

# Transferência de Calor e Massa

## Transferência de Calor e Massa

Alexandre Diório Natália Maira Braga Oliveira

#### © 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

#### Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

#### Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi Camila Cardoso Rotella Danielly Nunes Andrade Noé Grasiele Aparecida Lourenço Isabel Cristina Chagas Barbin Lidiane Cristina Vivaldini Olo Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

#### Revisão Técnica

Roberta Lopes Drekener Roberto Mac Intyer Simões

#### Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora) Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente) Elmir Carvalho da Silva (Coordenador) Letícia Bento Pieroni (Coordenadora) Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Diório, Alexandre D593t Transferência de calor e massa / Alexandre Diório, Natália Maira Braga Oliveira. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018. 240 p.

ISBN 978-85-522-1189-1

1. Condução. 2. Convecção. 3. Radiação. I. Diório, Alexandre. II. Título.

CDD 621

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018 Editora e Distribuidora Educacional S.A. Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza CEP: 86041-100 – Londrina – PR e-mail: editora.educacional@kroton.com.br Homepage: http://www.kroton.com.br/

## Sumário

Unidade 1   Condução de calor		
Seção 1.1 - Condução unidimensional em regime estacionário 📖	9	
Seção 1.2 - Condução bidimensional em regime estacionário	26	
Seção 1.3 - Condução transiente	43	
Unidade 2   Princípios da convecção de calor	61	
Seção 2.1 - Introdução à convecção de calor	63	
Seção 2.2 - Escoamento externo	78	
Seção 2.3 - Escoamento interno	99	
Unidade 3   Convecção natural, ebulição e condensação	117	
Seção 3.1 - Convecção natural	119	
Seção 3.2 - Ebulição	141	
Seção 3.3 - Condensação e trocadores de calor	159	
Unidade 4   Radiação de calor e transferência de massa	179	
Seção 4.1 - Radiação: processos e propriedades	181	
Seção 4.2 - Troca de radiação entre superfícies	199	
Seção 4.3 - Transferência de massa por difusão	219	

## Palavras do autor

Olhe ao seu redor. Você está cercado pelos fenômenos de transferência de calor e massa. A dissolução do açúcar no café envolve o fenômeno de difusão mássica, as correntes de ar que resfriam o seu corpo em um dia quente por meio de trocas térmicas convectivas e até o aquecimento do seu smartphone quando utilizado durante muito tempo são exemplos de que esta disciplina é amplamente aplicada na vida cotidiana e, também, das engenharias.

A fim de analisar esses tipos de situações e várias outras envolvendo a transferência de calor e massa, você conhecerá neste material os princípios envolvidos na transferência de calor por condução uni, bidimensional e transiente, a convecção em escoamento externo ou interno, a convecção natural, a ebulição e a condensação. Além disso, você irá compreender o processo de radiação de calor e os princípios de transferência de massa por difusão. Após conhecer e compreender os assuntos deste material, você saberá resolver problemas práticos referentes à condução de calor e à convecção também. Será capaz de analisar as situações que envolvem convecção natural em processos com mudança de fase ou não, além de identificar situações em que a radiação de calor é significativa e ainda analisar o processo de difusão mássica.

Para facilitar seu entendimento acerca dos conteúdos abordados nesta disciplina, dividimos este livro em quatro unidades de ensino. A Unidade 1 se refere ao fenômeno da condução de calor uni e bidimensional tanto em regime estacionário quanto em regime transiente. Além disso, será estudada uma aplicação particular do fenômeno de condução por meio do estudo de superfícies estendidas denominadas aletas. A Unidade 2 aborda os processos de transferência em que há movimento relativo entre as regiões que transferem energia, ou seja, a convecção de calor tanto no escoamento externo aos corpos quanto internamente. Veremos que nesse movimento entre as fases surge uma camada limite de velocidade e de temperatura na qual estudaremos suas definições e propriedades. Na sequência, a Unidade 3 trata do caso em que o movimento convectivo é ocasionado naturalmente, ou seja, sem o emprego de um ventilador ou bomba, por exemplo. Nesta unidade

também veremos como estudar processos em que há mudança de fase como a ebulição e a condensação. Esta unidade também analisará os equipamentos trocadores de calor pelo método da efetividade, abordando cálculos de projeto e de desempenho. Por fim, a Unidade 4 encerra o livro por meio do fenômeno da radiação de calor e da transferência de massa por difusão.

Caro aluno, o autoestudo deste material é importantíssimo para você, pois as situações aqui encontradas, e outras que aparecem na vida profissional, podem envolver os conceitos de transferência de calor. É importantíssimo para o seu bom desempenho acadêmico e profissional que você assimile as informações contidas nos textos e exercícios propostos. Portanto, não fique parado. Comece os estudos lendo e compreendendo os assuntos do material e teste seus conhecimentos com os exercícios e resolvendo os desafios de cada seção!

## Unidade 1

## Condução de calor

#### Convite ao estudo

Em 2018 o mundo assistiu ao lançamento do maior foguete até então já criado pelo ser humano alçar voo das instalações espaciais em Cabo Canaveral (EUA) rumo ao espaço. Ao deixar a atmosfera, foi possível ver claramente um brilho luminoso no foguete devido ao intenso aquecimento realizado entre o atrito da fuselagem da espaçonave e as partículas que compõem a atmosfera. Com isso, as temperaturas na parte externa da fuselagem são altíssimas, porém, no interior não, permitindo que os astronautas possam viajar com conforto térmico adequado. Além disso, é comum em nossas residências ou em restaurantes, sentirmos o ar quente quando passamos perto de um forno ligado, por exemplo. Esse aquecimento se deve à perda de energia dos gases de combustão no interior do forno por condução através de sua estrutura.

Entender e compreender como tais fenômenos ocorrem e outros princípios da transferência de calor por condução fazem parte do nosso estudo nesta unidade de ensino. É fundamental que estes conhecimentos lhes permitam saber resolver problemas envolvendo a transferência de calor por condução em situações unidimensionais, bidimensionais e transiente.

Imagine que você foi contratado por uma grande empresa de projetos no âmbito da Engenharia. Neste primeiro momento você irá atuar junto a três projetos que necessitam da aplicação dos fundamentos de transferência de calor para serem resolvidos. O primeiro projeto envolverá a determinação do perfil de temperatura em um material utilizado pela indústria aeroespacial; o segundo projeto tratará do perfil de temperatura em sólido bidimensional, sendo este em específico a chaminé de um forno industrial. Por fim, no último projeto desta sua primeira fase na empresa envolverá a solução de um problema de resfriamento de esferas metálicas.

Estudar a transferência de calor envolve determinar perfis de temperatura em sólidos. Você é capaz de obter tal perfil? E se a situação de condução envolver um sólido bidimensional, como poderíamos obter o perfil de temperatura nesta situação? Para as situações de condução transiente, os métodos de determinação das taxas de transferência de calor são análogos para o regime permanente?

Esta seção se iniciará apresentando uma situação de condução de calor por meio do aquecimento de uma longa barra. Serão apresentados, então, os conceitos que regem o fenômeno da condução unidimensional e como se obter o perfil de temperatura. Na sequência, a seção analisará o fenômeno da condução para geometrias bidimensionais por meio do método das diferenças finitas e do balanço de energia. Esta seção se encerrará com o estudo da condução de calor em regime transiente. Desejo um bom estudo a você!

## Seção 1.1

## Condução unidimensional em regime estacionário

### Diálogo aberto

Caro aluno, o processo de condução unidimensional do calor em regime estacionário é uma situação que está presente em muitas aplicações práticas, como na perda de calor que é conduzido por uma parede de concreto, em uma janela de vidro ou por meio da embalagem de poliestireno de um produto refrigerado qualquer, na análise térmica de um aquecedor elétrico utilizado em algumas residências de regiões frias, em instrumentos de medições térmicas como termopares utilizados em indústrias e oficinas, no emprego de superfícies estendidas para aumentar a eficiência de troca térmica em maquinários ou eletrônicos, na regulação térmica através da camada cutânea e adiposa de organismos homeotérmicos, dentre outras situações.

Para estudar esse fenômeno, imagine que você foi contratado por uma grande empresa de Engenharia e que seu primeiro projeto envolve auxiliar uma indústria aeroespacial. Essa empresa está desenvolvendo novos materiais para usar na fuselagem de foguetes e aeronaves. Eles solicitam que você determine a quantidade de calor que é conduzido pelos materiais A e B apresentados na Figura 1.1. A empresa forneceu que o material A não tem geração de calor e B gera calor a uma taxa volumétrica de 1000 W/m<sup>3</sup>. Além disso,  $k_A = 13.4 \text{ W/}(\text{m} \cdot \text{K})$  e  $k_B = 14.2 \text{ W/}(\text{m} \cdot \text{K})$ . Ambos os materiais são retangulares e extensos de espessura L, com o lado externo mantido na temperatura de 0°C e o lado interno mantido à 25°C, as duas temperaturas se mantendo constantes.





Fonte: elaborada pelo autor.

Para solucionar o projeto você precisa utilizar qual equação para o perfil de temperatura? A quantidade de calor conduzida pelo material é determinada simplesmente pela lei de Fourier? Quais hipóteses podem ser assumidas neste caso?

Para responder a essas questões, você precisará mobilizar os conceitos de condução de calor unidimensional em regime permanente apresentados nesta seção e, assim, solucionar o problema da indústria aeroespacial.

#### Não pode faltar

Você provavelmente já notou que, ao segurar alguns materiais pela extremidade colocando a outra ponta no fogo, eventualmente estes se aquecem de tal forma que podem inclusive queimar a sua mão. Porém, repetindo o experimento com outros materiais, pode ser que não. Isto se deve a uma propriedade dos materiais oriunda do fenômeno da condução de calor denominada condutividade térmica que quanto maior seu valor, mais facilmente o material se aquece. Neste caso, a energia térmica que percorre o material sólido difunde-se por meio de um mecanismo molecular denominado difusão térmica de calor e se faz presente em todos os materiais sólidos ou fluidos estagnados, nos quais não existe movimento global ou macroscópico. A fim de entender o princípio físico da condução de calor (ou difusão térmica) exemplificado na Figura 1.2, é necessário olharmos o comportamento molecular de um sistema, por exemplo, um gás confinado entre duas superfícies com temperaturas distintas. As moléculas próximas da superfície aquecida apresentam maior energia relacionada ao movimento translacional (aleatório), rotacional e vibracional (internos à moléculas gasosas de menor energia que estão distantes de si. Com isso, transferem parte de sua energia para essas moléculas menos agitadas. Como a temperatura representa uma média da energia cinética, surge, dessa maneira, um fluxo de calor ( $\mathbf{q}_x$ ) sendo transferida da superfície  $\mathbf{T}_1$  para  $\mathbf{T}_2$  que é definida como condução de calor.



Figura 1.2 | Mecanismo molecular de condução de calor em um gás confinado

Fonte: Bergman et al. (2017, p. 3).

A condução de calor é dita unidimensional quando o fluxo de calor é transferido apenas em uma direção. Muitas situações unidimensionais de condução de calor são encontradas na prática, como a condução em uma parede plana com temperaturas distintas nas superfícies opostas. A parede plana tem dimensões muito maiores do que sua espessura, de tal forma que podemos aproximar o fluxo de calor apenas no sentido de atravessar seu interior. O mesmo ocorre em um cilindro e em uma esfera, que são sistemas ditos radiais. Nestes casos, a diferença de temperatura entre o interior e o exterior do cilindro ou da esfera faz com que a condução seja dada somente na direção do raio. O interesse em analisar a condução nesses casos envolve determinar como a temperatura varia conforme a posição, ou seja, o objetivo é determinar a função T = T(x) ou T = T(r), definida como perfil de temperatura. O perfil de temperatura para cada uma das geometrias mencionadas é obtido resolvendo-se a equação de condução de calor que está apresentada na Tabela 1.1 para condução unidimensional em regime permanente para um material de condutividade constante. Nessa tabela, temos que  $\dot{q}_g$  é a taxa específica de geração de energia, dada em  $W/m^3$  e;  $C_1 \in C_2$  são constantes de integração.

Tabela 1.1 | Equação de condução unidimensional em regime permanente com geração de energia em parede plana e sistemas radiais.

Geometria	Equação de Condução	Perfil de temperatura
Parede plana	$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0$	$T(x) = -\frac{\dot{q}_g}{2k}x^2 + C_1 \cdot x + C_2$
Cilindro	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0$	$T(r) \!=\! -\frac{\dot{q}_{g}}{4k}r^{2} \!+\! C_{1} \!\cdot\! ln(r) \!+\! C_{2}$
Esfera	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0$	$T(r) = -\frac{\dot{q}_g}{6k}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$

Fonte: elaborada com dados de Çengel et al. (2012, p. 76 e 77).

O termo de geração de energia surge quando uma forma de energia é convertida em outra, como uma resistência que transforma energia elétrica em energia térmica (efeito Joule), à desaceleração de nêutrons em reatores nucleares, pela ocorrência de reações químicas exotérmicas ou endotérmicas ( $\dot{q}_g < 0$ ) ou pela conversão de energia eletromagnética em térmica, devido à absorção de radiação no interior do meio.

Para uma situação em que não há geração de energia no interior do material, basta considerar  $\dot{e}_g = 0$ , tanto na equação de condução quanto no perfil de temperatura, simplificando ambas as equações.

Assimile

A determinação das constantes de integração requer o conhecimento de algumas condições de contorno. Algumas condições são imediatas como o conhecimento da temperatura na superfície do material. Veja um exemplo abaixo para a parede plana.

#### Exemplificando

Considere uma parede plana submetida à condução unidimensional em regime permanente sem geração de energia que tem uma superfície em  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  mantida na temperatura de 300 K. Desta condição de contorno segue:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow T(0) = 300 = C_1 \cdot 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

As condições de contorno mais comuns estão demonstradas na Figura 1.3 para uma placa plana. As mesmas condições valem para os sistemas radiais (cilindro e esfera) com pequenas adaptações. Por exemplo, para um cilindro ou esfera de raio R com temperatura superficial  $T_s$  a condição de contorno fica  $T(R) = T_s$ .

Figura 1.3 | Condições de contorno comuns para condução de calor: (a) temperatura conhecida na superfície; fluxo de calor especificado (b); extremidade isolada (c) e simetria térmica (d)



Fonte: adaptada de Çengel et al. (2012, p. 80-83).

Contraction Reflita

Com os perfis de temperatura e as condições de contorno apresentadas até o momento, como ficam as constantes de integração para o caso da parede plana, do cilindro e da esfera? E se o cilindro se assemelhar a um tubo de raio interno  $\mathbf{r}_i$  e externo  $\mathbf{r}_e$ ? Você pode conferir seus

resultados no Apêndice C. In: BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Uma vez obtido o perfil de temperatura, independente da geometria, é possível determinar o fluxo de calor transferido por condução no interior do material utilizando a equação de Fourier.

 $q_x'(x) = -k \frac{dT(x)}{dx} \bigcirc u q_r'(r) = -k \frac{dT(r)}{dr}$ 

Portanto, a determinação do fluxo é obtida derivando o perfil de temperatura e multiplicando pela condutividade térmica. A taxa de calor fica determinada multiplicando o fluxo pela área perpendicular ao sentido do fluxo de condução de calor.

Pesquise mais

Apesar de ser possível utilizar as equações apresentadas até o momento, quando temos um sistema composto por várias paredes adjacentes em contato entre si ou cilindros e esferas concêntricos, a análise fica muito trabalhosa. É conveniente nesses casos utilizar a definição de resistência térmica (analogia com resistência elétrica), porém a analogia não vale para casos em que existe geração de energia interna. Pesquise mais sobre esta analogia em paredes planas lendo o capítulo 3.1.3 intitulado "A Parede Composta". In: BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

No regime permanente, todo o calor que atravessar um material por condução chegará até a sua superfície onde, necessariamente, deverá ser transmitido para o ambiente por convecção, radiação ou ambos (vamos considerar até o final desta seção apenas a convecção e que o ambiente está em uma temperatura menor que a superfície). Desse modo, imagine um circuito integrado (chip de silício, comumente utilizado em computadores) que transforma energia elétrica em energia térmica devido ao seu uso. Neste caso, a energia térmica é conduzida pelo interior do chip até sua superfície. Como sua superfície é pequena, apenas uma pequena quantidade de calor é perdida por convecção e, dessa maneira, a temperatura interna do chip aumentará, atingindo rapidamente a sua temperatura máxima de trabalho. Para que isso não ocorra é comum aumentar a superfície do equipamento (um componente eletrônico, um ar-condicionado, um motor elétrico, etc.) visando melhorar a transferência térmica com o ambiente. Essa superfície estendida recebe o nome de aleta. Aumentar a eficiência (ou aumentar a taxa) de troca térmica com o fluido ao seu redor é sua finalidade única. Note a diferença na área disponível para troca térmica na Figura 1.4, que ilustra uma parede plana sem aletas e uma parede plana com superfície aletada.

Figura 1.4 | Ilustração do uso de aletas: (a) superfície lisa; (b) superfície com aletas planas retangulares de seção uniforme. Em que:  $T_{\infty}$  é a temperatura do fluido, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção;  $T_s$  é a temperatura da superfície, A representa a área e q é taxa de transferência de calor



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 95).

Reflita

Em uma superfície não aletada, como é possível aumentar a transferência de calor da superfície com o fluido adjacente sem usar aletas? A lei de Newton do resfriamento pode conter a resposta deste questionamento.

A extensão da superfície pode ser realizada de várias maneiras como apresentado na Figura 1.5. A aleta mostrada em (a) é dita plana, pois se estende a partir de uma parede plana e tem seção transversal uniforme de espessura t e comprimento w, pois sua área transversal é constante na direção x, porém essa área pode variar como em (b). Aletas comuns em sistemas radiais são as do tipo anular, como mostra a Figura 1.5(c) na qual sua base percorre toda a lateral do cilindro e seu comprimento segue a direção radial. O quarto tipo de aleta, apresentada em (d), é denominada de tipo pino, pois apresenta geometria de cone ou tronco de cone.

Figura 1.5 | Várias geometrias de aletas: (a) retangular reta; (b) triangular reta; (c) anular; (d) pino



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 96).

Em aletas também interessa obter o perfil de temperatura e o seu comprimento (pois muitas vezes é necessário dimensionar o comprimento da aleta para verificar se o gasto de material compensa a melhora de transferência térmica). Assim, é possível determinar o fluxo e a taxa de calor transferido pela aleta. Para atingir esses objetivos, realiza-se um balanço de energia no elemento diferencial da aleta apresentada na Figura 1.6.

Figura 1.6 | Elemento diferencial de aleta para balanço de energia



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 96).

O balanço de energia é expresso por:

$$\begin{cases} \mathsf{Taxa} \text{ de condução} \\ \mathsf{de calor em x} \end{cases} = \begin{cases} \mathsf{Taxa} \text{ de condução} \\ \mathsf{de calor em x} + \Delta x \end{cases} + \begin{cases} \mathsf{Taxa} \text{ de calor transferido} \\ \mathsf{por convecção pela superfície} \end{cases}$$

Deste balanço de energia deriva uma equação geral para aletas com área transversal ( $A_{tr}$ ) variando na direção x,  $A_{s}$  representando a área superficial do elemento diferencial, h o coeficiente convectivo do fluido ao redor da aleta e  $T_{\infty}$  é a temperatura do fluido.

$$\frac{d}{dx} \left( A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} (T - T_{\infty}) = 0$$

Considere, agora, o caso comum de uma aleta retangular (a) ou pino (b) de área de seção transversal uniforme e perímetro P mostrada na Figura 1.7

Figura 1.7 | Aleta retangular (a) e pino (b) com área transversal uniforme e perímetro P



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 97).

A equação geral da aleta se reduz para:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2(T - T_{\infty}) = 0; \ m^2 = \frac{h \cdot P}{k \cdot A_{tr}}$$

Utilizando a substituição  $\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{\infty}$ , segue que a equação diferencial e sua solução são:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \rightarrow \theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

As condições de contorno necessárias para determinar as constantes  $C_1 \in C_2$  envolve conhecer a temperatura da base da

aleta  $\theta(\mathbf{0}) = \theta_{\mathbf{b}}$  e na extremidade x=L, sendo necessário analisar 4 casos apresentados na Tabela 1.2, para obter o perfil de temperatura na aleta. No primeiro caso, considera-se que a aleta tem um comprimento muito grande (em matemática dizse tendendo ao infinito), de tal forma que a temperatura na sua ponta é muito próxima da temperatura do fluido circundante. O segundo caso despreza a perda de calor que ocorre pela superfície transversal da ponta da aleta, pois esta é muito inferior à área lateral da aleta. No terceiro caso, temos que a temperatura da aleta na sua extremidade é especificada e, por fim, o quarto caso considera que a área da ponta da aleta é isolada (não transfere calor com o ambiente), mas aumenta sua área lateral proporcionalmente.

Caso	Condição de contorno	Perfil de temperatura
Aleta infinitamente comprida	$T(L)-T_{\!\infty}=0$	$\frac{T(x) - T_{_{\infty}}}{T_{_{\text{base}}} - T_{_{\infty}}} = e^{^{-m\cdotx}}$
Extremidade isolada	$\left. \frac{dT}{dx} \right _{x=L} = 0$	$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_{\text{base}} - T_{\infty}} = \theta(x) = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL}$
Temp. conhecida	$T(L) = T_L$	$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_{base} - T_{\infty}} = \frac{\ell(L) \cdot \text{senh } mx + \text{senh } m(L - x)}{\text{senh } mL}$
Convecção na ponta	$-k \frac{dT}{dx}\Big _{x=L} = h[T(L) - T_{\infty}]$	$\frac{T(x) - T_{_{\infty}}}{T_{_{base}} - T_{_{\infty}}} = \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk) \text{senh } m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \text{senh } mL}$

Tabela 1.2 | Condições de contorno para aletas de comprimento L e seção transversal uniforme

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 99).

A escolha do tipo de aleta em uma dada aplicação dependerá da sua eficiência ( $\eta$ ). Essa eficiência é determinada pela razão entre a taxa real de transferência de calor da aleta selecionada pela taxa que a aleta teria se toda ela estiver na temperatura da sua base, que é a máxima taxa permitida (seria o caso da aleta com condutividade

térmica infinita). Essas taxas são determinadas a partir da equação de condução.

Como exemplo, para a aleta retangular de comprimento L, espessura t e largura w, a sua eficiência é determinada por:

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{\tanh\left(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{L} + t/2)\right)}{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{L} + t/2)}; \ \mathbf{m} = \sqrt{2 \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}}}$$

Para as geometrias comuns, expressões para a eficiência das aletas já foram tabelas e podem ser encontradas na Tabela 3-3 do capítulo 3 Condução de Calor Permanente. In: ÇENGEL et al. (2012, p. 170).

#### Sem medo de errar

Agora, você irá obter os perfis de temperatura nos materiais A e B devido ao projeto contratado pela empresa aeroespacial para desenvolvimento de componentes estruturais de aeronaves.

O primeiro passo consiste em estabelecer uma base de cálculo, pois a espessura de ambos os materiais é desconhecida. Um procedimento comum é considerar uma espessura unitária (em unidades do sistema internacional) e determinar a quantidade de calor transferido nessa situação. Desse modo, fica fácil obter o valor real para, por exemplo, uma espessura de 0,15 m, ou seja, basta multiplicar o valor determinado para L=1 m por 0,15 m.

Tanto para o material A quanto para o material B a condução de calor é unidimensional através de uma placa (ou parede) de espessura L=1 m. Então, a Tabela 1.1 fornece que o perfil de temperatura apropriado para o material A (sem geração de energia) e B (com geração de energia) são, respectivamente:

$$\mathbf{T}_{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{1} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}_{2}$$

$$T_{B}(x) = -\frac{\dot{q}_{g}}{2k}x^{2} + C_{3} \cdot x + C_{4}$$

Exemplificando

Pesquise mais

Na situação de uso dos materiais, as temperaturas de ambas as superfícies (interna e externa) são conhecidas. Então as condições de contorno são, para o material A:

#### $T_{\!_A}(0)\,{=}\,273,15\;K\;\;\in\;T_{\!_A}(1)\,{=}\,298,15\;K$

Analogamente, considerando que para o material B as condições de uso são as mesmas, temos que:

 $T_{_B}(0)\,{=}\,273,15~K~_{\rm e}~T_{_B}(1)\,{=}\,298,15~K$ 

Substituindo as condições de contorno para o material A, segue que as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são:

$$\begin{split} T_A(0) &= 273,15 \text{ K} \rightarrow 273,15 = C_1 \cdot 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 273,15 \text{ K} \\ T_A(1) &= 298,15 \text{ K} \rightarrow 298,15 = C_1 \cdot 1 + 273,15 \rightarrow C_1 = 25 \text{ K/m} \end{split}$$

Para o material B segue que:

 $T_{B}(0) = 273,15 \text{ K} \rightarrow 273,15 = -\frac{1000}{2 \cdot 14,2} 0 + C_{3} \cdot 0 + C_{4} \rightarrow C_{4} = 273,15 \text{ K}$ 1000

 $T_{_B}(1) = 298,15 \text{ K} \rightarrow 298,15 = -\frac{1000}{2 \cdot 14,2}1 + C_3 \cdot 1 + 273,15 \rightarrow C_3 = 60,21 \text{ K/m}$ 

Portanto, você determinou que os perfis de temperatura nos materiais A e B são, respectivamente:

 $T_A(x) = 25 \cdot x + 273,15$ 

 $T_{_{B}}(x) = -35,21x^2 + 60,21 \cdot x + 273,15$ 

A temperatura máxima no material B é obtida no ponto em que a derivada do perfil de temperatura em relação a x é nulo. Ou seja:

$$\frac{dT_{_B}}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left( -35,21x^2 + 60,21 \cdot x + 273,15 \right) = 0 \rightarrow x = 0,855 \text{ m}$$

E tem valor: T<sub>B.max</sub>(0,855) = 298,89 K = 25,74 °C

Os perfis de temperatura são desenhados na Figura 1.8 a partir de  $T_{\scriptscriptstyle \! A}(x)$  e  $T_{\scriptscriptstyle \! B}(x)$  .

Figura 1.8 | Perfil de temperatura para os materiais A e B



Fonte: elaborada pelo autor.

A quantidade de energia que é perdida pelo material depende de sua área. Portanto, usa-se como base de cálculo uma área unitária. Em outras palavras, determina-se o fluxo de calor que é conduzido através dos materiais A e B por meio da lei de Fourier.

$$q_{x,A}^{"}(x) = -k \frac{dT_{A}(x)}{dx} = -13, 4 \cdot \frac{d}{dx} (25 \cdot x + 273, 15) = -334 \text{ W/m}^{2}$$

Em que o sinal negativo indica que o calor é perdido para o ambiente externo.

$$q_{x,B}^{*}(x) = -k \frac{dT_{B}(x)}{dx} = -14.2 \cdot \frac{d}{dx} \left( -35,21x^{2} + 60,21 \cdot x + 273,15 \right) = 999,964 \cdot x - 854,982 \text{ W/m}^{2}$$

Em que o fluxo de calor conduzido no material com geração de energia varia linearmente com a posição. À esquerda do ponto 0,855 m o calor é conduzido para o ambiente e à direita ele é conduzido para dentro da aeronave.

Vale lembrar que as quantidades de calor foram determinadas para uma espessura unitária (1 m) e precisam ser corrigidas conforme a espessura real de fabricação das aeronaves.

### Avançando na prática

#### Determinação do comprimento de aleta retangular

#### Descrição da situação-problema

Uma aleta retangular de espessura 0,05 cm e largura 1,5 cm é instalada em um equipamento eletrônico. Sabe-se que a aleta se comporta como uma aleta infinitamente comprida e que uma medição comprovou que a temperatura na sua extremidade é de 350 K. Determine se o comprimento da aleta é adequado, sabendo que a aleta foi instalada em uma superfície plana com temperatura de 800 K, ar ambiente escoa ao redor da aleta e  $m^2 = 1,2910 m^{-1}$ .

#### Resolução da situação-problema

O perfil de temperatura para uma aleta de comprimento infinito é determinado por:

$$\frac{\mathsf{T}(\mathsf{x}) - \mathsf{T}_{_{\infty}}}{\mathsf{T}_{_{\text{base}}} - \mathsf{T}_{_{\infty}}} = e^{-\mathsf{m}\cdot\mathsf{x}}$$

Como escoa ar ambiente ao redor da aleta, então admitese  $T_{\infty} = 300 \text{ K}$ . Como a temperatura na extremidade da aleta é conhecida, segue que:

$$\begin{split} &\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_{base} - T_{\infty}} = e^{-m \cdot x} \rightarrow \frac{T(L) - T_{\infty}}{T_{base} - T_{\infty}} = e^{-m \cdot L} \\ &\frac{350 - 300}{800 - 300} = e^{-\sqrt{1.2910} \cdot L} \\ &L = -\frac{Ln(0, 1)}{\sqrt{1.2910}} = 2,027 \text{ m} \end{split}$$

O comprimento da aleta tem pouco mais de 2 m o que inviabiliza o projeto. Imagine uma aleta desse comprimento com 0,05 cm de espessura, ela poderia quebrar com seu peso próprio e o custo de material para sua construção também poderia ser elevado.

#### Faça valer a pena

**1.** O balanço de energia é a primeira etapa na análise de problemas que envolvem a transferência de energia entre dois pontos. No caso da transferência de calor, a energia térmica estará em trânsito da região de maior temperatura para a de menor temperatura.

Assinale a alternativa que resume a interpretação do balanço de energia aplicado na condução do calor.

- a) O balanço de energia em um elemento de volume diferencial leva em consideração o fato de que a energia não pode ser destruída nem criada. Isto quer dizer que todas as taxas que entram no sistema em análise, somada com a "geração" (por exemplo, devido a uma reação química) deve ser igual à soma de todas as taxas de calor que partem do elemento considerado e da eventual taxa de acúmulo de energia no sistema.
- b) O balanço de energia em um elemento de volume diferencial leva em consideração as energias presentes no interior do elemento e as diferentes formas de energias na redondeza do elemento diferencial, de tal forma que a soma de todas essas energias representa o conteúdo de energia interna do material.
- c) O balanço de energia representa a soma de todas as formas de energia que podem estar presentes em um elemento diferencial. Quando aplicada no caso da condução de calor, deve-se desconsiderar apenas as formas térmicas de energia.
- d) O termo da taxa de acúmulo de energia no elemento diferencial está relacionado ao aumento de temperatura no elemento. Quando o termo é positivo significa que a temperatura está diminuindo no interior do sistema.
- e) O balanço de energia não pode considerar o termo de geração de energia, visto que é impossível que a energia térmica, ou qualquer outra forma de energia, seja gerada. Isto é uma clara violação da primeira lei da Termodinâmica.

**2.** Os trocadores de calor são equipamentos muito utilizados para transferir a energia térmica de um fluido quente para outro de menor temperatura. Para isso empregam-se tubos produzidos em material de alta condutividade térmica. Para que a energia realize seu percurso neste equipamento é necessário que ela atravesse a parede do tubo.

Considerando um tubo de raio interno r e raio externo R, cujas temperaturas no lado externo e interno são, respectivamente,  $T_e \ e \ T_i$  e confeccionado em aço com condutividade térmica k, assinale a alternativa que contenha a equação de condução de calor unidimensional em regime permanente sem geração de energia.

- a)  $\frac{d}{dx}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{dT}{dx}\right) = .$
- b)  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$
- $C) \qquad \frac{d^2T}{dr^2} = 0.$
- d)  $\frac{d}{dr}\left(\frac{dT}{dr}\right) = 1$
- e)  $\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dT}{dr}\right) = .$

**3.** Considere o cilindro apresentado na figura a seguir.

Elemento diferencial em um cilindro de raio r e comprimento L com geração de energia no seu interior e seção transversal constante de área A.



Fonte: Çengel et al. (2012, p. 118).

Considerando a imagem mostrada anteriormente, julgue as alternativas a seguir e assinale aquela que apresenta uma possível condição de contorno para o problema de condução térmica no cilindro.

- a) Devido ao isolamento, pode-se considerar que o fluxo ou a taxa de calor nas bases do cilindro são nulos.
- b) Devido ao isolamento, pode-se considerar que o fluxo e a taxa de calor em r (superfície do cilindro) são nulos.
- c) O isolamento torna o fluxo ou a taxa de calor através da superfície conhecidos e facilmente determinados ou por convecção ou por radiação.

- d) O isolamento configura um caso de fluxo ou taxa de calor conhecidos.
- e) Por meio da imagem apresentada é possível utilizar a temperatura no centro do cilindro como uma condição de contorno.

## Seção 1.2

### Condução bidimensional em regime estacionário

### Diálogo aberto

Na transferência de calor por condução, quando o fluxo de calor é relevante apenas em uma direção, caracteriza-se uma condução unidimensional. Porém, existem situações na prática em que fluxo é significativo em duas direções figurando uma condução bidimensional. Exemplos práticos de condução bidimensional incluem a transferência de calor por uma parede espessa, através de um corpo sólido de formato em L, ao longo da estrutura de uma chaminé, entre outras.

A análise da condução bidimensional é assunto do seu segundo projeto atuando como funcionário do escritório de Engenharia. Lembre-se de que você foi contratado para fornecer soluções em projetos e estes têm requisitado conhecimentos sobre transferência de calor. Neste projeto, o cliente informa que ele está vivenciando problemas em um forno industrial que produz algumas ligas metálicas utilizadas em componentes estruturais. Neste caso, as temperaturas na chaminé do forno não estão adequadas e têm gerado perdas térmicas que dificultam o controle da temperatura dentro do forno. A solução desse projeto pode ser resolvida numericamente demonstrando o perfil de temperatura em uma seção simétrica da chaminé. A chaminé do forno está apresentada na Figura 1.9, sendo construída em concreto com ar atmosférico no exterior.



Figura 1.9 | Seção transversal da chaminé de um forno

Fonte: elaborada pelo autor.

Como abordar um problema desta natureza? É possível tratar o sistema considerando a transferência de calor como sendo unidimensional neste tipo de estrutura?

Para responder a essas questões você precisa conhecer e compreender o método de separação de variáveis, a forma adimensional da equação de condução de calor, o fator de forma e as equações de diferenças finitas. A condução bidimensional de calor pode parecer intimidante, mas não se preocupe, pois, os assuntos desta unidade lhe auxiliarão na análise desta situação! Bom estudo!

#### Não pode faltar

O objetivo do estudo da condução bidimensional de calor é determinar a taxa (ou o fluxo) de calor que é transferido através do material. Para isso, é necessário determinar o perfil de temperatura a fim de substituí-lo na lei de Fourier, porém a abordagem de sistema bidimensional difere da condução unidimensional.

Uma estratégia inteligente para abordar muitos problemas práticos de transferência de calor envolve a utilização do conceito de **fator de forma**. Mas como isso funciona?

Solucionar a equação de condução de calor para uma situação bidimensional não é trivial e muitas vezes a solução analítica não pode ser obtida ou demanda um esforço Herculano, pois as conduções de contorno ou a geometria podem ser complexas. Consequentemente, buscando um modo mais simples de analisar a condução bidimensional que ocorre entre duas superfícies mantidas nas temperaturas  $T_1 \neq T_2$ , emprega-se o fator de forma (S) na obtenção da taxa de condução de calor (q) descrito por:

$$q = S \cdot k \cdot (T_1 - T_2)$$

Em que k é a condutividade térmica do material sólido pertencente entre ambas as superfícies. Esta condição limita o uso do fator de forma, visto que este não pode ser utilizado no caso de fluidos devido à presença de convecção natural ou forçada nesses meios.

### Pesquise mais

Por depender unicamente da geometria do sistema, vários cientistas desenvolveram fórmulas para o fator de forma em diversas configurações comuns da Engenharia. Tais fórmulas podem ser encontradas na Tabela 3-7 do Capítulo 3: Condução de Calor Permanente. In: ÇENGEL et al. **Transferência de calor e massa**.4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

O fator de forma é utilizado na equação da taxa de transferência de calor, sendo um parâmetro dependente unicamente da geometria do sistema em análise, e a unidade do fator de forma é o metro. Veja um exemplo da sua utilização na condução de calor em uma tubulação de água.

#### Exemplificando

Em uma região fria a temperatura do solo atinge  $0 \, {}^{\circ}C$ . A tubulação de uma casa está enterrada horizontalmente 2 m abaixo do nível do solo ( $k_{solo} = 40 \, w/m^{\circ}C$ ) e tem diâmetro de 20 cm (Figura 1.10). Sabendo que o sistema de aquecimento de água da residência fornece 1000 W por metro linear de tubulação, determine qual a temperatura da água.

Figura 1.10 | Cilindro isotérmico de comprimento L enterrado no meio semi-infinito



Fonte: Çengel et al. (2012, p. 180).

Solução: esta situação de transferência de calor é apresentada na Figura 1.10.

Então, o fator de forma é calculado por:

$$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{Ln(4z/D)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1m}{Ln(4 \cdot 2m/0,20m)} = 1,70 \text{ m}$$

Substituindo o fator de forma na taxa global de transferência de calor, determina-se a temperatura:

## $q = S \cdot k \cdot (T_1 - T_2)$ 1000 W = 40 W/m°C · 1,70m · (T\_1 - 0°C) $\rightarrow$ T<sub>1</sub> = 14,7°C

Portanto, a temperatura da água é 14,7 °C.

De forma análoga ao fator de forma, existem situações em que o objeto sólido está envolvido por um material de características infinitas como o solo, por exemplo. Nessas situações, é comum utilizar a taxa de condução de calor adimensional ( $q_{ad}$ ) definida pela expressão seguinte na qual  $A_s$  representa a área da superfície não infinita.

$$q_{ad} = \frac{q}{k \cdot A_s} \cdot \frac{\sqrt{\frac{A_s}{4\pi}}}{(T_1 - T_2)}$$

Pesquise mais

Assim como para o fator de forma, fórmulas para a taxa de condução de calor adimensional já foram desenvolvidas para as configurações mais comuns da Engenharia e podem ser encontradas na Tabela 4-1(b). Taxas de condução de calor adimensionais do Capítulo 4 – Condução Bidimensional em Regime Estacionário. In: BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Existem situações bidimensionais em que é possível obter uma solução analítica utilizando-se o método de separação de variáveis para resolver a equação de condução de calor bidimensional em regime permanente sem geração de energia escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Para exemplificar a condução bidimensional considere a Figura 1.11 na qual uma placa retangular de espessura L e altura W tem três lados mantidos na temperatura  $T_1$  e um lado com  $T_2$ . Nessa situação a condução de calor é bidimensional, pois ocorre no plano xy, sendo possível desconsiderar condução perpendicular a esse plano ao admitir que a superfície nem as extremidades transferem calor.

Figura 1.11 | Placa retangular submetida à condução bidimensional de calor



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, [s.p.]).

A equação de condução bidimensional sem geração de energia em regime permanente consiste em uma equação diferencial parcial cuja solução analítica é obtida por meio do método da separação de variáveis.

Um tipo de condição de contorno necessária à resolução do método é aquela mostrada na Figura 1.11. Essa condição consiste no conhecimento das temperaturas das superfícies da placa retangular. Outras condições podem existir dependendo das características do problema.

Normalmente em transferência de calor realiza-se a adimensionalização da temperatura dividindo o gradiente  $T - T_1$  pelo maior gradiente existente, ou seja,  $T_2 - T_1$ , sem prejuízo de análise do fenômeno. Por que este é o maior gradiente de temperatura na placa? A equação de condução poderia ser escrita em termos do parâmetro  $r_1 = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$ .

Reflita

Agora aplica-se o método de separação de variáveis. Como o próprio nome sugere, escreve-se o parâmetro  $\theta$  como um produto das suas variáveis separadas, ou seja:

$$\theta(x,y) = F(x) \cdot G(y)$$

A substituição das funções F(x) = G(y) na equação de condução de calor fornece que: 1  $d^2 F(x) = 1$   $d^2 F(x)$ 

$$-\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{1}{G(y)} \cdot \frac{d^2 G(y)}{dy^2} = \lambda^2$$

A expressão anterior foi igualada a uma constante  $\lambda_{\Box}$  que precisa ser determinada. Isto é a chave de sucesso do método. Uma função somente de x (lado esquerdo da equação anterior) será igual a uma função somente de y (membro central da equação anterior) se ambas são iguais a uma constante. Com isso, a equação diferencial parcial original é reduzida em duas equações diferenciais ordinárias simples de serem resolvidas.

Portanto, pelo método segue que as equações diferenciais para F(x) e G(y) e suas soluções gerais são, respectivamente:

$$\frac{d^{2}F}{dx^{2}} + \lambda^{2} \cdot F = 0 \rightarrow F(x) = C_{1} \cdot \cos(\lambda x) + C_{2} \cdot \operatorname{sen}(\lambda x)$$
$$\frac{d^{2}G}{dy^{2}} - \lambda^{2} \cdot G = 0 \rightarrow G(y) = C_{3} \cdot e^{-\lambda y} + C_{4} \cdot e^{\lambda y}$$

Dessa forma, a solução geral da equação de calor bidimensional fica expressa por:

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y}) = \left[\mathbf{C}_1 \cdot \cos(\lambda \mathbf{x}) + \mathbf{C}_2 \cdot \sin(\lambda \mathbf{x})\right] \cdot \left[\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{e}^{-\lambda \mathbf{y}} + \mathbf{C}_4 \cdot \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{y}}\right]$$

A solução particular é obtida substituindo as condições de contorno que consiste no conhecimento das temperaturas laterais da placa (Figura 1.11). Facilmente, da condição (0,y) = 0 nota-se que  $C_1$  deve ser nula. Do caso (x,0) = 0 obtém-se que  $C_3 = -C_4$ . Portanto:

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_4 \cdot \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \left[-\mathbf{e}^{-\lambda \mathbf{y}} + \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{y}}\right] = \mathbf{C}_5 \cdot \operatorname{sen}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \left[-\mathbf{e}^{-\lambda \mathbf{y}} + \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{y}}\right]$$

Caso a constante  $C_5$  fosse negativa, seria impossível obter uma solução particular que satisfizesse às condições de contorno. Além disso, aplicando a condição  $\theta(L,y) = 0$ , verifica-se que a constante  $C_5$ teria que ser nula, mas isso não é interessante, pois só haveria solução trivial, mas a constante tem que ser não nula, pois a condição física impõe um gradiente de temperatura no material. Portanto, é necessário que a função seno seja nula, ou seja, a constante  $\lambda$  deve satisfazer que  $sen(\lambda x) = 0$ . Portanto:  $n \cdot \pi$ 

$$\lambda = \frac{n \cdot \pi}{L}; n = 1, 2, 3, ...$$

A partir desse resultado, tem-se que a expressão para o perfil de temperatura é:

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}_{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\mathbf{n}\pi\mathbf{x}}{\mathbf{L}}\right) \cdot \left(\mathbf{e}^{n\pi\mathbf{y}_{\mathbf{L}}} - \mathbf{e}^{-n\pi\mathbf{y}_{\mathbf{L}}}\right)$$

Para determinação das constantes  $C_n$  utiliza-se a condição de contorno ainda não utilizada, isto é  $\theta(\mathbf{x},\mathbf{H}) = \mathbf{1}$ , e a expansão em série de Fourier. Dessa forma, a solução específica para a condução de calor bidimensional em regime permanente sem geração de energia em uma placa retangular com três lados mantidos na temperatura  $\mathbf{T}_1$  e um lado mantido  $\mathbf{T}_n \neq \mathbf{T}$ , é expressa por:

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \mathbf{x}}{L}\right) \cdot \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi \mathbf{y}}{L}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi \mathbf{H}}{L}\right)}$$

A solução da condução bidimensional obtida pelo método de separação de variáveis (também chamado de solução analítica visto fornecer a solução exata) é trabalhosa, extensa e somente possível para geometrias e condições de contorno simples. Na prática, precisa-se de uma abordagem mais simples e rápida para analisar problemas desta natureza. Para isso, utiliza-se as equações de diferenças finitas que consistem em, a grosso modo, substituir as derivadas da equação de condução por diferenças finitas de temperatura. Isto permitirá resolver a expressão de forma mais simples e rapidamente, porém perdendo um pouco da exatidão.



O método das diferenças finitas é um método numérico para solução da equação de calor bidimensional e que pode ser facilmente estendido para situação tridimensional. Ela não fornece a resposta exata do problema, mas sua solução pode se tornar tão próxima quanto se quiser de tal modo que para fins práticos considere-se sua solução como verdadeira. Além deste método numérico, existem os métodos dos elementos finitos, dos elementos de contornos e do balanço de energia.

A solução analítica  $\theta(x,y)$  fornece uma expressão contínua para todo x e y. Contrariamente a isso, pelo método das diferenças finitas só é possível obter solução para um conjunto discreto de pontos. Esses pontos, denominados de pontos nodais ou simplesmente nó, são os pontos que se originam ao dividir a região de análise conforme mostrado na Figura 1.12 (a posição x e y de um nó é representada pelos índices i e j, respectivamente). Quanto mais finamente dividida for a malha nodal (conjunto de pontos que também são chamados de rede ou grade) tão mais preciso será a solução do método numérico. A temperatura do nó (i,j) da Figura 1.12 representa a temperatura média da região delimitada pelas linhas tracejadas.

Figura 1.12 | Malha e ponto nodal com equação de diferenças finitas para x no ponto (i,j)



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, [s.p.]).

A equação de diferenças finitas, relação à x apenas, é:

$$\frac{\partial^{\mathbf{z}} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{z}}}\Big|_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \approx \frac{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{i}+\frac{1}{2},\mathbf{j}} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{i}-\frac{1}{2},\mathbf{j}}}{\Delta \mathbf{x}}$$

Em que as primeiras derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \mathsf{x}}\Big|_{\mathsf{i} \ast \frac{1}{2} \mathsf{y}_j} \approx \frac{\mathsf{T}_{\mathsf{i} \ast \mathsf{1},j} - \mathsf{T}_{\mathsf{i},j}}{\Delta \mathsf{x}} ~ \in ~ \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \mathsf{x}}\Big|_{\mathsf{i} \ast \frac{1}{2} \mathsf{y}_2} \approx \frac{\mathsf{T}_{\mathsf{i},j} - \mathsf{T}_{\mathsf{i},\mathsf{1},j}}{\Delta \mathsf{x}}$$

Para a derivada em y, as equações são análogas substituindo-se  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  .

Se o contorno geométrico for dividido por uma malha tal que  $\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{y}$ , então a equação de calor em diferenças finitas é obtida a partir da substituição das equações de diferenças finitas (para x e y) em  $\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}^2} = \mathbf{0}$  resultando em:

### $T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = 0$

Vale notar que a temperatura  $T_{i,j}$  é uma média aritmética das temperaturas dos nós adjacentes ao nó (i,j). Além disso, a equação diferencial original foi aproximada por uma equação algébrica para o nó (i,j). A determinação do perfil de temperatura dentro do contorno geométrico consiste em escrever uma equação de diferenças finitas para cada nó presente na malha, e então resolver, simultaneamente, todas essas equações algébricas. Para isso, empregase cálculo matricial, o método de Gauss-Seidel ou calculadoras e programas computacionais.

A vantagem do método permite analisar situações em que estejam presentes, por exemplo, diversos materiais, fontes de calor ou mesmo que as superfícies dos materiais não estejam orientadas na mesma direção do eixo coordenado, empregado na análise do fenômeno.

Uma forma intuitiva de desenvolver a equação algébrica para um nó qualquer, que é idêntica à demonstrada pelo método de diferenças finitas, envolve realizar o balanço de energia em cada nó, considerando que as taxas de calor dos nós adjacentes têm a direção de entrar no nó em análise. Esse processo está exemplificado na Figura 1.13. Observe que quando o nó se encontra na superfície do material, metade do nó pode estar sujeito à convecção. Caso a superfície esteja isolada, então nesse caso a taxa e o fluxo de calor através da superfície seriam nulos.

Figura 1.13 | Balanço de energia sem geração interna em nó interior (a) e nó superficial (b)



Fonte: elaborada pelo autor.


Realizando o balanço de energia no nó interior, considerando que o nó não acumula e não gera energia segue que:

#### $q_{_{2\rightarrow5}}+q_{_{4\rightarrow5}}+q_{_{6\rightarrow5}}+q_{_{8\rightarrow5}}=0$

Como todas as taxas de calor são condutivas, substitui-se a lei de Fourier da condução no balanço de energia. A área perpendicular de transferência térmica ( $\Delta y \cdot \Delta z$  ou  $\Delta x \cdot \Delta z$ ) são realizadas por unidade de comprimento do material, ou seja, "z = 1m.

$$k\cdot\Delta x\cdot 1\cdot \frac{T_2-T_5}{\Delta y} + k\cdot\Delta y\cdot 1\cdot \frac{T_4-T_5}{\Delta x} + k\cdot\Delta y\cdot 1\cdot \frac{T_6-T_5}{\Delta x} + k\cdot\Delta x\cdot 1\cdot \frac{T_8-T_5}{\Delta y} = 0$$

Como é comum dividir a malha com espaçamentos iguais, ou seja,  $\Delta x = \Delta y$ , é possível demonstrar que:

$$T_2 + T_8 + T_6 + T_4 - 4 \cdot T_5 = 0$$

Ou, de modo genérico para um nó (i,j):

## $T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4 \cdot T_{i,j} = 0$

Que é uma equação algébrica idêntica à equação de diferenças finitas, porém ela foi deduzida sem a necessidade de um grandioso trabalho matemático nem o uso de fórmulas prontas ou livros específicos.

