Resistência dos Materiais Avançados

Resistência dos Materiais Avançado

Armando Diório Filho
Paulo Henrique Ferreira Loz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Diório Filho, Armando
D593r Resistência dos materiais avançado / Armando Diório Filho, Paulo Henrique Ferreira Loz. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
232 p.

ISBN 978-85-522-1175-4

1. Resistência dos materiais. 2. Flexão. 3. Deformação. I. Diório Filho, Armando. II. Loz, Paulo Henrique Ferreira. III. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Prezado aluno, bem-vindo à disciplina *Resistência dos Materiais Avançado*!

Essa disciplina é parte fundamental da área de estruturas, fornecendo parte dos conhecimentos básicos utilizados na análise de estruturas isostáticas, o que permite que projetos estruturais se tornarem reais. Ao longo da disciplina, serão apresentados os cálculos de algumas características geométricas de figuras planas. A partir dos esforços externos, determinaremos os diagramas das solicitações internas e, com estes, estudaremos peças sujeitas à flexão, na segunda seção do curso, sujeitas à flambagem, e na terceira, para podermos dimensioná-las. Finalmente, conheceremos os conceitos de energia de deformação e os critérios de resistência para utilizá-los, principalmente, na verificação de peças estruturais que apresentam problemas do tipo trincas ou deformações excessivas.

O objetivo desta disciplina é mostrar como aplicar as características geométricas, as ações externas, os diagramas dos esforços internos solicitantes e o conceito de esbeltez na análise de barras sujeitas a esforços de flexão ou de flambagem, para ser capaz de verificar o comportamento das estruturas e saber aplicar métodos de análise de barras delgadas. Além disso, também objetiva apresentar os métodos de energia, a partir dos conceitos de energia de deformação, e os critérios de resistência para materiais dúcteis e frágeis, aplicando as teorias de previsão de falhas, a fim de prever a falha estrutural de elementos sujeitos a um carregamento estático combinado.

Na primeira unidade, estudaremos como determinar algumas características geométricas de figuras planas, quais são e como considerar as cargas externas atuantes e como relacioná-las com os diagramas dos esforços internos (esforço cortante e momento fletor). Na segunda unidade, o estudo se dará sobre a flexão (a simples, a composta e a assimétrica), veremos as definições e como determinar as tensões atuantes e as deformações para cada uma dessas situações. Essas unidades são necessárias para dimensionar peças estruturais dos tipos viga e laje.

A terceira unidade abrange o conceito de estabilidade elástica e o estudo da flambagem elástica e plástica de barras. A determinação das tensões e deformações atuantes devido ao efeito da flambagem e o cálculo do raio de giração, visto na primeira unidade, são necessários para o dimensionamento de pilares.

Na quarta e última unidade, veremos os conceitos de energia de deformação e os critérios de resistência para materiais dúcteis e frágeis. Esses conceitos são utilizados na verificação de peças estruturais que apresentam trincas ou deformações excessivas, além disso, é utilizado, também, quando se pretende aumentar o carregamento sobre uma peça existente ou quando se deseja fazer uma previsão de falha estrutural devido a um carregamento combinado.

Dedique-se aos estudos, pois o conteúdo aqui apresentado é fundamental para a engenharia estrutural. Tenha certeza que, embora complexa, a área de estruturas é compensatória. Muitos e muitos projetos estruturais estarão aguardando você. Bons estudos!

Características geométricas, esforços externos e internos

Convite ao estudo

Nesta unidade, veremos como determinar o momento estático, o centroide, o momento de inércia, e do raio de giração de figuras planas, simples ou compostas, que formam a seção transversal (ST) das peças estruturais. Essas características geométricas são responsáveis por parte da resistência das peças estruturais aos esforços solicitantes. Estudaremos os tipos de ações nas estruturas (carga concentrada, uniformemente distribuída e variável), e como representá-las graficamente. Finalmente, estudaremos como traçar os diagramas dos esforços solicitantes internos e qual a relação entre eles. Você já se perguntou por que uma carga P qualquer atuando em uma régua apoiada nas duas extremidades e colocada na posição "deitada", ou horizontal, provoca maior deformação na régua do que a provocada quando a colocamos na posição "em pé", ou vertical? Note que entre uma situação e outra houve somente a mudança da posição da régua. Isso alterou a posição da ST. A carga P necessária para romper (quebrar) a régua quando colocada "deitada" é bem menor que a necessária quando a régua está na posição "em pé".

Nosso objetivo final é reduzir a deformação excessiva que uma viga apresenta. Para tanto, vamos alterar a ST da viga existente, determinar qual será a deformação que a viga alterada irá apresentar e verificar se esse novo valor para a deformação está dentro do limite aceitável. Para atingir o objetivo desta unidade, que é essa análise estrutural, necessitamos calcular as características geométricas da nova

ST, determinar os esforços externos e traçar os diagramas das solicitações internas (momento fletor e esforço cortante).

Contratado por uma indústria que produz garrafas PET, o escritório de engenharia em que você trabalha o designou como responsável para apresentar a solução do problema de uma viga retangular metálica que apresenta deformação excessiva e serve de apoio a um sistema de controle de qualidade formado por um conjunto óptico de grande sensibilidade conectado a um sistema computacional. No local, você efetuou várias medições e observações, entre elas, a de que a viga também serve de apoio para uma passarela feita em chapa metálica. Com raciocínio crítico e de solução de problemas e muita criatividade, você propôs como solução que uma barra retangular fosse soldada na viga existente formando uma seção T invertida. Necessitamos, agora, calcular as características geométricas da nova ST, o novo carregamento e os diagramas dos esforços solicitantes para, por fim, determinar qual o valor da deformação para a viga reforçada e se ele está dentro dos limites aceitáveis. Algumas perguntas podem ser feitas para esse contexto proposto: e se o mesmo reforço fosse soldado na posição vertical, ao lado da viga existente? E se fosse soldado também na posição vertical, mas em baixo da viga existente? Haveria alguma outra forma de reforçar a viga sem soldar outra barra? Sem reforçar a viga, haveria alguma outra solução possível?

Após estudar os conteúdos propostos nesta unidade, você será capaz de efetuar os cálculos necessários e responder a essas perguntas. Bons estudos!

Seção 1.1

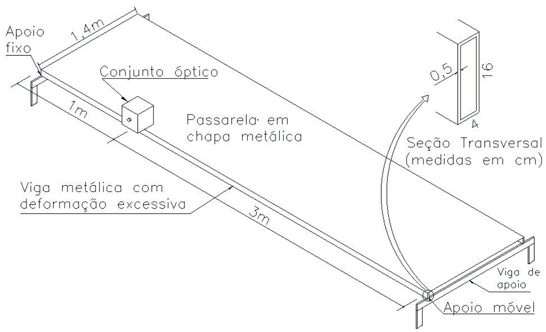
Características geométricas de superfícies planas

Diálogo aberto

Prezado aluno, por que determinadas vigas ou pilares têm formato retangular enquanto outras têm formato de T, L ou I, entre outros? Por que algumas com formato retangular, por exemplo, têm certas dimensões enquanto outras, na mesma estrutura, têm dimensões bem superiores? Estudaremos, nesta seção, como determinar o momento estático, o centroide, o momento de inércia e o raio de giração de figuras planas, simples e compostas. Essas características geométricas são responsáveis por parte da resistência das peças estruturais.

Nosso objetivo final é fazer uma análise estrutural de peças sujeitas à flexão. Para tanto, desenvolveremos nossa habilidade de solucionar problemas utilizando raciocínio lógico para calcular as características geométricas da ST (seção transversal), determinar os esforços externos e traçar os diagramas das solicitações internas. Com criatividade, iremos propor soluções, utilizando também de raciocínio crítico e de solução de problemas. Aplicaremos esses cálculos para solucionar o seguinte problema: uma indústria de produção de garrafas PET possui um sistema de controle de qualidade composto por um conjunto óptico computadorizado. Esse sistema, entretanto, apresenta erros nas leituras e a empresa descartou que o problema seja com ele, alegando que a causa, devido à alta sensibilidade, está na estrutura onde ele foi montado. O gerente de projetos do escritório em que você trabalha designou-o para apresentar uma solução para o problema proposto. Visitando o local, você montou o esquema da Figura 1.1.

Figura 1.1 | Sistema óptico sobre viga com deformação excessiva



Fonte: elaborada pelo autor.

Na vistoria, com algumas observações e medidas realizadas, você determinou que a viga metálica ($75\ kN\ /\ m^3$) possui um apoio fixo na extremidade esquerda e um apoio móvel na outra. Além disso, você constatou que atua na viga uma carga concentrada de 3 kN relativa ao peso do sistema óptico; observou a existência de uma passarela em chapa metálica (espessura = 8 mm) apoiada apenas pelas laterais ao longo do vão da viga em questão e de outra viga paralela a esta. Em consulta à norma de cargas em edificações, você concluiu que a passarela deve suportar uma sobrecarga de $2{,}0\ kN\ /\ m^2$. Através de ensaio, determinou que a viga apresenta flecha (deformação) excessiva para o sistema óptico. Para reforçar, você optou por soldar outra barra metálica de iguais dimensões na parte inferior da viga existente, formando uma nova ST vazada (do tipo T invertido).

Seu gerente de projetos, para iniciar a solução, quer que você entregue em um relatório interno de uma página os dados observados na vistoria e os valores dos centroides e dos momentos de inércia para a antiga e a nova ST. Ele pergunta, também: existe vantagem em soldar o mesmo reforço na posição vertical ao lado da viga existente ou abaixo dela? Normalmente, as empresas possuem um modelo padrão para os relatórios e código para os clientes, para os contratos e para os projetos (estrutural, elétrico etc.).

Para realizar esse trabalho, você precisa saber determinar as características geométricas da ST da viga, principalmente o centroide e os momentos de inércia. Dedique-se com afinco, pois essas características geométricas são responsáveis por parte da resistência das peças estruturais aos esforços solicitantes e serão fundamentais em seus projetos futuros. Bons estudos!

Não pode faltar

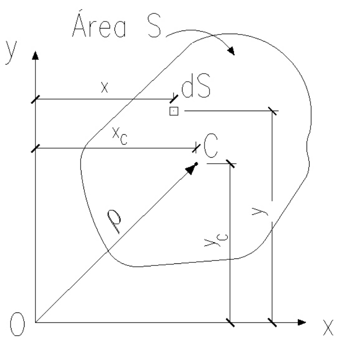
As figuras planas simples, como retângulos, triângulos, círculos etc., ou uma combinação dessas, que são chamadas de figuras planas compostas (trapézios, losangos etc.) possuem características geométricas. As mais simples de serem percebidas são as dimensões, tais como base, altura, raio etc. Outras características necessitam que sejam efetuados cálculos para serem conhecidas, tais como a área, o momento estático, o centroide, o momento de inércia e o raio de giração.

Estudaremos, nesta seção, como determinar essas características para figuras planas, simples e compostas, porque elas formam as ST (seções transversais) das peças estruturais, por exemplo, uma viga retangular, cuja ST é um retângulo (figura simples), ou uma viga T, cuja ST é composta por dois retângulos (um "deitado" sobre outro "em pé" – figura composta).

Momento estático e centroide de figuras planas

Seja uma figura plana qualquer com área total S mostrada na Figura 1.2. Tomemos nessa figura um elemento infinitesimal com área dS e coordenadas x e y.

Figura 1.2 | Figura plana com área S



Fonte: elaborada pelo autor.

Definimos o momento estático para um elemento infinitesimal como sendo o produto da área desse elemento (dS) pela distância dele ao eixo de referência (x ou y), ou seja, $dQ_x = y.dS$ e $dQ_y = x.dS$. Portanto, para obter o momento estático (também chamado momento de primeira ordem) da área total da Figura 1.2, devemos integrar sobre toda a superfície. Dessa forma, as expressões:

$$Q_x = \int_S y \,.\, dS \qquad \text{Eq. 1.1} \quad \text{e} \quad Q_y = \int_S x \,.\, dS \qquad \text{Eq. 1.2}$$

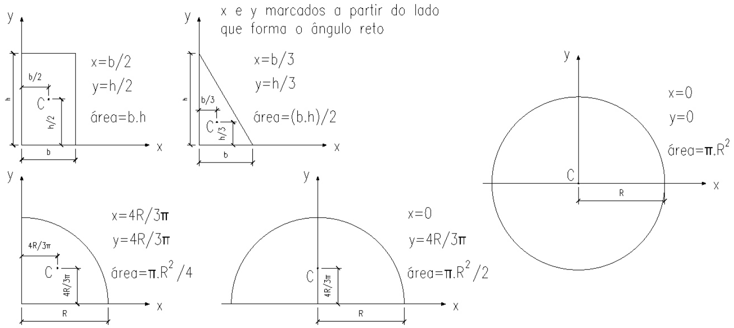
Fornecem o momento estático de toda a área S em relação aos eixos x e y, respectivamente. A partir de uma análise dimensional, temos que a unidade dos momentos estáticos é dada pela dimensão L^3. Os momentos estáticos são necessários para determinar as tensões de cisalhamento que atuam na peça devido ao esforço cortante.

Ainda na Figura 1.2, considere o ponto C de coordenadas x_c e y_c . Ele representa o centroide de toda a área S, ou seja, o centro geométrico da figura. Suas coordenadas podem ser determinadas pelas expressões:

$$x_c = \frac{Q_y}{S} = \frac{\int_S x \,.\, dS}{\int_S dS} \qquad \text{Eq. 1.3} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{Q_x}{S} = \frac{\int_S y \,.\, dS}{\int_S dS} \qquad \text{Eq. 1.4}$$

Resolvendo as Equações 1.3 e 1.4 encontramos as expressões que fornecem as coordenadas dos centroides para as figuras simples. Essas expressões estão mostradas na Figura 1.3.

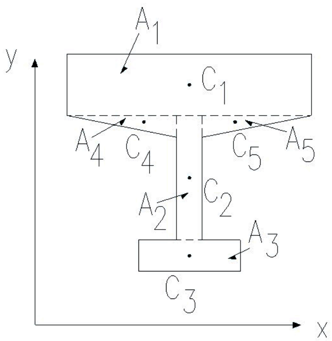
Figura 1.3 | Expressões para as coordenadas do centroide de figuras planas simples



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha, agora, que nossa figura seja decomposta em figuras simples (semicírculos, retângulos, triângulos etc.) como apresentado na Figura 1.4, ou seja, temos uma figura composta. Note que podemos dividir (linha tracejada) a figura em retângulos (A_1, A_2, e A_3) e triângulos (A_4, e A_5), cada um com seu centroide, cujas coordenadas são x_i e y_i.

Figura 1.4 | Figura plana composta por figuras simples conhecidas



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, podemos escrever que as coordenadas do centroide da figura original serão dadas por:

$$x_c = \frac{A_1.x_1 + A_2.x_2 + ... + A_5.x_5}{A_1 + A_2 + ... + A_5} = \frac{\sum_i A_i.x_i}{\sum_i A_i} \quad \text{Eq. 1.5}$$

$$y_c = \frac{A_1.y_1 + A_2.y_2 + \ldots + A_5.y_5}{A_1 + A_2 + \ldots + A_5} = \frac{\sum_i A_i.y_i}{\sum_i A_i} \quad \text{Eq. 1.6}$$

De modo simplificado, temos o seguinte roteiro para determinar o centroide de figuras compostas, que podem ser divididas em figuras simples:

1º passo: adotar um sistema de eixos x e y que tangenciem a figura de modo que ela fique totalmente no primeiro quadrante (para não preocupar com os sinais das coordenadas x_i e y_i).

2º passo: dividir a figura composta em figuras simples.

3º passo: marcar os valores das coordenadas x_i e y_i dos centroides das figuras simples.

4º passo: preencher o Quadro 1.1 a seguir.

Quadro 1.1 | Quadro para cálculo das coordenadas do centroide de figuras compostas

1	2	3	4	5	6
Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i$	$A_i.y_i$
1	A_1	x_1	y_1	$A_1.x_1$	$A_1.y_1$
2	A_2	x_2	y_2	$A_2.x_2$	$A_2.y_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	A_n	x_n	y_n	$A_n.x_n$	$A_n.y_n$
	$\sum A_i$			$\sum A_i.x_i$	$\sum A_i.y_i$

Fonte: adaptado de: Beer et al (2013, p. 230).

5º passo: calcular as coordenadas do centroide da figura composta (x_c e y_c). Note que, para o cálculo de x_c , mostrado na equação 1.5 a seguir, o numerador é o resultado da soma de toda a coluna 5 e o denominador é o resultado da soma de toda a coluna 2 do quadro; e para o cálculo de y_c , mostrado na equação 1.6, o numerador é o resultado da soma de toda a coluna 6 e o denominador continua sendo o resultado da soma de toda a coluna 2.

$$x_c = \frac{A_1.x_1 + A_2.x_2 + \ldots + A_5.x_5}{A_1 + A_2 + \ldots + A_5} = \frac{\sum_i A_i.x_i}{\sum_i A_i} \quad \text{Eq. 1.5}$$

$$y_c = \frac{A_1.y_1 + A_2.y_2 + \ldots + A_5.y_5}{A_1 + A_2 + \ldots + A_5} = \frac{\sum_i A_i.y_i}{\sum_i A_i} \qquad \text{Eq. 1.6}$$

Observação: no caso de figuras vazadas, ou seja, com "furos" ou regiões em que há transpasse (não existe área), devemos considerar uma figura simples com a área total e subtrair outra figura simples que representa a área vazada. Neste caso, o valor da área a ser colocado no quadro para a figura que representa o transpasse deve ser negativo e as colunas 5 e 6 da linha que representa essa figura também serão negativas (por causa da multiplicação).

Reflita

O que acontece com o centroide de uma figura composta se ela tiver um eixo de simetria (dica: analise um quarto de círculo e um semicírculo)? E dois ou mais eixos de simetria (dica: analise um retângulo ou um círculo)?

Momento de inércia de figuras planas

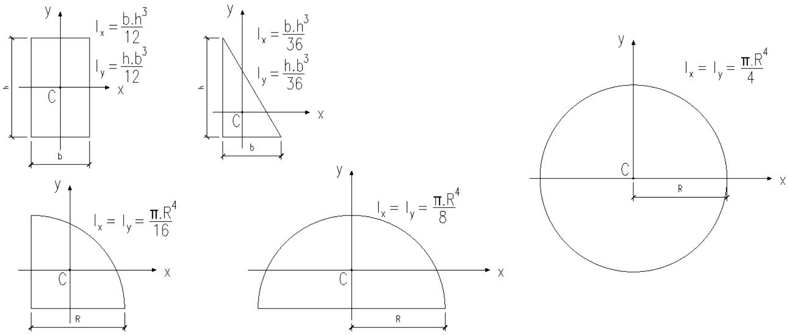
Consideremos, novamente, a Figura 1.2. Definimos o momento de inércia para um elemento infinitesimal como sendo $dI_x = y^2.dS$ e $dI_y = x^2.dS$. Portanto, para obter o momento de inércia (também chamado momento de segunda ordem) da área total da Figura 1.2, devemos integrar sobre toda a superfície. Teremos, então, as expressões:

$$I_x = \int_S y^2.dS \quad \text{Eq. 1.7} \qquad \text{e} \qquad I_y = \int_S x^2.dS \quad \text{Eq. 1.8}$$

As equações 1.7 e 1.8 fornecem os momentos de inércia de toda a área S em relação aos eixos x e y, respectivamente. Temos que alguns livros chamam I_x e I_y de J_x e J_y, respectivamente.

Resolvendo essas equações para figuras simples, com os eixos x e y passando pelo centroide dessas figuras, encontramos as expressões que fornecem os momentos de inércia I_x e I_y para as figuras simples. Essas expressões estão mostradas na Figura 1.5.

Figura 1.5 | Expressões para os momentos de inércia I_x e I_y de figuras planas simples



Fonte: elaborada pelo autor.

Os momentos de inércia são características geométricas importantes utilizadas no dimensionamento de peças sujeitas à flexão. Quanto maior for o momento de inércia da ST em relação ao eixo perpendicular ao plano de atuação da flexão, maior será a resistência da peça. Realizando uma análise dimensional, temos que a unidade do momento de inércia tem a seguinte dimensão: L^4.

O momento polar de inércia é uma característica geométrica utilizada nos cálculos das tensões devidas à torção e representa parte da resistência do corpo à torção (outra parcela é relativa ao material). É determinado a partir da seguinte equação:

$$J_O = \int_S \rho^2 .dS \quad \text{Eq. 1.9}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que $\rho^2 = x^2 + y^2$. Portanto:

$$J_O = \int_S \left(x^2 + y^2\right).dS = \int_S x^2.dS + \int_S y^2.dS = I_y + I_x \quad \text{Eq. 1.10}$$

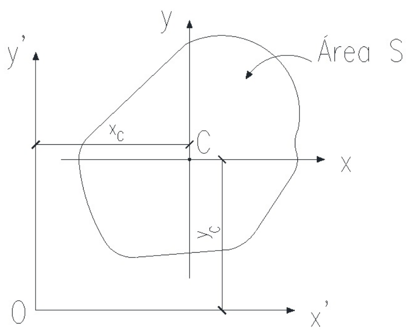
Pesquise mais

Quando a ST é complexa como a da Figura 1.2, devemos encontrar funções que relacionem as abscissas x com as ordenadas y das bordas da figura da ST e os intervalos em que essas funções são válidas. Após essa etapa, efetuamos as integrações nesses intervalos. Para ter noção dessa tarefa, pesquise qual é o procedimento para se obter os momentos de inércia de um triângulo retângulo. Dica: as expressões já estão na Figura 1.5.

Teorema dos eixos paralelos ou Teorema de Steiner

Suponha que já conhecemos os momentos de inércia I_x e I_y da área S apresentada na Figura 1.6 em relação aos eixos x e y que passam pelo centroide da área.

Figura 1.6 | Teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia de figuras planas compostas



Fonte: elaborada pelo autor.

Para um eixo x′ paralelo ao eixo x, o momento de inércia será dado por:

$$I_{x'} = I_x + S.y_c^2 \qquad \text{Eq. 1.11}$$

Em que y_c é a distância vertical que separa os eixos horizontais x e x'.

De modo semelhante, para um eixo y' paralelo ao eixo y, o momento de inércia será dado por:

$$I_{y'} = I_y + S.x_c^2 \qquad \text{Eq. 1.12}$$

Em que x_c é a distância horizontal que separa os eixos verticais y e y'.

Para facilitar, pensando na Figura 1.7, temos o seguinte roteiro para determinar os momentos de inércia de figuras compostas que podem ser divididas em figuras simples (os eixos x' e y' são eixos que passam pelos centroides das várias figuras simples):

1º passo: calcule o centroide da figura composta (execute o roteiro para centroide).

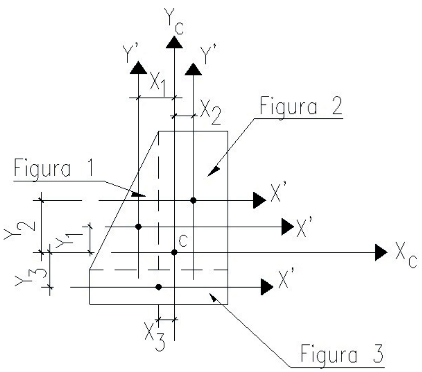
2º passo: trace os eixos X_C e Y_C que passam pelo centroide C da figura composta, da mesma forma que o apresentado na Figura 1.7;

3º passo: marque os valores das coordenadas x_i e y_i dos centroides das figuras simples aos eixos X_C e Y_C (não se preocupe com o sinal porque os valores serão elevados ao quadrado). Essas coordenadas são as distâncias entre os eixos que passam pelo centroide das figuras simples e os eixos que passam pelo centroide C da figura composta.

Exemplificando

Por exemplo, na Figura 1.7, que foi decomposta em figura 1 (triângulo) e figuras 2 e 3 (retângulos), temos que x_1 é a distância horizontal entre os eixos y' que passa pelo centroide da figura 1 e o eixo Y_C que passa pelo centroide C da figura composta, e y_1 é a distância vertical entre o eixo x' que passa pelo centroide da figura 1 e o eixo X_C que passa pelo centroide da figura composta. Da mesma forma para as outras duas figuras.

Figura 1.7 | Figura composta dividida em três figuras simples (um triângulo e dois retângulos)



Fonte: elaborada pelo autor.

4º passo: preencha o Quadro 1.2 a seguir.

Quadro 1.2 | Quadro para cálculo dos momentos de inércia de figuras compostas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i^2$	$A_i.y_i^2$	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{x'} + A_i.y_i^2$	$I_{y'} + A_i.x_i^2$
1	A_1	x_1	y_1	$A_1.x_1^2$	$A_1.y_1^2$	⋮	⋮	⋮	⋮
2	A_2	x_2	y_2	$A_2.x_2^2$	$A_2.y_2^2$	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	A_n	x_n	y_n	$A_n.x_n^2$	$A_n.y_n^2$	⋮	⋮	⋮	⋮
								$I_x = \sum \text{coluna}$	$I_y = \sum \text{coluna}$

Fonte: elaborado pelo autor.

Observações:

1) Valores para $I_{x'}$ (coluna 7) e $I_{y'}$ (coluna 8) são fornecidos pelas expressões da Figura 1.5.

2) Valores de I_x (somatória da coluna 9) e I_y (somatória da coluna 10) são os momentos de inércia da figura composta em relação aos eixos x e y que passam pelo seu centroide, respectivamente. São esses os valores procurados.

3) No caso de figuras vazadas, atuamos de modo semelhante ao cálculo do centroide para essas figuras: consideramos uma figura simples com a área total e subtraímos outra figura simples que representa a área vazada. Nesta situação, o valor da área a ser colocado no quadro para a figura que representa o transpasse deve ser negativo e as colunas 5 e 6 da linha que representa essa figura também serão negativas (por causa da multiplicação). Também serão negativos os valores de $I_{x'}$ e $I_{y'}$. Isso ocasionará valores negativos nas colunas 9 e 10, e na somatória total de cada uma dessas duas colunas.

Assimile

O momento de inércia varia com o cubo da altura da ST para peças retangulares e triangulares. Portanto, se possível, devemos colocar a maior altura paralela ao plano em que ocorre a flexão para aproveitar melhor a resistência que a ST pode proporcionar (veremos mais detalhes nas próximas seções). Isso responde à questão da régua colocada no início desta seção.

Raio de giração de superfícies planas

Para encerrar, e não menos importante, temos o raio de giração. Essa é uma característica geométrica utilizada no dimensionamento de pilares que são peças sujeitas à compressão paralela ao seu eixo longitudinal e que provoca o efeito de flambagem, como veremos na terceira unidade.

O raio de giração é definido como uma relação entre o momento de inércia e a área da figura plana. Temos então:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{Eq. 1.13} \qquad \text{e} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad \text{Eq. 1.14}$$

Realizando uma análise dimensional, temos que a unidade do raio de giração é dada em dimensão de comprimento (L).

Pesquise mais

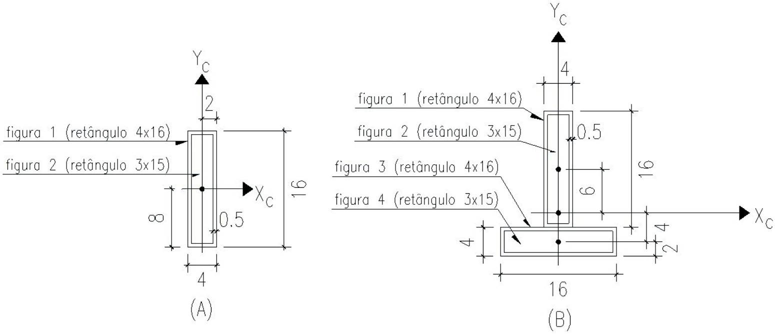
A fim de utilizar outras ferramentas para analisar os conteúdos abordados, temos o FTOOL, que é um *software* gráfico interativo gratuito, que realiza a análise do comportamento das estruturas. Essa é uma ferramenta simples e de fácil manejo, que permite calcular as características geométricas da ST e detalhar diagrama de momento fletor, entre outros. Disponível em: <https://www.alis-sol.com.br/Ftool/>. Acesso em: 31 ago. 2017.

Sem medo de errar

Retomamos o problema da indústria de produção de garrafas PET, que possui um sistema de controle de qualidade composto por um conjunto óptico computadorizado. Esse sistema, entretanto, apresenta erros nas leituras e a empresa descartou que o problema seja com ele, alegando que a causa, devido à alta sensibilidade, está na estrutura onde ele foi montado. Na vistoria você levantou dados que permitiram esquematizar a situação apresentada na

Figura 1.1 e sugeriu que, para reforçar a viga, fosse soldada na parte inferior outra peça metálica com as mesmas dimensões da viga existente, formando uma nova ST vazada, do tipo T invertido, conforme a Figura 1.8 (B). Para iniciar a solução do problema, é necessário, para a antiga e a nova ST: a) determinar o centroide; e b) determinar os momentos de inércia. Observação: despreze os cantos arredondados dos perfis de metalon e as soldas.

Figura 1.8 | Centroides da antiga ST (A) e da nova ST (B) para a viga da situação problema (medidas em cm)



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: como mostra a Figura 1.8(A), podemos considerar a ST da viga original de uma seção vazada formada pela figura 1 (retângulo de 4x16) maciça, da qual foi retirada a figura 2 (retângulo de 3x15). Note que os centroides desses dois retângulos coincidem. Para a viga reforçada, também vamos considerar uma ST vazada, composta, como mostra a Figura 1.8(B), por dois retângulos maciços (figuras 1 e 3) dos quais foram retirados outros dois retângulos (figuras 2 e 4). Note na Figura 1.8(B) que os centroides dos retângulos 1 e 2 coincidem, assim como o centroide dos retângulos 3 e 4 também coincidem.

a1) Cálculo do centroide da viga original:

A Figura 1.8(A) mostra que a viga original possui dois eixos de simetria, portanto, seu centroide está localizado no ponto de encontro desses dois eixos, ou seja, os eixos X_c e Y_c, estão localizados, respectivamente, a 8 cm e 2 cm dos vértices da figura 1.

a2) Cálculo do centroide da viga reforçada:

No preenchimento do Quadro 1.3 considera-se como figuras 1, 2, 3 e 4 as que estão apresentadas na Figura 1.8(B).

Quadro 1.3 | Quadro para o cálculo das coordenadas do centroide de figuras compostas

Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i$	$A_i.y_i$
1	64	8	12	512	768
2	–45	8	12	–360	–540
3	64	8	2	512	128
4	–45	8	2	–360	–90
	38			304	266

Fonte: adaptado de: Beer et all. (2013, p. 230).

Pelas equações 1.5 e 1.6, temos que:

$$x_c = \frac{\sum_i A_i.x_i}{\sum_i A_i} = \frac{304}{38} = 8\text{cm} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\sum_i A_i.y_i}{\sum_i A_i} = \frac{266}{38} = 7\text{cm}$$

Com esses valores, desenhamos os eixos X_c e Y_c da Figura 1.8(B).

b1) Cálculo do momento de inércia da viga original:

No preenchimento do Quadro 1.4, considera-se como figuras 1 e 2 as que estão apresentadas na Figura 1.8(A).

Quadro 1.4 | Quadro para o cálculo dos momentos de inércia de figuras compostas

Fig	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i^2$	$A_i.y_i^2$	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{x'} + A_i.y_i^2$	$I_{y'} + A_i.x_i^2$
1	64	0	0	0	0	1365,33	85,33	1365,33	85,33
2	–45	0	0	0	0	–843,75	–33,75	–843,75	–33,75
								521,58	51,58

Fonte: elaborado pelo autor.

Para o retângulo maciço de base 4 cm e altura de 16 cm (figura 1 no quadro), temos:

$$I_{x'} = \frac{4.16^3}{12} = 1365,33cm^4 ; \quad I_{y'} = \frac{16.4^3}{12} = 85,33cm^4 .$$

Para o retângulo vazado de base 3 cm e altura de 15 cm (figura 2 no quadro), temos:

$$I_{x'} = -\frac{3.15^3}{12} = -843,75cm^4 ; \quad I_{y'} = -\frac{15.3^3}{12} = -33,75cm^4 .$$

b2) Cálculo do momento de inércia da viga reforçada:

No preenchimento do Quadro 1.5, considera-se como figuras 1, 2, 3 e 4 que foram apresentadas na Figura 1.8(B). Dividindo a ST reforçada mostrada na Figura 1.8(B) em quatro retângulos, temos que, para as figuras 1 e 2 do Quadro 1.5, os valores de $I_{x'}$ e $I_{y'}$ já estão calculados. Para o retângulo maciço (figura 3 do Quadro 1.5), temos:

$$I_{x'} = \frac{16.4^3}{12} = 85,33cm^4 \text{ e } I_{y'} = \frac{4.16^3}{12} = 1365,33cm^4 .$$

Para o retângulo vazado (figura 4 do Quadro 1.5), temos:

$$I_{x'} = -\frac{15.3^3}{12} = -33,75cm^4 \text{ e } I_{y'} = -\frac{15.3^3}{12} = -843,75cm^4 .$$

Quadro 1.5 | Quadro para o cálculo dos momentos de inércia de figuras compostas

Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i^2$	$A_i.y_i^2$	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{x'} + A_i.y_i^2$	$I_{y'} + A_i.x_i^2$
1	64	0	5	0	2304	1365,33	85,33	2965,33	85,33
2	–45	0	5	0	–1620	–843,75	–33,75	–1968,75	–33,75
3	64	0	5	0	1024	85,33	1365,33	1685,33	1365,33
4	–45	0	5	0	–720	–33,75	–843,75	–1158,75	–843,75
								1523,16	573,16

Fonte: elaborado pelo autor.

Observação: note que, para as figuras 3 e 4 do Quadro 1.5, não foi considerado o sinal negativo das coordenadas y do centroide porque elas serão elevadas ao quadrado (o mesmo aconteceria com as coordenadas x se elas existissem e fossem negativas).

Portanto, as posições dos centroides estão desenhadas nas Figuras 1.8(A) e (B). Podemos notar que, para a viga reforçada, os valores dos momentos de inércia saltaram de $I_x = 521{,}58cm^4$ e $I_y = 51{,}58cm^4$ para $I_x = 1523{,}16cm^4$ e $I_y = 573{,}16cm^4$.

Com relação aos questionamentos formulados, não é aconselhável reforçar a peça soldando-a na posição vertical ao lado da viga existente por que o ganho no momento de inércia I_x (eixo em que ocorre a deformação excessiva) seria o dobro da viga atual e não quase o triplo como obtido. Também não é possível reforçar soldando outra seção abaixo da viga atual porque, embora nesse caso o ganho com o momento de inércia I_x fosse muito mais expressivo, não restará altura suficiente para se movimentar e desenvolver os trabalhos que são realizados embaixo dela sem que exista risco de causar algum acidente de trabalho.

Elaborados os cálculos e com o problema finalizado com êxito, você deve entregar ao gestor de projetos um relatório interno contendo os principais resultados obtidos e as respostas aos quesitos formulados, como solicitado.

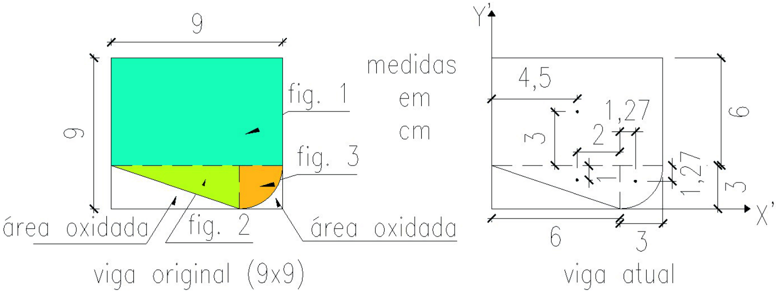
Avançando na prática

O efeito da corrosão nas características geométricas da ST

Descrição da situação-problema

Uma viga sujeita à flexão sofreu uma oxidação superficial que levou à formação de uma camada de ferrugem. Após a remoção da ferrugem por abrasão, a viga, originalmente de 9 cm x 9 cm, ficou com a ST apresentada na Figura 1.9. Determine a posição do centroide da nova ST.

Figura 1.9 | Viga que teve a ST modificada devido à remoção de ferrugem



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.9 mostra que a ST foi dividida em três figuras: um retângulo, um triângulo (b=6 cm e h=3 cm), e um quarto de círculo (r=3 cm). Mostra, também, as distâncias dos centroides dessas figuras aos eixos X' e Y' adotados. Próximo passo: preencher o Quadro 1.6 a seguir.

Quadro 1.6 | Quadro para o cálculo das coordenadas do centroide de figuras compostas

Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i$	$A_i.y_i$
1	54	4,5	6	243	324
2	9	4	2	36	18
3	7,07	7,27	1,73	51,4	12,23
	70,07			330,4	354,23

Fonte: adaptado de: Beer (2013, p. 230).

Pelas Equações 1.5 e 1.6: $x_c = \dfrac{\sum_i A_i.x_i}{\sum_i A_i} = \dfrac{330,4}{70,07} = 4,72\text{cm}$ e

$$y_c = \frac{\sum_i A_i.y_i}{\sum_i A_i} = \frac{354,23}{70,07} = 5,06\text{cm}$$

Conclui-se que o centroide da nova ST está a 4,72 cm à direita do eixo Y' e a 5,06 cm acima do eixo X'. Em relação à ST original (centroide a 4,5 cm e 4,5 cm dos eixos X' e Y') ele se deslocou 0,22 cm para a direita e 0,56 cm para cima. Também pode-se verificar as modificações em outras características geométricas.

Faça valer a pena

1. Para o dimensionamento das peças estruturais, é necessário determinar quais são os valores máximos das tensões que atuam nessas peças e quais os esforços que produzem essas tensões. Também necessitamos das características geométricas da ST.
Entre as características geométricas das seções planas, temos o momento estático, o momento de inércia e o momento polar de inércia. Qual das situações a seguir relaciona corretamente o esforço com a característica geométrica?

a) Momento de inércia relacionado com torção, momento polar de inércia relacionado com esforço cortante e momento estático relacionado com flambagem.
b) Momento de inércia relacionado com momento fletor, momento polar de inércia relacionado com momento torçor e momento estático relacionado com esforço cortante.
c) Momento de inércia relacionado com flexão, momento polar de inércia relacionado com esforço cortante e momento estático relacionado com torçor.
d) Momento de inércia relacionado com esforço cortante, momento polar de inércia relacionado com flexão e momento estático relacionado com torção.
e) Momento de inércia relacionado com momento torçor, momento polar de inércia relacionado com flambagem e momento estático relacionado com esforço cortante.

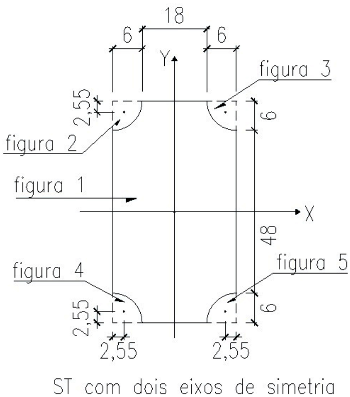
2. Para melhorar a resistência de uma peça sujeita à flexão, normalmente, aumenta-se o momento de inércia do eixo perpendicular ao plano em que atua a flexão. Para tanto, procura-se aumentar a altura da ST, pois o momento de inércia aumenta com o cubo da altura, ou seja, pequena variação na altura provoca grande mudança no momento de inércia.

Uma viga de aço com ST retangular maciça, com $h = 4.b$, serve de apoio à mesa de uma máquina. Essa viga apresenta deformação excessiva e precisa ser reforçada através do aumento de seu momento de inércia com a adição de mais barras que aumentem a ST. Entretanto, devido à concepção estrutural, o centroide da ST não pode sair da posição em que se encontra. Qual das situações deve ser escolhida para resolver o problema?

a) Fazer um transpasse retangular na ST transformando-a de maciça em vazada.
b) Soldar um perfil retangular na parte de baixo da ST transformando-a em um T invertido.
c) Soldar um perfil retangular na parte de cima da ST transformando-a em um T normal.
d) Soldar perfis retangulares nas laterais da viga de modo que a ST permaneça com seus dois eixos de simetria inalterados.
e) Deitar a viga de modo que a ST permaneça com dois eixos de simetria.

3. As características geométricas são necessárias para os cálculos de dimensionamento de estruturas. O raio de giração é uma característica geométrica utilizada no dimensionamento de peças sujeitas à compressão paralela ao seu eixo longitudinal e que provoca o efeito de flambagem, ou seja, pilares.
Uma peça estrutural metálica que trabalha como pilar suportando uma máquina tem a ST apresentada na Figura 1.10. Qual a alternativa que contém o valor correto do raio de giração dessa seção em relação ao eixo x da figura?

Figura 1.10 | ST do elemento estrutural metálico que trabalha como pilar – medidas em cm



Fonte: elaborada pelo autor .

a) 1,64 cm.
b) 84 cm.
c) 16,40 cm.
d) 254,47 cm.
e) 27,45 cm.

Seção 1.2

Esforços externos

Diálogo aberto

Caro aluno, no dimensionamento de qualquer peça estrutural, além de calcular algumas das características geométricas da seção transversal (doravante apenas ST), necessitamos, também, conhecer quais são, de que tipo e qual a magnitude das cargas que atuam no elemento estrutural a ser dimensionado. Esta seção é destinada à análise dessas cargas.

A análise estrutural de peças sujeitas à flexão é nossa meta a ser atingida. Já desenvolvemos nossa habilidade de solucionar problemas, nossa criatividade e nosso raciocínio lógico, a partir do cálculo das características geométricas das ST. Vamos continuar a desenvolver essas habilidades, determinando os esforços externos atuantes na estrutura em estudo, para termos outras opções de solução para o problema proposto, lembrando que você foi contratado por uma indústria que produz garrafas PET. O escritório de engenharia em que você trabalha o designou como responsável para apresentar a solução do problema de uma viga retangular metálica que apresenta deformação excessiva e serve de apoio a um sistema de controle de qualidade formado por um conjunto óptico de grande sensibilidade conectado a um sistema computacional.

Em vistoria ao local, para avaliar a situação, você fez observações e levantou dados que lhe permitiram elaborar o esquema estrutural apresentado na seção anterior.

Inicialmente, você calculou o centroide e o momento de inércia para a ST da viga original e a da vida reforçada. Agora, o gerente de projetos da empresa em que trabalha faz os seguintes questionamentos que devem ser entregues em um relatório interno:

1) Qual a carga total uniformemente distribuída que atuará na viga com a ST reforçada, considerando, também, o seu peso próprio?

2) Como é a representação gráfica dessa viga com as cargas atuantes, lembrando que essa representação é chamada de esquema estrutural?

3) Qual o valor das reações nos apoios que o novo carregamento irá provocar?

4) O reforço com a alteração da ST é a única opção para resolver o problema da deformação excessiva que a viga apresenta?

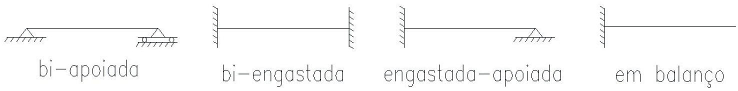
Nesta seção, iremos estudar os tipos de cargas externas e como calculá-las e como representá-las graficamente, o que em termos de análise de estruturas significa que iremos desenhar o esquema estrutural. Iremos estudar também as cargas concentradas e cargas uniformemente distribuídas e variáveis. Após esta seção, você será capaz de efetuar esses cálculos. Dedique-se, pois essa etapa não é muito complexa, mas é fundamental para a análise de estruturas. Bons estudos!

Não pode faltar

Tipos de ações externas nas estruturas

As vigas são elementos estruturais que oferecem resistência à flexão, que é provocada por carregamentos aplicados. Por definição, as vigas têm duas dimensões muito menores que a terceira (comprimento) e as cargas que a solicitam são perpendiculares ao seu eixo longitudinal. Em geral, elas são retas, têm ST constante e são nomeadas de acordo com seus apoios ou conexões, conforme mostra a Figura 1.11.

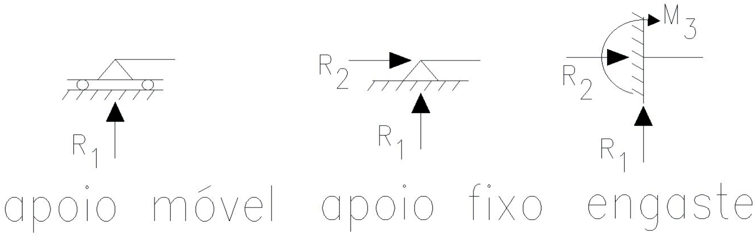
Figura 1.11 | Nomenclatura de algumas vigas segundo seus apoios ou conexões



Fonte: elaborada pelo autor.

Os apoios ou conexões mais comuns são os apoios móveis, que impedem deslocamento em uma direção, introduzindo uma força nessa direção (chamada reação de apoio); os apoios fixos, que restringem os deslocamentos em duas direções com a introdução de duas reações de apoio; e os engastes, que restringem deslocamentos em duas direções e um giro com três reações de apoio (duas forças e um momento), como mostra a Figura 1.12

Figura 1.12 | Exemplo dos apoios comumente utilizados em estruturas



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta seção, estudaremos apenas as estruturas isostáticas, ou seja, aquelas que podem ser resolvidas apenas com a utilização das três equações de equilíbrio, quais sejam:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{Eq. 1.15}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{Eq. 1.16}$$

$$\sum M_{ponto} = 0 \quad \text{Eq. 1.17}$$

Representação gráfica das cargas

Há cargas que atuam nos elementos estruturais, chamadas cargas externas (provenientes das peças das máquinas ou das partes da edificação), e os chamados esforços internos, responsáveis por manterem unidas as partes internas do elemento. As cargas externas são de dois tipos:

a) Cargas concentradas: aquelas que atuam em um ponto ou região desprezível.

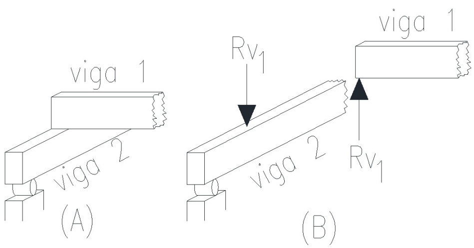
b) Cargas distribuídas: atuam em um trecho ao longo do comprimento da viga.

Essas cargas irão gerar esforços internos (momentos fletores e esforços cortantes) que devemos determinar para podermos dimensionar a viga. Determinar erradamente o valor ou posição da carga atuante implica em comprometer todo o dimensionamento.

Carga concentrada

As cargas concentradas são representadas por uma seta. Normalmente elas provêm de peças que se apoiam em vigas. Dessa forma, de acordo com a lei da ação e reação, a reação de apoio em uma peça será a ação atuante na viga em que ela se apoia, conforme mostra a Figura 1.13 (A) e (B).

Figura 1.13 | Representação de uma carga concentrada – viga que se apoia em outra viga



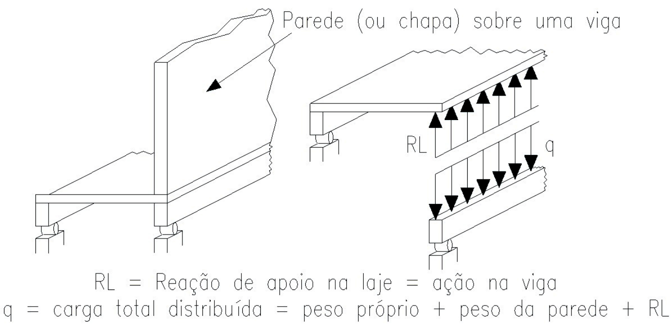
Fonte: elaborada pelo autor.

Note que reação de apoio R_{v1} da viga 1 é a ação na viga 2 (que serve de apoio). A carga R_{v1} está aplicada concentrada no ponto central em que se encontrava a viga 1, pois a região de contato entre as vigas pode ser desprezada (essa dimensão é pequena em relação ao comprimento da viga 2).

Carga uniformemente distribuída e variável

As cargas distribuídas (normalmente indicadas pela letra “q”) são representadas por um conjunto de setas ligadas por uma reta ou curva. Elas são devidas ao peso próprio da viga, ao peso das paredes (ou chapas metálicas verticais) apoiadas diretamente sobre a viga, e às reações de apoio de lajes apoiadas na viga, conforme mostra a Figura 1.14.

Figura 1.14 | Representação de uma carga distribuída – laje e/ou parede apoiada em viga. Peso próprio.

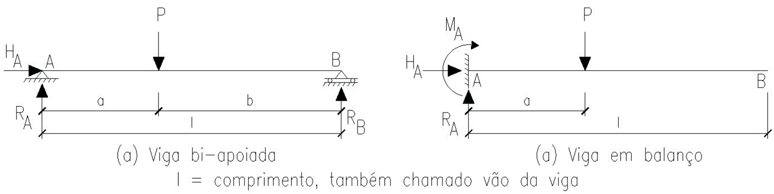


Fonte: elaborada pelo autor.

Reações de apoio devidas às cargas concentradas

Elas são utilizadas para determinar as reações de apoio para a viga biapoiada sujeita a uma carga concentrada P aplicada, mostrada na Figura 1.15(a). Devido aos apoios fixo e móvel, temos duas reações verticais (R_A e R_B) e uma horizontal (H_A). Considere, agora, calcular as reações de apoio para uma viga em balanço sujeita a uma carga concentrada P aplicada, como mostra a Figura 1.15(b). Teremos, devido ao engaste, uma reação vertical (R_A), uma horizontal (H_A) e um momento (M_A).

Figura 1.15 | Reações de apoio para (a) vigas biapoiadas e (b) vigas em balanço



Fonte: elaborado pelo autor.

A princípio, não conhecemos nem o valor e nem o sentido dessas reações. Para determiná-las, adotamos os sentidos mostrados na Figura 1.15. Após os cálculos, se o resultado for negativo para qualquer uma das reações de apoio, significa que, para essa reação, adotamos o sentido errado. Basta corrigi-lo, sem alterar o valor (em módulo). Nos cálculos das reações de apoio, utilizamos as três equações de equilíbrio da estática. Aplicando no caso da viga da Figura 1.15(a), temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad \text{Eq. 1.18}$$

$$\sum M_{ponto} = 0$$

Escolhendo o ponto A e adotando sentido horário como positivo,

$$P.a - R_B.l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{P.a}{l} \qquad \textbf{Eq. 1.19}$$

E, finalmente, de $\sum F_y = 0$ temos, adotando o sentido para cima como positivo:

$$R_A + R_B - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = P - R_B \quad \Rightarrow \quad R_A = P - \frac{P.a}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{P.l - P.a}{l} \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{P.(l - a)}{l} \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{P.b}{l} \qquad \textbf{Eq. 1.20}$$

Assimile

Através das equações 1.19 e 1.20 temos que, para qualquer situação em que exista uma carga concentrada aplicada em uma viga biapoiada, a reação em um apoio devida a essa carga será igual ao valor da carga multiplicado pela distância da carga até o apoio oposto dividido pelo vão da viga.

