ que o valor do limite $\lim_{x \to a} f(x)$ será o mesmo. Da mesma maneira, se a não pertencer ao domínio da função (mas for ponto de acumulação do domínio), então a condição $0 < |x - a| < \delta$ significa que o limite também estará bem definido.

Assim, temos a definição de limite. Mas como ver na prática o que ela de fato representa? O exemplo a seguir ajuda a esclarecer os conceitos.

Exemplificando

Vemos na Figura 3.3 uma ilustração simples do fato de que o ponto a na definição de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ não precisa pertencer ao domínio da função.

Figura 3.3 | exemplo de limite de uma função



Fonte: elaborada pelo autor.

Consideremos a função $f: A \to \mathbb{R}$ com $A = [0,1) \cup (1, \infty)$ e $f(x) = x^2$ para todo $x \in A$. Queremos calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$, isto é, tomamos $a = 1$ na definição de limite. Claramente, vemos que $a = 1$ é um ponto de acumulação de A, de modo que a definição de limite faz sentido. Afirmamos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. É intuitivo que esse seja o caso, pois se $f(x) = x^2$ para todo x próximo de $a = 1$ e a função é bem comportada (é uma curva contínua, conforme vemos na Figura 3.3), o limite deve satisfazer a mesma expressão. Mas este é um caso em que não existe $f(a)$, então vamos agir com cautela. Essa cautela só é possível demonstrando o resultado rigorosamente. Então tomemos, como na definição de limite, $\varepsilon > 0$ arbitrário. Suponhamos em perda de generalidade $0 < \varepsilon < 1$. Então, queremos encontrar um $\delta > 0$ adequado que nos permita avaliar o limite. Vemos que $0 < |x - 1| < \delta$ implica, em particular, $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Queremos então $\varepsilon > 0$ tal que $\left((1-\delta)^2, (1+\delta)^2\right) \subset (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, isto é, $(1-\delta)^2 > 1 - \varepsilon$ e $(1+\delta)^2 < 1 + \varepsilon$. Abrindo as contas, vemos que isso é satisfeito tomando $\delta < \varepsilon/3$. Assim, para $\delta = \varepsilon/4$ temos, sempre que $0 < |x - 1| < \delta$, $0 < |x^2 - 1| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Vemos que o cálculo do limite de uma função pode vir a ser bastante tedioso. Mas, como já dito diversas vezes ao longo do livro, nosso objetivo aqui não é calcular casos específicos, mas sim demonstrar as propriedades gerais de cada estrutura que introduzimos (neste caso, o limite de uma função). O primeiro resultado, e extremamente importante (embora bastante intuitivo), é de que uma função não pode ter dois limites distintos no mesmo ponto. Isso é análogo ao que foi demonstrado para sequências no teorema 2.1: o limite de uma sequência, quando existe, é único. Não é de se esperar que para funções isso venha a ser diferente. Seguiremos Lima (2016b, p. 197-198.

Teorema 3.10: Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então esse limite é único.

Dem. Suponhamos que não seja verdade. Isto é, que exista uma função $f : A \to \mathbb{R}$ com $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e que existam dois números distintos L e M com $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$. Mas, pela definição de limite, isso nos diz que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ e se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - M| < \varepsilon$. Vamos então escolher um valor específico de ε, isto é, $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$. Então, temos que se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, existe $b \in A$ com $0 < |b - a| < \delta$. Segue pela desigualdade triangular que $|L - M| \leq |L - f(b)| + |M - f(b)|$, e portanto $0 < |b - a| < \delta$ implica $|L - M| < 2\varepsilon$. Mas como $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$ isso implicaria $|L - M| < |L - M|$, o que é uma contradição. Assim, o teorema está demonstrado. □

Estamos assegurados então de que quando o limite existe, ele é único. Isso é muito bom, pois caso contrário toda a teoria aqui desenvolvida não serviria de muita coisa. Vamos olhar mais de perto a definição de limite de uma sequência. Da Unidade 2, lembramos que dada uma sequência (x_n), $\lim_{n \to \infty} x_n = b$ significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - b| < \varepsilon$. Essa definição é bastante parecida, estruturalmente, com a de limite de uma função. Em ambos os casos o resultado final deve ser menor que um número ε arbitrário, o que muda são só as condições para que isso aconteça. Logo, deve haver alguma relação entre o limite de sequências e o limite de funções. De fato, essa relação existe e é apresentada abaixo:

Teorema 3.11: Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Então para toda sequência (x_n) com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, com $x_n \neq a$ para todo n, temos que a sequência $(f(x_n))$ satisfaz $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Dem. Consideremos a definição de $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Dado $\delta > 0$, existirá $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - a| < \delta$. Vamos então escrever a definição de $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dessa forma, vamos fazer a seguinte justaposição: tomemos $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Mas para esse $\delta > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|x_n - a| < \delta$. Assim, em particular, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$. Reescrevendo os passos acima sem mencionar a quantidade $\delta > 0$, temos o seguinte: dado $\varepsilon > 0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, então $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Mas isso é justamente a definição de que a sequência $(f(x_n))$ converge para L, isto é, de que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$. $\square$

Reflita

Vale também a recíproca do teorema 3.11: se toda sequência (x_n) convergente com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ for tal que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Por que esse resultado é verdadeiro? É possível fazer essa argumentação primeiramente em palavras? Como você faria para demonstrar? Consulte Lima (2016a) ou Lima (2016b) para possíveis demonstrações.

Vemos assim a relação entre o limite de sequências e o limite de funções. Em particular, se encontrarmos duas sequências $x_n \to a$ e $y_n \to a$ com $(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ convergindo para limites distintos (ou com alguma delas não convergindo), isso significará que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Muito bem. Vimos então a unicidade do limite de uma função e sua relação com os limites de sequências. Antes de tratarmos das propriedades aritméticas dos limites, vamos observar um fato intuitivo (mas que merece demonstração): suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$, digamos $L > 0$. Então pela definição dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existirá $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, teremos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ou seja, teremos que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Mas então, tomando por exemplo $\varepsilon = L/2$, teremos que existirá $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > 0$. Ou seja, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$, então existirá uma vizinhança de a em que a função f será positiva. Acabamos de demonstrar então o seguinte teorema:

Teorema 3.12 (teorema de permanência do sinal): Seja $f: A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$. Então existe uma vizinhança de a em que a função f assume apenas valores positivos. Se $\lim_{x \to a} f(x) < 0$, existirá uma vizinhança de a em que a função f assume apenas valores negativos. Vale notar que a vizinhança do teorema acima não precisa ser um intervalo simétrico, apesar de poder ser escolhida como $(a - \delta, a + \delta)$ para algum $\delta > 0$ adequado.

Mas então, e as propriedades aritméticas dos limites, como ficam? Será que existem resultados, para funções, análogos aos obtidos na Seção 2.1 para a soma, subtração multiplicação e divisão de sequências? Veremos que sim, e que esses resultados assumem basicamente a mesma forma. A demonstração dessas propriedades está intimamente ligada com as respectivas propriedades das sequências convergentes, por meio do teorema 2.3. Para isso utilizaremos a recíproca do teorema 3.11, enunciada há pouco no box *Reflita* e cuja demonstração pode ser encontrada nas referências lá citadas. Adaptamos o enunciado de Ávila (2006, p. 145). Duas demonstrações diferentes podem ser encontradas em Ávila (2006) e Lima (2016a). Para a demonstração nos basearemos em Lima (2016a, p. 66).

Teorema 3.13: Sejam duas funções $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Suponhamos que existam os limites de f e g em a, isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então valem as seguintes relações para os limites da soma, diferença, multiplicação e divisão dessas funções (compare com o enunciado do teorema 2.3):

a) $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$;

b) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = L \cdot M$;

c) $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

Dem. Utilizaremos a recíproca do teorema 3.11, enunciada há pouco no box *Reflita*: se toda sequência (x_n) convergente com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ for tal que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Essa afirmação, juntamente com o teorema 2.3 (que trata das mesmas operações, mas com sequências), serão suficientes para demonstrar os três resultados. Demonstraremos a primeira afirmação: $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$. Tomemos uma sequência $x_n \to a$. Então, $f(x_n) \to L$ e $g(x_n) \to M$ pelo teorema 3.11. Assim, pelo teorema 2.3, temos que $f(x_n) + g(x_n) \to L + M$. Agora vamos nos valer do fato de a sequência (x_n) ser arbitrária: isso significa que para toda sequência (x_n) tal que $x_n \to a$, teremos $f(x_n)+g(x_n)\to L+M$. Logo, pela recíproca do teorema 3.11, teremos que existe o limite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ e que $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L+M$, demonstrando o resultado. O mesmo ocorre no item b, $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$, notando pelo teorema 2.3 que $\lim(f(x_n)\cdot g(x_n))=L\cdot M$ e utilizando que a sequência (x_n) é arbitrária (com a única restrição de que $x_n \to a$). Pela mesma argumentação, segue dos teoremas citados também o item c. □

Vale fazer um pequeno comentário aqui: na definição de limite consideramos que os limites à esquerda e à direita são iguais. Isto é, se considerarmos apenas os pontos à direita de a na definição de limite (isto é, os valores de x com $x>a$), teremos o limite à direita de f em a, denotado por $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Da mesma maneira, o limite à esquerda é denotado por $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$. Formalmente, dizemos que o **limite à direita** de *f* em *a* é igual a *L*, e escrevermos $\lim_{x\to a^+} f(x)$ se, dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existir $\delta>0$ tal que, se *x* pertencer a *A* com $x\in(a,a+\delta)$, tivermos $|f(x)-L|<\varepsilon$. Isto é, tomamos apenas valores de *x* maiores que a na definição de limite. Analogamente, o limite à esquerda de *f* em a é igual a *L*, e escrevermos $\lim_{x\to a^-} f(x)$ se, dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existir $\delta>0$ tal que, se *x* pertencer a *A* com $x\in(a-\delta,a)$, tivermos $|f(x)-L|<\varepsilon$. Isto é, tomamos apenas valores de *x* que são menores que *a*.

Os limites à esquerda e à direita são chamados de **limites laterais**. Para que o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ exista é então necessário que os limites laterais à esquerda e à direita também existam, e que sejam iguais, como podemos ver da definição de limite. Essa condição também é suficiente, o que segue direto da definição. Assim, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existirá se, e somente se, seus limites laterais existirem e forem iguais.

Vale um último comentário sobre limites no infinito. Do mesmo modo que feito para sequências na Seção 2.1, é possível definir os limites de funções quando $x\to\infty$ ou $x\to-\infty$. Essa construção pode ser encontrada em diversos livros de análise, como os citados nas referências ao final da seção.

Saiba mais

Nesta seção tratamos da definição e das principais propriedades dos limites de funções. No entanto, o assunto merece maior atenção, pois tanto os conceitos quanto as técnicas de demonstração envolvidas são um dos pilares da Análise Matemática. Dito isso, vale muito a pena um estudo mais aprofundado desse assunto. Um tratamento conciso, porém completo, pode ser encontrado no capítulo 6, p. 63-74, da seguinte referência:

LIMA, Elon. **Análise Real**. V. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Outras referências dadas no final da seção merecem também ser consultadas, tanto para ver exemplos quanto para a apresentação de demonstrações alternativas e de conceitos adicionais.

Terminamos assim esta seção, tendo visto os principais resultados sobre limites de funções. Na próxima seção estudaremos a continuidade de funções, um dos principais assuntos da análise. Aprender nunca é demais, e o tempo despendido no aprendizado de um assunto não é um gasto, mas sim um investimento.

Sem medo de errar

Lembremos de que, como contexto de aprendizagem, você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos.

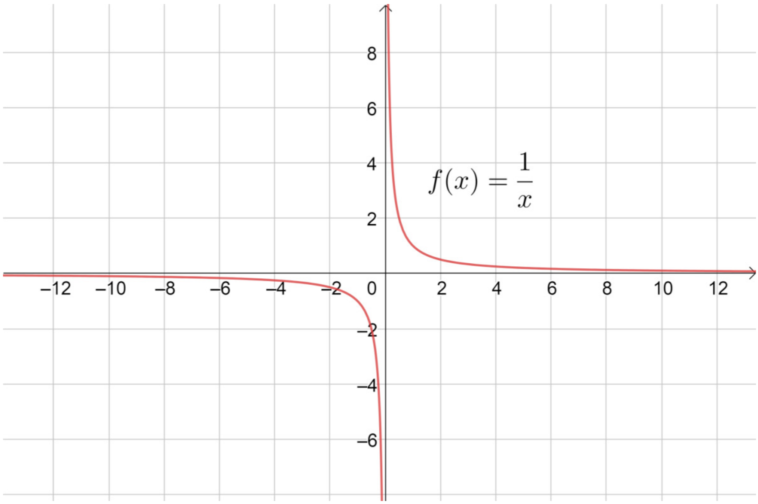
Neste segundo encontro você deverá apresentar situações reais para as quais são aplicados os limites no infinito e limites infinitos. O curso deve também fornecer o ferramental teórico para o entendimento desses dois conceitos, e não apenas para o cálculo de exemplos específicos. Para a introdução desses tópicos é necessário então que, antes você discorra sobre os principais resultados sobre limites apresentados ao longo da seção, fornecendo assim o arcabouço teórico que permitirá esse próximo avanço.

Vamos relembrar a definição de limite: escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ quando, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, tivermos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Mas podemos tomar $a = \infty$? E $L = \infty$? Infinito não é um ponto da reta, de modo que não faz sentido escrever $a = \infty$. Se mantivéssemos a definição usual de limite, o que significaria $0 < |x - \infty| < \delta$?

Bom, vemos então a quantidade de problemas que podem aparecer ao tentarmos utilizar a definição usual de limite para tratar o infinito. Vamos primeiro considerar o caso em que o limite da função é infinito. Não podemos escrever $L = \infty$, mas podemos nos basear na definição de limites infinitos dada para sequências na Seção 2.1: o limite de uma sequência (x_n) é infinito, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, se dado $K > 0$, existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_0$, valer $x_n > K$. Assim, podemos adaptá-la da seguinte maneira para funções: seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é **infinito**, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ quando, dado $K > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que, se x pertencer a A com $0 < |x - a| < \delta$, tivermos $f(x) > K$. Note que nesse caso o ponto a não pode pertencer ao domínio da função, isto é, é necessário que $a \notin A$. Uma definição análoga pode ser dada para $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, impondo que tenhamos $f(x) < -K$. Também podemos falar de limites laterais, assim como no caso usual apresentado no texto da seção.

Um exemplo de limite infinito é a função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$, ilustrada na Figura 3.4.

Figura 3.4 | Gráfico da função: $f(x) = 1/x$



Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos no gráfico da função as seguintes propriedades, que podem ser mostradas rigorosamente a partir da definição: o limite lateral à esquerda em $a = 0$ é menos infinito, enquanto o limite à direita é mais infinito. Logo, não existe o limite da função em $a = 0$ (nem no sentido usual nem no sentido de limites infinitos). Vale a pena graficar o caso de uma função ligeiramente modificada, $f(x) = 1/|x|$ para $x \neq 0$, e fazer a mesma análise: existe o limite em $a = 0$?

Vale a pena comentar também brevemente sobre limites no infinito. Dizemos que o limite da função f quando x tende a infinito é igual a L, e escrevemos $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ quando dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existir $K>0$ tal que, se x pertencer ao domínio de f com $x>K$, tivermos $|f(x)-L|<\varepsilon$. Uma definição análoga pode ser dada para $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Como exemplo, podemos tomar o caso da função graficada na Figura 3.4, $f(x)=1/x$ para $x\neq 0$. Nesse caso, vemos do gráfico (e é saudável demonstrar isso rigorosamente por meio da definição) que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

Uma boa referência complementar para a preparação do material é Lima (2016b), capítulo VI, seção 4, no qual podem ser encontrados diversos exemplos e propriedades de limites infinitos e limites no infinito.

Avançando na prática

Teorema do sanduíche

Descrição da situação-problema

Em sala de aula, durante a apresentação do teorema da permanência do sinal, um aluno perspicaz pergunta se é possível adaptá-lo para o caso em que f está limitada por outras duas funções com limite conhecido. Isto é, se é possível afirmar algo sobre funções nos mesmos moldes do que foi feito para sequências no teorema do sanduíche (teorema 2.5). Lá, lembra o aluno, tínhamos três sequências (x_n), (y_n) e (z_n) tais que $\lim x_n = \lim z_n = L$, com $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n. A conclusão era de que $\lim y_n = L$. A pergunta do aluno é: Existe um análogo para funções, já que estamos na maioria das vezes generalizando e adaptando os resultados obtidos para sequências? O que você responderia ao aluno?

Resolução da situação-problema

De fato, existe um resultado do tipo, que também se chama "teorema do sanduíche". Podemos então dizer que existe um teorema do sanduíche para sequências e outro para funções. Mas não vale apenas dizer que existe, tem que enunciar o teorema. E não vale parar no enunciado; num curso de análise, é preciso demonstrar o teorema.

O teorema diz o seguinte (LIMA, 2016b, p. 198):

Teorema 3.14 (teorema do sanduíche): Sejam $f: A\to\mathbb{R}$, $g: A\to\mathbb{R}$,

$h: A \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Suponhamos que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in A$ e que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{h}(x) = L$. Então existe o limite de g quando x tende a a, dado por $\lim_{x \to a} \mathrm{g}(x) = L$.