Pesquise mais

Reflita

Equações de diferenças finitas obtidas por qualquer um dos métodos demonstrados já foram desenvolvidas para diversos tipos de nós e podem ser encontradas na Tabela 4.2. Resumo de equações de diferenças finitas para pontos nodais. In: BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

A vantagem de se utilizar o método do balanço de energia é a possibilidade de desenvolver as equações de diferenças finitas de uma maneira intuitiva, sem ter de recorrer ao uso de equações prontas e nem de fazer o uso de memorizações de equações. Além disso, o balanço pode ser aplicado em diversas geometrias e condições de contorno.

Realizar o balanço de energia em cada um dos nós que compõem a malha térmica irá produzir um conjunto de equações lineares, tantas equações quantos forem o número de nós na malha. Para resolver esse conjunto de equações, você pode recorrer a um método iterativo de cálculo numérico como o método de Gauss-Seidel, ao cálculo matricial ou algum software disponível.

#### Sem medo de errar

Você está contratado para solucionar projetos em uma grande empresa de Engenharia. O segundo projeto sob sua responsabilidade envolve determinar o perfil de temperatura em uma chaminé que está instalada em um forno industrial onde se produzem ligas metálicas. A partir dessa informação o cliente irá tomar as providências necessárias.

A primeira etapa do processo consiste em analisar o perfil (seção) da chaminé em que o problema está ocorrendo. Este é um caso de transferência de calor bidimensional sem geração de energia e em regime permanente.

As informações necessárias para sua solução estão apresentadas na Figura 1.14 Como existe uma seção de simetria, pode-se abordar apenas a condução nesse segmento e espelhar as temperaturas obtidas para as demais regiões da chaminé.

 $T_{externa}=300K$   $h=50 W/(m^2.K)$   $f_{externa}=300K$   $f_{h}=50 W/(m^2.K)$   $f_{h}=50 W/(m^2.K)$ 

Figura 1.14 | Seção transversal da chaminé de um forno

Fonte: elaborada pelo autor.

A superfície interna é mantida isotermicamente na temperatura dos gases de combustão e o lado externo da chaminé está submetido à convecção, devido ao ar ambiente. Por sua geometria simétrica, é possível desenhar uma malha térmica apenas em um segmento da chaminé sendo, portanto, os pontos de temperatura determinados nesse segmento, espelhado para os demais.

Empregando a metodologia do balanço de energia em cada nó da malha térmica, é possível obter um conjunto de 7 equações e 7 incógnitas (note que  $T_g = T_g = 800 \text{ K}$ ) cuja solução simultânea é o perfil térmico desejado.

As equações oriundas dos balanços nos nós de 1 a 7 são apresentadas em respectivo na forma apropriada para resolução de modo iterativo (Gauss-Seidel).

$$\begin{split} T_1 &= (0,75 \cdot T_2 + 0,75 \cdot T_5 + 750)/4 \\ T_2 &= (0,75 \cdot T_1 + 0,75 \cdot T_3 + 1,5 \cdot T_6 + 1500)/8 \\ T_3 &= (0,75 \cdot T_2 + 0,75 \cdot T_4 + 1,5 \cdot T_7 + 1500)/8 \\ T_4 &= (1,5 \cdot T_3 + 750)/4 \\ T_5 &= (0,75 \cdot T_1 + 1,5 \cdot T_6 + 600)/3 \\ T_6 &= (1,5 \cdot T_2 + 1,5 \cdot T_5 + 1,5 \cdot T_7 + 1200)/6 \\ T_7 &= (1,5 \cdot T_3 + 1,5 \cdot T_6)/3 \end{split}$$

Temos, então, um conjunto de equações lineares formando um sistema possível e determinado. Para resolvê-lo, você pode utilizar seus conhecimentos de cálculo matricial, o método de Gauss-Seidel ou alguma calculadora ou software computacional que esteja disponível.

A resolução pelo método iterativo considera estimativa inicial que os nós estão na temperatura média entre o interior e o exterior, ou seja, 550 K. A partir dessa estimativa inicial, são determinadas todas as temperaturas por meio das equações anteriores, sendo esse conjunto de temperatura os resultados da primeira iteração. A primeira iteração é utilizada para recalcular as temperaturas dos nós de 1 a 7 pelas mesmas equações anteriores, consistindo então na segunda iteração do método. As iterações são realizadas até as temperaturas convergirem, ou seja, variarem muito pouco (nesta situação consideramos até a segunda casa decimal). Com isso, a solução do perfil de temperatura na parede da chaminé que você apresenta ao cliente como resposta pelo serviço contratado é:

 $\begin{array}{rrrr} T_1=358,14~K & ; & T_2=352,59~K & ; & T_3=331,05~K & ; & T_4=311,64~K & ; \\ T_5=557,48~K^{(2)}~T_6=535,88~K^{(2)}~T_7=433,46~K \end{array}$ 

#### Atenção

Por que a temperatura da superfície interna da chaminé está na mesma temperatura dos gases de combustão, mas a superfície externa não está com a mesma temperatura do ar ambiente? Isto está relacionado ao coeficiente convectivo. Devido às elevadas temperaturas e condições do escoamento interno (que não são tratadas no exercício), o coeficiente convectivo no lado interno da chaminé ocasiona uma rápida transferência de energia entre os gases e a superfície de modo que a sua superfície pode ser considerada na mesma temperatura dos gases. Além disso, o coeficiente de condução térmica no material do qual a chaminé é feita provavelmente é pequeno se comparado com o h do lado interno (desconhecido). Dessa forma, o número de Biot é muito alto. A situação física é análoga a um pedaço de carne exposto ao fogo muito alto. Por fora da carne forma-se uma camada dura e escura de carne queimada (temperatura elevada) enquanto o interior ainda encontra-se cru (baixa temperatura).

Portanto, as temperaturas dos nós de 1 a 7 demonstram a existência de gradientes de temperaturas na direção x e na direção y figurando um problema de condução bidimensional. Problemas dessa natureza podem ser abordados com o uso das equações de diferenças finitas conforme demonstrado. Observe que as temperaturas dos nós devem estar contidas entre a temperatura interna da chaminé e a externa (do ambiente).

Com os valores das temperaturas dos nós 1 a 7 o dono do forno industrial pode verificar que de fato existe um gradiente de temperatura e perda de calor através das paredes da chaminé. Uma alternativa para minimizar as perdas térmicas é diminuir o gradiente de temperatura por meio do revestimento das paredes da chaminé com uma camada de material refratário apropriado. Isto irá garantir menor condução de calor e melhor controle do processo.

#### Avançando na prática

#### Solução analítica da equação do calor bidimensional

#### Descrição da situação-problema

Você é engenheiro de uma indústria de base. Um dos equipamentos da linha de produção desta indústria tem a lateral retangular produzida em aço onde existe um medidor de temperatura (termopar) acoplado no seu centro. A partir dos dados de produtividade da máquina você levantou a hipótese de que a temperatura indicada no termopar é diferente da temperatura verdadeira e precisa verificar este fato, pois temperaturas distintas de 100°C prejudicam a qualidade da produção. Sabendo que 3 lados do equipamento são mantidos a  $T_1 = 50$  °C e sua porção superior à  $T_2 = 150$  °C (Figura 1.15) como você determinaria a temperatura no centro da lateral do equipamento que possui L = 2,0 m e H = 1,0 m?

Figura 1.15 | Temperaturas na lateral do equipamento



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

A fim de determinar a temperatura exata no centro da lateral do equipamento (Figura 1.15), você pode utilizar a solução analítica para o caso da placa bidimensional e comparar com o valor indicado no termopar. A equação que fornece essa temperatura é:

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \mathbf{x}}{L}\right) \cdot \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi \mathbf{y}}{L}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi \mathbf{H}}{L}\right)}$$

Em que x representa a largura e y a altura do equipamento.

Substituindo os valores fornecidos, temos que resolver uma série infinita de termos. Seus primeiros termos não nulos são apresentados na sequência.

$$\begin{split} \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{centro}} - \mathrm{T}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{T}_{2} - \mathrm{T}_{\mathrm{I}}} &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{1+1} + 1}{1} \mathrm{sen} \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{senh} \left(\frac{\pi 0.5}{2}\right)}{\mathrm{senh} \left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{3+1} + 1}{3} \mathrm{sen} \left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{senh} \left(\frac{3\pi 0.5}{2}\right)}{\mathrm{senh} \left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{3+1} + 1}{5} \mathrm{sen} \left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{senh} \left(\frac{3\pi 0.5}{2}\right)}{\mathrm{senh} \left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{7+1} + 1}{7} \mathrm{sen} \left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{senh} \left(\frac{7\pi 0.5}{2}\right)}{\mathrm{senh} \left(\frac{7\pi}{2}\right)} + \dots \\ \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{centro}} - 50}{150 - 50} &= \frac{4}{\pi} \cdot 0,3775 - \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot 0,0939 + \frac{4}{5 \cdot \pi} \cdot 0,0197 - \frac{4}{7 \cdot \pi} \cdot 4,09 \cdot 10^{-3} + \dots \end{split}$$

Como os termos da série são decrescentes, podemos utilizar com boa precisão somente os 4 primeiros termos não nulos da série. Logo, a temperatura procurada é:

$$T_{\text{centro}} = \left(0,4806 - 0,0399 + 5,02 \cdot 10^{-3} - 7,44 \cdot 10^{-4}\right) \cdot \left(150 - 50\right) + 50 = 94,50 \ ^{\circ}\text{C}$$

Como a temperatura medida é diferente de **100** °C, o equipamento precisa ser encaminhado para manutenção.

#### Faça valer a pena

**1.** As trocas térmicas condutivas podem ocorrer de maneira multidimensional. Devido às hipóteses simplificadoras, pode-se desconsiderar as taxas de calor em algumas direções, tornando o problema unidimensional. No entanto, existem muitas aplicações físicas em que a taxa de calor condutiva é significativa em duas direções configurando, dessa maneira, um fenômeno bidimensional.

Assinale a alternativa que ilustra um exemplo de uma situação prática em que a condução de calor ocorre de forma bidimensional em regime permanente.

- a) Uma placa retangular com temperaturas constantes e distintas especificadas nas quatro extremidades.
- b) Transferência de calor através de uma parede extensa e fina.
- c) Aquecimento de uma fina barra cilíndrica de cerâmica.

- d) Condução de calor através de uma janela residencial.
- e) Transferência de calor através do fundo de uma panela.

**2.** Uma empresa utiliza materiais radioativos para gerar energia em suas instalações e, uma vez que a vida útil do material é atingida, a sua eficiência diminui a ponto da empresa descartá-lo. A prática adotada consiste em enterrar o material no solo em uma região adequada. Porém, mesmo enterrado, as reações nucleares do material mantêm sua superfície aquecida. Nas proximidades do local de armazenamento dos resíduos radioativos, tem-se que a temperatura no solo é de, aproximadamente, **34** °C. O resíduo está a uma profundidade (z) de 15 m da superfície, de formato esférico apresentando diâmetro (D) de 3,5 m. Considere que o fator de forma da esfera é dado por:  $s = \frac{2 \cdot \pi \cdot D}{1 - \frac{D}{4.7}}$ , válida se z > D/2.



Aplique os conhecimentos de transferência de calor e assinale a alternativa que contenha a temperatura na superfície da esfera de material radioativo. Sabe-se que a terra apresenta condutividade térmica constante de 0,51 W/m°C e que o material radioativo libera 1500 W de energia térmica.

- a) 130 °C.
- b) 140 °C.
- c) 150 °C.
- d) 160 °C .
- e) 170 °C.

**3.** Uma abordagem interessante em problemas de condução bidimensional em regime permanente sem geração de energia consiste em utilizar o método do balanço de energia em um nó a fim de obter a

expressão algébrica de temperaturas para esse nó em questão. De acordo com as condições ao redor do nó e da sua geometria, como em um nó de extremidade apresentado na figura a seguir, os balanços adquirem formatos matemáticos específicos.

Nó superficial submetido à convecção no lado externo



Nó superficial

Fonte: elaborada pelo autor.

Desenvolva um balanço de energia no nó apresentado e assinale a alternativa que contenha o balanço e a expressão algébrica resultante. Considere  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1m$ .

a) Balanço de energia: 
$$q_{2\rightarrow4} + q_{3\rightarrow4} + q_{6\rightarrow4} + q_{convecção} = 0$$
;  
Expressão algébrica:  $\frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_4) + h \cdot (T_{amb} - T_4) = 0$ 

b) Balanço de energia:  $q_{2\rightarrow4} + q_{3\rightarrow4} + q_{6\rightarrow4} = 0$ ; Expressão algébrica:  $\frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_4) = 0$ 

 $\begin{array}{l} \label{eq:convectable} \mbox{C}) \mbox{ Balanço de energia: } q_{2\to4} + q_{3\to4} + q_{6\to4} = q_{convecção} \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{2} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{2} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{d}) \mbox{ Balanço de energia: } \frac{1}{2} \cdot q_{2\to4} + q_{3\to4} + \frac{1}{2} \cdot q_{6\to4} + q_{convecção} = 0 \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) + h \cdot (T_{amb} - T_4) = 0 \ ; \\ \mbox{e) Balanço de energia: } \frac{1}{2} \cdot q_{2\to4} + q_{3\to4} + \frac{1}{2} \cdot q_{6\to4} = q_{convecção} \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_2 - T_4) + k \cdot (T_3 - T_4) + \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_{amb} - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) + k \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_6 - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_6 - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_4) = h \cdot (T_6 - T_4) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_6 - T_6) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_6 - T_6) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_6 - T_6) \ ; \\ \mbox{Expressão algébrica: } \frac{k}{4} \cdot (T_6 - T_6 - T_6) \ ; \\ \mb$ 

# Seção 1.3

### Condução transiente

#### Diálogo aberto

Você já pensou que para prepararmos uma refeição é necessário, muitas vezes, descongelar um pedaço de carne. Esse descongelamento pode ser feito naturalmente deixando a carne exposta à temperatura ambiente ou acelerado introduzindo a carne no forno micro-ondas. O processo de descongelamento necessita que o calor fornecido percorra toda a espessura da carne até o seu centro e, para que isso ocorra, é necessário um determinado tempo ou um regime transiente de condução de calor, como dizem os engenheiros. Não só essa situação, mas muitas outras envolvem a condução transiente. Por exemplo em ambientes industriais, o resfriamento de um lingote de metal guente removido de um forno e exposto a uma corrente de ar frio, o endurecimento de barras, a calibração de instrumentos de medidas térmicas, a construção de tubos para água em regiões frias a fim de evitar seu congelamento, dentre outros. Nesta seção, nós estudaremos esses fenômenos, analisando o comportamento da temperatura em sólidos sob regime transiente.

Para estudar os conteúdos desta seção, lembre-se de que você está trabalhando em um escritório de engenharia e neste trabalho tem encontrado vários desafios na solução de projetos que envolvem conceitos de transferência de calor. Agora, você irá atuar no seu terceiro projeto, que envolve o fenômeno da condução, solicitado por um famoso artista plástico. Este cliente está preparando uma esfera metálica ( $\mathbf{k} = 15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  e  $\mathbf{d} = 52 \text{ cm}$ ) que precisa ser pintada com uma tinta sensível à temperatura ( $\mathbf{T} < 320 \text{ K}$ ). No entanto, antes da pintura a esfera é conformada sob aquecimento de  $\mathbf{T} = 800 \text{ K}$  e precisa esfriar no ambiente, pois a tinta é sensível ao calor. O artista está atrasado em relação ao prazo de entrega da obra para exposição em uma galeria. O cliente tem disponível apenas um dia para conformar e pintar a esfera. Ele procurou a empresa que você trabalha para saber se é

possível que a esfera esfrie no ar ambiente até atingir  $T=300\ K$ , considerando o coeficiente de transferência de calor convectivo de  $40\ W/m^2\cdot K$ . Para solucionar este projeto é necessário determinar o tempo de resfriamento da esfera, pois se o tempo for muito longo não será possível realizar a pintura e, portanto, que o artista exponha sua obra na galeria. Será que realizar o resfriamento da esfera ao ambiente será rápido o suficiente? Você terá que sugerir um método mais rápido de resfriamento? Qual seria uma alternativa viável?

Para resolver este novo projeto você utilizará os conceitos de condução de calor transiente. Nesta seção você irá aprender que alguns sistemas transientes, dependendo das características, podem ser analisados por meio da capacitância global e que outros materiais, ditos sólidos semi-infinitos devido às suas dimensões tenderem ao infinito e apresentar uma superfície plana, são analisados de modo distinto. Muitos problemas das Engenharias representam situação de condução transiente e, portanto, saber identificar essas situações e como analisá-las é importante para a sua formação. Vamos começar e bom estudo!

#### Não pode faltar

Nos casos de condução de calor em regime permanente, assumimos que o efeito do tempo era desprezível, ou seja, a temperatura se alterava com a posição apenas sendo o sistema permanente ou estacionário, portanto. Nesta seção, vamos considerar as situações em que o tempo tem efeito importante na condução de calor, situação denominada de regime transiente. Neste caso, a temperatura varia com o tempo e com a posição. Matematicamente escrevemos que T = T(x,t), no qual o gradiente de temperatura é unidimensional na direção x, apenas. Nesta seção consideramos, por questão de simplicidade matemática, apenas uma direção espacial.

Existem situações práticas em que, a cada instante, toda a temperatura do corpo está distribuída uniformemente, ou seja, é constante no espaço. Isto quer dizer que não existe gradiente de temperatura em relação à posição e, neste caso, a temperatura é igual em todo o ponto do objeto, se modificando apenas com

o tempo tal que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{t})$ . Tais sistemas são denominados de sistemas aglomerados e a sua análise ocorre pelo método da capacitância global.

A rigor, o sistema aglomerado é apenas uma idealização, pois, na prática, sempre haverá um gradiente de temperatura no interior do material sólido. Por menor que este seja, o gradiente estará presente. No entanto, para materiais que apresentam uma condutividade térmica muito elevada, considerada infinita ( $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ ), ou seja, aqueles materiais que conduzem facilmente o calor, o gradiente de temperatura é tão pequeno que pode ser desprezado e todo o sólido é considerado com temperatura uniforme no espaço. Os exemplos mais comuns encontrados na prática consistem no resfriamento ou aquecimento de pequenos objetos de metais ou de ligas metálicas, pois são materiais característicos de serem bons condutores térmicos (elevada condutividade térmica). Na prática, essa condição é aproximada se a resistência à condução no interior do sólido for pequena em comparação à resistência à transferência de calor entre o sólido e a sua vizinhança.

A fim de encontrar a equação diferencial do calor em regime transiente cuja solução fornece o perfil de temperatura T = T(t), ou seja, o perfil de temperatura em sistemas aglomerados, é necessário realizar um balanço de energia no material, dado por:

## (Calor transferido para o corpo) = (Acúmulo de energia no) durante um intervalo de tempo) = (corpo no mesmo tempo)

A resolução do balanço de energia envolve resolver uma equação diferencial cuja condição inicial consiste em saber a temperatura no instante inicial ao fenômeno de condução transiente do calor, ou seja, conhecer  $T(0) = T_{inicial}$ . Dessa forma, o perfil de temperatura para a análise da capacitância global é dado por:

$$\frac{\mathsf{T}(\mathsf{t}) - \mathsf{T}_{_{\infty}}}{\mathsf{T}_{_{\text{inicial}}} - \mathsf{T}_{_{\infty}}} = \exp\!\left(-\frac{\rho \cdot \mathsf{V} \cdot \mathsf{C}_{\mathsf{p}}}{\mathsf{h} \cdot \mathsf{A}_{\mathsf{s}}} \, \mathsf{t}\right)$$

Em que:  $\mathbf{T}_{\infty}$  é a temperatura do fluido suficiente longe da superfície do sólido; h é o coeficiente de transferência de calor convectivo entre o sólido e o fluido circundante; V é o volume do sólido;  $\mathbf{A}_{s}$  é a área superficial;  $\rho$  é a massa específica do sólido;  $\mathbf{C}_{p}$  é a capacidade calorífica do sólido.

#### Pesquise mais

Para a resolução do balanço de energia e da equação diferencial resultante leia as páginas 226 e 227 do Capítulo 4 – Condução de Calor Transiente. In: ÇENGEL et al. **Transferência de calor e massa – uma abordagem prática**. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

É comum escrever os parâmetros do termo exponencial do perfil de temperaturas anterior como uma constante denominada de parâmetro de tempo (**b**-1), pois uma análise dimensional revela que ele possui unidade de tempo. Dessa forma, define-se:

## $\mathbf{b}^{-1} \!=\! \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{p}}}{\mathbf{h} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}$

Quanto maior for o valor do parâmetro b, mais rapidamente o sistema aglomerado atinge a temperatura do ambiente ao seu redor  $(T_{\infty})$ . Esta situação está exemplificada na Figura 1.16 para valores distintos de b.

Figura 1.16 | Comportamento da temperatura para materiais com diferentes constantes de tempo



Fonte: Çengel et al. (2012, p. 227).

A relação para T(t) para o método da capacitância global nos permite calcular o tempo que o sólido em sistema aglomerado levará para atingir uma determinada temperatura:

$$t = \frac{\rho \cdot \mathsf{V} \cdot \mathsf{C}_{\mathsf{p}}}{\mathsf{h} \cdot \mathsf{A}_{\mathsf{s}}} \cdot \mathsf{ln} \left( \frac{\mathsf{T}(\mathsf{t}) - \mathsf{T}_{\infty}}{\mathsf{T}_{\mathsf{inicial}} - \mathsf{T}_{\infty}} \right)$$

Ou, inversamente, qual a temperatura do corpo após a ocorrência de troca térmica em um determinado período de tempo.

A taxa de calor transferida entre o sólido e o ambiente nesse processo é determinada pela variação de energia interna do corpo durante esse processo, demonstrada na próxima equação, lembrando que o fluxo é determinado pela simples divisão dessa taxa pela área de troca térmica.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_{p} \left( \mathbf{T}(\mathbf{t}) - \mathbf{T}_{i} \right)}{\Delta t}$$

Vimos que a capacitância global é uma aproximação da realidade válida para materiais de alta condutividade térmica, ou seja, considerada como infinita. Para saber se a situação prática em análise pode ser simplificada por tal método utilizamos o número adimensional de Biot (Bi) definido como:

## $Bi = \frac{hL_{c}}{k} = \frac{Convecção na superfície do sólido}{Condução no interior do sólido}$

O parâmetro  $L_c$  representa o comprimento característico dos materiais e é determinado pela razão entre seu volume e sua área superficial, ou seja,  $L_c=\frac{V}{\Delta}$ .

#### Pesquise mais

O número de Bi também pode ser entendido utilizando o conceito de resistência térmica. Leia sobre esta analogia para Bi nas páginas 228 e 229 do Capítulo 4 – Condução de Calor Transiente. In: ÇENGEL et al. **Transferência de calor e massa** – uma abordagem prática. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Observe que o número de Bi é uma razão entre a energia transferida na superfície do sólido (convecção na superfície) e o transporte de energia no seu interior (condução). A convecção depende do coeficiente de convecção (h) do fluido que está ao redor do sólido. Já a condutividade térmica depende do material em que o sólido foi produzido. Portanto, o número adimensional de Biot não é único para todos os materiais nem para todas as situações e o método da capacitância global pode ser aplicado com boa precisão para  $Bi \le 0,1$  (erro menor que 5%).

### 💮 Reflita

Considerando o significado de Biot e a dependência da análise concentrada com a condutividade térmica, o número de Biot para metais e ligas metálicas deve ser elevado ou pequeno? O cozimento de uma carne em um churrasco deverá ter um elevado ou um baixo número de Biot?

A análise pela capacitância global fornece importantes informações sobre a transferência de calor de forma rápida e precisa. Vejamos um exemplo da aplicação do método da capacitância global.

#### Exemplificando

Uma barra de 1 m de comprimento e 5 cm de diâmetro é produzida em aço com propriedades constantes ( $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 435 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ e  $k = 64 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ) e é moldada em forno aquecido. Após tomar forma, a barra deixa o forno de conformação na temperatura de  $800 \ ^\circ\text{C}$ , sendo resfriada até  $90 \ ^\circ\text{C}$  em água com temperatura uniforme de  $40 \ ^\circ\text{C}$  e  $h = 425 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Determine o tempo necessário para o seu resfriamento.

Solução:

O comprimento característico da barra é dado por:

$$L_{c} = \frac{V}{A_{s}} = \frac{(\pi \cdot D^{2}/4) \cdot L}{\pi \cdot D \cdot L} = \frac{D}{4} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \text{ m}$$

O número de Biot diz se a capacitância global é válida.

$$\mathsf{Bi} = \frac{\mathsf{hL}_{c}}{\mathsf{k}} = \frac{425 \cdot 0,0125}{64} = 0,083 \text{ (válido)}$$

O inverso da constante de tempo é determinado por:

$$b = \frac{h}{\rho \cdot c_{p} \cdot L_{c}} = \frac{425}{7800 \cdot 435 \cdot 0,0125} = 0,01002 \text{ s}^{-1}$$

Logo, o tempo de resfriamento é facilmente determinado a partir de:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_{i} - T_{\infty}} = e^{-bt} \rightarrow t = -b^{-1} \cdot Ln \left( \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_{i} - T_{\infty}} \right) = -\frac{1}{0,01002} \cdot Ln \left( \frac{90 - 40}{800 - 40} \right) = 272 \text{ s}$$

Portanto, o resfriamento dura, aproximadamente, 4,5 min.

Quando existe a variação da temperatura com a posição no interior do sólido, temos que o método da capacitância global não é válida. O sistema transiente pode ser analisado resolvendo a equação do calor de forma analítica. Considere a parede plana (a), cilindro (b) e esfera (c) submetidos à convecção e regime transiente unidimensional apresentados na Figura 1.17.

Figura 1.17 | Geometria plana (a), cilíndrica (b) e esférica (c) em condução transiente na direção x



Fonte: Çengel et al. (2012, p. 233).

A equação de condução para os sistemas radiais, e no intervalo entre  $0 \le x \le L$  para a parede, que tem propriedades físicas constantes, que não possui geração de energia em seu interior e que apresenta condições térmicas estáveis em sua superfície em condução unidimensional e transiente é dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{t}}$$

em que  $\alpha = \mathbf{k}/\rho \mathbf{c}_{p}$  representa a difusividade térmica do material sólido.

A condição inicial refere-se ao conhecimento da temperatura inicial do sólido, ou seja:

 $T(x,0) = T_{inicial} = T_i$ 

As condições de fronteira são duas. A primeira refere-se à temperatura constante na superfície do sólido e a segunda diz que

todo o calor transferido pela convecção pela superfície do material é transportado por condução no interior do sólido, ou seja:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0^{e} - k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_{\infty}]$$

Na solução da equação de calor transiente unidimensional empregase o método de separação de variáveis. Dessa maneira, para os casos da Figura 1.17, os perfis de temperatura são apresentados na Tabela 1.3, em que  $\tau = \alpha t/L^2$  ou  $\alpha t/r_0^2$  representam o número adimensional de Fourier;  $J_0 e J_1$  são as funções de Bessel de primeiro tipo.

Geometria	Perfil de temperatura	Equação transcendental
Parede plana	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \text{sen} \lambda_n}{2\lambda_n + \text{sen} (2\lambda_n)}  e^{-\lambda_n^2 \tau} \text{cos} \bigg( \frac{\lambda_n x}{L} \bigg)$	$\lambda_{\rm n} { m tg} \lambda_{\rm n} = { m Bi}$
Cilindro	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} \ \mathbf{e}^{-\lambda_n^2 \tau} J_0\left(\frac{\lambda_n \mathbf{r}}{\mathbf{r}_0}\right)$	$\lambda_{n} \frac{J_{1}(\lambda_{n})}{J_{0}(\lambda_{n})} = Bi$
Esfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(\operatorname{sen} \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n\right)}{2\lambda_n - \operatorname{sen}(2\lambda_n)}  e^{-\lambda_n^2 \tau}  \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n  \mathbf{x}/\mathbf{L})}{\lambda_n  \mathbf{x}/\mathbf{L}}$	$1 - \lambda_n \operatorname{cotg} \lambda_n = \operatorname{Bi}$

Tabela 1.3 | Perfil de temperatura e equação transcendental para os casos da Figura 1.17

Fonte: adaptada de Çengel et al. (2012, p. 237).



Para situações em que o número de Fourier é maior do que 0,2 pode-se aproximar o perfil de temperatura apenas para o primeiro termo da série.

Resultados para as funções de Bessel de primeira espécie podem ser obtidas na Tabela 4-3. Funções de Bessel do primeiro tipo de ordem zero e primeira. In: Çengel et al. **Transferência de calor e massa – uma abordagem prática.** 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Existe uma outra forma de abordar o problema de condução, que consiste em idealizar o material como um sólido semi-infinito. Como o próprio nome sugere, as dimensões deste material a partir de uma superfície são infinitas em todas as direções, exceto uma, como a superfície terrestre, por exemplo. Nas proximidades dessa superfície é que nos interessa analisar a condução transiente que ocorre perpendicularmente à superfície.



Os sólidos que são espessos o suficiente para necessitar de uma quantidade finita de tempo até que o calor seja conduzido de sua superfície para o seu interior geralmente podem ser considerados como um sólido semi-infinito. É o caso da superfície terrestre, de uma parede espessa ou de um bloco espesso.

A condução transiente e unidimensional de calor no sólido semi-infinito é expressa pela mesma equação do calor apresentada anteriormente. O Método de Separação de Variáveis, neste caso, falha por envolver uma condição no contorno  $\mathbf{X} \to \infty$ , então emprega-se o Método da Combinação de Parâmetros.

Pesquise mais

Pesquise a solução da condução transiente unidimensional de calor pelo Método da Combinação de Parâmetros nas páginas 249-251 do Capítulo 4 – Condução de Calor Transiente. In: ÇENGEL et al. **Transferência de calor e massa – uma abordagem prática.** 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Dependendo do tipo de condição de contorno ou inicial do problema físico pode-se obter equações distintas para o perfil de temperatura no interior do sólido semi-infinito. Algumas situações distintas estão apresentadas na Tabela 1.4 para um sólido semi-infinito com distribuição inicial de temperatura  $T(x,0) = T_i e T(x \to \infty,t) = T_i$ .

Tabela 1.4 | Algumas condições de contorno e perfis de temperaturas em sólido semi-infinito

Caso	Condição de contorno	Perfil de temperaturas
Temperatura na superfície constante	$T(0,t) = T_{s}$	$\frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$

Fluxo de calor constante na superfície	$\leftk\frac{\partial T}{\partial x}\right _{x=0}=\dot{q}_{s}$	$T(\mathbf{x},t) = T_{i} + \frac{\dot{\mathbf{q}}_{i}}{k} \left[ \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} exp\left(-\frac{\mathbf{x}^{2}}{4\alpha t}\right) - \mathbf{x} \cdot erfc\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right]$
Aquecimento periódico	$-\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}}\Big _{\mathbf{x}=0}=\mathbf{e}_{s}\cdot\delta(t)$	$T(\mathbf{x},t) = T_{i} + \frac{\mathbf{e}_{s}}{\mathbf{k}\sqrt{\pi t/\alpha}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^{2}}{4\alpha t}\right)$

Fonte: adaptada de Çengel et al. (2012, p. 251-252).

Em que:  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac;  $e_s$  é a energia fornecida ao corpo por unidade de área; a abreviação erfc representa a função erro complementar e;  $T_s$  é a temperatura da superfície.

Determine a menor profundidade na qual se pode enterrar um tubo que circula água em seu interior sem que a mesma congele. Sabe-se que inicialmente a tubulação está com temperatura uniforme de 12 °C . Durante um mês de inverno o solo está com temperatura constante de -5 °C e apresenta difusividade térmica de  $\alpha = 0.12 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

Exemplificando

Solução: temos o caso de sólido semi-infinito com temperatura constante na superfície. Portanto, o perfil de temperatura é dado por:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} = erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \rightarrow \frac{0 - 12}{-5 - 12} = 0,71 = erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4 \cdot 0,12 \cdot 2,592}}\right)$$

Valores para a função erro complementar podem ser encontrados na Tabela 4-4. Função erro complementar. In: ÇENGEL et al. **Transferência de calor e massa – uma abordagem prática**. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Vemos que o seu argumento para o valor de 0,71 é, aproximadamente, 0,26. Portanto, a profundidade mínima é determinada por:

$$0,26 = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot 0, 12 \cdot 2,592}} \to x = 0,40 \text{ m}$$

Concluindo, a profundidade é de 40 cm.

As metodologias utilizadas até o momento para abordar o problema de condução de calor transiente são interessantes para aquelas situações em que a geometria do sólido é bem definida e 'comportada'. Para problemas com geometrias mais complexas que são encontrados com frequência na prática como chaminés, barras de formato L ou para-brisas de automóveis é preferível a aplicação de uma metodologia numérica como o método das Diferenças Finitas, que foi apresentado na seção anterior. Além disso, a análise de problemas bidimensionais transientes é muito trabalhosa de se fazer manualmente, devido à quantidade de variáveis independentes reforçando a necessidade de um método numérico adequado.

Para entender o método das diferenças finitas em sistema transiente observe a Figura 1.18 que apresenta a divisão de malha térmica considerando a transferência de calor unidimensional apenas e transiente. Quando trabalhamos com o regime permanente na seção anterior, obtivemos uma solução discreta de temperaturas para cada um dos pontos (nós) resultantes da discretização da região geométrica do problema. Devido à consideração de regime permanente, essa solução discreta de temperaturas era válida para qualquer instante no tempo. Agora, como o regime é transiente, devemos discretizar não só o espaço geométrico, mas também o tempo.

Figura 1.18 | Malha térmica discreta no tempo e geometria para formulação do método de diferenças finitas



Fonte: adaptada de Çengel (2012, p. 322).

Realizamos um balanço de energia (BE) para cada nó da malha térmica considerando que a transferência de calor tem sentido de entrar no nó. Porém, diferentemente do caso permanente, devemos adicionar o termo transiente. Dessa maneira, BE para um nó da malha é escrito como:

 $\begin{pmatrix} \text{Calor transferido através} \\ \text{das superfícies durante } \Delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Calor gerado no volume} \\ \text{do elemento durante } \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Variação de energia do} \\ \text{elemento durante } \Delta t \end{pmatrix}$ 

Substituindo os calores transferidos pelas superfícies pelas taxas de condução de calor, o calor gerado em todo o volume do elemento de controle pelo símbolo,  $\dot{E}_g$ , e escrevendo a variação de energia do elemento conforme apresentado na Seção 1.1 segue que para o nó m temos:

$$\sum_{\text{Superficies}} \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{E}}_{g} = \rho \cdot \mathbf{C}_{p} \cdot \mathbf{V} \frac{\mathbf{T}_{m}^{i+1} - \mathbf{T}_{m}^{i}}{\Delta t}$$



Observe que a divisão no lado direito do balanço de energia representa a derivada parcial  $\partial T_{\partial t}$  aproximada pela diferença finita  $\Delta T_{\Delta t}$ 

Neste momento temos dois caminhos a seguir. O lado direito do balanço de energia mostra uma diferença entre as temperaturas no tempo i e i+1 para o ponto geométrico m. Então, naturalmente nos perguntamos se as propriedades do termo à esquerda do balanço de energia devem ser escritas para qual instante de tempo: i ou i+1?

A resposta para esse questionamento não é única. Se decidirmos por escrever as propriedades no instante de tempo anterior (i) então o método de diferenças finitas é chamado de **explícito**. Neste caso, existe um limite para o intervalo de discretização do tempo. Se o intervalo for muito grande, os cálculos necessários para resolver o sistema matemático podem não convergir para a solução do sistema. Neste caso, a formulação do balanço de energia é escrita como:

$$\sum_{\text{Superficies}} \dot{\mathbf{Q}}^{i} + \dot{\mathbf{E}}_{g}^{i} = \rho \cdot \mathbf{c}_{p} \cdot \mathbf{V} \frac{\mathbf{T}_{m}^{i+1} - \mathbf{T}_{m}^{i}}{\Delta t} \text{ (Explícito)}$$

Se decidirmos utilizar o instante de tempo posterior (i+1) então o método é dito implícito. Este método não apresenta a limitação do

intervalo de discretização do tempo, mas impõe que a resolução do seu sistema de equações seja realizada simultaneamente. Neste caso, a formulação do balanço de energia é dada por:

$$\sum_{\text{Superficies}} \dot{Q}^{i+1} + \dot{E}_{g}^{i+1} = \rho \cdot c_{p} \cdot V \frac{T_{m}^{i+1} - T_{m}^{i}}{\Delta t} \text{ (Implicito)}$$

Apesar de termos realizado a malha térmica e a formulação para o sistema transiente unidimensional como apresentado na Figura 1.18, os resultados podem ser expandidos para sistemas multidimensionais, inclusive em coordenadas radiais. Ao analisar sistemas radiais, é necessário substituir os termos das taxas ( $\dot{\mathbf{Q}}^{i}$  ou  $\dot{\mathbf{Q}}^{i+1}$ ) pela lei de Fourier na mesma coordenada.

#### Sem medo de errar

Você está trabalhando em um escritório de Engenharia realizando projetos para clientes distintos. Para que estes projetos sejam solucionados, você tem utilizado dos conceitos de transferência de calor e já atuou resolvendo dois projetos a respeito da condução de calor em materiais sólidos. Neste momento, você está atuando no seu último projeto a respeito deste fenômeno de transferência de calor, o qual consiste no pedido de um famoso artista plástico.

O projeto requer que você determine o tempo necessário para esfriar uma esfera produzida em liga metálica de diâmetro 52 cm e com condutividade térmica constante de **15 W/m·K**. No seu processo de conformação a esfera está na temperatura uniforme de 800 K e é resfriada até 320 K no ar ambiente (T = 300 K e  $h = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ).

Ao abordar um problema de condução de calor transiente, sempre procure resolvê-lo pelo método mais simples, que consiste em verificar a validade do método de capacitância global. Para isso, determinamos o comprimento característico da esfera e, na sequência, o número de Biot.

$$L_{c} = \frac{V}{A_{s}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^{3}}{4\pi r^{2}} = \frac{r}{3} = \frac{0.26 \text{ m}}{3} = 0,0867$$
$$Bi = \frac{hL_{c}}{k} = \frac{40 \cdot 0,0867}{15} = 0,231$$

A condição de Bi < 0,1 garante que o uso do método da capacitância global seja preciso com erro menor que 5%. Neste caso, mesmo que Bi > 0,1, ele não é tão maior assim e o método da capacitância global pode ser utilizado perdendo-se um pouco da precisão do resultado, mas de tal forma que a facilidade matemática ganha com a capacitância global se sobrepondo a esse fato, e o problema de condução transiente se torna simples de ser resolvido, visto que todo o interior do sólido pode ser considerado com temperatura uniforme variante apenas com o tempo, T(t). Dessa maneira, a equação apropriada para estimar o tempo necessário para a esfera atingir 320 K é:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-bt} \rightarrow t = -b^{-1} \cdot Ln \bigg( \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \bigg)$$

Em que o parâmetro b vale:

$$b = \frac{h}{\rho \cdot c_{p} \cdot L_{c}} = \frac{40}{8050 \cdot 480 \cdot 0,0867} = 1,19 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Substituindo a constante de tempo, determinamos que:

$$t = -b^{-1} \cdot Ln \bigg( \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \bigg) = -8375, 22 \cdot Ln \bigg( \frac{320 - 300}{800 - 300} \bigg) = 26958, 8 \text{ s} = 7,5 \text{ h}$$

O tempo necessário para o resfriamento faz com que o artista tenha que esperar 7 horas e meia para prosseguir com seu trabalho. Como esse período é muito longo, não é interessante para o artista, que está com o prazo de entrega do seu serviço quase terminando. Seria interessante aumentar a velocidade de transferência de calor por meio do uso, por exemplo, de um ambiente com temperatura menor. Seria o caso de utilizar uma câmara fria ou refrigerador. O uso de ar com  $T_{\infty}$  mais baixa tem o efeito de diminuir o termo logaritmo no cálculo da temperatura. No caso de uma câmara fria com temperatura do ar de -35 °C o tempo seria:

$$t = -b^{-1} \cdot Ln \left( \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_{i} - T_{\infty}} \right) = -8375, 22 \cdot Ln \left( \frac{320 - 238}{800 - 238} \right) = 16120, 5 \text{ s} = 4, 5 \text{ h}$$

Com isso, o tempo de resfriamento é menor e o artista poderá esperar pouco tempo até aplicar a tinta e terminar seu trabalho de arte.

#### Avançando na prática

#### Prevenindo incêndios em madeireiras

#### Descrição da situação-problema

Uma madeireira está modificando uma das linhas de produção e lhe contratou como consultor. Esta linha processa troncos de árvore em chapas de madeira de 5 cm de espessura com propriedades constantes ( $\mathbf{k} = 0,12 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  e  $\alpha = 0,9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Devido às modificações na linha, a chapa de madeira inicialmente na temperatura ambiente (300 K) entrará em contato com gases quentes (800 K) por um período de 3 min. Você deve apresentar uma análise contemplando se a madeira corre risco de ignição no processo. Considere que o ponto de ignição da madeira é 720 K. Se necessário, utilize erfc(0,14)=0,84.

#### Resolução da situação-problema

Se durante o contato com os gases quentes houver algum ponto da chapa de madeira em que a temperatura atinja o ponto de ignição, então o processo de combustão ocorrerá. Dessa forma, consideramos a chapa um sólido semi-infinito:

$$\frac{\mathsf{T}(x,t) - \mathsf{T}_{i}}{\mathsf{T}_{s} - \mathsf{T}_{i}} = \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \rightarrow \frac{720 - 300}{800 - 300} = 0,84 = \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4 \cdot 0.9 \times 10^{-6} \cdot 180}}\right)$$

Valores para a função erro complementar podem ser encontrados na Tabela 4-4. Função erro complementar. IN: ÇENGEL et al. **Transferência de Calor e Massa – uma abordagem prática.** 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904p. Para o valor de 0,84 seu argumento vale, aproximadamente 0,14.

## $\frac{x}{\sqrt{4\cdot0.9\times10^{-6}\cdot180}}=0,14\rightarrow x=0,0036\ m=0,36\ cm$

Portanto, se a chapa possuísse espessura de 0,36 cm sua superfície seria o primeiro ponto a atingir a temperatura de ignição. Como 0,36 cm < 5 cm, a superfície (e o interior da chapa de madeira) estão em uma temperatura menor que o ponto de ignição e a combustão do material não ocorre.

#### Faça valer a pena

**1.** O número de Biot é um importante número adimensional utilizado para verificar a validade do método de capacitância global em condução transiente de calor. Este número depende da razão entre o coeficiente de convecção e da condutividade térmica (h/k) e do comprimento característico dos materiais ( $L_c$ ) definido como a seguir:

$$L_c = \frac{Volume}{Area}$$

Assinale a alternativa que contenha, respectivamente, o comprimento característico de um cilindro de diâmetro D e de uma esfera de diâmetro d.

- a) 2D e d.
- b) D e d/2.
- c) D/2 e d/3.
- d) D/4 e d/6.
- e) D/6 e d/8.

**2.** Em restaurantes, ao receber o prato pedido é comum que este esteja um pouco quente, sendo que algumas pessoas preferem aguardar alguns minutos antes de iniciar a refeição. Considere um prato que contenha um pedaço de mandioca assada quente. Durante o primeiro minuto de espera o alimento resfria **3** °C.

Analise as alternativas e assinale aquela que apresenta o comportamento da temperatura para o minuto seguinte.

- a) A temperatura do alimento diminuirá mais que 3 °C.
- b) A temperatura do alimento diminuirá menos que 3 °C.
- c) A temperatura do alimento permanecerá inalterada.
- d) Pela análise concentrada a temperatura do alimento diminuirá menos que 3 °C, mas considerando-o como um sólido semi-infinito a temperatura aumentará menos que 3 °C.
- e) É necessário conhecer a área de troca térmica do alimento para se determinar o que acontecerá no minuto seguinte de resfriamento.

**3.** Uma folha de papelão apresenta propriedades aproximadamente constantes de k = 0,18 W/m·K e  $\alpha = 1,1 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Durante a sua fabricação existe uma etapa de secagem na qual sua temperatura inicial

é a temperatura ambiente (300 K). Nesse processo de secagem ocorre o contato com ar quente (800 K) por um período de 5 minutos.

Sabendo que o ponto de ignição da folha é 700 K, assinale a alternativa que apresente a maior espessura que a folha pode ser fabricada antes que o processo de ignição ocorra. Se necessário, utilizar: erfc(0,18)=0,80.

- a) 0,65 cm.
- b) 0,70 cm.
- c) 0,75 cm.
- d) 0.80 cm.
- e) 0,85 cm.

## Referências

BIRD, B. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. Fenômenos de transporte. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002. 840 p.

BERGMAN, T. H.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Tradução e revisão técnica de Eduardo M. Queiroz e Fernando L.P. Pessoa. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p. ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; KANOGLU, M. Transferência de calor e massa – uma abordagem prática. Tradução Fática A. M. Lino. Revisão técnica Kamal A. R. Ismail. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

KREITH, F.; MANGLIK, R. M.; BOHN, M. S. **Princípios de transferência de calor**. Tradução Noveritis do Brasil. Revisão técnica Keli F. Seidel e Sergio R. Lopes. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. 676 p.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de transferência de calor e massa.** Tradução e revisão Eduardo M. Queiroz e Fernando L.P Pessoa. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 645 p.

WELTY, J. R.; WICKS, C. E.; WILSON, R. E.; RORRER, G. L. **Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer**. 5th Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc. 2010. 711 p.

## **Unidade 2**

# Princípios da convecção de calor

#### Convite ao estudo

Um tarugo de metal aquecido que resfria o ambiente envolve transferência de calor por convecção. Nesta unidade vamos estudar esse mecanismo de transferência de calor que envolve o movimento da massa de fluido como um todo, ou seja, as regiões com diferentes temperaturas somente transferem energia por convecção quando há movimento entre as fases fluido-sólida ou fluido-fluido. Situações comuns deste fenômeno consistem numa brisa fresca que atinge nosso corpo em um dia quente de verão, no movimento de uma massa de ar sobre o oceano que causa a evaporação da água, na ventoinha (ou cooler) do computador que impede o aquecimento de uma placa, no resfriamento de produtos industriais, em tubos com água utilizados em uma usina geotérmica e outras inúmeras aplicações práticas.

É importante que você conheça e compreenda os fenômenos da transferência de calor, pois muitas situações práticas como as mencionadas aparecem direta ou indiretamente em projetos durante o nosso trabalho. Como profissionais, é nossa responsabilidade saber resolver problemas práticos que envolvem a convecção, como determinar a potência de uma ventoinha de computador para resfriá-lo ou a vazão de água que deverá escoar através de um equipamento trocador de calor em um processo industrial específico. São os assuntos abordados nesta unidade que lhe auxiliarão a resolver os projetos que porventura você encontre na sua vida profissional.

Você está atuando em um escritório de engenharia e neste momento irá trabalhar com alguns clientes cujos projetos se referem ao fenômeno da convecção. Primeiramente, você irá atuar em uma das etapas do desenvolvimento de produtos de camping para o frio. Na sequência, outro projeto tratará do processo de transferência de calor (resfriamento) de um processo industrial de fabricação de embalagens, e o último projeto está relacionado à determinação da temperatura no escoamento de um óleo através de um oleoduto horizontal, visando o controle do processo. A solução de tais projetos será concluída com o uso de conceitos que respondem a perguntas como: qual é a diferença entre a condução e a convecção de calor? Como o tipo de escoamento e a geometria dos objetos influenciam na convecção térmica? Quais equações são utilizadas na determinação do coeficiente convectivo?

A Seção 2.1 desta unidade introduz o fenômeno da convecção de calor e apresenta os fundamentos da hidrodinâmica que atuam juntamente com a transferência de calor. É apresentada também a origem das camadas-limite hidrodinâmica e térmica. A Seção 2.2 aborda os escoamentos externos que ocorrem em placa plana, cilindro, feixes de cilindros, leitos recheados e jatos colidentes. Por fim, a Seção 2.3 encerra a unidade com a convecção interna, apresentando algumas propriedades de interesse, como temperatura e velocidade médias e, também, correlações importantes no escoamento laminar e turbulento.

# Seção 2.1

### Introdução à convecção de calor

#### Diálogo aberto

Estamos prestes a iniciar o estudo da convecção. Você com certeza já vivenciou este fenômeno, pois ele está amplamente presente no nosso dia a dia, por exemplo o aquecimento da água em uma chaleira para preparar um café ou chá e uma brisa fresca ou um ventilador ligado que resfriam o nosso corpo em um dia quente. Além do cotidiano, o fenômeno da convecção está presente nos processos industriais, como o resfriamento de componentes eletrônicos, nos processos de secagem de produtos variados, nas usinas geotérmicas, entre muitas outras.

A fim de possibilitar um entendimento do ponto de vista da aplicação prática dos conceitos que tangem à convecção, nós inserimos você em um escritório de engenharia atuando em projetos que envolvem diversos conceitos de transferência de calor.

Trabalhando em uma empresa de consultoria, você foi designado para um projeto envolvendo uma empresa que fabrica itens de camping. Esta empresa está desenvolvendo um cobertor térmico para ser usado em situações de salvamento e resgate em regiões de clima frio e de elevada altitude. O problema encontrado pelos fabricantes é que o vento nessas regiões é muito intenso e tem rasgado o cobertor. Você foi contratado para determinar qual é a força por centímetro quadrado que um vento de 70 km/h produz sobre esse cobertor, considerando que o coeficiente de atrito entre o material do qual o tecido é fabricado e o vento vale 0,5. Quando você conseguir solucionar o problema do rasgo, os fabricantes solicitam que você determine qual é o fluxo de transferência de calor por convecção entre uma pessoa com temperatura média de **37,5°C** e um ambiente cuja temperatura varia com a velocidade do vento, conforme a expressão:

$$T_{amb} = 33 - \frac{1.848,6}{10,45 + 10\sqrt{V} - V}$$

Em que V representa a velocidade do vento nas unidades do Sistema Internacional.