Para determinar as reações de apoio no caso da viga da Figura 1.15 (b), temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \qquad \text{Eq. 1.21}$$

$$\sum M_{ponto} = 0$$

Escolhendo o ponto A e adotando sentido horário como positivo,

$$M_A + P.a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -P.a \qquad \textbf{Eq. 1.22}$$

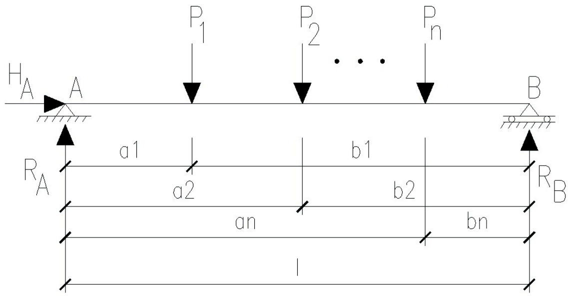
E, para $\sum F_y = 0$ temos, adotando o sentido para cima como positivo:

$$R_A - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = P \qquad \text{Eq. 1.23}$$

Neste caso, o sinal do momento M_A resultou negativo. Isso significa que adotamos o sentido errado para essa reação de apoio. O valor é o mesmo ($P.a$), mas o sentido correto desse momento é o anti-horário.

Agora, vamos determinar as reações de apoio para a viga da Figura 1.16.

Figura 1.16 | Esquema estrutural de uma viga biapoiada com várias cargas concentradas aplicadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos aplicar o princípio da superposição de efeitos que, neste caso, permite calcular a reação em cada apoio como sendo a soma das parcelas das reações de cada carga isolada. Assim, utilizando as equações 1.18, 1.19 e 1.20, teremos:

$$H_A = 0 \qquad \text{Eq. 1.24}$$

$$R_A = \frac{P_1.b_1}{l} + \frac{P_2.b_2}{l} + ... + \frac{P_n.b_n}{l} \qquad \text{Eq. 1.25}$$

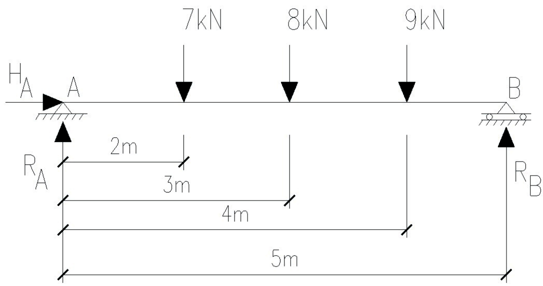
E

$$R_B = \frac{P_1.a_1}{l} + \frac{P_2.a_2}{l} + ... + \frac{P_n.a_n}{l} \qquad \text{Eq. 1.26}$$

Exemplificando

Determinar as reações de apoio para a viga da Figura 1.17.

Figura 1.17 | Esquema estrutural da viga utilizada no exemplo para determinação das reações



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando as equações 1.15, 1.25 e 1.26, temos:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

$$R_A = \frac{P_1.b_1}{l} + \frac{P_2.b_2}{l} + \frac{P_3.b_3}{l} = \frac{7.3}{5} + \frac{8.2}{5} + \frac{9.1}{5} = 9,2kN$$

$$R_B = \frac{P_1.a_1}{l} + \frac{P_2.a_2}{l} + \frac{P_3.a_3}{l} = \frac{7.2}{5} + \frac{8.3}{5} + \frac{9.4}{5} = 14,8kN$$

Observação: também poderíamos ter obtido R_B fazendo $\sum F_y = 0$, ou seja,

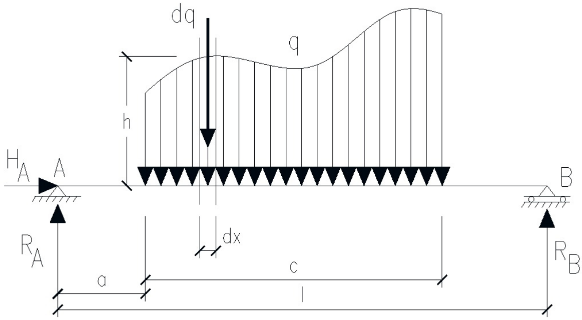
$$R_A + R_B - 7 - 8 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 7 + 8 + 9 - R_A = 7 + 8 + 9 - 9,2 = 14,8kN$$

Logo, as reações são $H_A = 0$, $R_A = 9,2kN$ e $R_B = 14,8kN$.

Reações de apoio devidas a cargas distribuídas

Seja a viga da Figura 1.18 sujeita a uma carga distribuída qualquer, a princípio não temos como determinar as reações de apoio para esse tipo de carga. Necessitamos antes, calcular uma carga equivalente (q_{eq}), isto é, uma carga que, aplicada no centroide da figura, produz as mesmas reações de apoio que a carga distribuída q.

Figura 1.18 | Esquema estrutural de uma viga biapoiada sujeita a uma carga distribuída qualquer



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha tomarmos um elemento infinitesimal da carga (dq). Concentrando essa carga distribuída infinitesimal, temos uma carga de valor igual a $h.dx$, em que dx é o trecho no qual dq está aplicada. Para determinarmos um valor equivalente (q_{eq}) para a carga total q, devemos integrar dq ao longo do trecho em que a carga atua. Temos:

$$q_{eq} = \int_0^c dq = \int_0^c h.dx \qquad \text{Eq. 1.27}$$

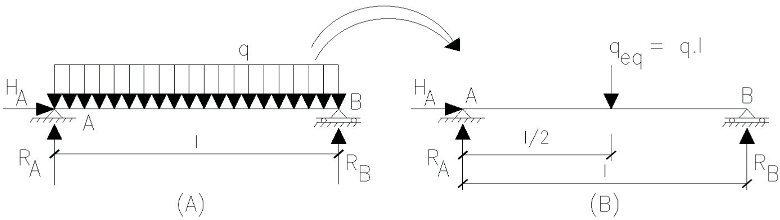
Lembrando do cálculo: a integral de uma função em um intervalo é igual à área abaixo do gráfico dessa função nesse intervalo. Temos, então:

$$q_{eq} = \text{Área da figura} \qquad \text{Eq. 1.28}$$

Assim, uma carga distribuída sobre um trecho de uma viga pode ser substituída por uma carga concentrada equivalente, de magnitude igual à área da figura da carga distribuída e aplicada no centroide dessa figura. Substituindo a carga distribuída por uma carga concentrada equivalente, podemos calcular as reações de apoio como no caso das vigas sujeitas à carga concentrada. Assim, para determinar as reações de apoio no caso de vigas com cargas uniformemente distribuídas (possui o mesmo valor de carga, distribuído numa mesma altura, em qualquer trecho), como a mostrada na Figura 1.19(A), tomamos a área da figura formada, que é um retângulo. Dessa forma, o valor da carga equivalente, mostrada na Figura 1.19 (B), será:

$$q_{eq} = \text{Área da figura} = \text{base.altura} = q.l \qquad \text{Eq. 1.29}$$

Figura 1.19 | Esquema estrutural de uma viga biapoiada sujeita à carga uniformemente distribuída



Fonte: elaborada pelo autor.

Em que l é o trecho no qual a carga q está aplicada (vão da viga) e q é o máximo valor da carga distribuída (no caso é constante). Essa carga q_{eq} está aplicada no centroide do retângulo, ou seja, no

ponto localizado a $\frac{l}{2}$ do apoio A. Temos, aplicando as equações 1.18, 1.19 e 1.20:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; H_A = 0 \qquad \text{Eq. 1.30;}$$

$$R_A = \frac{P.b}{l} = \frac{q.l.\frac{l}{2}}{l} = \frac{q.l}{2} \qquad \text{Eq. 1.31;}$$

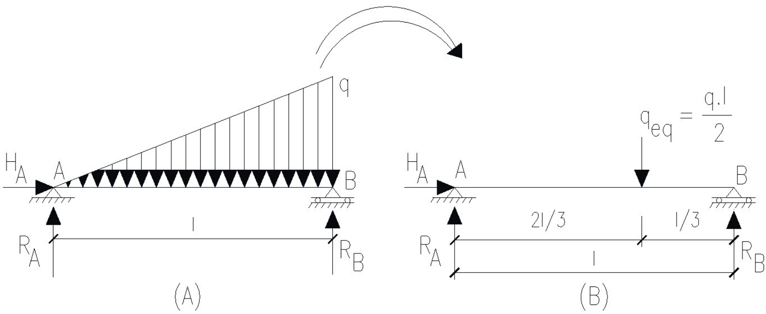
E

$$R_B = \frac{P.a}{l} = \frac{q.l.\frac{l}{2}}{l} = \frac{q.l}{2} \qquad \text{Eq. 1.32}$$

Continuando, vamos determinar as reações de apoio para a viga mostrada na Figura 1.20(A). Neste caso, a carga q é dita linearmente distribuída, isto é, tem altura variando linearmente formando um triângulo. Assim, o valor da carga equivalente, mostrada na Figura 1.20(B), será:

$$q_{eq} = \text{Área da figura} = \frac{\text{base.altura}}{2} = \frac{q.l}{2} \qquad \text{Eq. 1.33}$$

Figura 1.20 | Esquema estrutural de uma viga biapoiada sujeita à carga linearmente distribuída



Fonte: elaborada pelo autor.

Em que l é o trecho no qual a carga está aplicada e q é o máximo valor da carga distribuída. A carga q_{eq} está aplicada no centroide do triângulo, ou seja, no ponto localizado a $\frac{2.l}{3}$ do apoio A. Aplicando as equações 1.18, 1.19 e 1.20, temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \qquad \text{Eq. 1.34}$$

$$R_A = \frac{P.b}{l} = \frac{\frac{q.l}{2} \cdot \frac{l}{3}}{l} = \frac{q.l}{6} \qquad \text{Eq. 1.35}$$

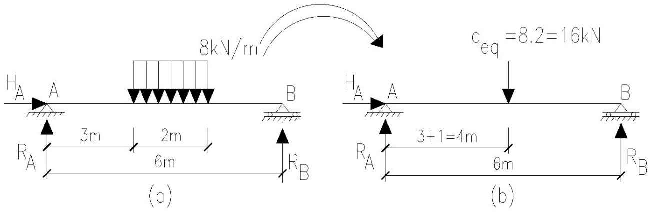
E

$$R_B = \frac{P.a}{l} = \frac{\frac{q.l}{2} \cdot \frac{2.l}{3}}{l} = \frac{q.l}{3} \qquad \text{Eq. 1.36}$$

Exemplificando

Determine as reações de apoio para a viga da Figura 1.21.

Figura 1.21 | Esquema estrutural da viga biapoiada sujeita à carga uniformemente distribuída em (a) um trecho do vão e (b) carga equivalente



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos, aplicando as equações 1.18, 1.19 e 1.20:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

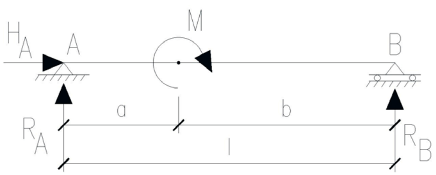
$$R_A = \frac{P.b}{l} = \frac{16.2}{6} = 5,33kN \quad e \quad R_B = \frac{P.a}{l} = \frac{16.4}{6} = 10,67kN$$

Logo, as reações procuradas são $R_A = 5,33kN$ e $R_B = 10,67kN$.

Pesquise mais

Pesquise sobre como determinar as reações de apoio em uma viga biapoiada sujeita à aplicação de momento fletor, como no caso da viga da Figura 1.22.

Figura 1.22 | Esquema estrutural da viga biapoiada sujeita à carga de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Peso próprio

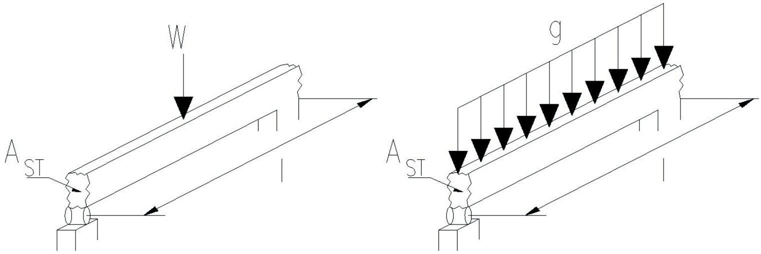
Seja a viga de vão l e ST qualquer de área A_{ST} , mostrada na Figura 1.23, o volume dessa viga será:

$V = A_{ST} . l$ Eq. 1.37

Multiplicando-se o volume pelo peso específico (γ) do material da viga, obtemos o peso total (carga concentrada), ou seja:

$W = V . \gamma = A_{ST} . l . \gamma$ Eq. 1.38

Figura 1.23 | Representação da carga de peso próprio de uma viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Como desejamos o peso distribuído ao longo do comprimento da viga (carga distribuída), tomamos o peso total e dividimos pelo comprimento. Teremos assim,

$$g = \frac{W}{l} = \frac{A_{ST} . l . \gamma}{l} = A_{ST} . \gamma \; . \qquad \text{Eq. 1.39}$$

Logo, para obtermos o peso próprio distribuído, multiplicamos a área da ST pelo peso específico do material que compõe a viga. É usual denominar W ao peso próprio concentrado, P às demais cargas concentradas, g ao peso próprio distribuído e q às demais cargas distribuídas (inclusive quando somadas ao peso próprio distribuído).

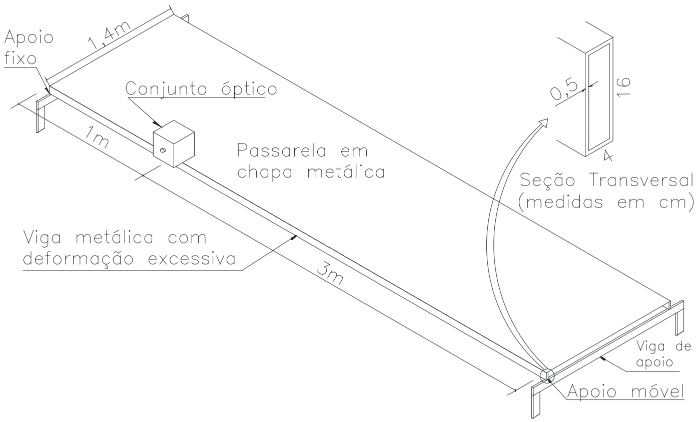
Reflita

Qual a fórmula para calcular a carga g de uma laje ou chapa retangular (para piso) de espessura h, se essa carga é distribuída pela área da laje?

Sem medo de errar

Retomando o contexto proposto, tem-se que a indústria de produção de garrafas PET precisa de uma solução para o problema da viga que apresenta deformação excessiva. Você foi designado para resolver esse problema e, em vistoria ao local, fez observações e levantou dados que permitiram elaborar o esquema mostrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 | Sistema ótico sobre viga com deformação excessiva



Fonte: elaborada pelo autor.

Você observou que a viga existente é metálica e possui ST retangular vazada (dimensões indicadas na Figura 1.1). Para reforçar, optou por soldar outra peça de iguais dimensões, formando uma nova ST, do tipo T invertido. Você constatou, também, que uma passarela feita em chapa metálica com 8 mm de espessura está apoiada pelas laterais ao longo do vão da viga em questão e de outra paralela a esta. A partir da norma de cargas em edificações, obteve que a passarela deve suportar uma sobrecarga de $2{,}0\ kN\ /\ m^2$. Em consulta, determinou que o peso do sistema óptico é de 3 kN. O gerente de projetos solicita que você determine a carga total uniformemente distribuída que atuará na viga reforçada. Ele quer, também, que você faça um esquema estrutural dessa viga e apresente o valor das reações nos apoios devidas ao novo carregamento e pergunta se a única opção para resolver o problema da deformação excessiva da viga é alterar a ST. Obs.: despreze os cantos arredondados dos perfis metalons e as soldas.

Solução: a partir da proposta de soldar outra peça, a ST da viga reforçada foi apresentada na Figura 1.8(B). A área da nova ST é a somatória da coluna 2 do Quadro 1.3 a seguir, que foi preenchida na seção anterior, ou seja, $A_{ST} = 38cm^2 = 0,0038m^2$. Assim, considerando $\gamma_{aço} = 75kN/m^3$, o peso próprio distribuído da viga será $g_{viga} = A_{ST}.\gamma = 0,0038.75 = 0,285kN/m$.

Quadro 1.3 | Quadro para o cálculo das coordenadas do centroide de figuras compostas

Figura	Área	x_i	y_i	$A_i.x_i$	$A_i.y_i$
1	64	8	10	512	640
2	–45	8	10	–360	–450
3	64	8	2	512	128
4	–45	8	2	–360	–90
	38			304	228

Fonte: adaptado de: Beer et al. (2013, p. 230).

O peso distribuído por área da passarela é

$$g_{passarela} = espessura.\gamma = 0,008.75 = 0,6kN/m^2,$$

e a carga total por área será

$$q_{passarela} = sobrecarga + g_{passarela} = 2,0 + 0,6 = 2,6kN/m^2.$$

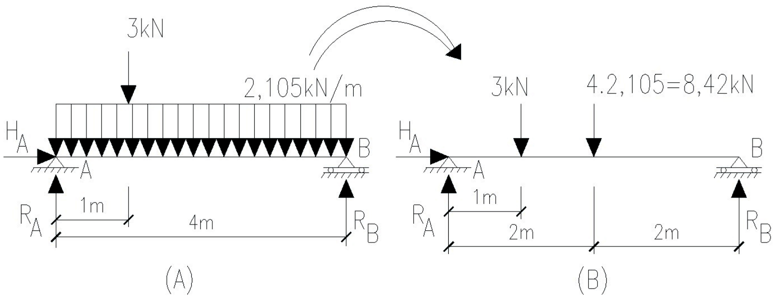
Como a passarela está apoiada em duas vigas laterais, a ação da passarela em cada viga (chamaremos R_p) é metade da carga existente na largura da passarela. Logo,

$$R_p = \frac{1}{2}.1,4.2,6 = 1,82kN/m.$$

A carga uniformemente distribuída total (q) que atua na viga será a soma dessa ação da laje na viga com a carga distribuída de peso próprio da viga, ou seja, $q = 0,285 + 1,82 = 2,105kN\ /m$.

Temos, então, o esquema estrutural pedido apresentado na Figura 1.24(A). Esse esquema será utilizado nos cálculos futuros para solucionar o problema.

Figura 1.24 | Esquema estrutural da viga considerando o reforço proposto (A); com a carga equivalente à distribuída (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

As reações de apoio calculamos com as equações 1.18 a 1.20. Temos: $\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$;

$$R_A = \frac{P_1.b_1}{l} + \frac{P_2.b_2}{l} = \frac{3.3}{4} + \frac{8,42.2}{4} = 6,46kN$$ e

$$R_B = \frac{P_1.a_1}{l} + \frac{P_2.a_2}{l} = \frac{3.1}{4} + \frac{8,42.2}{4} = 4,96kN$$

Com relação à pergunta, se é possível diminuir a deformação excessiva sem reforçar a ST, temos que é preciso aliviar o carregamento sobre a viga. Para se conseguir isso, podemos colocar uma terceira viga longitudinal no meio da largura da passarela, dividindo a carga que ela descarrega nas vigas laterais. Isso com certeza diminuirá a deformação que a viga lateral apresenta. Se essa diminuição é suficiente, apenas realizando cálculos para responder.

Agora, você deve redigir um relatório interno e encaminhá-lo ao gerente de projetos. Esse relatório deverá conter o valor total da carga distribuída, o esquema estrutural apresentado na Figura 1.24(A), os valores das reações H_A, R_A e R_B, e a opção de executar uma terceira viga para reduzir a carga na viga com deformação excessiva em contrapartida a reforçá-la aumentando a ST.

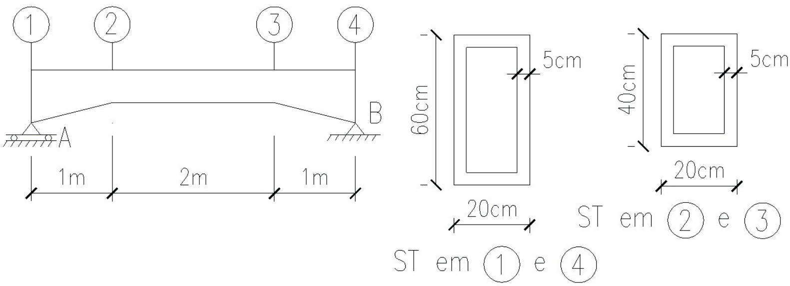
Avançando na prática

Vigas com seções variáveis

Descrição da situação-problema

Determinada viga, feita em zinco fundido (peso específico igual a $68\ kN\ /\ m^3$) foi moldada, vazada, segundo a Figura 1.25. Considerando apenas o peso próprio, trace o esquema estrutural para essa viga, sabendo que o apoio da esquerda é móvel e o da direita é fixo.

Figura 1.25 | Desenho esquemático da viga em zinco com ST variável



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

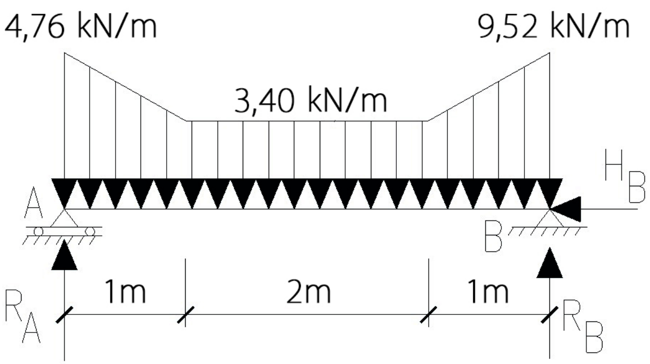
Como a ST é variável, o peso próprio distribuído também será variável. A área da ST nos pontos 1 e 4 é

$A_{ST} = \{0,05.[2.(0,6+0,1)]\} = 0,07m^2$. Logo, para esses

pontos, o peso próprio distribuído é

$g = A_{ST}.\gamma = 0{,}07.68 = 4{,}76kN/m$. A área da ST nos pontos 2 e 3 é $A_{ST} = \{0{,}05.[2.(0{,}4+0{,}1)]\} = 0{,}05m^2$. Portanto, para esses pontos o peso próprio distribuído é $g = A_{ST}.\gamma = 0{,}05.68 = 3{,}4kN/m$. Como a altura da ST varia linearmente, a carga de peso próprio também irá variar de forma linear. Assim, temos o esquema estrutural mostrado na Figura 1.26.

Figura 1.26 | Esquema estrutural com carga linearmente distribuída em forma trapezoidal



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, o esquema estrutural para a viga do problema é a Figura 1.26. A título de informação, as vigas com ST variável são chamadas vigas em mísula.

Faça valer a pena

1. Para calcular a carga de peso próprio distribuído de uma viga, devemos multiplicar a área da ST pelo peso específico que compõe a viga. O formato da ST não importa para o cálculo, somente a sua área.
Para reforçar uma viga metálica com ST retangular, optou-se por soldar duas barras (de mesmo material que a original), uma em cima e outra em baixo da viga, formando um perfil I, de tal forma que a nova ST possui dois eixos de simetria: um horizontal e outro vertical. Essas barras possuem

a mesma ST da viga original e foram soldadas ao longo de todo o seu comprimento. Assinale a alternativa que compara a carga de peso próprio distribuído da viga reforçada com a original.

a) O novo peso próprio distribuído fica igual ao dobro do original.
b) O novo peso próprio distribuído fica igual à metade do original.
c) O novo peso próprio distribuído fica igual a um terço do original.
d) O novo peso próprio distribuído fica igual ao quádruplo do original.
e) O novo peso próprio distribuído fica igual ao triplo do original.

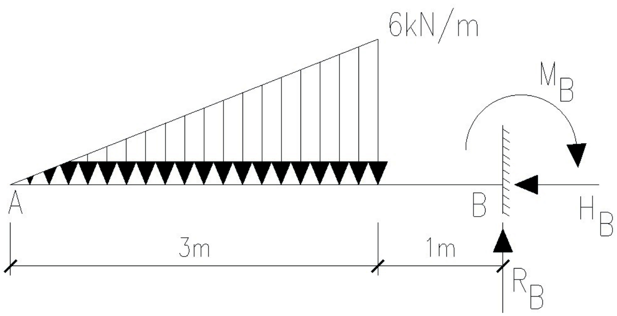
2. Para determinar as reações de apoio de uma viga isostática, utilizamos as três equações de equilíbrio da estática.

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{ Eq. } 1.15) \qquad \sum F_y = 0 \quad (\text{ Eq. } 1.16) \qquad \text{e} \qquad \sum M_{ponto} = 0 \quad (\text{ Eq. } 1.17)$$

Para tanto, é necessário que sejam consideradas apenas cargas concentradas. Caso haja carga distribuída atuando na viga, ela deve ser substituída por uma carga concentrada equivalente.

Assinale a alternativa que apresenta os valores de H_B , R_B e M_B, respectivamente, para a viga da figura a seguir (considerando os sentidos adotados na figura).

Figura 1.27 | Esquema estrutural de viga em balanço com carga distribuída variável linearmente



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $H_B = 0,\ R_B = 6kN \ \text{e} \ M_B = 18kN.m$.

b) $H_B = 0,\ R_B = 18kN \ \text{e} \ M_B = 6kN.m$.

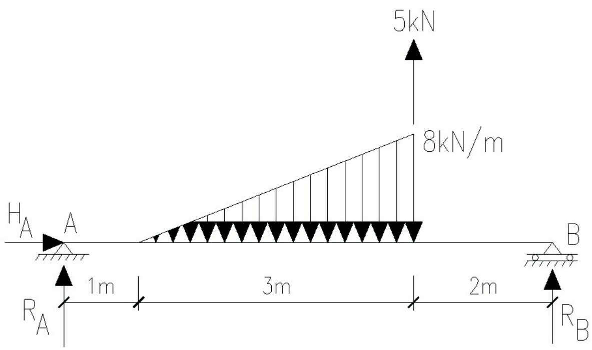
c) $H_B = 0,\ R_B = -6kN$ e $M_B = 9kN.m$.

d) $H_B = 0,\ R_B = 9kN$ e $M_B = 18kN.m$.

e) $H_B = 0,\ R_B = 6kN$ e $M_B = -9kN.m$.

3. Quando temos uma viga sujeita a várias cargas atuantes, podemos aplicar o princípio da superposição de efeitos que, neste caso, permite calcular a reação em cada apoio como sendo a soma das parcelas das reações de cada carga isolada.
Qual o valor da reação R_A para a viga da figura a seguir?

Figura 1.28 | Esquema estrutural de viga biapoiada com mais de um tipo de carga



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 43,3 kN.
b) 62,3 kN.
c) 4,33 kN.
d) 6,23 kN.
e) 0,623 kN.

Seção 1.3

Diagramas dos esforços internos solicitantes

Diálogo aberto

Prezado aluno, o objetivo desta seção é, a partir do tipo e do valor das cargas externas que atuam em uma estrutura, determinarmos qual o valor dos esforços solicitantes nos elementos estruturais, ou seja, qual o valor da força normal, do esforço cortante, do momento torçor e do momento fletor que estão atuando no elemento a ser dimensionado. Outro objetivo é relacionar o carregamento com a força cortante e estes com o momento fletor para traçarmos os diagramas desses esforços internos.

Vamos ampliar nossa capacidade de solucionar problemas e nossa criatividade aprendendo novos conceitos, que também irão desenvolver nosso raciocínio lógico. Ampliando essas habilidades, atingiremos nosso objetivo final que é fazer a análise estrutural de peças sujeitas à flexão.

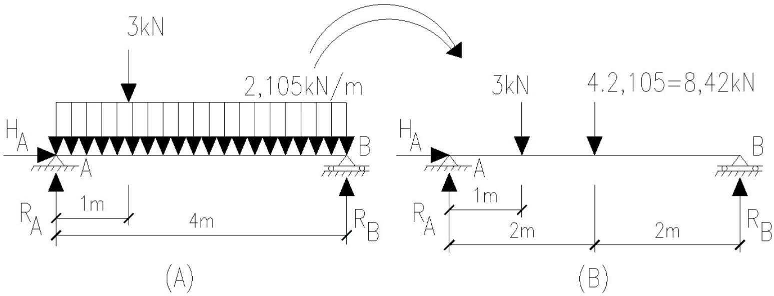
Aplicaremos esses novos conceitos a fim de dar continuidade na solução do problema da viga com deformação excessiva que serve de apoio a um sistema de controle de qualidade formado por um conjunto óptico de grande sensibilidade conectado a um sistema computacional. A empresa de engenharia na qual você trabalha o designou para estudar e apresentar uma solução para esse problema. Lembrando que você realizou vistoria no local e já calculou o centroide e o momento de inércia para a ST da viga reforçada, obtendo os seguintes resultados:

Coordenadas do centroide da viga reforçada $\rightarrow x_c = 8cm$ e $y_c = 6cm$.

Momentos de inércia da viga reforçada $\rightarrow I_x = 1561,16cm^4$ e $I_y = 573,16cm^4$.

Calculou, também, qual a carga uniformemente distribuída total que atuará na viga reforçada e as reações nos apoios que essa carga irá provocar. Obteve, assim, elementos para montar o esquema estrutural apresentado na Figura 1.24, reapresentada novamente a seguir.

Figura 1.24 | Esquema estrutural da viga considerando o reforço proposto (A); com a carga equivalente à distribuída (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Valores calculados para as reações de apoio: $H_A = 0$, $R_A = 6,46kN$ e $R_B = 4,96kN$.

Prosseguindo com a solução do problema da viga com deformação excessiva, o gerente de projetos da empresa em que você trabalha deseja agora que elabore um memorial de cálculo contendo a resposta aos seguintes questionamentos:

1) Considerando o esquema estrutural apresentado (Figura 1.24), como será o diagrama de esforço cortante para a viga com reforço?

2) Como será o diagrama de momento fletor para a viga reforçada, considerando o mesmo esquema estrutural?

3) Em que ponto da viga reforçada atuará o momento fletor máximo?

4) Qual será o valor do momento fletor máximo que atuará na viga com reforço?

Para responder a essas questões, nesta seção, iremos calcular os esforços solicitantes nos elementos estruturais, quais as relações entre o carregamento, a força cortante e o momento fletor; e, finalmente, traçarmos, ou seja, desenharmos os diagramas desses esforços internos. Esta seção o tornará apto a realizar esses cálculos.

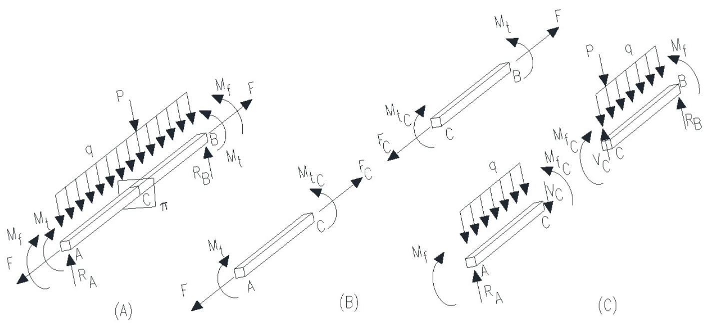
Essa etapa é um pouco mais complexa, mas é essencial para o dimensionamento de qualquer estrutura, por mais simples que ela seja, portanto, você fará uso desse conhecimento em sua vida profissional. Vale a pena aprender os conceitos que serão apresentados. Bons estudos!

Não pode faltar

Esforços solicitantes: força normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor

A peça estrutural em equilíbrio apresentada na Figura 1.27(A) está sujeita ao carregamento genérico indicado. Nas extremidades A e B estão aplicadas forças (R_A, R_B e F) e momentos torçor e fletor (M_t e M_f, respectivamente) que podem ser cargas externas ou reações de apoio, caso exista um apoio ou engaste na extremidade (podem, inclusive, serem nulas). Além disso, temos que, ao longo do comprimento da peça, há uma carga distribuída q qualquer e, em um ponto aleatório, uma carga concentrada P. Considere cortar essa peça em um ponto C aleatório contido no plano π, perpendicular ao eixo da peça. Como resultado, teremos as duas partes da peça desenhadas na Figura 1.27 (B) e (C). Na Figura 1.27(B) representamos somente as forças horizontais e o momento torçor, e na Figura 1.27(C) foram representadas apenas as forças verticais e o momento fletor. A opção em dividir a figura dessa forma foi escolhida para evitar complicações, caso fossem colocadas todas as cargas em um único desenho.

Figura 1.27 | Esquema estrutural de uma peça estrutural em equilíbrio



Fonte: elaborada pelo autor.

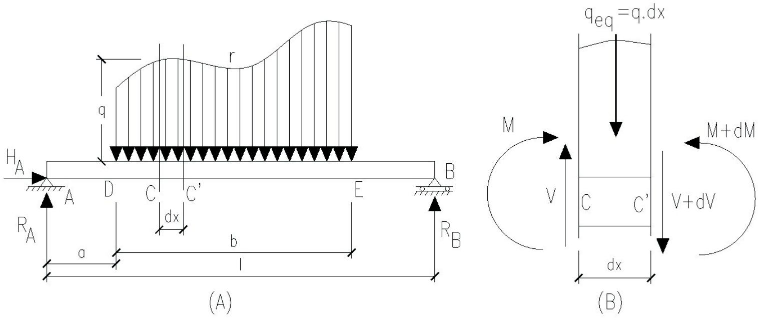
A Figura 1.27(A) mostra a peça em equilíbrio. Na Figura 1.27(B), que mostra a atuação da força axial F e do momento torçor M_t, para que o trecho AC continue em equilíbrio, é necessário que atue no ponto C uma força axial F_C e um momento torçor M_{t_C}, de modo que, a partir da condição de equilíbrio, a somatória das forças axiais e a somatória dos momentos torçores sejam nulas (o mesmo acontece com o trecho CB). Cortando a peça em vários pontos ao longo de seu eixo, determinaremos, para cada corte, uma força axial e um momento torçor, que manterão as partes da peça em equilíbrio. Poderemos, assim, traçar um diagrama para esforço normal e outro para momento torçor, chamados de diagramas de corpos livre.

Nosso estudo nesta seção se concentra na Figura 1.27(C), que mostra a atuação das forças verticais q, P, R_A e R_B e do momento fletor M_f. Neste caso, ao cortarmos a peça no ponto C, para que o trecho AC continue em equilíbrio, é necessário que atue nesse ponto uma força vertical V_C, chamada de esforço cortante (normalmente indicado pela letra V), e um momento M_{f_C}, chamado de momento fletor (normalmente indicado apenas pela letra M), de modo que a somatória das forças verticais e a somatória dos momentos fletores sejam nulas (o equilíbrio do trecho CB ocorre de forma semelhante). Como não sabemos qual o sentido de V_C e M_{f_C}, vamos supor que os sentidos indicados na figura estão corretos. Assim, após os cálculos, um valor positivo indicará que o sentido adotado está correto, e um valor negativo indicará que a solicitação tem sentido oposto ao indicado. Cortando a peça em vários pontos ao longo de seu eixo, determinaremos, para cada corte, uma força cortante e um momento fletor que manterão as partes da peça em equilíbrio. Traçamos, assim, um gráfico chamado diagrama de esforço cortante (DEC) e outro chamado diagrama de momento fletor (DMF).

Relações entre força, força cortante e momento fletor

Considere a viga da Figura 1.28(A) a seguir, que está sujeita a uma carga qualquer e em equilíbrio. Vamos analisar estruturalmente o trecho compreendido entre os pontos C e C', separados pela distância infinitesimal dx.

Figura 1.28 | Esquema estrutural de uma viga em equilíbrio sujeita a um carregamento qualquer (A); equilíbrio entre os pontos C e C' (B)



Fonte: adaptada de: Beer et al (2013, p. 375).

A partir da Figura 1.28(B), cortando a viga no ponto C, temos que, para que a viga continue em equilíbrio, na ST atuam os esforços internos V e M. Pelo mesmo motivo, o corte no ponto C' mostra que nessa ST atuam o esforço cortante $V + \Delta V$ e o momento fletor $M + \Delta M$. Aplicando as equações de equilíbrio no trecho CC', e adotando o sentido para cima como positivo para as forças e o horário como positivo para os momentos, temos que:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - q.dx - (V + dV) = 0 \Rightarrow -q.dx = dV \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q \quad \text{Eq. 1.40}$$

Calculando o momento fletor no ponto C (considerando o sentido horário como positivo), temos:

$$\sum M_{C'} = 0 \Rightarrow M + V.dx - q.dx.\frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \Rightarrow V.dx - q.\frac{dx^2}{2} = dM \quad \text{Eq. 1.41}$$

Desprezando o termo com dx^2, resulta:

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \text{Eq. 1.42}$$

Segundo Beer et al (2013, p. 375), a expressão 1.40 indica que "a inclinação dV/dx da curva de esforço cortante é negativa; o valor absoluto da inclinação em qualquer ponto é igual à carga por unidade de comprimento desse ponto", sendo que este conceito não vale para cargas concentradas porque, neste caso, existe uma descontinuidade. Ainda, segundo Beer et al (2013, p. 376), a expressão 1.42 mostra que "a inclinação dM/dx da curva de momento fletor é igual ao valor do esforço cortante".

Assimile

A equação do esforço cortante é a derivada da equação do momento fletor. Assim sendo, após obtermos a equação da curva de momento fletor (que normalmente é um polinômio), ao derivá-la, obtemos a equação da curva de esforço cortante.

Na Figura 1.28, considerando a origem do eixo x no ponto A e integrando a eq. 1.40 entre os pontos D (em que $x = a$) e E (no qual $x = a + b$), temos que:

$$V_E - V_D = -\int_a^{a+b} q.dx \qquad \text{Eq. 1.43}$$

Na qual V_D e V_E são os valores dos esforços cortantes (também chamados forças cortantes ou apenas cortantes) nos pontos D e E, respectivamente. Lembrando dos conceitos de cálculo, a integral de uma função definida entre dois pontos é numericamente igual à área sob a função entre esses pontos. Assim, a equação 1.43 mostra que a diferença entre as forças cortantes de dois pontos é numericamente igual ao negativo da área abaixo da curva de carregamento entre os referidos pontos.

Integrando a equação 1.42 de modo semelhante, o momento fletor entre os pontos D e E será:

$$M_E - M_D = \int_a^{a+b} V.dx \qquad \text{Eq. 1.44}$$

Em que M_D e M_E são os valores dos momentos fletores nos pontos D e E, respectivamente.

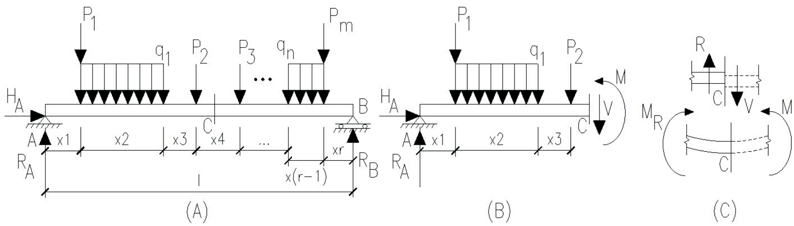
Assimile

A diferença entre as forças cortantes de dois pontos é numericamente igual ao negativo da área abaixo da curva de carregamento entre os referidos pontos. A diferença entre os momentos fletores de dois pontos é numericamente igual à área abaixo do diagrama de esforço cortante entre esses pontos, sendo que a área é positiva quando a força cortante for positiva; e negativa quando a força cortante for negativa.

Diagrama de esforço cortante e de momentos fletores

Considere a viga da Figura 1.29, que está sujeita a um carregamento qualquer com várias cargas e suas respectivas posições (distâncias) marcadas na Figura 1.29(A).

Figura 1.29 | Esquema estrutural de uma viga sujeita a um carregamento qualquer (A); equilíbrio do trecho AC (B); sentidos positivos para V e M (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para traçarmos os diagramas de esforço cortante e de momento fletor, cortamos a viga em um ponto C qualquer e marcamos os esforços internos V e M que atuam na ST que contém o ponto C, conforme Figura 1.29(B). Para equilibrar o trecho AC, ilustrado na Figura 1.29(C), temos:

1) Com relação às forças verticais, utilizamos a condição $\sum F_y = 0$, considerando a força cortante positiva, se ela e a resultante das cargas existentes (neste caso, a força R indicada na figura) no trecho AC formarem um binário de sentido horário.

2) Com relação ao momento fletor, utilizamos a condição $\sum M_{\text{ponto C}} = 0$, considerando o momento positivo se o

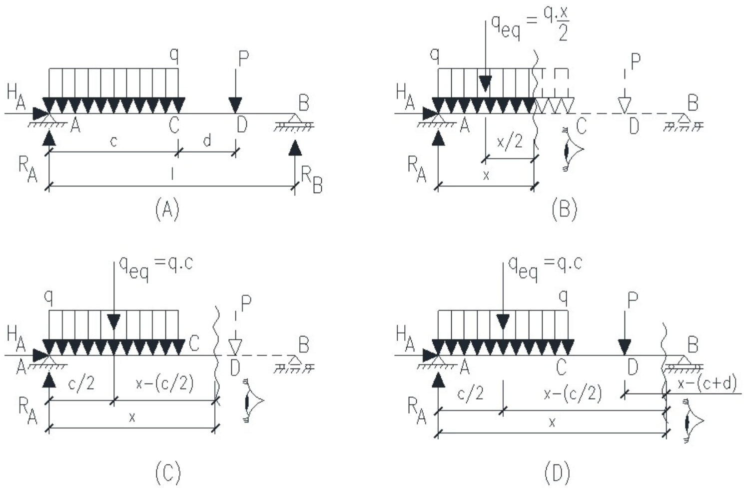
momento resultante das forças (M_R na figura) tracionar as fibras inferiores da viga.

Reflita

Ainda analisando a Figura 1.291(A), análogo ao explicado para o equilíbrio do trecho AC, se fossemos efetuar o equilíbrio do trecho CB, quais seriam os sentidos positivos da força cortante e do momento fletor nesse trecho?

Assim sendo, para traçarmos os diagramas, teoricamente, teríamos que cortar a viga em infinitos pontos. Entretanto, como a taxa de variação da força cortante (conforme eq. 1.40) e a taxa de variação do momento (conforme eq. 1.42) só se alteram de um ponto para outro quando ocorre mudança no carregamento entre esses pontos, podemos cortar a viga em trechos nos quais ocorre alteração no carregamento. Portanto, veja a viga da Figura 1.30(A) sujeita às cargas q (distribuída) e P (concentrada) e para as quais já foram determinadas as reações de apoio.

Figura 1.30 | Esquema estrutural dos cortes em vários trechos de uma viga para traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor



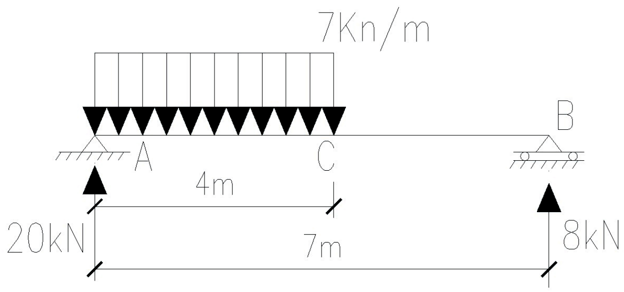
Fonte: elaborada pelo autor.

Nota-se na Figura 1.30(B) que, para todo o trecho AC, em qualquer ponto em que efetuarmos o corte, o equilíbrio das forças, olhando à esquerda do corte, contém apenas a reação no apoio A, a carga equivalente (esta é dependente da distância x em que o corte for efetuado) e a força cortante na ST do corte. Note que a carga equivalente não é a total, sendo equivalente à carga distribuída que está dentro do trecho que foi cortado (igual à área do carregamento à esquerda do corte). O equilíbrio dos momentos fletores se faz de forma análoga. Olhando à esquerda do corte, teremos a reação no apoio A multiplicada pela sua distância até o ponto de corte (uma variável x), a carga equivalente multiplicada pela sua distância até o ponto de corte (outra função de x) e o momento fletor na ST do corte. Na Figura 1.30(C) o corte é feito no trecho CD (válido para todo o trecho). Olhando à esquerda do corte, o equilíbrio das forças contém apenas a reação no apoio A, a carga equivalente (não mais dependente da distância x em que o corte for efetuado, porque a carga distribuída está totalmente contida dentro do corte) e a força cortante na ST do corte. O equilíbrio dos momentos fletores é feito exatamente igual ao anterior, os valores é que irão sofrer alteração: olhando à esquerda do corte, teremos a reação no apoio A multiplicada pela sua distância x até o ponto de corte (x agora varia entre c e $c+d$), a carga equivalente multiplicada pela sua distância até o ponto de corte (outra função de x) e o momento fletor na ST do corte. No último trecho a ser cortado (trecho DB), apresentado na Figura 1.30(D), olhando à esquerda do corte, o equilíbrio das forças terá a reação no apoio A, a carga equivalente (novamente a carga distribuída está totalmente contida dentro do corte), a força P e a força cortante na ST do corte. O equilíbrio dos momentos fletores é feito de modo semelhante ao anterior, incluindo a carga P multiplicada por sua distância ao ponto de corte (note que nesse trecho x varia de $c+d$ até l).

Exemplificando

Trace os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga apresentada na Figura 1.31. As reações de apoio foram calculadas previamente, sendo que a horizontal no ponto A é nula e por isso não foi desenhada.

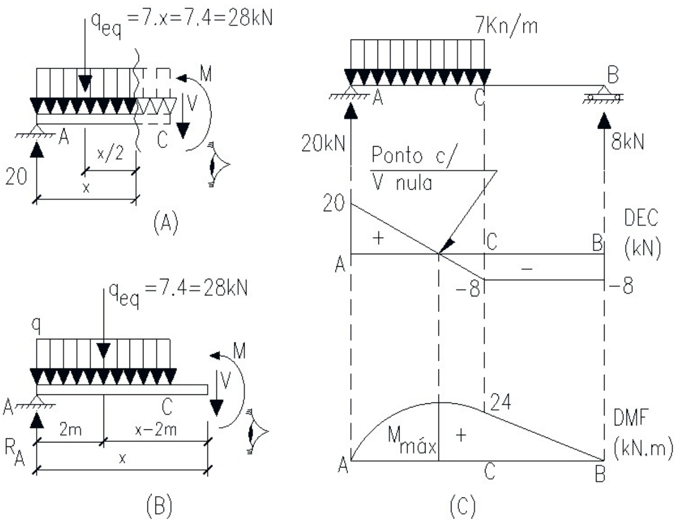
Figura 1.31 | Esquema estrutural de uma viga para traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: temos uma força de 20kN para cima no ponto A. Para equilibrar essa força, precisamos de uma força cortante de igual valor para baixo (positiva). Não há momento nesse ponto porque não há distância entre a força e o ponto.

Figura 1.32 | Figuras (A) e (B) com os cortes para a resolução do problema; e com os diagramas solicitados (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a variação da carga é constante, conforme a Figura 1.32(A), para o equilíbrio do trecho AC, podemos tomar o ponto final do trecho. Obtemos:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 28 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -8kN \quad \text{e}$$

$$\sum M_{ponto\ C} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20.4 - 28.2 - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 24kN.m$$

De acordo com a equação 1.40, nesse trecho o diagrama da força cortante será uma reta inclinada porque sua derivada deve ser igual a uma reta horizontal (carga constante); e segundo a equação 1.42, nesse trecho o diagrama de momento fletor será uma curva de segundo grau (parábola) porque sua derivada deve ser igual a uma reta inclinada (diagrama da força cortante).

Para o equilíbrio do trecho CB, conforme a Figura 1.32(B), temos, também, uma variação constante da carga. Tomando o ponto final do trecho, obtemos:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 28 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -8kN \quad \text{e}$$

$$\sum M_{ponto\ B} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20.7 - 28.5 - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

De acordo com a equação 1.40, nesse trecho o diagrama da força cortante será uma reta horizontal (constante) porque sua derivada deve ser igual a zero (não há carga no trecho); e segundo a equação 1.42, nesse trecho o diagrama de momento fletor será uma reta inclinada porque sua derivada deve ser igual a uma reta horizontal (diagrama da força cortante). No ponto B, temos a força cortante de 8kN negativa (constante no trecho CB) sendo equilibrada pela reação no apoio B (8kN para cima), zerando o DEC. Como a reação está no ponto B, não há distância para alterar a somatória de momentos, zerando, também, o DMF. Observação: nos diagramas, a linha horizontal ACB representa o eixo da viga.

Reflita

Porque, conforme mostra a Figura 1.32(C), no ponto em que o esforço cortante é nulo, o momento fletor é máximo? Como determinar esse ponto (como determinar o valor de x)? E como determinar o valor do momento máximo?

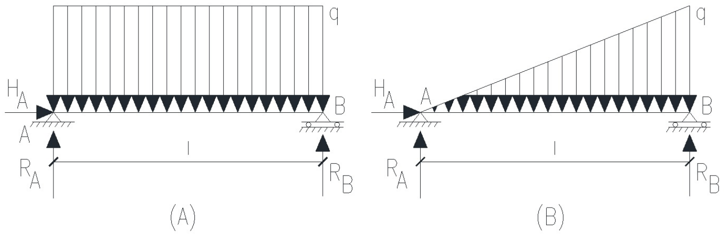
Pesquise mais

Há outro método que fornece as equações (normalmente, polinômios) de momento fletor e esforço cortante. Pesquise o método em:

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos materiais.** 3. ed. São Paulo. Editora Pearson Makron Books, 1995.

A partir da pesquisa, descubra qual a equação de esforço cortante e a de momento fletor para as vigas da figura 1.33(A) e (B).

Figura 1.33 | Representação de uma viga com carga uniformemente distribuída (A); e com carga linearmente distribuída (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

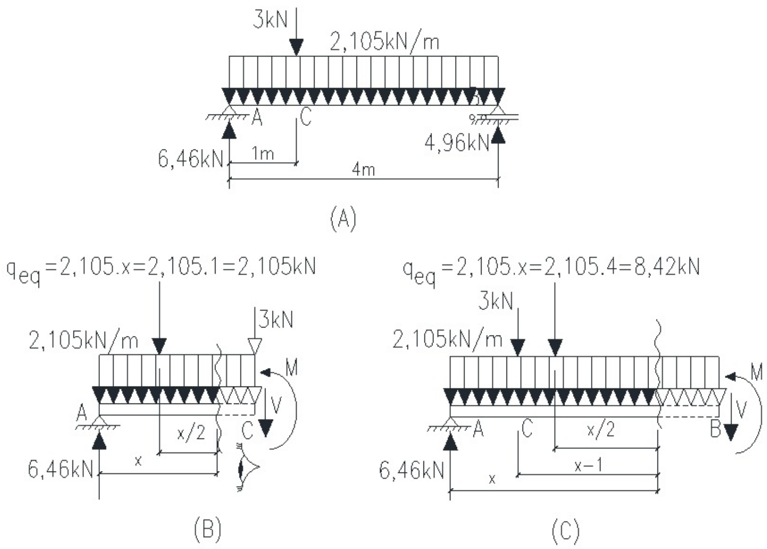
Sem medo de errar

Retomando nosso problema, você já calculou o centroide, o momento de inércia, traçou o esquema estrutural e determinou as reações de apoio para sua proposta de viga reforçada, a fim de sanar o problema de deformação excessiva da viga que serve de apoio a um sistema de controle de qualidade, formado por um conjunto óptico de grande sensibilidade conectado a um sistema computacional.