Dem. A demonstração pode ser encontrada em Lima (2016b, p. 198). Vale a pena estudá-la e apresentá-la ao aluno passo a passo.

Faça valer a pena

1. Considere a função módulo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \ge 0$ e $f(x) = -x$ se $x < 0$. Queremos mostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Para isso, vamos utilizar o conceito de limites laterais. Temos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, pois f restrita ao semieixo positivo é a função identidade, mas também $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, pois $|x - 0| = |x| = |-x|$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$, dado por $\delta = \varepsilon$, tal que, se $0 < |x| < \delta$, então _______. Segue então também que $|-x| < \varepsilon$, isto é, $|f(x) - 0| < \varepsilon$ para todo x com $0 < |x| < \delta$.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna:

a) $|x| < \delta$

b) $|x| < \varepsilon$

c) $x < \varepsilon$

d) $x < \delta$

e) $-x < \varepsilon$

2. Vamos mostrar o seguinte resultado: se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, então esse limite é único. Para isso suponha, nos mesmos moldes do teorema 3.10, que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = M$, com L e M distintos. Mas, pela definição de limite no infinito, isso nos diz que existem $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que, se $x > K_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ e se $x > K_2$ então $|f(x) - M| < \varepsilon$. Vamos então escolher um valor específico de ε, isto é, $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$. Então, temos que se _______, existe b no domínio da função com _______. Segue pela desigualdade triangular que $|L - M| \le |L - f(b)| + |M - f(b)|$, e portanto _______ implica $|L - M| < 2\varepsilon$. Mas como $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$ isso implicaria

$|L-M|<|L-M|$, o que é uma contradição. Assim, o teorema está demonstrado.

Assinale a alternativa que preenche corretamente todas as lacunas:

a) $K=\max\{K_1,K_2\}$; $b<K$; $b<K$
b) $K=\min\{K_1,K_2\}$; $b>K$; $b>K$
c) $K=\max\{K_1,K_2\}$; $b>K$; $b>K$
d) $K=\max\{K_1,K_2\}$; $b>K$; $b<K$
e) $K=\min\{K_1,K_2\}$; $b>K$; $b=K$

3. Vamos demonstrar aqui a recíproca do teorema 3.11: se toda sequência (x_n) convergente com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ for tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. Para isso, utilizaremos a demonstração pela contrapositiva: suponha que exista uma sequência (x_n) com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ mas tal que não tenhamos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$. Isso significa que existe $\varepsilon>0$ tal que, para todo $M_0\in\mathbb{N}$, exista $n>M_0$ com ______. Mas, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, para todo $\delta>0$ existe $K_0\in\mathbb{N}$ tal que, se $k>K_0$, então ________. Assim, fazendo $N_0=\max\{M_0,K_0\}$ para cada $\delta>0$, existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe no domínio de f tal que $|y-a|<\delta$ mas ________, de modo que não podemos ter $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ (para isso, basta tomar $y=x_{N_0+1}$ pra cada $\delta>0$ escolhido). Assim está provada a recíproca.

Assinale a alternativa que preenche corretamente todas as lacunas:

a) $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$; $|x_k-a|<\delta$; $|f(y)-L|\geq\varepsilon$
b) $|f(x_n)-L|<\varepsilon$; $|x_k-a|<\delta$; $|f(y)-L|\geq\varepsilon$
c) $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$; $|x_k-a|<\varepsilon$; $|f(y)-L|<\varepsilon$
d) $|f(x_n)-L|<\varepsilon$; $|x_k-a|<\varepsilon$; $|f(y)-L|\geq\varepsilon$
e) $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$; $|x_k-a|<\delta$; $|f(y)-L|<\varepsilon$

Funções contínuas

Diálogo aberto

A continuidade está presente em diversas situações do nosso cotidiano, por exemplo, se um motorista começa a acelerar um carro, cuja velocidade aumenta de 0 até 100 km/h, o valor do ponteiro de velocidade então terá que passar por todos os valores de velocidade de 0 a 100, sem pular nenhum. Se estamos desenhando uma figura no papel, cada traço da caneta (feito mantendo o contato com o papel) será uma curva contínua. Conforme se enche um copo com água, o volume de água presente no copo variará continuamente no tempo.

Com esses exemplos será que já conseguimos definir o que é uma função contínua? Como ganhar intuição sobre continuidade com base no que é conhecido do cotidiano e como traduzir isso matematicamente? Essas e outras perguntas serão o tema desta seção. Do ponto de vista matemático, o estudo de continuidade de funções é um dos pilares da análise matemática, assim como de outras áreas como a topologia (que além dos conceitos introduzidos na Seção 3.1 está fora do escopo deste livro).

Lembremos de que, como contexto de aprendizagem, você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos.

Neste terceiro encontro você deve, a partir do conceito de limite de uma função, apresentar intuitivamente o conceito de continuidade e dar sua formulação rigorosa. Uma maneira de entender melhor o conceito de continuidade é apresentando exemplos de funções descontínuas. Apresente esses exemplos de funções e desenhe seus gráficos. Dê exemplos do cotidiano que podem ser modelados como funções descontínuas, como o caso de ligar e desligar um interruptor. Obtenha a expressão formal e grafique as funções que modelam esses exemplos. Apresente formalmente a definição de uma função ser descontínua em um ponto, utilizando os conceitos de lógica matemática.

Para isso veremos nesta seção a definição de função contínua e as suas principais propriedades, fazendo sempre que possível a ligação com as propriedades de limites de funções vistas na seção anterior. A seção culminará com o teorema do valor intermediário, que faz afirmações bastante interessantes sobre uma função contínua num intervalo fechado.

Nunca é demais aprender. O conhecimento sempre vale a pena. Bons estudos!

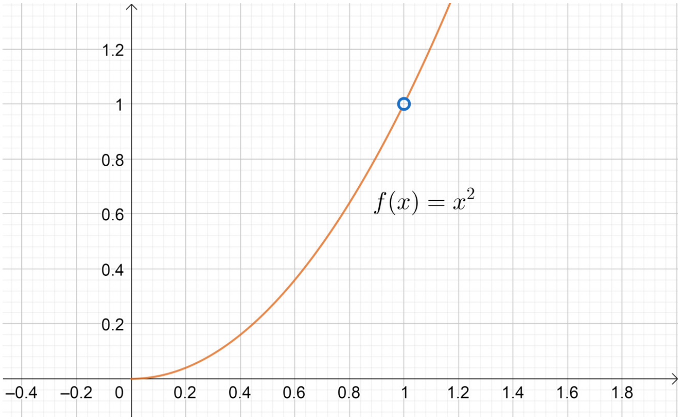
Não pode faltar

Vimos na seção anterior o conceito de limite de uma função a valores reais. Estudamos os principais resultados sobre limites, assim como a relação entre limites e vizinhanças de um ponto (a definição matemática de limite por meio de ε e δ). O conceito de limite de uma função envolve diretamente a noção de ponto de acumulação, o qual pode ou não pertencer ao domínio da função. O que acontece nesse ponto se ele pertence ao domínio da função, isto é, se a função está definida no ponto em que é calculado seu limite? Trataremos desse assunto nesta seção.

Assim, consideramos uma função $f: A \to \mathbb{R}$ e supomos que a seja um ponto de acumulação do conjunto $A \subset \mathbb{R}$, e requeremos também que $a \in A$. Ou seja, isso significa que é possível avaliar (se existe ou não) o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, e que *f(a)* está definido. Surge então uma pergunta natural, nesse contexto: suponhamos que exista o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, qual então a relação entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e *f(a)*? Essa pergunta nos leva à definição de continuidade de uma função, como veremos no que segue.

Intuitivamente, a continuidade de uma função no ponto a significa que o gráfico da função não sofrerá nenhum "pulo" no ponto *a*, isto é, que, desenhando o gráfico com um lápis, nunca o tiraremos do papel, formando assim uma linha contínua. Por exemplo, na Figura 3.5, $f: A \to \mathbb{R}$ com $A = [0,1) \cup (1,\infty)$ e $f(x) = x^2$ para todo $x \in A$, note que a função está definida em todos os pontos da reta menos em $a = 1$. Vamos definir agora o valor da função em $a = 1$ para que, nesse nosso contexto intuitivo, a função seja contínua nesse ponto. Olhando a Figura 3.5, vemos que a única maneira de desenhar o gráfico da função sem tirar o lápis do papel é fazendo $f(1) = 1$. Qualquer outro valor de *f*(*1*) faria com que precisássemos tirar o lápis do papel para desenharmos o ponto.

Figura 3.5 | $f: A \to \mathbb{R}$ com $A = [0,1) \cup (1,\infty)$ e $f(x) = x^2$ para todo $x \in A$



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos então à definição matemática. Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e seja um ponto $a \in A$. Dizemos que f é **contínua no ponto *a*** se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ com $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (LIMA, 2016a, p. 75). Se f não for contínua no ponto a, dizemos que f é **descontínua** em a. Se f for contínua em todo ponto $a \in A$, então dizemos que f é **contínua no conjunto *A***.

A definição que acabamos de apresentar, formaliza matematicamente a noção intuitiva de continuidade apresentada anteriormente. Notamos que a definição de continuidade é local: o fato de f ser ou não contínua em a depende apenas de seu comportamento nas vizinhanças arbitrariamente pequenas de a.

Assimile

Vale ressaltar que é necessário que $a \in A$, para que o valor da função $f: A \to \mathbb{R}$ esteja definido. Se a for um ponto de acumulação de A, então a definição de continuidade é equivalente a dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Mas, pela definição dada, não é necessário que a seja um ponto de acumulação de A. De fato, suponhamos que a não seja um ponto de acumulação de A (mas mantemos a hipótese de que $a \in A$). Então existe $\delta > 0$ tal que $A \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$ (veja se concorda com a escrita matemática dessa negação).

Um ponto $a \in A$ com essa propriedade é dito **ponto isolado** de A, pois existe uma vizinhança que não contém nenhum outro ponto de A: a vizinhança

$(a-\delta, a+\delta)$ "isola" o ponto a do resto do conjunto. Vemos então que a definição da continuidade de *f* em a é automaticamente satisfeita: dado que não existe nenhum ponto de *A* que seja diferente de a no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, a condição "se $x \in A$ com $|x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$" é satisfeita trivialmente. Isso porque não existe nenhum $x \in A$ com essa propriedade, caso esse em que dizemos que a afirmação é satisfeita por **vacuidade**. Para mais detalhes, ver Lima (2016b, p. 222-223), ou Lima (2016a, p. 75-76).

Vemos então, no caso em que o ponto $a \in A$ ser ponto de acumulação de *A*, as propriedades de funções contínuas carregarão consigo muito das propriedades dos limites de funções vistos na seção anterior. Assim, é possível estender a maioria dos resultados sobre limites para resultados sobre funções contínuas. Mais ainda: se os teoremas disserem respeito a uma vizinhança do ponto $a \in A$, então o caso em que o ponto *a* é isolado será facilmente englobado no resultado. Veremos a seguir alguns teoremas que seguem diretamente, ou quase diretamente dos respectivos teoremas para limites de funções, e mencionaremos as semelhanças e diferenças entre os dois casos quando pertinente. Em particular, os resultados sobre as operações de adição, subtração multiplicação e divisão são diretamente traduzidos dos respectivos casos para limites de funções, assim como as relações entre limites e sequências. Informalmente falando, bastaria substituir $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nas demonstrações por $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou, em outras palavras, substituir as constantes que definem os limites pelos valores das respectivas funções em *a*.

Tentaremos ao máximo seguir a lógica do capítulo anterior, para podermos fazer uma comparação mais direta dos resultados. O teorema 3.10 nos diz que se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então esse limite é único. Se *f* for contínua em *a*, então o valor desse limite é único e é igual a *f(a)*. Vejamos agora um importante resultado, que relaciona as propriedades das sequências (x_n) tais que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ com as propriedades das sequências correspondentes $(f(x_n))$ quando *f* é contínua em *a*. Essa é a extensão para funções contínuas do teorema 3.11 (e de sua recíproca). Argumentos semelhantes são utilizados em livros como Lima (2016a), Lima (2016b) e Figueiredo (1996) para as demonstrações dos teoremas a seguir.

Teorema 3.15: Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in A$. Então, para toda sequência (x_n) em *A* com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ teremos que a sequência $(f(x_n))$ convergirá para *f(a)*. Reciprocamente, se toda sequência (x_n) em *A* com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ for tal que a sequência $(f(x_n))$ converge para f(a), então f será contínua em *a*.

Dem. Vemos que o enunciado desse teorema é bastante parecido com o do teorema 3.11 (e de sua recíproca). Vemos isso substituindo no teorema 3.11, e em sua demonstração, $\lim_{x\to a} f(x)=L$ por $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$ por $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$; ou seja, substituímos L por $f(a)$. Vale a pena adaptar a demonstração do teorema 3.11 para obter a demonstração deste teorema, seguindo as recomendações acima. Sugerimos que faça isso antes de acompanhar a demonstração dada a seguir, que é exatamente essa adaptação mencionada (para a primeira afirmação do teorema; para a recíproca, sugerimos rever o box *Reflita* da seção anterior):

Consideremos a definição de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dado $\delta>0$, existirá $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n>N_0$, então $|x_n - a|<\delta$. Vamos então escrever a definição de continuidade de f em a. Dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existe $\delta>0$ tal que, se x pertencer a A com $|x-a|<\delta$, temos $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Dessa forma, vamos fazer a seguinte justaposição: tomemos $\varepsilon>0$. Então existe $\delta>0$ tal que, se x pertencer a A com $|x-a|<\delta$, temos $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Mas para esse $\delta>0$ existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que, se $n>N_0$, então $|x_n-a|<\delta$. Assim, em particular, $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$ para todo $n>N_0$. Reescrevendo os passos acima sem mencionar a quantidade $\delta>0$, temos o seguinte: dado $\varepsilon>0$, existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que, se $n>N_0$, então $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$. Mas isso é justamente a definição de que a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(a)$, isto é, de que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

Vale notar aqui que, se a for ponto isolado do conjunto A, então a única sequência (x_n) de elementos de A que converge para a é a sequência constante (com todos os elementos iguais a a), e nesse caso a sequência $(f(x_n))$ será constante com todos os elementos iguais a $f(a)$. Assim, verificando o que acontece quando o ponto a é isolado, chegamos ao final da demonstração do teorema. □

Assim como feito para o caso de limites, temos uma maneira razoavelmente prática de checarmos se uma função é descontínua no ponto a: basta obter uma sequência (x_n) de elementos de a com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ mas tal que a sequência $(f(x_n))$ não convirja para $f(a)$.

Vejamos agora o análogo do teorema 3.12, o teorema da permanência do sinal. Nesse caso, também basta substituir o valor do limite L por $f(a)$ no enunciado e na demonstração.

Teorema 3.16 (teorema da permanência do sinal para funções contínuas): Seja $f: A\to\mathbb{R}$ contínua em $a\in A$. Suponha que $f(a)>0$. Então existe uma vizinhança de a em que a função f assume apenas valores positivos. Se $f(a)<0$, existirá uma vizinhança de a em que a função f assume apenas valores negativos.

Dem. A demonstração segue os mesmos moldes da demonstração do teorema 3.12, como mencionado. É deixado como sugestão utilizar a definição de continuidade de *f* em *a* para adaptar a demonstração do teorema 3.12 até chegar ao resultado deste teorema. □

Lembramos que, como no caso de limites, a vizinhança do teorema acima não precisa ser um intervalo simétrico, apesar de poder ser escolhida como $(a-\delta, a+\delta)$ para algum $\delta>0$ adequado.

Veremos agora como que os resultados sobre adição, multiplicação e divisão de limites são "transportados" para as propriedades da adição, multiplicação e divisão de funções contínuas. A existência dos limites se traduz na continuidade das respectivas funções, como vemos no teorema a seguir (FIGUEIREDO, 1996, p. 62-63).

Teorema 3.17: Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ ambas contínuas em $a \in A$. Então as funções $f+g$, $f \cdot g$ e f/g, definidas respectivamente por $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$ e $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ são contínuas em *a*. No caso da divisão, f/g será contínua em *a* se $g(a) \neq 0$.

Dem. Os resultados sobre as operações aritméticas com limites estão enunciados e demonstrados no teorema 3.13. Basta notar então que, sendo *f* e *g* contínuas em *a*, seus limites existem em *a*. Podemos então aplicar o teorema 3.13 fazendo $L=f(a)$ e $M=g(a)$. Assim, o teorema está demonstrado. □

Exemplificando

Vamos ver exemplos de funções contínuas lançando mão do teorema 3.17. Primeiramente, vamos considerar as propriedades da função identidade $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $id(x)=x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que a função identidade é contínua para todo $a \in \mathbb{R}$. Sabemos que todo ponto $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$. Assim, pela definição de continuidade, temos que mostrar que $\lim_{x \to a} id(x)=id(a)=a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Para isso tomemos $\varepsilon>0$. Então existe $\delta>0$ dado por $\delta=\varepsilon$ tal que se $|x-a|<\delta$, então $|id(x)-id(a)|=|x-a|<\varepsilon$. Mostramos assim, como esperado, que a função identidade é contínua em todo ponto da reta.

Dessa forma, como pelo teorema 3.17 o produto de funções contínuas é também uma função contínua, segue que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2=x \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ também é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Repetindo esse procedimento, vemos que a função $x \mapsto x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo expoente n natural.