O cliente utilizará essa informação em testes futuros do material. No desenvolvimento do seu projeto, você deve considerar que o coeficiente convectivo local varia de acordo com a expressão fornecida pelo fabricante  $h = c \left(\frac{V}{x \cdot T}\right)^m$ , em que C e 0<m<1 são constantes que não foram fornecidas pelo fabricante do tecido, e V representa a velocidade do vento. Nas condições de uso do cobertor, a massa específica do ar pode ser considerada igual a **1,514 kg/m**<sup>3</sup>.

Para solucionar este projeto, você deve entender o fenômeno das camadas-limite térmica e hidrodinâmica que surgem na convecção, como o coeficiente de proporcionalidade entre o gradiente de temperatura e a taxa de convecção de calor (denominado de coeficiente convectivo) atua e a diferença entre o escoamento laminar e o turbulento. Dedique-se ao estudo e à compreensão dos assuntos contidos nesta seção, pois eles são importantes para o entendimento de situações práticas que envolvem a transferência de calor por convecção e que podem aparecer na vida do profissional de engenharia. Bom estudo!

#### Não pode faltar

A convecção de calor ocorre quando existe movimento macroscópico entre superfícies (sólido-fluido ou fluido-fluido) com velocidades distintas, sendo estritamente necessário que exista uma diferença de temperatura entre elas, do contrário não há transferência de calor. Quando o movimento do fluido é ocasionado por meios naturais, classificamos a convecção como natural. Dizemos que a convecção é forçada se algum meio externo é utilizado para movimentar o fluido, por exemplo um ventilador ou uma bomba. Além disso, podemos classificar a convecção conforme o local em que o fluido escoa. Se o escoamento ocorrer sobre a superfície externa de um objeto, então a convecção é externa, porém se o fluido escoar dentro de um ambiente fechado, como em um tubo, então a convecção é considerada interna. Essa classificação é importante em problemas de convecção, pois as equações que regem o fenômeno da convecção são diferentes para cada caso.

Quando, na unidade anterior, estudamos o fenômeno da condução, a convecção era utilizada como uma condição de

contorno na solução da equação do calor. Naquele momento, o coeficiente de convecção era conhecido, porém isso nem sempre é verdade. Na realidade, o estudo da convecção tem como um de seus objetivos justamente determinar o coeficiente convectivo (h) ou o coeficiente convectivo médio ( $\overline{\mathbf{h}}$ ), que surge como um coeficiente de proporcionalidade na lei de Newton do resfriamento, sendo então empregado na determinação das taxas ou fluxos de calor convectivo. Outros objetivos do estudo da convecção incluem entender seu mecanismo e suas classificações, acompanhar o desenvolvimento das camadas limites hidrodinâmicas e térmicas durante o escoamento do fluido, empregar analogia para determinar os coeficientes de transferência de calor a partir do coeficiente de atrito, conhecer os números adimensionais e derivar as equações que descrevem a convecção a partir de balanços de massa, energia e quantidade de momento.

Não podemos confundir que durante a convecção também ocorre a transferência de calor por condução, pois existe a interação molécula-molécula (difusão). A diferença que ocorre entre os mecanismos da convecção e condução de calor está relacionada ao movimento macroscópico do fluido. Enquanto na condução a transferência de energia ocorre entre as finas camadas do fluido estagnado, na convecção o movimento global do fluido é capaz de movimentar uma parcela do fluido próxima da superfície para longe desta, transferindo rapidamente a energia de um ponto para outro (advecção).

A quantificação da transferência convectiva de calor é feita pela lei de Newton do resfriamento, mostrada a seguir (utilizaremos nesta lei e nas outras partes do texto, exceto quando mencionado o contrário, a nomenclatura:  $\dot{\mathbf{Q}}$  (W), como a taxa de transferência de calor convectivo; h ( $\mathbf{W/m^2} \cdot \mathbf{K}$ ), como coeficiente convectivo de calor; A ( $\mathbf{m}^2$ ), área de transferência térmica;  $\mathbf{T}_{\infty}$  (° $\mathbf{C}$  ou K), temperatura do fluido suficientemente afastado da superfície (geometria arbitrária) na qual o fluido escoa; e  $\mathbf{T}_{\mathbf{s}}$  (° $\mathbf{C}$  ou K), temperatura dessa superfície).

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T}_{s} - \mathbf{T}_{\infty})$$

A primeira camada de fluido que está em contato com uma superfície sólida tem velocidade nula devido à condição de não deslizamento, ou seja, devido aos efeitos viscosos, o fluido em contato com uma superfície não escorrega e tem a velocidade da própria superfície sólida (que é zero na maioria dos casos). Sendo assim, o calor é transferido por condução somente na primeira camada, e nas demais camadas por convecção. Então, é verdadeiro dizer que  $\dot{\mathbf{a}}_{conv} = \dot{\mathbf{a}}_{cond} = -\mathbf{k}_{hudo} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{t=0}$ ?

Reflita

O coeficiente convectivo que aparece na lei de Newton do resfriamento representa a taxa de calor que é transferida por convecção entre a superfície e o fluido por unidade de área e por unidade de temperatura para um ponto específico na superfície. O que se utiliza na prática é a média dos coeficientes sobre todos os pontos da superfície onde há convecção, definindo assim o coeficiente convectivo médio como:

$$\overline{h} = \frac{1}{A} \int_{A} h \cdot dA$$

E no caso de uma superfície constituída por uma placa plana de comprimento L, temos que:

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \cdot dx$$

Na Figura 2.1, onde q" representa o fluxo de calor, é exemplificada a convecção em uma superfície com geometria qualquer e na placa plana de comprimento L uniformemente aquecida.

Figura 2.1 | Coeficientes convectivos local e médio para geometria arbitrária (a) e placa plana (b)



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 244).

O tipo de escoamento afeta o fenômeno da convecção de calor. Isto se torna um pouco mais claro quando observamos a Figura 2.1 e notamos que a velocidade de aproximação, ou seja, a velocidade com a qual o fluido atinge uma superfície sólida (V ou  $\mathbf{u}_{\infty}$ ), bem como sua temperatura ( $\mathbf{T}_{\infty}$ ), influenciam no coeficiente convectivo. Essa dependência da hidrodinâmica está relacionada com a formação das camadas-limite.

Existem três camadas-limite distintas: hidrodinâmica, térmica e mássica. Nesta unidade nosso objetivo envolve estudar as duas primeiras, porém fazemos uma observação que a camada mássica pode ser estudada por simples analogia com as outras camadas, conforme será visto adiante neste texto.

Para entender a formação da camada-limite hidrodinâmica (CLH) ou camada-limite de velocidade (CLV), observe a Figura 2.2.



Figura 2.2 | Desenvolvimento da CLH sobre uma superfície plana

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 248).

Na Figura 2.2 o fluido escoa livremente com velocidade de aproximação  $\mathbf{u}_{\infty}$  sem a influência da superfície. Ao encontrar a superfície no ponto de ataque (x=0), os efeitos viscosos do fluido entram em ação. A condição de não deslizamento faz com que a primeira camada de fluido (y=0) seja mantida na mesma velocidade da superfície que se encontra parada. A difusão de momento que tem efeito na direção x é transferida na direção y camada a camada, reduzindo a velocidade das camadas adjacentes até uma distância  $\mathbf{y} = \delta$  (que varia com a posição x), na qual a velocidade do fluido é 99% da sua velocidade inicial. A região compreendida abaixo de

 $\delta(\mathbf{X})$  é conhecida como CLH, e os efeitos viscosos têm influência. Acima dessa região encontra-se o escoamento livre (também chamado de escoamento potencial), onde não se observam efeitos da viscosidade.

O aumento da camada-limite hidrodinâmica com a posição ocorre pois a transferência de momento não se dá perpendicularmente com a superfície, mas sim normal às linhas de corrente.

Assimile

Exemplificando

A camada limite se modifica de acordo com o tipo de escoamento. Para escoamento laminar é possível visualizar as linhas de corrente das diversas camadas de fluido escoando adjacentes umas às outras. A partir de um comprimento crítico ( $X_c$ ), existe uma região de transição após a qual o escoamento se transforma em turbulento, formando vórtices no escoamento, tal que:

$$\mathbf{x}_{c} = \frac{\mathbf{Re}_{c} \cdot \nu}{\mathbf{u}_{m}}$$

Em que **Re**<sub>c</sub> é o número de Reynolds em que o escoamento se transforma de laminar para turbulento.

Determine o comprimento crítico que a água ( $v = 8,937 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) apresenta quando escoa sobre uma placa plana com velocidade média de 3 m/s, considerando que neste escoamento o número crítico de Reynolds vale 500 mil.

Solução:

O comprimento crítico é aquele no qual o escoamento laminar se desenvolve para turbulento. Portanto, nas condições apresentadas, vale:

$$x_{c} = \frac{Re_{c} \cdot \nu}{u_{m}} = \frac{500000 \cdot 8,937 \times 10^{-7} m^{2}/s}{3 m/s} = 15 cm$$



O tipo de escoamento depende da geometria, da rugosidade e da geometria da superfície, da sua temperatura, do tipo e da velocidade do fluido. É possível verificar se o escoamento é do tipo laminar ou turbulento por meio do experimento descrito por Osborne Reynolds. Leia sobre este experimento nas páginas 384-386 do Capítulo 6, Fundamentos da convecção, em:

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; KANOGLU, M. Transferência de calor e massa: uma abordagem prática. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904p.

Analogamente à CLH existe a formação de uma camada-limite térmica (CLT) quando o escoamento do fluido se dá sobre uma superfície que se encontra em uma temperatura distinta  $(T_s)$ , conforme apresentado na Figura 2.3.



Figura 2.3 | Desenvolvimento da CLT sobre uma placa aquecida

Fonte: Bergman et al. (2017, p. 243).

No caso da CLT a transferência de calor ocorre por condução na superfície da placa (y=0) e por convecção na região da camadalimite. Os efeitos térmicos da superfície não são notados a partir do ponto  $\mathbf{Y} = \delta_t$ , no qual a razão do gradiente de temperatura atinge 99%  $\left(\frac{T_s - T(\mathbf{x})}{T_s - T_{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}, \mathbf{99}\right)$ .



No escoamento turbulento aparecem vórtices que misturam parcelas do fluido que estão distantes uma das outras. Essa mistura favorece ou prejudica as trocas térmicas? Ou seja, as taxas de transferência convectiva de calor são maiores no escoamento laminar ou turbulento? Por quê? Na prática, você espera que a maioria dos escoamentos sejam laminares ou turbulentos?

Neste momento do estudo você pode estar se perguntando como é possível descrever as propriedades do fluido dentro da camada-limite? Felizmente é sobre isso que estudaremos agora.

Para estudarmos a convecção precisamos realizar um balanço de energia. Entretanto, como a convecção está associada ao movimento de parcelas do fluido que apresentam temperaturas distintas, devemos trabalhar juntamente com o balanço de quantidade de movimento e da equação da continuidade. Para simplificar, consideramos escoamento permanente bidimensional de fluido Newtoniano com propriedades constantes. Além disso, u(x,y) e v(x,y) serão as velocidades do fluido na direção x e y, respectivamente, e V é a velocidade do fluido longe da camada-limite. Os balanços necessários são realizados em um elemento diferencial do fluido no interior da camada-limite, conforme esquematizado na Figura 2.4.

Figura 2.4 | Elemento diferencial na camada-limite para balanços



Fonte: adaptado de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 389-392).
A equação da continuidade nos mostra que a quantidade de massa que entrar no elemento diferencial deve ser igual à quantidade que deixa o mesmo elemento para um mesmo intervalo de tempo. Matematicamente é possível demonstrar que:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad \text{(BM)}$$

Para o balanço de quantidade de movimento na direção x, devemos partir da segunda lei de Newton do movimento. Essa lei demonstra que a força, agindo na direção x no elemento de fluido, é igual à massa do fluido vezes sua aceleração nessa direção, ou então, que a força é igual à diferença entre as taxas de entrada e saída de quantidade de movimento. Após várias etapas matemáticas, o balanço de quantidade de movimento de direção x pode ser expresso como:

$$\rho \left( \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \right) = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{BQM})$$

Por fim resta-nos realizar o balanço de energia. Não há consumo nem geração energética e no regime permanente não há acúmulo de energia interna no elemento diferencial. Desse modo o balanço se reduz às transferências líquidas de energia através da fronteira do elemento diferencial e da energia que é carregada internamente pela massa de fluido. Portanto, podemos escrever o balanço de energia da seguinte maneira.

$$\rho \cdot \mathbf{c}_{p} \left( \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} \right) = \mathbf{k} \left( \frac{\partial^{2} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^{2}} + \frac{\partial^{2} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}^{2}} \right) + \mu \Phi \quad (BE)$$

Pesquise mais

O termo  $\mu\Phi$  representa a dissipação viscosa que é importante para a variação de temperatura em escoamento com velocidade e viscosidade elevados. Saiba mais sobre este assunto lendo as páginas 320-324 do Capítulo 11, As Equações de balanço para sistemas não-isotérmicos, em:

BIRD, B. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. Fenômenos de transporte. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002. 840 p.

As expressões de BM, BQM e BE não são simples. Sendo assim, é comum realizar simplificações para a camada-limite mantendo bons resultados. As simplificações envolvem o fato de que a velocidade e a temperatura variam muito menos ao longo da espessura da camada-limite do que em relação ao sentido do escoamento  $\left(\frac{\partial u}{\partial y} > \frac{\partial u}{\partial x} e \frac{\partial T}{\partial y} > \frac{\partial T}{\partial x}\right)$ . Além disso,  $\mathbf{U} \gg \mathbf{V}$  tal que  $\frac{\partial v}{\partial x} < \mathbf{e} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} < \mathbf{e}$ , sendo que, para o escoamento sobre uma placa, a pressão independe de x e de y. Dessa forma, as expressões para o BQM e BE simplificam, respectivamente, em:

 $\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \in \mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2}$ 

Mesmo simplificadas, os balanços não possuem solução analítica. A primeira vez em que um pesquisador forneceu um método numérico capaz de solucionar o BM e BQM de modo aproximado ocorreu em 1908 por H. Blasius. A partir de então, tornou-se possível determinar a espessura da camada limite hidrodinâmica em um ponto x do escoamento em função do número de Reynolds por meio da equação:

$$\delta = \frac{4,91 \cdot \dot{x}}{\sqrt{\text{Re}_{x}}}$$

E a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) e o coeficiente de atrito ( $C_{f,x}$ ) também puderam ser estimados.

$$C_{f,x} = 2 \frac{\tau}{\rho V^2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$

Caro aluno, um pouco de paciência que logo mostraremos a importância do coeficiente de atrito na convecção. Futuramente no livro explicaremos com mais detalhes a definição do número de Re e de outros números adimensionais também.

Em posse de uma solução para o BM e BQM, é possível resolver o BE a fim de obter a espessura da camada-limite térmica ( $\delta_{\tau}$ ). Dessa maneira, sendo Pr o número de Prandtl, escrevemos:

$$\delta_{\tau} = \frac{\delta}{\mathsf{Pr}^{1/3}} = \frac{4,91 \cdot \mathsf{x}}{\mathsf{Pr}^{1/3} \sqrt{\mathsf{Re}_{\mathsf{x}}}}$$

O procedimento matemático envolvido nas soluções dos balanços envolve o uso de variáveis de similaridade e outras adimensionalizações. Nesse processo, aparecem importantes números adimensionais que são, grosso modo, grupamento de propriedades com um importante significado físico. Provavelmente você já ouviu falar no número de Mach, que é possivelmente o mais famoso dos números adimensionais. Importantes números adimensionais incluem o número de Reynolds (Re), Prandtl (Pr), Nusselt (Nu), Schimidt (Sc), Lewis (Le), Sherwood (Sh), Stanton (St) e Grashoff (Gr).

Estes números são importantes na convecção, pois é possível estudar as camadas-limites por meio de analogias umas com as outras, e a validade da analogia ocorre devido aos números adimensionais. Por exemplo, a analogia de Reynolds ocorre quando as três difusividades (movimento, calor e massa) são idênticas. Isto implica que os números de Re, Sc e Le são aproximadamente iguais a 1, ou seja, as camadas-limite hidrodinâmica, térmica e mássica (já adiantando um pouco o assunto de transporte de massa) se sobrepõem. Com isso, é possível provar que:

$$\frac{C_{f}}{2}Re = Nu = Sh \rightarrow \frac{C_{f}}{2} \frac{V \cdot L_{c}}{\upsilon} = \frac{h \cdot L_{c}}{k} = \frac{h_{\text{mássico}}L_{c}}{D_{\text{AB}}}$$

Em que  $L_c$  é o comprimento característico e  $D_{AB}$  é a difusividade mássica da espécie A em B.

Agora explicamos a você a importância do coeficiente de atrito. Em muitas aplicações práticas é difícil determinar os parâmetros de calor (h) e massa (**D**<sub>AB</sub>), mas o coeficiente de atrito é relativamente simples de ser determinado. Por isso ele é importante na convecção, pois através dele determinam-se os parâmetros mencionados de modo mais simples.

A analogia de Reynolds consiste em um caso particular de uma situação mais ampla denominada de analogia de Chilton-Colburn, a qual é válida mesmo quando  $\mathbf{Pr} \neq \mathbf{Sc} \neq \mathbf{1}$ . Leia as páginas 836-838 de:

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; KANOGLU, M. **Transferência de calor e massa:** uma abordagem prática. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904p.

#### Sem medo de errar

Uma empresa de camping que está desenvolvendo um cobertor térmico para ser utilizado em situações de resgate e salvamento em regiões frias e de elevada altitude está com problemas no

**Pesquise mais** 

desenvolvimento desse produto e entrou em contato com você para encontrar uma solução ao problema que ela enfrenta. Essa empresa contratou o seu serviço pois a força do vento nos locais onde o cobertor será utilizado tem rasgado o tecido durante as etapas de teste do produto, e você precisa determinar essa força a fim de que a empresa consiga utilizar esse parâmetro para fabricar o cobertor de uma forma resistente o suficiente.

A força do vento se relaciona com o coeficiente de atrito pela expressão:  $\tau$ 

$$C_{f} = 2 \frac{\tau}{\rho V^{2}}$$

Em que  $\tau$  é a tensão de cisalhamento, ou seja, é a força por unidade de área do tecido.

Considerando a informação de que o coeficiente de atrito é igual a 0,5 e que o cliente informou que o cobertor será utilizado em ambiente com massa específica do ar de **1,515 kg/m**<sup>3</sup>, segue que:

$$0,5 = 2 \frac{\tau}{1,515 \text{ kg/m}^3 \cdot (19,5 \text{m/s})^2}$$

Portanto, você determina que a tensão de cisalhamento (ou força por unidade de área) vale  $\tau = 288,04 \text{ N/m}^2$ . Com este dado, os cobertores serão confeccionados para atender esta demanda.

Agora, conforme lhe foi solicitado, você deve determinar o valor médio do coeficiente de transferência de calor por convecção. Como o cobertor pode ser considerado uma placa plana, vale a expressão:

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \cdot dx$$

Em que L representa o comprimento do cobertor. Localmente, o coeficiente de convecção foi fornecido pelo fabricante como sendo dado por:

$$h = C \left( \frac{V}{x \cdot T} \right)^m$$

Substituindo essa informação na expressão para o coeficiente médio, você determina que:

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} C \left( \frac{V}{x \cdot T} \right)^{m} \cdot dx$$

Para resolver o seu projeto é preciso solucionar esta integral. Portanto, o coeficiente médio de convecção é dado por:

$$\overline{h} = \frac{C}{L} \left(\frac{V}{T}\right)^{m} \int_{0}^{L} \left(\frac{1}{x}\right)^{m} \cdot dx = C \left(\frac{V}{T}\right)^{m} \frac{1}{L^{m} \left(1 - m\right)}$$

Por meio da lei de Newton do resfriamento é possível apresentar ao cliente qual é o fluxo de calor transferido entre o cobertor e o ambiente de acordo com as informações passadas, ou seja:

$$q = h \cdot (T_s - T_{_{\infty}}) = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{57, 15}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right] = C \left(\frac{V}{T}\right)^m \frac{1}{L^m \left(1 - m\right)} \cdot \left[37, 5 - \left(33 - \frac{1.848, 6}{10, 45 + 10\sqrt{19, 5} - 19, 5}\right)\right]$$

Como todas as informações requisitadas pelo cliente foram apresentadas no seu projeto, o seu trabalho se encerra por aqui, tendo resolvido o problema do rasgo do tecido e fornecido a expressão que o fabricante utilizará durante os testes de transferência de calor do novo cobertor.

#### Avançando na prática

#### Calibração de viscosímetros

#### Descrição da situação-problema

Você trabalha em uma empresa que fabrica viscosímetros e está no setor que testa diferentes óleos para preencher este equipamento. Para estes óleos você precisa determinar seus perfis de temperatura, pois a viscosidade é fortemente dependente da temperatura. O óleo utilizado no interior do aparelho é viscoso, e o seu escoamento pode ser considerado como sendo um escoamento entre placas planas paralelas, uma vez que a placa em y=0 encontra-se parada e a outra em y=L movimenta-se com velocidade uniforme V. Ambas as placas são mantidas com temperatura  $T_0$ . Para um determinado óleo, você já conhece o perfil de velocidade:  $u(y) = \frac{y}{L}v$ ; e o termo de dissipação viscosa  $\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ . Qual é o seu perfil de temperatura?

#### Resolução da situação-problema

Consideramos que o regime de escoamento é permanente e o fluido tem propriedades constantes. Como u=u(y), a equação da continuidade é V=0.

Como ambas as placas são mantidas com temperatura uniforme ao longo de sua extensão, não há gradiente térmico na direção x, portanto T=T(y) entre as placas.

Substituindo as considerações e o perfil de velocidades no balanço de energia, segue que:

$$\rho \cdot \mathbf{C}_{p} \left( \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} \right) = \mathbf{k} \left( \frac{\partial^{2} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^{2}} + \frac{\partial^{2} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}^{2}} \right) + \mu \Phi \rightarrow \frac{\mathbf{d}^{2} \mathbf{T}}{\mathbf{d} \mathbf{y}^{2}} = -\frac{\mu}{\mathbf{k}} \left( \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{L}} \right)^{2}$$

As duas condições de contorno necessárias para resolver a equação diferencial são:

$$T(0) = T(L) = T_0$$

Integrando duas vezes a equação diferencial, sendo  ${\sf C}_1$  e  ${\sf C}_2$  constantes, obtemos que:

$$T(y) = -\frac{\mu V^2}{2kL^2}y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

Substituindo as condições de contorno no perfil de temperatura, determinam-se os valores das constantes de integração. Portanto, o perfil de temperaturas no escoamento é dado por:

$$T(y) = -\frac{\mu V^2}{2kL^2} y^2 + \frac{\mu V^2}{2kL} y + T_0$$

## Faça valer a pena

**1.** Um fluido incompressível com massa específica de 997 kg/m<sup>3</sup> à temperatura ambiente escoa com velocidade uniforme de 1,2 m/s quando encontra uma superfície plana aquecida uniformemente e que está parada. Nessas condições o coeficiente de transferência de calor por convecção varia com a posição num fator de  $x^{-1/2}$ .

Assinale a alternativa que indica o valor médio do coeficiente de transferência de calor por convecção sobre a superfície plana.

- a)  $4 \cdot L^2$ .
- b)  $2 \cdot L^2$ .
- C)  $4 \cdot L^{-1/2}$ .
- d)  $L^{-1/2}$ .
- e) 2 · L<sup>-1/2</sup> .

**2.** Para ventos com velocidade entre 0,15 e 1,5 m/s, o coeficiente de convecção térmica para uma pessoa em pé no vento e com roupas adequadas pode ser determinado pela expressão  $h= 14,8 V^{0.69}$ , em que V é velocidade do vento em m/s.

Assinale a alternativa que indica a razão entre o coeficiente de transferência de calor por convecção para o vento a 1,5 e 0,15 m/s.

a) 4,885.
b) 4,890.
c) 4,895.
d) 4,900.
e) 4,905.

**3.** A asa de um avião pode ser considerada uma placa plana com dimensões 25 m x 3 m. Um avião com 10.000 pés de altitude (3,05 km) voa com velocidade constante de 500 km/h e coeficiente de atrito de 0,023. Sabe-se que nessa altitude as propriedades do ar são constantes e valem:  $\rho = 1,394 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1,630 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$  e Pr = 0,7408. Para a asa do avião, considere k = 11 kW/m · K.

Assinale a alternativa que apresenta o coeficiente convectivo de transferência de calor entre a asa do avião e o ar durante o voo.

a) 137 W/m<sup>2</sup> · K. b) 254 W/m<sup>2</sup> · K. c) 562 W/m<sup>2</sup> · K. d) 0,27 W/m<sup>2</sup> · K. e) 195 W/m<sup>2</sup> · K.

# Seção 2.2

# Escoamento externo

## Diálogo aberto

Você estudou que a convecção é um entre três mecanismos possíveis de transferência de calor entre regiões que apresentam diferentes temperaturas. A convecção, em particular, é o mecanismo que exige movimento relativo entre essas regiões. É um pouco notável que tal escoamento ou se dá em um ambiente externo ou em um ambiente interno. Não existe outra opção, e nesta seção vamos olhar mais atentamente o fenômeno da convecção no escoamento externo. A brisa que sopra do mar, o resfriamento de componentes eletrônicos, a secagem de uma folha de papel ou de um polímero durante sua fabricação e muitas outras situações consistem no fenômeno da convecção externa.

Lembre-se de que você está atuando em um escritório de engenharia fornecendo soluções em projetos que envolvem conceitos de transferência de calor e, neste momento, tem em sua mesa um trabalho a ser feito relativo à convecção externa. Neste projeto, uma empresa de polímeros produz, em escala industrial, finas folhas de plástico para embalagens, conforme apresentado na Figura 2.5.



Figura 2.5 | Desenho esquemático do resfriamento da folha plástica

Fonte: adaptada de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 428).

A folha produzida é do tipo infinita, ou seja, o seu comprimento é contínuo, sendo cortada apenas quando atinge o comprimento desejado para determinada demanda. O fabricante da folha acredita que a etapa de resfriamento esteja gerando prejuízos econômicos para a empresa em razão de a energia consumida no processo ser de, aproximadamente, 750 W. Você foi contratado para determinar a quantidade de energia transferida da folha para o ar de resfriamento em condições normais do processo para que a empresa estime se existe perda lucrativa nessa etapa do processo fabril, e para isso você pode utilizar as propriedades apresentadas na Tabela 2.1.

⊤ (°C)	Condutividade térmica – k ( <b>W/m·K</b> )	Viscosidade cinemática - <i>v</i> ( <b>m²/s</b> )	Número de Prandtl Pr
50	0,02735	1,798×10 <sup>-5</sup>	0,7228
60	0,02808	1,896×10 <sup>-5</sup>	0,7202

Tabela 2.1 | Propriedades do ar sob 1 atm de pressão

Fonte: adaptado de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 428).

Para determinar essa quantidade de energia, precisamos encontrar o valor do coeficiente de transferência convectivo desta situação específica utilizando, para isso, o conteúdo desta seção. Para solucionar este projeto, e muitos problemas de convecção externa, é necessário analisar o tipo de escoamento, o número de Reynolds e a forma apropriada do número de Nusselt. É devido a essa semelhança na análise de problemas de convecção externa que compreender o conteúdo desta seção é muito importante para sua formação profissional. Não se esqueça de verificar seu aprendizado solucionando os exercícios propostos e o projeto da empresa de polímeros. Bons estudos!

## Não pode faltar

Nesta seção o estudo da convecção foca o caso do movimento externo a uma superfície plana, outra cilíndrica, esférica e matrizes

tubulares. Exemplos de convecção externa consistem no ar soprado por uma ventoinha para resfriar uma peça eletrônica, uma brisa sobre o oceano, causando a evaporação da água, um jato de água fria que atinge uma chapa aquecida, bolas metálicas aquecidas que são transportadas por uma esteira submersa em água gelada, o escoamento de fluidos sobre pás, turbinas e aerofólios, entre outras situações.

Na seção anterior vimos que o movimento do fluido sobre uma superfície sólida forma as camadas-limite: hidrodinâmica, devido ao perfil de velocidades, e térmica, devido ao gradiente de temperatura. Para o escoamento externo, o desenvolvimento dessas camadas-limite ocorre livremente, ou seja, não existe outra superfície que possa interagir e interromper a formação da camadalimite. Portanto, acima da camada-limite existe o escoamento livre, também denominado de escoamento potencial, onde os gradientes mencionados não são observados.

Vamos considerar que o escoamento é do tipo forçado, ou seja, devido à ação de um agente mecânico, por exemplo um ventilador. Nosso objetivo é determinar a quantidade de energia que é transferida entre a superfície (plana ou curva) e o fluido. Para quantificar essa energia é necessário determinar o coeficiente de transferência de calor por convecção (h), e isso é feito calculando o número adimensional de Nusselt (Nu) por meio de uma função de Reynolds (Re) e Prandtl (Pr).

### Nu = f(Re, Pr)

# Pesquise mais

A origem dos números adimensionais reside no teorema dos  $\pi$  de Buckingham apresentado nas páginas 135-138 do Capítulo 11, Análise dimensional e similaridade, em:

WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D. G. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2017. 716 p.

As definições dos números adimensionais de Nusselt ( $Nu_L$ ), Reynolds ( $Re_L$ ) e Prandtl (Pr) são:

$$\begin{aligned} \mathsf{Nu}_{L} &= \frac{\mathsf{h} \cdot \mathsf{L}}{\mathsf{k}} = \frac{\mathsf{h} \cdot \Delta \mathsf{T}}{\frac{\mathsf{k} \Delta \mathsf{T}}{\mathsf{L}}} = \frac{\mathsf{taxa} \ \mathsf{de} \ \mathsf{convecção}}{\mathsf{taxa} \ \mathsf{de} \ \mathsf{condução}} \\ \\ \mathsf{Re}_{L} &= \frac{\rho \cdot \mathsf{V} \cdot \mathsf{L}}{\mu} = \frac{\mathsf{forças} \ \mathsf{inerciais}}{\mathsf{forças} \ \mathsf{viscosas}} \\ \\ \mathsf{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot \mathsf{C_{p}}}{\mathsf{k}} = \frac{\mathsf{difusividade} \ \mathsf{molecular} \ \mathsf{de} \ \mathsf{momento}}{\mathsf{difusividade} \ \mathsf{molecular} \ \mathsf{térmica}} \end{aligned}$$

O número de Pr e as propriedades termofísicas dos materiais estão tabeladas no apêncice A de:

Pesquise mais

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Em conhecimento de Nu como uma função dos números de Reynolds e Prandt, determina-se o coeficiente convectivo, e a quantidade de energia transferida é quantificada pela lei de Newton do resfriamento. Neste ponto, você deve estar percebendo que o estudo da convecção se resume, grosso modo, em conhecer a função f para os diferentes tipos de escoamentos externos.

O estudo da convecção pode ser realizado por meio de uma abordagem teórica que envolve a solução aproximada das equações de movimento. Agora, mostraremos uma abordagem experimental que envolve uma solução aproximada das equações de movimento.

A abordagem experimental é amplamente utilizada na resolução de problemas práticos de convecção. As medições experimentais são realizadas em um modelo que representa a situação a ser estudada, por exemplo um túnel de vento representando um automóvel sob alta velocidade. O teorema de Buckingham fornece as bases teóricas para que as medições do experimento sejam válidas no caso da situação real. Para que isso ocorra, uma série de critérios devem ser satisfeitos, tais como critérios geométricos, dinâmico e intrínseco ao sistema (massa específica, por exemplo). Resumindo em outras palavras, quando tal situação é satisfeita, os números adimensionais do experimento são coincidentes com o valor da situação real.

Cientistas realizaram experimentos de escoamento conforme o exemplificado na Figura 2.6 para uma placa aquecida por uma resistência elétrica de potência  $E \cdot I$  e mantida com  $T_s > T_{\infty}$ . O calor transferido da placa para o fluido por convecção (q) é igual à potência elétrica, e, a partir dessa igualdade, o experimento demonstra que se pode determinar o coeficiente convectivo para a placa por meio da lei de Newton do resfriamento e os números adimensionais com base em suas definições. Repetindo o experimento em várias condições experimentais distintas, é possível confeccionar o gráfico di-logarítmico para o número de Reynolds e Nusselt, ficando o ajuste linear dos dados experimentais únicos para cada número de Prandtl, conforme a Figura 2.6.





Fonte: adaptado de Bergman et al. (2017, p. 278-279).

Observando a Figura 2.6, notamos que o número de Nusselt é uma função de Reynolds e Prandtl:  $\overline{Nu}_{L} = f(Re_{L}, Pr, C, m, n)$ .

Em que C, m e n são constantes que variam de acordo com a geometria e as condições de escoamento.

Considere a convecção sobre uma placa plana demonstrada na Figura 2.7, em que o escoamento laminar, após um comprimento crítico ( $\mathbf{x}_{c}$ ), se transforma em turbulento (denominado de escoamento misto) para  $\mathbf{Re}_{cr} > 5 \times 10^{5}$ . Figura 2.7 | Convecção térmica sobre uma placa de comprimento L de temperatura constante  ${\rm T_s}$ 



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 279).

Para o escoamento laminar, incompressível em regime estacionário de um fluido com propriedades constantes e dissipação viscosa insignificante, a solução por similaridade (e outros métodos matemáticos) das equações da continuidade, do balanço de momento e de energia permitem determinar a espessura da camada-limite hidrodinâmica ( $\delta$ ), térmica ( $\delta_T$ ), do coeficiente de atrito local ( $C_{f,x}$ ) ou médio ( $\overline{C}_{f,x}$ ) e de Nu local ( $Nu_x$ ) ou médio ( $\overline{Nu}_x$ ) que estão indicadas na Tabela 2.2 juntamente com as condições de validade. Para o escoamento turbulento, não existem soluções analíticas nas camadas-limite devido à sua alta instabilidade no escoamento.

Correlação	Condições de validade	
$\delta = 5 \mathrm{x} \mathrm{Re}_\mathrm{x}^{\text{-1/2}}$	Laminar	
$C_{f,x} = 0,664 Re_x^{-1/2}$	Laminar	
$Nu_x = 0,332Re_x^{1/2}Pr^{1/3} = \frac{h_x \cdot x}{k}$	Laminar , <b>Pr≥0,6</b>	

T	○ I ~ I	~ .		
Tabela 2.2 I	Correlacoes de	conveccao externa	em deometria	plana isotermica

$\delta_{\rm T} = \delta {\rm Pr}^{\text{-1/3}}$	Laminar	
$\bar{C}_{f,x} = 1,328 Re_x^{-1/2}$	Laminar	
$\overline{Nu}_{x} = 0,664 \text{Re}_{x}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = \frac{\overline{h_{x}} \cdot x}{k}$	Laminar, <b>Pr≥0,6</b>	
$C_{f,x} = 0,0592 Re_x^{-1/5}$	Turbulento, $\text{Re} \leq 10^8$	
$\delta = 0.37 \mathrm{xRe_x^{-1/5}}$	Turbulento, <b>Re</b> ≤10 <sup>8</sup>	
$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$	Turbulento, $Re \leq 10^8$ , $0.6 \leq Pr \leq 60$	
$\bar{C}_{f,x} = 0,074 Re_L^{\text{-}1/5} - 1742 Re_L^{\text{-}1}$	*Misto, $Re_{_{x,c}}=5\!\times\!10^5$ , $Re_{_L}\!\leq\!10^8$	
$\overline{Nu}_{L} = (0,037 Re_{x}^{4/5} - 841) Pr^{1/3}$	*Misto, $Re_{_{x,c}}=5\!\times\!10^5$ , $Re_{_L}\leq\!10^8$ , $0,\!6\leq\!Pr\leq\!60$	

\*Escoamento laminar que se desenvolve em turbulento a partir de um comprimento x,c. Fonte: adaptado de Bergman et al. (2017, p. 306).

Compare as correlações para espessura das camadas-limite hidrodinâmicas no escoamento laminar e no turbulento, apresentadas na Tabela 2.2. Note que, conforme esperado do nosso estudo de camadas-limites, a turbulência ocasiona desenvolvimento mais acentuado da camada-limite devido aos vórtices de mistura que transferem o momento linear rapidamente através das linhas de corrente próximas à superfície para o seio do fluido. Raciocínio semelhante pode ser empregado para outras correlações, como para o coeficiente de atrito local. Observe na Tabela 2.2 que, para o escoamento laminar, o coeficiente de atrito é função da raiz quadrada de Re e somente raiz quinta de Re no turbulento. Ou seja, o atrito no escoamento turbulento diminui lentamente, e isso é esperado neste tipo de escoamento, já que o movimento caótico das linhas de corrente interage mais ativamente entre si e com a superfície favorecendo o atrito.

# Assimile

Para o escoamento laminar, os valores médios de Nu e do coeficiente de atrito valem metade do valor local. Além disso, a relação entre a espessura das camadas-limite térmica e hidrodinâmica é dada por  $\delta_{\rm T} = \delta {\rm Pr}^{-1/3}$  para o escoamento laminar sobre placa plana.

#### Algumas situações práticas do escoamento externo implicam no fluido escoar sobre uma placa plana com comprimento inicial não aquecido. Leia sobre este caso de convecção externa nas páginas 284 e 285 do Capítulo 7, Escoamento externo, em:

Pesquise mais

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Agora, iremos analisar a convecção externa sobre superfícies radiais, começando com o cilindro.

Neste caso, o escoamento do fluido ocorre perpendicularmente ao eixo longitudinal do cilindro, conforme exemplificado na Figura 2.8. Neste escoamento, a velocidade de aproximação do fluido é V, e a velocidade do fluido no escoamento livre é  $\mathbf{u}_{\infty} = \mathbf{u}_{\infty}(\mathbf{x})$  – na placa plana eles são iguais.





Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 289).



O escoamento apresentado na Figura 2.8 pode ser utilizado para explicar o escoamento ao redor de uma casca cilíndrica? E uma casca esférica?

A região de ataque do fluido sobre o cilindro ocasiona uma região de estagnação da velocidade e incremento da pressão. A partir dessa região, a pressão se reduz na direção x até atingir o menor valor atrás do cilindro e, continuando na direção x, a pressão volta a aumentar. Já a velocidade (ou o perfil de velocidades) tem comportamento inverso, aumentando primeiro (região de aproximação do fluido) e diminuindo a partir do ponto de inversão do gradiente de pressão. A influência da variação de pressão sobre o perfil de velocidades ocasiona a formação de um ponto de separação da camada-limite, descolandose da superfície. Nesse ponto, o momento do fluido é insuficiente para movimentá-lo a jusante, as linhas de corrente se distorcem e originam vórtices na esteira formada atrás do cilindro.

Assimile  $\frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} > 0$ .  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ Antes do ponto de separação, е ponto de separação, as desigualdades são invertidas.

Neste escoamento, o número de Reynolds é calculado de maneira análoga ao calculado para a placa plana, mas substituindo o comprimento da placa pelo diâmetro do cilindro (válido para esferas também), sendo denominado por **Re**<sub>p</sub>, portanto.

Correlações empíricas foram desenvolvidas para diversas condições de escoamento e estão apresentadas na Tabela 2.3, juntamente com sua faixa de validade. Como o escoamento sobre uma esfera assemelha-se muito ao escoamento sobre um cilindro, suas correções também estão dispostas na mesma Tabela 2.3. É importante notar que as propriedades termofísicas no escoamento sobre cilindro, da mesma forma que para a placa plana, são determinadas na temperatura média da camada-limite térmica, mas para a esfera usa-se  $T_{\infty}$ ; e o número de Pr é estimado na temperatura da superfície. Além disso, propriedades com o índice s são estimadas na temperatura da superfície.

Tabela 2.3 | Correlações de convecção externa em geometria cilíndrica e esférica

Correlação	Condições de validade	
$\overline{Nu}_{D}=CRe_{D}^{m}Pr^{1/3}$	Cilindro, $0,4 \leq Re_{D} \leq 4 \times 10^{5}$ , $Pr \geq 0,7$	
$\overline{Nu}_{D} = CRe_{D}^{m}Pr^{0.37} \left(\frac{Pr}{Pr_{s}}\right)^{1/4} = \frac{\overline{h} \cdot D}{k}$	Cilindro, $1 \le \text{Re}_{\text{D}} \le 2 \times 10^6$ , $\text{Pr} \le 10$	
$\overline{Nu}_{\text{D}} = \text{CRe}_{\text{D}}^{\text{m}}\text{Pr}^{0,36} {\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_{\text{s}}}\right)}^{1/4}$	Cilindro, $1 \le \text{Re}_{\text{D}} \le 2 \times 10^6$ , $\text{Pr} \ge 10$	
$\overline{Nu_{\text{D}}} = 0,3 + \frac{0.62 Re_{\text{D}}^{12} P r^{10}}{\left[1 + \left(0.4 / P r\right)^{20}\right]^{14}} \left[1 + \left(\frac{Re_{\text{D}}}{282000}\right)^{58}\right]^{45}$	Cilindro, <b>(Re<sub>D</sub>Pr)≥0,2</b>	
$C_{D} = \frac{24}{Re_{D}}$	Esfera, <b>Re</b> <sub>p</sub> ≤ 0,5	
$\overline{Nu}_{D} = 2 + \left(0.4 Re_{D}^{1/2} + 0.06 Re_{D}^{2/3}\right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_{s}}\right)^{1/4}$	Esfera, $3.5 \le \text{Re}_{\text{D}} \le 7.6 \times 10^4$ , $0.71 \le \text{Pr} \le 380$ , $1.0 \le \frac{\mu}{\mu_{\text{s}}} \le 3.2$	

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 306).

Os valores das constante C e m para as correlações da Tabela 2.3 são apresentadas nas Tabelas 7.2 (cilindro circular), 7.3 (cilindro não circular) e 7.4 (cilindro circular) em:

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Para o escoamento ao redor de esfera com  $Re \to 0$ , o número de  $\overline{Nu}_{\text{D}}$  é igual a dois. Este resultado corresponde à condução de calor em esfera em um meio infinito estacionário.

Ar, cujo número de Prandtl vale 0,70 nas condições deste exemplo, é transportado em fluxo cruzado sobre a superfície externa de um

Exemplificando

Saiba mais

Assimile

cilindro aquecido ( $D = 12 \text{ cm} \text{ e } k = 0,030 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ) de tal maneira que o número de Reynolds vale 6.000. Utilize a correlação apropriada para determinar o número de Nusselt e o coeficiente de transferência de calor por convecção.

Solução:Como  $(Re_pPr) \ge 0,2$ , a correlação para Nusselt é dada por:

$$\overline{Nu}_{\text{D}} = 0.3 + \frac{0.62 \text{Re}_{\text{D}}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(0.4/\text{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_{\text{D}}}{282.000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

Portanto, substituindo valores, o número de Nusselt vale:

$$\overline{Nu}_{D} = 0,3 + \frac{0,62(6.000)^{1/2} \ 0,7^{1/3}}{\left[1 + \left(0,4/0,7\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{6.000}{282.000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 40,38$$

Da definição de Nusselt, obtém-se o coeficiente convectivo:

$$\bar{h} = \frac{Nu_D \cdot k}{D} = \frac{40,38 \cdot 0,030 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{0,12 \text{ m}} = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

A convecção sobre um feixe de tubos (também denominada de matriz ou banco de tubos) com escoamento cruzado se faz presente na produção de vapor, em trocadores de calor e em condicionadores de ar, por exemplo. Nesta situação, demonstrada na Figura 2.9, o fluido de velocidade V escoa perpendicularmente à matriz tubular, enquanto um fluido com temperatura distinta percorre o interior dos tubos.





Fonte: adaptado de Bergman et al. (2017, p. 297).

A primeira coluna de tubos tem convecção análoga à de um cilindro sozinho. Nas demais colunas de tubos, o seu arranjo influencia na determinação do coeficiente convectivo, pois os tubos podem estar nos canais de escoamento preferenciais de outros tubos (Figura 2.9), portanto o coeficiente depende das condições de escoamento e do arranjo dos tubos no feixe.

Nas aplicações de feixes tubulares, deseja-se determinar o coeficiente de transferência de calor médio, pois ele engloba todo o feixe de tubos. Para feixes com pelo menos 20 tubos, temos a seguinte correlação:

$$\overline{Nu}_{\text{D}} = C_1 Re^{\text{m}}_{\text{D,max}} Pr^{0,36} \bigg( \frac{Pr}{Pr_s} \bigg)^{1/4}, \ 0,7 \le Pr \le 500, \ 10^3 \le Re_{\text{D,max}} \le 2 \times 10^6$$

Os valores das constantes  $\mathbf{C_1}$  e m podem ser encontrados na Tabela 7.5 em:

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Se o feixe de tubos apresentar menos que 20 tubos, então deve-se utilizar a correlação anterior multiplicada por um fator de correção apresentado na página 298 na Tabela 7.6, contida no mesmo material referenciado de Bergman et al.

As propriedades são estimadas na média logarítmica das diferenças de temperatura ( $\Delta T_{MLDT}$ ), exceto  $Pr_s$ , que é estimado na  $T_s$ , e  $Re_{D,máx}$ , que é determinado com a máxima velocidade do fluido.

$$\Delta T_{\text{mldt}} = \frac{(T_{\text{s}} - T_{\text{i}}) - (T_{\text{s}} - T_{\text{f}})}{\text{Ln} \left( \frac{T_{\text{s}} - T_{\text{i}}}{T_{\text{s}} - T_{\text{f}}} \right)}$$

Em que  $T_i$  é a temperatura do fluido na entrada do feixe, e  $T_f$  no final do feixe. Temos que  $T_f$  pode ser determinada por:

$$\frac{\mathrm{T_{s}}-\mathrm{T_{f}}}{\mathrm{T_{s}}-\mathrm{T_{i}}} = \exp\left(-\frac{\pi \mathrm{DN}\overline{\mathrm{h}}}{\rho \mathrm{VN_{t}S_{t}c_{p}}}\right)$$

Em que N é a quantidade de tubos no feixe, e  $N_t$  em uma fileira.  $S_t$  representa o número de passos transversais do fluido que percorre

Saiba mais

a matriz tubular, e  $c_p$  é o calor específico do fluido. Desse modo, a taxa linear de transferência de calor pelo escoamento em feixe de tubos pode ser determinada por:

# $q = N\bar{h}\pi D\Delta T_{MLDT}$

A convecção externa de um gás que ocorre durante a secagem de papel e produtos têxteis, no resfriamento de motores de turbinas a gás, no processo de descongelamento de sistemas de aeronaves, dentre outras situações, recebe o nome de jatos colidentes. Esse processo consiste em colidir um gás sobre uma superfície em ambiente estagnado através de um ou vários bocais. Nestas situações, a correlação para  $\overline{Nu}$  depende de Re, Pr e da geometria do jato, conforme ilustra a Figura 2.10.

Figura 2.10 | Fatores geométricos para (a) jato circular; (b) conjunto alinhado; (c) alternados de jatos circulares; (d) jato retangular; e (e) conjunto de jatos retangulares



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 303).

Saiba mais

As correlações específicas de  $\overline{Nu}$  para geometria de jato podem ser obtidas nas páginas 303 e 304 no Capítulo 7.7, Jatos colidentes, em:

BERGMAN et al. Fundamentos de transferência de calor e massa. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p. Se ao invés de colidir com o gás, fizermos este permear através de um agregado poroso de partículas sólidas, conforme indicado na Figura 2.11, então temos uma situação de convecção em leito recheado. Esta aplicação de convecção externa ocorre com frequência em processos catalíticos e na secagem de materiais porosos.

Figura 2.11 | Escoamento de gás em leito recheado



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 305).

Devido ao uso de sólido particulado e da porosidade do leito, a área específica disponível para troca térmica é elevada. O aumento da velocidade do fluido nos poros do leito gera turbulência, a qual também favorece as trocas térmicas. Considerando  $A_t$  como a área total do leito recheado (a soma das áreas de todas as partículas que compõem o leito), a taxa de transferência de calor através do leito pode ser determinada pela seguinte expressão:

#### $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{h}} \mathbf{A}_{t} \Delta \mathbf{T}_{\mathsf{MLDT}}$

Sendo  $A_c$  a área de seção transversal do leito, estima-se  $T_r$  necessária no  $\Delta T_{\text{MLDT}}$  por:

$$\frac{\mathbf{T}_{s} - \mathbf{T}_{f}}{\mathbf{T}_{s} - \mathbf{T}_{i}} = \exp\left(-\frac{\overline{\mathbf{h}}\mathbf{A}_{t}}{\rho \mathbf{V}\mathbf{A}_{c}\mathbf{c}_{p}}\right)$$

As propriedades do fluido devem ser estimadas na média aritmética das temperaturas de entrada e saída do fluido no leito.

## Sem medo de errar

Você tem que resolver neste momento um projeto solicitado por uma indústria de polímeros referente ao processo de resfriamento de um filme plástico, pois o fabricante acredita que esteja utilizando mais energia (750 W) do que o necessário ao processo e, com isso, está perdendo dinheiro. Você precisa verificar se há prejuízo econômico determinando a verdadeira taxa de energia necessária ao processo. Para isso, a primeira etapa na solução deste projeto é observar a Figura 2.5 e notar que se trata de uma convecção externa em geometria plana.

Figura 2.5. Esquema do resfriamento da folha plástica



Fonte: adaptado de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 428).