Prosseguindo com a solução, o gerente de projetos da empresa na qual você trabalha deseja agora que responda aos seguintes quesitos: considerando o esquema estrutural apresentado, como será o diagrama de esforço cortante para a viga com reforço? Como será o diagrama de momento fletor para a viga reforçada, considerando o mesmo esquema estrutural? Em que ponto da viga reforçada atuará o momento máximo? Qual será o valor desse momento máximo? Ele pede que a resposta com os cálculos e análises sejam encaminhadas em um memorial de cálculo.

Solução: A partir do esquema estrutural apresentado na Figura 1.34(A), nota-se que são necessários dois cortes para determinar as curvas para a força cortante e para o momento fletor.

Figura 1.34 | Esquema estrutural da viga com reforço (A); corte no primeiro trecho (B); corte no segundo trecho (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro corte está compreendido entre os pontos A e C (ou seja, $0 \leq x < 1m$, lembrando que x não pode ser igual a 1 m, porque a carga concentrada causa uma descontinuidade no diagrama da força cortante), porque em qualquer ponto desse trecho o conjunto de cargas é formado pela reação no apoio A e parte da carga distribuída, conforme mostra a Figura 1.34(B). O segundo corte está no trecho CB (ou seja, $1m \leq x < 4m$), porque em qualquer ponto desse trecho o conjunto de cargas é formado pela reação no apoio A, sendo parte da carga distribuída e a carga concentrada de 3kN aplicada no ponto C, conforme mostra a Figura 1.34(C).

No ponto A, devido à reação de apoio, o DEC sofre uma descontinuidade, partindo de zero e atingindo o valor de 6,46 kN para cima e o momento fletor é nulo. Para o primeiro trecho, como a variação da carga é constante, tomamos o ponto final do trecho. Portanto, temos que:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 6{,}46 - 2{,}105 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 4{,}355\text{kN}$$ e

$$\sum M_{\text{ponto C}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6{,}46.1 - 2{,}105.0{,}5 - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 5{,}41\text{kN.m}$$

Como a carga entre o ponto A e o final desse trecho é distribuída, o gráfico da força cortante será uma reta inclinada variando entre 6,46 kN (valor da força cortante no ponto A) e 4,355 kN (valor da força cortante no final do primeiro trecho) e o DMF será uma parábola variando de zero (ponto A) até 5,41 kN.m (ponto C). No ponto C, devido à carga concentrada de 3kN para baixo, o DEC apresenta uma descontinuidade para baixo, partindo de 4,355 kN e terminando em 1,355 kN. Para o segundo trecho, também com carga distribuída, tomamos o ponto final. Temos, assim:

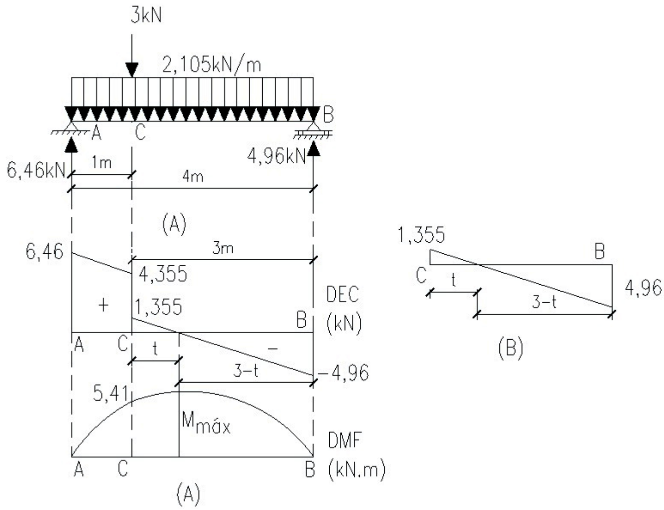
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 6{,}46 - 3 - 8{,}42 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -4{,}96\text{kN}$$

e

$$\sum M_{\text{ponto B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6{,}46.4 - 3.3 - 8{,}42.2 - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$$

Assim, como a carga é distribuída, o DEC será uma reta inclinada variando entre 1,355 kN (valor da força cortante no ponto C após a descontinuidade) e -4,96 kN (valor da força cortante no final do segundo trecho) e o DMF será uma parábola variando de 5,41 kN.m (ponto C) até zero (ponto B). No ponto B, devido à reação de apoio para cima, ocorre uma descontinuidade para cima de 4,96kN. Temos, então, os diagramas apresentados na Figura 1.35(A).

Figura 1.35 | Diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga da situação problema (A); semelhança de triângulos (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar o ponto no qual ocorre o momento máximo, fazemos uma semelhança com os triângulos mostrados na Figura 1.35(B), extraídos do diagrama de esforço cortante. Temos:

$$\frac{1,355}{t} = \frac{4,96}{3-t} \quad \Rightarrow \quad 1,355.(3-t) = 4,96.t \quad \Rightarrow \quad t = 0,64m$$

O ponto em que ocorre o momento máximo é $x = 1 + t = 1 + 0,64 \quad \Rightarrow \quad x = 1,64m$, considerando a origem o ponto A. O valor do momento máximo é igual à área do DEC entre o ponto A e o ponto no qual a força cortante é nula, ou seja:

$$M_{máx} = \text{área do trapézio} + \text{área do triângulo} = \frac{6,46+4,355}{2}.1 + \frac{0,64.1,355}{2}$$

$$M_{máx} = 5,84kN.m$$

Você deve, agora, redigir um relatório interno e encaminhá-lo ao gerente de projetos. Nesse relatório deverá constar os diagramas apresentados na Figura 1.35(A) e a informação que o momento máximo vale 5,84 kN.m e ocorre a 1,64 m do apoio A.

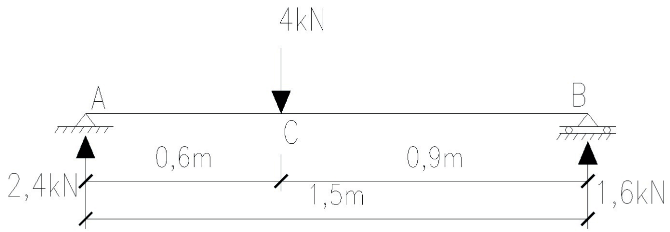
Avançando na prática

Viga bi-apoiada com carga concentrada

Descrição da situação-problema

Uma máquina foi modernizada para melhorar sua produtividade. Esse novo modelo, que possui uma carga concentrada de 4kN, foi necessário ser apoiado em uma viga metálica conforme mostra o esquema estrutural da Figura 1.36. Como será o diagrama de esforço cortante atuante na viga devido exclusivamente à carga concentrada? Despreze o peso próprio da viga. As reações de apoio já foram calculadas.

Figura 1.36 | Esquema estrutural de uma viga com carga concentrada

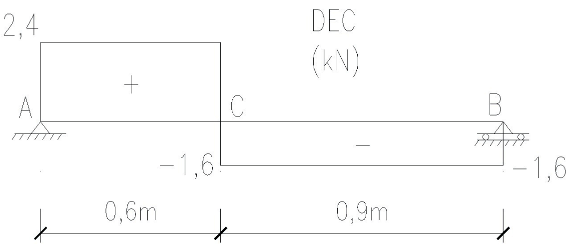


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

A partir do esquema estrutural dado, faremos dois cortes para determinar as curvas de esforço cortante: um no trecho AC e outro no CB. A partir da condição de equilíbrio para o trecho AC, temos que $\sum F_y = 0 \Rightarrow 2,4 - V = 0 \Rightarrow V = 2,4kN$. Como não há carga distribuída, esse valor é constante em todo o trecho, sendo, portanto, representado por uma reta horizontal. Para equilibrar o trecho CB, utilizamos a condição $\sum F_y = 0 \Rightarrow 2,4 - 4 - V = 0 \Rightarrow V = -1,6kN$, sendo também representado por uma reta horizontal pelo mesmo motivo. Nos pontos com carga concentrada haverá uma descontinuidade no DEC de valor igual ao valor da carga. Temos então, o diagrama apresentado na Figura 1.37.

Figura 1.37 | Diagrama de esforço cortante para viga com carga concentrada



Fonte: elaborada pelo autor.

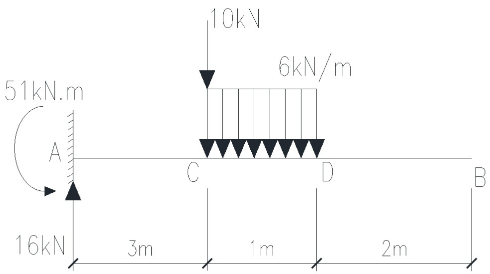
Temos, assim, que a resposta para o problema é o diagrama apresentado na Figura 1.37. Note que a máxima força cortante que atua na viga vale 2,4 kN e atua em todo o trecho AC.

Faça valer a pena

1. Como a taxa de variação da força cortante, dada por $\frac{dV}{dx} = -q$, e a taxa de variação do momento, fornecida por $\frac{dM}{dx} = V$, só se alteram de um ponto para outro quando ocorre mudança no carregamento entre esses pontos, para determinar o DEC e o DMF, podemos cortar a viga em trechos nos quais ocorre alteração no carregamento.

Para a viga que tem o esquema estrutural representado pela figura a seguir, assinale a alternativa que especifica corretamente quantos trechos são necessários fazer o equilíbrio para se determinar o DEC e o DMF?

Figura 1| Esquema estrutural de uma viga em balanço com várias cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

a) 1 trecho.
b) 3 trechos.
c) 4 trechos.
d) 2 trechos.
e) 5 trechos.

2. Segundo a equação $\frac{dM}{dx} = V$, em um trecho, a expressão que fornece a curva do esforço cortante é igual à derivada da expressão que descreve a curva do momento fletor nesse trecho; e, segundo a $\frac{dV}{dx} = -q$, a expressão que descreve a variação do carregamento em um trecho é igual à derivada da expressão que fornece a curva de esforço cortante nesse trecho, com o sinal trocado.
Um trecho de uma determinada viga tem a seguinte expressão para o momento fletor: $M_{(x)} = -1,5x^3 + 4x^2 - 15x + 63$ (em kN.m). Assinale a alternativa que fornece corretamente as expressões que descrevem a variação da força cortante (em kN) e do carregamento (em kN/m) nesse trecho, respectivamente.

a) $V_{(x)} = 4,5x^2 - 8x + 15$ e $q_{(x)} = 9x - 8$.

b) $V_{(x)} = -4,5x^2 + 8x + 48$ e $q_{(x)} = -9x + 56$.

c) $V_{(x)} = -1,5x^2 + 4x - 15$ e $q_{(x)} = -1,5x + 4$.

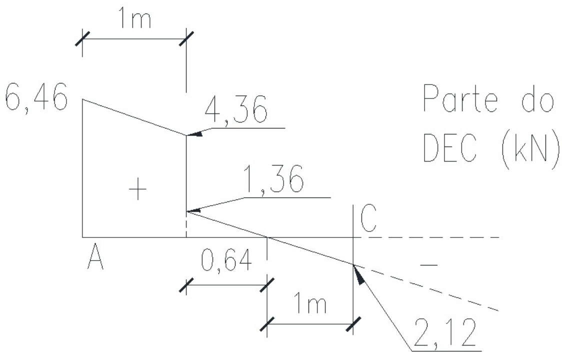
d) $V_{(x)} = -4,5 + 8 - 15 = -11,5$ e $q_{(x)} = 9 - 8 = 1$.

e) $V_{(x)} = -4,5x^2 + 8x - 15$ e $q_{(x)} = 9x - 8$.

3. A diferença entre a força cortante de dois pontos é numericamente igual ao negativo da área abaixo da curva de carregamento entre os referidos pontos. A diferença entre os momentos fletores de dois pontos é numericamente igual à área abaixo do diagrama de esforço cortante entre esses pontos (área positiva em que a força cortante for positiva; e negativa na qual a força cortante for negativa).
Uma viga bi-apoiada está sujeita a um carregamento tal que parte do diagrama de esforço cortante é apresentado na figura a seguir. Assinale a

alternativa que apresenta o valor correto do momento fletor no ponto C mostrado na referida figura.

Figura | Parte do diagrama de esforço cortante de uma certa viga



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $M_C = 6,79kN.m$.

b) $M_C = 4,79kN.m$.

c) $M_C = 4,69kN.m$.

d) $M_C = 6,69kN.m$.

e) $M_C = 9,64kN.m$.

Referências

BEER, F. P. et al. **Mecânica vetorial para engenheiros:** estática. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos materiais.** 3. ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 1995.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais.** 5. ed. São Paulo. Prentice Hall, 2004.

MELCONIAN, S. **Mecânica técnica e resistência dos materiais.** 17. ed. São Paulo: Érica, 2003.

Flexão em barras

Convite ao estudo

Bem-vindo, prezado aluno. Esta unidade aborda um tema essencial à análise de estruturas: a flexão em barras. Estudaremos a flexão simples, a flexão composta e a flexão assimétrica, ou seja, iremos aprender como determinar as tensões e deformações que esses tipos de flexão provocam. Essas solicitações atuam nos elementos estruturais e podem provocar sua inutilização de duas formas. A primeira, que é óbvia, é a ruptura do elemento. Todo material suporta uma determinada tensão que, quando ultrapassada, rompe o material. A segunda depende da magnitude da deformação da peça estrutural, pois ela pode inviabilizar todo o projeto. Por exemplo, quando uma viga que está sobre uma engrenagem se deformar, se essa deformação for maior que a distância que a separa da engrenagem, esta irá raspar na viga, inviabilizando o funcionamento seguro da máquina.

Lembrando que nosso objetivo final é reduzir a deformação excessiva que uma viga apresenta e que está afetando as leituras do sistema óptico computadorizado de controle de qualidade apoiado na referida viga. Já calculamos as características geométricas da ST, determinamos o carregamento atuante, desenhamos o esquema estrutural da viga e, a partir dele, calculamos as reações de apoio e traçamos o DEC e o DMF. Agora, como continuidade dos trabalhos e objetivo desta unidade, desenvolvendo nossa criatividade e aumentando nossa capacidade de solucionar problemas, aprenderemos a determinar qual a tensão devido à flexão que atuará na viga reforçada e qual a magnitude da deformação que essa viga irá apresentar. Sobre esse assunto, várias perguntas podem ser elaboradas, tais como: as tensões provocadas pelo efeito de flexão são do mesmo tipo ao longo de toda a viga ou há tipos diferentes de tensões? Essas tensões são constantes ao longo da viga ou são variáveis? Se forem variáveis, como determinar as tensões máximas? A deformação que uma viga apresenta é constante ao longo do seu comprimento ou é variável? Como determinar a deformação máxima que irá atuar na viga? Como reduzir a deformação que uma viga apresenta? Qual a relação entre a tensão atuante e a deformação apresentada pela viga?

Nesta unidade, estudaremos os conceitos dos tipos de flexão (pura, simples, normal, oblíqua e assimétrica). Aprenderemos a calcular as deformações que a flexão provoca e a dimensionar uma barra sujeita à flexão.

No momento, há mais perguntas que respostas. Estudando, você responderá a essas perguntas e a muitas outras, além disso efetuará os cálculos necessários para determinar a magnitude das tensões e das deformações que o efeito da flexão provoca nas vigas. Bons estudos!

Seção 2.1

Flexão simples e flexão pura

Diálogo aberto

Prezado aluno, toda viga possui peso próprio que, mesmo sem haver outra carga externa, causa deformação. Imagine que o varal de roupas da sua casa é uma viga. Sem suportar qualquer roupa, ele apresenta uma curvatura (deformação) do eixo longitudinal, popularmente chamada de "barriga", causada pelo efeito da flexão e agravada com a atuação de mais cargas.

Retomando o problema do equipamento de controle de qualidade com erros nas leituras porque está apoiado em uma viga metálica que apresenta deformação excessiva, lembre-se de que você foi designado para estudar o caso e apresentar uma solução e que, vistoriando o local, notou que a viga na qual o equipamento está instalado também suporta uma passarela.

Na vistoria, você levantou dados que, após alguns cálculos, permitiram determinar as cargas atuantes na viga, montar o esquema estrutural, calcular as reações de apoio e traçar o DEC e o DMF. Você determinou, também, os momentos de inércia da viga reforçada.

Todos esses resultados são necessários para quantificar a deformação que a viga apresenta devido ao efeito da flexão ocasionada pelas cargas que nela atuam.

Assim sendo, considerando a Figura 2.1 que mostra a configuração deformada para a viga reforçada, o gerente de projetos da empresa de engenharia em que você trabalha, quer que elabore um memorial de cálculo no qual constem os cálculos necessários para embasar as respostas às seguintes perguntas:

Figura 2.1 | Esquema mostrando a deformação a ser calculada para a viga da situação-problema

Fonte: elaborada pelo autor.

a) Qual o valor da máxima tensão de compressão e da máxima de tração que atuarão na ST do ponto de instalação do aparelho óptico?

b) Qual o valor da flecha que atuará no ponto de instalação do aparelho óptico?

Faltando pouco para apresentarmos a solução final, vamos nos dedicar a entender os conceitos de flexão e aprender como calcular as deformações que ela provoca para terminarmos essa tarefa. Bons estudos!

Não pode faltar

Definição de flexão pura, flexão simples, flexão normal e flexão oblíqua

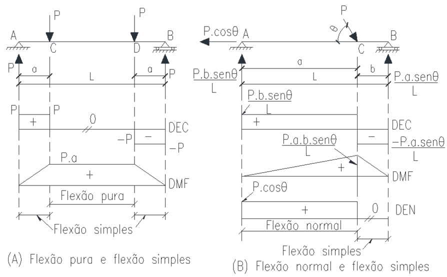
Dizemos que a ST de uma peça estrutural qualquer está sujeita à flexão pura quando o momento fletor é o único esforço interno que solicita essa ST (ou seja, o esforço cortante, o momento torçor e o esforço normal são nulos).

No caso de termos na seção a atuação dos esforços internos no momento fletor e esforço cortante; e o esforço normal nulo, teremos uma flexão simples.

Se houver a atuação de esforço normal em conjunto com o momento fletor, seja com ou sem o esforço cortante, teremos a flexão normal.

A Figura 2.2 ilustra essas situações. Vemos na Figura 2.2 (A), no trecho CD, que o esforço normal e o esforço cortante são nulos; sendo que existe somente a atuação do momento fletor, caracterizando, portanto, flexão pura. Nos trechos AC e DB temos o esforço normal nulo e a atuação do esforço cortante e do momento fletor, condições para a existência de flexão simples. Na Figura 2.2 (B), temos flexão normal no trecho AC, pois o esforço normal e o momento fletor estão atuando; e temos uma flexão simples no trecho CB, em que há apenas a atuação de esforço cortante e momento fletor.

Figura 2.2 | Trechos de viga sujeitos à flexão pura ou à flexão simples



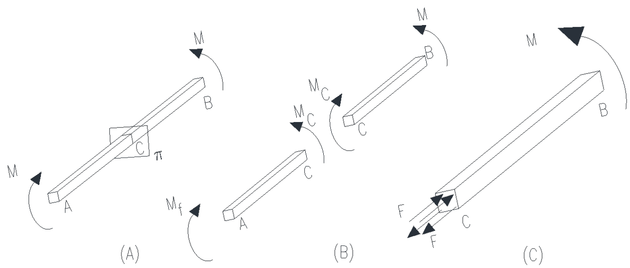
Fonte: elaborada pelo autor.

A flexão oblíqua ocorre quando o plano de flexão não contém um dos eixos de inércia, ou seja, o momento fletor atuante pode ser decomposto em dois, nenhum nulo, cada um atuando em torno de um dos eixos de inércia. Esse tipo de flexão será estudado na próxima seção.

Estudo da flexão pura

Seja a peça estrutural em equilíbrio apresentada na Figura 2.3 (A), sujeita ao carregamento composto apenas pelos momentos M aplicados nas extremidades A e B, cortando essa peça em um ponto C qualquer contido no plano π, perpendicular ao eixo da peça, temos as duas partes resultante do corte desenhadas na Figura 2.3 (B). Aplicando, em qualquer das partes, a condição de equilíbrio $\sum M_C = 0$, obtemos que $M_C = M$. Note que, na seção transversal C não há esforço cortante atuando, pois não há força vertical, ou seja, a condição de equilíbrio $\sum F_y = 0$ conduz a V = 0. Essa situação de força cortante nula caracteriza a flexão pura. Na Figura 2.3 (C), que mostra uma ampliação da parte CB da peça, entendemos que o momento fletor M_C resulta da aplicação de um binário na seção transversal, formado pelas forças F, provocando tração em um lado da peça e compressão em outro. Assim sendo, as forças F surgem em resposta ao momento aplicado M. Adotaremos o sentido apresentado na figura como positivo para os momentos fletores, ou seja, será positivo o momento fletor que tracionar a fibra inferior da viga.

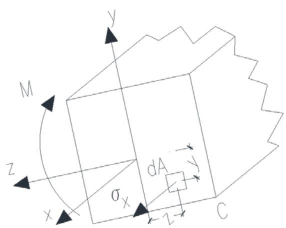
Figura 2.3 | Esquema estrutural de uma viga em equilíbrio sujeita a um carregamento composto apenas por momento (A); equilíbrio das partes AC e CB (B); ampliação da parte CB (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere ampliar a ST que contém o ponto C. Como é praxe na área de estruturas, tomemos um sistema de eixos cartesianos no qual x é paralelo ao eixo longitudinal da peça, y é o eixo vertical e z é o terceiro eixo que forma o sistema tri ortogonal, como mostra a Figura 2.4 (nesta situação, o momento de inércia I_x será chamado I_z).

Figura 2.4 | ST ampliada mostrando a tensão aplicada em uma área infinitesimal dA



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que uma força F atuando em uma área (dA) resulta em uma tensão normal ($\sigma_x = \frac{F}{dA}$). Temos, assim, a tensão σ_x como resultado da atuação do momento fletor M na seção. Aplicando as condições de equilíbrio em qualquer parte da viga, temos:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \sigma_x . dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.1}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \int y . \sigma_x . dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int -y . \sigma_x . dA = M \qquad \text{Eq. 2.2}$$

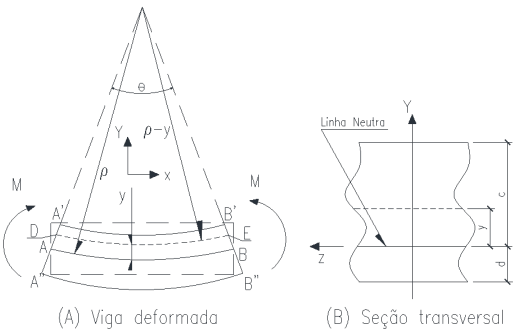
$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \int z . \sigma_x . dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.3}$$

Linha neutra

Analisemos, agora, um trecho AB qualquer da viga deformada, com comprimento inicial L, apresentado na Figura 2.5 (A). Na face superior (linha $A'B'$) haverá uma redução no comprimento desse trecho e na face

inferior (linha $A''B''$), um aumento, logo, em algum ponto ao longo da altura da viga há uma linha, AB, que não sofrerá deformação, mantendo o comprimento original. À essa linha chamamos linha neutra (simplificadamente, apenas LN) ou linha elástica.

Figura 2.5 | Esquema estrutural do trecho da viga deformada sujeita aos momentos M (A); e seção transversal qualquer desse trecho (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos escrever o comprimento L do trecho em função das coordenadas polares ρ e θ, ou seja, $L = \rho . \text{sen}\theta$. Para ângulos muito pequenos, $\text{sen}\theta \cong \theta$, resultando em $L = \rho . \theta$. Consideremos uma linha qualquer DE a uma distância y da LN, seu comprimento antes da viga deformar era L e, analogamente, após a deformação, seu comprimento final será dado por $L' = (\rho - y).\theta$. Assim, a deformação que essa linha apresentará pode ser escrita como:

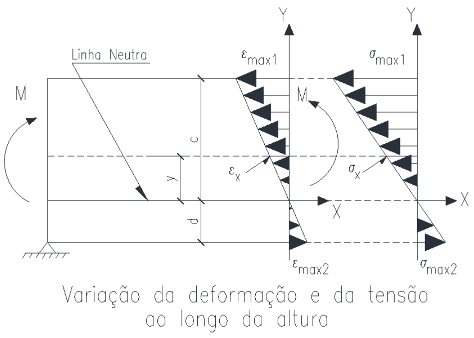
$$\delta = L' - L = (\rho - y).\theta - \rho.\theta = -y.\theta \quad \Rightarrow \quad \delta = -y.\theta \qquad \text{Eq. 2.4}$$

A partir dessa equação, podemos definir a deformação específica no eixo x como sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y.\theta}{\rho.\theta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad \text{Eq. 2.5}$$

Essa expressão mostra que a deformação da viga varia linearmente com a distância a LN, que é nula, e é máxima nas faces superior e inferior (quando $y = c$ e $y = d$, respectivamente). Neste caso, temos $\varepsilon_{máx\,1} = -\frac{c}{\rho}$ (o sinal negativo indica uma diminuição no comprimento – conforme explicado na Figura 2.3 (C), a força F comprime a região superior da ST); e $\varepsilon_{máx\,2} = -\frac{d}{\rho}$ (como, neste caso, d é negativo, a deformação será positiva e ocorre um aumento no comprimento – conforme explicado na Figura 2.3 (C), a força F traciona a região inferior da ST). A Figura 2.6 ilustra essa variação.

Figura 2.6 | Variação da tensão e da deformação na ST da viga ao longo da altura



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando a Figura 2.6, por semelhança de triângulos, podemos escrever:

$$\frac{\varepsilon_{máx\,1}}{c} = \frac{\varepsilon_x}{y}. \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{y}{c}\,\varepsilon_{máx\,1} \qquad \text{Eq. 2.6}$$

Pesquise mais

Encontramos a expressão 2.6 utilizando semelhança de triângulos e a definição de deformação específica (Eq. 2.4). Há uma outra forma, utilizando limite, para encontrar a equação 2.6. Pesquise qual é esse método, nas páginas 221 a 224, em:

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

Hipótese de Bernoulli: tensão normal e deformação longitudinal na flexão

Considerando estarmos dentro do limite de elasticidade, isto é, a tensão máxima não atinge o patamar de escoamento ($\sigma_{máx} < \sigma_e$), podemos aplicar a Lei de Hooke, resultando em uma tensão normal dada por $\sigma_{máx} = E.\varepsilon_{máx}$, seja o máximo de compressão ou tração. De acordo com a Lei de Hooke e a partir da equação 2.5, para uma deformação ε_x em uma altura y qualquer, temos que a tensão normal para qualquer ponto da ST, nessa altura, será dada por:

$$\sigma_x = -\frac{y}{\rho}.E \qquad \text{Eq. 2.7}$$

Essa equação mostra uma variação linear da tensão normal com a altura do ponto na ST (também apresentada na Figura 2.6). Além disso, caracteriza, também, a hipótese de Bernoulli que despreza as deformações provocadas pelo esforço cortante. Essa hipótese não pode ser utilizada nos pontos de aplicação de cargas concentradas ou em pontos com modificações na geometria da ST. Nesses locais, a variação das deformações não pode ser considerada linear.

Através de semelhança de triângulos análoga à utilizada para estabelecer uma relação entre as deformações na equação 2.6, podemos escrever:

$$\frac{\sigma_{máx\,1}}{c} = \frac{\sigma_x}{y}. \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{y}{c}\,\sigma_{máx\,1} \qquad \text{Eq. 2.8}$$

Assimile

Em uma ST, a variação da tensão normal é linear. Ela varia da máxima tensão normal de tração (considerada positiva) na face superior ou inferior para a máxima tensão normal de compressão (adotada como negativa) na face oposta. Assim, passando de positiva para negativa, existe um ponto na ST em que a tensão é nula. O conjunto desses pontos ao longo do comprimento da viga é chamado de linha neutra ou linha elástica.

Substituindo a eq. 2.8 na eq. 2.1, temos

$$\int \sigma_x . dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y}{c}\, \sigma_{máx\,1}\, dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{máx\,1}}{c} \int y . dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.9}$$

Considerando que $\sigma_{máx1}$ e c são diferentes de zero, para atender à equação 2.9, e, consequentemente, uma das condições de equilíbrio da viga, é necessário que

$$\int y . dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.10}$$

Recordando da Seção 1, Unidade 1, a integral $\int y . dA$ representa o momento estático de um ponto na ST. Logo, a eq. 2.10 indica que, na flexão pura, a LN deve passar pelo centroide da seção, pois esse é o ponto na ST que possui momento estático nulo.

Considerando a Figura 2.5, vamos substituir a Equação 2.8 na Equação 2.2. Temos:

$$\int -y . \sigma_x . dA = M \quad \Rightarrow \quad \int -y . \frac{y}{c} . \sigma_{max\,1} . dA = M \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{max\,1}}{c} \int y^2 . dA = -M \qquad \text{Eq. 2.11}$$

Na Seção 1, Unidade 1, vimos que a integral $\int y^2 . dA$ representa o momento de inércia I_z da ST (lembrando que o eixo x passou a ser chamado de z nesta unidade). Assim, temos:

$$\sigma_{max\,1} = -\frac{M . c}{I_z} \qquad \text{Eq. 2.12}$$

Essa expressão fornece a máxima tensão normal que ocorre na face superior de qualquer ST de uma viga. Note que M é positivo se tracionar as fibras inferiores da viga e que c é positivo, pois o ponto está acima do centroide. Nesta situação, na face superior, a tensão é negativa, ou seja, de compressão. Ainda considerando a Figura 2.6, se quisermos saber a tensão normal na face inferior, utilizamos a expressão:

$$\sigma_{max\,2} = -\frac{M.d}{I_z} \qquad \text{Eq. 2.13}$$

Analogamente, generalizando para qualquer ponto localizado a uma distância vertical y do centroide, temos que a tensão normal nesse ponto será dada por:

$$\sigma_x = -\frac{M.y}{I_z} \qquad \text{Eq. 2.14}$$

Sendo y positivo, se o ponto estiver acima do centroide, M será positivo se estiver de acordo com a nossa convenção.

Reflita

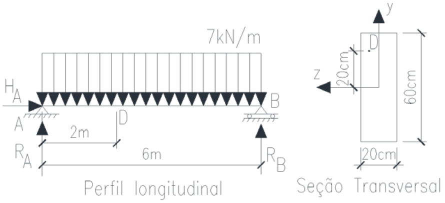
Considerando o sistema de eixos adotado nesta seção, se a carga que atua na viga for horizontal, ou seja, se estiver contida no plano xz, como seria escrita a expressão 2.14 para calcular a tensão normal σ_x ? Adote como positivo o momento que traciona a face lateral direta da ST.

A força cortante provoca tensões de cisalhamento e não altera a tensão normal, portanto, as equações apresentadas para as deformações e as tensões podem ser utilizadas nos casos de flexão pura e de flexão simples (momento fletor com esforço cortante).

Exemplificando

Para a viga apresentada na Figura 2.7, determine o valor da tensão normal no ponto D localizado a dois metros do apoio A e a 20 cm acima do centroide da ST da viga.

Figura 2.7 | Esquema estrutural de viga para determinação da tensão normal em um ponto



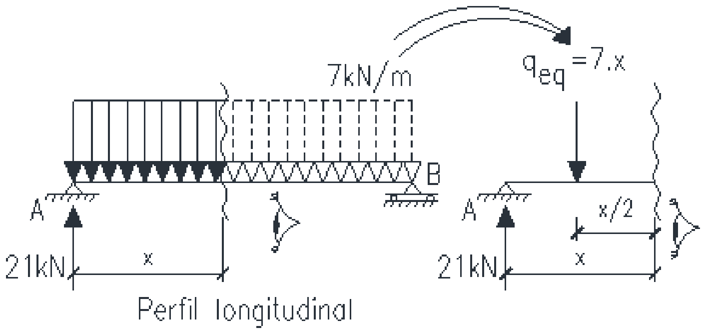
Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Devido o fato de não termos esforço horizontal, segue que $H_A = 0$. Da simetria do problema, temos que $R_A = R_B = \frac{6.7}{2} = 21kN$. Como a seção transversal é retangular, podemos calcular $I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,2.0,6^3}{12} = 0,0036m^4$.

O cálculo da tensão normal atuante no ponto D necessita do valor do momento fletor atuante na ST que contém o ponto, ou seja, a dois metros do apoio A. Precisamos, então, encontrar a equação de momento fletor válida para essa ST. Analisando a viga, notamos que para $0 \leq x \leq 6$ temos um único conjunto de cargas (a reação em A e parte da carga distribuída) resultando, portanto, temos uma única equação de momento fletor válida para toda a viga. Cortando em um ponto x qualquer, como mostra a Figura 2.8, temos que a equação de momento fletor, considerando positivo o momento fletor que traciona as fibras inferiores da viga, será: $M_{(x)} = 21.x - 7.x.\frac{x}{2} = -3,5.x^2 + 21.x$

Figura 2.8 | Corte na viga para determinação da equação de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, para uma ST a dois metros do apoio A, temos que: $M_{(2)} = -3,5.2^2 + 21.2 = 28kN.m$

A tensão normal atuante no ponto D será:

$$\sigma_D = -\frac{M.y}{I_z} = -\frac{28000.0,2}{0,0036} = -1555555,56N/m^2 \cong -1,56MPa.$$

Logo, a tensão normal atuante no ponto D será de 1,56MPa de compressão.

Equação da linha elástica

Da expressão 2.5, para y = c, podemos dizer que:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_{max1}}{c} \quad \text{Eq. 2.15}$$

Na qual $\frac{1}{\rho}$ é chamado de curvatura da LN. Utilizando a Lei de Hooke, escrevemos:

$$\varepsilon_{max1} = \frac{\sigma_{max1}}{E} = -\frac{M.c}{E.I_z} \quad \text{(Eq. 2.16)}$$

Substituindo a eq. 2.16 na eq. 2.15, resulta em:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{E.I_z} \quad \text{Eq. 2.17}$$

Do cálculo, temos que a curvatura da linha elástica (ou linha neutra) pode ser escrita como uma função de x através da expressão:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\mu}{dx^2} \quad \text{Eq. 2.18}$$

O eixo μ coincide com o eixo y, porém, positivo para baixo; $\mu = f(x)$ é a equação da linha elástica e o valor de μ em um ponto é chamado flecha, conforme está indicado na Figura 2.1.

A derivada $\frac{d\mu}{dx}$ é a inclinação da linha elástica, sendo desprezível seu quadrado por ser extremamente pequeno. Das equações 2.17 e 2.18 escrevemos:

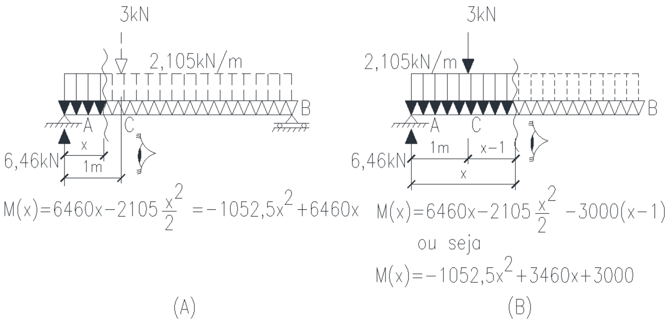
$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{M}{E.I_z} \qquad \text{Eq. 2.19}$$

A solução da eq. 2.19 requer efetuar a integral indefinida duas vezes sucessivas do segundo membro, gerando duas constantes, a princípio, incógnitas. Para encontrá-las, devemos impor as chamadas condições de contorno, ou seja, valores conhecidos da deflexão e/ou da inclinação da linha elástica em pontos determinados, por exemplo, o valor da deflexão ($\mu = 0$) sobre um apoio ou o valor nulo para a inclinação da linha elástica $\left(\frac{d\mu}{dx} = 0\right)$ em que o momento é máximo.

Sem medo de errar

Para o problema descrito na Unidade 1, em que o equipamento de controle de qualidade tem erros de leitura por estar apoiado em uma viga metálica que apresenta deformação excessiva, até o momento foram calculados o centroide da ST reforçada, os momentos de inércia dessa ST, montado o esquema estrutural da viga, calculadas as reações de apoio, traçado o DMF e determinado que, no ponto no qual o equipamento está instalado, atuará um momento fletor igual a 5,41 kN.m, conforme mostra a Figura 2.9.

Figura 2.9 | Esquema estrutural e DMF para a viga da situação problema (A); Seção transversal reforçada e momentos de inércia (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, para a ST da viga reforçada em que está instalado o aparelho óptico, o gerente de projetos quer que você elabore um memorial de cálculo no qual conste os cálculos necessários para embasar as respostas às seguintes perguntas:

a) Qual o valor da tensão de compressão e de tração máximas atuantes?

b) Sendo $E_{aço} = 210\,GPa$, qual o valor da flecha na ST do ponto de instalação do equipamento?

Solução:

Item a) Na ST em que foi instalado o aparelho óptico, atua o momento fletor de 5,41 kN.m, positivo. A tensão máxima de compressão ocorre na face superior (c = 0,14 m), e a d/e tração, na face inferior (d = - 0,06 m). Portanto, temos:

$$\sigma_{max\,1} = -\frac{M.c}{I_z} = -\frac{5410.0,14}{1561,16.10^{-8}} = -48515206,64Pa \cong -48,52MPa$$,

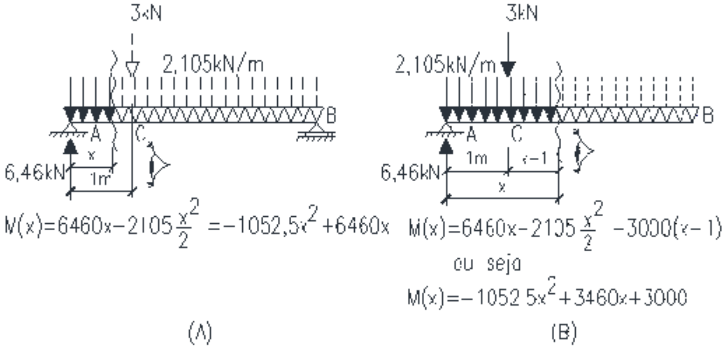
E

$$\sigma_{max\,2} = -\frac{M.d}{I_z} = -\frac{5410.(-0,06)}{1561,16.10^{-8}} = 20792231,42Pa \cong 20,79MPa$$

Logo, na ST em que o aparelho óptico está instalado atuarão uma máxima tensão normal de compressão de 48,52MPa e uma máxima de tração de 20,79MPa.

Item b) Para determinar a flecha (deflexão μ), cortamos a viga como mostra a Figura 2.10.

Figura 2.10 | Cortes na viga mostrando as cargas e as equações de momento fletor no trecho $0 \leq x \leq 1$ (A) e no trecho $1 \leq x \leq 4$ (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para $0 \leq x \leq 1$ escrevemos:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{\left(-1052,5.x^2 + 6460.x\right)}{E.I_z}$$

Integrando em relação a x, no primeiro trecho temos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{350,83.x^3 - 3230.x^2 + C_1}{E.I_z}.$$

Novamente, integrando em relação a x essa última equação, resulta:

$$\mu = \frac{87,71.x^4 - 1076,67.x^3 + C_1.x + C_2}{E.I_z}$$

Substituindo $\mu = 0$ e $x = 0$ (deflexão nula no apoio A), encontramos $C_2 = 0$. Para $1 \leq x \leq 4$ escrevemos:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{\left(-1052,5.x^2 + 3460.x + 3000\right)}{E.I_z}$$

Integrando em relação a x, temos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{350,83.x^3 - 1730.x^2 - 3000.x + C_3}{E.I_z}.$$

Substituindo nessa equação $\frac{d\mu}{dx} = 0$ e x = 1,64 m (inclinação da linha elástica nula em que M é máximo), encontramos $C_3 = 8025,52$. Integrando a última equação relação a x, resulta:

$$\mu = \frac{87,71.x^4 - 576,67.x^3 - 1500.x^2 + 8025,52.x + C_4}{E.I_z}$$

Substituindo $\mu = 0$ e $x = 4$ nessa última equação (deflexão nula no apoio B), encontramos $C_4 = 6351,04$. Finalmente, escrevendo $\mu_{\text{primeiro trecho}} = \mu_{\text{segundo trecho}}$ (a deflexão à direita e à esquerda são iguais no ponto de mudança de equação de momento fletor – x=1 m), temos:

$$87,71.(1)^4 - 1076,67.(1)^3 + C_1.(1) = 87,71.(1)^4 - 576,67.(1)^3 - 1500.(1)^2 + 8025,52.(1) + 6351,04$$

Em que $C_1 = 13376,56$.

Escrevemos que:

$$\mu_{\text{primeiro trecho}} = \frac{87,71.x^4 - 1076,67.x^3 + 13376,56.x}{210.10^9.1561.10^{-8}}$$

Para x=1 m, temos:

$$\mu_{\text{equipamento}} = \frac{87,71.(1)^4 - 1076,67.(1)^3 + 13376,56.(1)}{210.10^9.1561,16.10^{-8}} \cong 3,78.10^{-3}\,m = 3,78mm$$

Ou seja, a deformação à qual o equipamento estará sujeito será de 3,78 mm após reforçar a viga. Você deve comparar esse valor encontrado com o máximo permitido para o equipamento (normalmente, fornecido em alguma tabela elaborada pelo fabricante). Se for menor que o máximo permitido, o problema está solucionado. Caso seja maior, será necessário adotar outra solução.

Redija, agora, um memorial de cálculo contendo os cálculos e as respostas aos itens a e b e apresente-o ao gerente de projetos. Esse relatório deve conter, também, a conclusão final se a solução adotada resolve ou não o problema.

Observação: a melhor solução seria criar uma estrutura independente para o conjunto óptico computadorizado. Dessa forma, esse conjunto não seria afetado pela variação na deformação que ocorre devido à carga intermitente que atua na passarela (chamada de carga móvel).

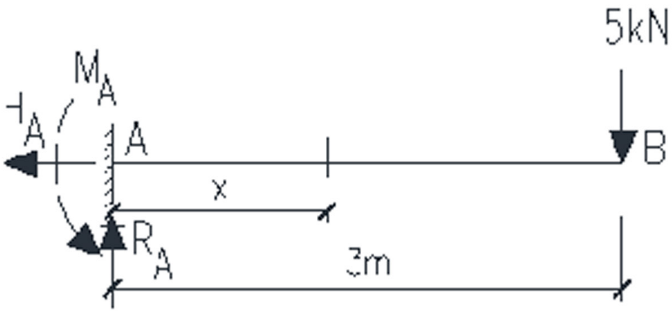
Avançando na prática

Deflexão de viga em balanço sujeita a uma carga concentrada

Descrição da situação-problema

Determinar a flecha máxima que ocorre na viga metálica em balanço, apresentada na Figura 2.11, que está sujeita ao carregamento mostrado. Considere que a ST é retangular de 15 cm x 40 cm e o módulo de elasticidade longitudinal é de 210 GPa.

Figura 2.11 | Esquema estrutural de viga em balanço sujeita à carga concentrada para determinação da deflexão máxima



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Aplicando as equações de equilíbrio, temos que:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 5kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 15kN.m$$

Como a ST é retangular, $I_z = \frac{0,15.0,40^3}{12} = 0,0008m^4$, a equação de momento fletor para qualquer ponto da viga será:

$$M_{(x)} = -M_A + R_A.x = -15000 + 5000.x$$

Logo, podemos escrever que:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{M}{E.I_z} = -\frac{(-15000 + 5000.x)}{E.I_z}$$

Integrando em relação a x, temos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(15000.x - 2500.x^2 + C_1)}{E.I_z}$$

Impondo a condição de inclinação da linha elástica nula no engaste ($\frac{d\mu}{dx} = 0$ quando x=0), encontramos $C_1 = 0$. Integrando a última expressão, novamente em relação a x, encontramos:

$$\mu = \frac{(7500.x^2 - 833,33.x^3 + C_2)}{E.I_z}$$

Com a condição de deflexão nula no engaste ($\mu = 0$ quando x=0), encontramos $C_2 = 0$. Assim, podemos escrever, então, a equação para a linha elástica:

$$\mu = \frac{7500.x^2 - 833,33.x^3}{210.10^9.0,0008}$$

A máxima flecha (deflexão) ocorre quando x for máximo, ou seja, x = 3 m (extremidade do balanço) e vale:

$$\mu_{máx} = \frac{7500.3^2 - 833,33.3^3}{210.10^9.0,0008} = 2,68.10^{-4}\,m = 0,268mm$$

Logo, a flecha máxima que ocorre na viga vale, aproximadamente, 0,27 mm.

Faça valer a pena

1. Na flexão pura e na flexão simples, para determinar a equação da linha elástica, devemos efetuar a integral indefinida duas vezes sucessivas da expressão $\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{M}{E.I_z}$, gerando duas constantes, a princípio, incógnitas. Para encontrá-las, devemos impor as chamadas condições de contorno, ou seja, valores conhecidos da deflexão μ e/ou da inclinação da linha elástica em pontos determinados.

Com relação às condições de contorno que devemos utilizar para encontrar o valor das constantes quando efetuamos a integral indefinida duas vezes sucessivas para determinar a equação da linha elástica, assinale a alternativa correta.

a) Impomos a condição de deslocamento nulo sobre apoios.
b) Impomos a condição de que a inclinação da linha elástica é nula sobre os apoios.
c) Impomos a condição de que a deflexão é constante nos engastes.
d) Impomos a condição de que a inclinação da linha elástica é nula nos engastes.
e) Impomos a condição de que a inclinação da linha elástica na extremidade inicial da viga é igual à da extremidade final.

2. Na flexão pura e na flexão simples, em uma ST, temos que as máximas tensões normais (a de tração e a de compressão) ocorrem na face superior e na inferior. Para determinarmos a máxima tensão normal que ocorre em uma viga, necessitamos determinar o valor máximo do momento fletor que atua nessa viga.

Considere uma viga de 5 m de vão e cuja ST possui $I_z = 0,001m^4$ com o centroide localizado 35 cm acima da face inferior e 19 cm abaixo da face superior. Nessa viga atua um momento fletor que segue a expressão $M_{(x)} = -20.x^2 + 100.x$ (em kN.m). Assinale a alternativa que apresenta corretamente as máximas tensões normais atuantes nessa viga.

a) A máxima tensão normal de compressão ocorre na face superior e vale -13,75MPa, enquanto a máxima tensão normal de tração ocorre na face inferior e vale 33,75MPa.
b) A máxima tensão normal de compressão ocorre na face inferior e vale -13,75MPa, enquanto a máxima tensão normal de tração ocorre na face superior e vale 33,75MPa.
c) A máxima tensão normal de compressão ocorre na face superior e vale -23,75MPa, enquanto a máxima tensão normal de tração ocorre na face inferior e vale 43,75MPa.
d) A máxima tensão normal de compressão ocorre na face inferior e vale -23,75MPa, enquanto a máxima tensão normal de tração ocorre na face superior e vale 43,75MPa.
e) A máxima tensão normal de compressão ocorre toda na face superior e vale -13,75MPa, enquanto a máxima tensão normal de tração ocorre toda na face inferior e vale 33,75MPa.

3. Na flexão pura e na flexão simples, a deformação específica longitudinal da viga varia linearmente com a distância a LN, a qual é nula, e é máxima nas faces superior e inferior (quando $y = c$ e $y = d$, respectivamente).

Considere que em uma viga atua na face superior uma tensão máxima de compressão igual a -25 MPa. O material da viga apresenta módulo de elasticidade longitudinal igual a 160 GPa e sabendo que a altura da ST dessa viga é 50 cm e que o centroide dessa ST está localizado a 32 cm da base, assinale a alternativa que apresenta corretamente a máxima deformação específica longitudinal de tração que ocorre na face inferior dessa viga.

a) $\varepsilon_{máx2} = 0.703{,}10^{-4}$.

b) $\varepsilon_{máx2} = 0.222{,}10^{-3}$.

c) $\varepsilon_{máx2} = 0.222{,}10^{-4}$.

d) $\varepsilon_{máx2} = 0.703{,}10^{-7}$.

e) $\varepsilon_{máx2} = 0.703{,}10^{-6}$.

Seção 2.2

Flexão composta

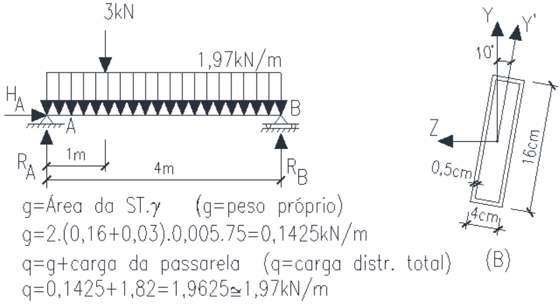
Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior você conheceu os conceitos fundamentais da flexão pura e flexão simples. Nesta seção, aprofundaremos estes conceitos conhecendo a flexão composta normal e a oblíqua em vigas. Veremos, também, a tensão que a força cortante provoca nas vigas.

Considere o problema apresentado na Unidade 1, com uma ligeira variação: a viga foi montada com uma certa inclinação em relação à vertical. Designado para estudar o problema, você vistoriou o local, levantou dados, fez alguns cálculos e elaborou o esquema estrutural apresentado na Figura 2.12(A).

Durante a vistoria, notou que, devido a um erro na montagem da viga, a ST ficou inclinada 10 º em relação à vertical, conforme mostra a Figura 2.12(B). Note que esta situação é diferente da anterior: além da inclinação da ST, a viga ainda não foi reforçada, portanto, o carregamento, o diagrama de esforço cortante e o de momento fletor, a posição do centroide e os momentos de inércia são diferentes.

Figura 2.12 | Esquema estrutural da viga sem o reforço (A); ST original inclinada em relação ao eixo vertical (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Você fez um relatório e encaminhou essas observações ao gerente de projetos da empresa na qual trabalha. Após analisar essa situação, ele solicita que elabore um memorial de cálculo em que conste a resposta aos seguintes quesitos:

a) Qual a tensão de compressão máxima que atua na viga antes de reforçá-la?

b) Qual a tensão de tração máxima que atua na viga antes de reforçá-la?

Para elaborar este memorial, você deverá compreender os conceitos já vistos de momento de inércia e de flexão simples e os que serão vistos nesta seção sobre flexão oblíqua. Bons estudos.