Como a adição e subtração de funções contínuas é também uma função contínua, vemos que todo polinômio $p(x)a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Também, a divisão de funções contínuas é uma função contínua em todo ponto em que o denominador é não-nulo. Segue portanto, que $1/x$ é contínua para todo $x \neq 0$. Multiplicando a função $1/x$ n vezes temos que $1/(x^n)$ é contínua para todo $x \neq 0$. Somando termos no denominador, vemos que toda função racional (quociente de polinômios) é uma função contínua em todos os pontos tais que o denominador não se anula.

Um outro exemplo de função contínua é a função módulo (valor absoluto) $x \mapsto |x|$. Vimos na seção anterior que $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$. Como $|0| = 0$, temos que $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0|$ e, portanto, a função módulo é contínua em $a = 0$. Mas para $x > 0$ temos $|x| = x$ e para $x < 0$ temos $|x| = -x$, de forma que a função módulo é contínua em toda a reta.

Segue dos teoremas anteriores o seguinte teorema (LIMA, 2016a, p. 76), que relaciona o comportamento de duas funções na vizinhança de um ponto a em que são contínuas:

Teorema 3.18: Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ ambas contínuas em $a \in A$, com $f(a) > g(a)$. Então existe uma vizinhança V de a tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in A \cap V$.

Dem. Pelo teorema 3.17, a função $h : A \to \mathbb{R}$ definida por $\mathrm{h}(x) = f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$ é contínua em *a*. Também, $h(a) > 0$. Estamos então nas hipóteses do teorema 3.16 e portanto, existe uma vizinhança *V* de *a* em que *h* assume apenas valores positivos. Como $\mathrm{h}(x) = f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$, segue que $f(x) > g(x)$ para todos os pontos *x* na vizinhança *V* de *a*, isto é, $f(x) > g(x)$ para todo $x \in A \cap V$, demonstrando assim o teorema. □

Faça você mesmo

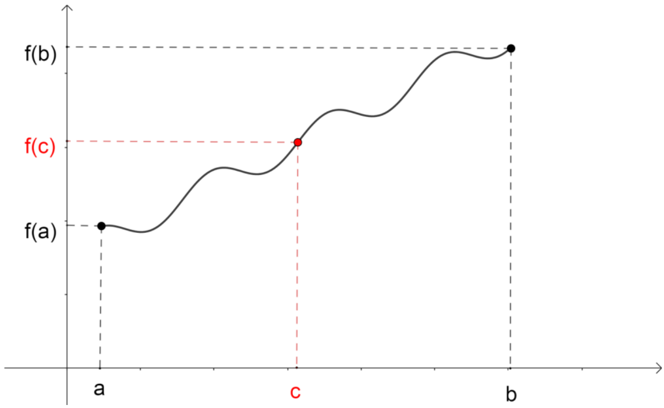
As funções contínuas têm a seguinte propriedade topológica: a imagem inversa de abertos por funções contínuas é sempre um conjunto aberto. Ou seja: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e B é um aberto na imagem de *f*, então $A = f^{-1}(B)$ é um conjunto aberto no domínio de *f*. Em particular, podemos ver o que acontece com a imagem inversa de um intervalo aberto. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 3.19: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e seja *B* o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}; c < f(x) < d\}$. Ou seja, em notação de conjuntos, $B = f^{-1}(c,d)$, então *B* é um conjunto aberto. Mais ainda, *B* é um intervalo da reta.

Dica: É aconselhável fazer a demonstração partindo da definição de função contínua, utilizando ε e δ. A demonstração pode ser encontrada em Lima (2016a, p. 76), ou em Lima (2016b, p. 225). Mas é aconselhável tentar demonstrar primeiro sem consultar os livros e, se tiver dificuldades, aí sim consultá-los.

Vamos considerar agora uma função contínua em um intervalo fechado, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Temos o seguinte resultado, extremamente importante (e intuitivo): Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$, com $f(a)<f(b)$ por exemplo, então teremos que para todo y, tal que, $f(a)<y<f(b)$ existirá $c\in[a,b]$ tal que $y=f(c)$. Isso pode ser exemplificado na Figura 3.6. Se f for contínua em $[a,b]$, não é possível "tirar o lápis do papel" ao desenhar o gráfico da função, de maneira que se $f(a)<f(b)$ o gráfico de f deverá passar por todos os valores y tais que $f(a)<y<f(b)$. Esse resultado é chamado de "teorema do valor intermediário".

Figura 3.6 | Ilustração do teorema do valor intermediário



Fonte: elaborada pelo autor.

Teorema 3.20 (teorema do valor intermediário): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$, com $f(a)<f(b)$,então para todo y tal que $f(a)<y<f(b)$ existirá $c\in[a,b]$ tal que $y=f(c)$.

Dem. Veja Lima (2016b, p. 234-245) para duas demonstrações diferentes deste teorema. □

Reflita

Suponha agora que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ seja contínua em (a,b) e que $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$, $\lim_{x\to b^-} f(x)=M$. Se $L<M$, o que se pode dizer sobre o

comportamento dos valores *f* entre *L* e *M*? É possível adaptar o teorema do valor intermediário a esse caso? Se sim, o que mudaria? Como ficaria o enunciado do novo teorema?

Terminamos assim a Unidade 3. Muito foi aprendido até aqui, tenha a certeza de que os estudos valeram a pena!

Saiba mais

O assunto de funções contínuas não acaba aqui; há vários outros conceitos que podem ser introduzidos e que valem a pena serem estudados. Um teorema bastante importante é o Teorema de Weierstrass, que diz o seguinte:

Teorema 3.21 (teorema de Weierstrass): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$. Então *f* atinge máximo e mínimo em $[a,b]$.

Para uma apresentação concisa desse e de outros conceitos sugerimos o capítulo 7, páginas 75 a 86 da referência a seguir:

LIMA, Elon. **Análise Real**. Vol. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Sem medo de errar

Lembremos de que, como contexto de aprendizagem, você foi contratado para construir um curso de formação continuada para professores de matemática de ensino médio que deve abordar limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos.

Neste terceiro encontro você deve, a partir do conceito de limite de uma função, apresentar intuitivamente o conceito de continuidade e dar sua formulação rigorosa. Além disso, uma possível abordagem é comentar sobre o que é uma função descontínua, dando sua definição rigorosa, e apresentando diversos exemplos.

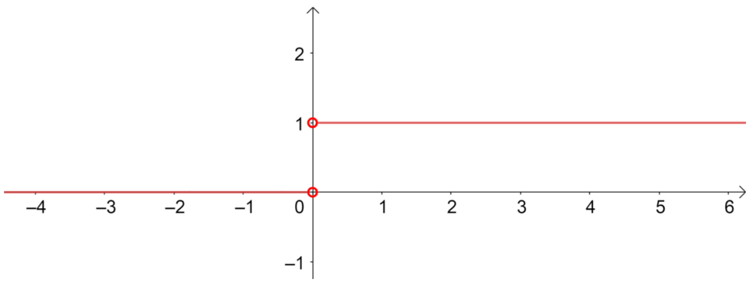
Lembrando a definição de função contínua, dizemos que $f:A\to\mathbb{R}$ é **contínua** no ponto $a\in A$ se, dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existir $\delta>0$ tal que se $x\in A$ com $|x-a|<\delta$ então $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ (LIMA, 2016a, p. 75). Se *f* não for contínua no ponto *a*, dizemos que *f* é **descontínua** em *a*. Assim, utilizando a negação de *f* ser contínua, dizemos que:

A função $f:A\to\mathbb{R}$ será então descontínua no ponto $a\in A$ se existir $\varepsilon>0$ tal que, para todo $\delta>0$, existirá $y\in A$ com $|y-a|<\delta$ mas tal que $|f(y)-f(a)|\geq\varepsilon$.

A partir dessa definição, vale a pena apresentar uma situação do cotidiano, por exemplo, a velocidade de um carro em função do tempo ou o volume de água numa represa em função do tempo (variações contínuas de grandezas em função do tempo sempre são ótimos exemplos) e discutir a relação com o gráfico de uma função contínua definida num intervalo. Conforme x fica arbitrariamente próximo de a, *f(x)* ficará arbitrariamente próximo de *f(a)*. Isso significa que, ao desenhar o gráfico da função com um lápis no plano cartesiano, não podemos tirar o lápis do papel. O gráfico da função será então uma linha contínua, no sentido que estamos acostumados a lidar no dia a dia. Já para desenhar o gráfico de uma função definida num intervalo que é descontínua em algum ponto, é preciso tirar o lápis do papel para que possamos "pular" para o valor da função nesse ponto (ou vindo da esquerda, ou vindo da direita, ou de ambos os lados).

Já no caso em que a função não é definida no intervalo todo (por exemplo, está definida em todo o intervalo menos um ponto), precisamos tirar o lápis do papel nesse ponto, para "pulá-lo" e continuar desenhando o gráfico da função. Isso acontece, por exemplo, quando o movimento de um objeto cessa bruscamente (por exemplo quando ocorre um acidente, em que um carro se choca com uma parede). No entanto, não é necessário apenas andar com o lápis para o lado para que a função permaneça contínua: ela pode ter limites laterais diferentes à esquerda e à direita. Isso pode ser visto na "função degrau" definida como $f(x)=0$ para $x<0$ e $f(x)=1$ para $x>0$. O gráfico dessa função pode ser visto na Figura 3.7.

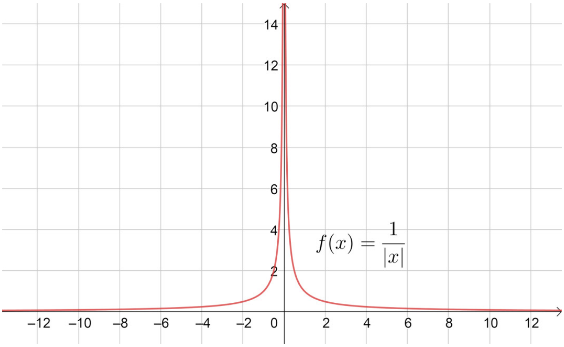
Figura 3.7 | gráfico da função degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, mesmo que os limites laterais nesse ponto sejam infinitos, ainda assim a função pode ser contínua em todo o seu domínio. Um exemplo é a função $f(x)=1/|x|$ definida para $x\neq 0$ (o domínio é então a reunião disjunta de dois intervalos abertos, e a função não está definida em $x=0$). O gráfico dessa função pode ser visto na Figura 3.8, onde vemos que os limites laterais em $x=0$ de $f(x)=1/|x|$ são ambos infinitos. Mesmo assim, a função é contínua para todo $x \neq 0$, devido ao teorema 3.17 sobre as operações com funções contínuas.

Figura 3.8 | gráfico da função $f(x)=1/|x|$



Fonte: elaborada pelo autor.

Já se a função estiver definida em um intervalo menos um ponto *c*, for contínua em todos os pontos de seu domínio e tiver os limites laterais iguais no ponto em que não estiver definida, pode-se definir a extensão contínua dessa função adotando $f(c)=\lim_{x \to c} f(x)$.

Esses exemplos podem ser incorporados à apresentação sobre descontinuidades para seus alunos, e você pode instigá-los a sugerir e discutir outros exemplos (tanto de funções contínuas quanto descontínuas). Procure outros exemplos, vale a pena estudar a seção de descontinuidades de Lima (2016b, p. 229-234) para ajudar a enriquecer a aula. Assim, os principais conteúdos do curso foram cobertos (limites, continuidade de funções, limites no infinito e limites infinitos), e você pode considerar sua missão cumprida.

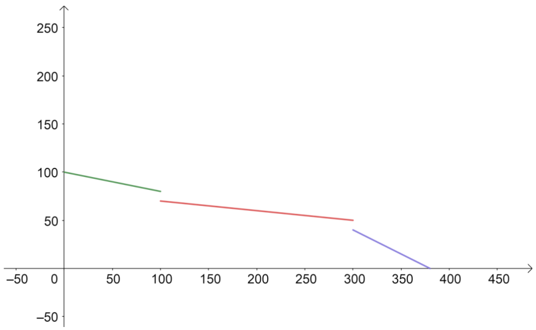
Avançando na prática

Perícia de acidente veicular

Descrição da situação-problema

Você foi contratado como perito criminal e está atualmente trabalhando com um acidente veicular em que o carro sofreu diversas batidas enquanto o motorista freava. Analisando as marcas de frenagem, você obtém um gráfico da velocidade do carro em função do tempo. O gráfico mostra uma sobreposição de funções contínuas com funções degrau, como na Figura 3.8.

Figura 3.8 | Gráfico de frenagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você interpreta as regiões de continuidade e descontinuidade desse gráfico?

Resolução da situação-problema

As regiões de continuidade são fáceis de se interpretar: são os intervalos de tempo em que o motorista está com o pé no freio tentando parar o carro. Já as descontinuidades, por sua vez, representam as batidas que o carro sofreu: bater o carro significa sofrer uma força de impacto, isto é, sofrer uma aceleração (negativa) brusca, o que implica uma redução brusca da velocidade. Quanto mais forte a batida, mais essa queda na velocidade aparecerá como um ponto de descontinuidade do gráfico.

Faça valer a pena

1. Temos o seguinte resultado: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in A$. Então f é limitada em uma vizinhança de A. Em particular, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $A \cap (a-\delta, a+\delta)$. Para mostrar isso, notamos que, pela definição da continuidade de f em a, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ com $|x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon = 1$, segue que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ com $|x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < 1$, isto é, __________ e portanto é limitada.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $f(x) \in [f(a)-1, f(a)+1]$

b) $f(x) \in (f(a)-\delta, f(a)+\delta)$

c) $0 < |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

d) $f(x) \in (f(a)-1, f(a)+1)$

e) $f(x) \in (f(a), f(a)+1)$

2. Vamos demonstrar o seguinte resultado. Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$, limitada e não-decrescente. Então a imagem de *f* é um intervalo fechado da reta. Para isso, nos valemos do teorema do valor intermediário. Como *f* é não-decrescente, temos $f(a) \leq f(b)$. Se $f(a) = f(b)$ então *f* é constante. Supomos então $f(a) < f(b)$. Assim, estamos nas condições do teorema. Segue então que para todo *y* tal que $f(a) < y < f(b)$ existirá $c \in [a,b]$ tal que $y = f(c)$. Isso é equivalente a dizer que __________ está contido na imagem de *f*. Mas como *f* é não-decrescente, *f*(*a*) é o menor valor que *f* atinge e f(*b*) é o maior valor que *f* atinge. Mostramos assim que a imagem de *f* será um intervalo.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $[a,b]$

b) $[f(a), f(c)]$

c) $[f(a), f(b)]$

d) $[a,c]$

e) $[f(b), f(a)]$

3. Considere as seguintes afirmações:

1. A imagem de um intervalo aberto por uma função contínua é um intervalo.
2. A imagem de um intervalo fechado por uma função contínua é um intervalo.
3. A imagem inversa de um intervalo fechado por uma função contínua é um intervalo.
4. Se o conjunto de descontinuidades *D* de uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ for finito, com *f* limitada em $[a,b]-D$, então *f* é limitada.
5. Se o conjunto de descontinuidades *D* de uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ for enumerável, com *f* limitada em $[a,b]-D$, então *f* é limitada.

Qual alternativa abaixo contém todas as afirmações verdadeiras, e somente as verdadeiras?

a) 1, 2, 3.

b) 1, 2, 4.

c) 1, 4, 5.

d) 2, 4, 5.

e)1, 2, 3, 4.

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Introdução à análise matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeito: LTC, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**: Volume 1. 2. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1987.

LIMA, Elon. **Análise real**. V. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016a.

LIMA, Elon. **Curso de análise**. V. 1. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016b.

Unidade 4

A derivada e a integral de uma função

Convite ao estudo

Caro aluno, na unidade anterior tratamos inicialmente de conceitos da topologia da reta, permitindo assim introduzir as noções de limites e continuidade de funções. Nesta unidade, nosso objetivo é utilizar esses conceitos para analisar os dois casos mais interessantes de funções sobre a reta real, estamos falando de funções diferenciáveis e funções integráveis. Como podemos quantificar a variação ou o crescimento de uma função nas vizinhanças de um ponto? O que dá para dizer sobre esse crescimento quando analisamos um intervalo finito da reta? Como podemos avaliar a área sob o gráfico de uma curva? Como todos esses conceitos estão relacionados? Estas e outras perguntas serão respondidas ao longo das seções seguintes.

Como contexto de aprendizagem, suponhamos que você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria. Você atuará junto à equipe contribuindo para manter o rigor dos resultados obtidos por eles e terá de preparar pequenas apresentações sobre os conceitos de análise envolvidos na avaliação dos diferentes problemas que aparecem. Você é deparado com diferentes situações, envolvendo a interpretação de gráficos com base nos conceitos de derivadas e integrais, os quais você precisa explicar de maneira clara para seus colegas de trabalho para que eles possam usufruir dos resultados da melhor maneira possível.

Para cumprir sua missão, a primeira seção desta unidade introduz o conceito de derivada de uma função como sua taxa (local) de variação e apresenta sua definição analítica, para em seguida desenvolver os principais resultados decorrentes da definição. Já na segunda seção serão vistas outras aplicações da derivada, como o teorema do valor médio e a análise de máximos e mínimos de uma função. A seção 3, por sua vez, introduz o conceito da integral de uma função como a área sob a curva que representa seu gráfico, e apresenta sua definição formal e principais propriedades analíticas.