Na sequência, é necessário estimar as propriedades de condutividade, viscosidade cinemática e número de Pr do fluido de resfriamento na temperatura média entre a superfície e o ar, que é:

$$T = \frac{T_s + T_{\infty}}{2} = \frac{92 + 25}{2} = 58,5 \,^{\circ}\text{C}$$

As propriedades termofísicas do fluido de resfriamento são, então, obtidas por interpolação linear, a partir dos valores contidos na Tabela 2.1. Tabela 2.1 | Propriedades do ar sob 1 atm de pressão

⊥ (°C)	Condutividade térmica – k ( <b>W/m·K</b> )	Viscosidade cinemática - u (m²/s)	Número de Prandtl Pr
50	0,02735	1,798×10 <sup>-5</sup>	0,7228
60	0,02808	1,896×10 <sup>-5</sup>	0,7202

Fonte: adaptada de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 884).

Assim, é possível estimar as propriedades necessárias ao projeto em questão, cujos valores são:

#### $k\,{=}\,0,02741$ W/(m ${\cdot}\,K)$ ; $\nu\,{=}\,1,881{\times}\,10^{{\cdot}{5}}$ m²/s ; Pr ${=}\,0,7206$

A determinação da taxa de calor transferido entre o plástico e o ar depende do coeficiente convectivo (h), o qual é determinado a partir do número de Nu, que, por sua vez, depende do escoamento do ar ( $\mathbf{Re}_L$ ). Logo, da definição:

$$\operatorname{Re}_{L} = \frac{V \cdot L}{\nu} = \frac{5 \text{ m/s} \cdot 0.5 \text{ m}}{1.881 \times 10^{-5} \text{ m}^{2}/\text{s}} = 1.329 \times 10^{5}$$

O escoamento é laminar pois  $\operatorname{Re}_{L}$  é menor que o valor crítico de 500.000.

Conforme correlações vistas na Tabela 2.2, a correlação apropriada para o número de Nu sobre todo o plástico é:

 $\overline{Nu}_{L} = 0,664 \text{Re}_{L}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$ 

Substituindo os valores de  $\operatorname{Re}_{L}$  e Pr, segue que:

$$\overline{\text{Nu}}_{_{\text{L}}} = 0,664 \text{Re}_{_{\text{L}}}^{_{1/2}} \text{Pr}^{_{1/3}} = 0,664 (1,329 \times 10^5)^{^{1/2}} 0,7206^{^{1/3}} = 217,02$$

Da definição do número de Nusselt, encontramos o coeficiente convectivo sobre toda a largura do plástico.

$$\overline{Nu}_{_{L}} = \frac{\overline{h}_{_{L}} \cdot L}{k} \rightarrow \overline{h}_{_{x}} = \frac{217,02 \cdot 0,02741 \text{ W/}(\text{m} \cdot \text{K})}{1,0 \text{ m}} = 5,95 \text{ W/}(\text{m}^{2} \cdot \text{K})$$

A partir da lei de Newton do resfriamento, quantifica-se o fluxo de calor transferido entre a folha plástica e o ar de resfriamento.

$$q = \bar{h}_{_{L}} \left( T_{_{S}} - T_{_{\infty}} \right) = 5,95 \text{ W/} \left( m^{2} \cdot K \right) \cdot \left( 92 \text{ }^{\circ}\text{C} - 25 \text{ }^{\circ}\text{C} \right) = 398,65 \text{ W/m}^{2}$$

Como a área (A) de seção de resfriamento do equipamento tem largura de 1 metro, estendendo-se por 0,5 m de comprimento, então a taxa (Q) de calor transferido da folha plástica (região aquecida) para o ar de resfriamento (região fria) é dada por:

#### $Q = q \cdot A = 398,65 \text{ W/m}^2 \cdot (1 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m}) = 199,33 \text{ W}$

Portanto, como você estimou que a energia necessária para resfriar a folha plástica nas condições do processo é de aproximadamente 200 W, e a empresa de polímeros informou que tem dispendido 700 W, você pode concluir da sua análise que o processo está ineficiente e causa prejuízo na fabricação das folhas plásticas.

#### Avançando na prática

#### Reações catalíticas

#### Descrição da situação-problema

Você é pesquisador de uma empresa de tecnologia que submeteu um projeto sobre catálise em sistemas particulados para futuros investidores. Para aprovar a verba de financiamento, o revisor do seu projeto gostaria de saber a vida útil do catalisador, pois isto reflete diretamente na viabilidade econômica da reação catalítica, visto que o catalisador é caro, e, se for trocado muito rapidamente (baixa vida útil), o processo não é rentável. Para isso, você precisa estimar a temperatura na superfície das partículas, pois, quanto maior for esta temperatura, menor será a vida útil do catalisador, e deverá apresentar esse valor junto aos dados do projeto que estão apresentados na Figura 2.12.

Figura 2.12 | Esquema do leito de partículas para projeto de pesquisa



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 282).

Propriedades das particulas  $\overline{h} = 57,14 \text{ W/}(m^2 \cdot \text{K})$   $\rho = 2330 \text{ kg/m}^3$   $c_p = 712 \text{ (J/kg} \cdot \text{K})$ Dimensões do leito  $A_c = 0.15 \text{ m}^2$ 

$$A_t = 1,75 \text{ m}^2$$

#### Resolução da situação-problema

A temperatura na superfície das partículas que compõem o leito é diretamente obtida empregando a fórmula das diferenças de temperaturas no leito. Portanto, segue que:

 $\frac{T_{s} - T_{f}}{T_{s} - T_{i}} = exp \left( -\frac{\overline{h}A_{t}}{\rho VA_{c}c_{p}} \right) \rightarrow \frac{T_{s} - 650}{T_{s} - 300} = exp \left( -\frac{57,14 \cdot 1,75}{2.330 \cdot 0,05 \cdot 0,15 \cdot 712} \right) \rightarrow T_{s} = 44.022,6 \text{ K}$ 

Em temperaturas elevadas as partículas podem se unir (sinterizar) e diminuir a área disponível para a reação catalítica, o que prejudica a reação, exige troca dos catalisadores, encarece o processo e ocasiona prejuízos econômicos. Como a temperatura determinada é apenas ligeiramente superior à temperatura de saída do leito, este projeto não deve apresentar risco de sinterizar e encontra-se pronto para avaliação dos investidores.

## Faça valer a pena

**1.** A convecção de um fluido em uma superfície sólida pode ocorrer de duas maneiras distintas, a depender do local onde a superfície se encontra. Se a superfície for um ambiente interno, como uma tubulação, diz-se que a convecção do fluido é interna. Entretanto, se a superfície sólida estiver livre, isto é, não existir outra superfície nas suas adjacências, então o escoamento do fluido é dito externo.

Assinale a alternativa que contenha exemplos de escoamentos externos.

- a) Vento ao redor da cabine de um avião em voo.
- b) Escoamento de óleo em um aquecedor elétrico.
- c) Correntes marítimas e os ventos alísios soprados na linha do Equador.
- d) O escoamento ocasionado por um ventilador industrial em uma câmara de poeira.
- e) O escoamento de ar através de um filtro tipo manga.

**2.** Ar em movimento circunda os lados interno e externo do para-brisas de um automóvel com temperaturas distintas. O exterior encontra-se na temperatura constante de -15 °C, e o lado interno é mantido a 20 °C pelo sistema de aquecimento do veículo. O para-brisas, que possui espessura t de meio centímetro e comprimento de 0,60 m, pode ser considerado com geometria plana, conforme indicado na Figura 2.13, juntamente

com a temperatura da sua superfície externa. Se necessário, considere as propriedades termofísicas do ar na temperatura de -7,5 °C como sendo:  $k = 0,02307 \text{ W/}(\text{m}\cdot\text{K}), \nu = 1,279 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{/s} \in \text{Pr} = 0,7381.$ 



Figura 2.12 | Esquema do leito de partículas para projeto de pesquisa

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2017, p. 282).

Sabendo que o automóvel pode alcançar até 110 km/h nas estradas brasileiras, assinale a alternativa que indica o valor do coeficiente de transferência de calor convectivo entre a superfície do para-brisas e o exterior.

- a) 75 W/(m<sup>2</sup> · K).
- b) 76 W/(m<sup>2</sup> · K).
- C) 77 W/( $m^2 \cdot K$ ).
- d) 78 W/ $(m^2 \cdot K)$ .
- e) 79 W/ $(m^2 \cdot K)$ .

**3.** Um cilindro utilizado no sistema de aquecimento de um aquecedor elétrico apresenta ar com baixa velocidade escoando ao seu redor, conforme ilustrado na Figura 2.14, juntamente de suas condições de operação.



Figura 2.14 | Condições operacionais do sistema de aquecimento elétrico

Considere escoamento incompressível em regime estacionário, temperatura uniforme da superfície do cilindro e valores termofísicos conforme apresentados na Tabela 2.4.

Temperatura do ar (K)	k (W/m⋅K)	ν (m²/s)	Pr
300	26,3×10 <sup>-3</sup>	15,89×10 <sup>-6</sup>	0,707
350	$30 \times 10^{-3}$	20,92×10 <sup>-6</sup>	0,700
401	-	-	0,690

Fonte: Bergman et al. (2017, p. 292).

Considerando que nenhuma potência (P) do sistema elétrico é dissipada para o ambiente, assinale a alternativa que contenha o coeficiente de transferência de calor convectivo determinado pelas condições operacionais do aquecedor e estimado por uma correlação apropriada, respectivamente (adaptada de BERGMAN et al., 2017, p. 292).

Fonte: Bergman et al. (2017, p. 292).

- a) 100 W/ $(m^2 \cdot K) \in 85 W/(m^2 \cdot K)$ .
- b) 110 W/ $(m^2 \cdot K)$  e 95 W/ $(m^2 \cdot K)$ .
- c) 120 W/ $(m^2 \cdot K) \in 105 W/(m^2 \cdot K)$ .
- d) 130 W/ $(m^2 \cdot K) \in 115$  W/ $(m^2 \cdot K)$ .
- e) 140 W/ $(m^2 \cdot K)$  e 125 W/ $(m^2 \cdot K)$ .

# Seção 2.3

# Escoamento interno

## Diálogo aberto

Se você abriu uma torneira para lavar as mãos ou beber água, então você causou o escoamento interno da água em uma tubulação. Existem muitas situações do nosso cotidiano que envolvem o escoamento interno, como tomar banho, lavar o quintal de casa e regar as plantas. Na indústria a situação se repete, isto é, muitos processos envolvem o escoamento interno de um fluido, como a operação de um macaco hidráulico, o transporte de gasolina e álcool para abastecer postos de combustíveis, a água de resfriamento em turbinas geradoras de energia, só para citar alguns dos muitos exemplos existentes.

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa de engenharia e tem resolvido projetos que exigem conhecimento de transferência de calor. O projeto no qual você irá trabalhar neste momento foi solicitado por uma empresa de petróleo e gás natural. Nessa empresa, existe uma seção horizontal de um oleoduto com 500 m de comprimento que está exposta ao ambiente, conforme mostrado na Figura 2.13. Esta empresa está com problemas no escoamento e em etapas posteriores ao transporte do óleo, e uma das possíveis causas é a queda de temperatura do óleo, que pode se tornar muito viscoso. A empresa requisitou seus serviços para determinar a quantidade de calor que é perdida pelo oleoduto para o ambiente, pois esta é a causa da diminuição da temperatura do óleo. No início do oleoduto, a temperatura do óleo é de 30 °C e diminui com o escoamento até um valor desconhecido na sua extremidade final. A seção de escoamento do óleo tem diâmetro (D) de 25 cm, sendo o óleo bombeado na velocidade média de 3 m/s. A temperatura do ambiente pode ser considerada constante a 20 °C, e, caso necessário, pode-se considerar as propriedades do óleo a 30 °C constantes, sendo  $\rho = 882,05 \text{ kg/m}^3$ ; c<sub>n</sub> = 1923 J/kg·K ;  $k = 0,1447 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ;  $\nu = 5,953 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \in \text{Pr} = 6914$ .

Figura 2.13 | Escoamento do óleo através de um oleoduto



Fonte: adaptada de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 486).

Para resolver este projeto, você deverá conhecer o escoamento interno de um fluido e suas implicações no desenvolvimento das camadas-limite. Você precisa, também, conhecer como determinar a diferença média logarítmica de temperatura e compreender como selecionar as diversas correlações para estimativa do número de Nusselt em escoamento interno. Muitas situações práticas da engenharia envolvem o escoamento de um fluido em um ambiente interno, como a operação de trocadores de calor e reatores tubulares, em dutos de ar-condicionado, em sistemas solar de aquecimento de água em residências e muito mais. Empenhe-se no estudo deste material para saber analisar essas situações e diversas outras. Bom estudo!

## Não pode faltar

Quando o escoamento ocorre em uma região confinada, a qual denominaremos de região interna, como ocorre no interior de uma tubulação, inicia-se o desenvolvimento da camadalimite de velocidades, devido aos efeitos viscosos do atrito entre o fluido e a superfície interna do tubo. Para compreender melhor essa situação, observe a Figura 2.15, na qual um fluido com velocidade u escoa através de um tubo cilíndrico de raio  $r_0$  com um perfil laminar de velocidades. Figura 2.13 | Escoamento do óleo através de um oleoduto



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 330).

A camada-limite de velocidades (CLV) ou camada-limite hidrodinâmica (CLH) se desenvolve a partir de toda a superfície interna do tubo, e sua espessura ( $\delta$ ) cresce na direção do escoamento até um ponto  $\mathbf{X}_{cd,v}$  na direção x em que as camadas se unem, e toda a região interna apresenta efeitos viscosos. A região compreendida entre o início do escoamento e o ponto  $\mathbf{X}_{cd,v}$  denomina-se de comprimento de entrada, e a partir desse ponto o escoamento é dito plenamente desenvolvido, com a espessura da camada limite sendo igual ao diâmetro do cilindro.

O número de Reynolds (Re) para escoamento em tubo com área transversal circular é dado por:

 $\operatorname{Re}_{\mathrm{D}} = \frac{\operatorname{u}_{\mathrm{m}} \mathrm{D}}{\nu}$ . Em que D é o diâmetro da tubulação,  $\operatorname{u}_{\mathrm{m}}$  é a velocidade média e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

No escoamento laminar e plenamente desenvolvido no interior de um tubo circular, o fluido apresenta velocidade máxima no centro da tubulação.

As camadas de fluido em escoamento laminar desaparecem para  $Re_{D} \approx 2.300$ . A partir desse valor, ocorre a transição do escoamento laminar em turbulento. No escoamento laminar, é possível determinar o comprimento da região de entrada por meio da expressão  $x_{edv} = 0.05 \cdot D \cdot Re_{D}$ .

Não existe expressão universal para determinar o comprimento de entrada. A equação anterior é válida quando o perfil de

Assimile

velocidade do fluido na entrada da tubulação é uniforme, conforme foi apresentado na Figura 2.15. Para o escoamento turbulento, considera-se que  $\mathbf{x}_{odv} = \mathbf{10} \cdot \mathbf{D}$ .

Vamos voltar e observar novamente a Figura 2.15. Devido aos efeitos viscosos e à condição de não deslizamento, a velocidade do fluido é nula no contato com a superfície interna e aumenta em direção ao centro do tubo, formando o perfil de velocidades. Devido a essa variação na velocidade, é preciso trabalhar a formulação do escoamento interno em relação a uma velocidade média, definida para um tubo circular de área transversal ( $A_{tr}$ ) como a média do perfil de velocidades em relação à área perpendicular ao escamento.

$$u_{m} = \frac{\int_{A_{tr}}^{\cdot} \rho u(\mathbf{r}) \cdot dA_{tr}}{\rho A_{tr}} = \frac{2}{r_{0}^{2}} \int_{0}^{r_{0}} u(\mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Em que  $\rho$  representa a massa específica do fluido, e a simplificação para o lado direito da equação é válida para fluidos incompressíveis. Consideramos, também, ausência de velocidade radial, ou seja, u é função somente do raio.

A partir de um balanço de quantidade de momento em um elemento diferencial anular do escoamento, mostrado na Figura 2.15, é possível obter uma equação para u(r) em função da queda de pressão.

$$\mathbf{u}(r) = -\frac{\mathbf{r}_0^2}{4\mu} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \left[ 1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_0}\right)^2 \right] = 2 \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{m}} \left[ 1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_0}\right)^2 \right]$$

Em que  $\mathbf{u}_{m}$  representa a velocidade média do escoamento,  $\mu$  é a viscosidade cinemática e p a pressão.

S Assimile

No escoamento laminar e plenamente desenvolvido de fluido incompressível no interior de um tubo circular, o fluido apresenta velocidade máxima no centro da tubulação, ou seja,  $u(0) = u_{max} = 2 \cdot u_m$ .

No escoamento laminar plenamente desenvolvido, o fator de atrito (f) é igual a 64 vezes o valor do número de Reynolds, e, para o escoamento turbulento, ele pode ser determinado pela correlação de Colebrook, em que e representa a rugosidade da superfície.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\text{Log}\left[\frac{e/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}_{D}\sqrt{f}}\right]$$

Tanto para o escoamento laminar quanto turbulento, o fator de atrito e outras propriedades são apresentadas no diagrama de Moody, apresentado na Figura 2.16.

Figura 2.16 | Diagrama de Moody



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 333).

Quando o escoamento interno em um tubo circular é acompanhado de diferença de temperatura (consideraremos o tubo aquecido em relação ao fluido que se aproxima com T(r,0) uniforme), então existe a presença da convecção e a formação de uma camada-limite térmica (CLT), conforme apresenta a Figura 2.17 para temperatura superficial  $T_s$  ou fluxo térmico  $q_s$  uniforme.

Figura 2.17 | Formação da CLT em tubulação aquecida com escoamento laminar



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 333).

O comprimento de entrada térmico,  $\mathbf{X}_{od,t}$ , é a distância para formação de condições térmicas plenamente desenvolvidas, também considerado  $\mathbf{x}_{od,t} = \mathbf{10} \cdot \mathbf{D}$  no escoamento turbulento e dado por  $\mathbf{x}_{od,t} = \mathbf{0}, \mathbf{05} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Re_{p}} \cdot \mathbf{Pr}$  no laminar, e  $\delta_t$  é a espessura da CLT. Podemos comparar o desenvolvimento das camadas-limites térmica com a hidrodinâmica ( $\mathbf{x}_{od,v} = \mathbf{0}, \mathbf{05} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Re_{p}}$ ) por meio do número de Prandtl, isto é, em escoamentos com  $\mathbf{Pr} = \mathbf{1}$ , o desenvolvimento de ambas as camadas-limites ocorrem simultaneamente. Para os casos de escoamento com  $\mathbf{Pr} < 1 \text{ e Pr} > 1$ , a CLH se desenvolve, respectivamente, mais rapidamente ( $\mathbf{x}_{od,v} < \mathbf{x}_{od,t}$ ) e lentamente ( $\mathbf{x}_{od,v} > \mathbf{x}_{od,t}$ ) do que a CLT. A condição de escoamento térmico plenamente desenvolvido ocorre nos casos em que a parede do tubo está com temperatura uniforme ou o fluxo térmico na superfície é uniforme, como ocorre quando a superfície do tubo é eletricamente aquecida ou irradiada de maneira uniforme.

A exigência matemática do escoamento térmico plenamente desenvolvido e suas implicações está disponível nas páginas 470 e 471 do Capítulo 8, Convecção forçada interna, em:

Pesquise mais

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; KANOGLU, M. **Transferência de calor e massa:** uma abordagem prática. Tradução: Fática A. M. Lino. Revisão técnica: Kamal A. R. Ismail. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904p.

Como no escoamento interno não existe uma distância suficientemente longe da superfície para estimativa de  $T_{\infty}$ , utiliza-se, de forma análoga à velocidade média, o conceito de temperatura média ( $T_m$ ), definida em termos do fluxo de massa ( $\rho u$ ) e da entalpia específica ( $c_p T$ , também chamada de energia interna), através da seção perpendicular de escoamento descrita a seguir, com  $\dot{m}$  representando a vazão mássica e  $c_p$ , a capacidade calorífica do fluido em pressão constante.

$$\mathbf{T}_{\rm m} = \frac{\int \rho \mathbf{u} \mathbf{c}_{\rm p} \mathbf{T} \mathbf{d} \mathbf{A}_{\rm tr}}{\dot{\mathbf{m}} \mathbf{c}_{\rm p}}$$

É importante frisar que o numerador da equação anterior é numericamente igual à taxa real de advecção de energia térmica (ou entalpia) integrada na seção transversal do escoamento. Para o caso de escoamento com área transversal circular, a equação da temperatura média fica como segue.

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr$$

Dessa maneira o fluxo de calor obtido por meio da lei de Newton do resfriamento é escrito por:

$$q_{s}^{''}=h(T_{s}-T_{m})$$

Em que h representa o coeficiente de transferência de calor local.

Utilizamos  $T_{\infty}$  para representar a temperatura na corrente livre e, por isso, constante, o que é diferente da  $T_m$  (empregada na lei de Newton do resfriamento anterior), que representa a temperatura média no escoamento interno e deve variar na direção x positiva ou negativamente, a depender do sentido do fluxo de calor convectivo. Como seria essa variação de  $T_m$  em cada caso?  $dT_m/dx$  pode ser nulo?

A realização de um balanço de energia no escoamento é necessária visando determinar a transferência total de calor por convecção que ocorre entre o fluido e a superfície aquecida como função das temperaturas médias de entrada e saída do fluido. A expressão do balanço de energia simplificada para um escoamento em regime estacionário, considerando fluido incompressível, dissipação viscosa desprezível e propriedades constantes, independe das condições térmicas do escoamento e da superfície, sendo escrita como:

$$q_{conv} = \dot{m}c_{p}(T_{m,sai} - T_{m,ent})$$

Para o elemento diferencial apresentado na Figura 2.18, a utilização do balanço de energia simplificado se faz necessária para determinar a equação diferencial da variação de  $T_m$  na direção x.

$$\frac{dT_{m}}{dx} = \frac{\dot{q_{s}P}}{\dot{m}c_{p}} = \frac{P}{\dot{m}c_{p}}h(T_{s} - T_{m})$$

Em que  $\mathbf{P} = \pi \mathbf{D}$  representa o perímetro para um tubo circular, que é constante na maioria das situações.

Reflita

Figura 2.18 | Elemento diferencial e balanço de energia em escoamento interno em tubo circular



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 336).

Para o caso de fluxo térmico constante, temos que  $q_s$  independe de x. Assim, a expressão para  $T_m$  obtida da integração do elemento diferencial ao longo do escoamento é função linear de x escrita como:

$$\mathsf{T}_{\mathsf{m}}(\mathsf{x}) = \mathsf{T}_{\mathsf{m},\mathsf{ent}} + \frac{\mathsf{q}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{r}}\mathsf{P}}{\dot{\mathsf{m}}\mathsf{c}_{\mathsf{p}}}\mathsf{x}$$

Apesar de  $T_m$  variar com x, temos que  $T_s(x)$  varia na mesma proporção na região de escoamento plenamente desenvolvido. Isto quer dizer que, em um gráfico como o apresentado na Figura 2.19, as linhas que representam  $T_m(x)$  e  $T_s(x)$  são paralelas entre si. Na região de entrada, a variação é diferente, pois h, inicialmente elevado, diminui conforme o desenvolvimento das camadas-limites.

Figura 2.19 | Dependência da temperatura média e da superfície com a posição axial para (a) fluxo térmico constante e (b) temperatura da superfície constante



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 337).
#### Exemplificando

Para o caso de fluxo variando na direção x, a integração do balanço de energia após usar a igualdade  $q_{conv} = \dot{m}c_p(T_{m,sai} - T_{m,ent})$  é escrita como:

$$q_{conv} = \int_0^L q_s^{"}(x) P dx$$

Quando a temperatura superficial é constante, pode-se manipular a equação diferencial de  $T_m$  para integrá-la até uma posição x do tubo por meio de separação de variáveis, sendo obtida uma expressão para o perfil de temperaturas em termos do coeficiente convectivo médio  $(\bar{\mathbf{h}})$ .

$$\frac{T_{s} - T_{m}(x)}{T_{s} - T_{m,ent}} = exp\left(-\frac{Px}{\dot{m}c_{p}}\bar{h}\right)$$

O comportamento não linear para  $T_m(x)$  demonstrado na equação anterior pode ser visto na Figura 2.19 (b), na qual  $T_{\rm s}$  é uma linha horizontal constante. Dessa forma, a diferença de temperatura  $(T_{\rm s}-T_m)$  diminui exponencialmente na direção axial devido à diminuição do coeficiente  $\bar{h}$ .

Exemplificando

Para o caso específico de x = L, a expressão anterior se iguala ao gradiente de temperatura na saída e na entrada do escoamento, ou seja:

$$\frac{\Delta T_{sai}}{\Delta T_{ent}} = \frac{T_s - T_m(L)}{T_s - T_{m,ent}} = \frac{T_s - T_{m,sai}}{T_s - T_{m,ent}} \exp\left(-\frac{PL}{\dot{m}c_p}\bar{h}\right)$$

desde que  $T_s$  seja constante no escoamento.

Como a temperatura média varia exponencialmente com o incremento de x, torna-se difícil escrever uma expressão para  $\mathbf{q}_{\text{conv}}$ . A solução encontrada para contornar esse problema envolve escrevê-la em termos da média logarítmica das diferenças de temperatura ( $\Delta \mathbf{T}_{\text{MLDT}}$ ).

$$\mathbf{q}_{\text{conv}} = \bar{\mathbf{h}} \mathbf{A}_{s} \Delta \mathbf{T}_{\text{MLDT}} = \bar{\mathbf{h}} \mathbf{A}_{s} \frac{\Delta \mathbf{T}_{\text{sai}} - \Delta \mathbf{T}_{\text{ent}}}{\text{Ln} \left( \Delta \mathbf{T}_{\text{sai}} / \Delta \mathbf{T}_{\text{ent}} \right)} = \bar{\mathbf{h}} \mathbf{A}_{s} \frac{\mathbf{T}_{\text{m,ent}} - \mathbf{T}_{\text{m,sai}}}{\text{Ln} \left( \frac{\mathbf{T}_{s} - \mathbf{T}_{\text{m,sai}}}{\mathbf{T}_{s} - \mathbf{T}_{\text{m,ent}}} \right)}$$

#### Exemplificando

Em um trocador de calor bitubular produzido em cobre, existe uma região anular formada por dois tubos coaxiais por onde escoam fluidos com temperaturas distintas em contracorrente. Água entra no tubo interno a 20 °C, sendo aquecida até 95 °C. A região anular é percorrida por vapor em condensação na temperatura de 130 °C. Pergunta-se qual é a média logarítmica das diferenças de temperatura para o trocador de calor?

Solução:

Como o vapor encontra-se em condensação (mudança de fase), a temperatura é constante e considerada igual à da superfície. Portanto, os gradientes de temperatura no trocador de calor são:

$$\Delta T_{sai} = T_{s} - T_{sai} = 130 - 95 = 35 \text{ °C}$$
$$\Delta T_{entra} = T_{s} - T_{entra} = 130 - 20 = 110 \text{ °C}$$

Portanto, o valor de  $\Delta T_{MLDT}$  para o trocador de calor é:

$$\Delta T_{_{MLDT}} = \frac{\Delta T_{_{sai}} - \Delta T_{_{ent}}}{Ln \left( \Delta T_{_{sai}} / \Delta T_{_{ent}} \right)} = \frac{35 - 110}{Ln \left( 35 / 110 \right)} = 65,5 \,^{\circ}\text{C}$$

Neste ponto, você pode estar se perguntando: como determinar o coeficiente convectivo para empregar as equações vistas até o momento? Assim, como foi feito no estudo da convecção externa, existem correlações empíricas para Nusselt que são utilizadas com essa finalidade.

Considere o balanço de energia da Figura 2.20 para o escoamento laminar em tubo circular para um fluido incompressível com propriedades constantes na região plenamente desenvolvida.

Figura 2.20 | Balanço de energia em um elemento anular



Fonte: Bergman et al. (2017, p. 341).

Se desprezarmos os efeitos de condução axial líquida, a entrada de calor q deve-se somente à condução através das superfícies radiais. Como a velocidade radial é nula na região plenamente desenvolvida, não há advecção de energia térmica através das superfícies de controle radiais, e a única advecção é na direção axial. Portanto, o balanço de energia térmica escrito matematicamente é expresso por:

$$\mathbf{q}_{r}-\mathbf{q}_{r\!+\!dr}=\!\left(d\dot{m}\right)\mathbf{c}_{p}\!\left[\!\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}\,dx\right)\!-T\right]$$

É possível partir desse balanço e obter expressões para Nu para os casos de fluxo térmico constante e temperatura superficial uniforme dados, respectivamente, pelas expressões.

$$Nu_{D} = \frac{h \cdot D}{k} = 4,36 \quad \ominus \qquad Nu_{D} = 3,66$$

Note que, em ambas as expressões, o número de Nu é uma constante.

A formulação matemática dessas expressões está disponível nas páginas 340 e 341 do Capítulo 8, Escoamento interno, em:

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

Observe que, em ambos os casos, o valor de Nu independe das condições hidrodinâmicas (número de Reynolds), do número de Prandtl e, também, da posição axial. Além disso, a condutividade térmica deve ser estimada na temperatura média.

Para a convecção interna em escoamento turbulento, as considerações são mais complicadas do que no caso laminar, devido à natureza desordenada do movimento do fluido. Várias correlações empíricas estão disponíveis na literatura especializada, e as mais comuns são apresentadas na Tabela 2.5, sendo válidas para o escoamento turbulento completamente desenvolvido, tanto fluidodinamicamente quanto termicamente.

Pesquise mais

Tabela 2.5 | Correlações para Nu em escoamento interno turbulento completamente desenvolvido

Correlação	Equação	Validade
Dittus-Boelter	$Nu=0,023 Re^{4/5} Pr^n$	$0,6 \le Pr \le 160$ , $Re \ge 10^4$ , $L \ge 10D$ ; tubo liso
Sieder e Tate	$Nu = 0,027 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14}$	0,7 $\le$ Pr $\le$ 16.700 ; Re $\ge$ 10 <sup>4</sup> ; L $\ge$ 10D ; tubo liso
Gnielinski	$Nu = \frac{(f/8)(Re - 1.000)Pr}{1 + 12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)}$	$0.5 \leq Pr \leq 2.000$ ; $3.000 \leq Re \leq 5 \times 10^6$ ; tubo liso

Fonte: adaptado de Bergman et al. (2017, p. 323-324).

A correlação de Dittus-Boelter fornece bons resultados se a diferença de temperatura é pequena e utiliza-se n=0,4 ou n=0,3 se a  $T_s \ge T_m$  (aquecimento) ou  $T_s \le T_m$  (resfriamento), respectivamente. A correlação de Sieder e Tate fornece resultados mais precisos do que a correlação de Dittus-Boelter, porém é mais complexa e somente  $\propto$  não é estimado na  $T_m$ . Das três correlações da Tabela 2.5, a de Gnielinski fornece melhores resultados.

As expressões apresentadas são válidas quando o escoamento é tanto fluidodinâmica quanto termodinamicamente desenvolvido. Nas regiões de entrada (hidrodinâmica ou térmica ou combinadas), as correlações são diferentes, pois as hipóteses utilizadas no desenvolvimento das expressões anteriores não são válidas.

Para fluidos com elevados Pr, como os óleos, ou na região de entrada térmica, a correlação de Hausen é utilizada para determinação de Nusselt médio ( $\overline{Nu}$ ), quando o escoamento ocorre em superfícies com temperatura constante, conforme apresentada a seguir.

 $\overline{Nu} = 3,66 + \frac{0,0668 (D/L) \text{RePr}}{1 + 0,04 [(D/L) \text{RePr}]^{2\prime 3}}$ 

Reflita

O que aconteceria com  $\overline{Nu}$  se o comprimento do tubo fosse suficiente para o escoamento se desenvolver completamente, isto é,  $L \rightarrow \infty$ ?

A correlação de Hausen também pode ser utilizada no escoamento hidrodinamicamente desenvolvimento com  $\Pr \geq 5$  .

Todas as correlações desenvolvidas até o momento consideraram que o escoamento ocorria em um tubo de área transversal circular. Nem sempre isso é verdade. Existem muitas aplicações práticas em que o escoamento se dá por uma geometria não circular, como em um duto retangular de ar-condicionado. Nestes casos, uma boa aproximação consiste em transformar o diâmetro D das equações anteriores no diâmetro hidráulico definido como:  $D_h = \frac{4A_{tr}}{D}$ .

# 🗛 Pesquise mais

Valores para o fator de atrito e o número de Nu em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos em tubos não circulares para os casos de  $T_s$  ou  $q_s^{*}$  uniformes podem ser encontrados na Tabela 8.1 do Capítulo 8, *Escoamento interno*, em:

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Tradução e revisão técnica: Eduardo M. Queiroz e Fernando L. P. Pessoa. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

#### Sem medo de errar

Não se esqueça de que você atua em uma empresa de engenharia resolvendo projetos para clientes variados. Neste momento, o projeto foi contratado por uma indústria do segmento de petróleo e gás natural. Essa empresa está com problemas no processamento de óleo, e a hipótese levantada foi a de que a perda de calor em uma seção de 500 m do oleoduto está diminuindo a temperatura do óleo consideravelmente. Você foi contratado, então, para determinar a taxa de perda de energia pelo oleoduto, pois elevada perda de energia significa que a temperatura do óleo diminui exponencialmente ao longo do escoamento, o que impacta na fluidez do material e afeta a qualidade do seu processamento.

Para iniciar o projeto, devemos obter as propriedades do fluido na  $T_{\rm m}$ , mas desconhecemos a temperatura de saída do fluido para que seja possível determiná-la. A estratégia, neste caso, consiste em determinar a temperatura de saída com base na temperatura de

entrada. Então, após determinar a temperatura de saída, se a diferença for muito grande, corrigem-se as propriedades com a temperatura média e resolve-se novamente o problema.

Neste caso a temperatura de entrada é 30 °C e as propriedades do óleo nessa temperatura são:  $\rho = 882,05 \text{ kg/m}^3$ ;  $c_p = 1923 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $k = 0,1447 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ;  $\nu = 5,953 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ; Pr = 6914

O escoamento é interno em tubo circular, logo o número de Reynolds vale:

$$\operatorname{Re} = \frac{\operatorname{u_m} D}{\nu} = \frac{3 \cdot 0.25}{5.953 \times 10^{-4}} = 1.259.9$$

Como o número de Reynolds é menor do que o necessário para ocorrer a transição para o escoamento turbulento (2300), então valem as correlações de Nu para o escoamento laminar. Precisamos saber se o escoamento é completamente desenvolvido ou não. O comprimento de entrada térmico vale:

$$x_{cdt} = 0,05 \cdot D \cdot Re \cdot Pr = 0,05 \cdot 0,25 \cdot 1.259,9 \cdot 6.914 = 1,09 \times 10^5 m$$

Como o comprimento de entrada é muito maior do que o comprimento total da seção do oleoduto em estudo, vale a correlação de Hausen (pois o fluido tem um elevado número de Pr).

 $\overline{Nu} = 3,66 + \frac{0,0668 \left( D/L \right) \text{RePr}}{1+0,04 \left[ \left( D/L \right) \text{RePr} \right]^{23}} = 3,66 + \frac{0,0668 \left( 0,25/500 \right) 1.259,9 \cdot 6914}{1+0,04 \left[ \left( 0,25/500 \right) 1.259,9 \cdot 6914 \right]^{23}} = 28,5953$ 

O coeficiente convectivo é determinado a partir da definição do número de Nusselt:

$$\bar{h} = \frac{\bar{Nu} \cdot k}{D} = \frac{28,5953 \cdot 0,1447}{0.25} = 16,551 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

A temperatura média na saída do escoamento é determinada por meio da equação:

$$\frac{\mathsf{T}_{\mathsf{s}}-\mathsf{T}_{\mathsf{m}}(\mathsf{x})}{\mathsf{T}_{\mathsf{s}}-\mathsf{T}_{\mathsf{m},\mathsf{ent}}} = \exp\!\left(\!-\frac{\mathsf{P}\mathsf{x}}{\dot{\mathsf{m}}\mathsf{c}_{\mathsf{p}}}\bar{\mathsf{h}}\!\right)$$

Em que  $T_m(L) = T_{m,sai}$  é a temperatura média de saída do óleo e, para  $\mathbf{x} = L$  :

$$P \cdot x = P \cdot L = A_s = \pi D \cdot L = \pi 0,25 \cdot 500 = 392,70 \text{ m}^2$$

A vazão mássica é o produto da velocidade, massa específica e da área transversal do tubo.

$$\dot{\mathbf{m}} = \rho \mathbf{A}_{tr} \mathbf{u}_{m} = 882,05 \cdot \left[\frac{1}{4} \pi (0,25)^{2}\right] 3 = 129,89 \text{ kg/s}$$

Portanto, a temperatura média na saída é:

$$\frac{20 - T_{\text{m,sai}}}{20 - 30} = exp\left(-\frac{392,70}{129,89 \cdot 1.923}16,551\right) \rightarrow T_{\text{m,sai}} = 29,74 \text{ °C}$$

Como a temperatura é próxima da temperatura de entrada, não é preciso recalcular as propriedades, e damos continuidade ao projeto determinando a  $\Delta T_{MLDT}$ :

$$\Delta T_{MLDT} = \frac{T_{m,ent} - T_{m,sai}}{Ln \left(\frac{T_s - T_{m,sai}}{T_s - T_{m,ent}}\right)} = \frac{30 - 29,74}{Ln \left(\frac{20 - 29,74}{20 - 30}\right)} = -9,87 \ ^{\circ}\text{C}$$

E a perda de energia pelo oleoduto para o ambiente é:

 $\mathbf{q}_{\rm conv} = \bar{\mathbf{h}} \mathbf{A}_{\rm s} \Delta \mathbf{T}_{\rm MLDT} = \mathbf{16}, 551 \cdot \pi \cdot \mathbf{0}, 25 \cdot 500 \cdot (-9, 87) = -6, 42 \times 10^4 \ \rm W$ 

O sinal negativo representa a perda de calor pelo oleoduto.

Com isto, o projeto é encerrado. As perdas térmicas não são suficientes para ocasionar uma queda de temperatura significativa no escoamento do óleo ao longo da seção de oleoduto exposta ao ambiente, visto que a temperatura cai de **30**°C para apenas **29,74**°C. Este resultado deve ser apresentado ao gerente da empresa para demonstrar que a premissa de que a queda de temperatura estaria afetando o processamento do óleo está errada. A causa do problema é outra, mas identificar essa causa é trabalho para outro projeto.

## Avançando na prática

#### Projeto de tubulações não circulares

#### Descrição da situação-problema

Você é o engenheiro projetista de uma indústria de laticínios e precisa trocar a tubulação de um trocador de calor de placas, pois este encontrase corroído. A tubulação instalada é circular com tamanho nominal de meia polegada (diâmetro interno de 0,622 polegada) e espessura de 0,25 polegada e será substituída por uma tubulação quadrada com  $D_h = D$ . Determine qual deve ser a largura da nova tubulação para solicitar o material adequado ao setor de compras da sua empresa.

#### Resolução da situação-problema

Queremos substituir uma tubulação circular por outra de seção quadrada, de tal forma que o diâmetro e o diâmetro hidráulico sejam os mesmos. Dessa forma, escrevemos:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{h}} = \frac{\mathsf{4A}_{\mathsf{c}}}{\mathsf{P}} = \mathsf{D}$$

Se denominarmos a largura (que é igual à altura para o quadrado), como L, então a área transversal é  $L^2$  e o perímetro é 4L. Dessa forma, a espessura interna vale:

$$\frac{4A_{tr}}{P} = \frac{4L^2}{4L} = D \to L = D = 0,0158 \text{ m}$$

A espessura do material a ser comprado deve ter espessura igual à da tubulação original. Portanto:

 $L_{compra} = 0,0158 \text{ m} + 0,0064 \text{ m} = 0,0222 \text{ m} = 2,2 \text{ cm}$  .

Logo, você precisa solicitar ao departamento de compras uma tubulação quadrada com lado externo medindo 2,2 cm a fim de trocar a tubulação do trocador de calor de placas.

#### Faça valer a pena

**1.** Um fluido em escoamento livre apresenta velocidade e temperatura uniformes ao longo de toda a sua extensão. Ao entrar em contato com a superfície interna de um tubo circular aquecido, surgem taxas de quantidade de movimento e de calor entre o fluido e a superfície do tubo, que formam, respectivamente, as camadas-limite hidrodinâmica e térmica, até um ponto na direção do escoamento em que a espessura das camadas-limites ocupa todo o interior da tubulação.

Assinale a alternativa que apresenta a explicação para o que é o comprimento de entrada térmico.

- a) O comprimento de entrada térmico é a distância a partir da entrada do fluido na tubulação, ou do ponto em que surge uma diferença de temperatura entre o fluido e a superfície interna, necessária para a espessura da camada-limite térmica se desenvolver e preencher todo o interior do tubo.
- b) O comprimento de entrada térmico é a distância necessária para o desenvolvimento da camada-limite térmica turbulenta.
- c) O comprimento de entrada térmico é a região do escoamento interno na qual a temperatura da superfície pode ser considerada uniforme e constante, porém diferente da temperatura do escoamento livre.
- d) O comprimento de entrada térmico é o comprimento do tubo no qual a espessura da camada-limite térmica ocupa todo o interior da tubulação por onde o fluido escoa.

 e) O comprimento de entrada térmico só existe em tubulações circulares, em que o gradiente de temperatura na direção do escoamento pode ser considerado inexistente.

**2.** Uma residência tem sua tubulação de água construída em cobre para suportar o aquecimento do inverno rigoroso. Todos os canos da casa são circulares e possuem diâmetro de 5 cm. Água, na temperatura de 5 °C, escoa pelo interior da tubulação com velocidade média de 5 m/s quando encontra uma longa seção da tubulação aquecida uniformemente à 35 °C.

Assinale a alternativa que apresenta o comprimento de entrada hidrodinâmico e térmico sabendo que as propriedades da água a 20 °C são:  $\rho = 998,0 \text{ kg/m}^2$ ,  $c_n = 4,182 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ,  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$  e Pr = 7,01.

- a) 0,05 m.
- b) 0,10 m.
- c) 0,25 m.
- d) 0,50 m.
- e) 1,00 m.

**3.** Considere o escoamento de água (0,3 m/s) dentro de uma tubulação circular (D = 0,2 m) com aquecimento elétrico sob sua superfície, de tal forma que o fluxo de calor seja constante e uniforme ao longo de todo o escoamento (L = 25 m) e a temperatura de 20 °C possa ser considerada média. Medições da água na temperatura média revelaram propriedades constantes com  $\rho = 998,0 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 4,182 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ,  $k = 0,598 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$  e Pr = 7,01.

Assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, o coeficiente de transferência de calor convectivo entre o fluido e a superfície interna da tubulação, estimado pelas correlações de Dittus-Boelter, Gnielinski e Sieder e Tate. Para a superfície, considere f = 0,008 e  $\mu_s = \mu_{agua}^{20^\circ C}$ .

- a) 666  $W/m^2 \cdot K$ , 999  $W/m^2 \cdot K$  e 333  $W/m^2 \cdot K$ .
- b)  $354 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,  $834 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  e  $739 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .
- c) 993  $W/m^2 \cdot K$ , 596  $W/m^2 \cdot K$  e 1.024  $W/m^2 \cdot K$ .
- d)  $123 W/m^2 \cdot K$ ,  $734 W/m^2 \cdot K = 375 W/m^2 \cdot K$ .
- e) 1.024 W/m<sup>2</sup>·K , 712 W/m<sup>2</sup>·K e 596 W/m<sup>2</sup>·K .

# Referências

ASHRAE. Handbook of Fundamentals. Atlanta, GA, 1997. 851 p.

BERGMAN, T. H. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Tradução e revisão técnica: Eduardo M. Queiroz e Fernando L. P. Pessoa. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 650 p.

BIRD, B. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de transporte**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002. 840 p.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; KANOGLU, M. **Transferência de calor e massa:** uma abordagem prática. Tradução: Fática A. M. Lino. Revisão técnica: Kamal A. R. Ismail. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904p.

WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D. G. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** Tradução e revisão técnica: Verônica Calado. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2017. 716 p.

# **Unidade 3**

# Convecção natural, ebulição e condensação

#### Convite ao estudo

Você já aprendeu sobre os mecanismos de transferência de calor por condução e por convecção forçada, tendo percebido a importância dessas formas de transferência para compreensão das taxas de transferência de energia térmica. No entanto, ainda falta compreender alguns mecanismos. Um deles é o que ocorre, por exemplo, quando deixamos nosso prato de comida quente em cima da mesa e ele vai resfriando com o passar do tempo, até atingir equilíbrio térmico com o ar ambiente. Outro exemplo é o que ocorre quando colocamos nossa roupa para secar no varal ou ainda quando resfriamos o vapor d'água.

Nesta unidade, você aprenderá e compreenderá os conceitos do mecanismo de transferência de calor por convecção natural. Também aprenderá sobre processos convectivos com mudança de fase, que são os que ocorrem na ebulição e na condensação. Ao entender o mecanismo físico da convecção natural, seu equacionamento tanto para escoamentos externos quanto internos, os modos de ebulição e de condensação, assim como a análise de trocadores de calor, você estará apto a alcançar os resultados aqui propostos, ampliando seu entendimento sobre os fenômenos de transferência de calor.

Para ilustrar a aplicação do conteúdo aqui abordado, imaginemos que você foi contratado como engenheiro em uma empresa que presta consultoria em projetos de engenharia. A especialidade desta empresa são projetos de equipamentos que envolvem troca térmica, tendo conquistado destaque no mercado nessa área de atuação. Como em sua formação você se destacou nas disciplinas da área de ciências térmicas e fluidos, conquistou a vaga e agora foi solicitado a atender alguns clientes, colocando à prova os conhecimentos que adquiriu ao longo de sua formação. Um desses clientes fabrica placas metálicas e em seu chão de fábrica há muitos fornos. Ele deseja saber a temperatura de uma placa colocada na posição vertical, que recebe um fluxo constante de calor. Além disso, nessa mesma empresa, eles estão projetando um trocador de calor que utilizará vapor d'água como fluido quente. Para isso, precisarão evaporar essa água, e o projeto do equipamento de transferência de calor em ebulição tem sido uma preocupação, já que eles temem um superaquecimento. Nesse sentido, eles também contrataram o serviço da sua empresa para auxiliar nesse projeto, tanto do equipamento de ebulição da água, quando do trocador de calor que usará o vapor obtido.

Qual será a temperatura da placa metálica que recebe fluxo constante de calor e o perde por convecção natural? Quanto de energia consumirá o elemento de aquecimento utilizado para ebulição da água? Qual será a eficiência do trocador de calor utilizado para aquecer o solvente com vapor d'água?

Nesta unidade, você aprenderá a tratar numericamente situações em que há convecção, sem escoamento forçado do fluido, compreenderá o equacionamento e o fundamento de processos convectivos em que ocorre mudança de fase líquida para gasosa ou o inverso e aprenderá a analisar os equipamentos utilizados para promover trocas térmicas. Tais processos fazem parte de nosso dia a dia, e você já os conhece, mas agora terá a oportunidade de aprender a quantificá-los.

# Seção 3.1

# Convecção natural

### Diálogo aberto

A força de empuxo é muito presente em nosso dia a dia. Para compreendê-la, basta recorrermos ao exemplo dos barcos, os quais são mantidos na superfície das águas devido à força de empuxo. Mas qual é a relação disso com a transferência de calor? Quando a força de empuxo atua, ocorrem flutuações, movimentos naturais dos fluidos, e esses escoamentos naturais promovem a transferência de calor por convecção natural. Como esse mecanismo não requer o uso de um dispositivo para movimentar o fluido a partir de uma condição motriz externa, vários equipamentos de transferência de calor são projetados para operar sob condições de convecção natural. Um exemplo comum é o resfriamento por ar livre, sem uso de ventiladores, como o de chips de computadores. Além disso, nas condições climáticas, há muita influência da convecção natural, que afeta a movimentação do oceano e da atmosfera.

Sabendo disso e conhecendo os princípios que governam tal fenômeno, você, engenheiro recém-contratado da empresa de consultoria em engenharia, foi alocado para solucionar o questionamento de um cliente. Trata-se de um fabricante de placas metálicas que deseja conhecer a temperatura média que atingirá uma superfície de estanho situada próxima a uma fonte de calor constante (um forno), com o objetivo de certificar que o metal não será submetido a temperaturas próximas ou superiores a seu ponto de fusão, que é de 232 °C. Esse forno está desativado e há um projeto em andamento que prevê a retomada de operação dele, daí a preocupação da empresa em conciliar a posição do forno com a de armazenamento dessas placas de estanho. Assim, a questão apresentada pelo seu cliente é a seguinte: uma superfície metálica vertical com altura de 4 m e largura de 1,8 m, de estanho, situada próxima a um forno, receberá um fluxo de energia constante igual a  $1000 \text{ W/m}^2$ .

Essa placa está isolada do outro lado, de modo que toda a energia que incidir nela se perderá ao ar ambiente, cuja temperatura é 25 °C, como mostra a Figura 3.1.



Figura 3.1 | Placa vertical submetida ao calor de um forno

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 386).