Não pode faltar

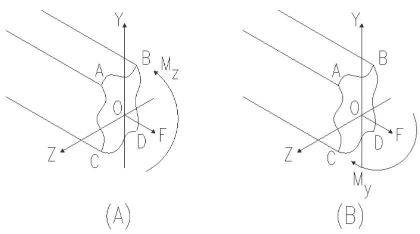
Definição de flexão composta

Temos uma situação de flexão composta quando a tensão normal que atua em uma peça é formada pela tensão normal produzida por uma força normal e pela tensão normal produzida pela atuação de momentos fletores.

Flexão composta normal

Ocorre flexão composta normal quando temos atuando em uma peça uma força normal e um momento fletor pertencente ao plano xy ou ao plano xz. Assim sendo, podemos ter duas situações em que ocorre flexão composta normal, conforme ilustra a Figura 2.13, na qual o ponto O é o centroide de uma ST qualquer.

Figura 2.13 | Flexão composta normal com o momento fletor pertencente ao plano XY – chamado M_z (A); com o momento fletor pertencente ao plano XZ – chamado M_y (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Note na Figura 2.13 (A) que a força F está aplicada no centroide da ST e que o momento M_z traciona o lado que contém os pontos C e D e comprime o lado que contém os pontos A e B. Nesta situação, segundo nossa convenção, a força F e o momento fletor são positivos. Aprendemos, na seção anterior, que a tensão normal provocada pelo momento fletor M_z é dada pela expressão $\sigma_x = \frac{M_z . y}{I_z}$, e podemos escrever que a tensão normal que a força F provoca é dada por $\sigma_x = \frac{F}{A}$, em que A é a área da ST. Assim, utilizando o princípio da superposição de efeitos, podemos escrever que a tensão normal atuante na ST para o caso representado na Figura 2.13(A) é dada pela expressão:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_z . y}{I_z} \qquad \text{Eq. 2.20}$$

Na Figura 2.13(B), observamos que a força F está também aplicada no centroide da ST e que o momento M_y traciona o lado que contém os pontos B e D e comprime o lado que contém os pontos A e C. Assim sendo, de acordo com nossa convenção, a força F e o momento fletor são positivos. De modo análogo ao anterior, podemos escrever que a tensão normal atuante na ST para o caso representado na Figura 2.13(B) é dada por:

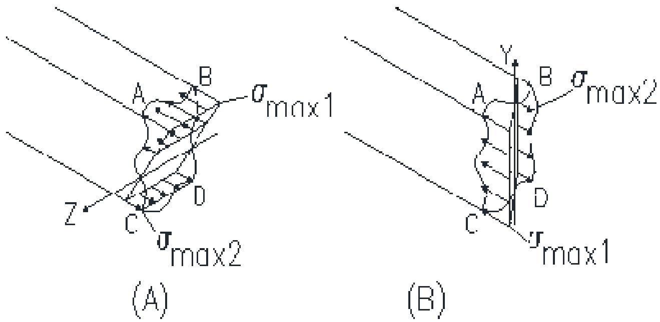
$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y . z}{I_y} \qquad \text{Eq. 2.21}$$

Reflita

Nós utilizamos o princípio da superposição de efeitos para calcular reações de apoio e tensões. Seria possível utilizar esse princípio para calcular a deformação total de um ponto em uma peça, somando-se as deformações que cada solicitação provoca nesse ponto?

Semelhante ao que acontece na flexão pura, vemos pelas expressões 2.20 e 2.21 que a tensão normal varia linearmente na ST (depende da coordenada y ou z do ponto que se deseja saber o valor da tensão normal), sendo máxima nas faces superior e inferior, no caso da situação mostrada na Figura 2.13(A), e máxima nas faces laterais, no caso da situação mostrada na Figura 2.13(B). Essa variação da tensão normal está representada na Figura 2.14.

Figura 2.14 | Variação da tensão normal no caso de flexão normal composta em torno do eixo z (A); e no caso de flexão normal composta em torno do eixo y (B)



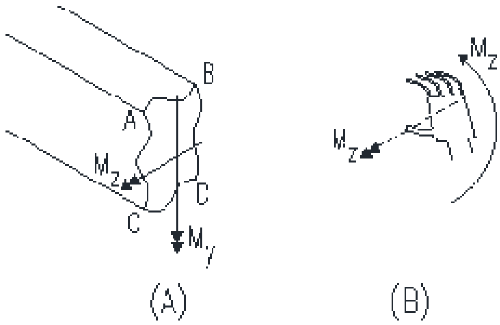
Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Na flexão composta, a tensão normal também varia linearmente na ST, como ocorre na flexão pura, sendo máxima positiva em uma face e máxima negativa na face oposta. Dependendo do valor da força F, podem não atuar tensões normais de tração e de compressão na ST, mas sim apenas de tração ou de compressão. Neste caso, temos a tensão máxima em uma face e a mínima na face oposta. A linha neutra estará fora da ST.

Podemos representar os momentos fletores através de uma seta com ponta dupla, conforme indicado na Figura 2.15(A). Utilizando essa representação, para saber qual a região da ST está sendo tracionada e qual a comprimida, podemos utilizar a mão direita: colocando nosso dedo polegar no sentido apontado pela seta com ponta dupla, os outros dedos indicam qual a região que está sendo comprimida e o pulso indica qual a tracionada, conforme mostra a Figura 2.15.

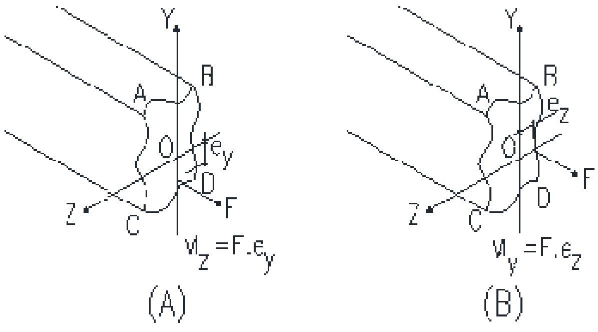
Figura 2.15 | Momentos fletores representados através de setas com ponta dupla (A); regra utilizando a mão direita (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que os momentos da Figura 2.15(A) têm sentido positivo em acordo com nossa convenção. Como indica a Figura 2.16, os momentos fletores M_y e M_z podem ser escritos como a multiplicação da força F por uma excentricidade.

Figura 2.16 | Momentos fletores escritos como multiplicação da força por uma excentricidade



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim sendo, temos, $M_z = F.e_y$, conforme Figura 2.16(A), e $M_y = F.e_z$, conforme Figura 2.16(B). Com essas substituições, as equações 2.20 e 2.21, que fornecem as tensões normais para os casos da Figura 2.13(A) e (B), respectivamente, podem ser escritas na forma:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{F.e_y.y}{I_z} \qquad \text{Eq. 2.22}$$

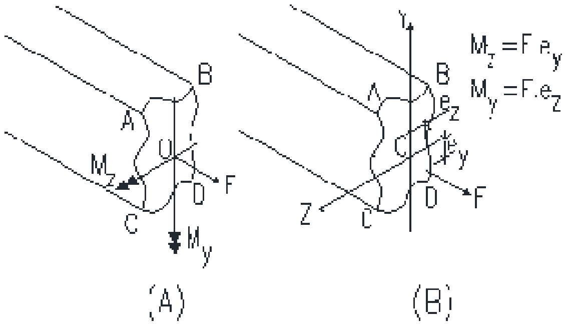
e

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{F.e_z.z}{I_y} \qquad \text{Eq. 2.23}$$

Flexão composta oblíqua

Em algumas peças estruturais atuam a força F e os dos dois momentos M_z e M_y ao mesmo tempo, seja diretamente, como mostra a Figura 2.17(A), ou através da força aplicada com duas excentricidades, como apresenta a Figura 2.17(B).

Figura 2.17 | Peça sujeita à atuação da força F aplicada no centroide e dos dois momentos M_z e M_y diretamente (A); Peça sujeita à atuação da força F aplicada com duas excentricidades (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Em qualquer uma dessas duas situações, dizemos que a peça está sujeita à flexão composta oblíqua. Nesses casos, a tensão normal atuante em qualquer ponto, utilizando o princípio da superposição de efeitos, pode ser calculada pela expressão:

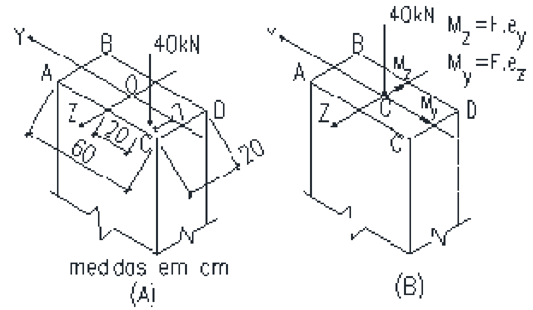
$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{F.e_y.y}{I_z} + \frac{F.e_z.z}{I_y} \qquad \text{Eq. 2.24}$$

A situação apresentada pela Figura 2.17(B) é muito comum em pilares, sendo a força F uma força de compressão, portanto, negativa.

Exemplificando

Determinar as máximas tensões normais de tração e de compressão, caso existam, para o pilar mostrado na Figura 2.18 (a carga está aplicada com uma excentricidade de 7 cm no eixo z e uma de 20 cm no eixo y).

Figura 2.18 | Esquema estrutural de pilar sujeito à flexão composta obliqua (A); excentricidades substituídas (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Como a ST é um retângulo, temos:

$$A = b.h = 0,2.0,6 = 0,12m^2$$

$$I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,2.0,6^3}{12} = 0,0036m^4 \quad e \quad I_y = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,6.0,2^3}{12} = 0,0004m^4$$

O momento M_z comprime a região que contém os pontos C e D; e vale $M_z = F.e_y = 40000.0,2 = 8000kN.m$.

O momento M_y comprime a região que contém os pontos A e C; e vale $M_y = F.e_z = 40000.0,07 = 2800kN.m$.

Sabemos que os pontos da superfície são os pontos mais solicitados. Sendo o ponto C comprimido pela força F e pelos dois momentos, é nele que ocorre a máxima tensão de compressão. Logo:

$$\sigma_{\text{máx comp}} = \sigma_{\text{ponto c}} = \frac{F}{A} - \frac{M_z.y_C}{I_z} - \frac{M_y.z_C}{I_y}$$

$$\sigma_{\text{máx comp}} = \sigma_{\text{pontoc}} = \frac{-40000}{0,12} - \frac{8000,0.30}{0,0036} - \frac{2800,0.10}{0,0004} = -1700000Pa = -1,7MPa$$

O momento M_z traciona a região que contém os pontos A e B e o momento M_y traciona a região que contém os pontos B e D. O ponto B é comprimido pela força F e tracionado pelos dois momentos, portanto, é nele que ocorre a máxima tensão de tração (ou mínima de compressão). Assim, temos:

$$\sigma_{\text{máx tração}} = \sigma_{\text{ponto B}} = \frac{F}{A} + \frac{M_z . y_B}{I_z} + \frac{M_y . z_B}{I_y}$$

$$\sigma_{\text{máx tração}} = \sigma_{\text{ponto B}} = \frac{-40000}{0{,}12} + \frac{8000.0{,}30}{0{,}0036} + \frac{2800.0{,}10}{0{,}0004} = 1033333 Pa = 1{,}03 MPa$$

Logo, a máxima tensão normal de compressão vale -1,7 MPa e ocorre no ponto C; e a máxima tensão normal de tração vale 1,03 MPa e ocorre no ponto B.

Deformação das barras em flexão composta

Nos dois casos de flexão normal composta, apresentados na Figura 2.13 (A) e (B), verificamos que a linha neutra não passa pelo centroide. Portanto, não coincide com o eixo z, no caso da Figura 2.13(A), ou y, como na situação da Figura 2.13(B), pois $\sigma_x \neq 0$ quando y ou z forem nulos. Tomando a equação 2.20 e fazendo $\sigma_x = 0$, encontramos:

$$0 = \frac{F}{A} + \frac{M_z . y}{I_z} \Rightarrow \frac{M_z . y}{I_z} = -\frac{F}{A} \Rightarrow y_{LN} = -\frac{F . I_z}{A . M_z} \qquad \text{Eq. 2.25}$$

Se partirmos da equação 2.21, por procedimento análogo, temos:

$$0 = \frac{F}{A} + \frac{M_y . z}{I_y} \Rightarrow \frac{M_y . z}{I_y} = -\frac{F}{A} \Rightarrow z_{LN} = -\frac{F . I_y}{A . M_y} \qquad \text{Eq. 2.26}$$

Como vemos, sempre existirá uma distância, chamada y_{LN} e z_{LN} nas equações 2.25 e 2.26, entre a LN e o centroide. Note que essa distância não é a deformação que a barra sofre devido ao efeito da flexão composta (normal ou obliqua), mas é um deslocamento da posição da linha neutra em relação ao centroide da ST.

Pesquise mais

Pesquise em BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos materiais.** 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995, p. 425-429, qual é a expressão para determinar a posição da LN em relação ao centroide (as expressões que fornecem os valores de y_{LN} e z_{LN}) no caso de flexão composta oblíqua.

Neste estudo, a força F é transladada para atuar no centroide (acrescentando os momentos fletores M_y e/ou M_z). Assim, ela não provoca curvatura no eixo longitudinal da barra, ocasionando, apenas, alongamento ou encurtamento, caso seja de tração ou compressão, respectivamente. Dessa forma, a deformação de curvatura que a barra apresenta é calculada pela mesma expressão desenvolvida para a equação da linha elástica no caso da flexão pura (estudada na Seção 2.1).

Assim, para a flexão composta normal, quando atuar M_z, temos:

$$\frac{d^2\mu_y}{dx^2} = -\frac{M_z}{E.I_z} \qquad \text{Eq. 2.27}$$

Em que o eixo μ_y coincide com o eixo y, porém, positivo para baixo; $\mu_y = f(x)$ é a equação da linha elástica e o valor de μ_y em um ponto é chamado flecha em y.

Se atuar M_y temos:

$$\frac{d^2\mu_z}{dx^2} = -\frac{M_y}{E.I_y} \qquad \text{Eq. 2.27}$$

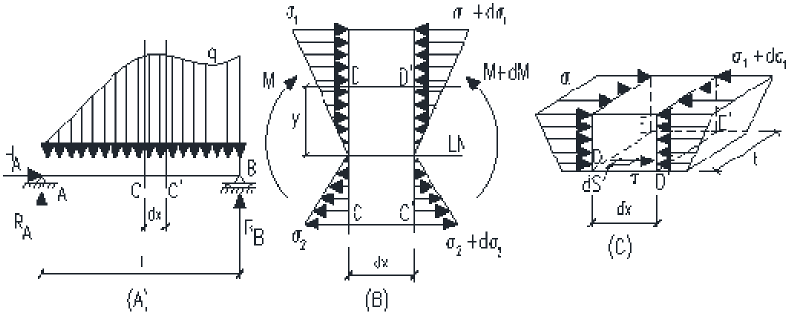
Em que o eixo μ_z coincide com o eixo z, porém, de sentido contrário; $\mu_z = f(x)$ é a equação da linha elástica e o valor de μ_z em um ponto é chamado flecha em z.

Na situação de flexão composta oblíqua, como temos a atuação dos dois momentos M_y e M_z, teremos as duas deformações μ_y e μ_z.

Estudo da força cortante

Seja uma viga com ST genérica e sujeita a um carregamento qualquer mostrada na Figura 2.19(A).

Figura 2.19 | Esquema estrutural de viga com ST genérica e sujeita a um carregamento qualquer (A); corte de um trecho dx da viga (B); corte do trecho dx a uma altura y da LN (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que cortarmos verticalmente um trecho dx da viga, passando pelos pontos C e C', representado na Figura 2.19(B). Devido ao carregamento, temos um momento fletor M atuando em uma face e um momento fletor M+dM na outra. Esses momentos fletores provocam a atuação de uma tensão normal σ em cada elemento infinitesimal de área dA de uma face e uma tensão normal $\sigma + d\sigma$ em cada elemento infinitesimal de área dA da outra. Note que não foram representadas nessa figura o carregamento q e as forças cortantes V em uma face e V+dV na outra porque são esforços verticais e faremos a somatória dos esforços horizontais. Agora, suponha cortarmos horizontalmente o trecho dx, passando pelos pontos D e D', como mostra a Figura 2.19(C). Note que a viga tem uma espessura t e que acrescentamos uma tensão de cisalhamento τ (também chamada tangencial), atuando em cada elemento infinitesimal de área dA da face horizontal que contém os vértices D, D', E e E'. Essa face tem área total $S = t.dx$ qualquer que seja a ST da viga. Aplicando a condição de equilíbrio $\sum F_x = 0$ ao trecho representado na Figura 2.19 (C), temos:

$$\int \sigma_1.dA + \int \tau.dS - \int (\sigma_1 + d\sigma_1).dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \tau.dS = \int d\sigma_1.dA \quad \Rightarrow \quad \tau \int dS = \int d\sigma_1.dA \qquad \text{Eq. 2.28}$$

Porém, $\int dS = S = t.dx$ e $d\sigma_1 = \dfrac{dM.y}{I_z}$. Substituindo na expressão 2.28, resulta:

$$\tau.t.dx = \int \frac{dM.y}{I_z}.dA \quad \Rightarrow \quad \tau.t.dx = \frac{dM}{I_z}.\int y.dA \qquad \text{Eq. 2.29}$$

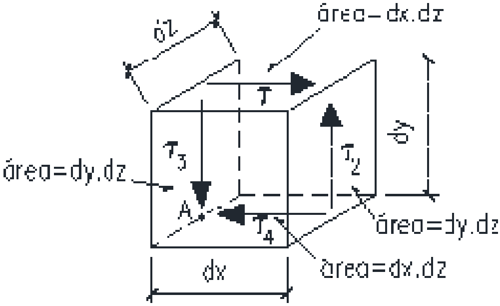
Vimos na Seção 1 da Unidade 1 que a integral $\int y.dA$ é o momento estático (que chamaremos de Q_s) da área da ST acima da altura y em que fizemos o corte horizontal. Sabemos, também, que o esforço cortante é a derivado do momento fletor em relação a x (ou seja, $V = \frac{dM}{dx}$). Temos, reescrevendo a equação 2.29, que:

$$\tau.t.dx = \frac{dM}{I_z}.Q_s \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{dM}{dx}.\frac{Q_s}{t.I_z} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{V.Q_s}{t.I_z} \qquad \text{Eq. 2.30}$$

A equação 2.30 apresenta que o esforço cortante provoca uma tensão horizontal de cisalhamento.

Analisemos a Figura 2.20. Ela apresenta um elemento infinitesimal que foi retirado de um ponto qualquer da viga da Figura 2.19(A).

Figura 2.19 | Esquema estrutural de viga com ST genérica e sujeita a um carregamento qualquer (A); corte de um trecho dx da viga (B); corte do trecho dx a uma altura y da LN (C)



Fonte: elaborada pelo autor.

Vimos que a tensão de cisalhamento da face superior é dada pela expressão 2.30. Pela condição de equilíbrio das forças em x, temos:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau.dx.dz = \tau_4.dx.dz \quad \Rightarrow \quad \tau_4 = \tau \qquad \text{Eq. 2.31}$$

Aplicando o equilíbrio de momentos em torno do ponto A (sentido horário positivo), resulta:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau.dx.dz.dy - \tau_2.dy.dz.dx \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \tau \qquad \text{Eq. 2.32}$$

Com a condição de equilíbrio de forças em y, escrevemos:

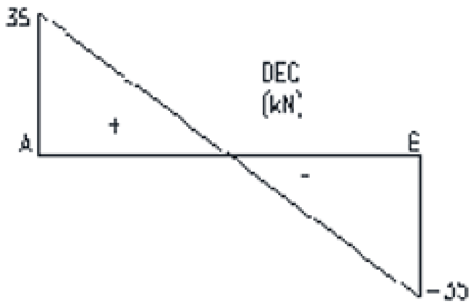
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_2.dy.dz = \tau_3.dy.dz \quad \Rightarrow \quad \tau_3 = \tau_2 \quad \Rightarrow \quad \tau_3 = \tau \qquad \text{Eq. 2.33}$$

Como demostrado, a força cortante provoca uma tensão de cisalhamento de mesmo valor nas quatro faces do elemento infinitesimal. Essa tensão será nula nas faces superior e inferior da viga (porque o momento estático nesses pontos é nulo) e máximo no centroide (porque Q_s é máximo). Outra observação: deve ser feito um estudo de concentração de tensões nos pontos com variação brusca de espessura (nas seções transversais T, I e L, por exemplo). Como a tensão τ da equação 2.30 foi obtida com o sentido de momento fletor (e da força cortante) positivo, as tensões de cisalhamento com os sentidos mostrados no elemento infinitesimal da Figura 2.20 são positivas.

Exemplificando

Determinar a máxima tensão de cisalhamento atuante em uma viga que apresenta o DEC mostrado na Figura 2.21. Sabe-se que a ST da viga é retangular com 15 cm de base por 60 cm de altura.

Figura 2.21 | DEC para a viga do problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Pelo DEC notamos que a máxima força cortante é de 35 kN e ocorre na ST das extremidades da viga. A viga é retangular, portanto, t=15 cm e $I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,15.0,60^3}{12} = \frac{0,0324}{12} = 0,0027m^4$ é reta.

O momento estático é numericamente igual à área acima do ponto em que se deseja saber o valor de Q_s (no caso, a área acima do centroide da ST) multiplicada pela distância do centroide dessa área ao centroide da ST. Temos, então:

Área acima do centroide $A' = 0,15.0,30 = 0,045m^2$. Distância entre o centroide dessa área ao centroide da ST $y' = \frac{0,30}{2} = 0,15m$. Portanto, o momento estático será $Q_s = y'.A' = 0,15.0,045 = 6,75.10^{-3}m^3$ a Temos, então, que:

$\tau = \frac{V.Q_s}{t.I_z} = \frac{35000.6,75.10^{-3}}{0,15.0,0027} = 583333,33Pa \cong 0,58MPa$, positiva porque utilizamos a força cortante positiva. Na ST da outra extremidade ocorre a mesma tensão de cisalhamento, só que negativa. Assim, a máxima tensão de cisahamento que atua na peça é de 0,58MPa.

Sem medo de errar

Voltando ao problema apresentado na Unidade 1, ao qual você foi designado para apresentar uma solução. Na vistoria, notou que, devido a um erro na montagem da viga, a ST ficou inclinada 10 º em relação à vertical, conforme mostra a Figura 2.12(B). Após realizar alguns cálculos com os dados levantados, elaborou o esquema estrutural apresentado na Figura 2.12(A) e, através de um relatório, informou essa nova situação ao gerente de projetos da empresa em que trabalha. Agora, sabendo que o módulo de elasticidade longitudinal para o aço é de 210 GPa, ele solicita que você elabore um memorial de cálculo no qual conste a resposta aos seguintes quesitos:

a) Qual a tensão de compressão máxima que atua na viga inclinada antes de reforçá-la?

b) Qual a tensão de tração máxima que atua na viga inclinada antes do reforço?

Solução

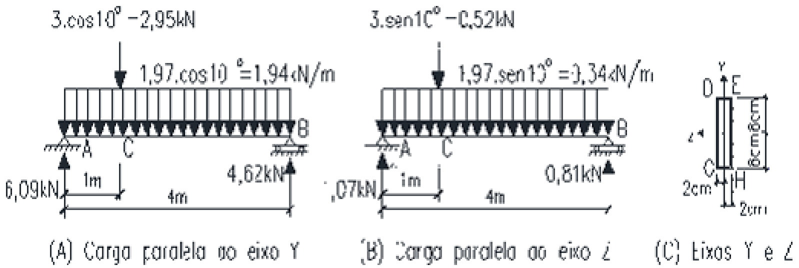
Com a inclinação, a viga está sujeita à flexão composta oblíqua (sem a força normal atuando na ST, apenas os momentos fletores). Como a seção ainda é a original, podemos utilizar os momentos de inércia e a posição do centroide que foram calculados na Seção 1 da Unidade 1. Temos, assim:

Centroide localizado a meia base e meia altura, portanto, 2 cm e 8 cm.

Momentos de inércia $I_z = 521,58cm^4$ e $I_y = 51,58cm^4$

As cargas presentes no sistema estrutural da Figura 2.12(A) foram calculadas em um sistema de eixos diferente do sistema utilizado para calcular o centroide e os momentos de inércia. Nesta situação-problema, é mais fácil decompor a carga nos eixos y e z dos momentos de inércia já calculados do que calcular novos momentos de inércia para o eixo das cargas. Assim procedendo, temos os esquemas estruturais apresentados na Figura 2.22 (com as reações de apoio calculadas).

Figura 2.22 | Esquemas estruturais da viga da situação-problema com relação aos eixos Y e Z



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o carregamento apresentado na Figura 2.22(A), temos no intervalo $0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; M_z = 6{,}09x - \frac{1{,}94}{2}x^2$, e $V_y = 6{,}09 - 1{,}94x$. Essa equação de força cortante não admite raiz (ou seja, $V_y = 0$) para qualquer x do intervalo. Logo, não ocorre momento fletor máximo nesse trecho. Para o intervalo $1 \le x \le 4 \;\Rightarrow\; M_z = -\frac{1{,}94}{2}x^2 + 3{,}14x + 2{,}95$, e $V_y = -1{,}94x + 3{,}14$. Essa equação de força cortante tem raiz no ponto $x = 1{,}62m$. Assim, o momento fletor M_z máximo é $M_{z\,máx} = -\frac{1{,}94}{2}(1.62)^2 + 3{,}14\ 1{,}62 + 2{,}95 = 5{,}49\,kN.m$. Esse momento fletor traciona o lado dos pontos G e H e comprime o lado dos pontos D e E.

O carregamento mostrado na Figura 2.22(B) apresenta, no intervalo $0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; M_y = 1{,}07x - \frac{0{,}34}{2}x^2$, e $V_z = 1{,}07 - 0{,}34x$. Essa equação de força cortante não admite raiz para qualquer x do intervalo, portanto, não ocorre momento máximo nesse trecho. No intervalo $1 \le x \le 4 \;\Rightarrow\; M_y = -\frac{0{,}34}{2}x^2 + 0{,}55x + 0{,}52$, e $V_z = -0{,}34x + 0{,}55$. Essa equação de força cortante tem raiz no ponto $x = 1{,}62m$. Assim, o momento M_y máximo é $M_{y\,máx} = -\frac{0{,}34}{2}(1{,}62)^2 + 0\ 55.1{,}62 + 0{,}52 = 0{,}96kN.m$. Esse momento fletor traciona o lado dos pontos E e H e comprime o lado dos pontos D e G.

Como os dois momentos fletores comprimem o ponto D, nele ocorre a máxima tensão normal de compressão e, como os dois tracionam o ponto H, nele atua a máxima tensão normal de tração. Temos, então:

$$\sigma_{máx\ tração} = \sigma_{ponto\ H} = \frac{M_z.y_H}{I_z} + \frac{M_y.z_H}{I_y} = \frac{5490.0{,}08}{5{,}2158.10^{-6}} + \frac{960.0{,}02}{5{,}158.10^{-7}} = 84205682{,}73Pa = 84{,}21MPa$$

$$\sigma_{máx\ comp} = \sigma_{ponto\ D} = \frac{M_z.y_D}{I_z} + \frac{M_y.z_D}{I_y} = -\frac{5490.0{,}08}{5{,}2158.10^{-6}} - \frac{960.0{,}02}{5{,}158.10^{-7}} = -84205682{,}73Pa = -84{,}21MPa$$

Portanto, a máxima tensão normal de compressão vale -84,21 MPa e a máxima tensão normal de tração vale 84,21 MPa.

Você deve, agora, preparar um memorial de cálculo contendo os cálculos anteriores e a resposta aos quesitos elaborados e encaminhar ao gerente de projetos.

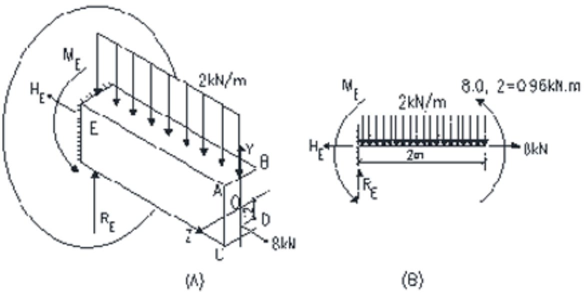
Avançando na prática

Máximas tensões normais em uma viga em balanço.

Descrição da situação-problema

Determine as máximas tensões normais de tração e de compressão para uma viga em balanço, com vão de 2 m e ST retangular de 20 cm por 40 cm, sujeita ao carregamento mostrado na Figura 2.23.

Figura 2.23 | Esquema estrutural para determinar as tensões normais máximas de viga em balanço em perspectiva (A); no plano (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Pela Figura 2.23(A), notamos que temos um caso de flexão composta normal. Transladamos, então, a força normal para o centroide da peça, acrescentando o momento correspondente ao translado – extremidade livre da peça na Figura 2.23(B). Temos as seguintes reações de apoio.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_E = 8kN \quad e \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow R_E = 4kN$$

$$\sum M_{ponto\ E} = 0 \Rightarrow M_E - 4.1 + 0{,}96 = 0 \Rightarrow M_E = 3{,}04kN$$

O momento de inércia vale $I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0{,}2.0{,}4^3}{12} = 1{,}07.10^{-3} m^4$.

A equação de momento fletor para essa viga é $M_{(x)} = -3{,}04 + 4x - \frac{2x^2}{2} = -x^2 + 4x - 3{,}04$. Note que temos dois momentos fletores máximos ao longo do vão da viga. Um quando $x = 0$ de valor $M = -3{,}04kN.m$ (traciona a região superior ao centroide e comprime a inferior); e outro, quando $x = 2m$ (extremidade livre) de valor $M = 0{,}96kN.m$ (traciona a região inferior ao centroide e comprime a superior). Como a ST é simétrica em relação ao eixo z, apenas o maior momento fletor em módulo será responsável pelas máximas tensões normais. Temos, então:

$$\sigma_{máx\ tração} = \frac{F}{A} + \frac{M_z.y_A}{I_z} = \frac{8000}{0{,}2.0{,}4} + \frac{3040.0{,}2}{1{,}07.10^{-3}} = 668224{,}30Pa \cong 0{,}67MPa$$

$$\sigma_{máx\ comp} = \frac{F}{A} - \frac{M_z.y_D}{I_z} = \frac{8000}{0{,}2.0{,}4} - \frac{3040.0{,}2}{1{,}07.10^{-3}} = -468224{,}30Pa \cong -0{,}47MPa$$

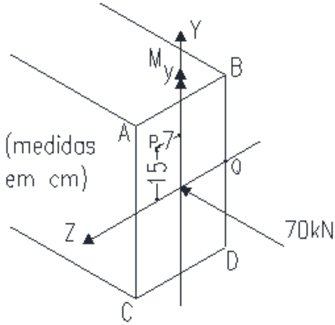
As máximas tensões normais são de 0,67 MPa para tração e de -0,47 MPa para compressão.

Faça valer a pena

1. Quando uma força normal paralela ao eixo x é aplicada no centroide da ST atua em uma peça estrutural associada com um momento fletor pertencente ao plano xy ou ao plano xz, dizemos que a peça está sujeita ao efeito da flexão composta normal.

Uma viga está sujeita à atuação de um momento fletor dado pela expressão $M_{(x)} = 5x^2 - 30x - 10{,}5$ (em kN.m) associado com uma força de compressão de 70kN aplicada no centroide da ST que possui dimensões 20 cm por 40 cm. Sabe-se que a Figura a seguir representa a ST a 2m do início do eixo x, em que está o apoio.

Figura | ST da viga para calcular as tensões normais nos pontos P e Q



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base na Figura, assinale a alternativa que apresenta o valor correto da tensão normal atuante nos pontos P e Q.

a) $\sigma_P = -12,36MPa$ e o $\sigma_Q = -19,79MPa$.

b) $\sigma_P = -12,36MPa$ e o $\sigma_Q = 19,79MPa$.

c) $\sigma_P = 12,36MPa$ e o $\sigma_Q = -19,79MPa$.

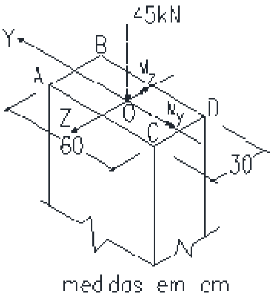
d) $\sigma_P = 12,36MPa$ e o $\sigma_Q = 19,79MPa$.

e) $\sigma_P = -19,79MPa$ e o $\sigma_Q = 12,36MPa$.

2. Quando uma força F, aplicada no centroide da ST, atua em uma peça estrutural em associação com dois momentos fletores, M_z e M_y, ao mesmo tempo, dizemos que a peça está sujeita à flexão composta oblíqua. Nesses casos, a tensão normal atuante em qualquer ponto pode ser calculada utilizando o princípio da superposição de efeitos.

Considere que no pilar da figura a seguir atua uma força F=50 kN, de compressão, juntamente com os momentos fletores $M_y = M_z = 5kN.m$.

Figura | Esquema estrutural de pilar sujeito à flexão composta oblíqua



Fonte: elaborada pelo autor.

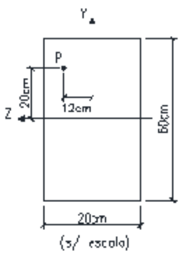
Com base no pilar da figura, assinale a alternativa que apresenta corretamente a tensão normal que atua no ponto O, centroide da ST.

a) $\sigma_O = 0,25MPa$.
b) $\sigma_O = -0,35MPa$.
c) $\sigma_O = 0,35MPa$.
d) $\sigma_O = -0,65MPa$.
e) $\sigma_O = -0,25MPa$.

3. A força cortante que atua em uma ST provoca uma tensão de cisalhamento nessa ST. Essa tensão será nula nas faces superior e inferior da viga (porque o momento estático nesses pontos é nulo) e máxima no centroide (porque Q_s é máximo). Deve-se ter atenção especial nos pontos com variação brusca de espessura (nas seções transversais T, I e L, por exemplo).

Determinada viga está sujeita a um momento fletor M_z que segue a expressão $M = -15x^2 + 75x$ (em kN.m). Sabe-se que $x_P = 1m$ e que a posição do ponto P na ST está mostrada na figura a seguir.

Figura | Figura apresentando o ponto P na ST da viga



Fonte: elaborada pelo autor

Considerando os dados da viga e a ST mostrada na figura anterior, assinale a alternativa que mostra corretamente o valor da tensão de cisalhamento que atua no ponto P.

a) 412500 Pa.
b) -412500 Pa.
c) 212500 Pa.
d) 312500 Pa.
e) -312500 Pa.

Seção 2.3

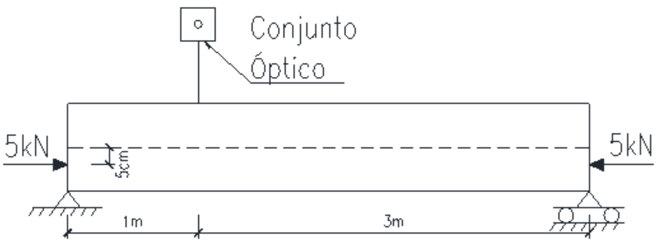
Flexão assimétrica

Diálogo aberto

Prezado aluno, na seção anterior você aprimorou seus conhecimentos sobre flexão, aprendendo os conceitos de flexão composta normal e flexão composta oblíqua. Nesta seção, ampliaremos nosso conhecimento estudando concentração de tensões, carregamento axial excêntrico em um plano de simetria, flexão assimétrica e dimensionamento na flexão. Há situações no dia a dia cujas explicações estão no conhecimento desses conceitos, por exemplo, quando você segura vários livros colocados um ao lado do outro "em pé" com as palmas das mãos na capa do primeiro e do último livro. A força que você faz é horizontal e o peso dos livros é vertical. No entanto, nenhum livro cai. Por quê? Como saber se é possível furar uma viga existente para a passagem de uma tubulação na reforma de um imóvel ou de um eixo ou fiação na restauração ou modificação de um veículo? Após estudar esta seção, você será capaz de responder a essas perguntas.

Considere, novamente, a situação-problema apresentada na Seção 1 da Unidade 1. Desta vez, sem reforçar a ST, para resolver o problema da flecha excessiva da viga que sustenta o conjunto óptico, você optou por aplicar uma força concentrada de 5 kN nas extremidades da viga original (carga axial), deslocada 5 cm abaixo do centroide da ST, conforme indica a Figura 2.24.

Figura 2.24 | Viga da situação-problema sujeita à carga axial excêntrica



Fonte: elaborada pelo autor

Optando por essa nova solução, o gerente de projetos da empresa em que você trabalha pede que responda aos seguintes quesitos:

a) Qual a máxima tensão normal de compressão que atuará na viga após aplicar a carga axial excêntrica?

b) Qual a máxima tensão normal de tração que atuará na viga após aplicar a carga axial excêntrica?

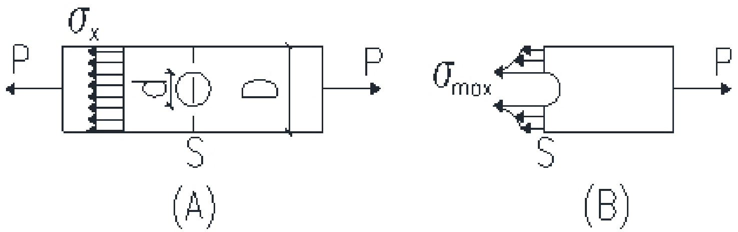
Perguntas simples. Para fazer os cálculos e respondê-las, você deverá compreender os conceitos já vistos de centroide, momento de inércia e de flexão simples e os que serão vistos nesta seção sobre carregamento axial excêntrico em um plano de simetria. Dedique-se, pois estes conceitos encontram larga aplicação nos projetos estruturais. Bons estudos!

Não pode faltar

Concentrações de tensão

Uma alteração da ST ao longo do comprimento ou na própria ST de uma peça estrutural, tal como um furo, uma mudança de diâmetro ou uma trinca, provoca na proximidade da descontinuidade uma concentração das tensões e deformações atuantes na peça. Essa situação também ocorre nas proximidades do ponto de aplicação de carga concentrada. Como exemplo, temos uma barra chata de largura D com um furo de diâmetro d e sujeita a uma força axial P, mostrada na Figura 2.25(A).

Figura 2.25 | Distribuição de tensões em barra chata com furo na região distante do furo (A); na região próxima ao furo (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

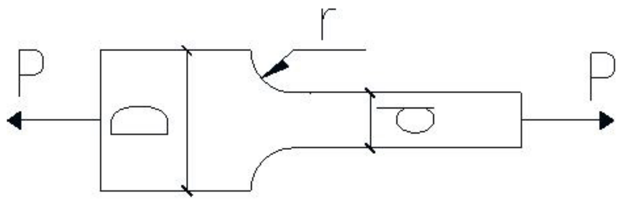
Note que na região distante do furo temos uma tensão normal dada por $\sigma_x = \frac{F}{A}$ (nos casos de flexão temos $\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M.y}{I_z}$, com $F = 0$ para flexão simples). Entretanto, na região do furo teremos atuando uma tensão normal, chamada σ_{max}, maior que σ_x, como indicado na Figura 2.25(B). Essa tensão é dada por:

$$\sigma_{max} = K \cdot \sigma_x \qquad \text{Eq. 2.34}$$

Em que K é chamado de coeficiente de concentração de tensão e obtido através de ensaios. Normalmente, é encontrado na literatura em forma de tabelas ou ábacos. Assim, para determinar a tensão normal máxima próxima a uma região de descontinuidade, o engenheiro determina o valor da tensão normal σ_x e multiplica pelo K correspondente à situação que ele está calculando.

Nos casos de carga axial, para diminuir o efeito da concentração de tensões, fazemos de modo gradativo a variação entre as ST, como mostra o raio r na Figura 2.26.

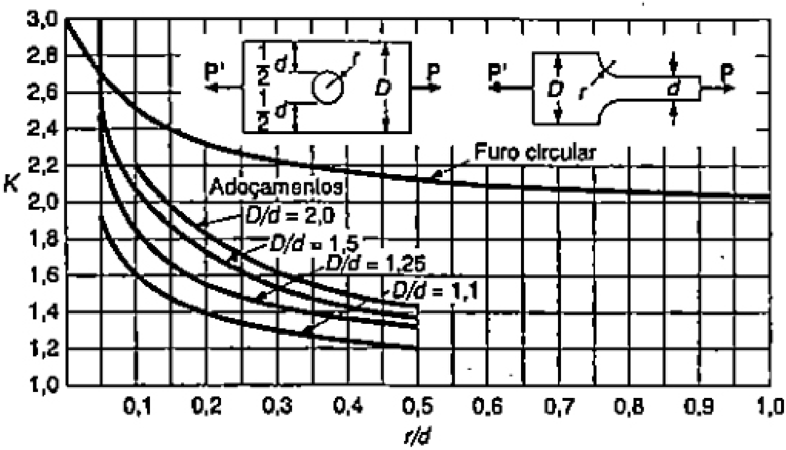
Figura 2.26 | Mudança gradativa entre as ST



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos, assim, utilizar o ábaco da Figura 2.27. Nele entramos com o valor da relação r/d no eixo horizontal e, a partir desse valor, traçamos uma linha vertical até encontrarmos a curva que representa o valor de D/d (interpolar para valores intermediários). Desse ponto, traçamos, então, uma linha horizontal até encontrarmos, no eixo vertical, o valor do coeficiente K.

Figura 2.27 | Coeficientes de concentração de tensões para barras chatas sujeitas à carga axial



Fonte: Beer e Johnston (1995, p. 157).

Pesquise mais

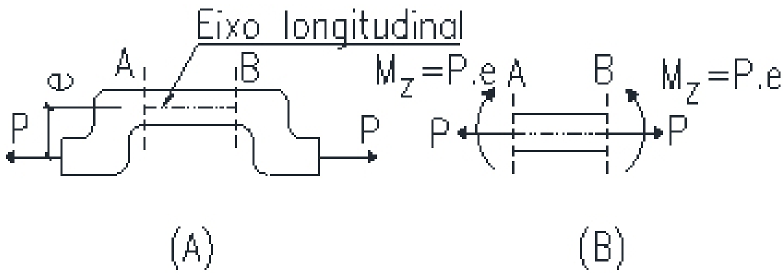
Existem muitos outros ábacos para obter o coeficiente K, um para cada tipo de esforço e abertura. Pesquise sobre os ábacos de coeficiente de concentração de tensão para várias situações de esforços e descontinuidade de ST. Disponível em: <https://aprender.ead.unb.br/pluginfile.php/197363/mod_resource/content/2/aula%20kt_exp_num_01.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2018.

Segundo Hibbeler (2004), normalmente, a concentração de tensão em uma peça de material dúctil não precisa ser considerada no projeto, entretanto, se o material for frágil, ou estiver sujeito a cargas de fadiga, então as concentrações de tensão tornam-se importantes.

Carregamento axial excêntrico em um plano de simetria

Para uma força P atuando na direção do eixo longitudinal de uma barra, mas fora do centroide da ST dessa barra, como mostra a Figura 2.28(A), vamos considerar que a ST da barra tem um plano de simetria e que a força P está contida nesse plano. Nesse caso, dizemos que a barra está sujeita a uma força axial excêntrica. Para analisar qualquer seção da barra, devemos considerar como esforços internos, conforme a Figura 2.28(B), a força P, aplicada no centroide da ST, e o momento conjugado $M_z = P.e$ (positivo se tracionar a face inferior e negativo se comprimi-la), em que "e" é a excentricidade de aplicação da força P.

Figura 2.28 | Barra sujeita à força axial excêntrica



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular a tensão atuante em qualquer ponto da barra, podemos aplicar o princípio da superposição de efeitos. Chamando de "A" a área da ST, I_z o momento de inércia em relação ao eixo z que passa pelo centroide da ST, e y a distância do ponto estudado a esse eixo z, temos que a tensão normal será dada por $\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$. Note que essa expressão é igual à equação 2.20. Isso acontece porque a barra carregada com a força axial excêntrica nessas condições está sujeita ao esforço de flexão composta normal. Notamos, também, que a LN não coincide com o centroide porque se y for nulo (característica do centroide), a tensão normal não o será.

Acrescenta-se, ainda, que o valor da carga P e da excentricidade "e" podem ser aumentados até zerar a deformação provocada pelo peso próprio de uma viga acrescido das cargas acidentais que nela atuam. Essa situação é muito comum, principalmente na engenharia civil, e as estruturas que fazem uso dessa técnica são chamadas estruturas protendidas. Entretanto, deve ser observado que a tensão normal não pode ultrapassar o limite de elasticidade e as deformações provocadas pela flexão não podem alterar substancialmente a excentricidade e.

Reflita

Partindo da Equação 2.20, como encontrar a posição da LN na seção transversal para os casos de flexão composta normal? Dica: isole o y da Equação 2.20.

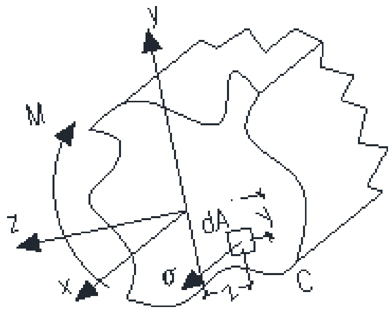
Estudamos até aqui a flexão ocorrendo em uma ST que possui, pelo menos, um eixo de simetria. Agora, veja um sistema de eixos ortogonais x, y e z (z horizontal) passando pelo centroide de uma ST que não possui nenhum eixo de simetria, como na Figura 2.29. Considere aplicarmos um momento fletor M na peça estrutural, atuando contido no plano xy. Esse momento causará na ST tensões normais σ_x de tração de um lado do eixo z e de compressão do outro lado. Aplicando na ST as condições de equilíbrio, temos:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \sigma \cdot dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.35}$$

$$\sum M_{\text{em torno do eixo z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \int y \cdot \sigma \cdot dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.36}$$

$$\sum M_{\text{em torno do eixo y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int z \cdot \sigma \cdot dA = 0 \qquad \text{Eq. 2.37}$$

Figura 2.29 | Flexão em ST que não possui nenhum eixo de simetria



Fonte: elaborada pelo autor.

A Equação 2.35 é satisfeita pelo fato do eixo z passar pelo centroide da ST (as forças de tração de um lado do eixo z são anuladas pelas forças de compressão do outro lado desse eixo).

Na Seção 1 desta unidade, determinamos a eq. 2.8 que relaciona a tensão normal em qualquer ponto da ST com a máxima tensão normal que ocorre nessa ST da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{y}{c} \cdot \sigma_{máx\ 1} \qquad \text{Eq. 2.8}$$

Substituindo o σ dado pela equação 2.8 na Equação 2.36, obtivemos a expressão da tensão normal na flexão simples, ou seja, a eq. 2.14 (isto é, $\sigma_{ponto} = -\frac{M \cdot y}{I_z}$, em que y é a distância do ponto até o eixo z).

Substituindo, agora, o valor de σ dado pela Equação 2.8 na eq. 2.37, obtemos:

$$\int z \cdot \sigma \cdot dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int z \cdot \frac{y}{c} \sigma_{max} \cdot dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{max}}{c} \cdot \int y \cdot z \cdot dA = 0 \qquad \text{eq. 2.38}$$

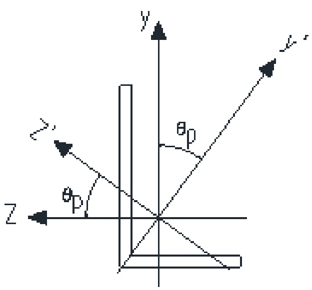
A equação 2.38 somente será nula se $\int y \cdot z \cdot dA = 0$. Essa integral é chamada de produto de inércia (I_{yz}) e ela somente será nula se os eixos y e z forem os eixos de inércia principais da área da ST.

Conhecidos os momentos de inércia (I_z e I_y) e o produto de inércia (I_{yz}) em relação aos eixos horizontal z e vertical y, podemos determinar os eixos de inércia principais z' e y' através da expressão:

$$\text{tg}\, 2\theta_p = \frac{-I_{yz}}{\left(I_z - I_y\right)/2} \qquad \text{Eq. 2.39}$$

Em que θ_p é o ângulo que o eixo de inércia principal z' faz com o eixo horizontal z (e, consequentemente, o mesmo ângulo que o eixo de inércia principal y' faz com o eixo vertical y), medido no sentido anti-horário, conforme mostra a Figura 2.30. A equação 2.39 possui duas soluções, defasadas 180 graus.

Figura 2.30 | Eixos de inércia principais para ST sem eixo de simetria



Fonte: elaborada pelo autor.

Também podemos obter os momentos de inércia em relação aos eixos de inércia principais através das expressões:

$$I_{z'} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}.\cos 2\theta_p - I_{yz}.\text{sen}\, 2\theta_p \qquad \text{Eq. 2.40}$$

$$I_{y'} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}.\cos 2\theta_p + I_{yz}.\text{sen}\, 2\theta_p \qquad \text{Eq. 2.41}$$

E $I_{y'z'} = 0$ porque o produto de inércia em relação aos eixos principais é nulo.

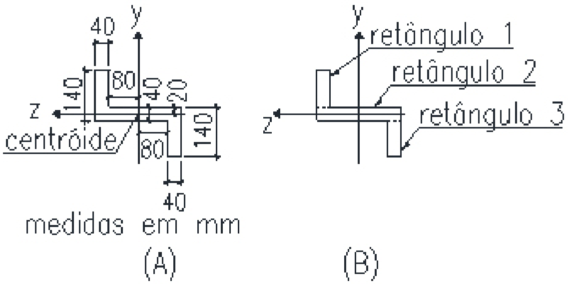
Assimile

Determinados os eixos de inércia principais e os momentos de inércia em relação aos eixos de inércia principais, podemos encontrar o valor das tensões normais atuantes utilizando as expressões desenvolvidas para os casos de flexão.

Exemplificando

A partir do perfil mostrado na Figura 2.31(A), determine a posição dos eixos de inércia principais z' e y'.