Mais do que nunca, é necessário ter persistência neste momento. Os conceitos até aqui desenvolvidos foram construídos cumulativamente, cada vez se baseando nos resultados obtidos até então. E agora não é diferente, todos os conceitos desta unidade se baseiam fortemente no que foi desenvolvido na unidade anterior. Garanto que, no final da unidade, seus esforços terão valido a pena. Bons estudos!

Seção 4.1

Funções diferenciáveis

Diálogo aberto

Atualmente, está cada vez mais comum encontrarmos diversos tipos de sensores que monitoram alguma condição em tempo real (ou quase) em máquinas e equipamentos, ou ainda, softwares que monitoram movimentações financeiras, redes sociais, equipamentos, etc. Esses sensores e softwares geram uma quantidade enorme de dados, o que permite avaliar as variações do objeto em estudo ao longo do tempo. Mas afinal, como avaliar a taxa de crescimento de uma grandeza, quando esta é medida continuamente em função do tempo? Mais especificamente, como avaliar a taxa local de variação de uma função $f : A \to \mathbb{R}$? O que decorre desses conceitos? Veremos a resposta para essas e outras perguntas ao longo desta seção.

Lembre-se de que você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria. Sua primeira missão é explicar o resultado obtido por uma turbina eólica, que ao plotar o gráfico os engenheiros identificam "bicos" e gostariam de entender o porquê desse comportamento. Como você pode explicar esses "bicos"? Que exemplos você pode apresentar para ajudar a compreensão? Como um dos engenheiros gosta de matemática, ele lhe questiona sobre qual seria a derivada da função no ponto do gráfico que possui o "bico". Qual será sua resposta?−Dê um exemplo de uma função na qual aparecem "bicos" e, depois, mostre isso rigorosamente utilizando os conceitos de Análise.

Assim, para isso, veremos ao longo da seção a definição intuitiva (geométrica) da derivada, assim como a definição analítica, rigorosa. Posteriormente, no texto, essas duas visões serão relacionadas, como esperado. Exemplos de funções que possuem e que não possuem derivada em um dado ponto também serão apresentados, assim como técnicas para facilitar os cálculos das derivadas de uma função (regra do produto, regra do quociente) e resultados gerais sobre a diferenciabilidade de funções. Esses assuntos são extremamente interessantes por sua interpretação geométrica e por suas aplicações, de modo que o estudo da seção pode ser muito gratificante. Bons estudos!

Não pode faltar

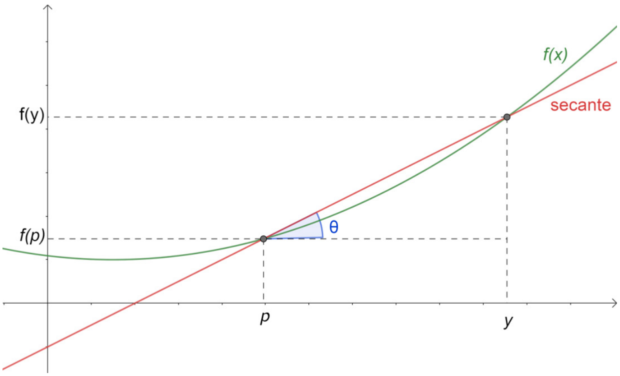
Como medir a taxa de crescimento de uma função? O quão "suave" pode vir a ser uma função contínua? É possível sistematizar essas ideias? Essas e outras perguntas serão respondidas nesta seção.

Vimos na unidade anterior as propriedades dos limites de funções e de funções contínuas. Note que estamos, cada vez mais, introduzindo estruturas mais complexas na análise de funções. Limites dizem respeito ás propriedades de convergência de uma função ao redor de um ponto; a continuidade relaciona os limites com o valor da função no ponto. Já a derivada, assunto desta seção, tem exatamente o papel de responder às perguntas acima: ela "mede" o crescimento local de uma função e sua "suavidade", como veremos.

Intuitivamente, queremos definir uma quantidade que avalie a taxa de variação de uma função ao redor de um certo ponto. Esse conceito tem inúmeras aplicações, sendo uma bastante importante em física: se $x(t)$ for a posição de uma partícula em função do tempo realizando um movimento unidimensional, então sua velocidade será dada pela derivada dessa função. Também, a derivada da função velocidade indicará a aceleração do corpo em função do tempo.

Assim, queremos uma quantidade que seja positiva se a função for crescente ao redor de um ponto, e negativa se for decrescente; se a função for constante, a derivada deve ser nula. Além disso, a derivada de uma função deve ser maior quanto maior for a taxa de crescimento da função, e mais negativa quanto mais negativa for a taxa de variação da função. Um método de avaliar a variação de uma função $f: A \to \mathbb{R}$ em um dado ponto $p \in A$ é por meio da inclinação do segmento de reta que liga dois pontos do gráfico da função, como na Figura 4.1. Dado por exemplo algum $y > x$, queremos avaliar o ângulo definido por $\tan\theta = \dfrac{f(y) - f(p)}{y - p}$. Esse ângulo mede, aproximadamente, a taxa de variação da função f nas vizinhanças do ponto p: quanto mais próximo y estiver de p, melhor será essa estimativa (ver por exemplo Guidorizzi (1987, p. 154-155).

Figura 4.1| Variação de *f* em *p*



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos, então, à definição formal. Tomemos uma função $f : A \to \mathbb{R}$ e seja p um ponto interior de A, $p \in \operatorname{int}(A)$. Pela definição de ponto interior, existe $\lambda > 0$ tal que $(p - \lambda, p + \lambda) \subset A$. Então, em particular, é possível calcular o limite da função no ponto p (caso ele exista), e também é possível verificar as propriedades de continuidade de f no ponto p e em sua vizinhança. Assim, definimos a **derivada de *f* no ponto *p***, denotada por $f^{l}(p)$, pela expressão:

$$f^{l}(p) = \lim_{y \to p} \frac{f(y) - f(p)}{y - p},$$

(lê-se "f linha de p"), quando esse limite existe. Nesse caso, dizemos que f é **diferenciável** (ou **derivável**) em p. Se A for aberto e f for diferenciável em todo $p \in A$, então dizemos que f é **diferenciável em *A*** (GUIDORIZZI, 1987). Geometricamente, então, isso equivale a trazer o ponto y cada vez mais próximo de p na Figura 4.1, de modo que a reta secante se aproxima da reta tangente ao gráfico da função no ponto p. Notamos que, por ser definida como um limite, se a derivada de uma função existe em algum ponto, então ela é única.

Dada a definição acima, é importante fazer um comentário sobre as hipóteses adotadas. Vale ressaltar que todo o desenvolvimento da teoria de funções diferenciáveis pode ser feito considerando, não apenas pontos no interior de um conjunto, mas sim considerando qualquer ponto de acumulação que esteja contido no conjunto (como foi feito no caso de funções contínuas), visto que a derivada é essencialmente um limite. No entanto, a essência dos resultados é a mesma ao considerar um caso ou o outro. Por simplicidade, e para facilitar a interpretação geométrica e visual dos resultados, supomos então que estamos calculando a derivada apenas em pontos interiores ao domínio da função, isto é, apenas nos pontos p, tais que $(p - \lambda, p + \lambda) \subset A$ para algum $\lambda > 0$. Para a análise do caso mais geral, em que p é um ponto de acumulação arbitrário do conjunto A (mas pertencente a A), sem que necessariamente tenhamos $p \in \operatorname{int}(A)$, pode-se consultar Lima (2016b), por exemplo.

Exemplificando

Vamos ver exemplos de funções diferenciáveis e de funções que não são diferenciáveis.

-- A função identidade $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $id(x) = x$ para todo x é diferenciável em toda a reta real, e $id^{l}(p) = 1$ para todo p. De fato, temos $(id(x) - id(p))/(x - p) = 1$ para todo x e todo p.

-- A função módulo é diferenciável em toda a reta, menos na origem $p = 0$. Isso porque, em $p = 0$, temos que avaliar $(|x| - |0|)/(x - 0) = |x|/x$ quando $x \to 0$. Mas $|x|/x = 1$ para $x > 0$ e $|x|/x = -1$ para $x < 0$, de modo que não existe o limite acima.

Vamos demonstrar abaixo um resultado que é esperado e intuitivo, mas que, como em todo curso de análise, precisa ser provado rigorosamente. Temos que, se existe a derivada de *f* em um ponto *p*, então isso significa que a quantidade $|f(x)-f(p)|$ cresce no máximo linearmente com a distância $|x-p|$, nas vizinhanças de *p*. Assim, a variação de *f* nas vizinhanças de *p* não pode ser muito abrupta, e está controlada por $|x-p|$, o que implica que *f* será contínua em *p*. Esse raciocínio leva então ao seguinte resultado (LIMA, 2016b):

Teorema 4.1: Sejam $f:A\to\mathbb{R}$ e $p\in \operatorname{int}(A)$. Se *f* for diferenciável no ponto *p*, então *f* é contínua em *p*.

Dem. Temos que mostrar que *f* é contínua em p, isto é, que $\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$. Note que isso é equivalente a mostrar que $\lim_{x\to p}[f(x)-f(p)]=0$. Mas sabemos que $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=f'(p)$. Como, além disso, $\lim_{x\to p}(x-p)=0$, podemos utilizar o resultado do Teorema 3.13 (apresentado na Seção 3.2), que nos diz que o limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites. Assim, para $x\neq p$, vale $f(x)-f(p)=\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right)\cdot(x-p)$. Tomando o limite $x\to p$, temos:

$$\lim_{x\to p}[f(x)-f(p)]=\lim_{x\to p}\left[\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right)\cdot(x-p)\right]=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right)\cdot\lim_{x\to p}(x-p)=f'(p)\cdot 0=0,$$

e, portanto, *f* é contínua em *p*, completando assim a demonstração. □

Voltando à definição de derivada, vemos que a existência da derivada de $f:A\to\mathbb{R}$ no ponto $p\in\operatorname{int}(A)$ nos diz muito sobre a "velocidade de crescimento" da função *f* nas vizinhanças do ponto *p*. Primeiramente, notamos que o limite que aparece na definição da derivada pode ser reescrito da seguinte forma:

$$f'(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h},$$

o que é obtido escrevendo $y=p+h$. Vamos definir uma "função resto" *r(h)* como o que "sobra" da derivada: $f(p+h)-f(p)=f'(p)\cdot h+r(h)$, com $r(0)=0$. Assim, temos da definição de derivada que $\lim_{h\to 0}[r(h)/h]=0$, isto é, a "função resto" vai a zero mais rápido que h quando $h\to 0$. Temos também o oposto: se existir uma constante *k* e uma função *r(h)* nas vizinhanças de *p* satisfazendo $\lim_{h\to 0}[r(h)/h]=0$ e tal que $f(p+h)-f(p)=k\cdot h+r(h)$, então afirmamos que $k=f'(p)$. De fato, dividindo a expressão toda por *h* e tomando o limite $h\to 0$, a igualdade $k=f'(p)$ segue da hipótese $\lim_{h\to 0}[r(h)/h]=0$. Logo, mostramos que no caso em que existe tal função *r(h)* com as propriedades mencionadas, *f* é diferenciável em *p*. Acabamos então de demonstrar o seguinte teorema (LIMA, 2016a):

Teorema 4.2: Sejam $f:A\to\mathbb{R}$ e $p\in\operatorname{int}(A)$. Suponhamos que exista uma função *r(h)* definida em uma vizinhança de *p*, tal que $\lim\limits_{h\to 0}\left[r(h)/h\right]=0$ e $f(p+h)-f(p)=k\cdot h+r(h)$ para alguma constante *k*. Então, segue que *f* é diferenciável em *p*, com $f'(p)=k$.

Dem. A demonstração está feita no parágrafo anterior ao enunciado do teorema.

Reflita

O que acontece se escrevermos $f(p+h)-f(p)=k\cdot h+r(h)$ com a função *r(h)* tendendo a zero tão rápido quanto *h*, isto é, com $\lim\limits_{h\to 0}\left[r(h)/h\right]=C\neq 0$? Ainda assim a função *f* será diferenciável? Se sim, qual o valor da derivada? Como reescreveríamos a expressão para uma função resto adequada?

Como mais um exemplo, utilizando os conceitos que acabamos de ver, temos que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^n$ para todo *x*, com $n\in\mathbb{N}$, é diferenciável em toda a reta real, com $f'(p)=n\cdot p^{n-1}$ para todo $p\in\mathbb{R}$. Isso não é tão simples de se ver, mas podemos utilizar a definição da derivada em termos da quantidade *h* e expandir o numerador utilizando o binômio de Newton:

$(p+h)^n=\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}h^j p^{n-j}$, com $\binom{n}{j}=\dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ e $k!=k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1$ o fatorial de *k* para $k\in\mathbb{N}$, e $0!=1$. Assim:

$(p+h)^n-p^n=\sum\limits_{j=1}^{n}\binom{n}{j}h^j p^{n-j}=h\cdot\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}h^m p^{n-m-1}$, onde na última igualdade substituímos $j=m+1$. Então:

$\dfrac{(p+h)^n-p^n}{h}=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}h^m p^{n-m-1}=n\cdot p^{n-1}+\sum\limits_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}h^m p^{n-m-1}$ e, tomando o limite $h\to 0$, temos $f'(p)=n\cdot p^{n-1}$ para todo *p*.

A seguir provaremos um resultado que formaliza a interpretação geométrica que demos da derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função num dado ponto. Se a inclinação for positiva, significa que a função é localmente uma função crescente e, se for negativa, a função será localmente decrescente. Mas como demonstrar isso, e formalizar, sem nos basearmos em argumentos visuais mas sim em argumentos de Análise? A resposta vem no teorema a seguir (LIMA, 2016a).

Teorema 4.3: Sejam $f:A\to\mathbb{R}$ e $p\in\mathrm{int}(A)$. Suponha que $f'(p)>0$. Então existe uma vizinhança de *p* em que *f* é crescente. Da mesma maneira, se $f'(p)<0$, existirá uma vizinhança de *p* em que *f* é decrescente.

Dem. Ver Lima (2016a, p. 96), para uma demonstração, e Lima (2016b, p. 266-267), para uma explanação com mais detalhes.

Note que, se $f'(p)=0$ no teorema acima, nada pode se afirmar sobre o comportamento de *f* nas vizinhanças de *p*. Teríamos que olhar para derivadas de ordem superior, começando pela derivada de segunda ordem da função (a derivada da derivada, supondo que f' exista e seja diferenciável em uma vizinhança de *p*, o que seria uma hipótese adicional).

Assimile

A derivada quantifica a taxa de crescimento ou decrescimento de uma função; isso é visto tanto por meios geométricos quanto analíticos. Assim, se uma função definida num intervalo for crescente terá sempre derivada positiva, e se for decrescente terá sempre derivada negativa. Se a função tiver derivada contínua e não for nem estritamente crescente nem estritamente decrescente, então existirá, pelo teorema do valor intermediário, um ponto em que sua derivada será nula. Em particular, se tivermos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ com $f(b)=f(a)$, existirá um ponto $c\in[a,b]$ tal que $f'(c)=0$. Esse é essencialmente o conteúdo do teorema do valor médio, o qual veremos na próxima seção.

A derivada é, essencialmente, um limite. Esse limite é calculado em um ponto em que a função está definida; podemos assim, utilizando o Teorema 3.13 sobre as operações algébricas com limites, obter as relações entre as derivadas de duas funções e as operações algébricas fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão). Poderia-se esperar que bastaria, então, substituir no Teorema 3.13 limites por derivadas e teríamos um resultado análogo. No entanto, vale notar que não estamos calculando o limite da função original, mas sim de um quociente incremental. Assim, temos que ter cautela ao aplicarmos as regras operacionais de limites. O resultado que temos é o seguinte:

Teorema 4.4: Suponha $f:A\to\mathbb{R}$ e $g:A\to\mathbb{R}$ diferenciáveis no ponto $p\in\text{int}(A)$. Então valem as seguintes expressões para a derivada da soma, do produto e da divisão de *f* e *g*:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x) \qquad \text{(regra da soma)}$$

$$(f\cdot g)'(x)=g(x)f'(x)+f(x)g'(x) \qquad \text{(regra do produto)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)}{[g(x)]^2}g'(x) \qquad \text{(regra do quociente)}$$

Dem. A demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em Guidorizzi (1987, p. 172-174), e o estudo da demonstração nessa bibliografia é deixado a cargo de você, leitor. Mas, antes, valeria a pena tentar demonstrá-las sozinho, sem recorrer ao livro, como treinamento. □

Exemplificando

Utilizando a regra do produto, vamos calcular de maneira diferente a derivada da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^n$ para todo *x*, com $n\in\mathbb{N}$. Vimos que essa função é diferenciável, com derivada $f'(p)=n\cdot p^{n-1}$ para todo *p*. Notamos primeiramente que $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ vezes}}$ de modo que, aplicando a regra do produto, obtemos *n* parcelas de x^{n-1} somadas, resultando assim na expressão esperada.

Outra maneira de demonstrar o resultado é por meio de indução em *n*, utilizando que $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ vezes}}$, o que é deixado para você, leitor.

Um último resultado diz respeito à derivada da composição de funções. Esse teorema relaciona a derivada da função composta com as derivadas de cada uma das funções originais, isto é, dadas $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ com $\mathrm{Im}(f)\subset B$, conseguimos relacionar a derivada de $h=g\circ f:A\to\mathbb{R}$ com as derivadas de *f* e *g* (ÁVILA, 1993).