Como você fará para apresentar uma estimativa de temperatura da placa a seu cliente? Para começar seus cálculos, você fez algumas pesquisas, detectando que, em problemas de convecção natural, um valor aproximado de coeficiente convectivo é **10**  $W/(m^2 \cdot °C)$  e as propriedades do ar são como apresentadas na Tabela 3.1. Além disso, seu cliente, um interessado conhecedor dos fenômenos físicos, vai questioná-lo quanto ao motivo de se tratar de convecção natural. Como você irá explicar isso a ele? Ele também perguntará, com certeza, como você obteve a temperatura final da placa, se não lhe foi fornecida a inicial. Portanto, prepare-se!

Т (К)	u (mm² / s)	k (W/m/K)	Pr
300	15,89	0,0263	0,707
350	20,92	0,0300	0,700
400	26,41	0,0338	0,690
450	32,39	0,0373	0,686

Tabela 3.1 | Propriedades termofísicas do ar à pressão atmosférica

Fonte: Bergman et al. (2014, p. 634).

Para compreender a convecção natural, você aprenderá nesta seção seu mecanismo físico e equacionamento. Além disso, verá situações de convecção natural associadas a escoamentos externos, internos e espaços confinados. E, por fim, verá como irá considerar as convecções natural e forçada combinadas. Portanto, vamos lá! Mãos à obra que há muito o que aprender...

### Não pode faltar

Caro aluno, nas próximas páginas, você estudará os escoamentos convectivos causados por meios naturais e serão apresentados os parâmetros adimensionais necessários para caracterizá-los. Isso difere do conteúdo até então visto sobre convecção forçada, pois lá o fluido era forçado a escoar devido a forças motrizes externas. Aqui, você aprenderá quando os efeitos da convecção natural são importantes. Além disso, saberá quantificar as taxas de transferência de calor associadas.

A convecção natural, também conhecida como convecção livre, ocorre quando uma força de corpo (gravitacional) está atuando sobre um fluido que possui gradientes de densidade (devido a uma diferença de temperatura). O efeito líquido disso é uma **força de empuxo**, que promove correntes de convecção natural. Ocorre um transporte de massa e, como a massa transportada altera a condição térmica, há simultaneamente uma transferência de calor.

## Assimile

Quando existem correntes de convecção no interior do fluido, mas não há velocidade forçada (movimento imposto externamente), temse convecção livre ou natural.

Cabe ressaltar que uma diferença de densidade não é uma garantia de que ocorrerá convecção natural quando um fluido estiver em um campo gravitacional. Isso porque é necessário que o gradiente de temperatura seja superior a um valor crítico, que garanta condições instáveis, nas quais as forças de empuxo são capazes de superar a influência das forças viscosas. Neste caso, tem-se um padrão de circulação, um movimento global do fluido (Figura 3.2a), causado pelo equilíbrio dinâmico entre flutuação e atrito, sendo a última a força adversa que freia o fluido. Se a densidade do fluido aumenta no sentido da força da gravidade, resulta em condições estáveis, não havendo circulação (Figura 3.2b), e a transferência de calor ocorre por condução.

Figura 3.2 | Fluido com (a) e sem (b) movimento global inserido entre duas placas horizontais



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 380).

As velocidades em escoamentos de convecção natural são menores que as associadas à convecção forçada e serão tanto maiores quanto maiores forem as diferenças de densidade (e de temperatura). Portanto, as taxas de transferência por convecção natural também são menores.



- As temperaturas de operação em dispositivos de geração de potência e eletrônicos.
- Na distribuição de temperatura no interior de edificações.
- Na determinação de perdas térmicas em sistemas de aquecimento, ventilação e condicionamento.
- Na distribuição de produtos venenosos oriundos da combustão, durante incêndios.
- Na movimentação do oceano e da atmosfera.

As equações que descrevem a transferência de calor na convecção natural advêm dos princípios de conservação. E, para desenvolver o equacionamento, considere o desenvolvimento de uma camada-limite em uma placa vertical aquecida, como a ilustrada na Figura 3.3. Se a placa se encontra imersa em um fluido infinito e em repouso,  $T_s > T_{\infty}$  e o fluido próximo à placa é menos denso que o fluido distante da placa (estacionário). Consequentemente, as forças de empuxo induzem 0 aparecimento de uma camada-limite de convecção natural na gual o fluido aguecido ascende verticalmente, arrastando o fluido que estava em repouso. Ou seja, a forca motriz é de empuxo, sendo condições bidimensionais, em regime estacionário, com propriedades constantes e a força da gravidade atuando em sentido negativo da direção x. No caso de uma placa vertical fria  $T_{s} < T_{\infty}$ , os perfis de velocidade e temperatura são iguais aos da Figura 3.3, porém possuem sentido invertido, ou seja, o fluido descende.

Figura 3.3 | Perfis de velocidade (u) e temperatura (T) sobre uma placa vertical aquecida imersa em um fluido mais frio



Fonte: Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 523).

Além disso, trata-se de um fluido incompressível, e, considerando o efeito da densidade variável apenas na força de empuxo, obtémse a equação do momento na direção x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Sendo  $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v}$  componentes da velocidade do fluido,  $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y}$ são coordenadas retangulares,  $\boldsymbol{g}$  a aceleração da gravidade,  $\boldsymbol{T}$ a temperatura e  $\boldsymbol{\nu}$  a viscosidade cinemática. A equação acima é conhecida como aproximação de Boussinesq, em que os termos do lado direito equivalem à força de empuxo por unidade de massa, sendo  $\boldsymbol{\beta}$  o coeficiente de expansão volumétrica térmica. De acordo com Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012), essa propriedade representa a variação do volume do fluido (e, consequentemente, da densidade) com a temperatura para pressão constante.

# A forma de obter o coeficiente de expansão $\beta$ , que aparece na aproximação de Boussinesq, depende do fluido. Sendo $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\rho}$ e, para um gás ideal, $\rho = p / (RT)$ , tem-se a equação a seguir, na qual T é a temperatura absoluta. $\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho}{R} \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{T}$

Exemplificando

Para líquidos e gases não ideais, o coeficiente de expansão deve ser obtido em tabelas apropriadas (BERGMAN et al., 2014, p. 623).

As equações de conservação de massa e energia não se alteram em relação à convecção forçada, uma vez que os efeitos do empuxo estão restritos à equação do momento, de modo que as equações que governam a convecção natural são compostas pela equação de momento, já apresentada, e as duas equações a seguir, as quais precisam ser resolvidas simultaneamente.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{0}$$
$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Sendo L um comprimento característico e  $u_0$  uma velocidade de referência, definem-se os parâmetros adimensionais que governam o escoamento vinculado à convecção natural e à transferência de calor em uma placa vertical:  $x^* \equiv x/L$ ,  $y^* \equiv y/L$ ,  $u^* \equiv u/u_0$ ,  $v^* \equiv v/u_0$  e  $T^* \equiv (T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$ . Assim, as equações de conservação de momento e de energia se reduzem a:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L}{u_0^2} T^* + \frac{1}{\operatorname{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$
$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\operatorname{Re}_L} \operatorname{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$
Sendo  $u_0^2 = g\beta(T_s - T_s)L$ , Revisetorna  $[g\beta(T_s - T_s)L^3 / v^2]^{1/2}$ .

e o quadrado desse número de Reynolds é definido como número de Grashof ( $Gr_i$ ):

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

De modo que o número de Grashof na convecção natural corresponde ao número de Reynolds na convecção forçada, sendo uma medida da razão entre a força de empuxo e as forças viscosas que atuam no fluido.

Considerando a convecção natural laminar sobre uma superfície vertical isotérmica em um grande meio em repouso (Figura 3.3), podese resolver as equações de conservação. Para isso, a definição da variável  $\eta$  é:

$$\eta \equiv \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/2}$$

E a função que representa os componentes da velocidade é:

$$f'(\eta) = \frac{u \cdot x}{2\nu \cdot Gr_x^{1/2}}$$

De modo que as equações diferenciais parciais originais de conservação podem ser reduzidas às expressões a seguir, cujos resultados de uma solução numérica estão apresentados na Figura 3.4.

$$f'''+3ff''-2(f')^2+T^*=0$$
  
 $T^*''+3\Pr fT^*'=0$ 

Figura 3.4 | Perfis de velocidades (a) e temperaturas (b) para convecção natural laminar sobre uma superfície isotérmica vertical



Fonte: Ostrach (1953 apud BERGMAN et al., 2014, p. 384).

Segundo LeFevre (1956 apud BERGMAN et al., 2014, p. 384), usando a lei do resfriamento de Newton para o coeficiente convectivo local  $\boldsymbol{h}$ , o número de Nusselt pode ser representado por:

$$Nu_{x} = \frac{hx}{k} = \left(\frac{Gr_{x}}{4}\right)^{1/4} g(\text{Pr})$$
$$g(\text{Pr}) = \frac{0,75 \,\text{Pr}^{1/2}}{(0,609 + 1,221 \,\text{Pr}^{1/2} + 1,238 \,\text{Pr})^{1/4}}$$

Confirmando, assim como a Figura 3.4b, que o gradiente de temperatura adimensional na superfície é função do número de Prandtl, sendo a função de Pr adequada para qualquer valor dessa variável igual ou superior a zero.

Define-se como número de Rayleigh o produto dos números de Grashof e de Prandtl:

$$Ra_{x,c} = Gr_{x,c} \operatorname{Pr} = \frac{g\beta(T_s - T_{\infty})x^3}{\nu\alpha}$$

Esse número é utilizado para definir a transição de escoamento laminar para turbulento (Figura 3.5), que ocorre dependendo da magnitude das forças de empuxo e viscosas do fluido, sendo que o valor crítico para placas verticais é de  $10^9$ . De modo que os resultados até então obtidos se aplicam para  $Ra_L << 10^9$ .

Figura 3.5 | Camada-limite de convecção natural em uma placa plana vertical (a) e ilustração dos escoamentos laminar (b) e turbulento (c)



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 384); Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 523).

A partir dos números adimensionais de Grashof e Rayleigh, temse correlações empíricas obtidas para geometrias imersas, ou seja, escoamentos de convecção natural externos. Tais correlações têm, em geral, a forma:

$$\overline{Nu_L} = \frac{hL}{k} = C \left( Gr_L \operatorname{Pr} \right)^n = CRa_L^n$$

Nessa equação, o número de Rayleigh é baseado no comprimento característico da geometria, L (ou D, no caso do cilindro horizontal longo), e o valor de **n** geralmente é 1/4 para escoamento laminar e 1/3 para turbulento. Para geometrias comuns, os coeficientes da equação estão apresentados na Tabela 3.2. Cabe ressaltar que as propriedades a serem usadas nessa equação devem ser determinadas na temperatura da película:  $T_f = (T_p + T_\infty)/2$ .

Geometria	Ra <sub>L</sub>	Pr	С	nw	
Placa vertical e cilindro vertical com	$10^4 - 10^9$	-	0,59	1/4	
$\frac{D}{L} \ge \frac{33}{Gr_L^{1/4}}$	$10^9-10^{13}$	-	0,10	1/3	
Placas horizontais – superfície superior de placa aquecida ou superfície inferior de placa resfriada	$10^4 - 10^7$	$\geq$ 0,7	0,54	1/4	
	10 <sup>7</sup> - 10 <sup>11</sup>	-	0,15	1/3	
Placas horizontais – superfície	$10^4 - 10^9$	$\geq$ 0,7	0,52	1/5	
inferior de placa aquecida ou superfície superior de placa resfriada	$10^4 - 10^7$	-	0,480	1/4	
Cilindro horizontal longo	$10^7 - 10^{12}$	-	0,125	1/3	

Tabela 3.2 | Valores das constantes C e n a serem utilizados para determinação de Nusselt de convecção natural em escoamentos externos

Fonte: Bergman et al. (2014, p. 392-393).

Na Tabela 3.2, as placas horizontais podem possuir diversos formatos. Nesse caso, o comprimento característico é definido como a razão entre a área superficial de um lado e o perímetro da placa.

Para escoamentos de convecção natural externos, pode-se também utilizar correlações de Churchill e Chu (1975 apud BERGMAN et al., 2014, p. 386), que são válidas para todo o intervalo de  $Ra_L$ . No caso de placas verticais, por exemplo, tem-se:  $\overline{Nu_L} = \left\{ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{\left[1 + \left(0,492/\operatorname{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2.$ 

Para outras geometrias, tais como esferas, consulte as páginas 385-393 do capítulo 9 de Bergman et al. (2014), cujo título é *Convecção natural*.

Além dos escoamentos externos, há os escoamentos em canais, como é o caso da convecção natural que ocorre quando um fluido escoa entre duas placas paralelas (Figura 3.6).

Figura 3.6 | Escoamento de convecção natural entre duas placas isotérmicas verticais



Fonte: adaptada de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 534).

Considere o caso de um fluido escoando entre duas placas planas verticais, isotérmicas e simétricas, de comprimento L, separadas por uma distância  $\delta$ , no intervalo  $Ra_{\delta}\delta/L \leq 10$ , tem-se:

$$\overline{Nu_{\delta}} = \left[\frac{576}{\left(Ra_{\delta}\delta/L\right)^{2}} + \frac{2.87}{\left(Ra_{\delta}\delta/L\right)^{1/2}}\right]^{-1/2}$$

Pesquise mais

Para outras condições de escoamento em canais, como fluxo de calor uniforme ou placas inclinadas, consulte Bergman et al. (2014, p. 393-395).

No caso de fluidos confinados, há diversas correlações, de acordo com o formato da superfície que os contém. Sendo as propriedades avaliadas na temperatura média, L é o comprimento das superfícies, e  $\delta$  a distância entre elas. Em sua maioria, as equações são como mostrado a seguir, cujas constantes estão na Tabela 3.3.

$$\overline{Nu_{\delta}} = \frac{\overline{h\delta}}{k} = CRa_{\delta}^{n} \cdot \Pr^{m}\left(\frac{L}{\delta}\right)^{q}$$

Geometria	$oldsymbol{R}oldsymbol{a}_{\delta}$	Pr	LΙδ	С	n	m	q
Placas ou anéis tubulares verticais, fluxo de calor constante ou	$10^4 - 10^7$	1 - 20000	10 - 40	0,42	0,25	0,012	-0,30
isotérmicas	$10^6 - 10^9$	1 - 20	1 - 40	0,046	1/3	0	0
Placas horizontais, superfície inferior aquecida	< 10 <sup>8</sup>	1 - 20	-	0,057	1/3	0	0

Tabela 3.3 | Valores das constantes para cálculo de Nusselt no caso de convecção natural em espaços confinados

	Anéis tubulares	6000 - <b>10<sup>6</sup></b>	1-5000	-	0,11	0,29	0	0
ł	horizontais, isotérmicos	10 <sup>6</sup> - 10 <sup>8</sup>	1 - 5000	-	0,40	0,20	0	0
	Espaço entre esferas concêntricas	120 - <b>10<sup>9</sup></b>	0,7 - 4000	-	0,228	0,226	0	0

Fonte: Holman (1998, p. 248).

Por fim, iremos avaliar os efeitos de convecção natural e forçada combinados, que ocorre quando  $Gr_L / Re_L^2 \approx 1$ , tratando-se de uma convecção mista. E no caso de essa razão ser muito maior que 1, os efeitos da convecção forçada podem ser desprezados. Para sabermos a influência da convecção natural, podemos analisar o sentido da força de empuxo em relação ao sentido do escoamento. De modo que, o empuxo intensifica a taxa de transferência de calor nos escoamentos paralelos (mesma direção e sentido) e transversais (direções perpendiculares). Enquanto que em escoamentos opostos (mesma direção e sentidos opostos), ele atua na diminuição dessa taxa, correspondendo ao sinal negativo na equação a seguir, que é utilizada para correlacionar os resultados de transferência de calor por convecção mista.

# $Nu^3 = Nu_F^3 \pm Nu_N^3$

No caso de escoamentos transversais envolvendo placas horizontais, cilindros ou esferas, os expoentes iguais a 3 dessa equação podem ser substituídos por 3,5 ou 4.

Exemplificando

Considere uma placa vertical quadrada com 1/2 m de dimensão característica, mantida a 55  $^{\circ}C$ . Paralelo a ela, há um escoamento de ar a 25  $^{\circ}C$ , com velocidade de 70 cm/s. Nesse caso, qual é o valor do número de Nusselt se o escoamento for no mesmo sentido da força de empuxo ou em sentido contrário?

Para cálculo do número de Nusselt referente a convecção forçada, tem-se:  $Nu_F = 0,644 \operatorname{Re}^{0.5} \operatorname{Pr}^{1/3}$ . E as propriedades do ar a 40 °C são: k = 0,02662 W/m/K,  $\nu = 1,702 \cdot 10^{-5} \operatorname{m}^2/\mathrm{s}$  e Pr = 0,7255. Considerando gás ideal,  $\beta = 1/T_f = 0,00319 \ K^{-1}$ .

$$\mathsf{Re} = \frac{0,70 \times 0,50}{1,702 \cdot 10^{-5}} = 20.564$$

$$Gr_{L} = \frac{9,81 \times 0,00319 \times (55 - 25) \times 0,5^{3}}{\left(1,702 \cdot 10^{-5}\right)^{2}} = 4,05 \cdot 10^{8}$$

 $Gr_L / \text{Re}_L^2 = 4,05 \cdot 10^8 / (20.564)^2 = 0,96 \approx 1$ : convecção mista

 $Nu_F = 0,644(20564)^{0.5}(0,7255)^{1/3} = 82,98$  $Ra_L = 4,05 \cdot 10^8 \times 0,7255 = 2,94 \cdot 10^8 < 10^9$ 

$$Nu_N = 0,59(2,94 \cdot 10^8)^{0,25} = 77,26$$

Escoamento no mesmo sentido do empuxo:

$$Nu^3 = (82,98)^3 + (77,26)^3 \rightarrow Nu = 101,1$$

Escoamento no sentido oposto ao empuxo:

$$Nu^3 = (82,98)^3 - (77,26)^3 \rightarrow Nu = 47,94$$

Quando o sentido do escoamento do fluido coincide com o da força de empuxo, o número de Nusselt é maior que o dobro do que para o escoamento em sentido contrário à força de empuxo. Comprova-se assim a necessidade de considerar a convecção natural quando esta é significativa.

Segundo Bergman et al. (2014), embora os efeitos do empuxo possam intensificar a transferência de calor em escoamentos com convecção forçada no regime laminar, no caso de regime turbulento essa intensificação é desprezível.

# Sem medo de errar

Você, funcionário de uma empresa de consultoria em projetos de engenharia, precisa resolver o problema de uma placa de estanho exposta a uma fonte constante de calor. A placa é vertical, com dimensão de 4,0 x 1,8 m, de um lado está isolada e do outro recebe um fluxo de calor constante e igual a **1.000** W/m<sup>2</sup>. Sabese que a energia incidente é perdida para ar ambiente a **25** °C. Você precisará justificar por que se trata de convecção natural e determinar qual seria a temperatura final da placa.

Como não há uma força motriz externa promovendo o escoamento do fluido (ar ambiente), tem-se apenas um movimento natural do fluido, causado pela força de empuxo, devido aos seus gradientes de densidade. Nesse caso, o gradiente de densidade ocorre devido à diferença de temperatura, e a força de corpo é devida ao campo gravitacional, tratando-se, pois, de escoamento convectivo natural.

Para estimarmos as propriedades do ar, precisaríamos da temperatura média dele, no entanto não conhecemos a temperatura da placa. Considerando o valor típico de coeficiente convectivo de 10 W/( $m^2 \cdot °C$ ), podemos estimar uma diferença de temperatura e, consequentemente, a temperatura média.

$$q = h \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{1.000}{10} = 100 \text{ °C}$$
$$T_{\rho} = 100 + 25 \text{ °C}$$
$$T_{f} = \frac{125 + 25}{2} = 75 \text{ °C}$$

A **75** °C , pela Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a **20,92**  $mm^2/s$ , k = 0,0300 W/m/K e Pr = 0,700. Sendo o ar considerado gás ideal:

$$\beta = 1/T_f = 1/(75 + 273) = 0,00287 \text{ K}^{-1}$$
.

De modo que, o número de Rayleigh é:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00287 \times (125 - 25) \times (4,0)^3}{(20,92 \times 10^{-6})^2} \times 0,700 = 2,88 \cdot 10^{11}$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra, calcula-se o coeficiente convectivo como segue:

$$\overline{Nu_L} = \frac{hL}{k} = 0,10Ra_L^{1/3} = 0,10 \cdot (2,88 \cdot 10^{11})^{1/3} = 660$$
$$\overline{h} = \frac{660 \times 0,0300}{4,0} = 4,95 \quad W/(m^2 \cdot C)$$

O valor de h é menor que o utilizado para obter a temperatura média, de modo que com esse valor obtido de h voltamos a fazer os cálculos. Trata-se de um processo iterativo, até que o valor de h calculado seja próximo ao utilizado para estimar a temperatura média. Refazendo os cálculos para h = 4,95 W/(m<sup>2</sup> · °C), tem-se:

$$q = h \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{1.000}{4,95} = 202 \ ^{\circ}\text{C}$$
  
 $T_p = 202 + 25 = 227 \ ^{\circ}\text{C}$   
 $T_f = \frac{227 + 25}{2} = 126 \ ^{\circ}\text{C}$ 

A **126** °C≈ 400 K, pela Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a **26,41 mm<sup>2</sup>/s**, k = 0,0338 W/m/K e Pr = 0,690. Sendo o ar considerado gás ideal:

$$\beta = 1/T_f = 1/(126 + 273) = 0,00251 \text{ K}^{-1}$$

De modo que, o número de Rayleigh é:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00251 \times (227 - 25) \times (4,0)^3}{(26,41 \times 10^{-6})^2} \times 0,690 = 3,15 \cdot 10^{11}$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra:

$$\overline{Nu_L} = \frac{hL}{k} = 0,10Ra_L^{1/3} = 0,10 \cdot (3,15 \cdot 10^{11})^{1/3} = 680$$

$$\overline{h} = \frac{680 \times 0,0338}{4,0} = 5,75 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ \text{C})$$

Refazendo novamente os cálculos para o valor de h obtido, tem-se:

$$q = h \cdot \Delta T \to \Delta T = \frac{1.000}{5,75} = 174$$
°C

 $T_p = 174 + 25 = 199 \circ_{\mathbf{C}}$ 

$$T_f = \frac{199 + 25}{2} = 112$$
 °C

A **112** °C  $\approx$  385 K, interpolando os valores da Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a **24,76** mm<sup>2</sup>/s, k = 0,0327 W/m/K e Pr = 0,693. Sendo o ar considerado gás ideal:

$$\beta = 1/T_f = 1/(112 + 273) = 0,00260 \text{ K}^{-1}$$
.

De modo que, o número de Rayleigh é:

4.0

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00260 \times (199 - 25) \times (4,0)^{3}}{(24,76 \times 10^{-6})^{2}} \times 0,693 = 3,21 \cdot 10^{11}$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra, tem-se:

$$\overline{Nu_L} = \frac{\overline{hL}}{k} = 0,10Ra_L^{1/3} = 0,10 \cdot (3,21 \cdot 10^{11})^{1/3} = 685$$
$$\overline{h} = \frac{685 \times 0,0327}{12} = 5,60 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

Com esse novo valor de h, a diferença de temperaturas é de:

$$q = h \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{1.000}{5,60} = 179$$
 °C

De modo que a temperatura da parede da placa metálica é:

#### $T_{p} = 179 + 25 = 204$ °C.

Uma nova iteração não melhoria significativamente a precisão da resposta. Portanto, o valor obtido é satisfatório, sendo inferior à temperatura de fusão do estanho. O resultado obtido mostra como são feitos os cálculos de coeficientes convectivos para casos de convecção natural, de modo que a posição da superfície, assim como a geometria, afeta os resultados obtidos.

### Avançando na prática

## Transferência por convecção natural em uma placa horizontal

#### Descrição da situação-problema

O cliente da empresa de consultoria em projetos de engenharia para a qual você trabalha questionou como seria aquele caso da placa de 4,0 x 1,8 m, se ela estivesse na posição horizontal, com a superfície superior exposta a um fluxo de calor constante de **1.000**  $W/m^2$ . Nesse caso, qual seria a temperatura da parede da placa.

#### Resolução da situação-problema

Tratando-se de uma placa horizontal com superfície superior aquecida, o procedimento seria semelhante ao da placa vertical, com diferença no cálculo do número de Nusselt.

O primeiro passo consiste em determinar o comprimento característico:

$$L \equiv \frac{A_{\rm s}}{P} = \frac{4,0 \times 1,8}{2 \times (4,0+1,8)} = 0,621 \text{ m}$$

Partindo de uma estimativa inicial de h = 5,0 W/(m<sup>2</sup>·°C), tem-se:

$$q = h \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{1.000}{5,0} = 200 \quad ^{\circ}\text{C} \rightarrow T_{p} = 200 + 25 \quad ^{\circ}\text{C} \rightarrow$$
$$T_{f} = \frac{225 + 25}{2} = 125 \quad ^{\circ}\text{C}$$

A **125** °C = 398 K, pela Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a **26,41 mm<sup>2</sup>/s**, k = 0,0338 W/m/K e Pr = 0,690. Sendo o ar considerado gás ideal:

$$\beta = 1/T_f = 1/(125 + 273) = 0,00251 \text{ K}^{-1}$$
.

De modo que, o número de Rayleigh é:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00251 \times (225 - 25) \times (0,621)^3}{(26,41 \times 10^{-6})^2} \times 0,690 = 1,17 \cdot 10^9$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra, a equação fica:

$$\overline{Nu_L} = \frac{\overline{hL}}{k} = 0,15Ra_L^{1/3} = 0,15 \cdot (1,17 \cdot 10^9)^{1/3} = 158 \qquad \rightarrow$$
$$\overline{h} = \frac{158 \times 0,0338}{0,621} = 8,60 \quad \text{W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

O valor de h é maior que o utilizado para obter a temperatura média, de modo que, com esse valor obtido de h, voltamos a fazer os cálculos. Refazendo os cálculos para h = 8,60 W/(m<sup>2</sup> · °C), tem-se:  $q = h \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{1000}{8,60} = 116 \text{ °C} \rightarrow T_p = 116 + 25 = 141$ °C  $\rightarrow T_f = \frac{141 + 25}{2} = 83 \text{ °C}$ 

A 83  $^{\circ}$ **C** = 356 K, pela Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a 21,58 mm<sup>2</sup>/s, k = 0,0305 W/m/K e Pr = 0,699. Sendo o ar considerado gás ideal:

$$\beta = 1/T_f = 1/(83 + 273) = 0,00281 \text{ K}^{-1}$$

De modo que, o número de Rayleigh é:

$$Ra = Gr \cdot \Pr = \frac{9,8 \times 0,00281 \times (141 - 25) \times (0,621)^3}{(21,58 \times 10^{-6})^2} \times 0,699 = 1,15 \cdot 10^9$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra, a equação fica:

$$\overline{Nu_L} = \frac{\overline{hL}}{k} = 0,15Ra_L^{1/3} = 0,15 \cdot (1,15 \cdot 10^9)^{1/3} = 157 \qquad \rightarrow \\ \overline{h} = \frac{157 \times 0,0305}{0,621} = 7,71 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

Refazendo os cálculos para h = 7,71  $W/(m^2 \cdot C)$ , tem-se:

$$q = h \cdot \Delta T \to \Delta T = \frac{1.000}{8,60} = 130 \ ^{\circ}C \rightarrow T_{p} = 130 + 25 = 155 \ ^{\circ}C \rightarrow$$
  
 $T_{f} = \frac{155 + 25}{2} = 90 \ ^{\circ}C$ 

A 90 °C = 363 K, interpolando os dados da Tabela 3.1, as propriedades do ar são: viscosidade cinemática igual a 22,35  $mm^2/s$ , k = 0,0310 W/m/K e Pr = 0,697. Sendo o ar considerado gás ideal:

# $\beta = 1/T_f = 1/(90 + 273) = 0,00275 \text{ K}^{-1}$

De modo que, o número de Rayleigh é:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00275 \times (155 - 25) \times (0,621)^3}{(22,35 \times 10^{-6})^2} \times 0,697 = 1,17 \cdot 10^9$$

Considerando as constantes da Tabela 3.2 para essa faixa de valor de Ra, a equação fica:

$$\overline{Nu_L} = \frac{hL}{k} = 0,15Ra_L^{1/3} = 0,15 \cdot (1,17 \cdot 10^9)^{1/3} = 158 \rightarrow$$

$$\bar{h} = \frac{158 \times 0,0310}{0,621} = 7,89 \text{ W/(m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$$

$$q = h \cdot \Delta T \to \Delta T = \frac{1.000}{7,89} = 127 \text{ °C} \to T_p = 127 + 25 = 152 \text{ °C}$$

De modo que a temperatura da parede da placa metálica é: T = 127 + 25 = 152 °C.

Uma nova iteração melhoraria um pouco a precisão da resposta. No entanto, com os valores obtidos, pode-se concluir que a placa na horizontal favorece mais a troca térmica com o ar ambiente, de modo que a temperatura da placa é cerca de 50 °C inferior quando colocada na posição horizontal em relação à posição vertical. Conclui-se, pois, que a posição da superfície afeta os resultados obtidos para transferência de calor por convecção natural, assim como afetaria a geometria da superfície, caso fosse comparada com outros formatos que não o de placa.

## Faça valer a pena

**1.** Tanto na convecção natural, quanto na forçada, a transição do regime laminar para o turbulento apresenta um significativo efeito no processo de transferência de calor. Para exemplificar isso, considere uma placa vertical com 0,5 m de comprimento, a qual está a 30 °C, imersa em nitrogênio a 90 °C, com velocidade nula. Sabe-se que, na temperatura do filme, as propriedades termofísicas do nitrogênio são: Pr = 0,714 e  $\nu = 19,11 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Qual é o valor do número de Rayleigh correspondente? Trata-se de um escoamento laminar ou turbulento?

a) 4,31·10<sup>8</sup>; laminar.
b) 4,31·10<sup>8</sup>; turbulento.
c) 6,04·10<sup>8</sup>; laminar.
d) 6,04·10<sup>8</sup>; turbulento.
e) 8.46·10<sup>8</sup>: turbulento.

2. Analisando sob o ponto de vista teórico, a transferência de energia por convecção não é simples de ser descrita, pois o coeficiente de película é uma função de diversas variáveis com a temperatura, a velocidade de escoamento do fluido, a geometria, etc.

Uma forma muito usual de descrever a convecção baseia-se na determinação de números adimensionais relevantes ao fenômeno. No caso da convecção natural, assinale a alternativa que contém tais números adimensionais.

a) Re, Pr e Bi.
b) Nu, Gr e Pr.
c) Re e Gr.
d) Ra, Gr e Re.
e) Bi, Nu e Gr.

**3.** Um cilindro horizontal de 18 mm de diâmetro e comprimento igual a 150 cm se mantém a 50 °C , mesmo estando exposto ao ar ambiente a 20 °C . Considere k = 0,025  $W/(m \cdot K)$ , a viscosidade cinemática do ar igual a 15,0  $mm^2/s$  e o número de Pr = 0,68.

Tratando-se de um problema de convecção natural, calcule o fluxo de calor recebido pelo cilindro, capaz de mantê-lo a essa temperatura.

- a) 0,5 W.
- b) 12 W.
- c) 83 W.
- d) 0,95 W.
- e) 19 W.

# Seção 3.2

# Ebulição

### Diálogo aberto

Se você já tentou ferver leite em casa, sabe que a ebulição envolve várias etapas, as quais dependem não só da temperatura da vasilha, como também da temperatura que o fluido vai atingindo. Um minuto de descuido e o leite transborda, causando aquela sujeira. Essa passagem da fase líquida para vapor, envolvendo grandes fluxos de calor, desperta o interesse no projeto de equipamentos, sendo esse o objeto de estudo desta seção.

Na empresa de consultoria em projetos de engenharia que você está trabalhando, os problemas envolvendo transferência de calor com mudança de fase são considerados um desafio, dado a complexidade que podem representar. Para testar seus conhecimentos em troca térmica, seu gestor logo lhe incumbiu do projeto para vaporizar água daquela fábrica de placas metálicas. Segundo ele, trata-se de uma grande oportunidade de afirmação de seu potencial na empresa, já que o destaque dela no mercado é em grande parte devido à asserção com que vem prestando consultoria em projetos como esse.

A empresa precisa de vapor d'água para utilizar em um trocador de calor. Essa água deverá ser evaporada utilizando tubos de aço inoxidável, fabricados por eles mesmos. Esses tubos são mecanicamente polidos e possuem 1,5 polegadas de diâmetro e 1 m de comprimento. A água encontra-se saturada a pressão atmosférica local, que é de 0,904 bar. A questão levantada pelo cliente de vocês é quantos tubos serão necessários para produzir 5.000 kg de vapor por hora? Para evitar o superaquecimento que a empresa teme, seu gestor recomendou considerar nos cálculos, como condição limite, onde o fluxo térmico é considerado igual a 90 % do máximo. Nessa condição, qual é a temperatura da superfície dos tubos? E se o fluxo térmico fosse 50 % do valor máximo, quantos tubos a mais seriam necessários e qual seria a temperatura superficial? De acordo com tabelas de propriedades termofísicas da água saturada (BERGMAN et al., 2014, p. 640), 0,904 bar corresponde à temperatura de saturação de 370 K, sendo as propriedades termofísicas correspondentes iguais a:  $\rho_{\ell} = 960,6 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{v} = 0,5373 \text{ kg/m}^3$ ,  $h_{fg} = 2,265 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ,  $c_{p,\ell} = 4,214 \cdot 10^3 \text{ J/(kg.K)}$ ,  $\mu_{\ell} = 2,89 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\Pr_{\ell} = 1,80$ ,  $\sigma = 0,0595 \text{ N/m}$ .

Para resolver essa questão de projeto, você aprenderá nesta seção a identificar os parâmetros adimensionais utilizados para descrever processos de ebulição e condensação. Aprenderá também a diferenciar os modos de ebulição e utilizar correlações para cálculo desse processo. Então, vamos lá, para se destacar em projetos de troca térmica não podem faltar esses conhecimentos.

#### Não pode faltar

Caro aluno, você começa a estudar os processos convectivos associados à mudança de fase dos fluidos. Será abordado o processo de ebulição, que pode ocorrer em uma interface sólidolíquido, identificando suas características físicas e apresentando as correlações adequadas para cálculos de transferência de calor desse processo.

Uma superfície sólida, por transferência de calor, pode manter a mudança do estado líquido para vapor. E, por envolver a movimentação do fluido, trata-se de uma transferência de calor por convecção. Isso é ebulição, o que é observado em casa ao colocar um recipiente com água no fogo, por exemplo.

Qual é a diferença entre os processos de ebulição, evaporação e vaporização, já que em todos eles ocorre a mudança do estado líquido para vapor?

Reflita

No caso da ebulição, assim como na condensação, por haver mudança de fase, a transferência de calor para o fluido pode ocorrer sem alterar sua temperatura, já que os efeitos do calor latente ( $h_{fa}$ ) são significativos. Na ebulição, outros dois parâmetros
importantes são: tensão superficial na interface líquido-vapor ( $\sigma$ ) e diferença de densidades entre as duas fases ( $\rho_{\ell} - \rho_{v}$ ), sendo que essa diferença de densidades induz a uma força de empuxo, proporcional a ela multiplicada pela aceleração da gravidade, de modo que a combinação dos efeitos do calor latente com o escoamento induzido pelo empuxo provoca coeficientes de transferência de calor mais significativos que aqueles característicos da convecção sem mudança de fase, podendo levar a altas taxas de transferência de calor e, ainda assim, alterando pouco ou quase nada a temperatura.

# Exemplificando

Em caldeiras, ocorre uma das etapas dos ciclos de potência, que é a conversão de líquido pressurizado em vapor. Já nos ciclos de refrigeração por compressão de vapor, o processo de ebulição ocorre em evaporadores, como o ilustrado na Figura 3.7.



Figura 3.7 | Evaporador de duplo efeito

Fonte: <http://www.geograph.org.uk/photo/3761112>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Além da tensão superficial, do calor latente e da diferença de massas específicas entre as fases líquida e vapor, o coeficiente convectivo para o processo de ebulição, e também de condensação,

pode depender da diferença entre as temperaturas na superfície e de saturação ( $\Delta T = |T_s - T_{sat}|$ ), de um comprimento característico (L) e das propriedades termofísicas do fluido:

$$Nu_{L} = \frac{hL}{k} = f\left[\frac{\rho g\left(\rho_{\ell} - \rho_{v}\right)L^{3}}{\mu^{2}}, Ja, Pr, Bo\right]$$

Sendo o número de Jakob (Ja) e o número de Bond (Bo) parâmetros adimensionais dados, respectivamente, por:

$$Ja = \frac{c_p \Delta T}{h_{fg}}$$
$$Bo = \frac{g(\rho_\ell - \rho_v)L^2}{\sigma}$$

No número de Grashof,  $Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$ , se substituirmos  $\beta(T_s - T_\infty)$  por  $\Delta \rho / \rho$ , obtemos o parâmetro adimensional que aparece na equação para cálculo de  $Nu_L$ , como mostrado a seguir:

Assimile

$$\frac{g\beta(T_{s}-T_{\infty})L^{3}}{\nu^{2}} = \frac{g\rho^{2}\beta(T_{s}-T_{\infty})L^{3}}{\mu^{2}} \rightarrow \frac{g\rho(\rho_{\ell}-\rho_{\nu})L^{3}}{\mu^{2}}$$

Já o número de Bond representa o efeito do movimento do fluido induzido pelo empuxo na transferência de calor, enquanto o número de Jakob é a razão entre a máxima energia sensível absorvida pelo vapor (ou líquido) e a energia latente absorvida pelo vapor (ou líquido) durante a ebulição (ou condensação).

Quando a temperatura da superfície é superior à temperatura de saturação do líquido correspondente à sua pressão de vapor, ocorre evaporação na interface sólido-líquido, que é o processo denominado **ebulição**. O calor transferido é calculado pela equação a seguir, dada pela lei do resfriamento de Newton, sendo  $\Delta T_e = T_s - T_{sat}$  o excesso de temperatura.

# $q_{s}^{"} = h(T_{s} - T_{sat}) = h \Delta T_{e}$

A ebulição é caracterizada pela formação de bolhas de vapor que crescem e, em seguida, se desprendem da superfície, sendo esse crescimento e essa dinâmica dependentes do excesso de temperatura, segundo Bergman et al. (2014). Outros fatores que influenciam são a natureza da superfície e as propriedades termofísicas do fluido. Como a dinâmica da formação da bolha afeta o movimento do líquido próximo à superfície, ela influencia fortemente no coeficiente de transferência de calor, de modo que a ebulição pode ocorrer sob várias condições, e alguns modos estão descritos a seguir:

- Ebulição em piscina: líquido em repouso e seu movimento próximo à superfície é devido à convecção natural e à mistura induzida pelo crescimento e desprendimento de bolhas.
- Ebulição com convecção forçada (convectiva): o movimento do fluido é induzido por meios externos, pela convecção natural e pela mistura induzida pelas bolhas.
- Ebulição sub-resfriada: a temperatura da maior parte do líquido é inferior à  $T_{sat}$  ( $\Delta T_{sub} \equiv T_{sat} T_{liq}$ ), fazendo com que as bolhas formadas na superfície possam condensar no líquido.
- Ebulição saturada: a temperatura do líquido excede a temperatura de saturação, de modo que as bolhas formadas na interface sólido-líquido são impelidas através do líquido pelas forças de empuxo, terminando por aflorar na interface líquido-vapor.

#### Ebulição em piscina

Os mecanismos físicos envolvidos na ebulição em piscina são representados na **curva de ebulição**, através da qual pode-se identificar diferentes regimes (ou modos) em função do excesso de temperatura, como ilustrado para água a 1 atm na Figura 3.8, representando o comportamento semelhante apresentado por outros fluidos.





Fonte: adaptada de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curva\_de\_ebullicion.svg>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Pela Figura 3.8 e pela equação de cálculo do calor transferido na ebulição ( $\mathbf{q}_{s}^{"} = \mathbf{h}\Delta T_{e}$ ), observa-se que o fluxo térmico na superfície depende não só do coeficiente convectivo, como também do excesso de temperatura, podendo ser identificados diferentes modos de ebulição.

• Ebulição com convecção natural: ocorre até  $\Delta T_e \approx 5$ °C. Ou seja, a temperatura da superfície deve ser um pouco superior à de saturação para manter a formação de bolhas. Nesse modo, o movimento do fluido é determinado principalmente pelos efeitos da convecção natural. O coeficiente convectivo varia com  $\Delta T_e$  elevado à potência de 1/4 (escoamento laminar) ou 1/3 (escoamento turbulento). Assim,  $q_s$  varia em função de  $\Delta T_e$  elevado a 5/4 ou 4/3, de modo que a equação  $\overline{Nu_L} = \overline{h}L / k = CRa_L^n$ , cujos parâmetros constam na Tabela 3.2, pode ser utilizada para prever a porção de convecção natural da curva de ebulição. Para uma grande placa horizontal, o escoamento é turbulento, e a equação pode ser utilizada para prever a porção de convecção natural da curva de ebulição.

Ebulição nucleada: ocorre para valores de  $\Delta T_{e}$  entre 5 e 30 °C. Trata-se de um regime de operação muito desejado para equipamentos, pois altas taxas de transferência de calor estão associadas a pequenos excessos de temperatura, indicando elevados coeficientes convectivos. Até o ponto de inflexão, que ocorre em  $\Delta T_{a} = 10$  °C, bolhas isoladas se formam nos sítios de nucleação e se desprendem da superfície, causando uma mistura considerável no fluido próximo à superfície, aumentando h e  $q_s$ . Nesse regime, a maior parte da troca de calor se dá por transferência direta da superfície para o líquido em movimento sobre ela, e não através das bolhas de vapor ascendendo a partir da superfície. Após o ponto de inflexão, mais sítios de nucleação se tornam ativos, e a maior formação de bolhas causa a interferência e a coalescência entre as bolhas. Nesse modo, vapor ascende em forma de jatos ou colunas de bolhas, que se unem para formar bolsões de vapor, inibindo o movimento do líquido na região próxima à superfície. No ponto de fluxo térmico máximo (ou crítico), uma guantidade considerável de vapor é formada, e, desse modo, o líquido não molha continuamente a superfície.

Pesquise mais

Nukiyama (1966 apud BERGMAN et al., 2014) foi o primeiro a identificar os mecanismos de ebulição em piscina. Utilizando um equipamento de aquecimento com potência controlada, ele demonstrou a curva de ebulição. Para saber mais sobre o experimento e como foi obtida a curva, consulte as páginas 419-420 do capítulo 10, *Ebulição e condensação*, em:

BERGMAN, T. L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.

#### Exemplificando

Saiba mais

Embora alguns processos operem com controle da temperatura na superfície, há outros em que é feito o controle do fluxo térmico na superfície (reatores nucleares, equipamentos de resistência elétrica, dentre outros). Nesse caso, deve-se estar atento ao ponto de fluxo térmico crítico. Isso porque, qualquer aumento em  $\boldsymbol{q}_s$  além do ponto crítico causa um aumento abrupto em  $\Delta T_e$ , podendo exceder o ponto de fusão do sólido, o que destruirá ou causará fadiga no sistema.

- Ebulição no regime de transição (em filme instável ou em filme parcial): corresponde à região de excesso de T entre 30 °C e 120 °C, na qual a formação das bolhas é muito rápida, possibilitando a ocorrência da formação de um filme ou uma manta de vapor sobre a superfície, sendo que a fração da superfície total coberta pelo filme aumenta com o aumento de  $\Delta T_e$ . Caracteriza-se pelo contato periódico instável entre o líquido e a superfície aquecida. Como a condutividade térmica do vapor é muito menor do que a do líquido, h e  $q_s^r$  diminuem com o aumento de  $\Delta T_e$ .
- Ebulição em filme (em película): ocorre a partir do ponto de Leidenfrost, no qual o fluxo térmico na superfície atinge seu valor de mínimo e a superfície encontra-se totalmente coberta por uma manta de vapor. A transferência de calor da superfície para o líquido ocorre por condução e radiação através do vapor, sendo que essa última se torna significativa para temperaturas superficiais superiores a 300 °C.

Segundo Bergman et al. (2014, p. 421), "Leidenfrost, em 1756, observou que gotículas de água sustentadas pelo filme de vapor evaporam lentamente ao se moverem ao longo de uma superfície quente."

Portanto, para ebulição com convecção natural, podem ser utilizadas as correlações apropriadas da convecção natural, a fim de estimar os coeficientes e as taxas de transferência de calor. E para ebulição nucleada e em filme em piscina, devem ser utilizadas as correlações que serão apresentadas a seguir.

#### Correlações da ebulição em piscina

Para compreendermos a ebulição nucleada em piscina, é necessário estimar o número de sítios de nucleação na superfície e a taxa na qual as bolhas são formadas em cada sítio. Com base nisso, Rohsenow (1952 apud BERGMAN et al., 2014) desenvolveu a correlação:

$$\mathbf{q}_{s}^{"} = \mu_{\ell} \mathbf{h}_{fg} \left[ \frac{\mathbf{g} \left( \rho_{\ell} - \rho_{v} \right)}{\sigma} \right]^{1/2} \left( \frac{\mathbf{c}_{p,\ell} \Delta T_{e}}{\mathbf{C}_{s,f} \mathbf{h}_{fg} \operatorname{Pr}_{\ell}^{n}} \right)^{3}$$

Essa correlação é válida para a ebulição nucleada em superfícies limpas, na qual todas as propriedades do líquido devem ser avaliadas a  $T_{sat}$ . Se for reescrita em termos de um número de Nusselt com base no diâmetro da bolha característico, a expressão se reduz a  $Nu_{D_c} \propto Ja^2 \operatorname{Pr}^{1-3n}$ .

Os parâmetros  $C_{s,f}$  (Tabela 3.4) e n dependem da combinação sólido-fluido, sendo n = 1,0 para água e n = 1,7 para outros líquidos, tais como benzeno e etanol.

	C <sub>s,f</sub>	Combinação superfície- fluido	<b>C</b> <sub>s,f</sub>
Água – aço inoxidável: tratada quimicamente	0,0133	Água - cobre: polida	0,0128
Água – aço inoxidável: polida mecanicamente	0,0132	Água - latão	0,0060
Água – aço inoxidável: esmerilhada e polida	0,0080	Água – níquel	0,0060
Água - cobre: riscada	0,0068	Água – platina	0,0130

Tabela 3.4 | Parâmetro para cálculo de ebulição nucleada da água em diferentes superfícies

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 422).

Pela equação acima, observa-se que, como  $q_s^{"} \propto h_{fg}^{-2}$  e o calor latente de vaporização diminui com o aumento da pressão de saturação, o fluxo térmico na ebulição nucleada aumentará com a pressurização do líquido.

Já o fluxo térmico máximo, calculado pela equação a seguir, avaliando as propriedades a  $T_{sat}$ , aumentará com a pressão até um terço da pressão crítica, depois decrescerá até atingir o valor zero na pressão crítica. A dependência de  $\mathbf{q}_{max}$  com a superfície é dada pela constante C, cujo valor é 0,149 para placas horizontais grandes e 0,131 para grandes cilindros horizontais, esferas e outras superfícies aquecidas grandes e finitas.

$$\mathbf{q}_{\max}^{"} = \mathbf{C}\rho_{\nu}\mathbf{h}_{fg} \left[\frac{\sigma \mathbf{g}\left(\rho_{\ell} - \rho_{\nu}\right)}{\rho_{\nu}^{2}}\right]^{1/4}$$

No limite superior do regime de transição, tem-se o fluxo térmico mínimo, que corresponde à formação de um filme de vapor estável, abaixo do qual o filme colapsa, causando o resfriamento da superfície, e volta-se a uma condição de ebulição nucleada. Uma boa estimativa de  $\boldsymbol{q}_{\min}^{r}$  a pressões moderadas para uma grande placa ou cilindro horizontais é dada por:

$$m{q}_{\mathsf{min}}^{"} = 0,09
ho_{v}m{h}_{\mathsf{fg}}\left[rac{\sigmam{g}\left(
ho_{\ell}-
ho_{v}
ight)}{\left(
ho_{\ell}+
ho_{v}
ight)^{2}}
ight]^{1/4}$$

No caso de ebulição em filme sobre um cilindro (C = 0,62) ou esfera (C = 0,67) de diâmetro D, utiliza-se:

$$\overline{Nu}_{D} = \frac{\overline{h}D}{k} = C \left[ \frac{g(\rho_{\ell} - \rho_{\nu}) (h_{fg} + 0.80c_{\rho,\nu} \Delta T_{e}) D^{3}}{\nu_{\nu} k_{\nu} \Delta T_{e}} \right]^{1/2}$$

Sendo as propriedades do vapor estimadas na pressão do sistema e na temperatura do filme (média entre  $T_s$  e  $T_{sat}$ ), enquanto  $\rho_\ell$  e  $h_{fa}$  são avaliados na temperatura de saturação.

#### Ebulição convectiva

Nesse caso, também chamado de ebulição com convecção forçada, o escoamento é devido aos efeitos do empuxo e de uma movimentação global do fluido, de maneira que as condições dependem fortemente da geometria, podendo envolver o escoamento externo sobre cilindros e placas aquecidos ou interno em dutos, sendo que a convecção forçada aumenta o fluxo térmico crítico na ebulição nucleada.