Figura 2.31 | Perfil da ST para cálculo da posição dos eixos de inércia principais (A); Divisão da seção em três retângulos (B)



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução:

Calculamos os momentos de inércia em relação aos eixos z e y utilizando o Quadro 1.2 da Seção 1, Unidade 1, ou diretamente, utilizando a expressão:

$I = I_{Retângulo\ 1} + I_{Retângulo\ 2} + I_{Retângulo\ 3}$ (obs.: $I_{Retângulo\ 1} = I_{Retângulo\ 3}$). Assim, temos:

$$I_z = \frac{b_1.h_1^3}{12} + A_1.\overline{y}_1^2 + \frac{b_2.h_2^3}{12} + A_2.\overline{y}_2^2 + \frac{b_3.h_3^3}{12} + A_3.\overline{y}_3^2$$

$$I_z = 2\cdot\left(\frac{0,04\cdot 0,1^3}{12} + 0,04\cdot 0,1\cdot 0,07^2\right) + \frac{0,24\cdot 0,04^3}{12} + 0,24\cdot 0,4\cdot 0^2 \cong 4,715\cdot 10^{-5}\,m^4$$

$$I_y = \frac{h_1.b_1^3}{12} + A_1.\overline{z}_1^2 + \frac{h_2.b_2^3}{12} + A_2.\overline{z}_2^2 + \frac{h_3.b_3^3}{12} + A_3.\overline{z}_3^2$$

$$I_y = 2\cdot\left(\frac{0,1\cdot 0,04^3}{12} + 0,04\cdot 0,1\cdot 0,1^2\right) + \frac{0,04\cdot 0,24^3}{12} + 0,24\cdot 0,4\cdot 0^2 \cong 1,27\cdot 10^{-4}\,m^4$$

E

$$I_{yz} = \overline{I}_{yz\,1} + A_1.\overline{y}_1.\overline{z}_1 + \overline{I}_{yz\,2} + A_2.\overline{y}_2.\overline{z}_2 + \overline{I}_{yz\,3} + A_3.\overline{y}_3.\overline{z}_3$$

$$I_{yz} = 0 + 0,04\cdot 0,1\cdot 0,07\cdot 0,1 + 0 + 0 + 0 + 0,04\cdot 0,1\cdot(-0,07)\cdot(-0,1) \cong 5,6\cdot 10^{-5}\,m^4$$

Hibbeler (2004, p. 617), apresenta um exemplo de como calcular o produto de inércia.

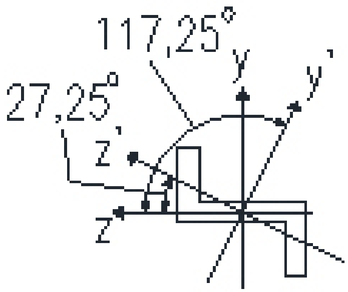
Podemos, agora, calcular a posição dos eixos de inércia principais. Temos:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-I_{yz}}{(I_z - I_y)/2} = \frac{-5,6\cdot 10^{-5}}{(4,715\cdot 10^{-5} - 1,27\cdot 10^{-4})/2} = 1,40263$$

Logo, $2\theta_p = 54,5^o$ e $2\theta_p = 234,5^o \quad \Rightarrow \quad \theta_p = 27,25^o$ e $\theta_p = 117,25^o$

A Figura 2.32 mostra os eixos de inércia principais.

Figura 2.32 | Eixos de inércia principais para o perfil do problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar o valor dos momentos de inércia principais, substituímos os valores de I_z, I_y e θ_p nas equações 2.40 e 2.41.

Dimensionamento na flexão

No dimensionamento de peças sujeitas à flexão, devemos encontrar uma ST que atenda à imposição estrutural $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$ (e $\tau_{max} \leq \tau_{adm}$). Para tanto, necessitamos encontrar o valor da tensão normal máxima e, quando existente, da tensão de cisalhamento máxima. Esses valores não ocorrem no mesmo ponto. Também precisamos encontrar, entre as possibilidades fornecidas nas tabelas dos fabricantes, a peça mais econômica, o que significa dizer que, para um mesmo material, dentre todas as seções transversais que atendem às relações entre as tensões máximas e admissíveis, devemos escolher a menor e, portanto, com menor peso por metro. Para tanto, podemos seguir o seguinte roteiro:

1. Determinar as tensões admissíveis (σ_{adm} - para tração e compressão - e τ_{adm}),
2. Para o esquema estrutural da peça, desenhar o DEC e o DMF. Nesses diagramas encontrar os valores máximos do esforço cortante e do momento fletor, respectivamente.
3. Supondo que a flexão seja o fator limitante no dimensionamento, calculamos a relação $\frac{I_z}{c} = \frac{M_{z\ max}}{\sigma_{adm}}$ para a tração e para a compressão. A relação $\frac{I_z}{c}$ é chamada módulo resistente e indicada pela letra W. Temos, então, um W para tração e outro para compressão. Escolhemos o maior deles, que chamaremos de $W_{calculado}$.
4. Nas tabelas dos fabricantes, anotar os perfis que possuem $W \geq W_{calculado}$. Dentre todos os perfis anotados, escolher aquele que possui a menor área e, portanto, menor peso por metro linear (isso não significa menor W).
5. Escolhido o perfil, verificar a tensão de cisalhamento calculando $\tau = \frac{V_{max}.Q_s}{t.I_z}$, em que Q_s (momento estático), t (espessura) e I_z (momento de inércia em relação ao eixo z) são obtidos na tabela do fabricante ou calculados com os dados do perfil escolhido.
6. Se $\tau > \tau_{adm}$, escolher outro com área maior (entre os perfis com $W \geq W_{calculado}$). Repetir os itens 5 e 6.

7. Se $\tau \leq \tau_{adm}$, o perfil escolhido pode ser adequado. Deve-se acrescentar a carga de peso próprio desse perfil à carga externa (carga utilizada para traçar os diagramas no item 2 pela primeira vez) e repetir o procedimento a partir do item 2. Se $\tau \leq \tau_{adm}$, considerando a carga de peso próprio, a peça está dimensionada.
8. Se $\tau > \tau_{adm}$, retirar da carga total o peso próprio somado no item 7 e acrescentar o peso próprio de outro perfil que tenha área maior, entre os perfis com $W \geq W_{calculado}$. Repetir a partir do item 2.

Sem medo de errar

Retomaremos, novamente, a situação da viga com deformação excessiva que sustenta o conjunto óptico apresentada na Seção 1, da Unidade 1. Desta vez, para solucionar o problema da flecha excessiva sem reforçar a ST, você optou por aplicar uma força concentrada de 5 kN nas extremidades da viga original, deslocada 5 cm abaixo do centroide da ST, conforme indica a Figura 2.23 (força axial excêntrica). Optando por essa nova solução, o gerente de projetos da empresa onde você trabalha pede que responda aos seguintes quesitos:

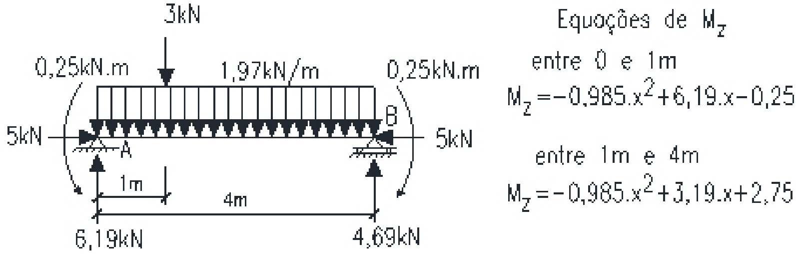
a) Qual a tensão de compressão máxima que atuará na viga após aplicar a carga axial excêntrica?

b) Qual a tensão de tração máxima que atuará na viga após a aplicação da carga axial excêntrica?

Solução:

Nesta situação, a carga distribuída total que atua na viga é a soma de seu peso próprio com metade do peso da passarela e metade da sobrecarga da passarela (todas distribuídas) – a outra metade atuará na viga existente do outro lado da passarela. Essa carga já foi calculada no Diálogo aberto da Seção 2 desta unidade (está apresentada na Figura 2.12) e vale $q = 1{,}97 kN/m$. Transladando a carga axial excêntrica de 5 kN para o centroide da ST, acrescentamos o momento conjugado M dado por $M = P.e = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25 kN.m$ (traciona a face superior), conforme mostra o esquema estrutural da Figura 2.33, na qual também estão escritas as equações de momento fletor. Lembrando: o momento de inércia ($I_z = 521{,}58 cm^4$) e o centroide ($y_{max} = 8 cm$) da ST original foram calculados na Seção 1 da Unidade 1.

Figura 2.33 | Esquema estrutural para a viga da situação-problema com as equações de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar a máxima tensão normal atuante, necessitamos encontrar o ponto no qual ocorre o valor máximo do momento fletor. Para isso, igualamos a equação da cortante a zero. Se derivarmos a equação de momento fletor do primeiro trecho e igualarmos a equação resultante a zero, iremos obter um valor de x que está fora do intervalo entre 0 e 1 m, portanto, não serve. Derivando a equação de momento fletor do segundo trecho, temos $V_{(x)} = -1,97.x + 3,19$. Igualando essa equação a zero, obtemos $x = 1,62m$. Logo, o momento fletor máximo atuante na viga é $M_z = -0,985 \cdot (1,62)^2 + 3,19 \cdot 1,62 + 2,75 \cong 5,33kN.m$ (traciona a face inferior e comprime a superior).

A área da ST original é $A = 0,04 \cdot 0,16 - 0,03 \cdot 0,15 = 0,0019m^2$.

Assim, a máxima tensão normal de tração ocorre na face inferior e vale

$$\sigma_{x\,maxtra} = \frac{P}{A} + \frac{M_z.y}{I_z} = -\frac{5}{0,0019} + \frac{5330 \cdot 0,08}{0,052158} = 5543,58Pa \cong 5544Pa$$

E a máxima tensão normal de compressão ocorre na face superior e vale

$$\sigma_{x\,maxcomp} = \frac{P}{A} + \frac{M_z.y}{I_z} = -\frac{5}{0,0019} - \frac{5330 \cdot 0,08}{0,052158} = -10806,74Pa \cong -10807Pa$$

Note que, devido à simetria da ST, no caso sem a carga axial excêntrica (situação original), as tensões normais máximas de tração e de compressão eram iguais e que, após a aplicação da carga axial excêntrica, a tensão normal máxima de tração diminuiu e a de compressão aumentou.

Você deve agora preparar um memorial de cálculo no qual constem os cálculos e as conclusões anteriores e encaminhá-lo ao gerente de projetos.

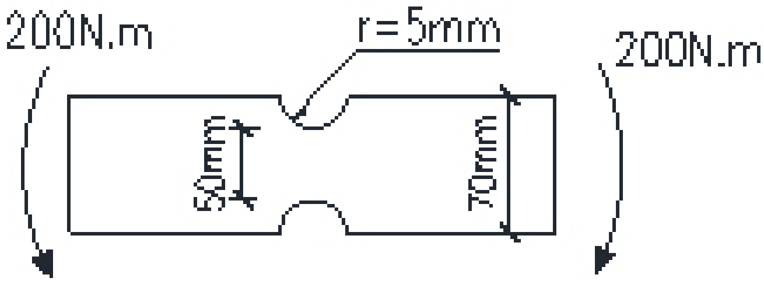
Avançando na prática

Concentração de tensões na flexão.

Descrição da situação-problema

Para adaptar uma peça a uma estrutura existente, houve a necessidade de fazer entalhes em uma chapa metálica sujeita à flexão, conforme mostra a Figura 2.34. Sabendo que a espessura da chapa é 10 mm e que a tensão normal máxima admissível é de 100 MPa (já considerados os coeficientes de segurança que as normas pertinentes preconizam), determine se a chapa com os entalhes atende às normas.

Figura 2.34 | Chapa metálica com entalhe sujeita à flexão



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

O momento de inércia na região crítica é dado por $I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,01.0,05^3}{12} \cong 1,042.10^{-7}m^4$, e a máxima altura y é 0,025m.

Podemos, então, calcular a tensão normal na região do furo, sem levar em conta o efeito da concentração de tensão. Essa tensão vale $\sigma_x = \frac{M.y}{I_z} = \frac{200 \cdot 0,025}{1,042 \cdot 10^{-7}} \cong 47984644,91Pa \cong 47,98MPa$ (tracionando a face superior).

Para considerarmos o efeito da concentração de tensão devido aos entalhes, necessitamos do coeficiente K. Como a chapa está sujeita à flexão, obtemos esse coeficiente do ábaco existente em Beer et al (2013, p. 356). Nesse ábaco, D é a altura total da chapa, d a altura da chapa na região dos entalhes e r o raio dos entalhes. Para utilizar o ábaco, encontramos no eixo horizontal o valor da relação $r/d = 5/50 = 0{,}1$. Desse valor, subimos uma reta vertical até encontrar a curva que representa a relação $D/d = 70/50 = 1{,}4$ (é necessário interpolar entre as curvas 1,25 e 1,5). Através de uma reta horizontal, encontramos $K = 2$ no eixo vertical. Assim, a tensão normal máxima na região dos entalhes será $\sigma_{max} = K.\sigma_x = 2.47{,}98 = 95{,}96MPa$ (tracionando a face superior). Como essa tensão normal é menor que a admissível (100MPa), a chapa com os entalhes atende às normas.

Faça valer a pena

1. Para um perfil sem eixo de simetria, determinados os momentos de inércia e o produto de inércia em relação aos eixos horizontal z e vertical y, podemos encontrar a posição dos eixos de inércia principais (z' e y') e o valor dos momentos de inércia principais. O produto de inércia em relação a esses eixos é nulo.

Para o perfil da Figura 2.31, assinale a alternativa que apresenta o valor correto dos momentos de inércia principais $I_{z'}$ e $I_{y'}$.

a) $I_{z'} = 1{,}83 \cdot 10^{-4} m^4$ e $I_{y'} = 1{,}56 \cdot 10^{-5} m^4$.

b) $I_{z'} = -1{,}83 \cdot 10^{-5} m^4$ e $I_{y'} = -1{,}56 \cdot 10^{-4} m^4$.

c) $I_{z'} = 1{,}83 \cdot 10^{-5} m^4$ e $I_{y'} = -1{,}56 \cdot 10^{-4} m^4$.

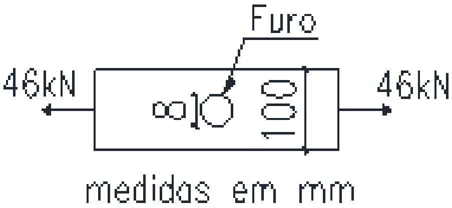
d) $I_{z'} = 1{,}83 \cdot 10^{-5} m^4$ e $I_{y'} = 1{,}56 \cdot 10^{-4} m^4$.

e) $I_{z'} = -1{,}83 \cdot 10^{-5} m^4$ e $I_{y'} = 1{,}56 \cdot 10^{-4} m^4$.

2. Uma alteração da ST ao longo do comprimento ou na própria ST de uma peça estrutural, tal como um furo, uma mudança de diâmetro ou uma trinca, provoca na proximidade da descontinuidade uma concentração das tensões e deformações atuantes na peça. Essa situação também ocorre nas proximidades do ponto de aplicação de carga concentrada.

A partir da barra mostrada na figura a seguir, sabe-se que a espessura da barra é de 0,5 cm e o coeficiente K de concentração de tensões é 2,7.

Figura | Barra sujeita à carga axial com concentração de tensões



Fonte: elaborada pelo autor.

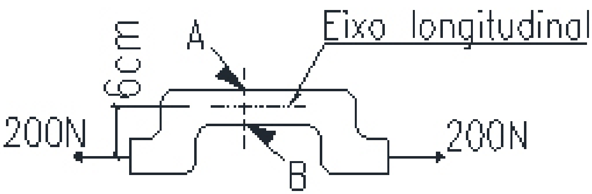
Assinale a alternativa que apresenta corretamente o valor da tensão normal máxima atuante.

a) 248,4 MPa.
b) -170 MPa.
c) 270 MPa.
d) 92 MPa.
e) 170 MPa.

3. Para analisar qualquer seção de uma barra sujeita a uma força axial excêntrica, devemos considerar a força P (positiva se de tração e negativa em caso contrário), aplicada no centroide da ST, e o momento conjugado $M_z = P \cdot e$ (positivo se tracionar a face inferior e negativo se comprimi-la), em que e é a excentricidade de aplicação da força P em relação ao centroide da ST.

Na barra da figura a seguir, sujeita à aplicação da força de tração mostrada, sabe-se que o diâmetro da barra é de 2 cm.

Figura | Barra sujeita à força axial excêntrica



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores das tensões normais nos pontos A e B da barra da figura apresentada.

a) $\sigma_A = 14,65MPa$ e $\sigma_B = -15,92MPa$.

b) $\sigma_A = -14,65MPa$ e $\sigma_B = -15,92MPa$.

c) $\sigma_A = 14,65MPa$ e $\sigma_B = 15,92MPa$.

d) $\sigma_A = -1,465MPa$ e $\sigma_B = 1,592MPa$.

e) $\sigma_A = -14,65MPa$ e $\sigma_B = 15,92MPa$.

Referências

BEER, F. P. et al. **Mecânica vetorial para engenheiros:** estática. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais.** 5. ed. São Paulo. Prentice Hall, 2004.

MELCONIAN, S. **Mecânica técnica e resistência dos materiais**. São Paulo: Érica, 2003.

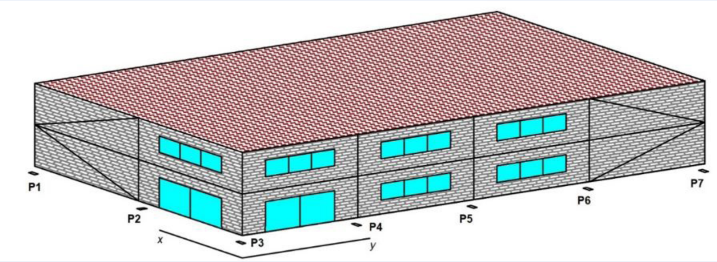
Flambagem em barras

Convite ao estudo

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma etapa. Nas unidades anteriores, fomos apresentados aos conceitos básicos da resistência dos materiais, aprendemos elaborar diagramas de esforços solicitantes, bem como analisar as deformações de uma barra sujeita a flexão. Avançando em nosso estudo, esta unidade tem como objetivo conhecer e compreender o conceito de carga crítica, esbeltez e flambagem em barras, a fim de saber aplicar métodos de análise esbeltez e flambagem de barras delgadas.

Imagine que sua empresa foi contratada para prestar consultoria e fazer um relatório prévio da viabilidade da reforma da biblioteca de sua antiga universidade, esquematizado na Figura 3.1. A edificação é de estrutura metálica com alvenaria de vedação.

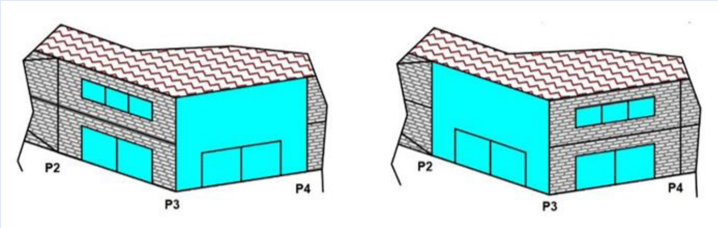
Figura 3.1 | Representação esquemática da biblioteca da universidade



Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo o arquiteto responsável pelo projeto, o proprietário gostaria de que uma das vigas apoiadas no pilar *P3* fossem removidas, possibilitando uma fachada de vidro na entrada, permitindo grande entrada de luz natural na edificação. Ambas as possibilidades são representadas na Figura 3.2.

Figura 3.2 | Previsão das possíveis remoções das vigas que se apoiam no pilar P3



Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, ele gostaria de mover boa parte dos livros para o andar superior, na região entre os pilares $P5$ e $P6$ e , uso este que não foi previsto em projeto, abrindo espaço para áreas de estudo e computadores no térreo. Como engenheiro, você deve ser capaz de fazer uma rápida avaliação prévia das colunas no local. Você acha que essas alterações serão possíveis? A estrutura correrá risco de colapso?

Para facilitar a aprendizagem, a unidade de Flambagem em barras está dividida em três seções. Na Seção 1, você verá os conceitos e aplicações da estabilidade estática. Na Seção 2, abordaremos a aplicação da fórmula de Euler para verificação de estabilidade de barras esbeltas. Por fim, na Seção 3, serão discutidos os conceitos de deformação, comportamento e flambagem plástica de uma barra.

Seção 3.1

Estabilidade elástica

Diálogo aberto

Caro aluno,

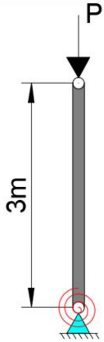
Nesta seção, exploraremos a estabilidade elástica das estruturas, conhecendo a aplicação de seus conceitos e aplicando o método do equilíbrio em situações simplificadas para melhor assimilação dos estudos. Você será capaz de definir qual o carregamento crítico necessário para flambar uma coluna teórica idealizada de flambagem.

Lembre-se de que você foi convidado para fazer uma avaliação de viabilidade da reforma da biblioteca da sua antiga universidade. Você inicia sua análise pelos pilares $P5$ e $P6$, pois sabe que o aumento de cargas devido a mudança dos livros para o andar superior poderá causar uma alteração da estabilidade da estrutura. Indagado pelo arquiteto responsável pelo projeto, você deve responder os seguintes questionamentos:

a. Qual o estado de equilíbrio atual da estrutura e como esse equilíbrio pode se alterar caso os livros sejam removidos para o andar superior.

b. Considere que o pilar $P5$ é uma barra rígida, conforme Figura 3.3 e calcule qual a carga crítica que ele pode resistir, considerando que a mola fictícia de torção da base do pilar tem o coeficiente $k = 4,5 \times 10^6\ N/m$.

Figura 3.3 | Representação do pilar P5 como barra rígida



Fonte: elaborada pelo autor.

c. Sabendo que a mudança dos livros para o andar superior causará um aumento da carga total no pilar (anteriormente $1100KN$) em aproximadamente 50%, verifique se o pilar se manterá estável.

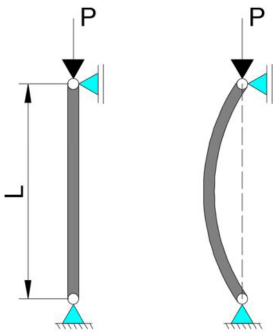
Não pode faltar

Conceito de estabilidade elástica

De uma maneira geral, os elementos estruturais de uma construção devem ser selecionados de acordo com: resistência (capacidade de suportar o carregamento sem tensões excessivas), rigidez (capacidade de suportar o carregamento sem deformação excessiva) e estabilidade (capacidade de suportar o carregamento sem mudar seu estado inicial de equilíbrio). Resistência e rigidez já foram estudadas anteriormente e, neste momento, nossos estudos se voltarão para a estabilidade.

Flambagem é a deflexão lateral que elementos compridos e esbeltos, geralmente colunas, sofrem ao serem submetidos a uma carga axial acima de um valor crítico (Figura 3.4). Um elemento sob compressão com elevada esbeltez pode se deformar lateralmente e falhar por flambagem em vez de falhar diretamente pela compressão do material. Portanto, num projeto estrutural, ambos os métodos de falha devem ser considerados.

Figura 3.4 | Flambagem de uma coluna



Fonte: elaborada pelo autor.

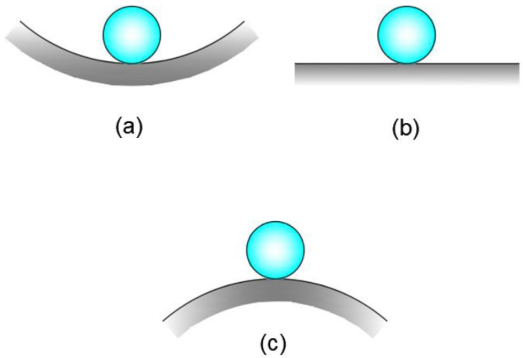
Pesquise mais

Aprofunde seus conhecimentos sobre flambagem em colunas no capítulo 11 do livro *Mecânica dos Materiais*, disponível na biblioteca virtual.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

A definição de estabilidade elástica de uma estrutura pode ser melhor compreendida a partir da análise das condições de equilíbrio de uma bola sobre uma superfície lisa (Figura 3.5). Quando um sistema passa de um estado estável de equilíbrio para outro, há perda de estabilidade. Se um sistema está em equilíbrio estável (a), após sofrer uma perturbação, retornará ao seu estado inicial de equilíbrio. Se um sistema está em equilíbrio neutro (b), após sofrer uma perturbação, vai se manter como foi deixado. Se um sistema está em equilíbrio instável (c), após sofrer uma perturbação, não voltará a seu estado inicial.

Figura 3.5 | Bola sobre superfície lisa em equilíbrio estável, neutro e instável



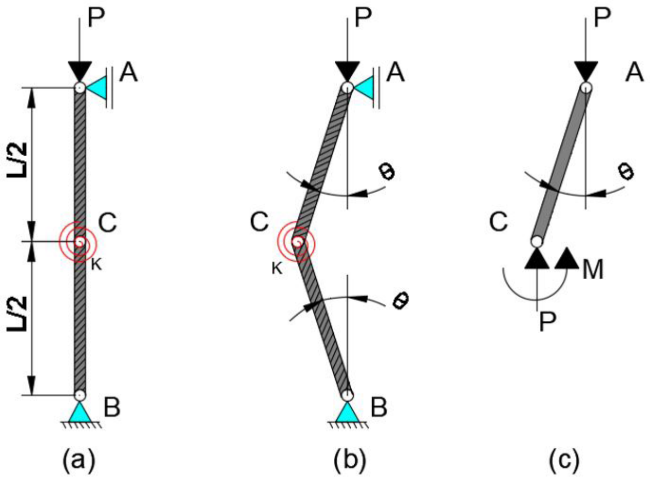
Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicação do conceito de estabilidade elástica

Para melhor compreender os conceitos de flambagem, estabilidade e carga crítica numa estrutura, vamos analisar uma estrutura teórica idealizada de flambagem. Esta estrutura é formada por duas barras rígidas sem peso, com pinos nas extremidades, conectadas por um pino e uma mola de torção de constante K (Figura 3.6a).

A carga P no ponto A está perfeitamente alinhada com o apoio no ponto B, mantendo o sistema numa posição de equilíbrio estável. Agora imagine que um pequeno deslocamento lateral seja aplicado no ponto C, formando um ângulo θ com a vertical (Figura 3.6b). O sistema retornará à posição original? Isso dependerá da dimensão da força P aplicada e da constante da mola.

Figura 3.6 | (a) Exemplo de estrutura teórica idealizada de flambagem. (b) Situação deformada da estrutura. (c) Diagrama de corpo livre da barra AC



Fonte: elaborada pelo autor.

Para verificar se o sistema é estável ou instável, vamos considerar as forças agindo no trecho AC. Utilizando o diagrama de corpo livre da barra AC (Figura 3.6c) e calculando os momentos em torno do ponto A, sabendo que o ângulo de deflexão da mola é 2θ, temos:

$$M - P(L/2)\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{Eq. 3.1}$$

$$P(L/2)\operatorname{sen}\theta = K(2\theta) \qquad \text{Eq. 3.2}$$

A mola no ponto C causa um momento M na estrutura forçando a barra a retornar a sua posição original, porém a força P tende ao aumento do deslocamento lateral no ponto C, agindo de maneiras opostas. Portanto, se a força P for pequena, a ação do momento M será predominante e a estrutura retornará a sua posição original, tendo assim um equilíbrio estável. Por outro lado, se a força em P for elevada, a ação do momento M não tem capacidade para restaurar a condição inicial, causando a falha do sistema por flambagem, tendo então um equilíbrio instável. A força na qual há um equilíbrio neutro é a chamada carga crítica (P_{cr}) e, sabendo que para pequenos deslocamentos $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, temos:

$$\mathbf{P_{cr} = 4K/L} \qquad \text{Eq. 3.3}$$

A partir dessa análise é possível concluir que o P_{cr} é o único valor de carga em que a estrutura estará em equilíbrio após sofrer uma perturbação. Dessa forma, os três estados de equilíbrio para o sistema estrutural apresentado podem ser descritos da seguinte forma:

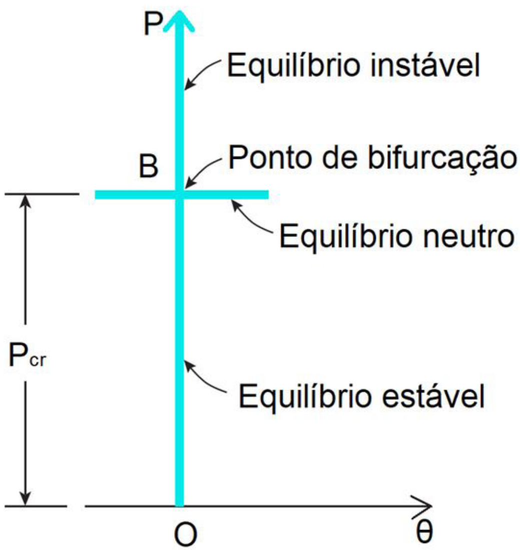
$$P < \frac{4K}{L} \rightarrow \text{Equilíbrio estável}$$

$$P > \frac{4K}{L} \rightarrow \text{Equilíbrio instável}$$

$$P = \frac{4K}{L} \rightarrow \text{Equilíbrio neutro - Carga crítica} \qquad \text{Eq. 3.4}$$

Esses estados de equilíbrio são representados pelo gráfico carga axial (P) versus ângulo de rotação (θ) (Figura 3.7). As linhas em destaque representam as condições de equilíbrio. A linha horizontal indica que na carga crítica, o ângulo de rotação pode variar no sentido horário ou anti-horário, em pequenos deslocamentos, como assumimos anteriormente. As condições de equilíbrio são semelhantes às apresentadas na Figura 3.5, referentes a bolas sobre superfícies lisas. No ponto de bifurcação há a mudança de equilíbrio estável para instável. Neste ponto, é calculada a carga crítica.

Figura 3.7 | Diagrama dos estados de equilíbrio de uma estrutura idealizada de flambagem



Fonte: elaborada pelo autor.

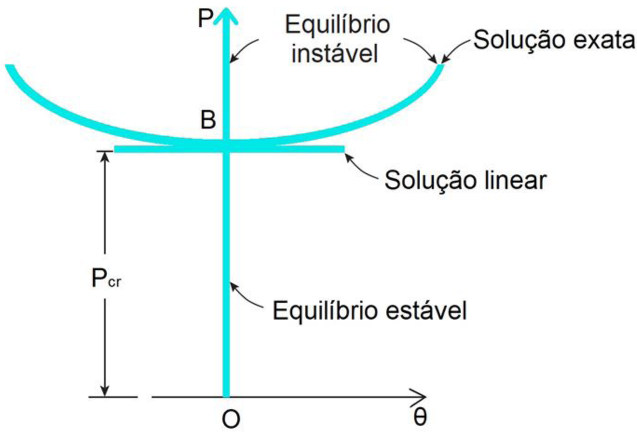
Assimile

Uma estrutura idealizada de flambagem é um elemento teórico carregado axialmente por uma carga P locada perfeitamente no centroide da seção transversal. A estrutura é perfeitamente reta e é feita de um material elástico-linear, que segue a Lei de Hooke. Essa estrutura hipotética dificilmente é reproduzida na prática, pois as cargas geralmente não são centradas, diversas falhas construtivas podem fazer a estrutura ter imperfeições e os materiais aplicados na construção (aço, madeira, concreto, etc.) não seguem completamente a lei de Hooke.

Classificação quanto aos conceitos de cálculo

O conceito de cálculo utilizado para carga crítica de colunas é baseado no conceito de equilíbrio neutro, porém esse conceito não consegue descrever o comportamento da estrutura após a flambagem. Entretanto, para colunas elásticas, é possível existir equilíbrio com cargas maiores que a carga crítica. Essa demonstração avançada pode ser realizada por meio de equações diferenciais ordinárias e os resultados de forma gráfica são exibidos na Figura 3.8.

Figura 3.8 | Diagrama dos estados de equilíbrio de uma estrutura elástica idealizada de flambagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Na prática, colunas reais não têm resistência após a ocorrência da flambagem e, portanto, o uso do conceito baseado no equilíbrio neutro é aplicável para projetos estruturais.

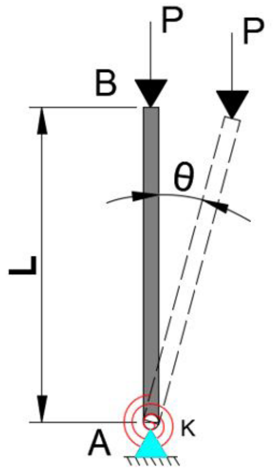
Exemplificando

A régua plástica que você provavelmente possui é um bom exemplo prático de uma coluna elástica que, mesmo após sofrer flambagem, resiste a um carregamento um pouco maior que sua carga crítica. É possível aumentar um pouco a força sem que a régua se quebre. Tente com a sua! Mas cuidado, se você colocar muita força, ela pode quebrar!

Método do equilíbrio

A aplicação do tópico anterior pode ser desenvolvida em diferentes configurações de estruturas, e é chamada de método do equilíbrio. Este método tem várias simplificações, para facilitar a compreensão do conceito de carga crítica. Vamos agora tomar como exemplo outra estrutura teórica idealizada de flambagem, com configuração apresentada na Figura 3.9. Uma coluna rígida, com uma mola de torsão de rigidez (K) na base. Aplicando uma carga P, a coluna pode apenas sofrer rotação, tendo, portanto, apenas um grau de liberdade.

Figura 3.9 | Exemplo de estrutura teórica idealizada de flambagem e sua situação deformada



Fonte: elaborada pelo autor.

Verificando os momentos agindo em torno do ponto A, considerando que o ângulo de rotação θ é pequeno e sabendo que o momento resultante da mola é $K\theta$, temos:

$$PL\,\mathrm{sen}\,\theta = K\theta \qquad \text{Eq. 3.5}$$

$$PL\,\mathrm{sen}\,\theta = M_A \qquad \text{Eq. 3.6}$$

Para θ pequeno, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e portanto:

$$PL\theta < K\theta \rightarrow \text{Sistema estável}$$

$$PL\theta > K\theta \rightarrow \text{Sistema instável}$$

$$PL\theta = K\theta \rightarrow \text{Sistema neutro} \qquad \text{Eq. 3.7}$$

A força associada com o sistema neutro é a carga crítica, designada por P_{cr}. Portanto, para o sistema considerado, a carga crítica de flambagem é dada por:

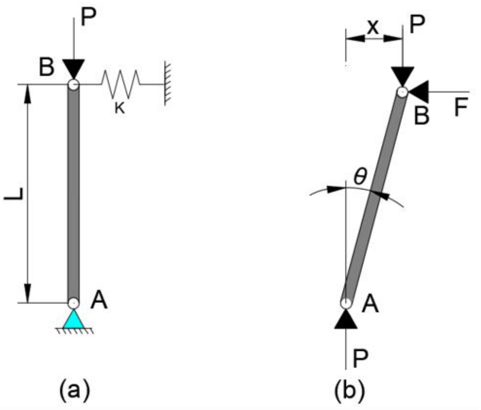
$$\mathbf{P_{cr} = K/L} \qquad \text{Eq. 3.8}$$

Esse método pode ser aplicado em diferentes estruturas teóricas ideais de flambagem, seguindo o mesmo procedimento.

Exemplificando

A aplicação do método do equilíbrio também pode ser realizada em estruturas ideais de flambagem com molas de translação em vez de molas de rotação. Lembrando que nas molas de translação a força é dada por $F = Kx$, em que x é o deslocamento lateral da mola. Vamos descobrir a carga crítica de flambagem na aplicação em um exemplo similar ao deste tópico, mas trocando a mola de rotação por uma de translação (Figura 3.10).

Figura 3.10 | (a) Estrutura teórica idealizada de flambagem com mola de translação. (b) Situação deformada da estrutura



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a força que a mola exerce na barra é $F = Kx$, e o deslocamento lateral da mola é $x = L\operatorname{sen}\theta$:

$$F = KL\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Eq. 3.9}$$

Lembrando que para pequenos deslocamentos, $\text{sen}\,\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$. Portanto, realizando o somatório dos momentos em A, temos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow FL\cos\theta - Px = 0$$

$$KL^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - PL\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$KL^2\theta - PL\theta = 0$$

$$\mathbf{P_{cr} = KL}$$

Reflita

Você consegue explicar porque as cargas críticas do exemplo da Figura 3.9 e do exemplo da Figura 3.10 são diferentes? Porque com a mola de rotação na base a carga crítica foi $P_{cr} = K/L$ e com a mola de translação no topo a carga crítica foi $P_{cr} = KL$? Tente imaginar como o tipo da mola e as alterações na posição da mesma alteraram os resultados.

Sem medo de errar

Com os conhecimentos que você acabou de adquirir, você tem condição de responder os questionamentos da avaliação de viabilidade da reforma da biblioteca da sua antiga universidade. Lembre-se de que o arquiteto responsável pelo projeto da reforma fez a você três perguntas. O primeiro questionamento foi sobre qual o estado de equilíbrio atual da estrutura e como esse equilíbrio pode se alterar caso os livros sejam removidos para o andar superior.

Solução:

Com os conhecimentos adquiridos na seção, você responde que a estrutura das colunas se encontra na situação de equilíbrio estável, pois as cargas axiais atuantes são menores que as cargas críticas de flambagem. Aumentar indiscriminadamente a carga atuante poderá causar uma perda de estabilidade e consequentemente o colapso da estrutura.

O segundo questionamento do arquiteto foi a consideração de uma situação hipotética, supondo que o pilar P5 fosse uma barra rígida, conforme Figura 3.3, ele pediu que você calculasse qual a carga crítica que ele pode resistir, considerando que a mola fictícia de torção da base do pilar tem o coeficiente $K = 4,5 \times 10^6$ N/m.

Você pode utilizar o método do equilíbrio para resolver esse problema. Sabendo que para a configuração do pilar $P5$, a carga crítica de flambagem é dada por:

$$P_{cr} = K/L$$

Substituindo L por **3m** e K por **4,5×10⁶ N/m**, temos:

$$P_{cr} = 4,5 \times 10^6 / 3$$

$$\mathbf{P_{cr} = 1,5 \times 10^6 N = 1500\ kN}$$

Portanto, a carga crítica suportada pelo pilar **P5** é **1500 kN**.

Finalmente, o último questionamento é sobre a mudança dos livros para o andar superior, que causará um aumento da carga total no pilar (anteriormente **1100 kN**) em aproximadamente 50%. Foi solicitado que você verifique se o pilar se manterá estável.

Sabendo que a carga inicial do pilar P_i será aumentada em 50%, a carga atuante final P_f será:

$$P_f = P_i + P_i \cdot 50\%$$

$$P_f = 1100 + 1100 \cdot 50\%$$

$$\mathbf{P_f = 1650\ kN}$$

Agora, comparando com a carga crítica encontrada no questionamento anterior, temos que $\mathbf{P_f > P_{cr}}$, e portanto o equilíbrio do sistema é instável.

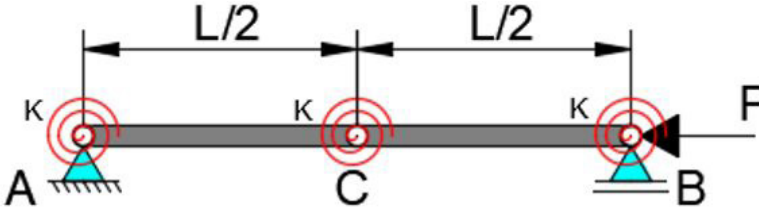
Avançando na prática

Aplicação do método do equilíbrio em flambagem de uma barra horizontal

Descrição da situação-problema

A partir da resolução da situação problema anterior, utilize o método do equilíbrio para definir a carga crítica do sistema horizontal mostrado na Figura 3.11. O sistema é formado por duas barras rígidas com molas de rotação de rigidez K nos pontos A, B e C.

Figura 3.11 | Estrutura teórica idealizada de flambagem com barras horizontais

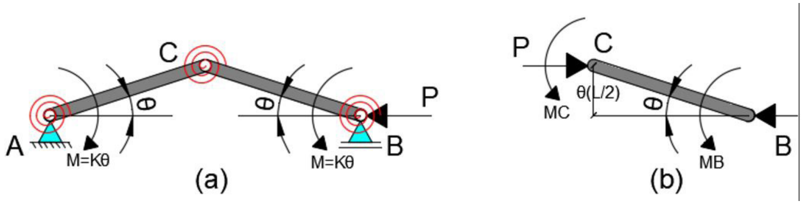


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

A partir da aplicação da carga, o sistema terá a configuração deformada exibida na Figura 3.12a. Os momentos em A e em B são de mesma grandeza $K\theta$, mas em C a mola sofre deformação devido a barra AC e devido à barra BC, totalizando uma rotação de $2K\theta$. A partir desses dados podemos construir o diagrama de corpo livre da barra BC (Figura 3.12b).

Figura 3.12 | (a) Configuração de flambagem do sistema. (b) Diagrama de corpo livre da barra BC



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, fazendo o somatório dos momentos no ponto C, temos:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C + M_B - P\theta\left(L/2\right) = 0$$

$$2K\theta + K\theta = PL\theta/2$$

$$\mathbf{P_{cr} = 6K/L}$$

Portanto a carga crítica para a configuração do sistema apresentado é $\mathbf{P_{cr} = 6K/L}$.

Faça valer a pena

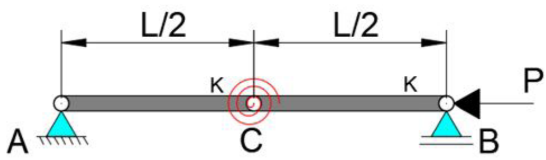
1. Imagine que uma carga é aplicada no topo de uma estrutura idealizada de flambagem de maneira crescente, partindo do repouso até ultrapassar a carga crítica. A estrutura é uma barra rígida vertical, de comprimento L e engastada na base. A carga é aplicada axialmente no centro da coluna.

Quais a sequência das situações de equilíbrio que essa coluna passa à medida que o carregamento aumenta?

a) estável, instável, neutro.
b) neutro, estável, instável.
c) estável, neutro, instável.
d) instável, neutro, estável.
e) neutro, instável, estável.

2. Uma estrutura teórica idealizada de flambagem é formada por duas barras horizontais rígidas sem peso, cada uma com dimensão $L/2$, com pinos nas extremidades, conectadas por um pino central e uma mola de torção de constante K. A carga é aplicada axialmente no ponto B, conforme a Figura 3.13.

Figura 3.13 | Estrutura teórica idealizada de flambagem com barras horizontais



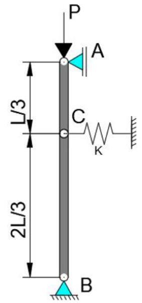
Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que $K = 2{,}5 \times 10^6\ N/m$, qual o comprimento L que a estrutura deve ter para que a carga crítica seja $2000KN$?

a) 6 m.
b) 10 m.
c) 8 m.
d) 5 m.
e) 20 m.

3. Uma estrutura teórica idealizada de flambagem é formada por duas barras verticais rígidas sem peso, com pinos nas extremidades, conectadas por um pino e uma mola de constante K. A carga é aplicada axialmente no ponto B, conforme a Figura 3.14.

Figura 3.14 | Estrutura teórica idealizada de flambagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando o método do equilíbrio, qual é a equação da carga crítica da estrutura apresentada?

a) KL.
b) K/L.
c) 2KL/5.
d) 5KL/9.
e) 4KL/9.

Seção 3.2

Flambagem para barras bi-articuladas

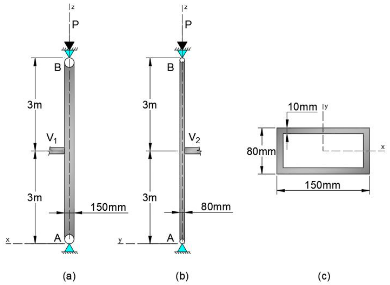
Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, exploraremos a estabilidade elástica das estruturas, conhecendo a aplicação de seus conceitos e aplicando o método do equilíbrio em situações simplificadas para melhor assimilação dos estudos. do equilíbrio em situações simplificadas para melhor assimilação dos estudos. Nesta seção, realizaremos análises de colunas de forma mais realística, utilizando a fórmula de Euler para colunas e usando diferentes comprimentos efetivos de acordo com diferentes condições de apoio. Também definiremos o que são tensão crítica, índice de esbeltez e explicar os efeitos que grandes deflexões e imperfeições causam nas colunas. Ao fim desta seção, você será capaz de utilizar a fórmula de Euler para definir a carga crítica de flambagem de qualquer coluna.

Lembre-se de que você está fazendo uma avaliação de viabilidade da reforma da biblioteca da sua antiga universidade. Durante sua análise, você foi questionado pelo arquiteto qual das vigas do hall de entrada poderia ser removida do pilar P3, representado na Figura 3.15a e 3.15b. Você nota que as vigas apoiadas no centro do pilar impedem o movimento de flambagem para ambos os lados da direção x ou y, respectivamente. Investigando as características do pilar, você chega à conclusão que os pilares são de perfil retangular vazado representado na Figura 3.15c, a tensão de escoamento do aço utilizado é $\sigma_\gamma = 250 \text{ MPa}$ e o módulo de elasticidade é $E = 200 \text{ GPa}$.

Figura 3.15 | Representação do pilar P3 visto na direção y (a) e na direção x (b). (c) Seção transversal do pilar P3



Fonte: elaborada pelo autor.

a. Sem utilizar cálculos, justifique para o arquiteto qual seria a viga mais indicada a ser removida sem causar a flambagem do pilar P3.

b. Verifique utilizando a equação de Euler qual a carga crítica que o pilar pode resistir se cada uma das vigas fosse removida. Os resultados são coerentes com a pergunta anterior? Justifique.

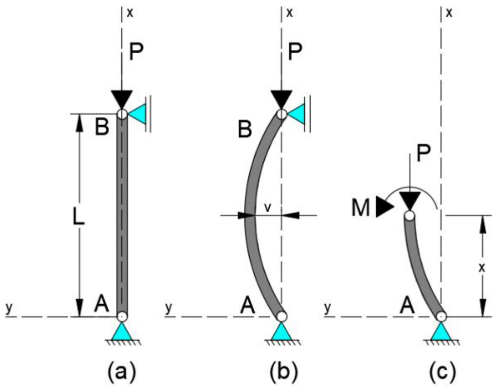
c. Após a remoção da viga que você indicou, qual a tensão crítica de flambagem e o índice de esbeltez do pilar P3. Compare com os valores de antes da remoção e indique se a equação de Euler pode ser utilizada.

Não pode faltar

Fórmula de Euler para Colunas Biarticuladas

Retornamos nossos estudos para uma estrutura idealizada de flambagem, semelhante a apresentada na seção anterior (Figura 3.16a). A diferença é que aqui a elasticidade da estrutura está presente em todo o comprimento da barra, diferentemente da seção anterior, na qual elasticidade era concentrada nas molas (Figura 3.16b). Relembramos que uma estrutura idealizada não representa perfeitamente o comportamento de uma estrutura real, pois na prática sempre existem imperfeições, descentralizações, etc., mas o estudo em estruturas idealizadas nos fornece um melhor entendimento do comportamento de estruturas reais. Nosso objetivo é determinar o carregamento crítico (P_{cr}) no qual a estrutura deixa de ser estável e qualquer distúrbio no equilíbrio da estrutura possa causar flambagem.

Figura 3.16 | (a) coluna biarticulada, (b) coluna flambada e (c) diagrama de corpo livre da seção transversal



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar o carregamento crítico e a configuração deformada de uma coluna podemos utilizar a equação diferencial da curva de deflexão de uma viga. Uma coluna nada mais é que uma viga vertical e, portanto, essa equação pode ser aplicada:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad \text{Eq. 3.9}$$

Na qual E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da seção transversal. A força axial P pode ser definida utilizando a Figura 3.16c e calculando o somatório dos momentos em torno do ponto A (M_A), sabendo que v é a deflexão em qualquer ponto da seção transversal:

$$\sum M_A = 0$$

$$M + Pv = 0 \qquad \text{Eq. 3.10}$$

$$M = -Pv$$

Substituindo na Eq. 3.9 e reorganizando os termos, temos a equação diferencial da curva de deflexão:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0 \qquad \text{Eq. 3.11}$$

Esta é uma equação do tipo diferencial de segunda ordem. Para facilitar o desenvolvimento, vamos adicionar a seguinte notação:

$$K^2 = \frac{P}{EI} \qquad \text{Eq. 3.12}$$

E assim, a eq. 3.11 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + K^2v = 0 \qquad \text{Eq. 3.13}$$

Da matemática, é sabido que a solução geral para uma equação diferencial com a configuração apresentada é:

$$v = C\,\text{sen}(Kx) + D\cos(Kx) \qquad \text{Eq. 3.14}$$

Na qual C e D são constantes arbitrárias que serão solucionadas por meio das condições de contorno que a configuração da coluna nos fornece. Sabendo que nos apoios A e B a deflexão é 0 ($v = 0$), temos no apoio A:

$$v(0) = C\,\text{sen}(0) + D\cos(0) = 0 \qquad \text{Eq. 3.15}$$

A Eq. 3.15 só será satisfeita se $D = 0$. Agora, no apoio B ($x = L$), temos:

$$v(L) = C\,\text{sen}(KL) + D\cos(KL) = 0$$
$$C\,\text{sen}(KL) = 0 \qquad \text{Eq. 3.16}$$

A Eq. 3.16 tem duas soluções: se tomarmos $C = 0$, a solução da equação diferencial é $v = 0$ e a coluna se mantem reta; se tomarmos $\text{sen}(KL) = 0$, a solução da equação é satisfeita quando $KL = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots$ e a coluna terá sofrido flambagem. Entretanto, se $KL = 0$, significa que o carregamento aplicado é $P = 0$, o que não nos interessa. Dessa forma, a solução da equação pode ser reduzida para:

$$KL = n\pi \quad \text{onde } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad \text{Eq. 3.17}$$

Substituindo a Eq. 3.12 na Eq. 3.17 e isolando P, temos:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{Eq. 3.18}$$

A menor carga crítica da estrutura apresentada na Figura 3.16 é dada quando $n = 1$, e a Eq. 3.18 se torna:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{Eq. 3.19}$$

Assimile

A fórmula de Euler foi derivada assumindo que a carga é aplicada na coluna exatamente no centroide e que ela é perfeitamente reta, o que não é uma situação realista. Então, na prática, devido a essas pequenas imperfeições e aplicação da carga, as colunas não flambam bruscamente, mas sim começam a inclinar-se levemente. Por isso, o critério prático utilizado para aplicação de cargas em colunas é limitado pela tensão máxima admissível do material e pela máxima deflexão da coluna. Mesmo que a coluna seja capaz de suportar mais carga, uma coluna com grande deflexão deixaria os usuários do ambiente receosos, evitando sua utilização. Um dos métodos utilizados para isso é o chamado método da secante, e sua carga máxima sempre será menor que a carga crítica de Euler.

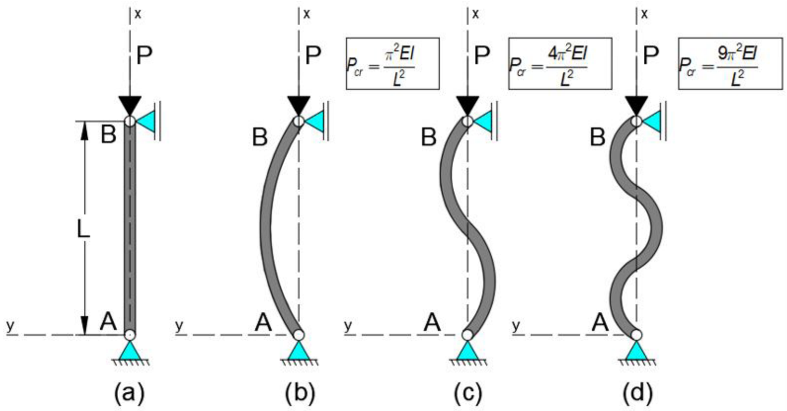
Pesquise mais

Aprofunde seus conhecimentos sobre método da secante e cargas excêntricas nos livros de mecânica dos materiais disponíveis na biblioteca virtual. Um bom exemplo é o livro *Mecânica dos materiais,* de R. R. Craig. Procure pelo tópico 4 do capítulo 10 sobre carregamento excêntrico e a equação da secante.