Teorema 4.5 (regra da cadeia): Sejam $f:A\to\mathbb{R}$ e $g:B\to\mathbb{R}$, com $\mathrm{Im}(f)\subset B$. Tome $p\in\mathrm{int}(A)$ tal que $f(p)\in\mathrm{int}(B)$. Se *f* for diferenciável em *p* e *g* for diferenciável em *f(p)*, então vale a "regra da cadeia"para a derivada da função composta $h=g\circ f:A\to\mathbb{R}$:

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Dem. Ver Ávila (1993, p. 127), para uma demonstração, e Guidorizzi (1987, p. 189-192), para uma demonstração alternativa.

Saiba mais

Vimos conceitos introdutórios sobre derivadas nesta seção. Um estudo mais aprofundado e com diversos exemplos, pode ser encontrado no capítulo VIII, páginas 255-268 da referência abaixo, cuja leitura é recomendada:

LIMA, Elon. **Curso de Análise vol. 1**. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Terminamos assim esta seção, que apresentou o conceito e as propriedades básicas da derivada de uma função. Tratamos de propriedades da derivada de uma função avaliada em um ponto: dado um ponto *p*, a derivada é vista como um número associado a esse ponto e todas as construções foram feitas analisando a vizinhança desse ponto. No entanto, vale notar que, se *A* é aberto e $f:A\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável em *A*, é possível definir a função derivada $f':A\to\mathbb{R}$ que associa, a cada ponto $p\in A$, sua derivada $f'(p)\in\mathbb{R}$ >. Ou seja: a derivada pode ser vista como uma função e, se esta for diferenciável, é possível calcular derivadas de ordens superiores da função *f*. A derivada de segunda ordem de *f*, ou simplesmente segunda derivada de *f*, é a derivada da derivada: $f^{ll}(x)=\left(f^{l}\right)^{l}(x)$, onde f^{ll} denota a função $x \mapsto f^{ll}(x)$. Nesse caso, como a função $f^{l}: A \to \mathbb{R}$ é diferenciável, segue que também é contínua. Em um caso mais geral em que a função *f* for *n* vezes diferenciável, as primeiras *(n-1)* derivadas serão contínuas. Esses conceitos serão importantes na próxima seção, em que trataremos de propriedades adicionais de funções diferenciáveis.

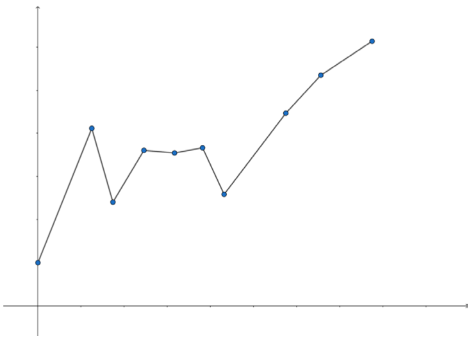
O estudo da diferenciabilidade de funções é extremamente gratificante, por ser uma das aplicações mais importantes do conteúdo visto até aqui. O aprendizado sobre sequências, limites e continuidade, então, nos deu frutos, e o que colhemos se mostra uma ferramenta muito poderosa.

Sem medo de errar

Relembrando o contexto de aprendizado, você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria. Você atuará junto à equipe contribuindo para manter o rigor dos resultados obtidos por eles e terá de preparar pequenas apresentações sobre os conceitos de análise envolvidos na avaliação dos diferentes problemas que aparecem. Muitas dúvidas surgem entre os integrantes da equipe, os quais vêm de outras áreas do conhecimento.

O primeiro problema que surge é a interpretação do gráfico da energia gerada por uma turbina eólica ao longo do tempo, como na Figura 4.2. Embora o gráfico apresente um crescimento médio ao longo do tempo, ele não apresenta uma característica de suavidade. Aparecem "bicos" entre diferentes medições; alguns bicos são bastante pequenos, enquanto outros são abruptos (denotados pelos pontos azuis na Figura 4.2). Por que será que aparecem esses bicos? São reais ou são artefatos da avaliação das energia gerada em instantes discretos de tempo?

Figura 4.2 | Energia gerada por uma turbina eólica ao longo do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, você se depara com perguntas interessantes desse tipo quando os dados são apresentados. Um dos integrantes pergunta qual seria a derivada da função naqueles pontos em que o gráfico da função apresenta bicos. O que você responderia? Como explicar em palavras que a derivada não existe naquele ponto?

Uma primeira resposta seria dizer que como as avaliações não foram feitas continuamente (mas sim de um dia para o outro ou com o intervalo de alguns dias) e os pontos foram ligados, não seria possível obter uma função contínua. Seria o mesmo que graficar uma sequência no plano cartesiano. Na realidade, se as medições fossem feitas em intervalos suficientemente pequenos, a função seria contínua.

Um "bico" pode ser visto como uma generalização da função módulo. Pode ser definido como uma descontinuidade na função derivada, que varia de um valor finito a outro ao cruzar o ponto em que não está definida. Como essa definição se aplicaria no bico da função módulo? Veja que mesmo no caso em que existem bicos, podem ser definidas as derivadas laterais de uma função contínua em um ponto arbitrário, mesmo que a derivada no ponto não exista (LIMA, 2016b). Essas derivadas laterais são definidas como limites laterais, como esperado. A derivada à esquerda, $f_-^l(x)$, e a derivada à direita, $f_+^l(x)$, são definidas como os limites laterais (quando existem)

$$f_-^l(p) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}, \qquad f_+^l(p) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Quando uma função tem bicos, as derivadas laterais existem mas são diferentes. Essas derivadas representam as inclinações dos segmentos de reta que "partem" do ponto em que há o bico no gráfico.

Um resultado de Análise, que pode ser demonstrado de maneira análoga ao utilizado para determinar se existe o limite de uma função em um ponto quando conhecemos seus limites laterais, é o seguinte (LIMA, 2016a): suponha que existam as derivadas laterais $f_-^l(p)$ e $f_+^l(p)$, de uma função *f*, respectivamente à esquerda e à direita de um ponto *p*. Então *f* é diferenciável no ponto *p* se, e somente se, as derivadas laterais forem iguais. Nesse caso, a derivada da função é dada por $f^l(p) = f_-^l(p) = f_+^l(p)$.

Apresentando todos esses conceitos aos seus colegas de trabalho, ficará muito mais produtiva a discussão sobre a variação na geração de energia pelo gerador eólico ao longo do tempo.

Avançando na prática

A regra de L'Hôpital

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja professor de uma turma de Cálculo de uma variável e, após ver o conceito de derivada, no final da aula, um aluno levanta uma questão sobre um conceito de aulas anteriores. "Professor, estive resolvendo exercícios do livro sobre limites e me deparei com um problema. O exercício pedia para calcular o limite em um ponto de uma função racional, quociente de polinômios. Mas nesse ponto, o polinômio do denominador era nulo, logo não dá para aplicar as regras operacionais dos limites. Pensei, então, que deveria utilizar as técnicas de limites infinitos. No entanto, notei que o polinômio do numerador também se anulava nesse ponto, de modo que daria uma expressão do tipo $0/0$ e aí não sei se o conceito de limites infinitos funcionaria, acho que não... como devo proceder?"

Resolução da situação-problema

De fato, as chamadas "expressões indeterminadas" do tipo $0/0$, em que os limites do numerador e denominador se anulam quando calculados separadamente, isto é: dadas duas funções *f* e *g* contínuas, com x, queremos calcular o limite $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$. Não é possível aplicar nenhuma regra operacional que já vimos, nem utilizar o conceito de limites infinitos, como bem salientou o aluno. No entanto, tendo em mãos o conceito de derivada, podemos avaliar o limite mencionado olhando para as derivadas de *f* e *g* no ponto *p*. Para isso notamos, seguindo Lima (2016a, p. 93), que podemos escrever para $x \neq p$:

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{g(x)-g(p)}=\lim_{x\to p}\left(\frac{\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\dfrac{g(x)-g(p)}{x-p}}\right).$$

Mas como ambos os limites do numerador e do denominador existem, por hipótese, e como $g'(p)\neq 0$, podemos aplicar as regras das operações com limites, obtendo:

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{g(x)-g(p)}{x-p}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(p)}{g'(p)},$$

que pode ser calculado por meio das derivadas de *f* e *g*, supostas conhecidas. Essa é a **regra de L'Hôpital**.

Polinômios são funções diferenciáveis em toda a reta, de modo que aplica-se a regra de L'Hôpital. Assim, vale a pena apresentar ao aluno esse resultado e sua demonstração, e aconselhá-lo a aplicar esses conceitos no caso do limite a ser calculado.

Faça valer a pena

1. Vamos demonstrar a regra do produto: $(f \cdot g)^l(x) = g(x)f^l(x) + f(x)g^l(x)$.

Pela definição de derivada, $(f \cdot g)^l(p) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p)}{h}$. Somando e subtraindo $f(p+h)g(p)$ no numerador, podemos escrever:

$$(f \cdot g)^l(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h)\big(g(p+h) - g(p)\big) + \big(f(p+h) - f(p)\big)g(p)}{h}.$$

Mas notamos que, como *f* é contínua e *f* e *g* são diferenciáveis em *p*, podemos tomar separadamente os limites na equação acima da seguinte forma:

$(f \cdot g)^l(p) =$ ____________.

Assim, utilizando a definição de derivada para *f* e *g*, obtemos o resultado.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $\lim\limits_{h \to 0} f(p) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(g(p+h) - g(p)\big)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(f(p+h) - f(p)\big)}{h} \cdot g(p)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} f(p+h) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(g(p+h) - g(p)\big)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(f(p+h) - f(p)\big)}{h} \cdot g(p)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} f(p+h) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(g(p+h) - g(p)\big)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(f(p+h) - f(p)\big)}{h} \cdot g(p+h)$

d) $\lim\limits_{h \to 0} f(p) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(g(p+h) - g(p)\big)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(f(p+h) - f(p)\big)}{h} \cdot g(p+h)$

e) $f(p) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(g(p+h) - g(p)\big)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\big(f(p+h) - f(p)\big)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(p+h)$

2. Vamos demonstrar aqui o teorema 4.3, que tem o seguinte enunciado: Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathrm{int}(A)$. Suponha que $f^l(p) > 0$. Então existe uma vizinhança de *p* em que *f* é crescente.

Para isso, consideremos apenas $x > p$ na definição da derivada. Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (p - \delta, p + \delta)$ então __________.

Assim, tomando $\varepsilon = f^l(p)/2$ temos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (p, p + \delta)$, então $f(x) - f(p) > 0$. Um argumento análogo vale quando tomamos $x < p$, demonstrando assim o resultado.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \in \left(f^{l}(p), f^{l}(p)+\varepsilon\right)$

b) $f(x)-f(p) \in \left(f^{l}(p)-\varepsilon, f^{l}(p)+\varepsilon\right)$

c) $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \in \left(f^{l}(p)-\varepsilon, f^{l}(p)+\varepsilon\right)$

d) $\left|\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\right| \in \left(f^{l}(p)-\varepsilon, f^{l}(p)+\varepsilon\right)$

e) $\left|\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\right| \in \left(f^{l}(p), f^{l}(p)+\varepsilon\right)$

3. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua, então é diferenciável.
II. Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é diferenciável, então sua derivada $f^{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é limitada.
III. Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é diferenciável, com $a,b\in\mathbb{R}$, então f é limitada.

Assinale a alternativa que contém todas, e apenas as afirmações corretas.

a) I e III.
b) III.
c) I e II.
d) II, III.
e) Nenhuma afirmação.

Seção 4.2

Propriedades da derivada

Diálogo aberto

Vimos na seção anterior a definição da derivada em um ponto e suas propriedades básicas. Mas o que podemos obter quando a derivada não está definida só em um ponto, mas sim em um aberto da reta? E se também existir a segunda derivada, há algo a mais que podemos obter da função? Esse tipo de função, “suave” o suficiente para que tenha derivadas até ordens muito grandes, é o tipo mais comum em engenharias, física e outras ciências exatas. Funções que não possuem derivada em algum ponto geralmente representam impactos; sem impactos, geralmente a modelagem matemática é realizada com funções suaves.

Lembre-se de que você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria. Você atuará junto à equipe contribuindo para manter o rigor dos resultados obtidos por eles e terá de preparar pequenas apresentações sobre os conceitos de análise envolvidos na avaliação dos diferentes problemas que aparecem. Muitas dúvidas surgem entre os integrantes da equipe, os quais vêm de outras áreas do conhecimento.

Uma das dúvidas aparece ao analisar um reservatório de uma usina hidrelétrica cujo nível de água vem diminuindo continuamente por falta de chuvas. Se o nível de água chegar a um nível mínimo operacional (“nível da tomada d’água”), a usina precisará cessar seu funcionamento.

A equipe que atua no local garantiu que conseguirá desviar a água de um rio próximo para encher a represa em volumes inicialmente pequenos, mas crescentes.

Considerando que o atual monitoramento do nível de água, por meio de sensores, se expressa em uma função “nível da água” com relação ao tempo, qual deve ser a característica das derivadas da função para garantir que a situação do reservatório seja revertida? E como podemos analisar, utilizando as ferramentas do cálculo diferencial, que o nível mínimo seja inferior ao nível da tomada d’água?

Para resolver essa e outras situações, nesta seção estudaremos o teorema da função inversa, o teorema do valor médio para derivadas e analisaremos os máximos e mínimos locais de funções que são duas vezes diferenciáveis num aberto. Os conceitos apresentados nesta seção mostram o poder da análise de funções diferenciáveis, e seu estudo com certeza vai agregar ferramentas ao seu arsenal analítico.

Não pode faltar

Vimos na seção anterior a definição da derivada em um ponto e diversas propriedades de funções na vizinhança de um ponto *p*, quando estas admitem derivada em *p*. A noção de derivada como taxa de crescimento local da função foi estabelecida rigorosamente, assim como as principais relações algébricas entre as derivadas de duas funções.

Mas muitas funções (a maioria das funções algébricas conhecidas como polinômios, funções trigonométricas e as funções exponencial e logarítmica) são diferenciáveis em toda a extensão em que estão definidas. Surge então uma pergunta natural, já que temos à mão os resultados básicos para analisar as propriedades derivadas em um ponto: e se a derivada da função estiver definida em um intervalo, podemos dizer algo mais sobre o comportamento da função?

Vimos na seção anterior que se *A* é aberto e $f: A \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em *A*, é possível definir a função derivada $f^{l}: A \to \mathbb{R}$ que associa, a cada ponto $p \in A$, sua derivada $f^{l}(p) \in \mathbb{R}$. Assim, podemos analisar diversos aspectos já conhecidos sobre limites,continuidade e diferenciabilidade de funções, olhando agora para a nova função $f^{l}: A \to \mathbb{R}$. Em particular, é possível aplicar os resultados desenvolvidos até aqui à função f^{l} no intuito de obter, por exemplo, resultados sobre a função *f* (que sabemos que é contínua) ou mesmo resultados que envolvem $f^{ll}(x) = \left(f^{l}\right)^{l}(x)$, quando $f^{l}: A \to \mathbb{R}$ for diferenciável em *A*.

Assim, vamos considerar na maioria dos estudos desta seção uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) (que, lembremos, é o interior do conjunto $[a,b]$). Dessa forma, a função derivada (que chamaremos somente de "derivada", quando o sentido estiver claro no contexto) $f^{l}: (a,b) \to \mathbb{R}$ está definida em todo o conjunto (a,b), o que está de acordo com o que consideramos razoável para nossas análises (como descrito no parágrafo anterior).

Esta seção nos diz então sobre aplicações da derivada em contextos em que temos mais estruturas do que na seção anterior. Começamos com um teorema que nos diz que, se a derivada de uma função for não-nula em um ponto*p*, essa função é localmente inversível e sua inversa pode ser calculada pela regra da cadeia. Vejamos como isso acontece.

Primeiramente, precisamos garantir que *f* seja localmente inversível, isto é, que exista uma vizinhança *V* de *p* em que *f* possua inversa (que denotaremos por f^{-1}). Suponhamos então $f^{l}(p) \neq 0$. Pelo Teorema 4.3, existe uma vizinhança de *p* em que *f* é ou estritamente crescente (se $f^{l}(p) > 0$) ou estritamente decrescente (se $f^{l}(p) < 0$). Em qualquer um dos casos, temos que *f* é injetora. E sabemos que, se *f* é injetora, será uma bijeção sobre sua imagem. Logo, *f* é inversível sobre sua imagem.

Temos que ver então quem é a imagem de *f*. Suponhamos então que a vizinhança V em que f é inversível seja dada por um intervalo fechado, $V=[a,b]$, com $p\in(a,b)$. Assim, podemos nos restringir a *f* no intervalo $[a,b]$, inversível sobre sua imagem. Assim, como *f* é contínua em $[a,b]$, podemos utilizar o teorema do valor intermediário (Teorema 3.20) para obter informações sobre a imagem de *f*. Uma outra maneira de enunciar o teorema do valor médio é a seguinte: seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$, com $f(a)<f(b)$. Então o intervalo $[f(a),f(b)]$ está contido na imagem de *f* (vale a pena checar que os enunciados são equivalentes). Assim, se *f* for crescente, teremos que $\operatorname{Im}(f)=[f(a),f(b)]=[c,d]$ também será um intervalo. Além disso, *f(p)*pertence ao interior desse intervalo.