No caso de escoamento externo, se o líquido estiver subresfriado e a geração de vapor for pequena, o fluxo térmico total é dado em termos de componentes associados à convecção forçada pura e à ebulição em piscina. Para um líquido com escoamento cruzado sobre um cilindro, as equações a seguir são usadas para baixas e altas velocidades, respectivamente, nas quais as propriedades são estimadas a  $T_{sat}$  (LIENHARD; EICHHORN, 1976 apud BERGMAN et al., 2014).

$$\frac{q_{\max}^{"}}{\rho_{v}h_{fg}V} = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + \left(\frac{4}{We_{D}}\right)^{1/3} \right] < \left(\frac{0,275}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\rho_{\ell}}{\rho_{v}}\right)^{1/2} + 1$$
$$\frac{q_{\max}^{"}}{\rho_{v}h_{fg}V} = \frac{\left(\rho_{\ell}/\rho_{v}\right)^{3/4}}{169\pi} + \frac{\left(\rho_{\ell}/\rho_{v}\right)^{1/2}}{19,2\pi We_{D}^{1/3}} > \left(\frac{0,275}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\rho_{\ell}}{\rho_{v}}\right)^{1/2} + 1$$

O número de Weber ( $We_D$ ) é a razão entre as forças de inércia e de tensão superficial e é dado por:

$$We_D = \frac{\rho_V V^2 D}{\sigma}$$

No caso da ebulição com convecção forçada em escoamento interno (escoamento bifásico), ocorrem mudanças rápidas do estado líquido para vapor no sentido do escoamento, formando bolhas na superfície interna do tubo aquecido através do qual o líquido escoa. Os regimes de escoamento bifásico estão ilustrados na Figura 3.9 para um líquido sub-resfriado que entra no tubo e se movimenta em sentido ascendente, com fluxo térmico na superfície constante. A fração mássica de vapor média no fluido aumenta ao longo do tubo, e isso, juntamente com a significativa diferença de densidades entre ambas as fases, aumenta a velocidade média do fluido em várias ordens de grandeza. Figura 3.9 | Regimes de escoamento na ebulição com convecção forçada em um tubo



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 428).

Para a região de ebulição com escoamento saturado em tubos circulares lisos, com dimensões do canal grandes em relação ao diâmetro da bolha, utiliza-se as correlações dadas a seguir, a última para  $0 < \overline{X} \le 0.8$ .

$$\frac{h}{h_{mf}} = 0,6683 \left(\frac{\rho_{\ell}}{\rho_{v}}\right)^{0.1} \overline{X}^{0.16} (1-\overline{X})^{0.64} f(Fr) + 1.058 \left(\frac{q_{s}^{"}}{h_{fg} \cdot \dot{m} / A_{tr}}\right)^{0.7} (1-\overline{X})^{0.8} G_{s,f}$$
$$\frac{h}{h_{mf}} = 1,136 \left(\frac{\rho_{\ell}}{\rho_{v}}\right)^{0.45} \overline{X}^{0.72} (1-\overline{X})^{0.08} f(Fr) + 667,2 \left(\frac{q_{s}^{"}}{h_{fg} \cdot \dot{m} / A_{tr}}\right)^{0.7} (1-\overline{X})^{0.8} G_{s,f}$$

Sendo a fração mássica de vapor média dada por:

$$\overline{X}(x) = \frac{q_s \pi D x}{\dot{m} h_{fq}}$$

O parâmetro de estratificação, f(Fr), considera a estratificação das fases líquida e vapor que pode ocorrer em tubos horizontais. Trata-se de uma função do número de Froude, que para a fase líquida é igual a:

$$rac{\left[\left(\dot{m}\,/\,A_{tr}\,
ight)\,/\,
ho_{\ell}\,
ight]^{2}}{gD}$$

Esse parâmetro assume valor unitário para tubos verticais e horizontais com Fr  $\geq$  0,04. Para tubos horizontais com Fr  $\leq$  0,04:

$$f(Fr) = 2,63Fr^{0,3}$$

Ressaltando que todas as propriedades são avaliadas na temperatura de saturação.

O coeficiente  $G_{s,f}$  depende da combinação superfície-fluido, sendo 1 para tubos de aço inoxidável. No caso de tubos de cobre comercial é igual a 0,488 para querosene, 1,63 para refrigerante R-134a e 1,00 para água.

Tratando-se de escoamento em microcanais, deve-se recorrer a modelagens matemáticas mais sofisticadas.

#### Sem medo de errar

Na empresa de consultoria em projetos de engenharia que você está trabalhando, seu gestor o incumbiu do projeto relacionado à vaporização de água da fábrica de placas metálicas. Isso porque a empresa precisa de vapor d'água para utilizar em um trocador de calor. Deseja-se quantificar o número de tubos de aço inoxidável (mecanicamente polidos, com 1,5 polegada de diâmetro e 1 m de comprimento) necessários para produzir 5.000 kg/h de vapor d'água a P = 0,904 bar. Além disso, precisa-se determinar a temperatura da superfície dos tubos nessa condição. Como referência, deve-se considerar que o fluxo térmico é igual a 90 % do valor máximo.

Água saturada a 0,904 bar corresponde a temperatura de saturação igual a 370 K, com propriedades termofísicas iguais a:  $\rho_{\ell} = 960,6 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\nu} = 0,5373 \text{ kg/m}^3$ ,  $h_{fg} = 2,265 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ,  $c_{\rho,\ell} = 4,214 \cdot 10^3 \text{ J/(kg.K)}$ ,  $\mu_{\ell} = 2,89 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\text{Pr}_{\ell} = 1,80$ ,  $\sigma = 0,0595 \text{ N/m}$ , as quais podem ser obtidas a partir de tabelas termodinâmicas, como em Bergman et al. (2014, p. 640).

O fluxo térmico máximo pode ser calculado como mostrado a seguir, sendo C para cilindros horizontais igual a 0,131.

$$\mathbf{q}_{\max}^{"} = \mathbf{C} \rho_{v} \mathbf{h}_{fg} \left[ \frac{\sigma \mathbf{g} \left( \rho_{\ell} - \rho_{v} \right)}{\rho_{v}^{2}} \right]^{1/2}$$

 $\ddot{q_{max}} = 0,131 \cdot 0,5373 \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot 2,265 \cdot 10^6 \frac{J}{kg} \left[ \frac{0,0595 (N/m)9,81 (m/s^2) (960,6-0,5373) (kg/m^3)}{(0,5373)^2 (kg^2/m^6)} \right]^{1/4}$ 

$$q_{\text{max}}^{"} = 1,594 \cdot 10^5 \frac{J}{m^3} \left[ 1.940 \frac{(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)/\text{s}^2}{\text{kg/m}^3} \right]^{1/4} = 1,058 \cdot 10^6 \frac{J}{m^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\ddot{q_{\text{max}}} = 1,058 \cdot 10^6 \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1,058 \cdot \text{MW/m}^2$$

Já a área superficial de cada tubo é dada por:

## $A = 2\pi rL = \pi \times 1,5 \times 0,0254 \times 1 = 0,1197 \text{ m}^2$

Para produzir 5.000 kg/h de vapor d'água, considerando o calor latente de vaporização, são necessários: 5.000 kg/h x  $2,265.10^{6}$  J/kg =  $1,1325.10^{10}$  J/h = 3,146 MW.

De modo que o número de tubos necessários é dado por:

$$q = q_s^{"} \cdot A_T = 0,90 \cdot q_{max}^{"} \cdot N \cdot A$$
  
3,146 = 0,90 × 1,058 · N × 0,1197

Para fluxo térmico inferior ao valor máximo, considerando o caminho de aquecimento da curva de ebulição, tem-se a região de ebulição nucleada, sendo válida a seguinte equação, com  $C_{s,f}$  para superfície de aço inoxidável mecanicamente polida.

$$\mathbf{q}_{s}^{"} = \mu_{\ell} \mathbf{h}_{\mathrm{fg}} \left[ \frac{\mathbf{g} \left( \rho_{\ell} - \rho_{\mathrm{v}} \right)}{\sigma} \right]^{1/2} \left( \frac{\mathbf{c}_{\mathbf{p},\ell} \Delta T_{\mathrm{e}}}{\mathbf{C}_{\mathrm{s,f}} \mathbf{h}_{\mathrm{fg}} \operatorname{Pr}_{\ell}^{n}} \right)^{3}$$

Substituindo nela os valores conhecidos, obtém-se o excesso de temperatura, como mostrado a seguir.

$$0,50 \times 1,058 \cdot 10^{6} = 2,89 \cdot 10^{-4} \times 2,265 \cdot 10^{6} \left[ \frac{9,81(960,6-0,5373)}{0,0595} \right]^{1/2} \left( \frac{4,214 \cdot 10^{3} \Delta T_{e}}{0,0132 \times 2,265 \cdot 10^{6} \times 1,80^{7}} \right)^{3}$$

$$0,07830\Delta T_e = (3,656)^{1/3} \rightarrow \Delta T_e = 19,7K.$$

Se a temperatura de saturação da água é 370 K, tem-se que a temperatura da superfície é 389,7 K, o que equivale a 116,5  $^{\circ}\mathbf{C}$  .

Para o caso do fluxo térmico igual a 50 % do valor máximo:  $3,146 = 0,50 \times 1,058 \cdot N \times 0,1197$ 

N = 49,7 = 50 tubos. Portanto, seriam necessários 22 tubos a mais que os necessários para trabalhar com 90 % do fluxo térmico máximo.

 $0,50 \times 1,058 \cdot 10^{6} = 2,89 \cdot 10^{-4} \times 2,265 \cdot 10^{6} \left[ \frac{9,81(960,6-0,5373)}{0,0595} \right]^{1/2} \left( \frac{4,214 \cdot 10^{3} \Delta T_{e}}{0,0132 \times 2,265 \cdot 10^{6} \times 1,80^{1}} \right)^{3}$  $0,07830 \Delta T_{e} = (2,031)^{1/3} \rightarrow \Delta T_{e} = 16,2 \text{ K}$ 

O que equivale a uma temperatura da superfície de 386,2 K = 113,0  $^{\circ}C$ , mostrando assim que você é capaz de analisar situações que envolvem processos convectivos com mudança de fase.

#### Avançando na prática

#### Escoamento bifásico

#### Descrição da situação-problema

Você está trabalhando em uma indústria automotiva, na área de projetos, e precisa determinar a temperatura de parede de um tubo, o qual será utilizado para escoar água quente, utilizada para banhar algumas peças. Esse tubo é de cobre, encontra-se na posição horizontal e possui 20 mm de diâmetro interno, sendo utilizado para escoar água a uma vazão de 250 kg/h e temperatura de saturação de 350 K. Qual é a temperatura de parede máxima associada a um fluxo térmico de 1 **MW/m<sup>2</sup>** na superfície interna da parede em x = 1,5 m? Se o tubo fosse de aço inoxidável, qual seria essa T?

Sabe-se que água saturada a 350 K corresponde à pressão de 0,4163 bar e suas propriedades termofísicas são:  $\rho_{\ell} = 974 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{v} = 0,260 \text{ kg/m}^3$ ,  $h_{fg} = 2,32 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ,  $c_{p,\ell} = 4,195 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ . (kg.K),  $\mu_{\ell} = 3,65 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ , k = 0,668 W/m/K,  $\text{Pr}_{\ell} = 2,29$ ,  $\sigma = 0,0632 \text{ N/m}$ .

#### Resolução da situação-problema

Trata-se de um problema envolvendo ebulição com convecção forçada em escoamento interno.

Nesse caso, a fração mássica de vapor média, na posição desejada, é calculada por:

$$\overline{X}(x) = \frac{q_s^{"} \pi D x}{\dot{m} h_{fg}} = \frac{10^6 \pi 0,020 \times 1,5}{(250 / 3600) 2,32 \cdot 10^6} = 0,585$$

O número de Froud é dado por:

# $[(4 \times 250 / 3.600 / \pi / 0.020^2) / 974]^2 / (9.81 \times 0.020) = 0.263 > 0.04$

De modo que f(Fr) = 1. Além disso, para água, independentemente de o tubo ser de cobre ou de aço inoxidável,  $G_{sf}$  = 1.

Como  $0 < \overline{X} \leq 0.8$ , para obtenção do coeficiente convectivo, tem-se:

$$\operatorname{Re} = \frac{4 \times 20070.000}{\pi \cdot 0.020 \cdot 3.65 \cdot 10^{-4}} = 12.112$$

O coeficiente convectivo monofásico é dado pela equação de Dittus-Boelter, como segue:

$$Nu_D = 0.023 \operatorname{Re}_D^{4/5} \operatorname{Pr}^{0.4} = 0.023 (12112)^{0.8} (2,29)^{0.4} = 59,2$$
  
 $h_{mf} = \frac{k}{D} Nu_D = \frac{0.668}{0.020} 59,2 = 1977 \ \mathrm{W/m^2/K}$ 

De modo que h =  $1.977 \times 33,4 = 66.032 \text{ W/m}^2/\text{K}$ .

E o excesso de temperatura é dado por:  $q_s^{"} = h\Delta T_e \rightarrow \Delta T_e = \frac{10^6}{66.032} = 15,14$  K, sendo a temperatura na

superfície de 365,14 K = 92  $^{\circ}\mathbf{C}$ , a qual independe de o tubo ser de cobre ou aço inoxidável.

## Faça valer a pena

 Há cinco parâmetros adimensionais utilizados para caracterizar os processos de ebulição e condensação, dentre eles estão o número de Nusselt e Prandt, e os outros três são:

)) 
$$ho m{g} ig( 
ho_\ell - 
ho_v ig) L^3$$
 /  $\mu^2$ 

$$||) Ja = \frac{c_p \Delta T}{h_{fa}}$$

 $|||| Bo = \frac{g(\rho_{\ell} - \rho_{\nu})L^2}{\sigma}$ 

Estes números possuem significados apresentados nos itens de A a C:

A) A razão entre a máxima energia sensível e a energia latente absorvidas pelo fluido durante o processo.

B) A razão entre a força de empuxo e a força de tensão superficial.

C) O efeito do movimento do fluido induzido pelo empuxo na transferência de calor.

Qual das alternativas representa a relação correta entre os parâmetros adimensionais e seus significados?

a) I - A, II - B, III - C. b) I - C, II - B, III - A. c) I - B, II - A, III - C. d) I - B, II - C, III - A. e) I - C, II - A, III - B.

**2.** Um tanque de latão com 1 m de diâmetro, mantido a 125 °C, é utilizado para aquecer água à pressão atmosférica. Pode-se avaliar esse processo, considerando estado estacionário. As propriedades da água saturada nessa pressão são iguais a:  $\rho_{\ell} = 958 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\nu} = 0,596 \text{ kg/m}^3$ ,  $h_{fg} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ,  $c_{p,\ell} = 4,217 \cdot 10^3 \text{ J/(kg.K)}$ ,  $\mu_{\ell} = 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\text{Pr}_{\ell} = 1,76$ ,  $\sigma = 0,0589 \text{ N/m}$ .

Com base nos dados apresentados, qual é o mecanismo de ebulição que está ocorrendo e a taxa de transferência de calor?

a) Modo de convecção natural, com taxa de transferência de calor de 21,7 kW.

b) Modo de ebulição nucleada, com taxa de transferência de calor de 17,04 MW.

c) Modo de transição, com taxa de transferência de calor de 21,7 MW.

d) Modo de ebulição em filme, com taxa de transferência de calor de 17,04 kW.
e) Não se pode definir o modo de ebulição pelos dados apresentados, sendo

**q**, de 3.400 kW.

**3.** Há diferentes modos ou mecanismos de ebulição, como ilustrado na Figura 3.10. Eles podem ser classificados a depender de como ocorre o movimento do fluido. Também podem ser classificados de acordo

com o excesso de temperatura que possuem. E, por fim, considerando a temperatura do fluido.

Figura 3.10 | Exemplos de modos de ebulição



Fonte: adaptada de Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 599-600).

Assinale a alternativa que classifica corretamente os modos de ebulição ilustrados na Figura 3.10, considerando que o líquido é água, à pressão atmosférica.

a) A – ebulição convectiva; B – ebulição em filme; C – ebulição com convecção natural; D – ebulição nucleada.

b) A – ebulição em filme; B – ebulição com convecção forçada; C – ebulição nucleada; D – ebulição com convecção natural.

c) A – ebulição em piscina; B – ebulição em filme; C – ebulição com convecção forçada; D – ebulição com convecção natural.

d) A – ebulição nucleada; B – escoamento bifásico; C – ebulição em filme; D – ebulição nucleada.

e) A – ebulição em filme; B – ebulição em tubo; C – ebulição em piscina; D – ebulição com convecção forcada.

# Seção 3.3

# Condensação e trocadores de calor

# Diálogo aberto

O arrefecimento de ar é um processo de extrema importância: em casa, garante o conforto térmico; em hospitais, garante as condições adequadas de temperatura para o nascimento de uma criança, por exemplo; e, nas indústrias, é necessário para garantir temperaturas de operação, como no condicionamento de frutas a serem processadas para produzir outros alimentos. Os aparelhos de ar-condicionado possuem um fluido refrigerante, utilizado para diminuir a temperatura do ar ambiente, tratando-se de um trocador de calor. Ao diminuir a temperatura do ar ambiente, que possui umidade, ocorre condensação de seu vapor d'água e a perda de umidade. Ou seja, nesse equipamento, além da troca térmica, ocorre a condensação.

Dessa forma um dos equipamentos que você mais encontrará nas indústrias é o trocador de calor, tratando-se de um recipiente que promove a troca térmica entre dois fluidos sem misturá-los, o qual permite aproveitamento energético no processo se for bem projetado. Por exemplo, trocadores de calor são utilizados em indústrias petroquímicas para aquecer óleo, pois diminuindo sua viscosidade é mais fácil transportá-lo.

Em seu trabalho, na empresa de consultoria de projetos de engenharia, você tem tido muitas oportunidades de colocar em prática seus conhecimentos sobre transferência de calor. Atualmente, atendendo à empresa fabricante de placas metálicas, o desafio é quanto à análise de um trocador de calor. Esta empresa está com dificuldade na limpeza final das placas metálicas, sendo identificado que, se o solvente utilizado nesta etapa for aquecido a 70 °C, um melhor resultado é obtido. Então eles necessitam de um equipamento de troca de calor que seja capaz de aquecer este solvente. Para atender às necessidades da fábrica, será utilizado vapor d'água fluido quente nesse equipamento. O objetivo é aquecer um solvente de 30 °C a

70 °C com o calor liberado na condensação do vapor d'água, que advém saturado do evaporador a 0,904 bar. Para tanto, foram realizados alguns orçamentos de equipamentos de troca térmica e encontraram boa oportunidade em um trocador bitubular, fabricado em alumínio, com 4 m de comprimento. A ideia inicial é testar a eficiência dele operando com escoamento em paralelo, e o solvente deve escoar na região anular, cujos diâmetros externo e interno são, respectivamente, 2,00 m e 0,80 m, enquanto o vapor d'água escoará no interior do tubo de menor diâmetro (espessura da parede do tubo de 0,15 m), na vazão de 5.000 kg/h. Além disso, sabe-se que o coeficiente convectivo de troca térmica do solvente é de 1.630  $W/(m^2 \cdot K)$ , e sua capacidade calorífica é de 2,50 kJ/kg/K. Considerando todas as informações apresentadas, a pergunta que o cliente fez a você foi se este trocador de calor é adequado para uma vazão de solvente de 8.000 kg/h, pois a empresa deseja ampliar a quantidade de placas metálicas produzidas e necessitará de mais fluido de limpeza (solvente). Dada essa vazão, a temperatura final do solvente estará próxima da desejada de 70  $^{\circ}$ C? E se o escoamento fosse em contracorrente, melhoraria a eficiência de troca térmica?

Nesta seção, você aprenderá sobre os mecanismos de condensação, a condensação sobre superfícies com diferentes geometrias, sobre trocadores de calor e sua análise através do método da efetividade-NUT. Com esses conteúdos, você saberá desvendar o "mistério" da temperatura final do solvente ao deixar o trocador de calor que a empresa pretende adquirir, podendo recomendar ou não a compra dele.

# Não pode faltar

#### Condensação

Em muitos processos de transferência de calor, ocorre a mudança de fase: um líquido se transforma em vapor (ebulição, sobre a qual vocêjá aprendeu) ou um vapor passa para a fase líquida (condensação).



**Exemplificando** 

Os processos de transferência de calor são mais complexos quando envolvem mudança de fase, havendo mais variáveis influentes que na convecção, como as propriedades do fluido que se modificam, o calor latente de vaporização e a tensão superficial.

Segundo Bergman et al. (2014), a condensação ocorre quando a temperatura de um vapor é reduzida a valores inferiores ao de sua temperatura de saturação. Ela pode ocorrer de várias maneiras, das quais descreveremos duas a seguir:

Os vários tipos de condensação estão ilustrados na Figura 3.11. Além da condensação sobre superfícies sólidas (3.11a e 3.11b) que será estudada nesta seção, há outros dois tipos (3.11c e 3.11d).

Figura 3.11 | Tipos de condensação: em filme (a), em gotas (b), por névoa (c) e por contato direto (d)



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 429).

A condensação por névoa (Figura 3.11c) também é conhecida como homogênea. Nela, as gotículas formadas pela condensação do vapor ficam suspensas na fase gasosa.

- Por filme: neste tipo de condensação, vapor saturado entra em contato com uma superfície fria ( $T_s < T_{sat}$  do vapor), formando uma película (filme) de condensado. Esse filme se movimenta em regime laminar e pode-se admitir que nele ocorre apenas condução. Nesse caso, o fluxo de calor é dependente da espessura do filme ( $\delta$ ). Segundo Bergman et al. (2014), esse tipo de condensação é característico de superfícies limpas e sem contaminação.
- Por gotas: ocorre quando o condensado não consegue molhar totalmente a superfície. As gotas formadas desprendem-se da superfície, seja pelo atrito ou pela gravidade, e outras surgem. De acordo com Bergman et al. (2014), elas se formam em rachaduras e pequenas cavidades.

Um filme de condensado poderia atuar como um isolante térmico? Considerando isso, qual dos dois tipos de condensação possui maior eficiência na troca térmica?

Reflita

Na prática, a condensação geralmente ocorre por filme. Entretanto, a condensação por gotas expõe a superfície fria ao vapor, promovendo maiores taxas de transferência de calor, de maneira que, mesmo a condensação por gotas sendo a modalidade preferida, ela não é a mais comum, por ser difícil de ser sustentada, já que as superfícies ficam molhadas depois de serem expostas a vapor condensado por um tempo.

Portanto, como não podemos definir a condensação desejada, o que ocorre é um misto desses dois tipos, sendo a taxa de condensação ( $\dot{m}$ ) dada pela equação a seguir, na qual a diferença de temperatura é entre a de saturação e a da superfície.

$$\dot{m} = \frac{q}{\dot{h_{fg}}} = \frac{h_L A \Delta T}{\dot{h_{fg}}}$$

Para condensação em filme laminar, o coeficiente convectivo é matematicamente definido como mostrado a seguir, sendo C igual a 0,943 para placas verticais ou tubos com raio muito maior que a espessura do filme, 0,729 para tubos horizontais e 0,826 para esferas. No caso de sistemas <u>radi</u>ais, a dimensão característica é D em vez de L, tratando-se de  $\overline{Nu_{D}}$ .

$$\overline{Nu_{L}} = \frac{\overline{h_{L}} \cdot L}{k_{\ell}} = C \left( \frac{g \rho_{\ell} (\rho_{\ell} - \rho_{v}) h_{fg}^{'} L^{3}}{\mu_{\ell} k_{\ell} \Delta T} \right)^{1/4}$$

Os valores de  $\rho_{\ell}$ ,  $k_{\ell} \in \mu_{\ell}$  são para o fluido condensado, na temperatura do filme, e  $\rho_{v} \in h_{fg}$  estimados a  $T_{sat}$ . E o calor latente modificado, em termos do número de Jakob, é dado por:

# $\dot{h_{fg}} = h_{fg}(1+0,68Ja)$

Para ilustrar, as propriedades da água saturada são apresentadas na Tabela 3.5.

<i>T<sub>sat</sub></i> (°C)	<b>P<sub>sat</sub></b> (kPa)	$ ho_\ell$ (kg/m³)	$ ho_{ m v}$ (kg/m $^{ m 3}$ )	<b>h<sub>fg</sub></b> (kJ/kg)	<b>С<sub>р, ℓ</sub></b> (J/kg/K)	<b>k</b> <sub>l</sub> (W/m/K)	$\mu_\ell$ (kg/m/s)	$\mu_{ m v}$ (kg/m/s)
50	12,35	988,1	0,0831	2383	4181	0,644	0,000547	1,062.10-5
55	15,76	985,2	0,1045	2371	4183	0,649	0,000504	1,077.10-5
60	19,94	983,3	0,1304	2359	4185	0,654	0,000467	1,093·10 <sup>-5</sup>
65	25,03	980,4	0,1614	2346	4187	0,659	0,000433	1,110.10-5
70	31,19	977,5	0,1983	2334	4190	0,663	0,000404	1,126.10-5
75	38,58	974,7	0,2421	2321	4193	0,667	0,000378	1,142.10-5
80	47,39	971,8	0,2935	2309	4197	0,670	0,000355	1,159.10-5
85	57,83	968,1	0,3536	2296	4201	0,673	0,000333	1,176.10-5
90	70,14	965,3	0,4235	2283	4206	0,675	0,000315	1,193.10-5
95	84,55	961,5	0,5045	2270	4212	0,677	0,000297	1,210.10-5
100	101,33	957,9	0,5978	2257	4217	0,679	0,000282	1,227.10-5

Tabela 3.5 | Propriedades da água saturada

Fonte: Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 878).

Tratando-se de placas inclinadas, g deve ser substituído por  $g \cdot \cos(\theta)$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre a vertical e a superfície, o qual deve ser diferente de  $\pi/2$ .

**Q** Pesquise mais

Por vezes, aletas são adicionadas a tubos horizontais, melhorando as taxas de transferência de calor. Para avaliar essa melhoria, existem correlações conforme apresentado por Bergman et al. Nas páginas 435-437 do capítulo 10, *Ebulição e condensação*, no livro:

BERGMAN, T. L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.

Nessa referência, você verá também como avaliar o coeficiente convectivo para o caso de tubos horizontais sem aletas e verticalmente enfileirados.

Segundo Holman (1983), o regime turbulento pode ocorrer quando a placa sobre a qual ocorre a condensação é suficientemente longa ou existe uma quantidade suficiente de condensado, o que resulta em taxas mais elevadas de transferência de calor. Para definir o regime de escoamento, tem-se o número de Reynolds da película, sendo L a altura da placa:

$$\mathsf{Re}_{\delta} = \frac{4\overline{h_L}L(T_{sat} - T_s)}{h_{fg}\mu_{\ell}}$$

Tratando-se de um parâmetro importante na condensação, pode-se definir um adimensional, o número de condensação (Co), para  $\rho_{\ell} \gg \rho_{\rm v}$ :

$$\boldsymbol{Co} = \frac{\overline{\boldsymbol{h}_L}}{\boldsymbol{k}_\ell} \left( \frac{\mu_\ell^2}{\rho_\ell^2 \boldsymbol{g}} \right)^{1/3}$$

Esse número é utilizado com o objetivo de se ter o coeficiente de transferência de calor diretamente em função de Re, como apresentado na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 | Número de condensação em função do número de Reynolds para diferentes condições de escoamento

Número de condensação	Validade da equação						
$Co = 1,47  \mathrm{Re}_{\delta}^{-1/3}$	$ extsf{Re}_{\delta} \leq 30$ (filme é laminar e sem ondulações)						
$Co = \frac{Re_{\delta}}{1,08Re_{\delta}^{1/2} - 5,2}$	<b>30≤Re<sub>ð</sub>≤1.800</b> (há formação de ondulações na superfície do filme condensado)						

$Co = 0,0077 \operatorname{Re}_{\delta}^{0,4}$	${f Re}_{\delta}$ > 1.800 (escoamento turbulento, abordagem simplificada)
$Co = \frac{\text{Re}_{\delta}}{8.750 + 58 \text{Pr}^{-0.5}(\text{Re}_{\delta}^{0.75} - 253)}$	${\sf Re}_\delta$ > 1.800 (escoamento turbulento)

Fonte: adaptada de Holman (1983, p. 467-468); Çengel, Ghajar; Kanoglu (2012, p. 603-604).

Quando as dimensões do canal de escoamento apresentam restrições ao fluxo do fluido, trata-se de condensação no interior de tubos horizontais, como ocorre nos sistemas de condicionamento de ar. Nesse caso, tem-se as correlações empíricas apresentadas a seguir:

A primeira, para altas velocidades de vapor, é  $\overline{Nu_D} = 0,026 \operatorname{Pr}_{\ell}^{1/3} \operatorname{Re}_{m}^{0,8}$ , válida para  $\operatorname{Re}_{v} = DG_{v} / \mu_{v} > 20.000$  $\operatorname{Re}_{m} = \frac{D}{\mu_{\ell}} \left[ G_{\ell} + G_{v} \left( \frac{\rho_{\ell}}{\rho_{v}} \right)^{1/2} \right]$ 

e  $\mathbf{Re}_{\ell} = DG_{\ell} / \mu_{\ell} > 5.000$ , em que é o número de Reynolds da mistura e G, a vazão mássica por unidade de área.

Já a segunda correlação, para vazões mais baixas, é  $\mathbf{Re}_{v} = DG_{v} / \mu_{v} < 35.000$ , avaliado nas condições de entrada do tubo, sendo  $h'_{fa} = h_{fa} + 0,375c_{p,\ell}\Delta T$ :

$$\overline{Nu_{D}} = 0,555 \left( \frac{g \rho_{\ell} (\rho_{\ell} - \rho_{v}) \dot{h_{fg}} L^{3}}{\mu_{\ell} k_{\ell} \Delta T} \right)^{1/4}$$

Já a condensação em gotas, segundo Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012), é um dos mecanismos de transferência de calor mais eficazes, podendo ser obtidos coeficientes de transferência de calor 10 vezes superiores aos obtidos por condensação em película (ou filme). Isso é relevante, desde que o material da superfície de condensação seja bom condutor e não haja grande resistência térmica do outro lado da superfície. Dentre as superfícies sólido-fluido estudadas, destacase cobre-vapor d'água, sendo o valor médio do calor latente ( $\overline{h}_{cg}$ ) igual a 255.310 W/(m<sup>2</sup> · K) para  $T_{sat}$  superior a 100 °C. Para  $T_{sat}$  entre 22 e 100 °C, tem-se a equação a seguir, sendo  $\overline{h}_{cg}$  em W/(m<sup>2</sup> · K) e  $T_{sat}$  em °C :

$$\overline{h}_{cg} = 51.104 + 2044 \cdot T_{sat}$$

#### Trocadores de calor

As mudanças de fase, condensação e ebulição, assim como as trocas térmicas em que não há mudança de fase, podem ocorrer em equipamentos denominados trocadores de calor. Nesses equipamentos, ocorre a transferência de calor entre fluidos de diferentes temperaturas separados por um meio sólido, que evita a mistura de ambos, possuindo diversas aplicações na indústria. Conhecer o desempenho desses equipamentos em determinadas condições de operação, assim como projetá-los, são habilidades importantes.

Os trocadores de calor podem ser classificados com base em: troca térmica direta ou indireta; número de correntes; contato entre as correntes; razão entre a área de troca térmica e o volume (quando esse valor é alto, tem-se um trocador compacto); mecanismos de transferência de calor; utilização como aquecedor ou refrigerador; construção; disposição das correntes, sendo os dois últimos critérios os mais utilizados. Quanto à construção, os trocadores de calor podem ser de placas, aletados, bitubulares ou casco e tubo. Já em relação à disposição das correntes, temos trocadores com correntes em paralelo, contracorrentes ou escoamento cruzado.

### Exemplificando

No escoamento em paralelo, as correntes quente e fria circulam no mesmo sentido (Figura 3.12a), já em contracorrente elas se movem em sentidos opostos (Figura 3.12b), enquanto que no escoamento cruzado um fluido escoa perpendicularmente ao outro (Figura 3.12c). Além disso há o tipo mais simples de trocador de calor, bitubular, que consiste em dois tubos concêntricos de diâmetros diferentes (Figura 3.12a e 3.12b), o trocador de placas (Figura 3.12c) e o mais usado industrialmente, que é o casco e tubo (Figura 3.12d).

Figura 3.12 | Trocadores de calor com escoamento em paralelo (a), contracorrente (b) e cruzado (c); trocador de calor do tipo casco e tubo (d)



Ademais, alguns trocadores de calor possuem nomes específicos, de acordo com a aplicação, tal como o condensador, que é usado para resfriar um dos fluidos que condensa ao escoar. Já o evaporador é usado para aquecer um dos fluidos que vaporiza.

No cálculo de trocadores de calor, um parâmetro importante é o coeficiente global de troca térmica (U), o qual está relacionado à resistência térmica total à transferência de calor entre dois fluidos de diferentes temperaturas, como mostrado a seguir, sendo  $A_s$  a área superficial. Tratando-se de um coeficiente de proporcionalidade entre o fluxo de calor transferido (q") e a força motriz dessa transferência, que é a diferença de temperatura entre os fluidos ( $\Delta T$ ), temos que esse coeficiente leva em consideração as resistências condutivas e convectivas entre os fluidos separados por paredes compostas planas e cilíndricas.

$$\frac{1}{UA_{\rm s}} = \frac{1}{h_iA_i} + \frac{1}{h_eA_e} + \frac{R_{f,i}}{A_i} + \frac{R_{f,e}}{A_e} + \frac{\ln(D_e/D_i)}{2\pi kL}$$

Nessa equação, os coeficientes convectivos de troca térmica, dentro (subscrito i) e fora (subscrito e) do tubo, são determinados por correlações (convecção forçada interna e externa), como visto anteriormente.

Nota-se que esse coeficiente global considera, além da convecção em cada fluido, a resistência causada por deposição

nas paredes do trocador de calor, representada pelo fator de incrustação  $R_f$ , e a resistência condutiva da superfície sólida que separa os fluidos ( $[\ln(D_e / D_i)] / 2\pi kL$ , característica de trocadores do tipo tubo duplo).

Assim a taxa de transferência de calor (q), com base no coeficiente global de troca térmica, é dada pela equação a seguir, que é obtida considerando o balanço de energia dos fluidos quente (q) e frio (f):

# $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}_{s}\Delta \boldsymbol{T}_{m} = \dot{\boldsymbol{m}}_{q}\boldsymbol{c}_{p,q}\left(\boldsymbol{T}_{q,e} - \boldsymbol{T}_{q,s}\right) = \dot{\boldsymbol{m}}_{f}\boldsymbol{c}_{p,f}\left(\boldsymbol{T}_{f,s} - \boldsymbol{T}_{f,e}\right)$

Na qual  $\Delta T_m$  é uma média apropriada de diferença de temperaturas. Utilizaremos a média logarítmica das diferenças de temperatura, que será definida mais adiante.

No entanto, no caso de condensadores e evaporadores, quando um dos fluidos muda de fase, como a temperatura permanece constante, a taxa de transferência de calor é dada por:

# $q = \dot{m} \cdot h_{fg}$

O projeto de trocadores de calor consiste em relacionar a taxa de troca térmica com alguns parâmetros, tais como: área de troca, coeficiente global, temperaturas de entrada e saída das correntes, vazões mássicas. Um dos métodos utilizados na análise de trocadores de calor é o da efetividade-NUT, que é baseado no número de unidades de transferência. Tal método é adequado quando as temperaturas das correntes na saída são desconhecidas. Ou seja, deseja-se determinar as temperaturas de saída dos fluidos em determinado trocador de calor.

Para calcularmos a taxa de troca térmica por esse método, baseamo-nos no conceito de efetividade (  $\pmb{\varepsilon}$  ), que varia de 0 a 1.

$$\varepsilon \equiv \frac{q}{q_{maxima}}$$

E será preciso conhecer a máxima taxa de transferência de calor:

$$q_{\scriptscriptstyle m\! a imes ima} = C_{\scriptscriptstyle m\! inimo} \left( T_{\scriptscriptstyle q,e} - T_{\scriptscriptstyle f,e} 
ight)$$

Nela,  $C_{minimo}$  é o menor valor entre  $C_q = \dot{m}_q c_{p,q}$  e  $C_f = \dot{m}_f c_{p,f}$ , que representam as taxas de capacidade calorífica dos fluidos quente e frio, respectivamente. E, no caso de um fluido estar condensando ou fervendo, sua capacidade térmica é considerada infinita. Já a

razão entre as taxas de capacidades caloríficas mínima e máxima define um outro parâmetro:

$$C_{razão} = rac{C_{mínimo}}{C_{máximo}}$$

Essa razão também varia de 0 a 1, sendo igual a 0 quando a efetividade é 1 e igual a 1 para efetividade nula. Havendo mudança de fase,  $C_{máximo} \rightarrow \infty$ , fazendo com que a razão tenda a 0 e o comportamento do trocador independa da configuração de escoamento, se é em paralelo ou contracorrente.

Já o número de unidades de transferência (NUT) é um parâmetro adimensional muito utilizado na análise de trocadores de calor, uma vez que a efetividade é sempre função de NUT e  $C_{razão}$ . O NUT é a medida da área de transferência de calor, sendo tanto maior quanto maior for o trocador de calor, cuja definição é:

$$\mathsf{NUT} \equiv \frac{UA_{s}}{C_{minimo}}$$

De acordo com o tipo de escoamento, tem-se as equações apresentadas na Tabela 3.7 para cálculo da efetividade como função de NUT e  $C_{razão}$ .

Equação	Tipo de trocador de calor
$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-\text{NUT}\left(1 + C_{\text{nzdo}}\right)\right]}{1 + C_{\text{nzdo}}}$	Bitubular com escoamento em paralelo
$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-NUT\left(1 - C_{\mathit{razdo}}\right)\right]}{1 - C_{\mathit{razdo}}\exp\left[-NUT\left(1 - C_{\mathit{razdo}}\right)\right]}$	Bitubular com escoamento em contracorrente
$\varepsilon_{1} = 2 \left\{ 1 + C_{\text{razão}} + \left(1 + C_{\text{razão}}^{2}\right)^{1/2} \frac{1 + \exp\left[-\text{NUT}_{1}\left(1 + C_{\text{razão}}^{2}\right)^{1/2}\right]}{1 - \exp\left[-\text{NUT}_{1}\left(1 + C_{\text{razão}}^{2}\right)^{1/2}\right]} \right\}^{-1}$	Casco e tubo, com 1 passe no casco e 2, 4, passes nos tubos
$\varepsilon = \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 C_{razão}}{1 - \varepsilon_1} \right)^N - 1 \right] \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 C_{razão}}{1 - \varepsilon_1} \right)^N - C_{razão} \right]^{-1}$	
$\varepsilon = \varepsilon_{\rm máx} = 1 - \exp(-{\rm NUT})$	Evaporadores e condensadores

Tabela 3.7 | Relações para cálculo da efetividade de trocadores de calor

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 462).

No caso de trocadores de calor casco e tubo com N passes no casco, primeiro é preciso determinar o número de unidades de transferência correspondente a 1 passe no casco ( $NUT_1$ ) e sua efetividade equivalente ( $\varepsilon_1$ ).

# Pesquise mais

Outro método de projeto de trocadores de calor é o método das diferenças de temperaturas médias logarítmicas (MLDT), utilizado quando se conhece ou é fácil determinar os valores das temperaturas de entrada e saída das correntes. No caso de escoamento em paralelo, a diferença de temperatura média logarítmica ( $\Delta T_{ml}$ ) é dada pela primeira equação a seguir, enquanto que para escoamento em contracorrente utiliza-se a segunda:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_{q,e} - T_{f,e}) - (T_{q,s} - T_{f,s})}{\ln\left[\frac{(T_{q,e} - T_{f,e})}{(T_{q,s} - T_{f,s})}\right]}$$
  
$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_{q,e} - T_{f,s}) - (T_{q,s} - T_{f,e})}{(T_{q,s} - T_{f,e})}$$

$$\Delta T_{ml} = \frac{(I_{q,e} - I_{f,s}) - (I_{q,s} - I_{f,e})}{\ln\left[\frac{(T_{q,e} - T_{f,s})}{(T_{q,s} - T_{f,e})}\right]}$$

Para compreender melhor este método, consulte as páginas 62-74 do capítulo *Temperatura* em:

KERN, D. Q. **Processos de transmissão de calor.** Tradução A. M. Luiz. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1987. 671 p.

O método da efetividade-NUT é utilizado para cálculo de desempenho de trocadores de calor, a fim de determinar as temperaturas de entrada e saída de todos os fluidos, a partir de sua efetividade. Diferentemente, o método das diferenças de temperaturas médias logarítmicas (MLDT) é utilizado para projeto de trocadores de calor, sendo conhecidas as temperaturas de ambas as correntes, bem como as suas vazões. O intuito do projeto é, então, determinar a área da superfície de transferência de calor, a requerida para se atingir as temperaturas de saída fixadas em projeto.

# Sem medo de errar

Em seu trabalho, na empresa de consultoria de projetos de engenharia, o próximo projeto é analisar se um trocador de calor atende à necessidade da empresa fabricante de placas metálicas. Nesse equipamento, como fluido guente, será utilizado vapor d'água que advém saturado do evaporador a 0,904 bar. O objetivo é aquecer um solvente que eles utilizam na planta para limpeza das placas de 30 a 70 °C, cuja capacidade calorífica é 2,50 kJ/kg/K, com o calor liberado na condensação do vapor d'água. A empresa fez alguns orçamentos de equipamentos de troca térmica e encontraram boa oportunidade em um trocador bitubular, fabricado em alumínio, com 4 m de comprimento, o qual pretendem adquirir e utilizar com escoamento em paralelo. O solvente deve escoar na região anular, cujos diâmetros externo e interno são, respectivamente, 2,00 e 0,80 m, enguanto o vapor d'água escoará no interior do tubo de menor diâmetro (espessura da parede do tubo de 0,15 m), na vazão de 5.000 kg/h. Além disso, sabe-se que o coeficiente convectivo de troca térmica do solvente é de 1.630  $W/(m^2 \cdot K)$ . Considerando tais dados, a pergunta que o cliente fez a vocês é se este trocador de calor é adequado para uma vazão de solvente de 8.000 kg/h, que é a vazão necessária para atender ao aumento da produção de placas metálicas. Dada essa vazão, a temperatura final do solvente estará próxima da desejada de 70 °C?

O primeiro passo consiste em determinar o coeficiente global de troca térmica. Para isso, primeiramente será preciso calcular o coeficiente convectivo do fluido quente. Tratando-se de uma condensação no interior de tubo, precisaremos determinar o número de Reynolds para saber qual equação deve ser utilizada.

Na pressão de 0,904 bar, que equivale a 90,4 kPa, pela Tabela 3.5, a temperatura de saturação correspondente é 96,74  $^{\circ}C$ .

A temperatura do filme, considerando a temperatura de entrada da corrente fria, é de 63,37 °C  $\approx$  65 °C. Nessa temperatura, a viscosidade do vapor d'água é **1,216**·10<sup>-5</sup> Pa.s.

$$\operatorname{Re}_{\nu} = \frac{DG_{\nu}}{\mu_{\nu}} = \frac{0.80 \times (5.000 / 3.600) \times 4 / (\pi \cdot 0.80^{2})}{1.110 \cdot 10^{-5}} = 199.143 > 20.000$$
$$\operatorname{Re}_{\ell} = \frac{DG_{\ell}}{\mu_{\ell}} = \frac{0.80 \times (5.000 / 3.600) \times 4 / (\pi \cdot 0.80^{2})}{0.000433} = 5.105 > 5.000$$

Para tais valores de Reynolds, devem ser utilizadas as seguintes equações:

$$\operatorname{Re}_{m} = \frac{D}{\mu_{\ell}} \left[ G_{\ell} + G_{\nu} \left( \frac{\rho_{\ell}}{\rho_{\nu}} \right)^{1/2} \right] = \operatorname{Re}_{\ell} + \operatorname{Re}_{\nu} \left( \frac{\rho_{\ell}}{\rho_{\nu}} \right)^{1/2} = 5.105 + 199.143 \left( \frac{980,4}{0,1614} \right)^{1/2} = 1,55 \cdot 10^{7}$$
$$\overline{Nu_{D}} = 0,026 \left( \frac{0,000433 \times 4.187}{0,659} \right)^{1/3} (1,55 \cdot 10^{7})^{0.8} = 20.594$$
$$\overline{h_{D}} = \frac{Nu_{D} \cdot k_{\ell}}{D} = \frac{20.594 \cdot 0,659}{0,80} = 16.964 \quad \operatorname{W/(m^{2} \cdot K)}$$

Para cálculo do coeficiente global de troca térmica, para  $R_f = 0$ , já que o trocador é novo e não possui incrustações, tem-se:

$$\frac{1}{UA_s} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{1}{h_e A_e} + \frac{\ln(D_e / D_i)}{2\pi kL}$$

$$\frac{1}{UA_s} = \frac{1}{16.964 \times \pi \cdot 0.80^2 / 4} + \frac{1}{1.630 \times \pi \cdot 0.95^2 / 4} + \frac{\ln(0.95 / 0.80)}{2\pi 237 \times 4}$$

$$\frac{1}{UA_s} = 0.000117 + 0.000866 + 0.0000289 = 0.0010119 \text{ K/W}$$

$$U = \frac{1}{0.0010119 \pi 0.95^2 / 4} = 1.394 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K})$$

Com o valor de U e A, pode-se calcular o número de unidade de transferência. Como um dos fluidos passa por condensação, ele corresponde ao  $C_{máximo}$ , de modo que  $C_{mínimo}$  é do fluido frio e é igual a 2,50 x 8.000/3.600 = 5,56 kW/K.

Assim, NUT é calculado por:

$$NUT = \frac{UA_s}{C_{minimo}} = \frac{(1/0,0010119)}{5,56 \cdot 10^3} = 0,178$$

E, de acordo com a Tabela 3.7, a eficiência é calculada por:  $\varepsilon = \varepsilon_{máx} = 1 - \exp(-NUT) = 0,163$ 

A taxa máxima de transferência de calor é calculada por:

 $q_{maxima} = C_{minimo} (T_{q,e} - T_{f,e}) = 5,56 \cdot 10^3 (96,74 - 30) = 371 \text{ kW}.$ E a taxa de calor trocado é:

$$q = \varepsilon \cdot q_{\text{máxima}} = 0,163 \times 371 = 60,5 \text{ kW}.$$

Assim, a temperatura de saída do fluido frio é:

$$q = C_{minimo}(T_{f,s} - 30) \rightarrow T_{f,s} = \frac{60,5}{5,56} + 30 = 40,9$$

Ou seja, esse trocador operando com escoamento paralelo não é suficiente para aquecer o solvente até a temperatura desejada de 70 **°C**. Entretanto, alterar o escoamento para contracorrente não alteraria essa temperatura final do solvente, pois, como há mudança de fase, a efetividade independe do tipo de escoamento.

Portanto, analisando esse processo convectivo com mudança de fase, nota-se que, apesar de a quantidade de calor liberada na condensação ser alta, se a efetividade do equipamento for baixa, a taxa de calor efetivamente trocada é baixa.

Desse modo, temos que a empresa precisa adquirir outro trocador de calor, e não esse. Apesar de parecer ser um bom negócio, ele não atende à demanda da fabricante de placas metálicas.

## Avançando na prática

#### Eficiência de um condensador

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa fabricante de cosméticos precisa testar a estabilidade térmica da glicerina, a qual é matéria-prima para seus sabonetes, antes de utilizá-la. Para isso, a corrente de glicerina será aquecida em um trocador de calor, e suas propriedades serão avaliadas. Será utilizado um condensador para aquecer uma vazão de 0,85 kg/s de glicerina ( $c_p = 2319$ J/kg/K) que entra no equipamento a 25 °C. Sabe-se que a área de troca térmica é de 3 m<sup>2</sup>, que o vapor está saturado à pressão atmosférica e que o coeficiente global de troca térmica é de 1.310 W/(m<sup>2</sup>·K). Nessas condições, deseja-se saber a taxa de condensação e a temperatura de saída da glicerina, pois o adequado, nessa avaliação de estabilidade térmica da matériaprima, é que a glicerina atinja em torno de 95 °C.

#### Resolução da situação-problema

Tratando-se de um condensador, a taxa de capacidade calorífica do vapor tende a infinito, sendo, portanto,

o  $\mathbf{C}_{\textit{máximo}}$ . O  $\mathbf{C}_{\textit{mínimo}}$  é do fluido frio, sendo igual a 2.319 x 0,85 = 1.971 W/K.

Já o número de unidades de transferência é:

$$NUT = \frac{UA_s}{C_{minimo}} = \frac{1.310 \times 3}{1.971} = 1,99$$

E a eficiência do condensador é:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max} = 1 - \exp(-1,99) = 0,863$$

A taxa máxima de transferência de calor é calculada pela equação:

$$q_{maxima} = C_{minimo} \left( T_{q,e} - T_{f,e} \right) = 1.971(100 - 25) = 147.825 \text{ W}.$$

E a taxa de calor trocado é dada pela equação:

$$q = \varepsilon \cdot q_{\text{máxima}} = 0,863 \times 148 = 128 \text{ kW}.$$

Assim, a temperatura de saída do fluido frio é:

$$q = C_{minimo}(T_{f,s} - 25) \rightarrow T_{f,s} = \frac{128}{1.971} + 25 = 90$$
 °C.

E a taxa de condensação é dada por:

$$q = \dot{m}_v h_{fg} \rightarrow \dot{m}_v = \frac{128}{2,257} = 56,7 \text{ kg/s}.$$

Portanto, a temperatura de saída da glicerina está próxima do valor desejado de 95 °C (5,3 % inferior), garantindo a matériaprima em condições para ser avaliada sua estabilidade térmica. Para isso será necessária uma vazão de vapor relativamente alta, de 56,7 kg/s, se comparada à de glicerina (0,85 kg/s).