CRAIG, R. R. **Mecânica dos materiais.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

Essa equação é conhecida como equação de Euler, em nome do matemático Leonhard Euler (1707–1783). A configuração original da coluna e a configuração deformada para $n = 1$ são exibidas na Figura 3.17a e 3.17b, respectivamente. Se decidirmos tomar valores diferentes para n, teremos infinitos valores de carregamentos críticos e formas de flambagem. Por exemplo, para $n = 2$, a coluna irá flambar em duas direções (Figura 3.17c), já para $n = 3$, a flambagem ocorrerá em três direções (Figura 3.17d).

Figura 3.17 | Configurações deformadas das colunas para diferentes valores de n e suas respectivas equações de flambagem. (a) coluna biarticulada, (b) flambagem para n=1, (c) flambagem para n=2 e (d) flambagem para n=3



Fonte: elaborada pelo autor.

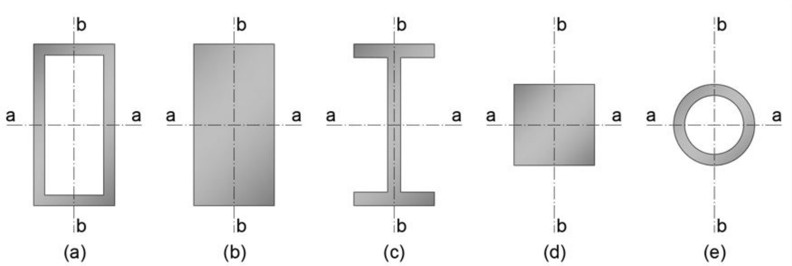
Esses valores de carga crítica com diferentes valores de n serão úteis quando quisermos definir cargas críticas de colunas com suportes laterais. Entretanto, em colunas sem esses itens, diferentes valores de n não interessam, pois a coluna flambará quando a carga atingir o menor valor crítico ($n = 1$).

Na Eq. 3.19, é possível notar que a carga crítica é proporcional a rigidez a flexão EI e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento L. Então é interessante mencionar que a resistência a flambagem de uma coluna é independente da resistência do material. A resistência a flambagem de uma coluna pode ser aumentada por meio do: aumento da rigidez a flexão, redução do comprimento e adição de travamentos laterais.

A rigidez a flexão pode ser aumentada por dois fatores: usando um material mais rígido (maior módulo de elasticidade (E) ou aumentando o momento de inércia da seção (I). O momento de inércia pode ser aumentado afastando o material do centroide da seção transversal. Isso explica porque colunas vazadas são usualmente empregadas e mais econômicas.

Também é importante mencionar que, se a coluna não tiver nenhum suporte lateral, ela sempre flambará em torno do eixo principal da seção transversal com o menor momento de inércia. Na Figura 3.18, são exibidas diferentes seções transversais de colunas. Em (a), (b) e (c) o momento de inércia I_a é maior que I_b, fazendo com a coluna flambe no plano $a-a$ e o momento de inércia I_b deve ser usado para o cálculo da carga crítica. Em (d) e (e) o momento de inércia em ambas as direções é o mesmo, e a coluna poderá flambar em qualquer direção.

Figura 3.18 | Seção transversal de diferentes colunas: (a) seção retangular vazada; (b) seção retangular; (c) perfil I; (d) seção quadrada; (e) seção circular vazada



Fonte: elaborada pelo autor.

A adição de travamentos laterais impede que a coluna flambe naquele ponto, fazendo com que o valor de n da Eq. 3.18 seja maior que 1. Entretanto é importante salientar que, dependendo do tipo de travamento, a flambagem apenas será impedida em um eixo da seção transversal.

Reflita

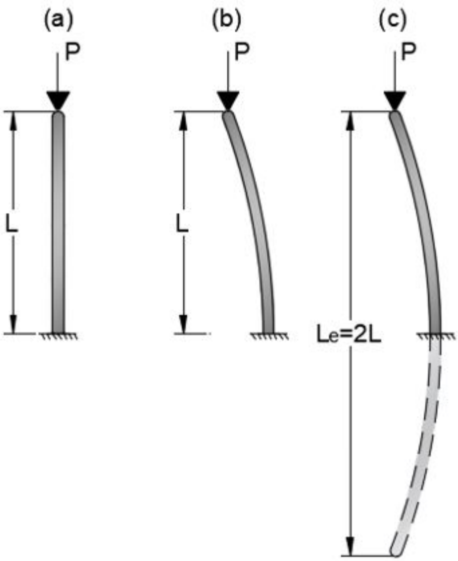
Para uma mesma área de seção transversal, qual forma de uma coluna terá uma maior carga crítica? Triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, círculo? Assuma que a carga crítica é calculada com a equação de Euler e as colunas tenham o mesmo comprimento efetivo. Qual a sua resposta? Você consegue explicar sua escolha? Compare sua resposta com seus colegas.

Outros tipos de vinculações

A equação de Euler foi desenvolvida para colunas biarticuladas, porém, na prática, diversos tipos de vinculações são apresentados. A carga crítica de colunas com vários tipos de vinculação podem ser determinadas usando o mesmo procedimento apresentado no tópico anterior para colunas biarticuladas, utilizando equações diferenciais e curvas de deflexão. Esses carregamentos críticos podem ser relacionados com o carregamento crítico de uma coluna biarticulada por meio do conceito de comprimento efetivo (L_e).

Vamos tomar como exemplo uma coluna engastada na base (Figura 3.19a). A sua forma após sofrer flambagem é exibida na Figura 3.19b. Observando a curvatura é possível notar que ela é semelhante a metade da curva de deflexão de uma barra biarticulada (Figura 3.19c).

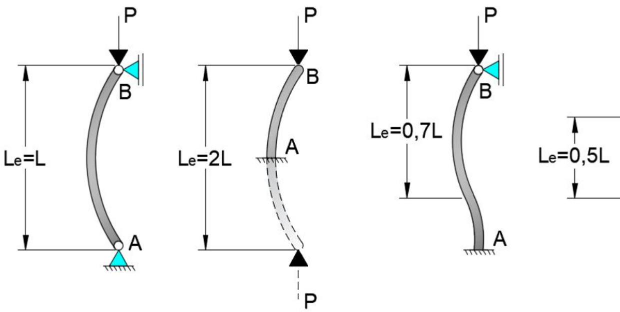
Figura 3.19 | Comprimento de curva efetivo de uma coluna engastada na base em função de uma coluna biarticulada



Fonte: elaborada pelo autor.

Todos os tipos de vinculações podem ter suas curvas de deflexão comparados com uma coluna biarticulada, gerando comprimentos efetivos correspondentes. Na Figura 3.20, são exibidos diversos comprimentos efetivos de colunas com diferentes tipos de vinculação.

Figura 3.20 | Comprimento efetivo de colunas com diferentes vinculações



Bi-articulado Engastado/Borda Livre Engastado/Articulado Bi-engastado

(a) (b) (c) (d)

Fonte: elaborada pelo autor.

Se nós conseguirmos identificar o comprimento efetivo de uma coluna, independentemente de sua complexidade, nós poderemos utilizar a eq. 3.20 para descobrir sua carga crítica.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \qquad \text{Eq. 3.20}$$

Tensão de flambagem no regime elástico e índice de esbeltez de uma barra

Agora que sabemos calcular a carga crítica de colunas com diferentes vinculações, podemos encontrar a tensão crítica correspondente, simplesmente dividindo a carga crítica pela área da seção transversal. A tensão crítica é a tensão a qual a seção transversal está submetida no momento da carga crítica. Para a equação básica de Euler, temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \qquad \text{Eq. 3.21}$$

Essa equação pode ser reescrita utilizando o conceito de raio de giração de uma coluna, dado por:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad \text{Eq. 3.22}$$

Então a Eq. 3.21 se torna:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad \text{Eq. 3.23}$$

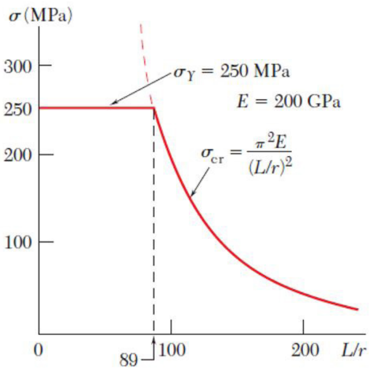
O termo L/r é chamado de índice de esbeltez e depende exclusivamente das dimensões da coluna:

$$\lambda = \frac{L}{r} \quad \text{Eq. 3.24}$$

Uma coluna curta e larga terá um índice de esbeltez baixo e sofrerá flambagem com uma alta tensão crítica. Já uma coluna alta e esbelta terá um índice de esbeltez alto e sofrerá flambagem com uma baixa tensão crítica. Em outras palavras, esse índice de esbeltez mede a flexibilidade da coluna e pode ser usado para classificar uma coluna como longa, intermediária ou curta.

É possível plotar uma curva da tensão crítica em função do índice de esbeltez, a chamada curva de Euler (Figura 3.21). A curva apresentada é de um aço com $E = 200\ \text{GPa}$ e $\sigma_\gamma = 250\ \text{MPa}$. Como as equações de Euler foram derivadas a partir da consideração que o material se comportaria de forma elástica e seguiria a lei de Hooke, os valores de tensão acima da tensão de escoamento não são considerados. Caso a tensão atuante no material seja maior que a tensão de escoamento, a coluna escoará antes de ter a chance de flambar.

Figura 3.21 | Gráfico da curva de Euler para um aço estrutural



Fonte: Gere e Goodno (2013).

Substituindo a tensão de escoamento do material $\sigma_\gamma = 250\ \text{MPa}$ na Eq. 3.21, nós podemos encontrar o menor índice de esbeltez admissível da coluna. Para o aço apresentado na Figura 3.21, o menor índice de esbeltez admissível é $\lambda = 89$. Então, para este material, a fórmula de Euler pode ser usada para determinar a carga crítica se $\lambda \geq 89$, do contrário, o material escoará antes de ocorrer flambagem.

Exemplificando

Para uma aço com tensão de escoamento $\sigma_\gamma = 350 \text{ MPa}$ e modulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$,vamos calcular qual o menor índice de esbeltez admissível para que a equação de Euler possa ser utilizada. Aplicando a Eq. 3.23 e substituindo os valores, temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \Rightarrow 350 \times 10^6 = \frac{\pi^2 210 \times 10^9}{(L/r)^2}$$

$$\underline{L/r \approx 77}$$

Em situações práticas, geralmente é aplicado um fator de segurança sobre a tensão crítica, pois devido às considerações que tomamos na concepção da equação de Euler (coluna perfeitamente reta e carga aplicada no centroide), a tensão crítica encontrada não é a tensão admissível pela coluna.

Sem medo de errar

Com os conhecimentos que você acabou de adquirir, agora você tem condição de responder os novos questionamentos que o responsável pelo projeto fez sobre a avaliação de viabilidade da reforma da biblioteca da sua antiga universidade.

a. A primeira pergunta foi sobre qual das vigas do hall de entrada poderia ser removida do pilar $P3$, representado na Figura 3.15a e 3.15b. Sem utilizar cálculos, você justifica para o arquiteto que caso seja possível remover uma das vigas, a Viga $\mathbf{V_1}$ deverá ser a escolhida, pois devido as dimensões da seção transversal do pilar, o momento de inércia em relação ao eixo $\mathbf{y}$ ($\mathbf{I_{yy}}$) será maior que o momento em relação ao eixo $\mathbf{x}$ ($\mathbf{I_{xx}}$). Isso indica que na direção $\mathbf{y}$ o pilar será capaz de suportar uma maior carga crítica sem sofrer flambagem, portanto a remoção da viga $\mathbf{V_1}$ seria a mais indicada.

b. Você então decide verificar a partir da equação de Euler se seu palpite estava correto. Inicialmente, você calcula o momento de inércia em ambas as direções e a área da seção transversal:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} 0{,}08 \cdot 0{,}15^3 - \frac{1}{12} 0{,}06 \cdot 0{,}13^3$$

$$\underline{I_{yy} = 11{,}515 \times 10^{-6} m^4}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} 0{,}15 \cdot 0{,}08^3 - \frac{1}{12} 0{,}13 \cdot 0{,}06^3$$

$$\underline{I_{xx} = 4{,}060 \times 10^{-6} m^4}$$

$$A = 0{,}15 \cdot 0{,}08 - 0{,}13 \cdot 0{,}06$$

$$\underline{A = 4{,}20 \times 10^{-3} m^2}$$

Com o cálculo do momento de inércia, você já consegue identificar que a direção mais crítica para a flambagem é a direção y, pois o momento de inércia em torno do eixo x (I_{xx}) é menor. Continuando com a solução, você decide calcular qual a carga crítica que a coluna consegue suportar, com as condições iniciais. Aplicando a Eq. 3.20, utilizando o menor momento de inércia da seção (I_{xx}) e sabendo que o comprimento efetivo de flambagem é $L_e = L/2 = 3m$, temos:

$$P_{cr}^{i} = \frac{\pi^2 E I_{xx}}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 4{,}060 \times 10^{-6}}{3^2}$$

$$\underline{\mathrm{P_{cr}^{i}} = 8{,}90 \times 10^5 \mathrm{N} = 890{,}46\,\mathrm{kN}}$$

Sabendo que o maior momento de inércia da seção é o I_{yy}, você decide remover dos seus cálculos o suporte que a viga V_1 oferece a coluna, fazendo com que o comprimento efetivo de flambagem na direção x seja agora de $L_e = L = 6\ \mathrm{m}$. A nova carga crítica para esta situação é:

$$P_{cr}^{f} = \frac{\pi^2 E I_{yy}}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 11{,}515 \times 10^{-6}}{6^2}$$

$$\underline{\mathrm{P_{cr}^{f}} = 6{,}31 \times 10^5 \mathrm{N} = 631{,}38\ \mathrm{kN}}$$

Como apenas removemos a viga V_1, o comprimento efetivo na direção y continuou o mesmo, assim como a carga crítica de flambagem. Agora, com a remoção da viga $\mathrm{V_1}$ a carga crítica suportada pela coluna foi reduzida de $\mathrm{P_{cr}^{i}} = 890{,}46\ \mathrm{kN}$ para $\mathrm{P_{cr}^{f}} = 631{,}38\ \mathrm{kN}$.

Agora vamos apenas verificar o que ocorreria se removêssemos a viga V_2. O comprimento efetivo na direção y seria $L_e = L = 6\ \mathrm{m}$ e a nova carga crítica seria:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{xx}}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 4{,}060 \times 10^{-6}}{6^2}$$

$$\underline{P_{cr} = 2{,}23 \times 10^5 N = 222{,}61\ \mathrm{kN}}$$

Portanto a remoção da viga V_2 seria catastrófica do quesito capacidade de carga e a coluna flambaria com uma carga crítica muito menor. Dessa forma, confirmamos que o seu palpite inicial estava correto, e a viga V_1 era a mais indicada a ser removida, pois causou uma redução menor na carga crítica.

c. Por fim, você foi solicitado a calcular a tensão crítica de flambagem e o índice de esbeltez antes e após a remoção da viga V_1. A tensão crítica inicial é dada pela Eq. 3.21 e o índice de esbeltez pelas Eq. 3.22 e 3.24:

$$\sigma_{cr}^{i} = \frac{P_{cr}^{i}}{A} = \frac{890,46}{4,20 \times 10^{-3}} \qquad \lambda^{i} = \frac{L}{\sqrt{I_{xx}/A}} = \frac{3}{\sqrt{4,060 \times 10^{-6} / 4,20 \times 10^{-3}}}$$

$$\underline{\sigma_{cr}^{i} = 212,01 \text{ MPa}} \qquad \underline{\lambda^{i} = 96,49}$$

Analogamente, para a condição final, após a remoção da viga V_1:

$$\sigma_{cr}^{f} = \frac{P_{cr}^{f}}{A} = \frac{631,38}{4,20 \times 10^{-3}} \qquad \lambda^{f} = \frac{L}{\sqrt{I_{yy}/A}} = \frac{6}{\sqrt{11,515 \times 10^{-6} / 4,20 \times 10^{-3}}}$$

$$\underline{\sigma_{cr}^{f} = 150,33 \text{ MPa}} \qquad \underline{\lambda^{f} = 114,59}$$

Em ambas situações, a tensão crítica se encontrava abaixo da tensão de escoamento do aço $\sigma_Y = 250$ MPa, indicando que a coluna flambará antes de sofrer escoamento. Como o aço deste problema tem as mesmas propriedades do aço da Figura 3.21, podemos comparar os valores do índice de esbeltez com o gráfico, o que indicaria que poderíamos usar a equação de Euler para definição da tensão crítica, pois ambos valores são $\lambda \geq 89$. Na prática, esses valores de tensão ainda seriam reduzidos por um fator de segurança, reduzindo ainda mais a tensão admissível pela coluna.

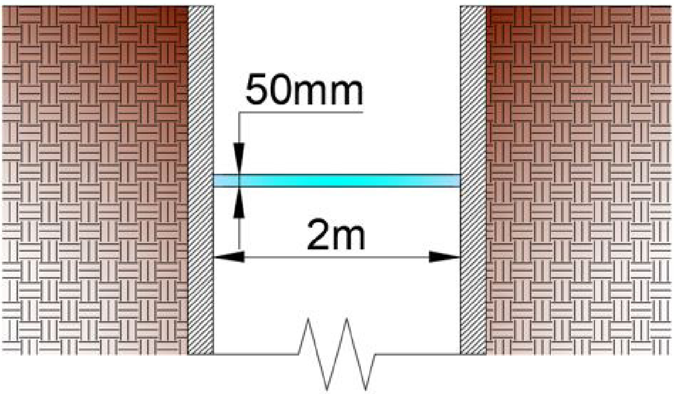
Avançando na prática

Viabilidade de mudança na seção transversal de barra circular

Descrição da situação-problema

A empresa que você trabalha está realizando um serviço de escavação de valas. Devido à profundidade da escavação, estão sendo utilizadas barras de aço para escorar as paredes de contenção provisória (Figura 3.22). A carga que cada barra de aço deve suportar é 25 KN e o comprimento efetivo de cada barra é 2 m. Para isso, sua empresa adquirirá barras circulares com 50 mm de diâmetro. Antes de realizar a compra, seu chefe, preocupado com o alto valor do aço, pergunta se você tem alguma sugestão para economizar material, mantendo o mesmo diâmetro externo. Ele informou que apenas a resistência a flambagem deve ser verificada e também solicitou que você indique a porcentagem de economia de material gerada. Foi utilizado um fator de segurança de 2,0 e aço com módulo de elasticidade de $E = 200\ \text{GPa}$.

Figura 3.22 | Barra de aço escorando paredes de contenção provisória



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Você sugere a seu chefe que sejam utilizadas barras circulares vazadas, pois a mai-or resistência a flambagem de uma barra se encontra em sua periferia. Sabendo que a carga atuante em cada barra é 25 KN, a carga crítica deve ser calculada utilizando o fator de segurança:

$$P_{cr} = 25 \times 2 = 50\ \text{KN}$$

Agora, sabendo que o diâmetro externo (d_e) é 50 mm, podemos cal-cular o diâmetro interno (d_i):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \Rightarrow 50 \times 10^3 = \frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^9 \cdot \pi/64 \left(0{,}05^4 - d_i^4\right)}{2^2}$$

$$d_i = 0{,}045\ \text{m} = 45{,}23\ \text{mm}$$

Em favor da segurança, você sugere que o diâmetro interno da barra seja 45 mm. Você então calcula a porcentagem da economia de aço:

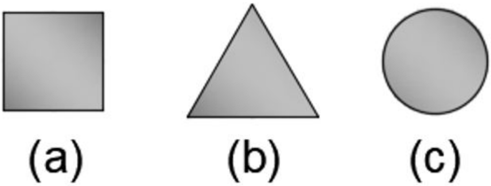
$$\text{econ.} = 100 - \frac{A_{tubo}}{A_{barra}} \times 100 = 100 - \frac{\pi/4\left(50^2 - 45^2\right)}{\pi/4\left(50^2\right)} \times 100 \Rightarrow \textbf{econ. = 81,00\%}$$

Portanto, a economia de aço usando tubos no lugar de barras foi de 81%.

Faça valer a pena

1. Imagine três barras de aço, com o mesmo modulo de elasticidade, o mesmo tipo de vinculação, o mesmo comprimento efetivo e a mesma área de seção transversal. Na Figura 3.23 são exibidas as seções transversais das barras.

Figura 3.23 | (a) barra quadrada, (b) barra triangular e (c) barra circular



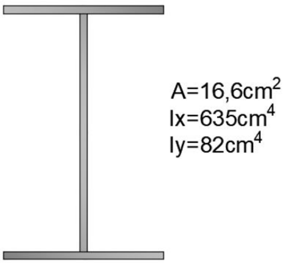
Fonte: elaborada pelo autor.

Defina, do maior para o menor, qual seção transversal terá maior carga crítica.

a) circulo, quadrado, triângulo.
b) triângulo, círculo, quadrado.
c) quadrado, triângulo, círculo.
d) triângulo, quadrado, círculo.
e) círculo, triângulo, quadrado.

2. Uma coluna com perfil W150x13, com propriedades geométricas exibidas na Figura 3.24, é utilizada para suportar uma coberta. O comprimento da coluna é 2 m e o modulo de elasticidade do aço é E = 200 GPa.

Figura 3.24 | Seção transversal de perfil W150x13



Fonte: elaborada pelo autor.

Quais são, respectivamente, as cargas críticas para a coluna caso ela tenha as seguintes vincu-lações: 1. biengastada; 2. engastada/articulada; 3. biarticulada; 4. engastada/apoiada?

a) 1618,62 KN; 825,82 KN; 404,65 KN; 101,16 KN.
b) 825,82 KN; 202,32 KN; 809,30 KN; 1618,62 KN.
c) 1209,31 KN; 825,82 KN; 404,65 KN; 101,16 KN.
d) 1618,62 KN; 825,82 KN; 809,30 KN 202,32 KN.
e) 404,65 KN; 1209,31 KN; 825,82 KN; 101,16 KN.

3. Para uma coluna de madeira sofra flambagem elástica, ou seja, passível de usar a equação de Euler, seu índice de esbeltez deve ser maior que 100. Suponha que essa coluna seja quadrada, biarticulada com 4 m de comprimento e modulo de elasticidade de 15000 MPa.

Qual a dimensão máxima do lado que está coluna pode ter para que ela sofra flambagem elásti-ca e, com esta dimensão, qual é sua tensão crítica?

a) 13,85 cm e 148 MPa.
b) 69,28 cm e 1480 MPa.
c) 13,85 cm e 14,80 MPa.
d) 19,20 cm e 148 MPa.
e) 19,20 cm e 14,80 MPa.

Seção 3.3

Flambagem elástica e plástica

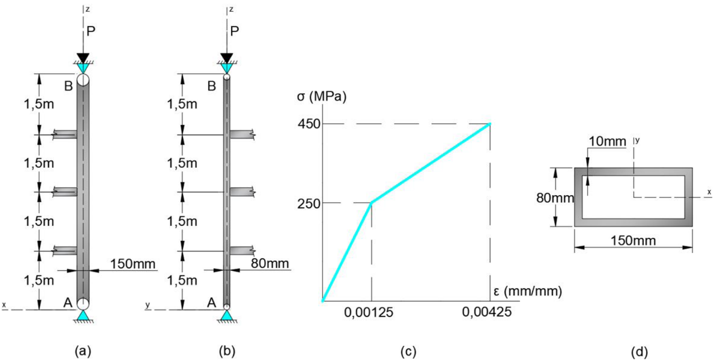
Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, vamos aprender o que é flambagem inelástica e identificaremos se uma coluna é longa, intermediária ou curta e de que forma cada uma dessas colunas se comporta quando carregada axialmente. Ao fim deste capítulo, você será capaz de utilizar teorias de flambagem inelástica para verificar carregamentos críticos em colunas fora do campo de atuação da equação de Euler.

Recorde-se que você está fazendo uma avaliação de viabilidade da reforma da biblioteca da sua antiga universidade. Ao fim da sua avaliação prévia da estrutura, o arquiteto fica curioso do porquê da remoção de uma das vigas que travava o pilar lateralmente reduziu sua capacidade de carga. Então ele te questiona se simplesmente adicionássemos mais travamentos laterais nos pilares a capacidade de carga se elevaria? Demostre usando o mesmo pilar da seção anterior (pilar P3) com a adição de travamentos laterais representados na Figura 3.25a e 3.25b. Considere que o aço utilizado tem um diagrama bilinear de tensão-deformação, apresentado na Figura 3.25c e que a seção transversal é a exibida na Figura 3.25d.

Figura 3.25 | Representação do pilar P3 com travamentos laterais adicionados visto na direção y (a) e na direção x (b). (c) Diagrama biinear de tensão-deformação do aço utilizado. (d) Seção transversal do pilar P3



Fonte: elaborada pelo autor.

a. Explique por que a equação de Euler não é capaz de explicar o comportamento de qualquer tipo de pilar sob compressão. Demostre com cálculos.

b. Utilizando a teoria do modulo tangente, calcule a capacidade de carga do pilar P3 reforçado lateralmente, supondo que ele possua os travamentos laterais propostos pelo arquiteto, exibido na Figura 3.25a e 3.25b.

Não pode faltar

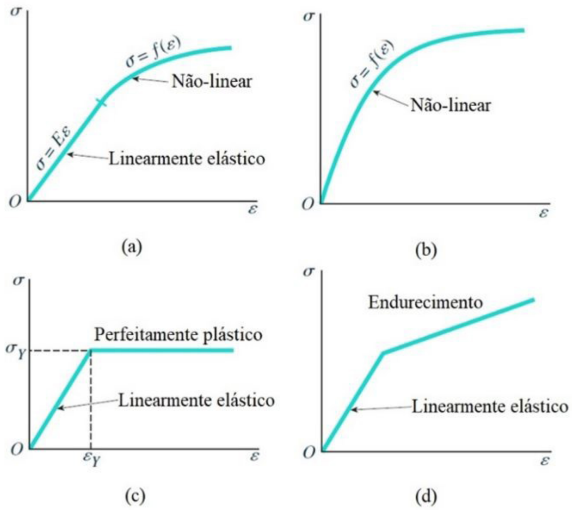
Deformação elástica e plástica de uma barra

Até o momento, nossas discussões levaram em consideração que os materiais estudados sempre seguiriam a Lei de Hooke. De aqui em diante, estudaremos o comportamento de barras carregadas axialmente em que as tensões excedem o limite de proporcionalidade, ou seja, o material não apresenta mais comportamento elástico. Essa suposição é razoável para materiais frágeis, que rompem sem escoar. Para materiais dúcteis, isso implica que a resistência ao escoamento do material não é aproveitada.

Na deformação elástica, as deformações se mantém dentro da zona elástica e o membro estrutural retornará ao seu estado inicial após a remoção da carga. Porém, caso a tensão supere o limite de proporcionalidade do material, ocorrerão deformações plásticas e os resultados obtidos antes dessas deformações não poderão mais ser considerados. Nesse caso, são necessárias analises mais profundas, baseadas em relações não lineares de tensão e deformação.

Por simplificação, as curvas de tensão-deformação são representadas por curvas idealizadas de tensão-deformação, que podem ser expressadas por funções matemáticas. Alguns exemplos são exibidos na Figura 3.26. O primeiro diagrama (a) é geralmente utilizado por ligas de alumínio, consistindo de duas partes: uma região inicial linear elástica, seguida por região não-linear expressa por uma equação. No segundo diagrama (b), a curva é expressada por uma única expressão matemática, sendo considerada não-linear em toda sua extensão. O diagrama (c) representa a curva de tensão deformação mais utilizada para aço estrutural, pois este apresenta uma região linear seguida por uma região de considerável escoamento, podendo ser representada por duas linhas retas. A linha horizontal do gráfico, na qual a tensão se mantem constante e a deformação aumenta é chamada de deformação perfeitamente plástica. Os materiais que apresentam esse tipo de comportamento são chamados de materiais elastoplásticos. O diagrama (d) é usado para materiais que sofrem endurecimento ou como aproximação de diagramas com regiões não-lineares. Esse diagrama, conhecido como diagrama bilinear de tensão-deformação, apresenta duas retas com diferentes inclinações, a primeira seguindo a Lei de Hooke.

Figura 3.26 | Tipos de comportamentos idealizados de materiais: (a) curva elástica-não linear; (b) curva geral não-linear; (c) curva elastoplástica; (d) curva bilinear



Fonte:adaptada de Gere e Goodno (2013, p. 209).

Em vários casos, a deformação torna-se muito grande e os diagramas apresentados perdem a capacidade de representar simplificadamente o comportamento do material, porém, nesse ponto, as deformações serão tão grandes, que o material já perdeu sua utilidade como elemento estrutural.

Exemplificando

Imagine que uma barra com L = 1 m de comprimento e área da seção transversal de A = 120 m^2 é feita com material elastoplástico, tendo diagrama de tensão-deformação semelhante ao apresentado na Figura 3.26c. Seu módulo de elasticidade é E = 200 GPa e sua tensão de escoamento é $\sigma_Y = 300$ MPa. Uma carga axial foi aplicada na barra até que ela sofra uma redução de 10 mm e posteriormente é removida. Qual a deformação final apresentada pela barra?

Sabemos das equações básicas de resistência dos materiais que a deformação de uma peça é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{10}{1000} = 10 \times 10^{-3}$$

Observando o gráfico e usando as equações conhecidas, sabemos da relação entre tensão, deformação e módulo de elasticidade:

$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{\sigma_{\gamma}}{E} = \frac{300 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-9}} = 1{,}5 \times 10^{-3} \ \text{mm/mm}$$

Essa é a deformação elástica que a barra apresenta, ou seja, que retorna à configuração inicial. Agora, a deformação permanente apresentada pela barra será a diferença entre as duas deformações encontradas:

$$\varepsilon_P = \varepsilon - \varepsilon_{\gamma} = 10 \times 10^{-3} - 1{,}5 \times 10^{-3} = 8{,}5 \times 10^{-3} \ \text{mm/mm}$$

Portanto, a redução da barra será de:

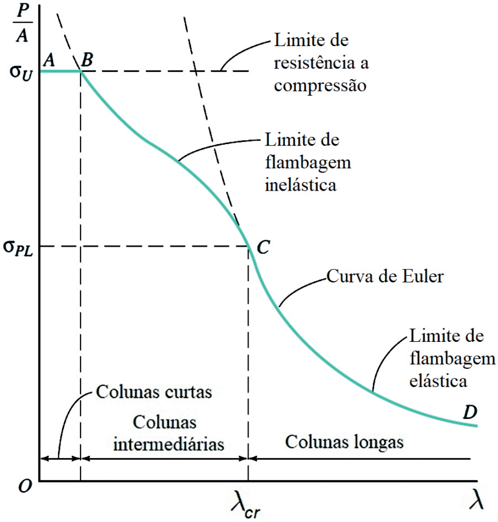
$$\delta_P = \varepsilon_P \cdot L = 8{,}5 \times 10^{-3} \cdot 1000 = \mathbf{8{,}5\ mm}$$

Comportamento elástico e inelástico de uma barra

Nas seções anteriores, vimos que as equações de Euler foram derivadas a partir da consideração que o material se comportaria de forma elástica e seguiria a lei de Hooke. Caso a tensão atuante no material seja maior que a tensão de escoamento, a coluna escoará antes de ter a chance de flambar e, portanto, as equações de Euler não deveriam ser utilizadas. Em outras palavras, o campo de atuação da equação de Euler é para estruturas longas ou de grande esbeltez.

Vamos agora estender nossos estudos a flambagem inelástica, que ocorre em estruturas onde o índice de esbeltez admissível não é superado. Na Figura 3.27 é exibido um diagrama semelhante ao da Figura 3.21, que exibe a curva de tensão de compressão média (P/A) em função do índice de esbeltez (L/r). A curva de Euler é exibida na região CD em que a tensão atuante é menor que o limite de proporcionalidade do material (σ_{LP}).

Figura 3.27 | Diagrama de tensão média de compressão versus índice de esbeltez de uma coluna idealizada



Fonte: adaptada de Craig (2011, p. 659).

O índice de esbeltez limite indica qual a esbeltez mínima na qual a curva de Euler é válida. Para obtê-lo devemos utilizar a equação da tensão crítica de Euler (Eq. 3.23) substituindo a tensão crítica (σ_{cr}) pelo limite de proporcionalidade do material (σ_{LP}). Isolando o índice de esbeltez crítico (λ_{cr}), temos:

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{L}{r}\right)_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{LP}}} \qquad \text{Eq. 3.25}$$

Seguindo o mesmo exemplo apresentado na seção anterior, um aço com limite de proporcionalidade de $\sigma_{LP} = 250\,\text{MPa}$ e modulo de elasticidade de $E = 200\,\text{GPa}$, substituídos na equação 3.25 nos dá um índice de esbeltez crítico de $\lambda_{cr} = 89$. Então, para este material, a carga de Euler pode ser considerada e a coluna flambará elasticamente se $\lambda \geq 89$, do contrário, o material excederá o limite de proporcionalidade e a flambagem será inelástica.

A partir da curva de Euler, apresentada na Figura 3.27, é possível notar que colunas longas com elevados índices de esbeltez sofrem flambagem com valores relativamente baixos de tensão. Vale ressaltar novamente que a resistência a flambagem de uma coluna não está ligada a resistência do material em si, mas da estabilidade da estrutura como um todo. Portanto, a tensão admissível da coluna só pode ser aumentada reduzindo a esbeltez (seção transversal x comprimento) e aumentando o modulo de elasticidade.

Se a estrutura for muito curta, o índice de esbeltez será muito baixo e a coluna será denominada curta. Esse tipo de coluna falha por esmagamento e escoamento do material na tensão de compressão última (σ_U), que gera um limite de resistência para o material representado pelo trecho *AB*.

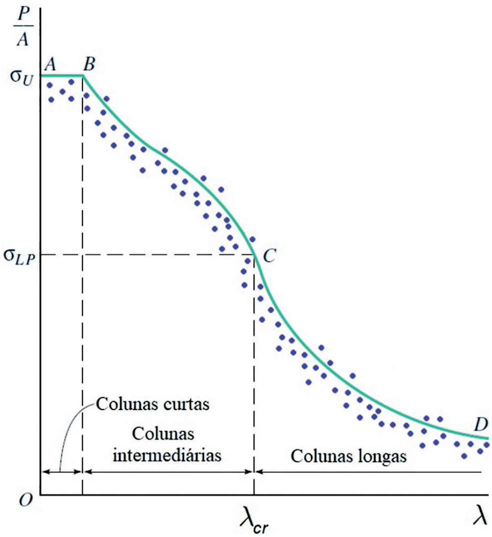
Entre as chamadas colunas longas e colunas curtas, existe uma área de colunas intermediárias que falham por flambagem inelástica. Portanto, as tensões atuantes são maiores que o limite de proporcionalidade do material e este não se comporta de forma elástica. Os limites entre colunas longas, intermediárias e curtas não são precisamente definidos para diversos tipos de materiais. Essa distinção é importante para definir qual método será utilizado para determinar a capacidade de carga de determinada estrutura.

Reflita

Qual tipo de coluna você acredita que é mais comum na prática? Você acha que os projetistas preferem utilizar colunas curtas, intermediárias ou longas?

Os resultados experimentais apresentam uma boa correlação com a curva *ABCD*, sendo usualmente inferiores a esta, exibidos na Figura 3.28. Os resultados experimentais são geralmente bem dispersos, devido à impossibilidade de existir a coluna idealizada que viemos estudando. O alinhamento da coluna, precisão da aplicação da carga e dos suportes causam uma grande variabilidade nos resultados. Para que essa curva seja considerada aplicável, é utilizado um fator de segurança sobre a tensão máxima, geralmente com valor 2. Quanto maior a esbeltez da coluna, maior deve ser esse fator de segurança.

Figura 3.28 | Plotagem de dados experimentais de flambagem de colunas



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 722); Craig (2011, p. 659).

Flambagem plástica (inelástica)

Para o estudo de colunas intermediárias sob flambagem, a equação de Euler não é aplicável, precisamos de teorias de flambagem inelástica. Três teorias serão apresentadas: teoria do módulo tangente, teoria do módulo reduzido e teoria de Shanley.

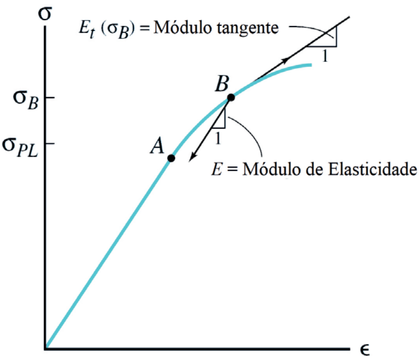
- Teoria do módulo tangente – Engesser (1889)

O diagrama de tensão vs. deformação de uma coluna idealizada sob compressão é exibido na Figura 3.29. Nesse caso, a coluna é intermediária, ou seja, seu índice de esbeltez (λ) é menor que o índice de esbeltez crítico (λ_{cr}) e a tensão axial (σ) alcança o limite de proporcionalidade (σ_{LP}) antes da tensão crítica (σ_{cr}) ser alcançada. O ponto A representa a tensão do limite de proporcionalidade do material (σ_{LP}) e o ponto B representa a tensão atuante no material (σ_B). Se a carga aplicada é aumentada, ocorre um aumento na tensão atuante e, portanto, uma alteração na relação tensão-deformação. Essa alteração é dada pela inclinação da reta tangente no ponto B e é chamada de módulo tangente (E_t):

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \qquad \text{Eq. 3.26}$$

Em outras palavras, essa teoria considera que, no momento da falha por flambagem inelástica, a coluna se comporta como se fosse feita de um material elástico com menor rigidez. A medida que a tensão atuante aumenta, o módulo tangente é reduzido. Quando a tensão é menor que o limite de proporcionalidade, o módulo tangente é igual ao módulo de elasticidade.

Figura 3.29 | Diagrama de tensão-deformação de uma coluna idealizada sob compressão



Fonte: adaptada de Craig (2011, p. 659).

A dedução da equação da carga crítica usando a teoria do módulo tangente é a mesma da equação de Euler. Portanto, a carga crítica pela teoria do módulo tangente (P_t) é dada por:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \qquad \text{Eq. 3.27}$$

Na qual E_t é o modulo tangente, I é o momento de inércia e L é o comprimento da coluna. A tensão crítica correspondente é também similar a tensão crítica de Euler e é dada por:

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \qquad \text{Eq. 3.28}$$

A teoria do módulo tangente é a mais simples de ser utilizada, entretanto, exibe falhas em apresentar o comportamento fiel do material. Essas falhas podem ser contornadas por meio da utilização da teoria do módulo reduzido, apresentada a seguir.

- Teoria do módulo reduzido – Karmam - Engesser (1910)

Uma coluna sob flambagem apresenta tensões de flexão composta em sua seção transversal em adição a tensão de compressão atuante (σ_B). Essas tensões são de compressão (σ_C) no lado côncavo da seção transversal e de tração (σ_T) no lado convexo. Portanto, a tensão atuante é somada as tensões de flexão, sendo aumentada de um lado ($\sigma_B + \sigma_C$) e reduzida de outro ($\sigma_B + \sigma_T$). No lado côncavo, a tensão é aumentada e o material segue a teoria do módulo tangente (E_t). Já no lado convexo, no qual a tensão atuante é reduzida o material, segue a mesma inclinação do módulo de elasticidade (E). Em outras palavras, é como se a coluna fosse feita de dois materiais diferentes.

Assimile

Para analisar uma coluna feita de dois materiais diferentes, podemos usar conceitos da teoria de flexão em vigas feitas de dois materiais diferentes. Os resultados dessas análises mostram que a coluna flexiona com a rigidez de um material com módulo de elasticidade entre os valores de E e E_t.

O modulo efetivo de um material é um valor entre E e E_t, chamado de módulo reduzido (E_r). O módulo reduzido é mais difícil de ser determinado, pois não depende só da tensão atuante, mas também do tipo da seção transversal da coluna. Por exemplo, para uma coluna com seção transversal retangular, o módulo reduzido pode ser dado por:

$$E_r = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2} \qquad \text{Eq. 3.29}$$

Pesquise mais

Se você ficou curioso em descobrir como encontrar o módulo reduzido (E_r) em colunas feitas de dois materiais, veja as seções 6.2 e 6.3 do livro *Mecânica dos Materiais*, disponível na biblioteca virtual.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

A dedução da equação da carga crítica usando a teoria do módulo reduzido é a mesma da equação de Euler e da teoria do módulo tangente. Portanto, a carga crítica pela teoria do módulo reduzido é dada por:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \qquad \text{Eq. 3.30}$$

A tensão crítica correspondente é dada por:

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A} = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \qquad \text{Eq. 3.31}$$

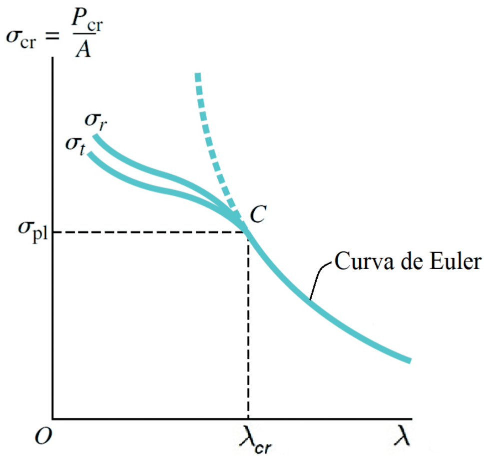
Além de possuir uma aplicação bem mais complexa, a teoria do módulo reduzido também apresenta uma falha, pois considera que a coluna está sofrendo uma redução de tensão em um dos lados da seção transversal. Entretanto essa redução só pode ocorrer após a flexão da barra, que só ocorre após a aplicação da carga, antes de acontecer a redução de tensão. Portanto, a carga crítica pela teoria do módulo reduzido (P_r) nunca poderá ser alcançada.

- *Teoria de Engesser – Shanley (1946)*

As teorias do módulo tangente e do módulo reduzido não conseguem definir completamente a flambagem inelástica. Dessa forma, uma teoria foi desenvolvida por F. R. Shanley (1946) utilizando conceitos de ambas teorias apresentadas e demonstrou a validade da teoria do módulo tangente de Engesser. Entre as conclusões tiradas por Shanley (1946), está que a carga crítica de uma coluna tem seu limite superior pela teoria do módulo reduzido e seu limite inferior pela teoria do módulo tangente.

Devido às conclusões tiradas por Shanley (1946) e em favor da segurança, a teria do módulo tangente fornece a carga crítica na qual a coluna permanece reta e deverá ser utilizada para o projeto de colunas. As curvas da teoria do módulo tangente e da teoria do módulo reduzido são presentadas na Figura 3.30. Note que σ_r sempre é maior que σ_t.

Figura 3.30 | Diagrama de tensão-deformação de uma coluna idealizada sob compressão



Fonte: adaptada de Gere e Goodno (2013, p. 945).

Pesquise mais

Mais detalhes sobre o trabalho desenvolvido por Shanley (1946) podem ser encontrados no capítulo 9, tópico 9.3 do livro *Resistência dos Materiais*, disponível gratuitamente na internet.

GUIMARÃES, H. C. F.; ÁVILA, J. A. Flambagem. In: ______. (Org.). **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: IME, 2001. cap. 9. p. 203-245. Disponível em: <http://transportes.ime.eb.br/~moniz/resmat/CAP_IX_FLAMBAGEM.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2018.

Sem medo de errar

Voltando agora a situação-problema desta seção, aplicaremos os conceitos que aprendemos sobre flambagem inelástica para responder os questionamentos feitos. O primeiro questionamento foi sobre a utilização da equação de Euler na situação proposta pelo arquiteto, com a adição de travamentos laterais no pilar. Sabemos que a equação de Euler só pode ser utilizada quando a coluna é denominada longa, ou seja, tem índice de esbeltez maior que o índice de esbeltez crítico. Ora, a adição de travamentos laterais reduz o comprimento efetivo do nosso pilar, o que reduzirá o valor do índice de esbeltez. Vamos verificar utilizando as eq. 3.22 e 3.24 e sabendo que o novo comprimento efetivo do pilar é $L_e = L/4 = 1{,}5$ m :

$$\lambda = \frac{L_e}{\sqrt{I/A}}$$

Da seção anterior, sabemos que para a seção transversal do pilar:

$$I_{yy} = \frac{1}{12}0{,}08 \cdot 0{,}15^3 - \frac{1}{12}0{,}06 \cdot 0{,}13^3$$

$$\underline{I_{yy} = 11{,}515 \times 10^{-6}\ m^4}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}0{,}15 \cdot 0{,}08^3 - \frac{1}{12}0{,}13 \cdot 0{,}06^3$$

$$\underline{I_{xx} = 4{,}060 \times 10^{-6}\ m^4}$$

$$A = 0{,}15 \cdot 0{,}08 - 0{,}13 \cdot 0{,}06$$

$$\underline{A = 4{,}20 \times 10^{-3}\ m^2}$$

Resolvendo a equação, utilizando o maior momento de inércia, pois este indicará o maior índice de esbeltez da peça:

$$\lambda = \frac{L_e}{\sqrt{I/A}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{11{,}515 \times 10^{-6} \big/ 4{,}20 \times 10^{-3}}}$$

$$\lambda = 48{,}25$$

Sabemos que para o aço utilizado no pilar e ao observarmos a Figura 3.21, o índice crítico de esbeltez é $\lambda_{cr} = 89$ e, portanto, o pilar com a adição de travamentos não é mais considerado longo, o que impede a utilização da equação de Euler.

b. Agora vamos utilizar a teoria do módulo tangente para calcular qual a capacidade crítica que o pilar apresenta com a adição dos travamentos laterais. Aplicando a Eq. 3.28, temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot E_t}{48{,}25^2} = 4{,}24 \times 10^{-3} \cdot E_t \qquad (1)$$

Inicialmente, assumimos que a tensão crítica está na zona elástica. Do diagrama da Figura 3.26 temos:

$$E = \frac{250\text{MPa}}{0{,}00125} = 200\ \text{GPa}$$

Substituindo na equação (1):

$$\sigma_{cr} = 4{,}24 \times 10^{-3} \cdot 200\text{GPa} = 848{,}05 \text{ MPa}$$

Uma vez que $\sigma_{cr} > \sigma_{LP} = 250 \text{ MPa}$, o pilar sofrerá flambagem inelástica. Agora, do diagrama da Figura 3.26 e utilizando a Eq. 3.26, podemos encontrar o módulo tangente:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{450\text{MPa} - 250\text{MPa}}{0{,}00425 - 0{,}00125} = 66{,}67 \text{ GPa}$$

Substituindo na equação (1):

$$\sigma_{cr} = 4{,}24 \times 10^{-3} \cdot 66{,}67 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{cr} = 282{,}68 \text{ MPa}$$

Como esse valor se encontra entre $250\text{MPa} < \sigma_{cr} < 450\text{MPa}$, confirma-se que essa é a tensão crítica do pilar. Aplicando a Eq. 3.21, podemos agora encontrar a carga crítica de flambagem:

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 282{,}68\text{MPa} \cdot 4{,}20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\mathbf{P_{cr} = 1187{,}28 \text{ KN}}$$

Então, você pode explicar ao arquiteto que sim, tratando-se apenas da carga crítica de flambagem, a capacidade de carga do pilar seria aumentada se fossem adicionados travamentos laterais, mesmo que o pilar se encontre na zona intermediária e apresente flambagem inelástica. Porém, vale mencionar que deveriam ser realizadas checagens com relação carga normal axial no pilar e a tensão de escoamento do aço para definir qual seria a carga máxima suportada por ele.

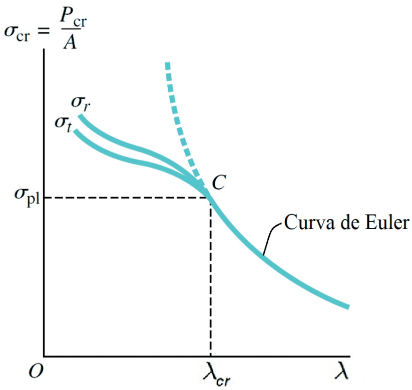
Avançando na prática

Comparação de teorias de flambagem inelástica

Descrição da situação-problema

Verifique, utilizando a teoria do método tangente e a teoria do método reduzido, quais as tensões críticas suportadas por uma barra biarticulada de aço retangular com seção de $60\text{mm} \times 40\text{mm}$ e comprimento de L = 1 m. Você concorda com as conclusões tiradas pela teoria de Shanley sobre essas duas teorias? Justifique sua resposta baseada nos resultados que você encontrar. O diagrama bilinear de tensão-deformação está representado na Figura 3.31.

Figura 3.31 | Diagrama bilinear de tensão-deformação da barra



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Inicialmente devemos calcular o índice de esbeltez da barra através das Eq. 3.24 e Eq. 3.22:

$$I = \frac{1}{12} 0{,}06 \cdot 0{,}04^3 = 3{,}2 \times 10^{-7} m^4$$

$$A = 0{,}06 \cdot 0{,}04 = 2{,}4 \times 10^{-3} m^2$$

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{I/A}} = \frac{0{,}75}{\sqrt{3{,}2 \times 10^{-7} / 2{,}4 \times 10^{-3}}} = 64{,}95$$

Vamos assumir que a tensão crítica está na zona elástica. Do diagrama da Figura 3.31 temos:

$$E = \frac{100\text{MPa}}{0{,}001} = 100 \text{ GPa}$$

Substituindo na Eq. 3.23:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 100 \times 10^9}{64{,}95^2} = 233{,}95 \text{ MPa}$$

Uma vez que $\sigma_{cr} > \sigma_{LP} = 100\text{MPa}$, a barra sofrerá flambagem inelástica. A partir do diagrama da Figura 3.31 e da Eq. 3.26, podemos calcular o módulo tangente deste material:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{250\text{MPa} - 100\text{MPa}}{0{,}004 - 0{,}001} = 50 \text{ GPa}$$

Agora, utilizando a Eq. 3.29 para uma seção retangular, podemos calcular o módulo reduzido:

$$E_r = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_t}\right)^2} = \frac{4\cdot 100\times 10^9 \cdot 50\times 10^9}{\left(\sqrt{100\times 10^9}+\sqrt{50\times 10^9}\right)^2} = 68,63 \text{ GPa}$$

Com ambos os módulos calculados, podemos então verificar os valores das tensões críticas utilizando as Eq. 3.28 e Eq. 3.31:

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 50\times 10^9}{64,95^2} = 116,97 \text{ MPa}$$

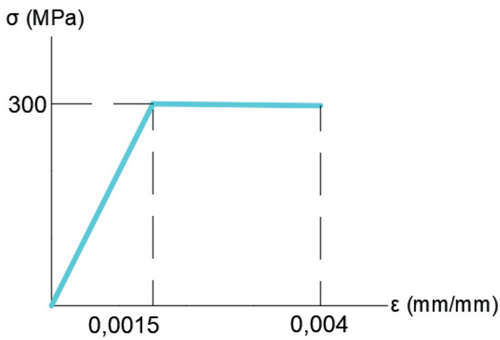
$$\sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 68,63\times 10^9}{64,95^2} = 160,55 \text{ MPa}$$

Portanto, pela teoria do módulo da tangente, a tensão crítica encontrada foi de σ_t = 116,97 MPa e, pela teoria do módulo reduzido, a tensão crítica encontrada foi de σ_r = 160,55 MPa. Dessa forma, fica mais claro o entendimento do porquê a utilização do método da tangente é indicada pela teoria de Shanley e atua em favor da segurança. Nesse exemplo, a teoria do módulo da tangente teve uma tensão crítica de aproximadamente a metade da teoria do modulo reduzido.