Suponhamos ainda que sua inversa, $f^{-1}:[c,d]\to\mathbb{R}$, seja contínua em *f(p)*. Pode-se esperar que consigamos afirmar algo sobre a diferenciabilidade da função inversa em *f(p)*, dado que temos tanta estrutura a seu respeito. Mas nada é garantido, é preciso procurar.

Da continuidade de f^{-1} em *f(p)* temos que $\lim_{y\to f(p)} f^{-1}(y)=f^{-1}(f(p))=p$. Então $\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)}=\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-p}{y-f(p)}$. Mas agora, notando que $y=f(f^{-1}(y))$, podemos escrever $\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)}=\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-p}{f(f^{-1}(y))-f(p)}$. Mas quando $y\to f(p)$, temos pela continuidade de f^{-1} em *f(p)* que $f^{-1}(y)\to f^{-1}(f(p))=p$. Assim, podemos escrever a expressão acima como $\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)}=\lim_{x\to p}\frac{x-p}{f(x)-f(p)}=\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right]^{-1}$. Como *f* é diferenciável em *p*, segue que $\lim_{y\to f(p)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)}=\frac{1}{f'(p)}$, ou seja, $(f^{-1})'(f(p))=\frac{1}{f'(p)}$.

Vale ressaltar que o cálculo acima não foi feito apenas para obter a derivada da função inversa, mas sim para demonstrar que a inversa será diferenciável em todos os pontos da imagem de *f* correspondentes aos pontos em que *f* é diferenciável. Notemos também que, se já soubéssemos que f^{-1} é diferenciável em *f(p)*, o resultado seria muito mais direto. Bastaria utilizar a regra da cadeia aplicada à função identidade, que pode ser escrita como $id=f\circ f^{-1}$, pois $id'(x)=x$ para todo *x*. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

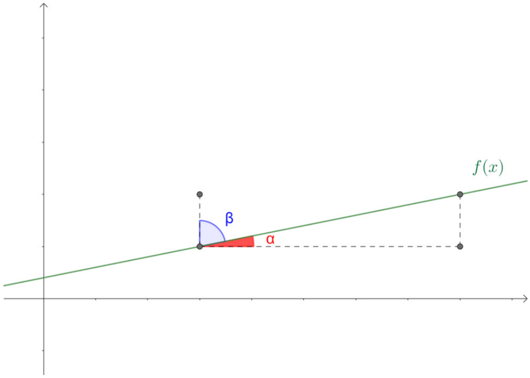
Teorema 4.6 (teorema da função inversa): Seja $f':A\to\mathbb{R}$ diferenciável em $p\in\operatorname{int}(A)$, com $f'(p)\neq 0$. Então *f* possui uma inversa local f^{-1}. Se f^{-1} for contínua em *f(p)*, então f^{-1} é diferenciável em *f(p)* e $(f^{-1})'(f(p))=\frac{1}{f'(p)}$.

Dem. A demonstração completa do teorema foi apresentada nos parágrafos anteriores ao seu enunciado. Uma demonstração análoga, porém bastante mais concisa, pode ser encontrada em Lima (2016b, p. 264). □

Exemplificando

Vamos verificar o teorema da função inversa para um caso simples, da função $f(x)=m\cdot x+b$, com $m,b\in\mathbb{R}$ e $m\neq 0$. O gráfico de *f* é uma reta inclinada, como na Figura 4.3.

Figura 4.3 | Gráfico da função $f(x)=m\cdot x+b$



Fonte: elaborada pelo autor.

A inversa é calculada invertendo a relação acima: $f^{-1}(y)=\frac{1}{m}\cdot y-b$. Vemos que $f^{l}(x)=m$ para todo *x* e $\left(f^{-1}\right)^{l}(y)=1/m$ para todo *y*, estando assim de acordo com o teorema. Geometricamente, $m=\tan(\alpha)$ é o coeficiente angular da reta (a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x) e, portanto, a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo *y* será $\tan(\beta)=1/m$.

Vamos agora considerar a estrutura adicional que mencionamos no início da seção: consideremos uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Será que conseguimos tirar alguma informação adicional sobre *f* nesse caso?

Como fica o gráfico de *f*? Por *f* ser contínua, sabemos intuitivamente que o gráfico de *f* precisa ligar os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ sem tirar o lápis do papel. Já por *f* ser diferenciável, o gráfico de *f* não pode conter "bicos". Suponhamos que $f(b)=f(a)$. Intuitivamente, a menos que *f* seja constante em $[a,b]$, *f* precisará ter ao menos uma região em que é crescente e uma em que é decrescente. Suponhamos, por exemplo, que *f* seja crescente numa vizinhança de *a*. Então, como $f(b)=f(a)$, *f* não pode se manter crescente em todo o intervalo. É preciso que haja um ponto *p* em que *f* pare de crescer e comece a decrescer para voltar a atingir seu valor inicial. Como *f* não será localmente crescente nesse ponto (caso em que teríamos $f^{l}(p)>0$) nem localmente decrescente (caso em que teríamos $f^{l}(p)<0$), só resta uma possibilidade, já que a derivada está definida em todo o intervalo (a,b): precisamos ter $f'(p)=0$. Esse é o enunciado do seguinte teorema (LIMA, 2016b):

Teorema 4.7 (teorema de Rolle): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), com $f(b)=f(a)$. Então existe $p\in(a,b)$ com $f'(p)=0$.

Dem. A demonstração do teorema está no parágrafo anterior ao seu enunciado, em palavras. Note que não precisamos supor a continuidade de $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. Veja outra demonstração em Lima (2016b, p. 270-271). □

Obtivemos então um resultado sobre a derivada quando $f(b)=f(a)$. E o caso mais geral $f(b)\neq f(a)$, como fica? Será que dá para afirmar algo sobre a derivada nesse caso? Imaginemos o que aconteceria se rodássemos o gráfico da função que tivesse $f(b)=f(a)$, mantendo os eixos coordenados no lugar (não muito, para preservar a propriedade de que *f* é uma função). Então encontraríamos um novo intervalo $[a_1,b_1]$ tal que $f(b_1)\neq f(a_1)$. "Girando" o teorema de Rolle, obteríamos que existiria um ponto $p\in(a_1,b_1)$ tal que sua derivada fosse dada pela inclinação da reta secante que liga os pontos $(a_1,f(a_1))$ e $(b_1,f(b_1))$. Essa noção intuitiva se faz precisa em um importante teorema, como veremos a seguir, que é exatamente a generalização do teorema de Rolle para o caso em que $f(b)\neq f(a)$:

Teorema 4.8 (teorema do valor médio): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Então existe $p\in(a,b)$ com $f'(p)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, isto é, tal que $f'(p)$ é a inclinação da reta que passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ do gráfico de *f*.

Dem. Note que não impomos mais a condição $f(b)=f(a)$. É de se esperar que a demonstração esteja baseada no teorema de Rolle. Isso porque os resultados são bastante parecidos, e a ideia de "girar" o gráfico nos faz imaginar que a demonstração seja apenas uma questão de "girar" o teorema de Rolle. De fato é algo parecido que acontece, porém o conceito é deixado aqui bastante preciso analiticamente. Vamos definir uma função *g* que envolva a função *f* e que satisfaça as hipóteses do teorema de Rolle, para que este possa ser aplicado. Definimos então a função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ por $g(x)=f(x)+\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\cdot(b-x)$. Notamos que $g(a)=g(b)=f(b)$, de modo que a função *g* satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle. Assim, por esse teorema, existirá $p\in(a,b)$ com $g'(p)=0$. Mas, calculando $g'(x)$, obtemos $g'(x)=f'(x)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. Assim, se $g'(p)=0$, segue que $f'(p)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)=0$ e, portanto,

$f'(p)=\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$, como queríamos demonstrar. □

Assimile

O teorema do valor médio nos diz que, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for diferenciável em (a,b), então existirá ao menos um ponto em (a,b) tal que a inclinação do gráfico de *f* (sua derivada) coincidirá com a inclinação da secante que liga os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ do gráfico de *f*. Note que não exigimos a continuidade da derivada em (a,b), nem que esta seja limitada. De fato, nenhuma dessas hipóteses aparece na demonstração do teorema.

Um exemplo de função que satisfaz o teorema do valor médio e que possui derivada que não é limitada em $[a,b]$ é a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x}$. O limite da derivada dessa função quando x tende a zero pela direita é menos infinito, e mesmo assim o teorema do valor médio continua valendo. Mas note que, uma vez satisfeitas as hipóteses do teorema do valor médio, a derivada será sempre limitada em qualquer intervalo fechado contido em $[a,b]$. Os infinitos podem aparecer somente nos extremos do intervalo.

Máximos e mínimos locais

Um **ponto de máximo local** de uma função $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é um ponto $p\in(a,b)$ tal que existe uma vizinhança *V* de *p* com $f(x)\le f(p)$ para todo $x\in V$. Analogamente, um **ponto de mínimo local** de uma função $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ > é um ponto $p\in(a,b)$ tal que existe uma vizinhança *V* de *p* com $f(x)\ge f(p)$ para todo $x\in V$.

Consideremos agora uma função $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Segue do Teorema 4.3 que, se *f* não for nem estritamente crescente nem estritamente decrescente em $p\in(a,b)$, então necessariamente $f'(p)=0$, como você pode checar escrevendo a contrapositiva daquele teorema. Em particular, se *f* possuir ou um máximo ou um mínimo local em *p*, então $f'(p)=0$. Ou seja, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.9: Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, diferenciável em $p\in(a,b)$. Se *f* possuir ou um máximo ou um mínimo local em *p*, então $f'(p)=0$.

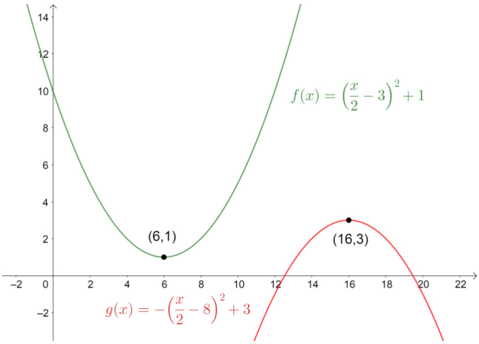
Vemos então que uma condição necessária para que uma função diferenciável $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ possua um máximo ou mínimo local em $p\in(a,b)$ é que $f'(p)=0$. Dizemos que os pontos que satisfazem essa condição são chamados de **pontos críticos** da função *f*. Mas essa condição não determina se o ponto é de máximo ou de mínimo local; é preciso conhecer mais sobre a função para avaliar isso.

Suponha então que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável em (a,b), e seja $p\in(a,b)$ um ponto crítico de *f*. Queremos obter condições suficientes para que o ponto *p* seja claramente um máximo local ou um mínimo local de *f*. Vejamos um exemplo.

Exemplificando

Considere as seguintes funções $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, dadas por $f(x)=\left(\frac{x}{2}-3\right)^2+1$ e $g(x)=-\left(\frac{x}{2}-8\right)^2+3$. Os gráficos de *f* e *g* estão mostrados na Figura 4.4. Calculando as derivadas dessas funções, vemos que o ponto $p=6$ é ponto crítico de *f* (e mínimo local) e o ponto $q=16$ é ponto crítico de *g* (e máximo local). Coincidentemente (ou não), $f^{ll}(p)>0$ (a concavidade da função é para cima em *p*) e $f^{ll}(q)<0$ (a concavidade da função e para baixo em *q*).

Figura 4.4 | Ilustração de máximos e mínimos locais



Fonte: elaborada pelo autor.

Esse exemplo é caso particular do seguinte teorema:

Teorema 4.10: Suponha que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável em (a,b), e seja $p\in(a,b)$ um ponto crítico de *f*. Então, se $f^{ll}(p)>0$, *p* é mínimo local de *f*. Já se $f^{ll}(p)<0$, *p* é máximo local de *f*.

Para a demonstração, ver Guidorizzi (1987, p. 280-282).

Reflita

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável (a,b), e $p\in(a,b)$ um ponto crítico de *f*. Vimos que, se $f^{ll}(p)>0$, *p* é mínimo local de *f* e se $f^{ll}(p)<0$, *p* é máximo local de *f*. Mas o que podemos afirmar quando $f^{ll}(p)=0$. Como podemos obter mais informações sobre o comportamento de *f* quando *f* é infinitamente diferenciável (possui derivadas de todas as ordens)?

Pelo teorema de Weierstrass, se *f* for contínua também nos extremos, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *f* possuirá máximo e mínimo em $[a,b]$. Assim, para obter o máximo e mínimo global de *f* em $[a,b]$, devemos calcular o valor de *f* nos máximos e mínimos locais obtidos pelo Teorema 4.9 e comparar com seus valores nos extremos do intervalo.

Saiba mais

O polinômio de Taylor é uma extensão do conceito de derivada, quando consideramos termos além da aproximação linear para a função resto. Para essas e outras aplicações da derivada, recomendamos o estudo do capítulo 9, em particular as páginas 104-113, da seguinte referência: LIMA, Elon. **Análise Real.** vol. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria.

Uma das dúvidas aparece ao analisar um reservatório de uma usina hidrelétrica cujo nível de água vem diminuindo continuamente por falta de chuvas. Se o nível de água chegar a um valor crítico, a usina precisará cessar seu funcionamento. A equipe de engenharia que atua com você garantiu que conseguirá desviar a água de um rio para encher a represa, mas que a taxa com que essa água chegaria no reservatório é muito baixa inicialmente, mas tende a aumentar.

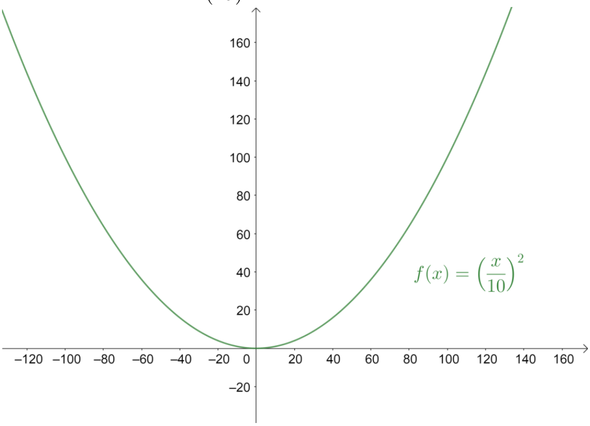
O desafio feito a você é o seguinte: elaborar um relatório, com sólido embasamento matemático, que mostre que o procedimento garante que o reservatório não atinja seu nível crítico e pare de funcionar.

Interpretando a situação matematicamente, pode-se modelar o nível de água do rio como uma função contínua $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. Não há informações sobre sua derivada (a taxa de variação do nível da água), a menos de que no início ela é negativa. Mas você consegue, a partir do problema relatado, obter algumas condições sobre a segunda derivada de *f* (que, pela modelagem, você supõe que sempre existe). Como a equipe de engenharia que atua junto a você garantiu que conseguirão aumentar a taxa de água que entra na represa cada vez mais (embora esta ainda possa continuar bastante pequena), há a esperança. A variação nessa taxa é modelada como a segunda derivada de *f*, e o fato de a derivada sempre aumentar o faz supor, na modelagem, que $f^{ll}(x) > 0$ para todo *x*.

Assim, você consegue mapear o problema matematicamente da seguinte forma: suponha que você tenha uma função $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ com derivada segunda positiva $f^{ll}(x) > 0$ para todo *x*. Quantos mínimos locais possui a função?

Essa pergunta o faz pensar na função mais simples com essa propriedade, $f(x) = x^2$, graficada na Figura 4.5, que possui segunda derivada positiva em todos os pontos. Mas nesse caso a segunda derivada será sempre constante. Pode acontecer de, no problema real, a segunda derivada tender a zero muito rápido (mas sempre se mantendo positiva). Mas vejamos o que acontece.

Figura 4.5 | Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{x}{10}\right)^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere a função derivada $f^{l}:[0,\infty) \to \mathbb{R}$. A única informação que temos é que, numa vizinhança do zero, f^{l} é negativa. No entanto, sua derivada $f^{ll}:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é sempre positiva. Assim, f^{l} é crescente. Vamos elaborar sobre esse fato. Suponhamos que f^{l} comece crescente, mas em algum momento t_0 pare de crescer. Então, pelo Teorema 4.3, teríamos até esse instante f^{ll} seria positiva, mas $f^{ll}(t_0) = 0$, o que seria uma contradição. Assim, garantimos que $f^{l}:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ será uma função estritamente crescente. Como esta é inicialmente negativa, pode acontecer apenas uma vez a condição $f^{l}(t_b) = 0$. Nesse caso, t_b será o único ponto crítico de *f*. E, como $f^{ll}:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é sempre positiva, segue que t_b será um mínimo local de *f*.

Esse mínimo é global. De fato, teremos $f^{l} < 0$ para $t < t_b$ e $f^{l} > 0$ para $t > t_b$. Isto é, *f* é decrescente para $t < t_b$ e crescente para $t > t_b$. Assim, se

$f(t_b)$ for maior que o nível crítico permitido pela represa, como espera a equipe de engenharia, seguirá que o sistema não atingirá o nível crítico, nem atingirá outro ponto de mínimo local. Isso é suficiente para garantir a tranquilidade dos engenheiros responsáveis pela usina.

Mas vale notar que podemos ter $f^{I} < 0$ sempre, de modo que o nível de água estará sempre diminuindo. Nesse caso, apenas uma modelagem com mais informações permitiria analisar o que acontecerá para tempos muito longos.