#### Faça valer a pena

**1.** O coeficiente convectivo de condensação pode ser obtido por correlações matemáticas, permitindo assim quantificar a taxa de condensação que ocorre no condensador. Para exemplificar como isso é feito, considere vapor d'água a 80 °C, condensando-se sobre um tubo horizontal a 50 °C com D = 0,0381 m. Neste caso, a correlação a seguir é válida, e os dados da água constam na Tabela 3.5:

$$\overline{Nu_{D}} = \frac{\overline{h_{L}} \cdot D}{k_{\ell}} = 0,729 \left(\frac{g\rho_{\ell}(\rho_{\ell} - \rho_{v})\dot{h_{fg}}D^{3}}{\mu_{\ell}k_{\ell}\Delta T}\right)^{1/4}$$

<i>T<sub>sat</sub></i> (°C)	<b>P<sub>sat</sub></b> (kPa)	$ ho_\ell$ (kg/m³)	$ ho_{ m v}$ (kg/m³)	<b>h<sub>fg</sub></b> (kJ/kg)	<b>C <sub>p, l</sub></b> (J/kg/K)	<b>k</b> <sub>l</sub> (W/m/K)	$\mu_\ell$ (kg/m/s)	$\mu_{ m v}$ (kg/m/s)
50	12,35	988,1	0,0831	2383	4181	0,644	0,000547	1,062.10-5
55	15,76	985,2	0,1045	2371	4183	0,649	0,000504	1,077.10-5
60	19,94	983,3	0,1304	2359	4185	0,654	0,000467	1,093.10-5
65	25,03	980,4	0,1614	2346	4187	0,659	0,000433	1,110.10-5
70	31,19	977,5	0,1983	2334	4190	0,663	0,000404	1,126.10-5
75	38,58	974,7	0,2421	2321	4193	0,667	0,000378	1,142.10-5
80	47,39	971,8	0,2935	2309	4197	0,670	0,000355	1,159.10-5
85	57,83	968,1	0,3536	2296	4201	0,673	0,000333	1,176.10-5
90	70,14	965,3	0,4235	2283	4206	0,675	0,000315	1,193·10 <sup>-5</sup>
95	84,55	961,5	0,5045	2270	4212	0,677	0,000297	1,210.10-5
100	101,33	957,9	0,5978	2257	4217	0,679	0,000282	1,227.10-5

Tabela 3.5 | Propriedades da água saturada

Fonte: Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 878).

Se o tubo possui 1 m de comprimento, qual é o tempo necessário para condensar 100 kg de vapor d'água?

- a) 2h23min.
- b) 33,7 min.
- c) 48,5 min.
- d) 4,26 h.
- e) 71,32 min.

**2.** Considere vapor d'água à 70,14 kPa condensando sobre uma placa vertical quadrada, com dimensão de 1,5 m, mantida a 60  $^{\circ}C$ . As propriedades da água saturada são como apresentadas na Tabela 3.5.

<i>T<sub>sat</sub></i> (°C)	<b>P<sub>sat</sub></b> (kPa)	$ ho_\ell$ (kg/m³)	$ ho_{ m v}$ (kg/m $^{ m 3}$ )	<b>h<sub>fg</sub></b> (kJ/kg)	<b>C <sub>p, l</sub></b> (J/kg/K)	<b>k</b> <sub>l</sub> (W/m/K)	$\mu_\ell$ (kg/m/s)	$\mu_{ m v}$ (kg/m/s)
50	12,35	988,1	0,0831	2383	4181	0,644	0,000547	1,062.10-5
55	15,76	985,2	0,1045	2371	4183	0,649	0,000504	1,077·10-5

Tabela 3.5 | Propriedades da água saturada

60	19,94	983,3	0,1304	2359	4185	0,654	0,000467	1,093.10-5
65	25,03	980,4	0,1614	2346	4187	0,659	0,000433	1,110.10-5
70	31,19	977,5	0,1983	2334	4190	0,663	0,000404	1,126.10-5
75	38,58	974,7	0,2421	2321	4193	0,667	0,000378	1,142.10-5
80	47,39	971,8	0,2935	2309	4197	0,670	0,000355	1,159·10 <sup>-5</sup>
85	57,83	968,1	0,3536	2296	4201	0,673	0,000333	1,176.10-5
90	70,14	965,3	0,4235	2283	4206	0,675	0,000315	1,193.10-5
95	84,55	961,5	0,5045	2270	4212	0,677	0,000297	1,210.10-5
100	101,33	957,9	0,5978	2257	4217	0,679	0,000282	1,227.10-5

Fonte: Çengel; Ghajar; Kanoglu (2012, p. 878).

Nesse caso, você precisará determinar o regime de escoamento para obter o valor correto do coeficiente convectivo.

Assinale a alternativa que apresenta o regime de escoamento e as taxas de transferência de calor e de condensação, respectivamente.

a) Laminar sem ondulações, 125 kW, 0,512 kg/s.

- b) Laminar com ondulações, 246 kg/s, 198 kW.
- c) Laminar com ondulações, 383 kW, 0,162 kg/s.
- d) Turbulento, 172 kW/s, 4,35 kg/s.
- e) Turbulento sem ondulações, 811 J/s, 0,790 kW.

**3.** Utiliza-se um trocador de calor para aquecer determinado óleo de 30 para 90 °C, sendo o fluido quente vapor d'água saturado à pressão atmosférica. Será utilizado um trocador de calor bitubular de cobre (k = 400 W/m/K) com 1 m de comprimento, diâmetro interno de ½" e externo de 0,72", sem incrustação. Sabe-se que o coeficiente convectivo de troca térmica do vapor d'água, que circula na região anular, é de 10 kW/m<sup>2</sup>/K. Além disso, o óleo (fluxo de 250 kg/m<sup>2</sup>/s) em sua temperatura média, possui k = 0,140 W/m/K, densidade de 800 kg/m<sup>3</sup>, viscosidade de 0,0300 Pa.s e calor específico de 1,90 kJ/kg/K. E, no caso de escoamento laminar nos tubos, sabe-se que Nu = 3,66.

Assumindo que não há incrustação na tubulação, calcule o coeficiente global de troca térmica.

a) 150 *W / m<sup>2</sup> / K*. b) 5,7 k*W / m<sup>2</sup> / K*. c) 0,382 k*W / m<sup>2</sup> / K*. d) 27,8 *W / m<sup>2</sup> / K*. e) 11,6 *W / m<sup>2</sup> / K*.

# Referências

ARAÚJO, C. Transmissão de calor. Rio de Janeiro: LTC, 1978. 390 p.

BERGMAN, T. L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.

ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, J. A.; KANOGLU, M. **Transferência de calor e massa.** 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

HOLMAN, J. P. **Transferência de calor.** Tradução: L. F. Milanez; revisão técnica: J. M. S. Jabardo. São Paulo: McGraw-Hill, 1983. 484 p.

KERN, D. Q. **Processos de transmissão de calor.** Tradução A. M. Luiz. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1987. 671 p.

WELTY, J. R.; RORRER, G. L.; FOSTER, D. G. **Fundamentos de transferência de momento, de calor e de massa.** Tradução e revisão técnica Verônica Calado. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 716 p.
# **Unidade 4**

# Radiação de calor e transferência de massa

#### Convite ao estudo

As mudanças climáticas em muito têm preocupado a todos. Nesse contexto, fala-se em reduzir o consumo de combustíveis fósseis, já que a combustão destes causa diversos efeitos colaterais indesejáveis. Diante desse cenário, um conceito importantíssimo é o de radiação, não só para compreender por que a combustão dos combustíveis fósseis é danosa, como também para pensar em alternativas, utilizando o sol como fonte de energia. Ainda sobre o clima, muitos dos fenômenos que observamos envolvem processos de transferência de massa, como a secagem dos rios. Enquanto a radiação é um relevante processo de transferência de calor – que pode ser observado na garrafa térmica, em fornos industriais, na coleta de energia solar e no fenômeno do efeito estufa -, a transferência de massa por difusão ocorre em diversas aplicações de nosso dia a dia e nas indústrias: ao adicionar sal em um copo de água, ao secar leite para produzir leite em pó, ao retirar umidade de rações e em reações catalíticas heterogêneas.

Nesta unidade de ensino, você irá conhecer e compreender os processos de transferência de calor por radiação e de massa por difusão. Ao tomar contato com os conceitos fundamentais da radiação, saberá identificar e analisar situações em que ocorre a radiação de calor. Além disso, serão apresentados os princípios da transferência de massa por difusão, permitindo que você identifique e analise esse mecanismo de transferência de massa.

Para colocar em prática os conceitos desta unidade de ensino, imagine que você foi contratado para trabalhar em uma empresa que desenvolve soluções energéticas com base no aproveitamento e na aplicação de energia solar. O primeiro desafio apresentado pelo seu gestor foi o de analisar o desempenho de um coletor solar novo que está sendo testado. Antes eram utilizados coletores do mesmo material (alumínio), mas com uma cobertura diferente, e foi proposta uma substituição da cobertura de óxido de cobalto preto. A questão é: essa mudança de fato representa uma melhoria significativa? Para saber isso, seu gestor perguntou a você: gual será a eficiência desse coletor em converter radiação solar em calor útil? Além desse caso, a empresa quer analisar um aquecedor de água, em que a temperatura da superfície plana está oscilando, o que prejudica a manutenção da temperatura da água. Se a temperatura fosse mantida a 600 K, o processo de aquecimento seria mais estável e fácil de controlar. Qual taxa de calor deve ser fornecida para manter essa temperatura da superfície? Por fim, a empresa tem observado que tanques de armazenamento de água, mantidos a 333 K por guestões de preservar a qualidade da água, perdem lentamente esse líquido. Observaram que isso não era considerado anteriormente, e a primeira pergunta feita, para avaliar formas de conter essa perda, é: qual é a taxa com que isso ocorre? Quanto tempo levaria para perder toda a água armazenada?

Para solucionar essas questões, nesta unidade você aprenderá como a radiação térmica é gerada, sua natureza e o modo como interage com a matéria e também aprenderá a calcular a troca radiante entre duas ou mais superfícies. Além disso, aprenderá sobre a difusão como mecanismo de transferência de massa: os princípios que a governa.

# Seção 4.1

# Radiação: processos e propriedades

#### Diálogo aberto

Em seu entorno, tudo o que circunda você está emitindo radiação térmica: os móveis, as paredes, o chão, seus amigos e o sol. Diferentemente das outras formas de transmissão de calor já estudadas (condução e convecção), a radiação não exige a presença de matéria para ocorrer, podendo acontecer até mesmo no vácuo, de modo que todo corpo, em presença de outros com temperaturas diferentes, é capaz de emitir radiações eletromagnéticas, as quais quando absorvidas são convertidas em energia térmica. Tal fenômeno possibilita nossa existência, já que é por meio da radiação que o Sol aquece a Terra. Nos processos industriais, a radiação está presente em diversas operações, como de umidificação, de secagem, de resfriamento, de combustão, etc.

Na empresa em que você está trabalhando, voltada para soluções energéticas com base em energia solar, você foi alocado em um projeto de análise do desempenho de um coletor solar novo que está sendo testado. Anteriormente, eram utilizados coletores de alumínio coberto com uma chapa de óxido de cobalto preto e foi proposta uma superfície também de alumínio, mas com outra cobertura. A questão é avaliar se essa mudança de fato representa uma melhoria significativa. Nesse projeto, a nova placa é feita de alumínio, revestida com óxido de níquel preto, com absortividade solar de 0,92 e emissividade 0,08. A radiação solar incide na superfície, como ilustrado na Figura 4.1, a uma taxa de 800 W/m<sup>2</sup>.

Figura 4.1 | Placa de alumínio utilizada como coletora de radiação solar



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 711).

A temperatura do ar é de 300 K e a temperatura efetiva do céu é de 280 K. Já o coeficiente de transferência de calor por convecção é de 5  $W/(m^2 \cdot K)$ . Sabe-se que a temperatura da superfície absorvedora é de 360 K e, atrás dos tubos de água, há um isolamento. Como esse contexto pode ser ilustrado, incluindo as simbologias das variáveis importantes? Qual é o fluxo líquido de energia solar fornecida pelo coletor solar para a água que circula por trás dele? Além disso, seu gestor deseja saber a eficiência do coletor, pois com base neste parâmetro será ou não recomendada a fabricação dele em larga escala. A eficiência desse novo coletor deve ser comparada com a de outro até então fabricado, com a mesma placa de alumínio, porém coberta com uma chapa de óxido de cobalto preto, cuja absortividade é de 0,93 e a emissividade, de 0,30.

Para resolver este problema, você aprenderá os conceitos fundamentais de radiação, aprenderá a diferenciar as superfícies reais de um corpo negro e conhecerá tanto a lei de Kirchhoff para radiação quanto a radiação ambiental. São conceitos fundamentais na compreensão deste interessante mecanismo de troca térmica, que você terá oportunidade de aprender.

#### Não pode faltar

A radiação é uma forma de transferência de calor que é diferente substancialmente da condução e da convecção em um aspecto: para que aconteça, não precisa necessariamente existir um meio material. Segundo Bergman et al. (2014), "ela é relevante em muitos processos industriais de aquecimento, resfriamento e secagem, assim como em métodos de conversão de energia que envolvem a combustão de combustíveis fósseis e a radiação solar".

A radiação térmica, um dos tipos de radiação eletromagnética, é emitida por qualquer corpo em função de sua temperatura não nula. Essa emissão de radiação reduz a energia interna armazenada pelo corpo, causando seu resfriamento, até que atinja equilíbrio térmico com a vizinhança. Trata-se de um fenômeno ondulatório, assim como as ondas de rádio e os raios X (Figura 4.2), representando a propagação de ondas eletromagnéticas, ou também pode ser vista como a propagação de partículas conhecidas como fótons ou quanta.

Figura 4.2 | Comprimentos e frequências das ondas eletromagnéticas, com destaque para a luz visível



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 493).

Toda radiação eletromagnética, independentemente de sua energia, propaga-se com a velocidade da luz (c), que é o produto da frequência da onda eletromagnética  $\nu$  ( $g^{-1}$ ) pelo seu comprimento de onda  $\lambda$  (m), como mostrado a seguir. Tratando-se de propagação no vácuo,  $c = c_0 = 2,998 \cdot 10^8$  m/s.

Assim, menores comprimentos de onda correspondem a maiores frequências (Figura 4.2), e as radiações térmicas possuem  $\lambda$  entre 0,1 e 100  $\frac{1}{4}$ m, incluindo uma fração de UV e toda a faixa do visível (de 0,35 a 0,75  $\frac{1}{4}$ m) e do infravermelho.

A taxa de radiação emitida por uma superfície, em todos os comprimentos de onda e direções, por unidade de área superficial (E), é conhecida como poder emissivo. Já a irradiação (G) está relacionada à radiação que incide sobre a superfície por unidade de área superficial, em todos os comprimentos de onda e direções, da qual parte é refletida ( $G_{ref}$ ), parte é absorvida ( $G_{abs}$ ) e outra parte é transmitida ( $G_{rr}$ ), de maneira que:

$$G = G_{abs} + G_{tr} + G_{ref} \rightarrow \frac{G_{abs}}{G} + \frac{G_{tr}}{G} + \frac{G_{ref}}{G} = 1 \rightarrow \alpha + \rho + \tau = 1$$

Como mostra a Figura 4.3, a absortividade ( $\alpha$ ), a refletividade ( $\rho$ ) e a transmissividade ( $\tau$ ) são propriedades do corpo e funções de  $T_s$  e  $\lambda$ , além de dependerem da natureza do material da superfície e de seu acabamento, equação essa que é válida para materiais ditos semitransparentes.

Figura 4.3 | Absorção, reflexão e transmissão de radiação incidente em material semitransparente



Fonte: Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 704).



O somatório da absortividade, refletividade e transmissividade da superfície é sempre igual à unidade.

Ou, em vez de quantidades totais, em termos de comprimento de onda (em base espectral), a irradiação é absorvida, refletida e transmitida pela superfície, com magnitudes que dependem de  $\lambda$ , o que é válido para superfícies reais (não ideais):

$$m{G}_{\lambda} = m{G}_{\lambda,abs} + m{G}_{\lambda,tr} + m{G}_{\lambda,ref}$$
  
De modo que:

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) \cdot \mathbf{G}_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \mathbf{G}_\lambda(\lambda) d\lambda}$$

O que também é válido para refletividade e transmissividade.

Somente a parcela absorvida é capaz de alterar o estado térmico da superfície, já que, nesse caso, ocorre a conversão de energia radiante em energia térmica. Ademais, a transmissividade de materiais sólidos é quase sempre considerada nula, e essas superfícies são ditas opacas, exceto para materiais semitransparentes, tal como o vidro. A influência do comprimento de onda na absortividade e na refletividade de materiais opacos está apresentada na Figura 4.4.





Fonte: Bergman et al. (2014, p. 513).

A radiosidade (J) considera toda a energia radiante, deixando a superfície semitransparente, sendo:

$$J = E + G_{ref} + G_{tr}$$

Enquanto o fluxo radiante líquido que sai da superfície ( $q_{rad}$ ) é dado por:

 $\dot{q_{rad}} = J - G = E + G_{ref} + G_{tr} - (G_{ref} + G_{tr} + G_{abs}) = E - G_{abs}$ O corpo negro é definido como aquele que absorve toda a

energia incidente nele, independentemente do comprimento de onda, ou seja,  $\alpha = 1$  e  $\rho = 0$ , admitindo que a transmissividade também seja nula. Além disso, trata-se de um emissor perfeito, sendo um padrão de referência no estudo da radiação.

A intensidade de energia radiante do corpo negro (energia radiante por unidade de volume,  $U_n$ ), para um dado comprimento de onda, foi determinada por Planck (1959 apud BERGMAN et al., 2014):

$$I_{n\lambda} = \frac{2hc_0^2 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Ela é obtida a partir da termodinâmica estatística, sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann, igual a  $1,381 \cdot 10^{-23} J/K$ , h é a constante de Planck, cujo valor é  $6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ , e T é a temperatura absoluta do corpo negro, dada em K.

Os poderes emissivos de um corpo negro para um dado comprimento de onda (lei de Planck) e para todos os comprimentos de onda (lei de Stefan-Boltzmann) são, respectivamente:

$$E_{n\lambda} = I_{n\lambda}\pi = \frac{2\pi hc_0^2 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda k_B T}\right) - 1} = \frac{3,742 \cdot 10^{-16} \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{1,439 \cdot 10^{-2}}{\lambda T}\right) - 1}$$
$$E_n = \int_0^\infty E_{n\lambda} d\lambda = \sigma T^4$$

Sendo  $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>), a constante de Stefan-Boltzmann. Dessa forma, pela última equação apresentada, é possível calcular a radiação emitida por um corpo negro em todas as direções e ao longo de todos os comprimentos de onda, bastando para isso conhecer sua temperatura absoluta.

Derivando a equação do poder emissivo para um dado comprimento de onda em relação a  $\lambda$ , e igualando a expressão obtida a zero, tem-se o comprimento de onda que produz a emissão máxima  $\lambda_m$ , como mostra a equação a seguir, conhecida como lei do deslocamento de Wien.

#### $\lambda_m T \cong 2898$ ¼m

O sol é considerado um emissor ideal, ou seja, um corpo negro, com emissão máxima no comprimento de onda igual 0,5 ¼m, para uma temperatura de 5.800 K.

A máxima energia emitida por um corpo negro a 1.500 K ocorre no comprimento de onda:

## $\lambda_m \cong$ 2.898 / T = 2.898 / 1.500 = 1,93 $\,$ ¼ m

A energia emitida nesse comprimento de onda é igual a:

Exemplificando

$$E_{n\lambda} = \frac{3,742 \cdot 10^{-16} (1,93 \cdot 10^{-6})^{-5}}{\exp\left(\frac{1,439 \cdot 10^{-2}}{1,93 \cdot 10^{-6} \cdot 1500}\right) - 1} = 9,76 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^3.$$

Considerando, além desse valor de temperatura, outros dois, 1.200 K e 1.800 K, pode-se obter a Figura 4.5.

Figura 4.5 | Energia emitida por um corpo negro para diferentes temperaturas, em função do comprimento de onda



Fonte: elaborada pela autora.

Pela Figura 4.2, o comprimento de onda da luz visível é entre 0,35 e 0,75  $\frac{1}{4}$ m. Combinando essa informação com os perfis observados na Figura 4.5, tem-se que:

• Quanto maior a temperatura, mais brilhante será o corpo, porque emitirá mais energia.

• Com o aumento da T, o comprimento de onda que produz a emissão máxima diminui.

• O corpo emite na faixa do visível comprimentos de onda maiores para menores temperaturas.

Quanto maior é a temperatura, menor é o comprimento de onda em que ocorre a intensidade máxima da radiação, podendo recair no

**Pesquise mais** 

espectro do visível. Para temperaturas menores tem-se uma coloração vermelho-escura, passando para vermelho brilhante, amarelo brilhante e, por fim, branco. Esse fenômeno tem aplicação industrial no campo da pirometria. Para saber mais sobre isso, assista ao vídeo:

ESCOLA DE TRATAMENTO TÉRMICO. Tratamento térmico: aula 7 de 10: pirometria: Telecurso 2000 Profissionalizante. Disponível em: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=TeqiHRkPM0Y">https://www.youtube.com/watch?v=TeqiHRkPM0Y</a>>. Acesso em: 29 jun. 2018. (Vídeo do Youtube)

Outra grandeza de grande importância é a fração de energia emitida por um corpo negro até um dado comprimento de onda, representada por  $F_{0\to\lambda}$ .

$$F_{0\to\lambda} \equiv \frac{E_{n,0\to\lambda}}{E_{n,0\to\infty}} = \frac{E_{n,0\to\lambda}}{E_n} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\lambda E_{n\lambda} d\lambda$$

Para uma dada temperatura, a fração correspondente ao intervalo entre 0 e  $\lambda$  é determinada pela razão entre a área sombreada e a área total sob a curva da Figura 4.6(a). Essa fração é função apenas do produto de  $\lambda$  por T, podendo ser obtida por meio da Figura 4.6(b).

Figura 4.6 | Emissão em uma banda para um corpo negro: (a) radiação emitida entre 0 e  $\lambda$ ; e (b) fração da emissão total em função de  $\lambda T$ 



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 501-502).

E a fração de energia radiante emitida por um corpo negro entre dois comprimentos de onda, como pode ser obtida?

Reflita

Tendo o corpo negro como uma referência para descrever a emissão de uma superfície real, define-se a emissividade global de uma superfície ( $\varepsilon$ ):

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{E_n}$$

A emissividade global de uma superfície é a relação entre a taxa de energia por ela emitida e a taxa de energia emitida por um corpo negro de igual geometria à mesma temperatura.

Assimile

Segundo Bergman et al. (2014), os diferentes valores de emissividade consideram um dado comprimento de onda ou determinada direção, ou então médias integradas ao longo de comprimentos de onda e direções. A emissividade global considera todos os comprimentos de onda em todas as direções e é uma função do material e da temperatura, como mostra a Figura 4.7(a).

Como acontece com a absortividade, a refletividade e a transmissividade, a emissividade varia com o comprimento de onda, e nesse caso a emissividade monocromática ou espectral –  $\varepsilon_{\lambda}$ , Figura 4.7(b) – é dada por:

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{E_{n\lambda}}$$

De modo que:

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}_n = \varepsilon \int_0^\infty \boldsymbol{E}_{n\lambda} \boldsymbol{d}\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \boldsymbol{E}_{n\lambda} \boldsymbol{d}\lambda$$

Figura 4.7 | Emissividade de alguns materiais: (a) global; e (b) espectral





Fonte: Bergman et al. (2014, p. 508).

Observando a Figura 4.7, tem-se que:

• Superfícies metálicas possuem baixa emissividade quando comparadas a materiais não condutores, principalmente as polidas.

• Camadas de óxidos podem aumentar significativamente a emissividade.

• A emissividade de materiais condutores aumenta com o aumento de T.

Considerando um corpo com uma envoltória negra (cavidade que se comporta como um corpo negro), no equilíbrio térmico, a energia absorvida por ele será igual à emitida, podendo ser igualadas as taxas de ambas as energias:

#### $E \cdot A = G \cdot A \cdot \alpha$ .

Se o corpo for negro,  $\alpha = 1$ , no equilíbrio térmico à temperatura da envoltória:

#### $E_n \cdot A = G \cdot A$ .

Dividindo a penúltima equação pela última, tem-se:

$$\alpha = \frac{E}{E_n}$$

Esta é a definição de emissividade global de um corpo ( $\varepsilon$ ), de modo que a lei de Kirchhoff é dada por:

 $\varepsilon = \alpha$ 

Ou seja, por essa lei, a absortividade equivale à emissividade de um corpo, de maneira que se ele absorve pouco, também emite pouco. Essa igualdade é válida para condições isotérmicas e sem transferência de calor líquida entre as superfícies. Além disso, a lei de Kirchhoff pode ser repetida em condições espectrais:

 $\varepsilon_{\lambda}=\alpha_{\lambda}$ 

Quando  $\varepsilon$  é constante,  $\varepsilon = \varepsilon_{\lambda}$ , ou seja, a emissividade e a absortividade independem do comprimento de onda, tem-se um corpo cinza. As curvas de emissão de um corpo cinza são similares às de um corpo negro, porém reduzidas em uma relação constante.

De acordo com Araújo (1978), a emissividade é afetada principalmente por alguns aspectos da superfície:

• Acabamento: superfícies polidas têm baixa emissividade, já que têm alta refletividade.

• Temperatura: a emissividade geralmente aumenta com o aumento de T, mas para corpos não metálicos  $\varepsilon$  varia pouco com T.

• Natureza: a constituição química dos materiais afeta sua absortividade. Além disso, o método de fabricação, o tratamento térmico utilizado e as reações químicas com o ambiente influem nessa natureza.

A radiação ambiental é composta pelo conjunto da radiação solar com a radiação emitida por superfícies e oceanos da Terra, sendo responsável por determinar, juntamente com a atmosfera terrestre, a temperatura de nosso planeta.

Como foi dito, o Sol se comporta como um corpo negro a 5.800 K, e a radiação solar comporta-se como um feixe de raios paralelos que formam um ângulo  $\theta$  em relação à normal a superfície horizontal (paralela à superfície terrestre), sendo a irradiação solar extraterrestre ( $G_{\rm S,e}$ ) função da latitude geográfica, assim como da hora e do ano. Em uma base média no tempo e na área superficial, a irradiação solar extraterrestre é dada (em  $W/m^2$ ) pela equação a seguir, segundo Bergman et al. (2014).

#### $G_{\rm Se} = 1368 \cdot \cos \theta$

A atmosfera, além de ser irradiada pelo Sol, também é irradiada pela superfície da Terra, cuja temperatura média é de aproximadamente 290 K.

Entretanto, há uma mudança na magnitude e na distribuição das radiações solar e terrestre ao atravessar a atmosfera, devido à absorção e ao espalhamento causados pelos seus constituintes. Como a radiação que entra na atmosfera é maior que a que deixa, há um aquecimento, o qual é equilibrado pelo resfriamento devido à radiação emitida pelos constituintes da atmosfera. Ademais, como é considerada condição de equilíbrio, a transferência de calor líquida tanto no limite exterior da atmosfera quanto na superfície terrestre é igual a zero.

As substâncias que compõem a atmosfera, além emitirem radiações, também absorvem, podendo a atmosfera ser tratada como um corpo negro em temperatura efetiva do céu,  $T_{céu}$ , que comumente varia de 230 a 285 K, de maneira que a taxa líquida de transferência de calor por radiação para uma superfície exposta à radiação solar e atmosférica é obtida pelo balanço de energia:

$$\boldsymbol{q}_{rad}^{"} = lpha \boldsymbol{G}_{solar} + arepsilon \sigma \left( \boldsymbol{T}_{c\acute{e}u}^{4} - \boldsymbol{T}_{s}^{4} 
ight)$$

Nessa equação, como a irradiação atmosférica está concentrada aproximadamente na mesma região de comprimento de onda da radiação emitida pela superfície,  $\alpha_{céu} \approx \varepsilon$ .

#### Sem medo de errar

No projeto de análise do desempenho de um coletor solar novo para o qual você foi alocado, deseja-se quantificar o fluxo líquido de energia solar fornecida pelo coletor para água e sua eficiência. Trata-se de uma placa de alumínio, revestida com óxido de níquel preto, com absortividade solar de 0,92 e emissividade de 0,08. A radiação solar incide na superfície a uma taxa de 800  $W/m^2$ . A temperatura do ar é de 300 K e a temperatura efetiva do céu é de 280 K. Já o coeficiente de transferência de calor por convecção é de 5  $W/(m^2 \cdot K)$ . Sabe-se que a temperatura da superfície absorvedora é de 360 K e, atrás dos tubos de água, há um isolamento. Assim, a Figura 4.8 ilustra a placa coletora e os fenômenos que ocorrem. Figura 4.8 | Superfície coletora de radiação solar



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 711).

Fazendo um balanço de energia no coletor (placa absorvedora), tem-se:

$$\mathbf{q}_{rad}^{"} = lpha_{\mathcal{S}} \mathbf{G}_{solar} + lpha_{c\acute{e}u} \mathbf{G}_{c\acute{e}u} - \mathbf{E} - \mathbf{q}_{conv}^{"}$$

Pela lei de Kirchhoff, assume-se que  $\alpha_{ceu} \approx \varepsilon$  , de modo que:

$$\mathbf{q}_{rad}^{"} = lpha \mathbf{G}_{solar} + arepsilon \sigma \mathbf{T}_{c\acute{e}u}^4 - arepsilon \sigma \mathbf{T}_{s}^4 - \mathbf{q}_{conv}^{"}$$

$$\mathbf{q}_{\mathsf{rad}}^{"} = lpha \mathbf{G}_{\mathsf{solar}} + arepsilon \sigma \left( \mathbf{T}_{\mathsf{c}\acute{e}u}^{\mathsf{4}} - \mathbf{T}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{4}} 
ight) - h(\mathbf{T}_{\mathsf{s}} - \mathbf{T}_{\infty})$$
 )

Substituindo os valores do enunciado na equação, tem-se:  $q_{rad}^* = 0.92 \times 800 + 0.08 \times 5.67 \cdot 10^{-8} (280^4 - 360^4) - 5(360 - 300) = 388$  W/m<sup>2</sup> Assim, a eficiência do coletor é dada por:

$$\eta = \frac{q_{rad}}{G_s} = \frac{388}{800} = 0,485$$

Para fins de comparação com o coletor até então fabricado, coberto com uma chapa de óxido de cobalto preto, cuja absortividade é de 0,93 e a emissividade é de 0,30, tem-se:

 $\label{eq:rad} q_{\textit{rad}}^{"} = 0,93 \times 800 + 0,30 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \left(280^4 - 360^4\right) - 5(360 - 300) = 263 \quad \text{W/m}^2 \ .$ 

E a eficiência é de:

$$\eta = \frac{q_{rad}}{G_s} = \frac{263}{800} = 0,329$$

Portanto, ao substituir a cobertura de óxido de cobalto preto por óxido de níquel preto, há um aumento na eficiência do coletor de 47,4%.

Apesar de ambas as coberturas fornecerem absortividades semelhantes (0,92 e 0,93), a cobertura de cobalto é muito mais emissiva (0,30) que a de níquel (0,08), o que justifica a melhoria na eficiência obtida ao substituir óxido de cobalto preto por óxido de níquel preto.

O fluxo líquido de calor fornecido pelo coletor solar à água que circula pelos tubos é igual a 388  $W/m^2$ .

Resolvendo esta problemática, foi possível identificar e analisar uma situação em que ocorre radiação de calor.

### Avançando na prática

#### Emissividade e absortividade de uma superfície

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa pretende utilizar um vidro quadrado com 0,50 m de lado, utilizado para observar o interior de um forno, o qual se comporta aproximadamente como um corpo negro a 1.700 K. As propriedades da superfície de vidro são: transitividade igual a 0,35 para  $\lambda$  entre **0,1** e **1,8**  $\frac{1}{4}$ m, e nula fora desse intervalo de comprimento de onda; e sua emissividade é de 0,48 para  $\lambda$  menor que **1,8**  $\frac{1}{4}$ m e 0,76 para  $\lambda$  acima desse valor.

A empresa quer avaliar se o vidro é adequado para essa utilização e, caso não seja, solicita que você proponha outro material que o seja. Para avaliar essa adequabilidade, sabe-se que o ideal é que a energia transmitida seja inferior a 15 kW e a absorvida seja inferior a 80 kW, enquanto que para a energia refletida não há restrição.

Além disso, sabe-se que a 1.700 K, as frações de emissão do corpo negro para intervalos de 0 a  $\lambda$ , para  $\lambda$  igual a 0,1 e 1,8  $\frac{1}{4}$ m, são respectivamente 0,000 e 0,275.

#### Resolução da situação-problema

Pela lei de Kirchhoff,  $\alpha = \varepsilon$ . Portanto,  $\rho = 1 - \varepsilon - \tau$ .

Há três faixas de comprimentos de onda, para as quais as propriedades do vidro estão apresentadas a seguir:

$$\begin{split} \lambda < 0,1 \ \frac{1}{4} \mathrm{m}; \tau = 0 \ , \ \varepsilon = 0,48 \ , \ \rho = 0,52 \\ 0,1 < \lambda < 1,8 \ \frac{1}{4} \mathrm{m}; \tau = 0,35 \ , \ \varepsilon = 0,48 \ , \ \rho = 0,17 \\ \lambda > 1,8 \ \frac{1}{4} \mathrm{m}; \tau = 0 \ , \ \varepsilon = 0,76 \ , \ \rho = 0,24 \end{split}$$

Já a quantidade de calor emitida pelo forno e que chega à superfície de vidro é:

 $E_n = \sigma T^4 A = 5,67 \cdot 10^{-8} \times 1.700^4 \times 0,50^2 = 118,4$  kW Assim:

• Para  $\lambda < 0,1 \frac{1}{4} m$ ,

$$E_{n,0\to0,1}=G=F_{0\to0,1}\times E_{n,0\to\infty}=0$$

$$G_{abs} = G_{tr} = G_{ref} = G = 0$$

Ou seja, nessa faixa de comprimento de onda, o corpo negro não emite energia, portanto as frações absorvida, transmitida e refletida são nulas.

• Para  $0, 1 < \lambda < 1,8$  1/4 m,  $E_{n,0,1 \to 1,8} = G = E_{n,0 \to \infty} (F_{0 \to 1,8} - F_{0 \to 0,1}) = 118, 4(0,275 - 0) = 32,56$  kW  $G_{abs} = 0,48 \times 32,56 = 15,63$  kW  $G_{tr} = 0,35 \times 32,56 = 11,40$  kW  $G_{ref} = 0,17 \times 32,56 = 5,53$  kW • Para  $\lambda > 1,8$  1/4 m,

$$\begin{split} E_{n,1,8\to\infty} &= G = E_{n,0\to\infty} \left( 1 - F_{0\to1,8} \right) = 118, 4(1-0,275) = 85,84 \text{ kW} \\ G_{abs} &= 0,76\times85,84 = 65,24 \text{ kW} \\ G_{tr} &= 0 \\ G_{ref} &= 0,24\times85,84 = 20,60 \text{ kW} \end{split}$$

Ou seja, para as três faixas de comprimento de onda, a energia transmitida é inferior a 15 kW e a absorvida é inferior a 80 kW, de modo que o vidro é um material adequado para visualizar o interior do forno a 1.700 K, atendendo às necessidades da empresa.

#### Faça valer a pena

**1.** Considere uma cavidade isotérmica a 3.000 K, considerada corpo negro. Qual é o poder emissivo em todos os comprimentos de onda nesta temperatura? Em qual comprimento de onda ocorre o poder emissivo máximo? Qual é o poder emissivo máximo? Qual é o comprimento de onda abaixo do qual estão concentrados 80% da emissão?

Com base em seus conhecimentos sobre radiação, assinale a alternativa que responde respectivamente às questões apresentadas.

a)  $8,732 \times 10^8$  W/m<sup>2</sup>, 0,541 ¼ m, 2,55  $\times 10^{11}$  W/m<sup>3</sup>, 1,86 ¼ m.

b)  $1,22\times 10^3~W/m^2$  , 0,387  $1\!\!\!\!/ 4\,m$  , 4,98  $\times 10^8~W/m^3$  , 2,76  $1\!\!\!/ 4\,m$  .

c)  $3,12\times10^{12}~W/m^3$  , 2,33  $1\!\!\!/ 4\,m$  , 4,593  $\times10^6~W/m^2$  , 0,966  $1\!\!/ 4\,m$  .

d)  $4,593 \times 10^{6}$  W/m<sup>2</sup>, 0,966  $\frac{1}{4}$  m,  $3,12 \times 10^{12}$  W/m<sup>3</sup>, 2,33  $\frac{1}{4}$  m.

e)  $1,22 \times 10^3$  W/m<sup>3</sup>, 0,541  $\frac{1}{4}$  m,  $4,98 \times 10^8$  W/m<sup>2</sup>, 1,86  $\frac{1}{4}$  m.

**2.** Seja uma superfície a 2.000 K, com emissividade espectral igual a 0,60 entre os comprimentos de onda 1 e 3  $\frac{1}{4}$ m. Para os demais comprimentos de onda, essa emissividade é nula. Nesse caso, além de serem desconhecidos os poderes emissivos para esses comprimentos de onda, também é desconhecido o poder emissivo total da superfície. Como referência, sabe-se que as frações de emissão do corpo negro a 2.000 K para intervalos de 0 a  $\lambda$ , para  $\lambda$  igual a 1 e 3  $\frac{1}{4}$ m, são respectivamente de 0,067 e 0,738.

Qual das seguintes alternativas apresenta o poder emissivo total da superfície e sua emissividade global?

a) 907 kW/m<sup>2</sup> e 0,600. b) 366 kW/m<sup>2</sup> e 0,403. c) 366 kW/m<sup>2</sup> e 0,040. d) 907 kW/m<sup>2</sup> e 0,403. e) 544 kW/m<sup>2</sup> e 0,443.

**3.** Uma superfície a 1.000 K, que possui transmissividade nula, o que significa que é opaca, possui absortividade de 0,35 para  $\lambda$  inferior a **5**  $\frac{1}{4}$ **m**. Caso o comprimento de onda seja maior que esse valor, a absortividade da

superfície é de 0,70. Já a irradiação independe do comprimento de onda e é igual a **820 W/(m<sup>2</sup> · \frac{1}{4} m)**. Além disso, sabe-se que sua emissividade total é 0,90.

Qual é a refletividade da superfície para  $\lambda$ =7 ¼m? E sua absortividade total para o intervalo de 0 a 10 ¼m? Qual é o fluxo térmico líquido para a superfície?

a) 0,10; 0,70; -51.030 W/m<sup>2</sup> . b) 0,70; 0,70; 8.200 W/m<sup>2</sup> . c) 0,30; 0,525; -46.725 W/m<sup>2</sup> . d) 0,30; 0,70; 5.740 W/m<sup>2</sup> . e) 0,70; 0,50; 4.305 W/m<sup>2</sup> .

# Seção 4.2

# Troca de radiação entre superfícies

### Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção você aprenderá sobre a troca de radiação entre superfícies. O que acontece com o calor que é gerado no corpo humano devido ao metabolismo? Será que além de você liberar calor por convecção e condução, também há uma perda térmica por radiação? Qual é a função de sua roupa neste processo, mais especificamente nos dias frios? Portanto, conhecer o mecanismo de radiação entre superfícies é importante para compreender alguns fenômenos de seu dia a dia. E, industrialmente, é essencial quantificar essa troca para cálculos de projetos de equipamentos, mais especificamente os aquecidos, como fornos, reatores químicos e secadores, já que a troca térmica devido à radiação representa uma parcela significativa da troca térmica total.

A empresa em que você trabalha, cujo ramo é soluções energéticas com base em energia solar, quer analisar um aquecedor solar de água que está em desenvolvimento, em formato cilíndrico, como ilustrado na Figura 4.9. Tem sido feita uma análise de viabilidade operacional desse equipamento, para depois verificar sua viabilidade econômica e, consequentemente, se será adeguado implementar seu uso ou não. Um parâmetro de projeto é sua temperatura superficial, que deve ser mantida a 600 K, para garantir o aquecimento da água. O raio do tubo, que pode ser considerado um cilindro infinito, é de 5 cm, e a superfície é de alumínio anodizado (emissividade 0,84). Além disso, sabe-se que a emissividade dessa superfície praticamente independe do comprimento de onda. Se a água saturada escoa através do tubo com uma vazão de 0,05 kg/s e temperatura média de 365 K, qual taxa de calor deve ser fornecida por uma serpentina para manter essa temperatura da superfície? Essa é a pergunta que precisa ser respondida para avaliar o custo desse equipamento e, consequentemente, a sua viabilidade. Sabese que a viabilidade é garantida se a taxa de calor externa for inferior a 10 kW/m de tubo

Figura 4.9 | Aquecedor solar de água em formato cilíndrico



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 568).

Onde a empresa está localizada, a pressão atmosférica pode ser considerada igual a 1 atm, sendo esta a pressão total. Além disso, sabe-se que a temperatura de saturação da água de 365 K corresponde à pressão de 0,7514 bar, e as propriedades termofísicas correspondentes são iguais a:  $\rho_{\ell} = 963.4 \text{ kg/m}^3$ ,  $k_{\ell} = 0,677 \text{ W/m/K}$ ,  $c_{p,\ell} = 4,209 \cdot 10^3 \text{ J/(kg.K)}$ ,  $\mu_{\ell} = 3,06 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\text{Pr}_{\ell} = 1,91$ .

Para tratar dessa problemática, você aprenderá nesta seção sobre o fator de forma em processos de radiação e saberá determinar a troca de radiação entre corpos negros, em uma cavidade fechada e com o meio participante. Com a base que você já adquiriu sobre radiação, vamos incrementar esse conhecimento aplicando tais princípios para compreender a troca de radiação entre superfícies. Isso permitirá que você avalie a importância desse mecanismo de troca de calor não só em aplicações de sua profissão, mas também nas do dia a dia. Então, vamos lá!

#### Não pode faltar

Após compreender os processos e as propriedades da radiação, iremos trabalhar troca térmica por radiação entre duas ou mais superfícies. Esta transferência de calor depende não só da temperatura e das propriedades radiantes das superfícies, mas também de suas orientações e geometrias. Para compreender a importância da orientação na radiação, considerese recebendo radiação solar. A pergunta é: tomar banho de sol em pé ou deitado altera a quantidade de calor recebida?

Reflita

Para considerar tais características geométricas, tem-se o fator de forma, definido como a fração da radiação que deixa uma superfície (i) e é interceptado por outra superfície (j):  $F_{ij}$ . As superfícies possuem, respectivamente, as áreas  $A_i \in A_j$  e são orientadas arbitrariamente. Considere as superfícies diferenciais  $dA_i \in dA_j$ (Figura 4.10), cuja distância entre ambas é R, formando ângulos  $\theta_i \in$  $\theta_i$  com as normais às superfícies, sendo o fator de forma dado por:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j$$
 Esta equação pode ser utilizada

para superfícies emissoras e refletoras difusas (propriedades radiantes independentes da direção), com radiosidade uniforme.

Figura 4.10 | Troca de calor por radiação entre os elementos superficiais  $dA_i$  e  $dA_j$ 



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 550).



Fator de forma é a fração da radiação que deixa  $A_i$  e é interceptada por  $A_i$ .

Analogamente, o fator de forma  $F_{ji}$  é definido como sendo a fração da radiação que deixa  $A_i$  e é interceptada por  $A_i$ :

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_j} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j$$

Considerando que i e j sejam duas superfícies negras, não há reflexão. Ou seja, a energia que deixa as superfícies deve-se somente à emissão, e toda a radiação incidente é absorvida. Além disso, para superfícies negras, a radiosidade é igual ao poder emissivo:

$$J_i = E_{ni} = \sigma T_i^4$$

Assim, a taxa líquida na qual a radiação deixa a superfície i e é interceptada por j é:

 $\boldsymbol{q}_{ij} = \boldsymbol{E}_{ni}\boldsymbol{A}_{i}\boldsymbol{F}_{ij} = \sigma \boldsymbol{T}_{i}^{4}\boldsymbol{A}_{i}\boldsymbol{F}_{ij}$ 

Ela é igual à taxa líquida na qual *j* ganha radiação devido à sua interação com *i*. Assim, a troca líquida entre ambas as superfícies é:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{jj} - \boldsymbol{q}_{ji} = \sigma(\boldsymbol{T}_i^{4}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{F}_{jj} - \boldsymbol{T}_j^{4}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{F}_{ji})$$

Se ambas as superfícies estão à mesma temperatura, elas possuem o mesmo poder emissivo, fazendo com que a troca líquida de energia térmica seja nula:

$$q = \sigma T_i^4 (A_i F_{ij} - A_j F_{ji}) = 0$$

Dessa forma obtém a seguinte relação de reciprocidade dos fatores de forma:

# $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$

Portanto, a taxa de calor transferido por radiação entre duas superfícies (corpos negros) a diferentes temperaturas é:

# $\boldsymbol{q} = \sigma \boldsymbol{A}_{i} \boldsymbol{F}_{ij} (\boldsymbol{T}_{i}^{4} - \boldsymbol{T}_{j}^{4})$

Além disso, tratando-se de *N* superfícies no interior de uma cavidade fechada, devido ao princípio de conservação de energia, tem-se a regra da soma:

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1$$

Nesse somatório, um dos termos é a fração da radiação que deixa a superfície *i* e a atinge diretamente ( $F_{ii}$ ), a qual assume valor nulo para o caso de superfícies planas e convexas.

Assim, a taxa líquida de troca por radiação a partir de qualquer superfície i em uma cavidade fechada de N superfícies negras a diferentes temperaturas é dada por:

$$q_i = \sum_{j=1}^N \sigma A_i F_{ij} (T_i^4 - T_j^4)$$



Há dois casos limites. Um deles é quando a radiação que deixa a superfície *i* não pode atingir a superfície *j* diretamente, ou seja, as duas superfícies não têm visão direta uma da outra, assim  $F_{ij} = 0$ . O segundo caso limite é quando toda a radiação que deixa a superfície *i* é interceptada pela *j*, ou seja, a superfície *j* envolve completamente a superfície *i* e  $F_{ij} = 1$ .

A determinação do fator de forma pode ser pela solução das integrais apresentadas anteriormente, o que muitas vezes é complexo, ou utilizando gráficos e tabelas, como mostram a Tabela 4.1 e as Figuras 4.12, 4.13 e 4.14.

Tabela 4.1 | Fatores de forma para geometrias bidimensionais que são infinitamente longas

Geometria	Equacionamento
Placas paralelas com linhas centrais conectadas por uma linha perpendicular	$W_{i} = W_{i} / L \in W_{j} = W_{j} / L$ $F_{ij} = \frac{\left[(W_{i} + W_{j})^{2} + 4\right]^{1/2} - \left[(W_{j} - W_{i})^{2} + 4\right]^{1/2}}{2W_{i}}$
$ \begin{array}{c}   \longleftarrow w_i \longrightarrow   \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\   \longleftarrow w_j \longrightarrow   \\ j \\$	
Placas inclinadas da mesma largura e com aresta comum	$F_{ij} = 1 - sen \frac{1}{2} \alpha$



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 736).





Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 737).

Figura 4.13 | Fatores de forma para retângulos perpendiculares, que possuem aresta comum



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 737).

Figura 4.14 | Fatores de forma para discos coaxiais paralelos



adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 737).

Duas placas paralelas, consideradas superfícies negras, são quadradas com dimensões características iguais a 0,4 m, as quais estão separadas por uma distância (D) de 1 m. Como são placas quadradas, suas dimensões características ( $L_1 \in L_2$ ) são iguais. Uma das placas é mantida a 1.500 K e a outra a 800 K. Com base em tais dados, qual é a troca de calor líquido entre as placas?

$$\frac{L_1}{D} = \frac{L_2}{D} = 0,4$$

Pela Figura 4.12, temos que  $F_{12} = 0,047$  . Assim a troca líquida entre ambas as superfícies será:

$$q = \sigma A_i F_{ij} (T_i^4 - T_j^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} (0,4)^2 (0,047) (1.500^4 - 800^4) = 1.984$$

Além disso, o fator de forma possui uma natureza que dizemos ser aditiva. Isso porque a radiação que atinge uma superfície *j* composta é a soma das radiações que atingem suas *n* partes (Figura 4.15). Dessa forma, a radiação da superfície *i* para a superfície *j* é dada por:

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^{n} F_{ik}$$

**Exemplificando** 

Figura 4.15 | Superfície subdividida para ilustrar a natureza aditiva do fator de forma



Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 554).

Considerando que a origem da radiação é a superfície composta, multiplicando ambos os lados da equação anterior por área e aplicando a relação de reciprocidade, tem-se:

$$A_{j}F_{i(j)} = A_{j}F_{(j)i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k}F_{ki} \to F_{j(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{k}F_{ki}}{A_{j}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{k}F_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} A_{k}}$$

Por fim, tem-se a regra da simetria, quando duas ou mais superfícies são simétricas em relação a uma terceira. Por exemplo, se as superfícies *j* e *k* são simétricas em relação à superfície *i*, então  $F_{ij} = F_{ik}$ . E, pela regra da reciprocidade,  $F_{ji} = F_{ki}$ .