Faça valer a pena

1. Uma barra com $L = 2$ m de comprimento e área da seção transversal de $A = 150$ mm^2 é feita com material elastoplástico, tendo diagrama de tensão-deformação apresentado na Figura 3.32.

Figura 3.32 | Diagrama bilinear de tensão-deformação da barra



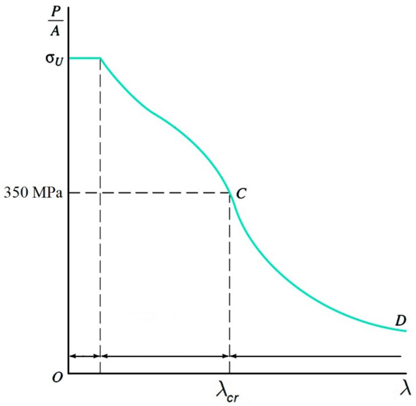
Fonte: elaborada pelo autor.

Uma carga axial foi aplicada na barra até que ela sofra uma redução de $7{,}0\ \text{mm}$ e posteriormente é removida. Qual é a deformação final apresentada pela barra?

a) 3,5 mm.
b) 7,0 mm.
c) 4,0 mm.
d) 2,0 mm.
e) 1,5 mm.

2. Na Figura 3.33, é exibido um diagrama da curva de tensão de compressão média (P/A) em função do índice de esbeltez (λ). A curva de Euler é exibida na região CD na qual a tensão atuante é menor que o limite de proporcionalidade do material (σ_{LP}). O índice de esbeltez crítico indica qual a esbeltez mínima na qual a curva de Euler é válida.

Figura 3.33 | Diagrama de tensão média de compressão versus índice de esbeltez de uma coluna idealizada



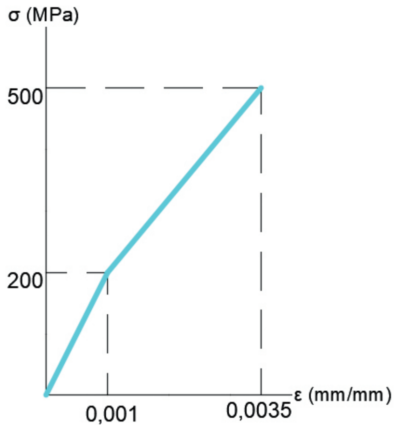
Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o limite de proporcionalidade do material é $\sigma_{LP} = 350\ \text{MPa}$ e o modulo de elasticidade é $E = 210\ \text{GPa}$, calcule qual o índice de esbeltez crítico correspondente.

a) 43,42.
b) 18,84.
c) 56,05.
d) 72,36.
e) 76,95.

3. Um pilar engastado/articulado de aço retangular tem seção de 200 mm x 100 mm e comprimento de L = 3 m. O diagrama bilinear de tensão-deformação do material deste pilar está representado na Figura 3.34.

Figura 3.34 | Diagrama bilinear de tensão-deformação da barra



Fonte: elaborada pelo autor.

Verifique, utilizando a teoria do método tangente e a teoria do método reduzido, quais as tensões críticas suportadas e responda qual a razão entre a maior e a menor.

a) $0,78$.
b) $1,27$.
c) $1,67$.
d) $1,31$.
e) $1,72$.

Referências

BEER, F. P. (ED.). **Mechanics of materials**. 7. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.

CRAIG, R. R. **Mechanics of materials**. 3. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.

______. **Mecânica dos materiais**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

F. R. SHANLEY. The Column Paradox. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 13, n. 12, p. 678–678, dez. 1946.

______. Inelastic Column Theory. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 14, n. 5, p. 261–268, maio 1947.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. Mecânica dos Materiais. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

______. **Mechanics of materials**. 8. ed. Stamford CT, USA: Cengage Learning, 2013.

GUIMARÃES, H. C. F.; ÁVILA, J. A. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: IME, 2001.

HIBBELER, R. C. **Mechanics of materials**. 9. ed. Boston: Prentice Hall, 2014.

MASCIA, N. T. **Flambagem de Barras**. Campinas: UNICAMP, 2017. Disponível em: <http://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/flambagemdebarras.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.

MIRANDA, R. J. P. C. **Resistência dos Materiais**. 2. ed. São Paulo: FEI, 2012.

POPOV, E. P. **Engineering mechanics of solids**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1990.

RILEY, W. F. **Mecânica dos materiais**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

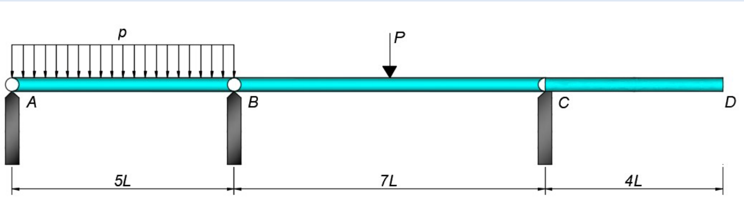
Critérios de resistência e teoremas energéticos

Convite ao estudo

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma etapa. Nas unidades anteriores fomos apresentados aos conceitos básicos da resistência dos materiais, aprendemos a elaborar diagramas de esforços solicitantes, como analisar as deformações de uma barra sujeita a flexão, e como analisar a esbeltez e flambagem de barras delgadas. Avançando em nosso estudo, esta unidade tem como objetivo conhecer e compreender os métodos de energia, a partir dos conceitos de energia de deformação e os critérios de resistência para materiais dúcteis e frágeis, aplicando as teorias de previsão de falhas, a fim de prever a falha estrutural de elementos sujeitos a um carregamento estático combinado.

Sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Todas as vigas trabalham independentes umas das outras. As vigas AB e BC são biapoiadas e a viga CD é engastada. Você foi solicitado pelo seu chefe para utilizar os conceitos de energia de deformação e os critérios de resistência para materiais dúcteis e frágeis para aplicar as teorias de previsão de falhas e prever a falha estrutural do sistema.

Figura 4.1 | Piso elevado em estrutura metálica



Fonte: elaborada pelo autor.

Inicialmente você fará uma rápida verificação na viga engastada CD quanto aos parafusos de fixação da viga engastada CD com o Pilar C e quanto à resistência ao impacto dessa mesma viga. Num segundo momento, você irá verificar os critérios de falha de materiais dúcteis para as vigas. Por fim, você realizará verificações quanto aos critérios de falha para materiais frágeis caso fossem usados ferro fundido nas vigas.

Para facilitar a aprendizagem, esta unidade está dividida em três seções: na Seção 1 você conhecerá os métodos de energia; na seção 2 abordaremos os critérios de resistência para materiais dúcteis; por fim, na Seção 3, serão discutidos os critérios de resistência para materiais frágeis.

Seção 4.1

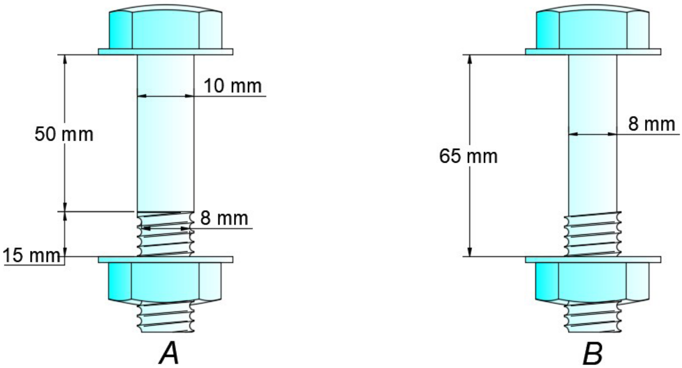
Métodos de energia

Diálogo aberto

Nessa seção iremos explorar os métodos de energia, conhecendo a aplicação de seus conceitos para determinação da energia de deformação e os efeitos causados pelo impacto em elementos estruturais elásticos. Lembre-se que sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Seu chefe ordena que antes de verificar as teorias de falha, você faça uma rápida verificação na viga engastada CD. Ele teme duas situações que possam causar falha da estrutura. A primeira é nos parafusos de fixação da viga engastada CD com o Pilar C e a segunda é caso sejam derrubados itens do andar superior, se a viga será capaz de suportar.

a. Inicie sua verificação de segurança pelos parafusos de fixação da viga engastada CD com o Pilar C. Você nota que os parafusos utilizados não foram uniformes, alguns tinham diâmetros maiores que outros, conforme exibido na Figura 4.2. Verifique a carga máxima admissível pelos parafusos e identifique qual dos dois tipos é mais indicado para a utilização no local. Considere E = 200 GPa e $\sigma_\gamma = 350$ MPa.

Figura 4.2 | Parafusos A e B utilizados na fixação da viga CD



Fonte: elabora pelo autor.

b. Posteriormente, você verifica, a pedido de seu chefe, se um corpo com massa de 100 kg cair sobre a viga CD, causará escoamento. Para isto, considere que o corpo cai no ponto D da viga de uma altura h = 3 m e que $L = 1\,\text{m}$ e, portanto, o comprimento total da viga é 4 m. Considere ainda que a viga é de um aço com E = 200 GPa, $\sigma_\gamma = 350\,\text{MPa}$ e seção W200 x 46, com altura d = 203 mm e momento de inércia $I = 45{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.

Não pode faltar

Energia de Deformação

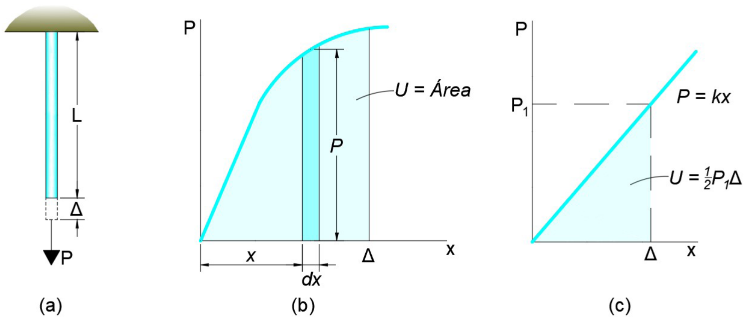
Nas unidades anteriores, as análises de forças e deslocamentos eram baseadas em dois conceitos fundamentais: tensão (σ) e deformação (ε). Agora será introduzido o conceito de energia de deformação. Antes da utilização de computadores, os métodos de energia eram muito utilizados na resolução de problemas avançados de deflexão, e hoje servem de base para o método dos elementos finitos – o método mais popular para resolução de problemas avançados de mecânica, estruturas, etc.

A energia de deformação de um corpo pode ser definida como o aumento de energia relacionado com a deformação desse corpo. Para melhor compreender o conceito de energia de deformação, inicialmente precisamos entender o significado de trabalho. Na mecânica, uma força faz um trabalho quando sofre uma deformação dx na mesma direção da força. O trabalho realizado é definido como:

$$dU_e = Pdx \qquad \text{(Eq. 4.1)}$$

Vamos considerar agora uma barra de comprimento L, engastada na base e com seção transversal A (Figura 4.3a). Aplicando uma carga P na ponta da barra, aumentando lentamente sua magnitude uma deformação irá ocorrer causando um deslocamento da barra que é representado por Δ.

Figura 4.3 | (a) Deformação de uma barra; (b) Diagrama de força versus deformação de material não elástico; (c) Diagrama de força *versus* deformação de material elástico-linear.



Fonte: elabora pelo autor.

Supondo que a barra não se comporta de forma elástica-linear, seu diagrama de força *versus* deformação é exibido na Figura 4.3b. Para esta situação, o trabalho é igual ao produto da força P e da pequena deformação *dx*, similar à Equação 4.1. Essa equação é igual a de um elemento de largura *dx* localizado abaixo do diagrama de força *versus* deformação, em destaque na Figura 4.1b. Agora, se a deformação total é Δ, o trabalho se torna:

$$U_e = \int_0^{\Delta} P dx \qquad \text{(Eq. 4.2)}$$

Sendo igual a área total sob o diagrama. Agora imagine que a barra se comporta de maneira elástica-linear. Nesse caso, a força *P* será diretamente proporcional ao deslocamento Δ e o diagrama de força *versus* deformação (Figura 4.3c) pode ser representado por uma linha reta de equação:

$$P = kx \qquad \text{(Eq. 4.3)}$$

Onde *k* é uma constante. Substituindo a Equação 4.3 na Equação 4.2 e resolvendo a integral, temos:

$$U_e = \int_0^{\Delta} kx dx = \frac{1}{2} k \Delta^2 \qquad \text{(Eq. 4.4)}$$

Do gráfico, temos que no ponto Δ a força é P_1, e portanto da Eq. 4.3 temos que:

$$P_1 = k\Delta \qquad \text{(Eq. 4.5)}$$

E a Eq. 4.4 se torna:

$$U_e = \frac{1}{2} P_1 \Delta \qquad \text{(Eq. 4.6)}$$

Esta equação é a mesma de um triangulo com base Δ e altura P_1 localizado abaixo da curva força versus deformação. De forma análoga, o trabalho realizado por uma torção T ou um momento M podem ser definidos respectivamente por:

$$U_e = \int_0^{\phi} T d\phi \text{ (Eq. 4.} \qquad U_e = \int_0^{\theta} M d\theta \text{ (Eq. 4.8)}$$

E caso os materiais sejam elástico-lineares, as Equações 4.7 e 4.8 se tornam:

$$U_e = \frac{1}{2} T\phi \text{ (Eq. 4.9)} \qquad U_e = \frac{1}{2} M\theta \text{ (Eq. 4.10)}$$

Quando um material sofre uma deformação devido a um carregamento externo, o trabalho externo realizado pela carga é convertido em trabalho interno, chamado de energia de deformação. Isso ocorre desde que não haja perda de energia em forma de calor.

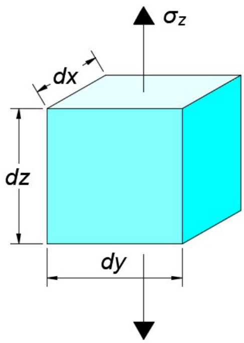
Energia de Deformação Elástica para Várias Cargas

Tensões Normais

Se o elemento exibido na Figura 4.4, de volume *dV* é submetido a uma tensão normal σ_z, a força criada no seu topo e sua base seria de:

$$dP_z = \sigma_z dA = \sigma_z dxdy \qquad \text{(Eq. 4.11)}$$

Figura 4.4 | Distribuições das tensões e deformações em um elemento sujeito a tensões normais.



Fonte: elabora pelo autor.

Como a força *P* é aplicada gradualmente, a deformação do elemento também será gradual, dada por:

$$d\Delta_z = \varepsilon_z dz \qquad \text{(Eq. 4.12)}$$

O trabalho realizado pela força dP_z, utilizando a Equação 4.6 é:

$$dU_i = \frac{1}{2} dP_z d\Delta_z \qquad \text{(Eq. 4.13)}$$

Substituindo as Equações 4.11 e 12 na Equação. 4.13 e sabendo que $dV = dxdydz$, temos:

$$dU_i = \frac{1}{2}(\sigma_z dxdy)(\varepsilon_z dz) = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z dV \qquad \text{(Eq. 4.14)}$$

Integrando a Equação 4.14 e considerando que o corpo é submetido a uma tensão uniaxial em qualquer direção, podemos reescrever a Equação 4.14 da seguinte forma:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma\varepsilon}{2} dV \qquad \text{(Eq. 4.15)}$$

Caso o material seja elástico e siga a Lei de Hooke, a relação $\sigma = \varepsilon E$ é válida e a Equação 4.15 se torna:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \qquad \text{(Eq. 4.16)}$$

Esta equação é chamada de energia de deformação elástica de um corpo.

Tensões Normais - Carga Axial

Sabemos da resistência dos materiais básica que uma barra submetida a uma carga axial P tem uma tensão normal de $\sigma = P/A$ e que $dV = Adx$. Substituindo na Equação 4.16:

$$U_i = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx \qquad \text{(Eq. 4.17)}$$

Se a barra tiver área da seção transversal uniforme A, a Equação 4.17 torna-se:

$$U_i = \frac{P^2 L}{2EA} \qquad \text{(Eq. 4.18)}$$

Reflita

Você consegue explicar a relação entre a energia interna de deformação e a área da seção transversal de uma barra? Imagine duas barras de mesmo material e comprimento sob o mesmo carregamento, com áreas de seção transversais diferentes. Qual das duas terá maior energia de deformação? Por que? Discuta com seus colegas e com o professor.

Tensões Normais - Flexão

Na Unidade 2, sabemos que, se desconsiderarmos o efeito do cisalhamento, uma viga sob flexão sujeita a um momento M, tem sua tensão normal dada por $\sigma = My/I$, em que y é a posição da linha neutra e I é o momento de inércia. Substituindo na Equação 4.16:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV \qquad \text{(Eq. 4.19)}$$

Considerando que $dV = dAdx$ e que $M^2/2EI$ é função somente de x, temos:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int y^2 dA \right) dx \qquad \text{(Eq. 4.20)}$$

O termo entre parênteses representa o momento de inércia da seção e pode ser substituído por I, assim temos:

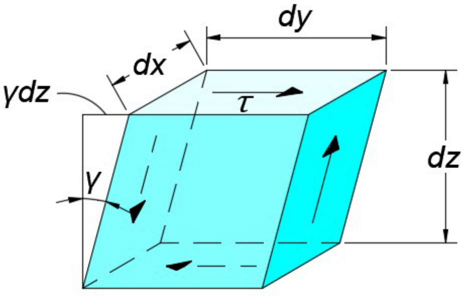
$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad \text{(Eq. 4.21)}$$

Tensões de Cisalhamento

A energia de deformação no cisalhamento é definida de forma similar à tensão normal. Considerando o elemento exibido na Figura 4.5 está sujeito a uma força de cisalhamento $dP = \tau(dxdy)$ na face superior que a desloca γdz em relação a face inferior. Sabendo que $dV = dxdydz$, temos:

$$dU_i = \frac{1}{2}(\tau dxdy)(\gamma dz) = \frac{1}{2}\tau\gamma dV \qquad \text{(Eq. 4.22)}$$

Figura 4.5 | Distribuições das tensões e deformações em um elemento sujeito a cisalhamento



Fonte: elabora pelo autor.

Assim, a energia de deformação armazenada no corpo é:

$$U_i = \int_V \frac{\tau\gamma}{2} dV \qquad \text{(Eq. 4.23)}$$

Caso o material seja elástico e siga a Lei de Hooke, a relação $\tau = \gamma G$ é válida e a Equação 4.23 se torna:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \qquad \text{(Eq. 4.24)}$$

Tensões de Cisalhamento - Torção

Com demonstração semelhante à tensão normal na flexão, a energia de deformação de cisalhamento na torção pode ser dada por:

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \qquad \text{(Eq. 4.25)}$$

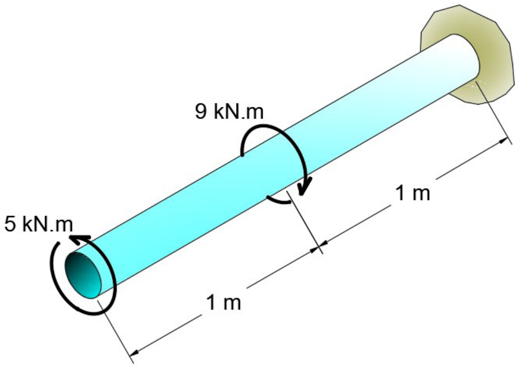
Sabendo que T é o torque e J é o momento polar de inércia. Se a barra tiver área da seção transversal uniforme A, a Equação 4.25 torna-se:

$$U_i = \frac{T^2 L}{2GJ} \qquad \text{(Eq. 4.26)}$$

Exemplificando

Determine a energia de deformação na torção em uma barra de aço com módulo de elasticidade transversal G=75 GPa e diâmetro d=50 mm.

Figura 4.6 | Barra de aço sob torção



Fonte: elabora pelo autor.

O momento de inércia à torção de uma barra circular é dado pela seguinte equação:

$$J = \frac{\pi d^4}{2} = \frac{\pi \cdot 0{,}5^4}{2} \qquad (1)$$
$$J = 0{,}098\ \text{m}^4$$

Vamos agora aplicar a Equação 4.26, fazendo o somatório das energias de deformação em função do comprimento da barra sob torção, temos:

$$U_i = \sum \frac{T^2 L}{2GJ} = \frac{1}{2GJ}\left\{\left[5\times 10^3\right]^2 \cdot 1 + \left[(9-5)\times 10^3\right]^2 \cdot 1\right\}$$
$$U_i = \frac{4{,}1\times 10^7}{2GJ} \qquad (2)$$

Substituindo os valores de J e G, temos:

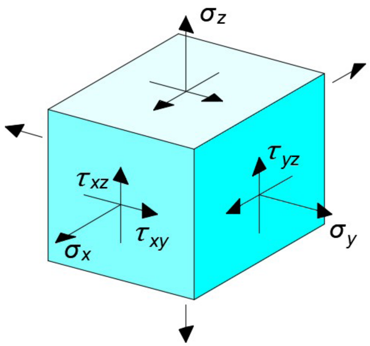
$$U_i = \frac{4{,}1\times 10^7}{2 \cdot 75\times 10^9 \cdot 0{,}098} = \mathbf{27{,}84\ J} \qquad (3)$$

Energia de deformação para um estado geral de tensões

De forma análoga aos itens anteriores, podemos derivar a expressão para a energia de deformação para um estado geral de tensões (Figura 4.7). Para um corpo elástico, a energia é dada por:

$$\overline{U_i} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) \quad \text{(Eq. 4.27)}$$

Figura 4.7 | Distribuições das tensões e deformações em um estado geral de tensões



Fonte: elaborada pelo autor.

Cargas de impacto e método da carga estática equivalente

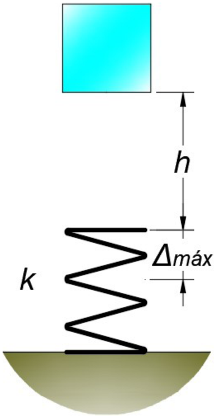
Até o momento, todas as forças foram consideradas como sendo aplicadas lentamente, garantindo que o corpo permaneça estático. Porém, na prática, existem forças que são aplicadas de forma dinâmica como o impacto de automóvel ou a força das ondas em muros de contenção. Para facilitar o estudo de cargas de impacto, faremos as seguintes simplificações: (i) o deslocamento será diretamente proporcional a carga, (ii) o material é elástico-linear, (iii) a inércia da estrutura pode ser desprezada e (iv) não há energia dissipada por calor, som ou deformação plástica devido ao impacto.

Para esta análise, vamos considerar uma mola livre na posição vertical sujeita a queda de um corpo de massa $m = W/g$ de uma altura *h*, em que *W* é o peso do corpo e *g* é a gravidade (Figura 4.8). Quando o corpo atinge a mola, causa uma deformação máxima $\Delta_{máx}$ e depois entra em repouso. Do princípio da conservação de energia, o trabalho causado pela queda do corpo sobre a mola deve ser igual ao trabalho necessário para deslocá-la. Dessa forma, temos:

$$U_e = U_i$$

$$W\left(h + \Delta_{máx}\right) = \frac{1}{2} k \Delta_{máx}^2 \qquad \text{(Eq. 4.28)}$$

Figura 4.8 | Queda livre de um corpo sobre uma mola



Fonte: elabora pelo autor.

Onde *k* é a rigidez da mola. Caso a força aplicada fosse estática, o deslocamento estático equivalente seria:

$$\Delta_{est} = \frac{W}{k} \qquad \text{(Eq. 4.29)}$$

De forma análoga, o deslocamento dinâmico vale:

$$\Delta_{máx} = \frac{P_{máx}}{k} \qquad \text{(Eq. 4.30)}$$

Isolando k nas Equações 4.29 e 4.30, e resolvendo para $P_{máx}$, temos que a carga dinâmica máxima é dada por:

$$P_{máx} = \frac{\Delta_{máx}}{\Delta_{est}} W \qquad \text{(Eq. 4.31)}$$

Resolvendo a equação quadrática para a raiz positiva (Eq. 4.28), temos:

$$\Delta_{máx} = \left(\frac{W}{k}\right) + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2h\left(\frac{W}{k}\right)} \qquad \text{(Eq. 4.32)}$$

Substituindo a Equação 4.29 na Equação 4.32, temos:

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} + \sqrt{\Delta_{est}^{\ 2} + 2h\Delta_{est}} \qquad \text{(Eq. 4.33)}$$

Reorganizando os termos:

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}\right) \qquad \text{(Eq. 4.34)}$$

O termo entre parênteses é chamado de fator de impacto (n), que corresponde à razão entre o deslocamento máximo no impacto e o deslocamento estático equivalente. Esse fator permite que uma carga dinâmica seja tratada de forma estática. O fator de impacto pode ser calculado por qualquer corpo que tenha relação linear entre força e deformação. A multiplicação da carga estática pelo fator de impacto fornece a carga dinâmica máxima:

$$P_{máx} = nW \qquad \text{(Eq. 4.35)}$$

Da mesma forma, a tensão dinâmica máxima pode ser calculada por:

$$\sigma_{máx} = n\sigma_{est} \qquad \text{(Eq. 4.36)}$$

Assimile

De forma geral, as aplicações de engenharia apresentam cargas aplicadas com relativa lentidão. Isso garante que as ondas de deformação sejam propagadas lentamente pelo material. Na prática, alguns carregamentos apresentam alta velocidade, mas podem ser simplificados de maneira que se considere que o material sofra a carga lentamente. Assim, considera-se que uma carga estática equivalente será aplicada lentamente até produzir o mesmo deslocamento que uma carga dinâmica (ou de impacto) de alta velocidade causaria. Esse método de estudar impacto é conhecido como **método da carga estática equivalente**. Geralmente é utilizado um fator de carga ou fator de impacto para relacionar a carga estática equivalente à carga dinâmica real. Esse fator pode ser aplicado a tensão, deslocamento ou a própria carga.

Agora, supondo que a altura de queda seja muito maior que o deslocamento máximo $(h \gg \Delta_{máx})$, este pode ser desconsiderado na Equação 4.28, e então:

$$\Delta_{máx} = \sqrt{2\Delta_{est} h} \qquad \text{(Eq. 4.37)}$$

Por outro lado, se o corpo é liberado quando está em contato com a mola $(h = 0)$, temos:

$$\Delta_{máx} = 2\Delta_{est} \qquad \text{Eq. 4.38}$$

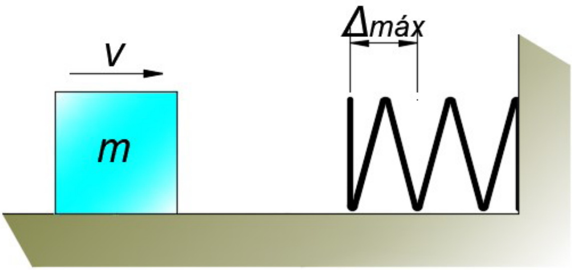
De forma análoga, para o caso de uma massa m que se move com velocidade v na horizontal até entrar em contato com um corpo elástico (Figura 4.9), o princípio da conservação de energia diz que:

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2 \qquad \text{(Eq. 4.39)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2$$

Figura 4.9 | Corpo movendo-se lateralmente contra uma mola com velocidade *v*.



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse caso, a energia cinética é considerada como trabalho externo e substitui o trabalho realizado pelo peso. Assim o deslocamento máximo vale:

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{\Delta_{est} v^2}{g}} \qquad \text{(Eq. 4.40)}$$

Pesquise mais

Aprofunde seus conhecimentos sobre métodos de energia no capítulo 10, parte A, do livro *Mecânica dos Materiais* disponível na biblioteca virtual.

RILEY, W. F.; STURGES, L., D.; MORRIS, D., H. **Mecânica dos materiais.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se que você foi solicitado pelo seu chefe a fazer algumas verificações na estrutura utilizando os métodos de energia.

a) Você inicia sua verificação de segurança pelos parafusos de fixação da viga engastada CD com o Pilar C, e nota que os parafusos utilizados não foram uniformes, alguns tinham diâmetros maiores que outros, conforme exibido na Figura 4.2. Você vai verificar a carga máxima admissível pelos parafusos e identificar qual dos dois tipos é mais indicado para a utilização no local. Vamos iniciar a solução encontrando a área da seção transversal maior (corpo do parafuso A) e menor (rosca do parafuso A e corpo do parafuso B):

$$A_A = \frac{\pi \cdot d_A^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}010^2}{4} = 7{,}85 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$

$$A_B = \frac{\pi \cdot d_B^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}008^2}{4} = 5{,}03 \times 10^{-5}\ \text{m}^2 \qquad (1)$$

No parafuso A, a carga axial máxima ocorrerá onde o diâmetro é menor. No parafuso B, o diâmetro é uniforme. Portanto, usaremos A_B para o cálculo da carga máxima de ambos os parafusos. Assim, temos:

$$P_{máx} = \sigma_\gamma \cdot A_B = 350\times10^6 \cdot 5,03\times10^{-5}$$
$$P_{máx} = 17,59 \text{ KN} \qquad (2)$$

Agora, no parafuso A, vamos aplicar a eq. 4.18:

$$U_i = \sum \frac{P^2L}{2EA} = \frac{17,59\times10^3 \cdot 0,05}{2\cdot200\times10^9 \cdot 7,85\times10^{-5}} + \frac{17,59\times10^3 \cdot 0,015}{2\cdot200\times10^9 \cdot 5,03\times10^{-5}}$$
$$U_i = 2,80\times10^{-5} + 1,31\times10^{-5} = 4,11\times10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$U_i = 4,11\times10^{-5} \text{ J} \qquad (3)$$

De forma análoga, no parafuso B, temos:

$$U_i = \sum \frac{P^2L}{2EA} = \frac{17,59\times10^3 \cdot 0,065}{2\cdot200\times10^9 \cdot 5,03\times10^{-5}}$$
$$U_i = 5,69\times10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$U_i = 5,69\times10^{-5} \text{ J} \qquad (4)$$

É interessante notar que ambos parafusos apresentam a mesma carga máxima admissível, mas o parafuso B, mesmo com menor diâmetro, tem 28% maior capacidade de absorver energia elástica.

Com esses resultados, você informa a seu chefe que ambos parafusos tem a mesma capacidade de carga, mas o B apresenta maior capacidade de absorver energia elástica.

b. No segundo momento, você agora verifica, a pedido de seu chefe, se um corpo com massa de 100 kg cair sobre a viga CD, causará escoamento na mesma. Sabendo que o corpo cai no ponto D da viga de uma altura, que o comprimento total da viga é 4 m e que a altura do centroide da seção transversal é $c = d/2 = 0,1015$ m. Vamos iniciar a solução calculando a equação da deflexão no ponto D da viga engastada CD. Fazendo o somatório dos momentos da viga no ponto C, temos:

$$\sum M_C = 0 \quad \therefore \quad -M - P(x) = 0$$
$$M = Px \qquad (5)$$

Do princípio da conservação de energia, das Equações 4.6 e 4.18, temos:

$$U_e = U_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$$
$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$
$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \qquad (6)$$

Agora podemos calcular o deslocamento estático equivalente:

$$\Delta_{est} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(100 \cdot 9,81)(4)^3}{3 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 45,5 \times 10^{-6}} = 2,3 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad (7)$$

Calculando agora o fator de impacto:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 3}{2,30 \times 10^{-3}}} \qquad (8)$$

$$\underline{n = 52,09}$$

Podemos agora verificar se a tensão causada pela queda do corpo será maior que a tensão de escoamento do aço. Calculamos primeiro a carga máxima pela Equação 4.35:

$$P_{máx} = nmg = 52,09 \cdot 100 \cdot 9,81 = 51,10 \text{ KN} \qquad (9)$$

Agora aplicamos (5) na equação da tensão máxima:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx} c}{I} = \frac{P_{máx} \cdot L \cdot c}{I} = \frac{51,10 \times 10^3 \cdot 4 \cdot 0,1015}{45,5 \times 10^{-6}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{máx} = 455,95 \times 10^6 \text{ MPa}} \qquad (10)$$

Como $\boldsymbol{\sigma_{máx} > \sigma_y}$, a viga sofreria escoamento devido a um corpo com massa de 100 kg caindo de uma altura de 3 m.

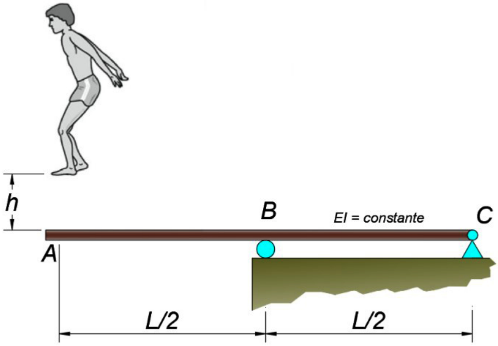
Avançando na prática

Análise de deformações em um trampolim

Descrição da situação-problema

Um mergulhador está pulando sobre uma prancha de mergulho *ABC* (Figura 4.10) com comprimento total de L = 3 m e módulo de elasticidade E = 12 GPa. A prancha tem seção transversal retangular de 500 mm de largura por 50 mm de altura. Antes de pular na água, o mergulhador dá um salto de altura h = 40 cm para pegar impulso. Considere que o mergulhador é um corpo rígido com massa m de 70 kg. Considere ainda que a deflexão na ponta da prancha pode ser dada por $\Delta = 2PL^3/3EI$. Utilize o método da carga equivalente para definir o deslocamento dinâmico máximo no ponto *A*.

Figura 4.10 | Mergulhador pulando sobre prancha de mergulho



Fonte: elabora pelo autor.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, vamos calcular as propriedades da seção transversal da viga. O momento de inércia da seção é:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 0,05^3}{12} = \underline{5,21 \times 10^{-6}\ m^4} \qquad (11)$$

Agora vamos calcular o peso do mergulhador:

$$W = mg = 70 \cdot 9,81 = \underline{686,70\ N} \qquad (12)$$

Vamos iniciar nossa solução verificando qual é a deflexão no ponto A caso o carregamento fosse estático, aplicando a equação dada no enunciado com os dados fornecidos e as eq. (1) e (2), temos:

$$\Delta_{est} = \frac{2PL^3}{3EI} = \frac{2 \cdot 686,70 \cdot 3^3}{3 \cdot 12 \times 10^9 \cdot 5,21 \times 10^{-6}}$$

$$\underline{\Delta_{est} = 0,198\ m} \qquad (13)$$

Vamos utilizar o fator de impacto do método da carga estática equivalente:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,4}{0,198}}$$

$$\underline{n = 3,25} \qquad (14)$$

Portanto, podemos obter agora o deslocamento máximo no ponto *A* com o uso da eq. 4.34:

$$\Delta_{máx} = n\Delta_{est} = 3,25 \cdot 0,198$$

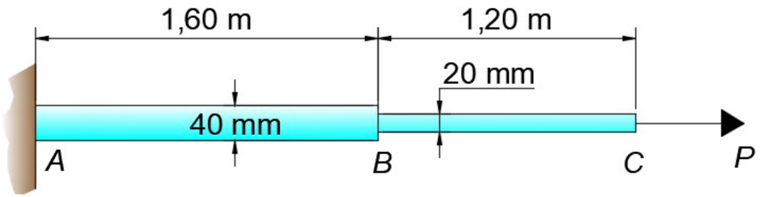
$$\Delta_{máx} = \mathbf{0,64\ m} \qquad (15)$$

Os resultados mostraram que o deslocamento devido ao impacto dinâmico é consideravelmente maior que o deslocamento estático correspondente.

Faça valer a pena

1. Uma barra circular ABC está sujeita a um carregamento axial *P* = 50 KN, conforme exibido na Figura 4.11. A barra tem módulo de elasticidade E = 200 GPa.

Figura 4.11 | Barra sob carregamento axial



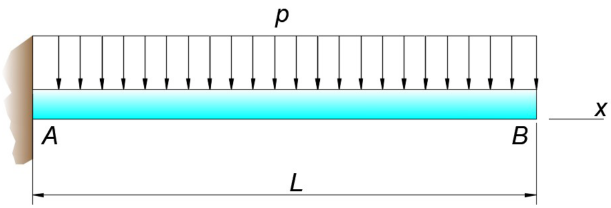
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine a energia de deformação dos trechos *AB* e *BC* da barra, respectivamente.

a) 7,96 J e 23,87 J.
b) 7,96 J e 31,83 J.
c) 31,83 J e 5,96 J.
d) 5,96 J e 23,87 J.
e) 23,87 J e 7,96 J.

2. A viga prismática engastada AB de comprimento L é sujeita a um carregamento distribuído p em toda sua extensão, conforme exibido na figura 4.12.

Figura 4.12 | Viga engastada sujeita a carregamento distribuído



Fonte: elaborada pelo autor.

Levando em consideração apenas o efeito das tensões normais, determine a energia de deformação da viga.

a) $\dfrac{p^2L^5}{40EI}$

b) $\dfrac{p^2L^5}{240EI}$

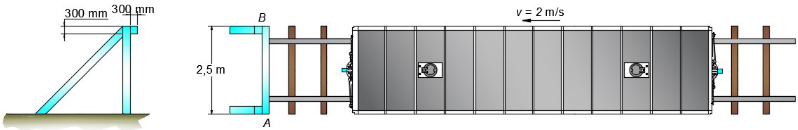
c) $\dfrac{p^2L^3}{192EI}$

d) $\dfrac{PL^3}{48EI}$

e) $\dfrac{2PL^3}{3EI}$

3. Um vagão, exibido na Figura 4.13, com 20 toneladas de massa, perdeu os freios e está se movendo a uma velocidade v = 2 m/s. A viga biapoiada *AB*, receberá o impacto do vagão e impedirá seu avanço. Considere que a viga tem módulo de elasticidade E = 200 GPa, comprimento L = 2,5 m e seção transversal quadrada de 300 mm x 300 mm.

Figura 4.13 | Esquema do vagão avançando em direção a viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual a deflexão estática equivalente e a deflexão máxima no centro da viga AB se ela for atingida pelo vagão? Considere que a deflexão no ponto central para uma viga biapoiada é $\Delta = PL^3/48EI$.

a) 0,0046 m e 0,031 m.
b) 0,046 m e 0,065 m.
c) 0,024 m e 0,138 m.
d) 0,0046 m e 0,044 m.
e) 0,0024 m e 0,044 m.

Seção 4.2

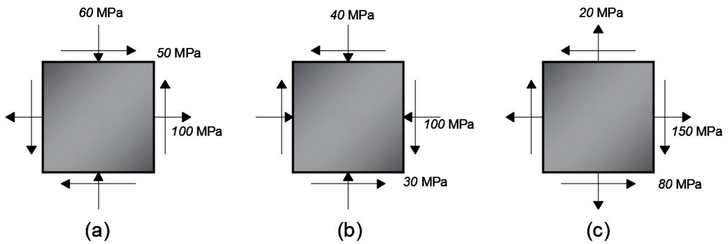
Critérios de resistência para materiais dúcteis

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior exploramos os métodos de energia, conhecendo a aplicação de seus conceitos para determinação da energia de deformação e efeitos causados pelo impacto em elementos estruturais elásticos. Nessa seção iremos conhecer os três critérios de falha mais utilizados para materiais dúcteis: a teoria da tensão normal máxima, a teoria da tensão cisalhante máxima e a teoria da máxima energia de distorção. Ao fim desta seção, você será capaz de verificar se um elemento sob um estado de tensões sofrerá falha.

Lembre-se que sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Você já realizou uma verificação prévia utilizando métodos de energia dos parafusos de ligação da viga CD e do efeito de uma carga de impacto sob a mesma viga. Agora você analisou os carregamentos aplicados nas três vigas e chegou ao estado de tensão plano de tensões do ponto mais crítico de cada uma das vigas exibido na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Estado plano de tensões para as vigas AB (a), BC (b) e CD (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

O seu chefe solicitou que você calculasse se sob os estados de tensão que você encontrou, alguma das vigas irá falhar, através do método mais indicado para materiais dúcteis. O aço estrutural utilizado nas vigas é o A36, com tensão de escoamento de $\sigma_\gamma = 250$ MPa e o fator de segurança é 1,5.

Não pode faltar

Critérios de resistência para carregamento estático

Quando projetamos um elemento estrutural, um engenheiro deve analisar o comportamento dos materiais calculando sua tensão e deformação, e determinar quais valores levarão à falha do material. Este será o tema desta e da próxima seção. Diversos fatores podem afetar a falha estrutural, como as condições ambientais, a forma dos elementos estruturais, a configuração dos carregamentos e o tipo do material.

É fácil determinar a tensão de ruptura (frágil) ou de escoamento (dúctil) de um elemento submetido a um estado uniaxial de tensões, como num ensaio de tração, porém, na prática, os elementos estruturais estão submetidos a um estado multiaxial de tensões, e sua falha não ocorre de maneira tão simples. É necessário identificar qual a combinação de tensões (tração, compressão e cisalhamento) que levará a falha do material.

Em geral, a falha pode ser considerada como qualquer comportamento que torne o material indisponível para o uso previsto. Essa falha pode ocorrer em geral por três fatores distintos: a tensão normal máxima foi atingida, a tensão cisalhante máxima foi atingida ou a energia de deformação máxima foi atingida.

Um material dúctil tem a capacidade de deformar-se plasticamente após seu limite elástico, tornando essa deformação irreversível. Os materiais estruturais mais comuns que apresentam esse comportamento são o aço doce (baixo teor de carbono), as ligas de alumínio, o cobre e o chumbo. Três critérios de falha são mais frequentemente usados para materiais dúcteis: a teoria da tensão normal máxima, a teoria da tensão máxima cisalhante e a teoria da máxima energia de distorção.

Assimile

Todos os critérios de resistência ou falha que serão apresentados aqui partem da ideia que um elemento estrutural sob um carregamento combinado falhará da mesma forma que um elemento num ensaio de tração uniaxial controlado em laboratório. As teorias de falha são boas substitutas para os ensaios de um material real sob o carregamento real de tensões envolvido, mas devem ser utilizadas com cautela. É importante ainda destacar que quando se fala materiais dúcteis entenda-se metais dúcteis, pois a maioria dos plásticos são dúcteis, mas não seguem as teorias apresentadas nesta seção.

Teoria da tensão normal máxima

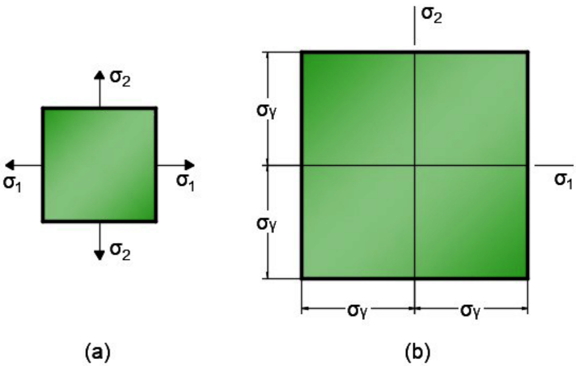
A teoria da tensão normal máxima, também chamada de Teoria de Rankine, diz que a falha de um elemento estrutural sujeito a uma combinação de cargas ocorre quando a tensão normal máxima alcança a tensão de escoamento do material, determinada num ensaio de tração. Para que ocorra falha do material, as tensões principais devem alcançar o valor da tensão de escoamento:

$$\sigma_1 \geq \sigma_\gamma \qquad \text{(Eq. 4.41)}$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_\gamma \qquad \text{(Eq. 4.42)}$$

Essa teoria pode ser visualizada através da Figura 4.15b, para um estado plano de tensões (Figura 4.15a). Se plotarmos valores arbitrários das tensões principais (σ_1 e σ_2) no gráfico da Figura 4.15b e eles se localizarem fora da área destacada, é considerado que o material falhou. Lembre-se que tensões principais direcionadas para fora do elemento são consideradas positivas e tensões principais apontando para dentro do elemento são consideradas negativas.

Figura 4.15 | (a) Estado plano de tensões; (b) Diagrama de falha para a teoria da tensão normal máxima

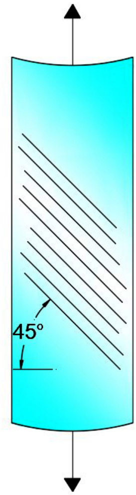


Fonte: elaborada pelo autor.

Teoria de Tresca (tensão cisalhante máxima)

A forma mais comum de escoamento de materiais dúcteis é pelo deslizamento entre as camadas de cristais que formam o material. Essas camadas são conhecidas como Linhas de Lüder (Figura 4.16), que indicam as linhas de deslizamento do material, ocorrendo em torno de 45º do eixo longitudinal do elemento.

Figura 4.16 | Linhas de Lüder em corpo de prova de aço num ensaio de tração

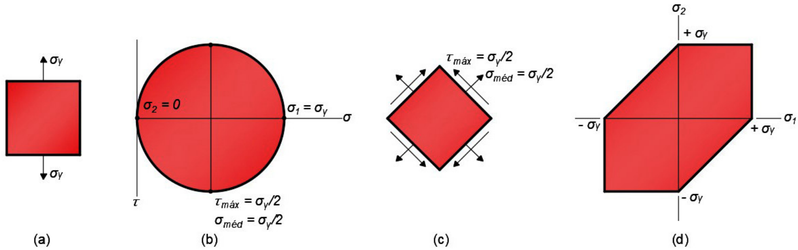


Fonte: elaborada pelo autor.

O deslizamento é causado por esforços de cisalhamento e, portanto, é plausível admitir que a falha de um material dúctil aconteça quando a tensão cisalhante máxima for alcançada. Para demonstrar isso, imagine um elemento de um material sob ensaio de tração (Figura 4.17a). O círculo de Mohr deste estado de tensões (Figura 4.17b) mostra que a tensão cisalhante máxima do elemento sob carregamento axial ocorre a 45º em relação a direção da carga (Figura 4.17c), similar as Linhas de Lüder. Do círculo de Mohr, temos que:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_{\gamma}}{2} \qquad \text{(Eq. 4.43)}$$

Figura 4.17 | (a) Estado de tensões num ensaio de tensão axial; (b) Círculo de Mohr num ensaio de tensão axial no escoamento; (c) Estado de tensões na máxima tensão de cisalhamento; (d) Diagrama de falha para a teoria da máxima tensão cisalhante para um estado plano de tensões



Fonte: elaborada pelo autor.

Seguindo esse princípio, foi desenvolvida a teoria da tensão cisalhante máxima, podendo prever a falha de materiais dúcteis sob qualquer tipo de carregamento. A falha ocorrerá quando a tensão cisalhante máxima da Equação 4.43 é alcançada em qualquer ponto do material. Portanto, para evitar a falha, é necessário que a tensão de cisalhamento atuante no material seja menor que a metade da tensão de escoamento, determinada por um simples ensaio de tração.

A Figura 4.17d representa graficamente a teoria da tensão cisalhante máxima para um estado plano de tensões. Quando as tensões principais tem o mesmo sinal, ou seja, ambos de tração ou de compressão, a tensão cisalhante máxima absoluta age fora do plano de tensões e tem valor igual a metade da maior tensão principal:

$$\tau_{máx}^{abs} = \frac{\sigma_1}{2} \qquad \text{(Eq. 4.44)}$$

Quando as tensões principais são de sinais opostos, a tensão cisalhante máxima é metade da soma das tensões principais:

$$\tau_{máx}^{abs} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \text{(Eq. 4.45)}$$

Dessa forma, a teoria da tensão cisalhante máxima de um estado plano de tensões pode ser expressada em função das tensões principais σ_1 e σ_2, ocorrendo falha com as seguintes condições:

$$\sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm o mesmo sinal: } \begin{cases} |\sigma_1| \geq \sigma_\gamma \\ |\sigma_2| \geq \sigma_\gamma \end{cases} \qquad \text{(Eq. 4.46)}$$

σ_1 e σ_2 têm sinais opostos: $\{|\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_\gamma$ (Eq. 4.47)

Se plotarmos as tensões principais no gráfico da Figura 4.17d e o ponto se localizar fora dos limites da área em destaque o material irá escoar neste ponto e a falha irá ocorrer.

Pesquise mais

Revise seus conhecimentos sobre as transformações de tensão e deformação no capítulo 7, do livro Mecânica dos Materiais disponível na Biblioteca Virtual.

BEER, F. P. (ED.). **Mecânica dos Materiais.** 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill Education, 2015.

Teoria de Von Mises (Máxima Energia de Distorção)

Essa teoria foi proposta por M. T. Huber em 1904 e posteriormente desenvolvida por R. Von Mises (1913) e H. Hencky (1925), ficando conhecida como Teoria de Von Mises. Essa teoria é baseada na determinação da energia de distorção de um determinado material. Essa energia é associada às mudanças na forma do material. Pela teoria, um componente estrutural é considerado seguro desde que a máxima energia de distorção por unidade de volume do material mantenha-se menor que a energia de distorção por unidade de volume necessária para escoar o material num teste de tração.

Da unidade anterior, sabemos que a densidade da energia de deformação de um material sob tensão uniaxial é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \qquad \text{(Eq. 4.48)}$$

Se o material estiver sob um estado triaxial de tensões, exibido na Figura 4.18a, a densidade da energia de deformação se torna:

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \qquad \text{(Eq. 4.49)}$$

Se o material se comportar de maneira elástica e seguir a Lei de Hooke:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2v\left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_2\right)\right] \qquad \text{(Eq. 4.50)}$$

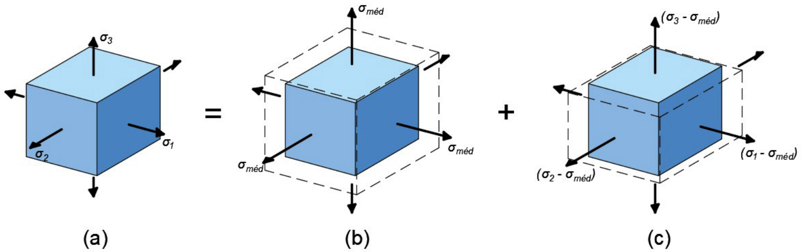
Uma parte desta energia de deformação está associada à variação de volume do elemento, sendo causada pela tensão principal média, exibida na Figura 4.18b:

$$\sigma_{méd} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \qquad \text{(Eq. 4.51)}$$

O restante da energia de deformação está associado à variação de forma, ou seja, à distorção, dada pelas seguintes relações, exibida na figura 4.18c:

$$\sigma_1 - \sigma_{méd} \qquad \sigma_2 - \sigma_{méd} \qquad \sigma_3 - \sigma_{méd} \qquad \text{(Eq. 4.52)}$$

Figura 4.18 | (a) Estado triaxial de tensões; (b) Tensões produzindo variações de volume; (c) Tensões produzindo distorções



Fonte: elaborada pelo autor.