Vale a pena explicar esse raciocínio para o time de engenharia, focando bastante nos argumentos de Análise, para daí chegarem a um consenso sobre a segurança da represa.

Avançando na prática

Funções lipschitzianas

Descrição da situação-problema

Suponha que você foi contratado para colaborar na elaboração de um material didático para estudantes de Cálculo de uma variável. Ao se deparar com a parte correspondente ao teorema do valor médio para derivadas, você procura outras aplicações e corolários deste, além dos que aprendeu neste livro (e na bibliografia adicional que estudou). Um colega seu, que também trabalha na preparação desse material, pergunta o que se pode dizer sobre a "rapidez" com que a função cresce. Ela é linear com a distância? Quadrática? É possível estimar uma "taxa máxima de crescimento" da função em termos da distância entre os pontos? Como você apresentaria a solução desse problema para seu colega?

Resolução da situação-problema

Ao se deparar com a pergunta de seu colega, você nota dois casos qualitativamente distintos. Como nas hipóteses do teorema do valor médio, tome $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). No primeiro caso, existem as derivadas laterais nos extremos do intervalo (ou, para todos os efeitos, a derivada é limitada em (a,b)). Já no segundo caso, não existem esses limites laterais e a derivada tem limite infinito em a ou b.

O segundo caso é mais difícil de tratar, e não leva a conclusões significativas ao tentar responder a pergunta do seu colega. Logo, você supõe que a derivada seja limitada em (a,b). Assim, pelo teorema do valor médio, existirá $p \in (a,b)$ tal que $f^{I}(p) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, isto é, tal que

$f(b)-f(a)=f^{l}(p)\cdot(b-a)$. Aplicando o teorema do valor médio a um intervalo arbitrário $[x,y]\subset[a,b]$, obtém-se então $c\in(x,y)$ (onde o ponto c é diferente para cada x e y) tal que $f(y)-f(x)=f^{l}(c)\cdot(y-x)$. Assim, $|f(y)-f(x)|=|f^{l}(c)|\cdot|y-x|$. Como a derivada é limitada em (a,b), existe o supremo $\sup\limits_{z\in(a,b)}|f^{l}(z)|$. Logo, $|f(y)-f(x)|\leq\sup\limits_{z\in(a,b)}|f^{l}(z)|\cdot|y-x|$. Definindo $K=\sup\limits_{z\in(a,b)}|f^{l}(z)|$, obtém-se que $|f(y)-f(x)|\leq K\cdot|y-x|$. Logo, o crescimento de f com a distância entre os pontos é no máximo linear, sendo "regulado" pela constante $K=\sup\limits_{z\in(a,b)}|f^{l}(z)|$. Funções com a propriedade $|f(y)-f(x)|\leq K\cdot|y-x|$ são chamadas de **lipschitzianas**, e a constante K é chamada de **constante de Lipschitz**.

Você então pode apresentar esse novo conceito a seu colega, para que ambos adquiram esse conhecimento e possam discuti-lo com propriedade no texto que estão escrevendo.

Faça valer a pena

1. Vamos demonstrar o seguinte resultado: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), com $f^{l}(p)=0$ para todo $p\in(a,b)$, então f é constante. Para isso, utilizaremos o teorema do valor médio. A demonstração será dada por contradição. Suponhamos que f não seja constante. Então existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)\neq f(a)$. Mas então, a função f restrita ao intervalo $[a,c]$ é contínua em $[a,c]$ e diferenciável em (a,c). Logo, pelo teorema do valor médio, existirá $d\in[a,c]$ tal que _________, o que é uma contradição.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $f^{l}(d)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=0$

b) $f^{l}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\neq 0$

c) $f^{l}(d)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\neq 0$

d) $f^{l}(d)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\neq 0$

e) $f^{l}(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=0$

2. A hipótese, no teorema do valor médio, de que a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em todo o intervalo (a,c) é essencial. Suponhamos, por exemplo, que a função não seja diferenciável em algum ponto $q \in (a,b)$, mas que seja contínua. Então o teorema vale para *f* restrita a $[a,q]$ e para *f* restrita a $[q,b]$, mas não para o intervalo todo. Um exemplo disso é a função módulo $f(x)=|x|$. Temos que $|-1|=|1|$, mas não existe $p \in (-1,1)$ tal que ___________.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

a) $f^{l}(0)=0=|1|-|-1|$

b) $f^{l}(p)=2=|1|+|-1|$

c) $f^{l}(p)=0=|1|-|-1|$

d) $f^{l}(0)=2=|1|+|-1|$

e) $f^{l}(q)=0=|1|-|-1|$

3. Considere um polinômio de ordem *n*, $p(x)=a_0+a_1 \cdot x+...+a_n x^n$. Vamos obter expressões para seus coeficientes. Para isso, para cada coeficiente a_k calculamos a derivada de ordem *k*. Temos claramente $a_0=p(0)$. Calculando a primeira derivada, $a_1=p^{l}(0)$. Calculando a segunda derivada, $a_2=\dfrac{p^{l\,l}(0)}{2}$. Já para a k-ésima derivada $p^{(k)}(x)$, _____________. Já se escrevêssemos o mesmo polinômio como $p(x)=b_0+b_1 \cdot (x-x_0)+...+b_n (x-x_0)^n$, apenas rearranjando os termos e inserindo a constante x_0, teríamos que seus coeficientes seriam dados por __________.

Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas.

a) $a_k=\dfrac{p^{(k)}(x)}{k}$; $b_k=\dfrac{p^{(k)}(x)}{k}$

b) $a_k=p^{(k)}(0)$; $b_k=p^{(k)}(x_0)$

c) $a_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$; $b_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$

d) $a_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$; $b_k=\dfrac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$

e) $a_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k}$; $b_k=\dfrac{p^{(k)}(x_0)}{k}$

Seção 4.3

Funções integráveis

Diálogo aberto

Nas seções anteriores desta unidade vimos o conceito de derivada e diversas das suas propriedades, inclusive quando a derivada é vista como função de um aberto nos números reais. O que podemos mais dizer sobre funções contínuas? Existe alguma outra estrutura que pode ser introduzida para funções contínuas, mas que não dependa de sua diferenciabilidade?

A resposta é que sim. Nesta seção veremos os conceitos básicos da integral de uma função, que pode ser interpretada geometricamente como a área abaixo do gráfico da função. Esse conceito tem aplicações em diversas áreas da física e da engenharia, como no estudo de trajetórias de planetas e outros objetos celestes, no cálculo do campo elétrico de uma distribuição de carga, no cálculo da trajetória de um objeto em movimento conhecendo apenas sua aceleração em função do tempo, entre outros.

Lembre-se de que, como contexto de aprendizado, você foi contratado para atuar como matemático na equipe de engenharia de uma empresa de consultoria. Suponha que se queira calcular o total da energia produzida por um motor ao longo do tempo, cuja tecnologia ainda está em desenvolvimento, para a comparação com o desempenho dos automóveis que estão no mercado. Para isso, o time de engenharia precisa calcular (analítica ou numericamente) integrais baseadas nas curvas que obtêm para a potência do motor em função do tempo. Para ajudar a equipe na compreensão, introduza o conceito de integral, baseando-se em sua definição geométrica, em aplicações no gráfico do rendimento de um motor ao longo do tempo e na definição por somas parciais, argumentando que quanto menos espaçadas as medidas, melhor a predição desse valor total. Muitas vezes são tratadas funções contínuas, mas que em alguns pontos possuem descontinuidades (falhas do motor, erros, de operação, entre outros). Mostre que, mesmo que uma função tenha um número finito de descontinuidades, a integral $\int_a^b f(x)dx$ é uma função contínua do parâmetro b. Já sua derivada tem as mesmas descontinuidades que a função original.

Nesta seção veremos, para a resolução desse desafio, o conceito geométrico de integral, sua definição analítica, propriedades básicas de funções integráveis e o teorema fundamental do Cálculo. Esta é a última seção do nosso livro, seu estudo vale a pena para fechar o conteúdo de Análise com chave de ouro!

Não pode faltar

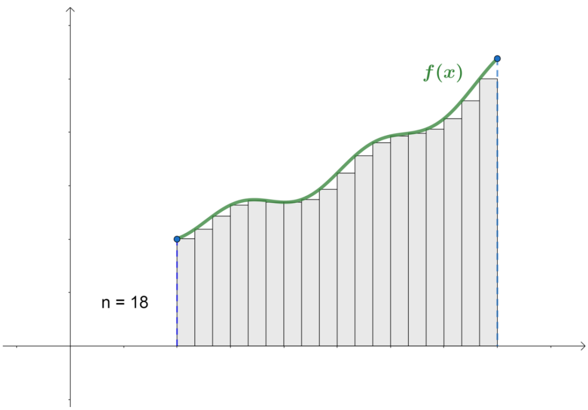
Vimos nas seções anteriores o conceito de derivada de uma função, assim como suas principais propriedades e resultados. Nesta seção estamos interessados no caso "oposto": o da integral de uma função. Uma pergunta que surge muitas vezes ao se analisar o gráfico de uma função é a seguinte: como calcular a área debaixo do gráfico? Qual a relação entre a taxa de variação dessa área e o gráfico da função?

A área debaixo do gráfico de uma função pode ser aproximada por uma quantidade finita de retângulos, de largura igual, preenchendo a região inferior ao gráfico da função. Ou seja, dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada (suposta aqui positiva, para ilustração), dividimos seu domínio em n intervalos de mesmo tamanho, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Isso gera $n+1$ pontos sobre a reta, igualmente espaçados, definidos da seguinte maneira: $x_0 = a$, $x_k = a + k\cdot\Delta x$ para $k<n$, $x_n = b$. Avaliamos então a função *f* em cada um desses intervalos, e definimos o máximo de *f* em cada intervalo por $m_k = \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$; o resultado é uma soma finita dada por:

$$RI_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x \,.$$

A soma RI_n é chamada de **soma de Riemann inferior** da função *f* no intervalo $[a,b]$, e é interpretada como a soma das áreas dos *n* retângulos, cada um de largura Δx e comprimento m_k. Podemos ver um exemplo dessa soma de Riemann, quando comparada com o gráfico de *f*, na figura 4.6, em que *f* é contínua: o valor da soma de Riemann inferior é uma aproximação para a área sob o gráfico da função, sempre por valores menores que a área do gráfico.

Figura 4.6 | soma de Riemann inferior



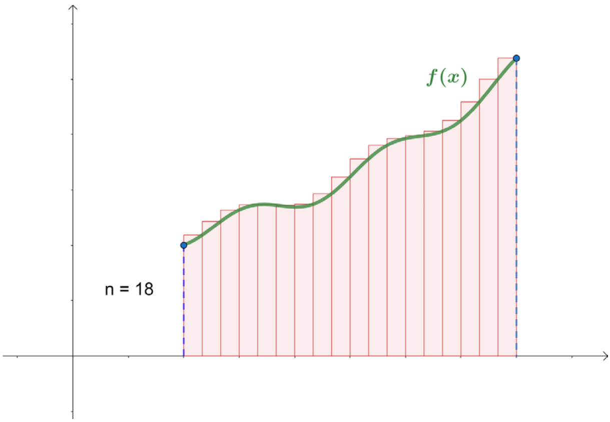
Fonte: elaborada pelo autor.

Analogamente, dados os intervalos anteriormente mencionados e definidas as quantidades $M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, obtemos a **soma de Riemann superior** para a função *f* no intervalo $[a,b]$, dada por:

$$RS_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x$$

A soma de Riemann superior é interpretada como a soma das áreas dos *n* retângulos, cada um de largura Δx e comprimento M_k, como visto na Figura 4.7. O valor da soma de Riemann superior é uma aproximação para a área sob o gráfico da função, sempre por valores maiores que a área do gráfico.

Figura 4.7 | Soma de Riemann superior



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, vemos que para uma função contínua é razoável que conforme *n* aumente, tanto o valor da soma de Riemann inferior quanto o da inferior devem convergir para a área sob o gráfico da função.

Podemos relaxar as hipóteses utilizadas para estimar a área sob o gráfico da função. A primeira delas, mais evidente, é relaxar a hipótese de intervalos igualmente espaçados. Assim, dados $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < ... < x_n$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, vemos que esses pontos particionam o intervalo $[a,b]$ em *n* segmentos, $[x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1,...,n$. Esses pontos definem, então, uma **partição** do intervalo $[a,b]$, que pode ser vista tanto como o conjunto de pontos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ (ÁVILA, 1993) quanto o conjunto de intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1,...,n$. Adotaremos aqui a primeira abordagem, padrão em livros de Análise. Mas é sempre útil ter em mente o objetivo de escolhermos uma partição: a definição do conjunto de pontos servirá sempre para determinar os intervalos correspondentes e esses, sim, serão de fato utilizados nas contas.

Para definirmos o análogo das somas de Riemann neste caso, precisamos generalizar o intervalo Δx que aparece nas somas de Riemann. Esta parte é fácil: basta considerar o tamanho de cada um dos intervalos, substituindo Δx por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ para cada *k*. Também precisamos generalizar as quantidades m_k e M_k definidas anteriormente para englobar o caso de intervalos de comprimentos diferentes. Mas podemos notar, por suas definições, que estas dependem somente do intervalo $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ e não de seu comprimento. Poderíamos, então, utilizá-las sem medo. No entanto, é interessante considerar o caso de uma função que não é necessariamente contínua (mas mantendo a hipótese de ela ser limitada); não faz sentido falar de máximo e mínimo em um intervalo, pois não vale o teorema de Weierstrass, de modo que precisamos "ajustar" as definições de m_k e M_k para podermos englobar na nossa análise funções que não são necessariamente contínuas.

Se não sabemos se a função tem máximo ou mínimo intervalo, mas sabemos que esta é limitada, as adaptações mais fiéis a essas quantidades são os conceitos de supremo e ínfimo. De fato, no caso de a função ser contínua, o supremo se reduz ao máximo e o ínfimo se reduz ao mínimo. Assim, para tratarmos do caso mais geral em que não sabemos se *f* é contínua, fazemos as seguintes definições: $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f\left(x\right)$, $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f\left(x\right)$. Assim, a soma de Riemann inferior RI_n é substituída por uma **soma generalizada inferior** s_P (ou apenas **soma inferior**) como:

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \,.$$

Analogamente, definimos a **soma generalizada superior** S_P (ou apenas **soma superior**) como:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \,.$$

Assimile

Note que as somas de Riemann são indexadas pelo inteiro *n*, que denota a quantidade de intervalos igualmente espaçados em $\left[a, b\right]$. Já as somas generalizadas são indexadas pela partição *P*, que define os intervalos em que as quantidades m_k e M_k são calculadas para aproximar a área abaixo do gráfico da função. Note também que se *f* for contínua e se os intervalos forem igualmente espaçados, as somas generalizadas se reduzem a somas de Riemann.

Daqui para frente trabalharemos com somas generalizadas. Vamos então analisá-las com mais calma. Vimos que se a função for contínua e as somas de Riemann convergirem para o mesmo valor quando $n \to \infty$, esse valor será a área abaixo do gráfico da função. Vamos ver o que acontece no caso de somas generalizadas e funções que não são necessariamente contínuas. Mas, como no caso de somas de Riemann, queremos ver o que acontece quando os "limites" das somas generalizadas inferior e superior se igualam.

Só que não dá pra falar de limites aqui, porque estamos trabalhando com partições e não com inteiros ou pontos da reta. Mas vamos lá: queremos, como no caso das somas de Riemann, a maior soma (generalizada) inferior que aproxime a área sob o gráfico da função, "por baixo". Como não podemos falar de máximo e mínimo, falamos em ínfimo e supremo. Matematicamente, "a maior soma inferior" se traduz no supremo, sobre todas as partições possíveis, das somas inferiores s_P, isto é, $\sup_P (s_P)$. Analogamente, substituímos o limite da soma de Riemann superior por algo que represente a "menor soma (generalizada) superior" quando consideramos todas as partições possíveis do intervalo $[a,b]$. Tomamos, então, o ínfimo das somas superiores quando variamos as partições, isto é, $\inf_P (S_P)$.

Notemos que as quantidades definidas no parágrafo anterior de fato existem. Isto é, existem cotas superiores e inferiores para as somas generalizadas. Basta notarmos que, para qualquer partição *P*, vale

$$(b-a)\cdot \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le s_P \le S_P \le (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em Lima (2016b, p. 305-306). Outra demonstração pode ser encontrada em Ávila (1993, p. 144-145). Pelas definições dadas até aqui envolvendo as somas generalizadas, não precisamos mais supor *f* positiva. Então, apenas com a hipótese de *f* limitada, vemos que as quantidades $\sup_P (s_P)$ e $\inf_P (S_P)$ existem, onde *P* são todas as partições do intervalo $[a,b]$. Vamos definir então a **integral inferior** da função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ por $\overline{\int_a^b} f = \sup_P (s_P)$, e a **integral superior** dessa função como $\underline{\int_a^b} f = \inf_P (S_P)$. Dizemos que uma função é **integrável** quando, em analogia com os limites das somas de Riemann, as integrais superior e inferior forem iguais. Nesse caso, essa quantidade será chamada de integral de *f* em $[a,b]$, e denotada por

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Muitas vezes escrevemos também $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$, para deixar explícita a analogia com as somas de Riemann. Essa notação também é bastante útil em cálculos práticos.