Você aprendeu anteriormente que o fluxo radiante que deixa uma superfície é a diferença entre  $J \in G$ , que são respectivamente radiosidade e irradiação:

 $q'' = J - G = E + G_{ref} + G_{tr} - (G_{ref} + G_{tr} + G_{abs}) = E - G_{abs}$ 

Sendo a superfície opaca ( $\tau = 0$ ), com  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $J \in G$  constantes ao longo de cada superfície, tem-se:

 $q'' = E - (G - G_{ref}) = E - G(1 - \rho) = \varepsilon E_n - G[1 - (1 - \alpha)] = \varepsilon E_n - \alpha G = \varepsilon (E_n - G)$ 

Para obter o fluxo de calor trocado em termos da radiosidade, primeiro é necessário obter G = f(J):

$$J = E + G_{ref} = \varepsilon E_n + (1 - \varepsilon)G \rightarrow G = \frac{J - \varepsilon E_n}{1 - \varepsilon}$$

De maneira que:

$$q'' = \varepsilon(E_n - G) = \varepsilon \left(E_n - \frac{J - \varepsilon E_n}{1 - \varepsilon}\right) = \varepsilon \left(\frac{E_n - \varepsilon E_n - J + \varepsilon E_n}{1 - \varepsilon}\right) = \frac{E_n - J}{\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

Nessa equação, o numerador é a diferença de potencial e o denominador é a resistência radiante superficial utilizada para considerar o fato de a superfície não ser negra.

Pelo fato de a superfície não ser negra, a taxa de calor trocado por radiação entre duas superfícies (i e j) em uma cavidade é:

$$\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{A}_i \mathbf{F}_{ij} (\mathbf{J}_i - \mathbf{J}_j) = \mathbf{A}_j \mathbf{F}_{ji} (\mathbf{J}_i - \mathbf{J}_j)$$

Ou seja,

$$q_{ij} = \frac{J_i - J_j}{\left(\frac{1}{A_i F_{ij}}\right)} = \frac{J_i - J_j}{\left(\frac{1}{A_j F_{ji}}\right)} = \frac{E_{ni} - J_i}{\left(\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}\right)} = \frac{J_j - E_{nj}}{\left(\frac{1 - \varepsilon_j}{A_j \varepsilon_j}\right)}$$

Portanto:

$$E_{ni} - J_{i} = q_{ij} \left( \frac{1 - \varepsilon_{i}}{A_{i} \varepsilon_{i}} \right)$$
$$J_{i} - J_{j} = q_{ij} \left( \frac{1}{A_{i} F_{ij}} \right)$$
$$J_{j} - E_{nj} = q_{ij} \left( \frac{1 - \varepsilon_{j}}{A_{j} \varepsilon_{j}} \right)$$

Reflita

Se uma superfície é grande em relação à outra,  $A_i \to \infty$ , ela pode ser tratada como se fosse um corpo negro? Por quê?

Ao somar essas três equações, tem-se:

$$\boldsymbol{E}_{ni} - \boldsymbol{E}_{nj} = \boldsymbol{q}_{ij} \left( \frac{1 - \varepsilon_i}{\boldsymbol{A}_i \varepsilon_i} + \frac{1}{\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{F}_{ij}} + \frac{1 - \varepsilon_j}{\boldsymbol{A}_j \varepsilon_j} \right) \rightarrow \boldsymbol{q}_{ij} = \frac{\sigma(\boldsymbol{T}_i^4 - \boldsymbol{T}_j^4)}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\boldsymbol{A}_i \varepsilon_i} + \frac{1}{\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{F}_{ij}} + \frac{1 - \varepsilon_j}{\boldsymbol{A}_j \varepsilon_j}}$$

Esse resultado é válido para "quaisquer duas superfícies cinza e difusas que formem uma cavidade fechada e cada uma seja caracterizada por radiosidade e irradiações uniformes" (BERGMAN et al., 2014, p. 563).

### Pesquise mais

Pela equação obtida, a troca de calor radiante pode ser representada por resistências. De modo que a troca entre duas superfícies (*i e j*) envolve três resistências. Para aprender mais sobre esta abordagem, também para considerar *N* superfícies em uma cavidade fechada, os conceitos de barreiras de radiação e superfície rerradiante, consulte as páginas 558-567 do capítulo 13, *Troca de radiação entre superfícies*, do livro:

BERGMAN, T. L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.

Outro caso a ser considerado no estudo da radiação é a troca de calor por radiação com meio participante. Gases com moléculas polares, como os hidrocarbonetos,  $H_2O$  e  $CO_2$ , participam do processo de radiação por possuírem absortividade e emissividade significativas, sendo determinadas a partir da lei de Beer:

$$\tau_{\lambda} = \mathbf{e}^{-\kappa_{\lambda}L}$$

 $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} = \mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\kappa_{\lambda}L}$ 

Nessas equações,  $\kappa_{\lambda}$  é o coeficiente de absorção espectral do meio e L é a espessura do meio.

A radiação a partir de sólidos e líquidos é um fenômeno de superfície, sendo distribuída continuamente em relação ao comprimento de onda. Diferentemente disso, a radiação em gases é um fenômeno volumétrico e é concentrada em intervalos de comprimentos de onda específicos (bandas).

A taxa líquida de transferência de calor por radiação entre um gás (índice g) e a superfície ao redor (índice s), negra ou cinza, é dada respectivamente por:

$$\begin{aligned} q_{liq} &= A_{s}\sigma(\varepsilon_{g}T_{g}^{4} - \alpha_{g}T_{s}^{4}) \\ q_{liq,cinza} &= \frac{\varepsilon_{s} + 1}{2}A_{s}\sigma(\varepsilon_{g}T_{g}^{4} - \alpha_{g}T_{s}^{4}) \end{aligned}$$

As emissividades dos gases são apresentadas graficamente para pressão total de 1 atm, como na Figura 4.16(a) para água, e em

outras pressões são determinadas a partir de fatores de correção da pressão (C), dado na Figura 4.16(b) para água:

 $\varepsilon_{\rm w}={\rm C}_{\rm w}\varepsilon_{\rm w,1atm}$ 

Figura 4.16 | Para o gás  $H_2O$ : (a) emissividades em uma mistura de gases não participantes a uma pressão total de 1 atm e para um comprimento médio de feixe de *L*; e (b) fatores de correção para a emissividade em pressões diferentes de 1 atm



Fonte: De Hottel (1954 apud ÇENGEL; GHAJAR; KANOGLU, 2012, p. 768).

As absortividades dos gases para a radiação emitida por uma fonte de temperatura  $T_s$  também podem ser quantificadas, de maneira semelhante à da água, que é:

 $\alpha_{\rm w} = C_{\rm w} \times (T_g / T_s)^{0,45} \times \varepsilon_{\rm w} (T_s, P_{\rm w} L T_s / T_g),$ 

A emissividade é obtida na Figura 4.16(a) para a abscissa  $T_s$  e a curva  $P_w L T_s$  /  $T_g$  .

Na Figura 4.16, utiliza-se o comprimento de feixe médio L, calculado para diversas formas de volume de gás, como mostra na Tabela 4.2. Esse comprimento representa o raio de uma massa gasosa hemisférica cuja emissividade é equivalente à da geometria de interesse. Tabela 4.2 | Comprimento médio do feixe L para diversas formas de volume de gás

Geometria do volume de gás	L
Hemisfério de raio R que irradia para o centro da sua base	R
Esfera de diâmetro D que irradia para a sua superfície	0,65 D
Cilindro circular infinito de diâmetro D que irradia para a superfície curvada	0,95 D
Cilindro circular semi-infinito de diâmetro D que irradia para a sua base	0,65 D
Cilindro circular semi-infinito de diâmetro D que irradia para o centro da sua base	0,90 D
Cilindro circular infinito de raio R que irradia para o centro da sua base	1,26 R
Cilindro circular de altura igual ao diâmetro D que irradia para toda a superfície	0,60 D
Cilindro circular de altura igual ao diâmetro D que irradia para o centro da sua base	0,71 D
Placa infinita de espessura D que irradia para ambos os planos delimitadores	1,80 D
Cubo com comprimento do lado L que irradia para qualquer face	0,66 L
Forma arbitrária do volume V e área ${\it A}_{s}^{}$ que irradia para a superfície	3,6 · V / A <sub>s</sub>

Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 769).

# Sem medo de errar

Para avaliar a viabilidade de um aquecedor de água em desenvolvimento, você precisa determinar qual é a taxa de calor que deve ser fornecida para manter sua temperatura em 600 K. Trata-se de um cilindro, que pode ser considerado infinito, de 5 cm de raio e superfície de alumínio anodizado (emissividade 0,84, que não varia com o comprimento de onda), como ilustrado na Figura 4.9. A água saturada escoa através do tubo com uma vazão de 5 kg/s e temperatura média de 365 K.

Sabe-se que a temperatura de saturação da água de 365 K corresponde à pressão de 0,7514 bar (BERGMAN et al., 2014, p. 640), sendo as propriedades termofísicas correspondentes iguais a:  $\rho_{\ell} = 963,4 \text{ kg/m}^3$ ,  $k_{\ell} = 0,677 \text{ W/m/K}$ ,  $c_{p,\ell} = 4,209 \cdot 10^3 \text{ J/}$  (kg.K),  $\mu_{\ell} = 3,06 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ,  $\text{Pr}_{\ell} = 1,91$ .

P = pressão total = 1 atm.

Como a emissividade da superfície do aquecedor não varia com o comprimento de onda, diz-se que a superfície é cinza.

O primeiro passo é quantificar a taxa líquida de calor trocado por radiação entre a água e as paredes de tubo. Para isso, precisaremos quantificar a emissividade e a absortividade desta água.

A pressão da água é de 0,7514 bar = 0,742 atm. Pela Tabela 4.2, o comprimento médio do feixe para um cilindro infinito que irradia para a superfície curvada é:

#### $L = 0,95D = 0,95 \times 0,10 = 0,095 \text{ m}$

# $P_w L = 0.742 \times 0.095 = 0.0705 \text{ m} \cdot \text{atm} = 0.231 \text{ pés} \cdot \text{atm}$ .

Pela Figura 4.16(a),  $\varepsilon_{w,1atm} = \varepsilon_g = 0,16$ . Esse valor obtido é a emissividade média, considerando as radiações emitidas para todas as superfícies do recinto cilíndrico.

Para a temperatura superficial de 600 K, a absortividade da água pode ser determinada utilizando o gráfico de emissividade – Figura 4.16(a) – como:

# $P_w L \frac{T_s}{T_g} = 0,231 \times \frac{600}{365} = 0,380 \text{ pés} \cdot \text{atm}$

Para esse valor de curva e abscissa igual a 600 K, na Figura 4.16a,  $\varepsilon_{w, 1atm} = 0,05$  .

Sendo:

$$\alpha_{w} = C_{w} \times (T_{g} / T_{s})^{0,45} \times \varepsilon_{w} (T_{s}, P_{w}LT_{s} / T_{g})$$

$$\alpha_w = \alpha_g = (365 \, / \, 600)^{0.45} \, imes \, 0,05 = 0,04$$

Assim, o fluxo líquido de troca de calor por radiação da água para as paredes do aquecedor é igual a:

$$q_{\textit{liq,cinza}} = rac{arepsilon_s + 1}{2} A_s \sigma(arepsilon_g T_g^4 - lpha_g T_s^4)$$

$$q_{rad}^{"} = \frac{0.84 + 1}{2}5,67 \cdot 10^{-8}(0,16 \cdot 365^{4} - 0,04 \cdot 600^{4}) = -122,3 \text{ W/m}^{2}$$

Esse sinal negativo é coerente. Tratando-se de um aquecedor, o fluxo líquido de troca de calor por radiação é das paredes do cilindro para a água.

Para quantificar a troca térmica por condutividade, tem-se:

$$\mathsf{Re}_{D} = \frac{\rho u_{m} D_{h}}{\mu} = \frac{\dot{m} D_{h}}{A_{c} \mu} = \frac{0,05 \times 0,10}{\left[ (\pi 0,05^{2})/2 \right] 3,06 \cdot 10^{-4}} = 4.161$$

Pela equação de Dittus-Boelter:

 $Nu_D = 0.023 \operatorname{Re}_D^{4/5} \operatorname{Pr}^{0.4} = 0.023(4161)^{4/5}(1.91)^{0.4} = 23.4$ 

$$h = \frac{k}{D_h} N u_D = \frac{0.677}{0.10} \times 23.4 = 158 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K})$$

De maneira que o fluxo térmico por convecção é de:  $q_{conv}^{"} = h(T_s - T_g) = 158 \times (600 - 365) = 37.130 \text{ W/m}^2$ A partir de um balanço de energia, obtém-se:  $q_{ext}^{"} = q_{rad}^{"} + q_{conv}^{"} = 122,3 + 37.130 = 37.252 \text{ W/m}^2$ 

$$q_{ext}$$
 / L = 2 $\pi r q_{ext}^{"}$  = 11,7 kW/m

Pelo resultado, conclui-se que, para estas temperaturas de superfície e média da água e vazão mássica de água, a convecção é muito mais significativa que a radiação.

Como a taxa de calor externo fornecido ao tubo pela serpentina é superior a 10 kW/m, tem-se que este aquecedor de água é inviável para a empresa e, portanto, não poderá ser instalado, a menos que seja reduzida a vazão mássica de água escoando em seu interior.

Assim, com a solução deste problema, você pode comprovar sua capacidade de identificar e analisar situações em que ocorre a radiação de calor.
## Avançando na prática

### Fornecimento de calor para um forno cilíndrico

#### Descrição da situação-problema

Uma indústria fabricante de papel deseja colocar em operação um reator cilíndrico que ela já possui. Para atender ao processo produtivo, as paredes desse reator precisam ser mantidas em determinadas temperaturas. O equipamento possui formato cilíndrico, com raio de 0,5 m e altura de 2 m, como ilustrado na Figura 4.17. As emissividades da parte superior (1), a qual deve ser mantida a 500 K, e de sua base (2), que deve permanecer a 300 K, são respectivamente 0,75 e 0,52. Já a superfície lateral (3) se aproxima de um corpo negro a 400 K. Qual deve ser a taxa de calor fornecida para essas superfícies de modo a manter as temperaturas desejadas, considerando apenas a troca de calor por radiação?

Figura 4.17 | Reator em formato cilíndrico



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 755).

#### Resolução da situação-problema

O reator possui três superfícies, com as seguintes áreas:

$$\begin{array}{l} A_1 = A_2 = \pi r^2 = \pi (0,5)^2 = 0,785 \ \text{m}^2 \\ A_3 = 2\pi r L = 2\pi (0,5) \times 2 = 6,28 \ \text{m}^2 \\ \text{Como a base e o topo são superfícies planas: } F_{11} = F_{22} = 0 \end{array}$$

Pela Figura 4.12, para abcissa igual a L/r = 4 e curva correspondente a r/L = 0,25, tem-se que  $F_{12} = F_{21} = 0,06$ .

Pela regra da adição:

# $F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \rightarrow F_{13} = 1 - 0 - 0,06 = 0,94$

Como a superfície superior e a base são simétricas em relação à lateral:

 $\textit{F}_{23}=\textit{F}_{13}=\textit{0,94}~{}_{\rm e}\textit{F}_{31}=\textit{F}_{32}$ 

Pela regra de reciprocidade:

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \rightarrow F_{31} = \frac{A_1F_{13}}{A_3} = \frac{0,785}{6,28} \times 0,94 = 0,1175$$

Assim:

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \rightarrow F_{33} = 1 - 0,1175 - 0,1175 = 0,765$$

Determinados todos os fatores de forma, pode-se calcular as radiosidades das superfícies.

Como a superfície lateral é um corpo negro:

$$J_3 = E_{n3} = \sigma T_3^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} (400)^4 = 1452 \text{ W/m}^2$$

Para a superfície superior e a base, tem-se:

$$E_{ni} - J_i = q \left( \frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i} \right) \to J_i = E_{ni} - q_i^* \left( \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right)$$
$$J_1 = \sigma T_1^4 - q_1^* \left( \frac{1 - 0.75}{0.75} \right) = 3.544 - q_1^* / 3$$
$$J_2 = \sigma T_2^4 - q_2^* \left( \frac{1 - 0.52}{0.52} \right) = 459 - 0.923 q_2^*$$

Sendo o fluxo líquido de troca de calor de cada superfície dado por:

 $\begin{aligned} \dot{q_1} &= \dot{q_{12}} + \dot{q_{13}} = F_{12}(J_1 - J_2) + F_{13}(J_1 - J_3) = 0,06(3.085 - \dot{q_1}/3 + 0.923\dot{q_2}) + 0.94(2.092 - \dot{q_1}/3) \\ \dot{q_1} &= 1.614 + 0,0415\dot{q_2} \end{aligned}$ 

 $\ddot{q_2} = \ddot{q_{21}} + \ddot{q_{23}} = 0,06(-3.085 - 0.923\ddot{q_2} + \ddot{q_1}/3) + 0.94(-993 - 0.923\ddot{q_2}) = -582 + 0.0104\ddot{q_1}/3 + 0.94(-9) = -562 + 0.94(-9)$ 

Resolvendo o sistema composto pelas duas equações anteriores, tem-se:

$$\textbf{q}_1^{"} = 1.614 + 0,0415(-582 + 0,0104\textbf{q}_1^{"}) = 1.590 + 0,0004316\textbf{q}_1^{"} \rightarrow \textbf{q}_1^{"} = 1.591 \text{ W/m}^2$$

 $q_2^{"} = -582 + 0,0104(1591) = -565 \text{ W/m}^2$ Portanto:  $J_1 = 3.014 \text{ W/m}^2 \text{ e } J_2 = 980 \text{ W/m}^2$ De modo que:  $q_3^{"} = q_{31}^{"} + q_{32}^{"} = F_{31}(J_3 - J_1) + F_{32}(J_3 - J_2) = 0,1175(2 \times 1.452 - 3.014 - 980) = -128 \text{ W/m}^2$ 

Multiplicando os fluxos de transferência de calor pelas respectivas áreas, têm-se as taxas de transferência para manter as temperaturas das superfícies nos valores desejados. Sendo 1.249 W para a superfície superior, -444 W para a base e -804 W para a superfície lateral. Para a superfície superior deve ser fornecido calor, enquanto que para a base e a superfície lateral deve-se remover calor.

### Faça valer a pena

**1.** A Terra pode ser considerada um emissor puntiforme em relação ao Sol (Figura 4.18), um disco de diâmetro  $1,38 \cdot 10^9$  m. Sabendo que ambos estão separados por uma distância *L* de  $1,495 \cdot 10^{11}$  m, quantifique o fluxo de calor que origina do Sol (*j*), que é um corpo negro a 5.800 K, e que chega à Terra (i).

Figura 4.18 | Relação de uma pequena superfície com um disco



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 555).

Assinale a alternativa que responde corretamente ao cálculo proposto.

a) 1.367 W/m<sup>2</sup>. b) 895 W/m<sup>2</sup>. c) 762 W/m<sup>2</sup>. d) 1.911 W/m<sup>2</sup>. e) 337 W/m<sup>2</sup>.

**2.** Considere um cone com 25 cm de altura (Figura 4.19) cujo topo tem 2 m de diâmetro e a base, 2,5 m. Deseja-se quantificar o fator de forma entre as superfícies superior e lateral e da lateral para ela mesma.

Figura 4.19 | Cone truncado



Fonte: elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta os respectivos valores desses dois fatores de forma.

a) 0,60 e 0.
b) 0,118 e 0.
c) 0,40 e 0,60.
d) 0,0625 e 0,1357.
e) 0,189 e 0,616.

**3.** Duas placas paralelas de 1,50 m x 2,25 m estão separadas a uma distância de 0,75 m. Uma placa (1) é mantida a 1.310 K e a outra (2) a 785 K. As emissividades das placas são, respectivamente, 0,35 e 0,62. Com base em tais dados, pode-se determinar o fluxo de troca de calor líquida, devido à radiação, entre as placas.

Assinale a alternativa que contém a valor correto de  $q_{12}^{"}$ .

a) 12,7 kW/m<sup>2</sup>. b) 45,6 kW/m<sup>2</sup>. c) 31,9 kW/m<sup>2</sup>. d) 112 W/m<sup>2</sup>. e) 581 W/m<sup>2</sup>.

# Seção 4.3

# Transferência de massa por difusão

### Diálogo aberto

Além do transporte de calor e movimento, há também o transporte de massa, presente em muitos processos industriais, como nas operações de secagem na indústria de alimentos, na transferência de reagentes para uma superfície catalítica, na filtragem por membrana, nas operações de separação em geral, entre outras. No cotidiano, a transferência de massa é observada, por exemplo, na mistura do pó de café na água, do açúcar no suco, do poluente na atmosfera e do perfume de alguém na sala em que este ocupa. Portanto, você com certeza já observou algum processo de transferência de massa, devido à sua vasta gama de aplicações, não só em nosso dia a dia, como em muitos processos industriais.

Na empresa de soluções energéticas com base em energia solar na qual você está trabalhando, tem sido observado que a água aquecida a partir do uso de placas solares, que é armazenada em tanques a 333 K, perde-se lentamente. Isso ocorre devido à evaporação da água, já que os tanques de armazenamento são abertos para a atmosfera. Como a ideia é que essa água aquecida não fique armazenada por muito tempo nesses tanques, foi descartada a possibilidade de cobrir suas superfícies, evitando o contato da água com a atmosfera, já que a instalação dessas coberturas representaria um custo significativamente alto para a empresa.

Nesse sentido, identificou-se a necessidade de quantificar a taxa com que a perda de água ocorre para avaliar a influência do tempo de armazenamento no tanque. Tratando-se de tanques de armazenamento do tipo cilíndrico, de 1 m de diâmetro e 5 m de altura, pressão atmosférica local de 1 atm, qual é a taxa de evaporação da água se seu nível é mantido em 1,8 m? Quantificando essa taxa, será possível avaliar se o tempo de armazenamento está adequado ou se será necessário reduzi-lo, já que a cobertura da superfície superior dos tanques foi previamente descartada pelos gestores.

Sabe-se que a umidade relativa do ar que está em contato com a superfície superior do cilindro é de 35%. Para quantificar essa taxa, quais são as hipóteses simplificadoras que você terá que assumir? Trata-se apenas de um mecanismo de transferência de massa? Qual é a importância da difusão mássica nesse processo? Quanto tempo levaria para evaporar toda a água do tanque? Além disso, temos que a pressão de saturação da água a 333 K é de 0,1962 atm e que a difusividade mássica de água em ar a 298 K e 1 atm é de  $2,6\cdot10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s. Além disso, a constante universal dos gases é de  $8,2057\cdot10^{-5}$  m<sup>3</sup>·atm/K/mol e a densidade da água a 333 K é de 983,3 kg/m<sup>3</sup>.

Para quantificar essa taxa de água evaporada, nesta seção você aprenderá sobre transferência de massa, conhecerá a lei de Fick e analisará a difusão em meios não estacionários, estacionários e com reação química homogênea. Portanto, ainda há muito o que aprender, então redobre o fôlego e vamos lá!

### Não pode faltar

Havendo um gradiente de concentração de uma determinada espécie química entre duas regiões, ocorrerá a transferência dessa espécie, de modo a igualar a concentração em ambas as regiões. A espécie transferida é denominada soluto e as regiões que contêm o soluto, e que podem abrigar uma ou mais espécies distintas do soluto, são denominadas solvente. O conjunto soluto-solvente é conhecido como mistura (para gases) ou solução (para líquidos). Ambas constituem o meio no qual ocorre a transferência de massa (CREMASCO, 2002). Logo, existe um potencial motriz: a diferença de concentração, que causa a transferência de massa, assim como nos processos de transferência de calor, causados por uma diferença de temperatura. Esse gradiente de concentração gera um fluxo em sentido contrário ao do gradiente.



Segundo Bergman et al. (2014), transferência de massa é massa em trânsito, como resultado de uma diferença de concentrações de uma espécie em uma mistura.

Os modos de transferência de massa são similares aos de transferência de calor estudados, havendo transferência de massa por convecção (ou advecção, quando há movimento macroscópico, ou global, do meio), análogo à transferência de calor por convecção, e por difusão (ocorrendo movimento aleatório do fluido em repouso), análoga à condução de calor. Essas similaridades resultam em equações de taxa também análogas.

Exemplificando

A transferência de massa ocorre, por exemplo, quando: o gás carbônico produzido pela combustão de combustíveis fósseis se dispersa no meio ambiente; o umidificador transfere vapor d'água para o ar seco ambiente; o gás carbônico é dissolvido na água; na separação de hélio utilizando Pyrex (um dos poucos gases que difunde nesse material, já que o Pyrex é impermeável a quase todos os gases); e na mistura de leite em café (Figura 4.20).

Figura 4.20 | Ilustração da difusão de leite em café



A Figura 4.21 ilustra a tendência de difusão das espécies gasosas A e B, que estão nas mesmas condições de pressão e temperatura, devido à diferença de concentração dessas espécies nas duas regiões de uma câmara, após remoção da divisória que inicialmente as separava. Figura 4.21 | Difusão da espécie A em B e de B em A após a remoção da divisória



Fonte: adaptada de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 796).

A concentração (moléculas por unidade de volume) da espécie A ( $C_A$ ) diminuirá no sentido da esquerda para a direita, enquanto a concentração de B ( $C_B$ ) aumenta nesse sentido, havendo transporte líquido de A para a direita e de B para a esquerda, devido ao movimento molecular aleatório das espécies. Cabe ressaltar que, como o movimento é aleatório, a probabilidade de qualquer molécula se mover para a esquerda ou para a direita é igual.

Após um tempo suficiente, concentrações uniformes de A e B são obtidas e não haverá mais transporte líquido das espécies através do plano imaginário que separa as duas regiões. A transferência de massa é fortemente influenciada pelo espaçamento molecular, de modo que ocorre mais facilmente em gases e com menos facilidade em sólidos.

A densidade (ou concentração mássica,  $\rho$ ) e a concentração molar (C) de uma mistura, constituída por i espécies químicas, são dadas respectivamente por:

$$\rho = \sum_{i} \rho_i$$
$$\mathbf{C} = \sum_{i} \mathbf{C}_i$$

De modo que, sendo  $MM_i$  a massa molecular do componente i, tem-se:

 $C_i = \rho_i / MM_i$ 

E as frações mássica e molar da espécie i são respectivamente determinadas por:

$$m_{i} = \frac{\rho_{i}}{\rho}$$

$$x_{i} = \frac{C_{i}}{C}$$
De modo que  $\sum_{i} m_{i} = 1$  e  $\sum_{i} x_{i} = 1$ 

Para uma mistura de gases ideais, a partir da lei do gás ideal:

$$C_i = \frac{p_i}{RT}$$

E da lei de Dalton:

$$p = \sum_{i} p_{i}$$

Considerando  $p_i$  a pressão parcial da espécie i e R a constante universal dos gases, tem-se que a fração molar da espécie i é dada por:

$$x_i = \frac{C_i}{C} = \frac{p_i}{P}$$

A lei de Fick da difusão é a equação da taxa para difusão mássica, sendo escrita na forma vetorial como a seguir, para o caso de A sendo transferido em uma mistura binária de A e B, tanto em termos de concentração mássica quanto molar:

$$j_{A} = -\rho D_{AB} \nabla m_{A}$$

$$J_A^* = -CD_{AB}\nabla x_A$$

De maneira que:

$$j_A = MM_A \cdot J_A^*$$

💮 Reflita

Considerando a analogia entre transferência de massa e calor, a lei de Fick da difusão equivale a qual lei utilizada para definir a condutividade térmica? Sendo  $D_{AB}$  o coeficiente de difusão binária ou difusividade mássica,  $j_A$  (kg/(s·m<sup>2</sup>)) é o fluxo mássico de A e  $J_A^*$  (mol/(s·m<sup>2</sup>)) é o fluxo molar de A. No caso de gases, as difusividades são maiores (entre 0,1 e 1 cm<sup>2</sup>/s), e no caso de sólidos, são menores. E as difusividades mássicas em sistemas líquidos variam de 10<sup>-6</sup> a 10<sup>-5</sup> cm<sup>2</sup>/s. Além disso, esses fluxos representam o movimento da espécie em relação ao movimento médio da mistura.

Pesquise mais

Os valores de difusividade mássica podem ser obtidos a partir de tabelas, experimentalmente ou utilizando correlações, como apresentado para os gases nas páginas 45-53 do capítulo 1, *Coeficientes e mecanismos da difusão*, no livro:

CREMASCO, M. A. **Fundamentos de transferência de massa.** 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2002. 728 p.

No caso de mistura gasosa, admitindo comportamento de gás ideal, podem-se estimar valores de difusividade em condições diferentes (1) das quais há dados disponíveis (2), sabendo que:

D <sub>AB1</sub>	<i>p</i> <sub>2</sub>	$\left( T_{1} \right)$	3/2
$D_{AB_2}$	$p_1$	$\left(\overline{T_2}\right)$	

Já para o caso de mistura líquida, sabe-se que, para baixas concentrações de soluto, a difusividade mássica aumenta com o aumento da temperatura.

Como foi visto, na difusão ocorre o movimento de moléculas de uma região para outra; caso isso resulte em um movimento global, tem-se, além do componente difusivo, o advectivo, resultando em fluxos mássico e molar absolutos (ou totais),  $n_i^{"} e N_i^{"}$ , respectivamente. Sendo  $V_i$  a velocidade absoluta da espécie *i*, que representa a velocidade média das partículas de *i*, tem-se:

$$n_i^{"} = 
ho_i \mathbf{v}_i$$
  
 $N_i^{"} = C_i \mathbf{v}_i$ 

Ao dizer que a grandeza é absoluta, significa que ela foi definida em relação a um eixo fixo no espaço. Assim, para uma mistura binária de A e B, tem-se:  $\boldsymbol{n}^{"} = \boldsymbol{n}_{A}^{"} + \boldsymbol{n}_{B}^{"} = \rho_{A}\boldsymbol{v}_{A} + \rho_{B}\boldsymbol{v}_{B} = \rho\boldsymbol{v}$ 

### $v = m_A v_A + m_B v_B$

E o fluxo mássico de A, em termos de velocidade, é:

# $j_A \equiv \rho_A (v_A - v) = n_A^{"} - \rho_A v$

De modo que o fluxo absoluto de A possui dois termos: um devido à difusão (movimento de A **em relação** ao movimento mássico médio da mistura) e outro devido à advecção (movimento de A **com** o movimento mássico médio da mistura) (BERGMAN et al., 2014):

### $\vec{n_A} = -\rho D_{AB} \nabla m_A + \rho_A (m_A v_A + m_B v_B) = -\rho D_{AB} \nabla m_A + m_A (\vec{n_A} + \vec{n_B})$

As equações apresentadas são análogas para a espécie B, e os fluxos difusivos em uma mistura binária e as difusividades estão relacionados por:

### $j_A + j_B = 0$

# $D_{AB} = D_{BA}$

De maneira similar, podem ser obtidas expressões para os fluxos molares das espécies e a velocidade molar média da mistura ( $\gamma$ \*):

### $v^* = x_A v_A + x_B v_B$

Um caso específico de transferência de massa em meio não estacionário é o de evaporação em uma coluna, como ilustrado na Figura 4.22.

Um sistema a temperatura e pressão constantes é composto por uma coluna, a qual contém no fundo uma camada de líquido (A) e no topo passa uma mistura gasosa (A+B) com concentrações fixas. As fases líquido e vapor estão em equilíbrio na interface do líquido, de modo que a concentração de A nesse ponto corresponde às condições de saturação. Assim, A evapora na interface do líquido e difunde para cima, enquanto B difunde para baixo. Figura 4.22 | Evaporação do líquido A em uma mistura gasosa binária A + B



Fonte: Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 825).

Assumindo difusão unidimensional e regime estacionário, não há acúmulo de A, e seu fluxo molar é constante ao longo da coluna:

$$\frac{dN_{A,x}^{"}}{dx}=0$$

Considerando que a espécie B não pode ser absorvida no líquido A, haverá regime estacionário somente se  $N_{B,x}^{"} = 0$ , ou seja, a difusão de B para baixo é compensada pela advecção para cima. Dessa forma:

$$N_{A,x}^{"} = -CD_{AB}\frac{dx_{A}}{dx} + x_{A}N_{A,x}^{"} \rightarrow N_{A,x}^{"} = -\frac{CD_{AB}}{1 - x_{A}}\frac{dx_{A}}{dx}$$

Aplicando a condição de estado estacionário, tem-se:

$$\frac{dN_{A,x}^{"}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - x_A} \frac{dx_A}{dx} \right) = 0$$

Portanto:

$$N_{A,x}^{"} = \frac{CD_{AB}}{L} \ln \left( \frac{1 - x_{A,L}}{1 - x_{A,0}} \right)$$



Entretanto, se observarmos a coluna de líquido da Figura 4.22 por um tempo, nota-se que há uma variação temporal em seu nível e, consequentemente, na altura da coluna de ar estagnado. Ou seja, o nível do líquido não é constante como assumido anteriormente (estado estacionário). Nesse caso, considera-se estado pseudoestacionário, e o fluxo global do soluto A pode ser determinado em função dessa variação por:

$$N_{A,x}^{"} = \frac{\rho_A}{MM_A} \left(\frac{dL}{dt}\right)$$

No entanto, quando a difusão de uma pequena quantidade de A ocorre no interior de uma espécie B estagnada, a contribuição do termo advectivo para a transferência de massa pode ser desprezada, sendo apropriada uma aproximação de meio estacionário e a consideração apenas da difusão. Segundo Bergman et al. (2014), isso ocorre na difusão de um gás diluído ou de um líquido no interior de um meio hospedeiro líquido estagnado ou sólido. Nesses casos, a massa específica e a concentração total da mistura são aproximadamente as do solvente (B).

A lei de conservação de espécies em um volume de controle pode ser anunciada, segundo Bergman et al. (2014, p. 603), por: a taxa na qual a massa de alguma espécie entra em um volume de controle ( $\dot{M}_{A,ent}$ ), mais a taxa na qual a massa da espécie é gerada no interior do volume de controle ( $\dot{M}_{A,g}$ , devido a reações químicas), menos a taxa na qual a massa dessa espécie deixa o volume de controle ( $\dot{M}_{A,sai}$ ). O resultado tem que ser igual à taxa de aumento da massa da espécie acumulada no interior do volume de controle ( $\dot{M}_{A,acu}$ ). Ou seja:

$$\dot{M}_{A,ent} + \dot{M}_{A,g} - \dot{M}_{A,sai} = \frac{dM_A}{dt} \equiv \dot{M}_{A,acu}$$

Matematicamente, tem-se a relação a seguir para coordenadas geométricas.

$$-\frac{\partial n_{A}^{"}}{\partial x} - \frac{\partial n_{A}^{"}}{\partial y} - \frac{\partial n_{A}^{"}}{\partial z} + \dot{n}_{A} = \frac{\partial \rho_{A}}{\partial t}$$

Portanto, consideremos um meio, no qual ocorre apenas difusão, composto pela mistura A + B. Para difusividade e densidade da mistura constantes, com base na lei de Fick da difusão, obtém-se:



De modo que duas condições de contorno devem ser especificadas para cada coordenada utilizada na descrição do sistema. Além disso, para condições transientes, necessita-se de uma condição em tempo inicial. Simplificações são obtidas quando não há reação química:  $\dot{n}_A = \dot{N}_A = 0$ ; quando a difusão é unidimensional; e o regime é estacionário, como ilustrado na Figura 4.23 para a difusão de A através de um meio plano composto por A e B:

$$\frac{d}{dx}\left(CD_{AB}\frac{dx_{A}}{dx}\right)=0$$

Figura 4.23 | Difusão em um meio plano estacionário



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 605).

Resolvendo a equação apresentada para as condições de contorno da Figura 4.23, tem-se a distribuição das frações molares de A e sua taxa molar. Isso também pode ser feito para coordenadas cilíndricas e esféricas, e os resultados obtidos para os três sistemas de coordenadas estão apresentados na Tabela 4.3.

Geometria	Distribuição de fração molar de A	Taxa molar de A
X <sub>A,52</sub>	$x_{A}(x) = (X_{A,s2} - X_{A,s1}) \frac{x}{L} + X_{A,s1}$	$N_{A,x} = \frac{D_{AB}A}{L} (C_{A,s1} - C_{A,s2})$
r <sub>2</sub> r x <sub>A,s2</sub> x <sub>A,s1</sub>	$x_{A}(r) = \frac{X_{A,s1} - X_{A,s2}}{\ln(r_{1} / r_{2})} \ln\left(\frac{r}{r_{2}}\right) + X_{A,s2}$	$N_{A,r} = \frac{2\pi L D_{AB}}{\ln(r_2 / r_1)} (C_{A,s1} - C_{A,s2})$
<i>r</i> <sub>1</sub> <i>r</i> <sub>2</sub> <i>x</i> <sub>A,52</sub> <i>x</i> <sub>A,51</sub>	$x_{A}(r) = \frac{X_{As1} - X_{As2}}{1/r_{1} - 1/r_{2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{2}}\right) + X_{As2}$	$N_{A,r} = \frac{4\pi D_{AB}}{1/r_1 - 1/r_2} (C_{A,s1} - C_{A,s2})$

Tabela 4.3 | Soluções para difusão de A em meio estacionário

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 605-606).

Outro caso é quando ocorre difusão mássica e há reações químicas homogêneas no meio. Considerando meios estacionários, difusão unidimensional, regime estacionário e concentração da mistura e difusividade de A em B constantes, tem-se:

$$D_{AB}\frac{d^2C_A}{dx^2}+\dot{N}_A=0$$

Sendo a taxa de produção volumétrica de A,  $\dot{N}_{A}$ , positiva para geração de A e negativa para seu consumo. Essa taxa depende da ordem da reação, sendo constante para reações de ordem zero e proporcional à concentração de A para ordem 1, que é mais comum:

$$\dot{N}_A = k_1 C_A$$
  
De modo que:

$$D_{AB}\frac{d^2C_A}{dx^2} + k_1C_A = 0$$

Cuja solução é dada pela equação a seguir, para  $C_1$  e  $C_2$  dependentes das condições de contorno especificadas.

$$C_A(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$
  
Em que  $m = \left(\frac{k_1}{D_{AB}}\right)^{0.5}$ .

Para exemplificar, considere um gás A que se difunde no líquido B, no qual é solúvel e é consumido por uma reação de primeira ordem (Figura 4.24). A solução é diluída, na interface a concentração de A no líquido é  $C_{A,0}$  e o fundo do recipiente é impermeável à A, ou seja, temos que  $dC_A / dx|_{x=L} = 0$ .

Figura 4.24 | Difusão e reação homogênea do gás A no líquido B



Fonte: Bergman et al. (2014, p. 611).

Essas condições de contorno fornecem o seguinte perfil de concentração de A:

$$C_A(x) = C_{A,0} \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

E o fluxo de A através da interface gás-líquido é dado por:

$$N_{A,x}^{"}(0) = D_{AB}C_{A,0}m \tanh mL$$

Para condições de contorno diferentes de concentração de uma espécie na superfície constante e para reações catalíticas, consulte

Pesquise mais

o subcapítulo 14.5, *Condições de contorno e concentrações descontínuas em interfaces*", do capítulo 14 Transferência de massa por difusão, de Bergman et al. (2014, p. 607-611).

Além disso, para *Difusão de massa transiente*, consulte o capítulo 14, Transferência de massa, de Çengel, Ghajar e Kanoglu (2012, p. 818-820).

# Sem medo de errar

Na empresa de soluções energéticas, será necessário quantificar a taxa de evaporação da água armazenada em um tanque a 333 K e 1 atm. Trata-se de um tanque de armazenamento cilíndrico, de 1 m de diâmetro e 5 m de altura, o nível da água é mantido em 1,8 m e a umidade relativa do ar que está em contato com a superfície superior do cilindro é de 35 %. Quais considerações devem ser feitas para a solução do problema? Trata-se apenas de um mecanismo de transferência de massa? Qual é a importância da difusão nesse processo? Quanto tempo levaria para evaporar toda a água do tanque?

Dados: pressão de saturação da água a 333 K é de 0,1962 atm; difusividade mássica de água em ar a 298 K e 1 atm é de  $2,6\cdot10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s; constante universal dos gases é  $8,2057\cdot10^{-5}$ m<sup>3</sup>·atm/K/mol; densidade da água a 333 K é de 983,3 kg/m<sup>3</sup>.

Para solução da problemática que está ocorrendo na empresa de soluções energéticas, deve-se simplificar a abordagem da transferência de massa, considerando as seguintes hipóteses:

- A difusão ocorre apenas em uma direção (unidimensional).
- A água é mantida a temperatura, pressão e nível constantes.
- Trata-se de regime estacionário.
- Não ocorrem reações químicas.
- Trata-se de uma mistura binária, formada por água (A) e ar (B).

O primeiro passo consiste em determinar a difusividade mássica de A em B a 333 K:

$$\frac{D_{AB_1}}{D_{AB_2}} \sim \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

$$D_{AB_1} = D_{AB_2} \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} = 2,6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1} \left( \frac{333}{298} \right)^{3/2} = 3,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

A concentração da mistura é dada por:

$$C = \frac{P}{RT} = \frac{1}{8,2057 \cdot 10^{-5} \times 333} = 36,6 \text{ mol/m}^3$$

Já as frações molares de A são dadas por:

$$x_{A,0} = \frac{p_{A,sat}}{P} = \frac{0,1962}{1} = 0,1962$$
$$x_{A,L} = 0,35 \frac{p_{A,sat}}{P} = 0,35 \frac{0,1962}{1} = 0,0687$$

E o fluxo molar de A, considerando o efeito do movimento global do fluido, é dado por:

$$N_{A,x}^{"} = \frac{CD_{AB}}{L} \ln\left(\frac{1 - x_{A,L}}{1 - x_{A,0}}\right) = \frac{36,6 \times 0,00307}{5 - 1,8} \ln\left(\frac{1 - 0,0687}{1 - 0,1962}\right) = 0,00517$$

## $mol/(m^2 \cdot s)$

Ou seja, esse fluxo é o total, que considera a difusão e a advecção de massa. Se fosse considerado apenas o componente difusivo, o fluxo seria dado por:

$$N_{A,x}^* = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dx} = \frac{CD_{AB}}{L}(x_{A,0} - x_{A,L}) = \frac{36,6 \times 0,00307}{5 - 1,8}(0,1962 - 0,0687) = 0,00448$$

### $mol/(m^2 \cdot s)$

Assim a difusão representa 87% de todo o fluxo molar, sendo o mecanismo de transferência de massa mais relevante.

A taxa molar de evaporação da água no tanque cilíndrico, considerando tanto a difusão quanto a advecção, é dada por:

$$N_{A,x} = AN_{A,x}^{"} = \frac{\pi D^2}{4}0,00517 = \frac{\pi 1^2}{4}0,00517 = 0,00406$$

### mol/s

O que equivale a uma taxa mássica de:

$$n_{A,x} = MM_AN_{A,x} = 18 \times 0,00406 = 0,0731$$
 g/s

O volume e a massa de água no tanque são:

$$V_A = \frac{\pi D^2}{4} L = \frac{\pi 1^2}{4} 1,8 = 1,41 \text{ m}^3$$

$$m_{A} = V_{A} 
ho_{A} =$$
 1,41 $imes$ 983,3 $=$ 1.386 kg

Portanto, o tempo para evaporar toda a água é de:

 $t = 1,386 \cdot 10^6 / 0,0731 = 1,90 \cdot 10^7$  s = 5.278 h = 220 dias.

De modo que, resolvendo esses questionamentos decorrentes do armazenamento de água na empresa de soluções energéticas na qual você trabalha, você pôde identificar e analisar a transferência de massa por difusão.

### Avançando na prática

# Ação de medicamento foliar como função da espessura da folha

#### Descrição da situação-problema

A aplicação de fertilizante (A) em determinada planta ocorre sobre as folhas (B), no interior das quais ocorre a ação do composto. A empresa fabricante desse fertilizante foliar observou que em determinadas safras da planta o produto não era eficaz e, após várias observações, constatou que isso ocorria quando as folhas eram mais grossas. Surgiu então a necessidade de contratar alguém com conhecimentos de transferência de massa para identificar qual deve ser a máxima espessura das folhas (L) que garanta um tratamento eficaz da planta para a dose recomendada no rótulo do produto. Assim, caso essa máxima espessura seja inferior à mais comum espessura das folhas dessa planta (0,500 mm), será necessário adequar a dose recomendada no rótulo.

Como você havia se destacado nessa área do conhecimento durante sua formação, conseguiu a vaga para fazer essa avaliação. Para começar seu trabalho, você identificou que a concentração aplicada do fertilizante na superfície superior da folha é de 10 mol/m<sup>3</sup>, sua difusividade mássica nessa superfície é de 7,65  $\cdot$  10<sup>-10</sup> m<sup>2</sup>/s e a superfície inferior da folha é impermeável. Além disso, a reação que ocorre é de primeira ordem com constante da taxa ( $k_1$ ) igual a 0,083 s<sup>-1</sup>. Segundo o fabricante, o conceito de eficácia na ação do fertilizante (A) é função de sua taxa de reação, que deve ser de no mínimo 0,062  $mol/(s \cdot m^3)$ .

#### Resolução da situação-problema

Trata-se de um problema de difusão mássica com reação química homogênea de primeira ordem. Considerando condições unidimensionais, regime estacionário, meio estacionário e homogêneo, tem-se:

$$D_{AB}\frac{d^2C_A}{dx^2}-k_1C_A=0$$

A solução para as condições de contorno  $C_A(0) = C_{A,0}$  e  $dC_A / dx|_{x=1} = 0$  é:

$$C_A(x) = C_{A,0} \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

Em que:

$$m = \left(\frac{k_1}{D_{AB}}\right)^{0.5} = \left(\frac{0,083}{7,65 \cdot 10^{-10}}\right)^{0.5} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$$

$$C_{A}(L) = C_{A,0} \frac{1}{\cosh mL}$$

 $\dot{N}_{A}(L) = -k_{1} \frac{C_{A,0}}{\cosh mL} \rightarrow L = \frac{\cosh^{-1} \left[ \frac{-k_{1}C_{A,0}}{\dot{N}_{A}(L)} \right]}{m}$ 

$$L = \frac{\cosh^{-1}\left[\frac{-0,083 \times 10}{0,062}\right]}{1,04 \cdot 10^4} = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,316 \text{ mm}$$

Ou seja, para que a aplicação dessa concentração do fertilizante seja eficaz, a folha não deve ter espessura superior a 0,316 mm. Como esse valor de L obtido é inferior à mais comum espessura das folhas dessa planta (0,500 mm), conclui-se que a dose recomendada no rótulo do fertilizante não é adequada e precisa ser revista.

### Faça valer a pena

**1.** Gás carbônico (A) difunde em nitrogênio (B) com difusividade mássica igual a  $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  para temperatura de 293 K e pressão de 1 atm. Para um gradiente de concentração igual a 5 kmol/(m<sup>3</sup> · m) a 350 K e 1,4 atm, com base na lei de Fick da difusão, é possível determinar o fluxo molar da espécie A.

Assinale a alternativa que contém o fluxo molar da espécie A e seu fluxo mássico.

a)  $1,04 \cdot 10^{-4} \text{ kmol/(m}^2 \cdot s) \in 4,60 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^2 \cdot s)$ . b)  $7,45 \cdot 10^{-5} \text{ kmol/(m}^2 \cdot s) \in 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^2 \cdot s)$ . c)  $9,56 \cdot 10^{-5} \text{ kmol/(m}^2 \cdot s) \in 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^2 \cdot s)$ . d)  $5,71 \cdot 10^{-5} \text{ kmol/(m}^2 \cdot s) \in 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^2 \cdot s)$ . e)  $1,46 \cdot 10^{-4} \text{ kmol/(m}^2 \cdot s) \in 6,43 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^2 \cdot s)$ .

**2.** Considere um capilar de 10 cm de altura, contendo 1 cm de metanol (A) e preenchido com ar seco (B) e estagnado a 1 atm e 25 °C, como mostra a Figura 4.25. Além disso, no topo do capilar, há vazão de ar suficiente para arrastar todo o vapor de metanol. Sabe-se que, nessas condições, a difusividade de metanol em ar é de 0,162 cm<sup>2</sup>/s, a pressão de saturação do metanol nesta temperatura é de 0,132 atm e a constante universal dos gases é de 82,05 cm<sup>3</sup> · atm/(mol·K).

Figura 4.25 | Capilar contendo metanol



Fonte: elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto do fluxo molar de metanol.

a) 3,75 mol/(m<sup>2</sup> · h). b) 0,00450 mol/(cm<sup>2</sup> · s). c) 40,9 mol/(m<sup>2</sup> · h). d) 0,100 mol/(m<sup>2</sup> · s). e) 0,08 mol/(m<sup>2</sup> · s).

**3.** Hélio é armazenado a 300 K em um recipiente esférico de Pyrex com 0,5 m de diâmetro externo e espessura de 1 cm. A concentração molar de hélio na superfície interna do recipiente é de 12,4 **mol/m<sup>3</sup>** e na superfície externa é nula, como mostra a Figura 4.26. Sabe-se que a difusividade de hélio em Pyrex nesta temperatura é de **4**,50 · 10<sup>-15</sup> m<sup>2</sup>/s .



Figura 4.26 | Hélio armazenado em um vaso esférico

Fonte: adaptada de Bergman et al. (2014, p. 608).

Qual é a taxa mássica de difusão de hélio através do recipiente Pyrex?

- a)  $4,56 \cdot 10^{-12}$  g/s.
- b) 4,50 · 10<sup>-12</sup> g/s.
- c) **9,11.10<sup>-12</sup>** g/s.
- d) **3,64** · **10**<sup>-17</sup> g/s.
- e) **1,82.10**<sup>-11</sup> g/s.

# Referências

ARAÚJO, C. Transmissão de calor. Rio de Janeiro: LTC, 1978. 390 p.

BERGMAN, T. L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 672 p.

CREMASCO, M. A. **Fundamentos de transferência de massa.** 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2002. 728 p.

ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, J. A.; KANOGLU, M. **Transferência de calor e massa.** 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.