Exemplificando

Vejamos o exemplo da função integrável mais simples: a função constante $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=c$ para todo $x\in[a,b]$. Nesse caso, para qualquer partição *P*, temos $m_k=M_k=c$ para todo *k*, de modo que $s_P=S_P=c\cdot(b-a)$ para toda partição *P*. Assim, por todas as somas generalizadas terem o mesmo valor, temos $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f=c\cdot(b-a)$. Segue então que *f* é integrável com $\int_a^b f=c\cdot(b-a)$. Se $c>0$, essa integral é interpretada como a área do retângulo de base $(b-a)$ e altura *c* (que é também a área abaixo do gráfico da função).

Podemos caracterizar a existência da integral de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ em termos das propriedades de *f* nas partições do intervalo? O teorema abaixo nos diz que sim.

Teorema 4.11: A função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, dado $\varepsilon>0$, existir uma partição *P* com $S_P-s_P<\varepsilon$.

Dem. Se a função *f* for integrável, então $\sup_P(s_P)=\inf_P(S_P)$. Mas isso significa, pelo teorema 1.12, que para cada $\varepsilon>0$ existem partições *P* e *Q* tais que s_P e S_Q satisfazem $S_Q-s_P<\varepsilon$ (lembre-se de que as propriedades do supremo e do ínfimo de um subconjuntos dos reais foram apresentadas na Seção 1.3; vale a pena revisá-la neste momento; aproveite para adaptar o enunciado do teorema 1.12 à linguagem adotada aqui, e verifique que a afirmação acima corresponde de fato ao enunciado do teorema). Assim, definindo a nova partição $D=P\cup Q$, temos $S_D-s_D<\varepsilon$, demonstrando a primeira parte do teorema.

Suponha agora que dado $\varepsilon>0$, exista uma partição *P* com $S_P-s_P<\varepsilon$. Então, pelo próprio teorema 1.12, segue que $\sup_P(s_P)=\inf_P(S_P)$. Vale notar que este teorema pode ser visto como uma "transcrição" do teorema 1.12 para o caso específico dos conjuntos aqui tratados. $\square$

Para além da definição, que propriedades garantem que uma função é integrável? Já vimos as propriedades de continuidade e diferenciabilidade de uma função. Como diferenciabilidade implica continuidade, será que esta última é suficiente para que uma função limitada seja integrável? A resposta é "sim", como vemos no teorema a seguir:

Teorema 4.12: Toda função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável.

Dem. A demonstração deste teorema envolve técnicas que não desenvolvemos aqui neste livro, como, por exemplo, a continuidade uniforme de funções em intervalos fechados. Para o leitor interessado, indicamos consultar a demonstração em Ávila (1993, p. 150), ou Lima (2016b, p. 319). □

Terminamos a seção com um resultado muito interessante sobre funções integráveis: **o teorema fundamental do cálculo**. Considere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. A função *f* dentro da integral $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$ é chamada de **integrando** da integral. Definindo a integral em um subintervalo $[a,y]\subset[a,b]$, $\int_a^y f$, podemos considerar a **função integral** $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(y)=\int_a^y f(x)dx$. Uma pergunta que surge é a seguinte: existe alguma relação entre *F* e *f* além da definição acima? O teorema a seguir nos diz que, sob certas condições, a resposta é afirmativa.

Teorema 4.13 (Teorema fundamental do Cálculo): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua (logo integrável). Então a função integral $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $F(y)=\int_a^y f(x)dx$ é diferenciável em (a,b) e satisfaz $F'(y)=f(y)$ para todo $y\in(a,b)$.

Dem. A demonstração é fortemente baseada em Lima (2016a, p. 137-138). Vamos tentar calcular a derivada de *F*. Temos que $F(p+h)-F(p)=\int_p^{p+h} f(x)dx$ (o que é obtido dividindo os intervalos de integração adequadamente; ver a demonstração desse fato em Lima (2016a)). Então, $\frac{F(p+h)-F(p)}{h}=\frac{1}{h}\int_p^{p+h} f(x)dx$. Mas queremos fazer com que o termo do lado direito vá a zero com *h*. Para isso, notamos que a função constante é integrável, de modo que $\frac{F(p+h)-F(p)}{h}-f(p)=\frac{1}{h}\int_p^{p+h}(f(x)-f(p))dx$, já que $\int_p^{p+h} f(p)dx=f(p)\cdot h$. Assim, como *f* é contínua, dado $\varepsilon>0$ teremos $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ para *x* suficientemente próximo de *h*, de modo que $\frac{F(p+h)-F(p)}{h}-f(p)\le\frac{1}{h}\int_p^{p+h}|f(x)-f(p)|dx<\varepsilon$ para *x* suficientemente próximo de *h*. Assim, $F'(p)-f(p)=0$ para todo $p\in(a,b)$. □

Uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, cuja derivada é igual à função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$ para todo *x* em (a,b), é chamada de **primitiva** de *f*.

Reflita

Vale a recíproca do teorema acima? Isto é, se existir uma função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ com $g'=f$, vale $g(y)=\int_a^y f(x)dx$?

Esta seção é principalmente uma seção conceitual, em que os fundamentos para o estudo de integrais são introduzidos, assim como são comentados os principais resultados. O tópico de funções integráveis é bastante extenso e mereceria uma unidade à parte. No entanto, muito trabalho já foi feito até o presente momento, e os principais tópicos de Análise na reta foram abordados e discutidos. Fica, então, a vontade de saber: o que podemos fazer com as integrais definidas aqui? Esse estudo merece ser feito, e tenha a certeza de que a consulta desses na literatura trará grandes benefícios para sua formação matemática.

Saiba mais

Apresentamos nesta seção apenas os rudimentos da análise de funções integráveis. Como podemos notar, os resultados se baseiam não somente na parte analítica, mas apelam bastante para a intuição geométrica. Uma abordagem mais completa, analítica e concisa pode ser encontrada no capítulo 10, p. 121-134, da referência a seguir:

LIMA, Elon. **Análise Real.** vol. 1: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Para uma apresentação rigorosa do teorema fundamental do Cálculo e das somas de Riemann, veja o capítulo 11 do mesmo livro.

Sem medo de errar

Agora que finalizamos a seção teórica, podemos retomar seu último desafio, no qual você deve ajudar a equipe de engenheiros a compreender alguns conceitos matemáticos envolvidos na geração de energia de um novo motor. Com o devido embasamento matemático, a equipe poderá garantir que os resultados são válidos.

No problema atual, é necessário calcular o total da energia produzida por um motor ao longo do tempo, cuja tecnologia ainda está em desenvolvimento, para a comparação com o desempenho dos automóveis que estão no mercado. Para isso, o time de engenharia precisa calcular (analítica ou numericamente) integrais baseadas nas curvas que obtêm para a potência do motor em função do tempo. Muitas vezes são tratadas funções contínuas, mas que em alguns pontos possuem descontinuidades (falhas do motor, erros, de operação, entre outras).

Vale a pena neste momento, antes de partir para os cálculos, relembrá-los dos conceitos que envolvem a obtenção da integral como limite de somas de Riemann, inclusive com gráficos parecidos com os das figuras desta seção, e notar que não é necessário supor a continuidade da função para que exista a integral. Para isso, é recomendável comentar também sobre a parte mais analítica: a definição de funções integráveis em termos de partições e a caracterização dada no Teorema 4.11.

Após comentar sobre o teorema 4.12, que afirma que toda função contínua é integrável, chega o momento de tratar das descontinuidades da função. Suponha que a função $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ possua um número finito de descontinuidades no intervalo $[a,b]$, como na figura 4.8 cujo gráfico é denotado pelas curvas verdes. Queremos mostrar que, apesar dessas descontinuidades, para *a* fixo, a integral $F(y)=\int_a^y f(x)dx$, que representa a área hachurada abaixo do gráfico da função (quando suposta positiva), é uma função contínua de *y*. Vimos que quando *f* é contínua, isso é verdade (na verdade *F* é diferenciável). Mas e se não supusermos a continuidade de *f*?

Figura 4.8 | Função com um número finito de descontinuidades

Fonte: elaborada pelo autor.

Queremos saber se *F* é contínua em $p\in[a,b]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $p\in(a,b)$. Então, seguindo a definição de continuidade, seja $\varepsilon>0$. Tomemos $\delta>0$, tal que $\int_{p-\delta}^{p+\delta}|f(x)|dx<\varepsilon$ e $|h|<\delta$. Então, $F(p)=\int_a^p f(x)dx$ e $F(p+h)=\int_a^{p+h} f(x)dx$. Desse modo, $F(p+h)-F(p)=\int_p^{p+h} f(x)dx$, independente do valor de *a*. Logo $|F(p+h)-F(p)|=\left|\int_p^{p+h} f(x)dx\right|\leq\int_p^{p+h}|f(x)|dx\leq\int_{p-\delta}^{p+\delta}|f(x)|dx<\varepsilon$.

Assim, mostramos que *F* é contínua em todo $p\in[a,b]$. Suponha agora que *f* é contínua em todo o intervalo $[a,b]$, menos em um ponto $q\in(a,b)$. Então *F* é diferenciável em $(a,q)\cup(q,b)$. Vamos tentar calcular a derivada de *F* em *q*. Para isso, utilizamos a seguinte caracterização: *F* é diferenciável em *q* se, e somente se, suas derivadas laterais à esquerda e à direita existirem e forem iguais em *q*. Mas pelo teorema fundamental do Cálculo, a derivada lateral à esquerda $F_{-}^{l}(q)=\lim_{x\to q^{-}} f(x)$ e a derivada à direita é $F_{+}^{l}(q)=\lim_{x\to q^{+}} f(x)$. Como f é descontínua em q, segue que $\lim_{x\to q^{-}} f(x)\neq \lim_{x\to q^{+}} f(x)$, de modo que $F_{-}^{l}(q)\neq F_{+}^{l}(q)$ e, portanto, $F(y)=\int_{a}^{y} f(x)dx$ não é diferenciável em q.

Mostre esse resultado a seus colegas e comente sobre a demonstração para debater até que ponto os resultados analíticos sobre integrais de funções descontínuas são úteis na prática.

Avançando na prática

Toda função crescente é integrável?

Descrição da situação-problema

Suponha que você está lecionando uma disciplina de cálculo diferencial e integral, e está no final do semestre. Em uma aula de Cálculo destinada a tirar as dúvidas dos alunos, um deles pergunta: "Professor, sei das condições para a integrabilidade em termos das partições e das somas de Riemann. Sei também que toda função contínua é integrável. Mas tenho aqui para analisar uma função e só sei que ela é crescente e limitada. Não sei se é contínua. Como posso dizer se essa função é integrável ou não, se não tenho nenhuma informação adicional?"

Resolução da situação-problema

Bom, o primeiro passo é lembrar o aluno de que a função não precisa ser contínua para ser integrável. Essa é uma condição muito especial (mas de fato a maioria dos exemplos que conseguimos imaginar são de funções contínuas). Você pode perguntar ao aluno se ele acha que a função é integrável ou não, e o porquê. Se ele achar que é integrável, precisa demonstrar. Se não, precisa dar um exemplo de função crescente e limitada que não é integrável.

Após esse tempo de discussão com o aluno, você pode lembrá-lo de que temos que enfrentar os desafios com as armas que temos. E o que temos é o teorema 4.11, que nos dá as condições de integrabilidade em termos de partições convenientes. Pois bem: tomamos um $\varepsilon>0$ e queremos, então, encontrar uma partição P tal que $S_P - s_P<\varepsilon$. Como $s_P=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\Delta x_k$ e $S_P=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot\Delta x_k$ para uma partição $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, temos do fato de f ser crescente que $m_k=f(x_{k-1})$ (extremo esquerdo do intervalo) e $M_k=f(x_k)$

(extremo direito do intervalo). Assim, $M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Como $S_P - s_P = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\cdot\Delta x_k$, segue que $S_P - s_P = \sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)\cdot\Delta x_k$. Agora notemos que, ao tomarmos uma partição igualmente espaçada, teremos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $S_P - s_P = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)$. Mas a soma na expressão anterior é dada por $\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = f(b) - f(a)$.

Temos então que, para uma partição igualmente espaçada, $S_P - s_P = \left(f(b) - f(a)\right)\cdot\Delta x$. Tomando n suficientemente grande para que $\Delta x < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, segue que $S_P - s_P < \varepsilon$, e encontramos a partição desejada.

Guie o aluno por essa demonstração, incentivando-o a refletir sobre cada passo. Sempre é momento de aprender!

Faça valer a pena

1. Vamos demonstrar o seguinte resultado: dada a função integrável $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, vale $\int_a^b \left(k\cdot f(t)\right)dt = k\cdot\int_a^b f(t)\,dt$ para $k\in\mathbb{R}$. Para isso, pelo Teorema 4.11 tomamos uma partição P de $[a,b]$, tal que _______. Então, para a função $k\cdot f:[a,b]\to\mathbb{R}$, vale para a mesma partição $\overline{S}_P - \underline{s}_P < \varepsilon$ para a diferença entre as somas superior e inferior, de modo que $k\cdot f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável.

Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna:

a) $S_P - s_P = \varepsilon/|k|$
b) $S_P - s_P < \varepsilon/|k|$
c) $S_P - s_P < \varepsilon$
d) $S_P - s_P = \varepsilon$
e) $S_P - s_P < \varepsilon/k$

2. Notemos que vale a recíproca do teorema fundamental do Cálculo. Isto é, tomemos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Se existir uma função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ com $g' = f$, vale $g(y) = \int_a^y f(x)\,dx + C$, onde C é uma constante.
Vamos demonstrar esse resultado. Para isso, vamos definir a função $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, tal que $h(y) = \int_a^y f(x)\,dx$. Então, pelo teorema fundamental do Cálculo, vale $h'(y) = f(y)$ para todo y em (a,b). Logo, da hipótese de que $g' = f$ chegamos a $h'(y) = g'(y)$ para todo y em (a,b). Mostraremos que existe uma constante C, tal que $g(y) = h(y) + C$ para todo y em (a,b).

Primeiramente, vamos definir a função auxiliar $T:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por ________. Então, $T'(y)=0$ para todo y em (a,b). Pelo teorema do valor médio, segue então que $T(b)=T(a)$. Mais do que isso, tomando arbitrariamente um intervalo $[x,y]\subset[a,b]$, o teorema do valor médio aplicado à função T no intervalo $[x,y]$ nos diz que existe $z\in(x,y)$, tal que __________. Mas como $T'(y)=0$ para todo y em (a,b), segue que $T'(z)=0$ e, portanto, $T(y)-T(x)=0$, ou seja, T é constante em $[a,b]$. Daí, resulta que existe uma constante C tal que $g(y)=h(y)+C$, isto é, $g(y)=\int_a^y f(x)dx+C$, para todo y em (a,b).

Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas:

a) $T(y)=g(y)+h(y)$; $T(y)-T(x)=T'(z)\cdot(y-x)$
b) $T(y)=g(y)-h(y)$; $T(z)-T(x)=T'(y)\cdot(z-x)$
c) $T(y)=g(y)-h(y)$; $T(y)-T(x)=T'(z)\cdot(y-x)$
d) $T(y)=g(y)+h(y)$; $T(y)-T(x)=T'(z)\cdot(y-x)$
e) $T(y)=g(y)-h(y)$; $T(b)-T(a)=T'(z)\cdot(b-a)$

3. Vamos demonstrar aqui o seguinte resultado, que se refere à mudança da variável de integração. O resultado é o seguinte (LIMA, 2016a, p. 139):
"Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua, $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c,d])\subset[a,b]$. Então,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx=\int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)dt$$ ".

Para isso, utilizaremos a regra da cadeia para a derivada e o teorema fundamental do Cálculo. Associamos a f a função integral (primitiva) $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $F(y)=\int_a^y f(x)dx$, o que o teorema fundamental do Cálculo garante já que f é contínua. Assim, para $[v,w]\subset[a,b]$, temos $\int_v^w f(x)dx=F(w)-F(v)$. Em particular, $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx=F(g(d))-F(g(c))$, isto é, ________. Notemos que, pela regra da cadeia, $(F\circ g)'(x)=F'(g(x))\cdot g'(x)$. Pela recíproca do teorema fundamental do Cálculo, existe uma constante C, tal que $(F\circ g)(y)=\int_c^y (F\circ g)'(t)\,dt+C$ e, portanto, $(F\circ g)(y)=\int_c^y F'(g(t))\cdot g'(t)\,dt+C$. Também pela recíproca do teorema fundamental do Cálculo, temos que $F'=f$, de modo que $(F\circ g)(y)=\int_c^y f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$.

Podemos, então, avaliar $(F\circ g)(d)-(F\circ g)(c)$: pela expressão integral para $(F\circ g)(y)$, segue que ________. Assim, como mostramos que

$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$, segue a igualdade $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g^l(t)\, dt$ e o resultado está demonstrado.

Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas:

a) $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$; $F(d) - F(c) = \int_c^d f(g(t)) \cdot g^l(t)\, dt$

b) $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$; $(F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = \int_c^d f(g(t)) \cdot g^l(t)\, dt$

c) $\int_c^d f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$; $(F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = \int_c^d f(g(t)) \cdot g^l(t)\, dt$

d) $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$; $(F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(g(t)) \cdot g^l(t)\, dt$

e) $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$; $(F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = \int_c^d f(t) \cdot g^l(t)\, dt$

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para Licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de**. Análise I.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo:** Volume 1. 2. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1987.

LIMA, Elon. **Análise Real. vol. 1**: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

LIMA, Elon. **Curso de Análise vol. 1**. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016

ISBN 978-85-522-1355-0