Para obter a parcela da energia de distorção da Equação 4.50, vamos considerar que σ_1, σ_2 e σ_3 são iguais as subtrações da Equação 4.52 e substituindo ainda a relação da Equação 4.51, temos:

$$U_d = \frac{1+v}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \qquad \text{(Eq. 4.53)}$$

Caso o estado de tensões seja plano, $\sigma_3 = 0$ e a Equação 4.53 se torna:

$$U_d = \frac{1+v}{3E}\left(\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2\right) \qquad \text{(Eq. 4.54)}$$

Caso o estado de tensões seja uniaxial, ou seja, num ensaio de tração, $\sigma_1 = \sigma_\gamma$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, a Equação 4.54 se torna:

$$U_d^\gamma = \frac{1+v}{3E}\sigma_\gamma^2 \qquad \text{(Eq. 4.55)}$$

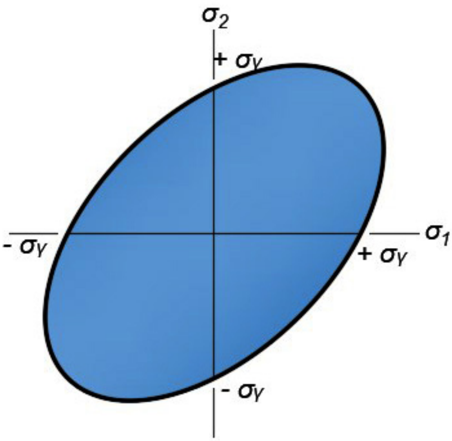
Na teoria da máxima energia de distorção é necessário que a máxima energia de distorção por unidade de volume do material seja igual a energia de distorção por unidade de volume necessária para escoar o material num teste de tração, podemos igualar as Equações 4.54 e 4.55:

$$U_d^{\gamma} = U_d$$

$$\sigma_{\gamma}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \qquad \text{(Eq. 4.56)}$$

Essa equação tem a forma de uma elipse, exibida na Figura 4.19. Se plotarmos as tensões principais neste gráfico e eles estiverem fora da área em destaque, é considerado que o material falhou.

Figura 4.19 | Diagrama de falha para a teoria da máxima energia de distorção para um estado plano de tensões

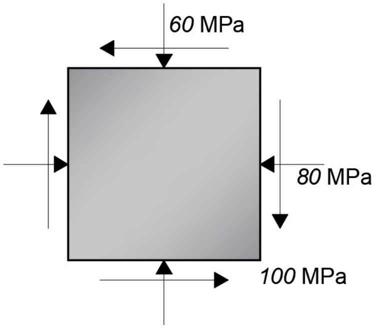


Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Calcule a tensão atuante pela teoria da máxima energia de distorção do elemento sob o estado de tensões exibido na Figura 4.20 e verifique se haverá falha do material sabendo que a tensão de escoamento do aço é $\sigma_{\gamma} = 250$ MPa.

Figura 4.20 | Estado de tensão plano de elemento de tubo de aço



Fonte: elaborada pelo autor.

Da Figura 4.20 temos que as tensões atuantes no elemento são: $\sigma_x = -80$ MPa, $\sigma_y = -60$ MPa e $\tau_{xy} = -100$ MPa. Da resistência dos materiais, sabemos que as tensões principais podem ser encontradas através da seguinte equação:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \quad (1)$$

Substituindo os termos:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(-80)+(-60)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-80)-(-60)}{2}\right)^2 + (-100)^2} \quad (2)$$

$$\sigma_1 = 30{,}50 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_2 = -170{,}50 \text{ MPa} \quad (3)$$

Teoria da máxima energia de distorção: vamos utilizar a Equação 56:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \quad \text{(Eq. 4.56)}$$

$$\sigma_\gamma = \sqrt{30{,}50^2 - 30{,}50 \cdot (-170{,}50) + (-170{,}50)^2} = 187{,}62 \text{ MPa} \quad (4)$$

Comparando com a tensão de escoamento do material, temos:

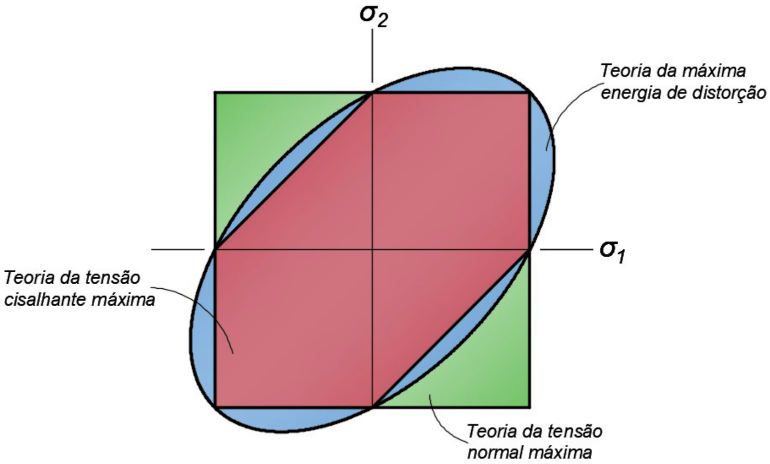
$$\sigma_\gamma = 250 \text{ MPa} > 187{,}62 \text{ MPa} \quad (5)$$

Portanto, pela teoria da máxima energia de distorção, o material não irá falhar.

Comparação entre os critérios de falha para materiais dúcteis

Na Figura 4.21 as representações gráficas das três teorias apresentadas são sobrepostas para melhor comparação. Note que nas três teorias, quando as tensões principais são iguais a tensão de escoamento ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\gamma$) os resultados de falha são os mesmos. O mesmo ocorre quando uma das tensões principais é zero ($\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$) e a outra é igual a tensão de escoamento ($\sigma_1 = \sigma_\gamma$ ou $\sigma_2 = \sigma_\gamma$).

Figura 4.21 | Comparação das teorias de falha para materiais dúcteis

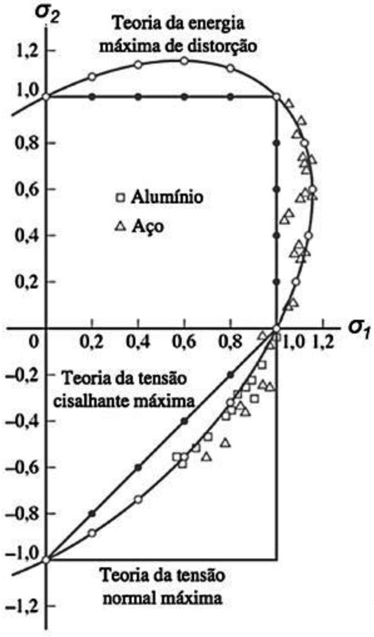


Fonte: elaborada pelo autor.

A maior discrepância das três teorias ocorre quando o elemento está sob cisalhamento puro. As coordenadas das tensões principais das três teorias podem ser determinadas sabendo que no cisalhamento puro $\sigma_1 = \tau$ e $\sigma_2 = -\tau$ e, portanto, $\sigma_1 = -\sigma_2$. A teoria da tensão normal máxima diz que a falha só ocorrerá quando a tensão principal for igual a tensão de escoamento ($\sigma_1 = \sigma_\gamma$ e $\sigma_2 = -\sigma_\gamma$). Aplicando a Equação 4.47, a teoria da tensão cisalhante máxima diz que $\sigma_1 = \sigma_\gamma / 2$ e $\sigma_2 = -\sigma_\gamma / 2$. Aplicando a Equação 4.56, a teoria da máxima energia de distorção diz que $\sigma_1 = \sigma_\gamma / \sqrt{3}$ e $\sigma_2 = -\sigma_\gamma / \sqrt{3}$.

Dados experimentais exibidos na Figura 4.22 mostram que a teoria da máxima energia de distorção apresenta resultados mais precisos tanto para tensões principais de sinal igual quanto para tensões principais de sinais opostos. No primeiro quadrante as teorias da tensão normal máxima e da tensão cisalhante máxima fornecem resultados em favor da segurança. Já no quarto quadrante, a teoria da tensão normal máxima fornece valores muito acima dos dados experimentais, e é considerada insegura, e a teoria da tensão cisalhante máxima fornece dados em favor da segurança. Portanto, a teoria da máxima energia de distorção é mais adequada para materiais dúcteis, porém, a teoria da tensão cisalhante é também muito utilizada pois é mais simples e atua em favor da segurança.

Figura 4.22 | Teorias de falha comparadas com dados experimentais



Fonte: adaptada de Riley, Sturges e Morris (2015, p. 521).

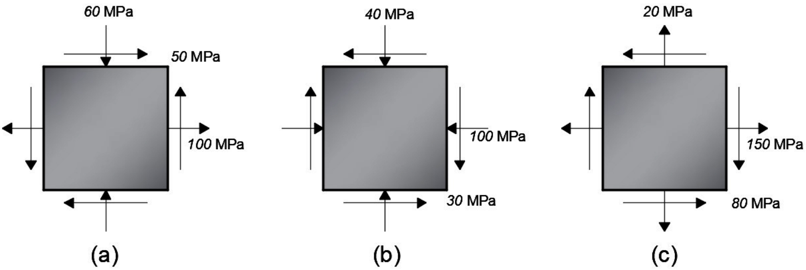
Reflita

Você consegue imaginar se alguma das teorias apresentadas neste capítulo poderiam ser usadas em materiais frágeis? Discuta com seus colegas e o professor.

Sem medo de errar

Lembre-se que sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Você analisou os carregamentos aplicados nas três vigas e chegou ao estado de tensão plano do ponto mais crítico de cada uma das vigas exibido na figura 4.14.

Figura 4.14 | Estado plano de tensões para as vigas AB (a), BC (b) e CD (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

O seu chefe solicitou que você calculasse se sob os estados de tensão encontradas alguma das vigas irá falhar, através do método mais indicado para materiais dúcteis. O passo inicial é a escolha de qual teoria você deve usar para fazer as verificações. Da Figura 4.22 você nota que a teoria que se assemelha mais aos dados experimentais é a teoria da energia máxima de distorção que, portanto, será a utilizada. Vamos então fazer as verificações para cada uma das vigas.

Viga AB: da resistência dos materiais, sabemos que as tensões principais podem ser encontradas através da seguinte equação:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} \qquad (1)$$

Substituindo os termos:

$$\sigma_{1,2} = \frac{100 + (-60)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - (-60)}{2}\right)^2 + 50^2} \qquad (2)$$

$$\sigma_1 = 114{,}34 \text{ MPa} \;\text{ e }\; \sigma_2 = -74{,}34 \text{ MPa} \qquad (3)$$

Usando a teoria da máxima energia de distorção e a Equação 56, temos:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \qquad \text{Eq. 4.56}$$

$$\sigma_{máx} = \sqrt{114,34^2 - 114,34 \cdot (-74,34) + (-74,34)^2} \qquad (6)$$

$$\sigma_{máx} = 164,62 \text{ MPa}$$

Aplicando agora o fator de segurança:

$$\sigma_{máx} = 164,62 \text{ MPa} \cdot \text{FS} \qquad (6)$$

$$\sigma_{máx} = 164,62 \cdot 1,5 = 246,93 \text{ MPa}$$

Portanto, para a viga AB, $\boldsymbol{\sigma}_\gamma > \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{máx}}$ e a viga não sofrerá falha.

Viga BC: analogamente à viga AB, as tensões principais são:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(-40)+(-100)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-40)-(-100)}{2}\right)^2 + (-30)^2} \qquad (2)$$

$$\sigma_1 = -27,57 \text{ MPa} \;\text{ e }\; \sigma_2 = -112,43 \text{ MPa} \qquad (3)$$

Usando a teoria da máxima energia de distorção e a Equação 56, temos:

$$\sigma_{máx} = \sqrt{(-27,57)^2 - (-27,57) \cdot (-112,43) + (-112,43)^2} \qquad (6)$$

$$\sigma_{máx} = 101,49 \text{ MPa}$$

Aplicando agora o fator de segurança:

$$\sigma_{máx} = 101,49 \text{ MPa} \cdot \text{FS} \qquad (6)$$

$$\sigma_{máx} = 101,49 \cdot 1,5 = 152,23 \text{ MPa}$$

Portanto, para a viga BC, $\boldsymbol{\sigma}_3 > \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{máx}}$ e a viga não sofrerá falha.

Viga CD: analogamente as vigas AB e BC, as tensões principais são:

$$\sigma_{1,2} = \frac{150+20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{150-20}{2}\right)^2 + (-80)^2} \qquad (2)$$

$$\sigma_1 = 188,08 \text{ MPa} \;\text{ e }\; \sigma_2 = -18,08\text{MPa} \qquad (3)$$

Usando a teoria da máxima energia de distorção e a eq.56, temos:

$$\sigma_{máx} = \sqrt{188,08^2 - 188,08 \cdot (-18,08) + (-18,08)^2}$$

$$\sigma_{máx} = 197,74 \text{ MPa} \qquad (6)$$

Aplicando agora o fator de segurança:

$$\sigma_{máx} = 197,74 \text{ MPa} \cdot FS$$

$$\sigma_{máx} = 197,74 \cdot 1,5 = 296,61 \text{ MPa} \qquad (6)$$

Portanto, para a viga CD, $\sigma_y < \sigma_{máx}$ e a viga sofrerá falha.

Finalizado os seus cálculos, você informa a seu chefe que as vigas AB e BC não apresentam risco de falhar, mas a viga CD irá falhar segundo o critério da máxima energia de distorção.

Avançando na prática

Teorias de falha a partir de ensaio de torção

Descrição da situação-problema

A partir de um ensaio de torção numa barra de aço, é possível determinar as seguintes relações:

- $\tau_\gamma = \sigma_\gamma$: teoria da tensão normal máxima.
- $\tau_\gamma = 0,5 \cdot \sigma_\gamma$: teoria da tensão cisalhante máxima.
- $\tau_\gamma = 0,577 \cdot \sigma_\gamma$: teoria da máxima energia de distorção.

Usando os três critérios de falha apresentados nessa seção mostre como alcançar as relações expostas para o limite de escoamento de um elemento (τ_γ).

Resolução da situação-problema

Num ensaio de torção há apenas cisalhamento puro e, portanto, quando o material escoar todas as tensões deverão ser iguais:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy} = \tau_\gamma = \tau_{máx} \qquad \text{(Eq. 4.57)}$$

Teoria da tensão normal máxima: a teoria diz que a tensão principal deve ser igual a tensão de escoamento, portanto:

$$\sigma_1 = \sigma_\gamma \qquad (1)$$

Usando a Equação 4.57 e a relação (1), temos que:

$$\underline{\tau_\gamma = \sigma_\gamma} \qquad (2)$$

Teoria da tensão cisalhante máxima: da Equação 4.43, temos a seguinte relação:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_\gamma}{2} \qquad \text{(Eq. 4.43)}$$

Portanto, usando Equação 4.57, temos que:

$$\tau_\gamma = \frac{\sigma_\gamma}{2} \qquad (3)$$

$$\underline{\tau_\gamma = 0{,}5 \cdot \sigma_\gamma}$$

Teoria da máxima energia de distorção: da Equação 4.56, temos a seguinte relação:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \qquad \text{Eq. 4.56}$$

Substituindo Equação 4.57, temos:

$$\sigma_\gamma = \sqrt{(\tau_\gamma)^2 - (\tau_\gamma)\cdot(-\tau_\gamma) + (-\tau_\gamma)^2}$$

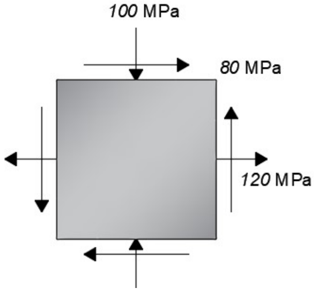
$$\sigma_\gamma = 1{,}73 \cdot \tau_\gamma$$

$$\underline{\tau_\gamma = 0{,}577 \cdot \sigma_\gamma} \qquad (4)$$

Faça valer a pena

1. As tensões componentes de um estado plano de tensões num ponto crítico de um tubo de aço é exibido na Figura 4.23. Considere a tensão de escoamento do aço $\sigma_\gamma = 250$ MPa.

Figura 4.23 | Estado de tensão plano de elemento de tubo de aço



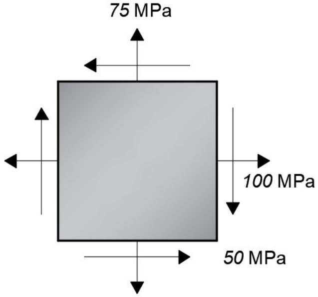
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine se haverá falha, respectivamente, pela teoria da tensão normal máxima, teoria da tensão cisalhante máxima e teoria da máxima energia de distorção.

a) Falha; não falha; não falha.
b) Não falha; não falha; não falha.
c) Não falha; falha; não falha.
d) Falha; falha; falha.
e) Não falha; falha; falha.

2. Um ponto na superfície de uma peça de aço de uma máquina é sujeito ao estado plano de tensões exibido na Figura 4.24:

Figura 4.24 | Estado de tensão plano de elemento de tubo de aço



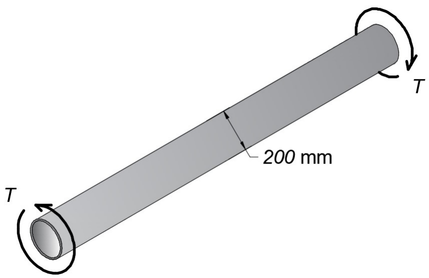
Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a tensão de escoamento do material é $\sigma_\gamma = 250$ MPa, determine os fatores de segurança em relação a falha para cada uma das três teorias de falha para materiais dúcteis.

a) 2,43; 2,00; 1,80.
b) 1,80; 2,43; 2,00.
c) 2,00; 4,85; 2,00.
d) 2,00; 2,43; 6,95.
e) 1,80; 2,85; 2,00.

3. Um tubo de aço mostrado na Figura 4.25 está sujeito a um torque $T = 50$ kN·m. O fator de segurança em relação a falha por escoamento é 1,4 e a tensão de escoamento do aço é $\sigma_\gamma = 250$ MPa.

Figura 4.25 | Tubo de aço sob torção



Fonte: elaborada pelo autor.

Equação da tensão de cisalhamento de um tubo: $\tau_{xy} = \dfrac{Tr}{J}$

Determine o diâmetro interno máximo para que o eixo não falhe pela teoria da tensão cisalhante máxima.

a) 179,1 mm.
b) 177,3 mm.
c) 146,4 mm.
d) 198,2 mm.
e) 167,4 mm.

Seção 4.3

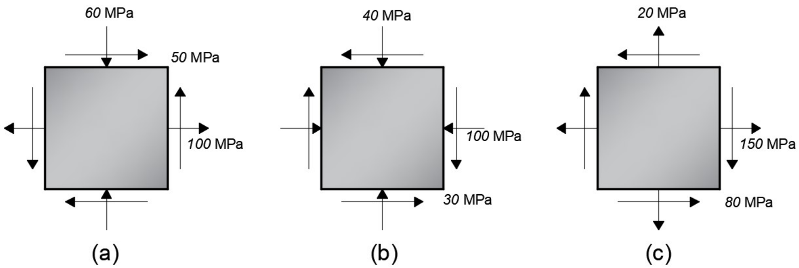
Critérios de resistência para materiais frágeis

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior conhecemos os três critérios de falha mais utilizados para materiais dúcteis: a teoria da tensão normal máxima, a teoria da tensão cisalhante máxima e a teoria da máxima energia de distorção. Nesta seção iremos explorar os três critérios de falha mais utilizados para materiais frágeis: a teoria de Coulomb-Mohr, a teoria da tensão normal máxima e a teoria da maior deformação linear. Ao fim desta seção, você será capaz de verificar se um elemento frágil sob um estado de tensões sofrerá falha.

Lembre-se que sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Você já realizou uma verificação prévia utilizando o método de energia na análise dos parafusos de ligação da viga CD e do efeito de uma carga de impacto sob a mesma viga. Em seguida você fez uma verificação dos critérios de falha para materiais dúcteis de todas as vigas e viu que uma das vigas iria falhar. Devido a isso, seu chefe solicitou que você realizasse uma verificação se fossem utilizadas vigas de ferro fundido no lugar das vigas de aço, para os mesmos estados de tensão apresentados na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Estado biaxial de tensões para as vigas AB (a), BC (b) e CD (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

Você foi solicitado a utilizar a teoria de Coulomb-Mohr para realizar as verificações. Considere que o ferro fundido tem a tensão última na tração $\sigma_{últ}^{T} = 300 \text{ MPa}$ e a tensão última na compressão $\sigma_{últ}^{C} = 700 \text{ MPa}$.

Não pode faltar

Diferentemente de materiais dúcteis, materiais frágeis falham sem apresentar 'aviso', ou seja, a falha ocorre de forma brusca. Nessa situação, a falha ocorre pelo fraturamento do material, que se inicia quando a tensão atuante alcança a tensão de fratura ou tensão última ($\sigma_{últ}$). Num material frágil, muitas vezes a resistência a compressão é maior que a resistência a tração, já no cisalhamento a resistência é similar à tração. Devido a isso, num material frágil sujeito a um estado multiaxial de tensões, é indicado obter as tensões principais para aplicar os critérios de falha. Serão apresentadas três teorias de falha mais frequentemente usadas para materiais frágeis: Teoria de Coulomb-Mohr, Teoria de Rankine (tensão normal máxima) e Teoria de Saint-Venant (maior deformação linear).

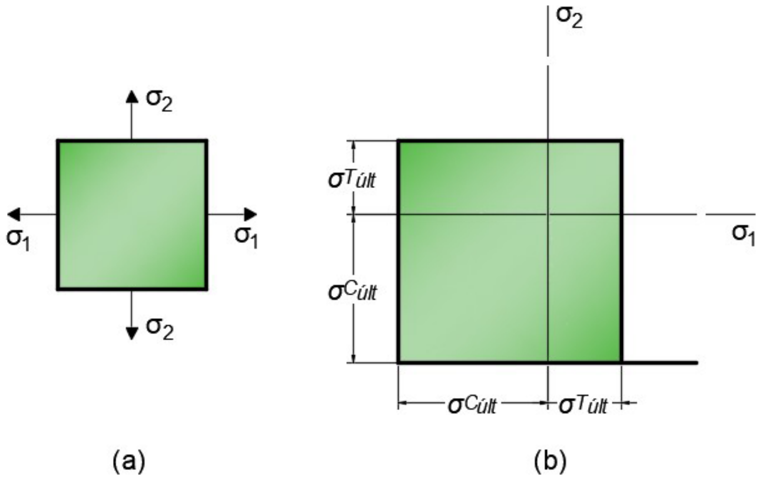
Teoria de Rankine (tensão normal máxima)

A teoria da tensão normal máxima foi creditada a W. J. M. Rankine, propondo-a em meados do século XIX. A teoria da tensão normal máxima diz que o material falhará por fratura quando a maior tensão principal alcançar o valor da tensão última obtido por um ensaio de tração ($\sigma_{últ}^{T}$) ou compressão ($\sigma_{últ}^{C}$) axial. Quando o material é sujeito a um estado de tensões biaxial (Figura 4.26a), a ruptura ocorrerá quando:

$$\left|\sigma_{1,2}\right| = \sigma_{últ}^{T} \quad \text{ou} \quad \left|\sigma_{1,2}\right| = \sigma_{últ}^{C} \qquad \text{(Eq. 4.57)}$$

A teoria pode ser visualizada graficamente na Figura 4.26b. Se plotarmos os valores das tensões principais (σ_1 e σ_2) no gráfico e eles se localizarem fora da área destacada, é considerado que o material falhou.

Figura 4.26 | (a) Estado biaxial de tensões. (b) Diagrama de falha para a teoria da tensão normal máxima

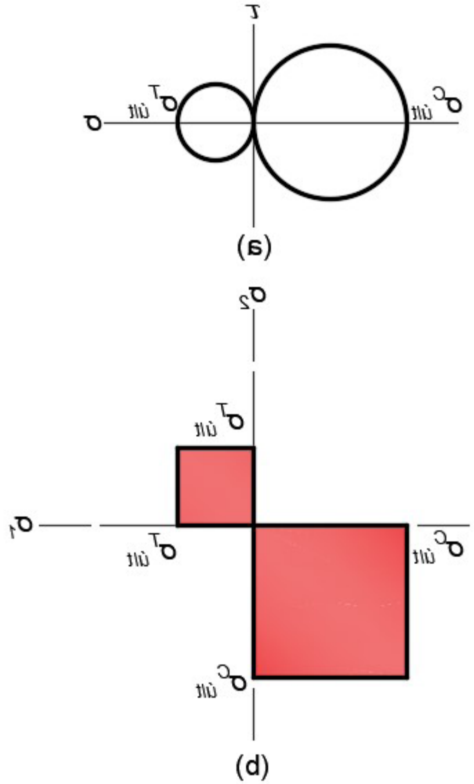


Fonte: elaborada pelo autor.

Teoria de Coulomb-Mohr

A teoria de Coulomb-Mohr foi desenvolvida por Otto Mohr, baseando-se no círculo de Mohr e na teoria da máxima tensão cisalhante para materiais dúcteis de Coulomb. Para aplicar essa teoria devemos saber a tensão última de compressão ($\sigma^C_{últ}$) e a tensão última de tração ($\sigma^T_{últ}$), que podem ser obtidos a partir de ensaios de carregamento axial. O círculo de Mohr representando os círculos para a compressão última e para a tração última de um material são representados na Figura 4.27a. A partir desses círculos é possível gerar uma representação gráfica do critério de falha de Coulomb-Mohr quando as tensões atuantes são ambas de tração ou ambas de compressão (Figura 4.27b).

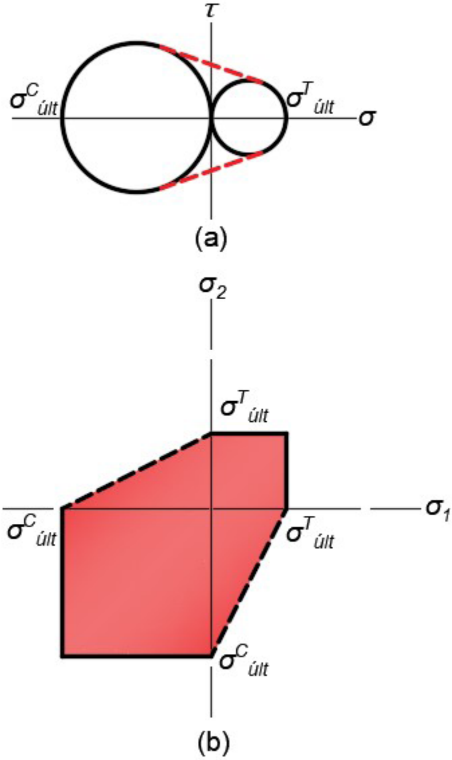
Figura 4.27 – Critério de falha de Coulomb-Mohr para materiais frágeis com diferentes tensões últimas de tração e compressão



Legenda: (a) Círculos de Mohr para compressão uniaxial e tração uniaxial; (b) Diagrama de falha para a teoria de Coulomb-Mohr quando as tensões principais tem o mesmo sentido.
Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo a teoria de Coulomb-Mohr, qualquer estado de tensões dentro da área que tangencia os dois círculos apresentados é considerado seguro quanto a falha. Para completar a representação gráfica do critério de falha de Coulomb-Mohr (Figura 4.29a), são desenhados vários círculos dentro das linhas tangentes. A partir desses círculos são determinadas as tensões principais atuantes σ_1 e σ_2, que são plotadas no diagrama, gerando a representação gráfica completa do critério de falha de Coulomb-Mohr (Figura 4.28b). Se plotarmos as tensões principais no gráfico da Figura 4.28b e o ponto se localizar fora dos limites da área em destaque, o material irá fraturar neste ponto.

Figura 4.28 | (a) Círculos de Mohr para compressão uniaxial e tração uniaxial com linha tangente; (b) Diagrama de falha para a teoria de Coulomb-Mohr completo



Fonte: elaborada pelo autor.

Para um estado biaxial de tensões, quando as tensões principais tiverem sinais opostos (tração e compressão), elas podem ser relacionadas as tensões últimas de tração e compressão pela seguinte equação:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{últ}^T} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{últ}^C} = 1 \qquad \text{(Eq. 4.58)}$$

Onde σ_1 é a tensão principal de tração e σ_2 é a tensão principal de compressão. Essa equação representa a reta tangente aos dois círculos de Mohr para a compressão última e tração última. Se essa relação apresentar valores maiores que 1, o material irá falhar pelo critério de Coulomb-Mohr. Caso ambas as tensões sejam de tração, a fratura ocorrerá quando qualquer uma dela atingir a tensão última de tração:

$$\sigma_1 = \sigma_{últ}^T \quad \text{ou} \quad \sigma_2 = \sigma_{últ}^T \qquad \text{(Eq. 4.59)}$$

Analogamente, caso ambas sejam de compressão, a fratura ocorrerá quando qualquer uma delas atingir a tensão última de compressão:

$$\sigma_1 = \sigma_{últ}^C \quad \text{ou} \quad \sigma_2 = \sigma_{últ}^C \qquad \text{(Eq. 4.60)}$$

Pesquise mais

Para conhecer um pouco mais sobre o Círculo de Mohr para o estado plano de tensões, leia a Seção 5.2, página 104-112 do livro: Pereira, C. M. P. **Mecânica dos Materiais Avançada. Rio de Janeiro:** Interciência, 2014. Disponível em: <https://goo.gl/VTJhCs>. Acesso em: 6 set. 2018.

Teoria de Saint-Venant (Maior Deformação Linear)

O critério de Saint-Vernant, também chamado de teoria da maior deformação linear, foi muito usado no século XIX, porém está em desuso. Neste critério, o material é seguro enquanto a deformação (ε) não exceder a deformação de última de ruptura ($\varepsilon_{últ}$) obtido através de um ensaio axial de tração. Segundo esse critério, a ruptura ocorrerá quando:

$$|\varepsilon_1| = \varepsilon_{últ} \quad \text{ou} \quad |\varepsilon_2| = \varepsilon_{últ} \qquad \text{(Eq. 4.61)}$$

Essas relações podem ser expressadas em função das tensões principais através da Lei de Hooke para um estado biaxial de tensões, onde v é o coeficiente de Poisson:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{v \cdot \sigma_2}{E} \qquad \text{(Eq. 4.62)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{v \cdot \sigma_1}{E} \qquad \text{(Eq. 4.63)}$$

Sabendo que na deformação última podemos utilizar a Lei de Hooke para uma tensão uniaxial, a relação entre tensão e deformação é dada por:

$$\varepsilon_{últ} = \frac{\sigma_{últ}}{E} \qquad \text{(Eq. 4.64)}$$

Substituindo as Equações 4.62, 4.63 e 4.64 na Equação 4.61, teremos as equações que representam a ruptura pelo critério da maior deformação linear:

$$\sigma_1 - v \cdot \sigma_2 = \sigma_{últ} \text{ ou } \sigma_2 - v \cdot \sigma_1 = \sigma_{últ} \qquad \text{(Eq. 4.65)}$$

Quando $\sigma_1 = \sigma_2$, a Equação 4.65 se torna:

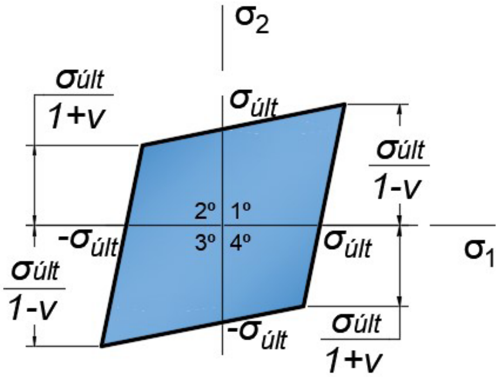
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{últ}}{1 - v} \qquad \text{(Eq. 4.66)}$$

Quando $\sigma_1 = -\sigma_2$ ou $-\sigma_1 = \sigma_2$, a Equação 4.65 se torna:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{últ}}{1 + v} \qquad \text{(Eq. 4.67)}$$

A partir destes dados é possível gerar o diagrama para o critério da maior deformação linear, representado na Figura 4.29. Se plotarmos as tensões principais neste gráfico e eles estiverem fora da área em destaque, é considerado que o material falhou.

Figura 4.29 | Diagrama de falha para a teoria da maior deformação linear



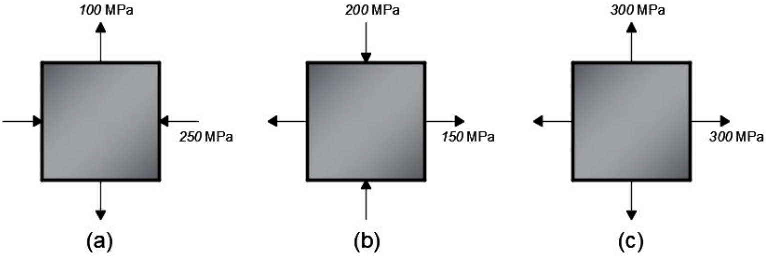
Fonte: elaborada pelo autor.

Esse critério praticamente não é mais utilizado, pois resultados práticos mostraram que quando ambas as tensões principais são de tração ou compressão, o critério identifica a falha acima dos valores reais, tornando-o não confiável para utilização.

Exemplificando

Construa o diagrama de falha pela teoria da maior deformação linear para um material com tensão última de $\sigma_{últ} = 250$ MPa e coeficiente de Poisson de $v = 0{,}25$. Em seguida, verifique graficamente se os estados de tensões da Figura 4.30 sofrerão falha.

Figura 4.30 | Estado de tensões biaxiais



Fonte: elaborada pelo autor.

Para desenhar o diagrama, basta calcular as coordenadas das extremidades de cada quadrante. Conforme a Figura 4.30, o primeiro e terceiro quadrantes são governados pela Equação 4.66:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{últ}}{1-v} \qquad \text{(Eq. 4.66)}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{250}{1-0,25} = 333,34 \text{ MPa} \qquad (1)$$

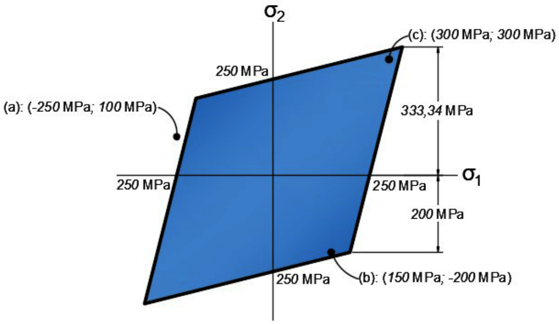
Analogamente, para o segundo e quarto quadrantes a Equação 4.67 governa:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{últ}}{1+v} \qquad \text{(Eq. 4.67)}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{250}{1+0,25} = 200 \text{ MPa} \qquad (2)$$

A partir desses dados podemos construir o diagrama da Figura 4.31. Agora basta plotar as tensões dadas na Figura 4.30. Fique atento à convenção de sinais para os estados planos de tensões: setas apontando para dentro do estado plano de tensões significa tensão de compressão, setas apontando para fora do estado plano de tensões significa tensão de tração.

Figura 4.31 | Diagrama de falha para a teoria da maior deformação linear



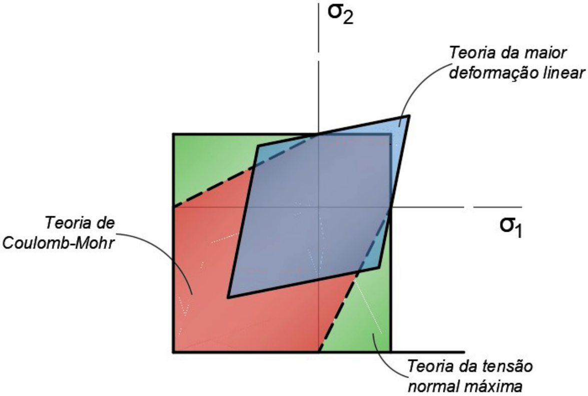
Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme pode ser visto no gráfico, os pontos (b) e (c) estão dentro da área considerada segura e, portanto, não há falha. Já o ponto (a), está fora da área segura e, portanto, pelo método da maior deformação linear, o material irá falhar.

Comparação entre os Critérios

A comparação das teorias de falha para materiais frágeis é exibida na Figura 4.32. Considerando um material com tensão última de compressão maior que a tensão última de tração, no primeiro e terceiro quadrantes, as teorias da tensão normal máxima e de Coulomb-Mohr apresentam exatamente o mesmo resultado. A teoria da maior deformação linear apresenta resultado maior que as outras. Note que nas três teorias, quando as tensões principais são iguais a tensão última de tração ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{últ}^T$) os resultados de falha são os mesmos, porém, a teoria da maior deformação linear não leva em consideração materiais com diferentes tensões últimas para compressão e tração, limitando fortemente o seu uso. Quando uma das tensões principais é zero ($\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$) e a outra é igual a tensão última ($\sigma_1 = \sigma_{últ}$ ou $\sigma_2 = \sigma_{últ}$), as teorias da tensão normal máxima e de Coulomb-Mohr apresentam resultados iguais. As maiores discrepâncias ocorrem no segundo e quarto quadrantes, onde as tensões principais são uma de tensão e outra de compressão.

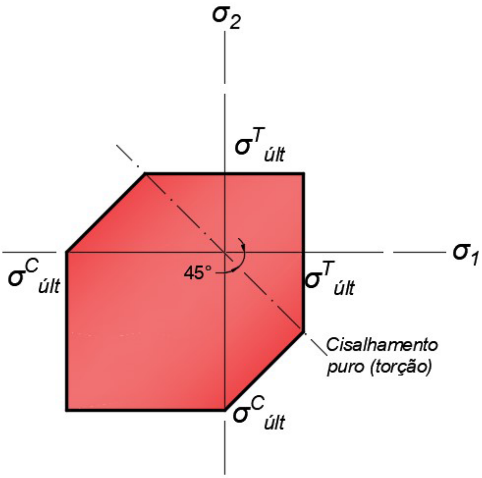
Figura 4.32 | Comparação das teorias de falha para materiais frágeis



Fonte: elaborada pelo autor.

Existe ainda uma outra teoria, desenvolvida a partir de uma modificação da teoria de Coulomb-Mohr, representada na Figura 4.33. Ela é baseada no fato de que em um material frágil, a resistência ao cisalhamento é similar a resistência a tração. Na teoria de Coulomb-Mohr é previsto um valor conservador no cisalhamento máximo; já na teoria da tensão normal máxima isso é previsto com precisão. Portanto, essa versão modificada admite que, na situação de cisalhamento puro (torção), a resistência do material é igual a resistência a tração.

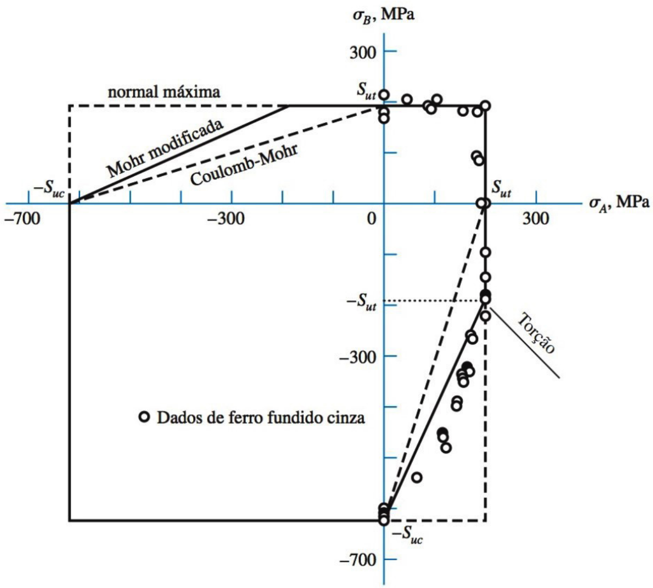
Figura 4.33 | Diagrama de falha para a teoria de Coulomb-Mohr modificada



Fonte: elaborada pelo autor.

Os dados experimentais para um ferro fundido cinza são apresentados na Figura 4.34, com a representação gráfica das teorias norma máxima, de Coulomb-Mohr e de Mohr modificada. Note que no 1º quadrante, todas as teorias apresentam resultados coerentes com a prática. Entretanto, no 3º quadrante a teoria da tensão normal máxima não pode ser considerada segura, pois os dados experimentais de falha, indicados pelos círculos vazados, se situam dentro da área do gráfico. Por outro lado, a teoria da Coulomb-Mohr é conservadora, pois os dados experimentais situam-se muito fora da área do seu gráfico. Por sua vez, a teoria de Mohr modificada é a que apresenta resultados mais coerentes com os dados experimentais.

Figura 4.34 | Teorias de falha comparadas com dados experimentais de um ferro fundido cinza



Fonte: Budynas e Nisbett (2016, p. 248).

Assimile

A utilidade prática das teorias apresentadas para verificar a falha de um material frágil é bastante limitada. Qualquer uma poderia ser usada, mas alguns fatores reais deveriam ser levados em consideração. A fratura de um material frágil se inicia nos pequenos defeitos naturais na microestrutura do material, que causam uma concentração de tensões onde a primeira fratura irá surgir. Por isso, é muito difícil prever por um único método o comportamento de diversas peças de um mesmo material, pois os defeitos podem variar muito de uma peça para outra.

Note que os dados experimentais, exibidos na Figura 4.34, apresentam certa dispersão. Isso está relacionado com os defeitos internos do material, que nunca são perfeitamente idênticos, causando valores variáveis de ruptura. Devido a esse fato, são aplicados fatores de segurança, para garantir a confiabilidade do material.

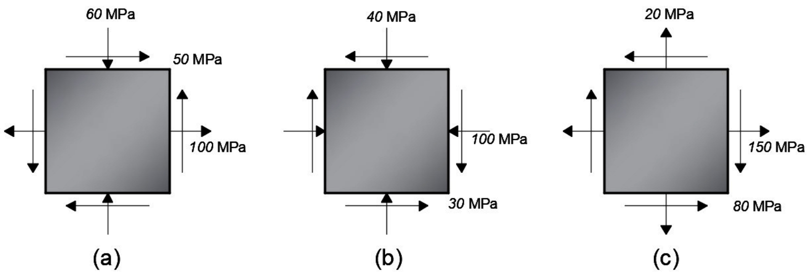
Reflita

Você consegue explicar porque as teorias apresentadas nessa seção não podem ser utilizadas em materiais dúcteis? Qual das teorias apresentadas você acha que poderia ser aplicada em materiais dúcteis? Por quê? Discuta com seus colegas e o professor.

Sem medo de errar

Lembre-se que sua empresa foi contratada para fazer uma análise de falha de um piso elevado feito de estrutura metálica, apresentada na Figura 4.1. Você analisou os carregamentos aplicados nas três vigas e chegou ao estado de tensão biaxial do ponto mais crítico de cada uma das vigas exibido na Figura 4.14, porém na sua verificação de falha pelos critérios para materiais dúcteis, umas das vigas sofreria falha. Devido a isso, seu chefe solicitou que você fizesse as mesmas verificações, utilizando a teoria de Coulomb-Mohr, se um material frágil fosse usado no lugar do aço, o ferro fundido. Considere que o ferro fundido tem a tensão última na tração $\sigma_{últ}^{T} = 300\text{ MPa}$ e a tensão última na compressão $\sigma_{últ}^{C} = 700\text{ MPa}$.

Figura 4.14 | Estado plano de tensões para as vigas AB (a), BC (b) e CD (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

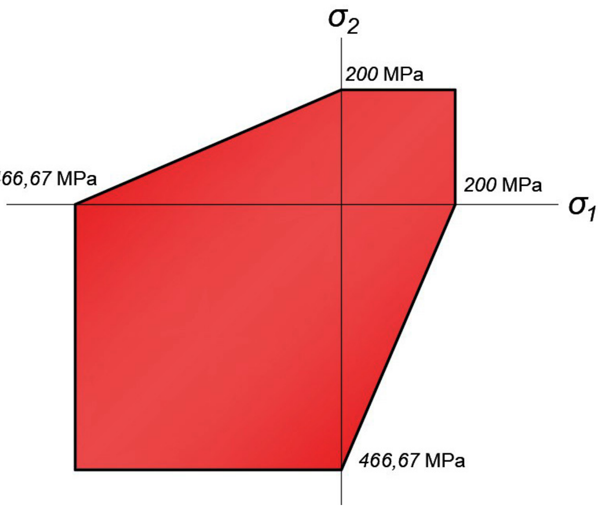
O passo inicial é calcular as tensões admissíveis para tração e compressão, aplicando o fator de segurança:

$$\sigma_{últ}^{T} = \frac{\sigma_{últ}^{T}}{FS} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ MPa} \qquad (1)$$

$$\sigma_{últ}^{C} = \frac{\sigma_{últ}^{C}}{FS} = \frac{700}{1,5} = 466,67 \text{ MPa} \qquad (2)$$

Agora podemos construir o diagrama de falha pela teoria de Coulomb-Mohr. Basta adicionar a ambos os eixos as tensões últimas calculadas em (1) e (2). O diagrama é exibido na Figura 4.35.

Figura 4.35 | Diagrama de falha pela teoria de Coulomb-Mohr da situação-problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se que nós sabemos da situação problema anterior, e as tensões principais atuantes em cada estado plano de tensões. Assim, temos que as tensões principais para a viga AB são:

$$\sigma_1 = 114{,}34 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_2 = -74{,}34 \text{ MPa} \qquad (3)$$

Como as tensões principais tem sinais opostos, podemos aplicar a Equação 4.58:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{últ}^T} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{últ}^C} = 1 \qquad \text{(Eq. 4.58)}$$

$$\frac{114{,}34}{200} - \frac{-74{,}34}{466{,}67} = 0{,}73 < 1 \qquad (4)$$

Portanto, pela teoria de Coulomb-Mohr a viga AB não sofrerá falha. Para a viga *BC* as tensões principais são:

$$\sigma_1 = -27{,}57 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_2 = -112{,}43 \text{ MPa} \qquad (5)$$

Como as tensões principais são ambas de compressão, devemos compará-las com a tensão última de compressão pela Equação 4.60:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{últ}^C \qquad \text{Eq. 4.60}$$

$$112{,}43 \text{ MPa} < 466{,}67 \text{ MPa} \qquad (6)$$

Portanto, pela teoria de Coulomb-Mohr a viga BC não sofrerá falha. Para a viga CD as tensões principais são:

$$\sigma_1 = 188{,}08 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_2 = -18{,}08 \text{ MPa} \qquad (7)$$

Como as tensões principais tem sinais opostos, podemos aplicar a Equação 4.58:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{últ}^T} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{últ}^C} = 1 \qquad \text{(Eq. 4.58)}$$

$$\frac{188{,}08}{200} - \frac{-18{,}08}{466{,}67} = 0{,}98 < 1 \qquad (8)$$

Portanto, pela teoria de Coulomb-Mohr a viga CD não sofrerá falha. Dessa forma, utilizando o ferro fundido, nenhuma das vigas sofrerá falha.

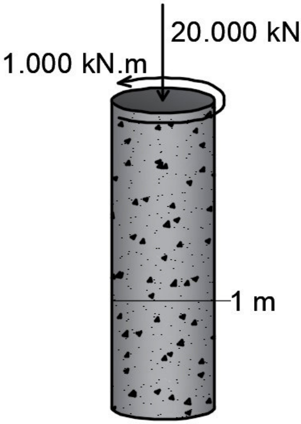
Avançando na prática

Determinação da resistência a compressão de um pilar de concreto

Descrição da situação-problema

Um pilar circular de concreto simples com diâmetro de 1000 mm está sujeito a uma força normal de 20.000 kN e uma torção de 1000 kN.m, conforme exibido na Figura 4.36. Qual deve ser a resistência a compressão nominal do concreto, sabendo que sua resistência a tração vale 10% da resistência a compressão. Utilize um fator de segurança de 1,45 e a teoria de Coulomb-Mohr.

Figura 4.36 | Pilar de concreto sob carga axial e torção



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

O estado de tensões no pilar é causado pela força axial e pela torção. Assim, devemos calcular as tensões devido a essas cargas:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-20 \times 10^6}{\frac{\pi}{4}(1)^2} = -25,46 \text{ MPa} \qquad (1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{1 \times 10^6 \cdot (1/2)}{\frac{\pi}{32}(1)^4} = 5,09 \text{ MPa} \qquad (2)$$

Da resistência dos materiais, sabemos que as tensões principais podem ser encontradas através da seguinte equação:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \qquad (3)$$

Substituindo os termos:

$$\sigma_{1,2} = \frac{-25,46 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-25,46 - 0}{2}\right)^2 + 5,09^2} \qquad (4)$$

$$\sigma_1 = 0,98 \text{ MPa} \ \text{ e } \ \sigma_2 = -26,45 \text{ MPa} \qquad (5)$$

Como as tensões principais tem sinais opostos, podemos aplicar a Equação 4.58, sabendo que $\sigma_{últ}^{T} = 0,1 \cdot \sigma_{últ}^{C}$:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{últ}^{T}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{últ}^{C}} = 1 \qquad \text{(Eq. 4.58)}$$

$$\frac{0,98}{0,1 \cdot \sigma_{últ}^{C}} - \frac{-26,45}{\sigma_{últ}^{C}} = 1 \qquad (6)$$

$$\sigma_{últ}^{C} = 0,98 \cdot 10 + 26,45 = 36,25 \text{ MPa} \qquad (7)$$

Aplicando agora o fator de segurança:

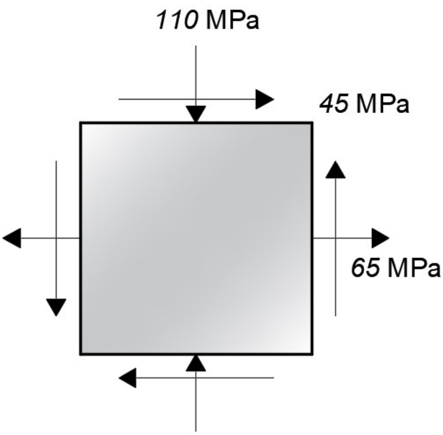
$$\sigma_{últ}^{C} = 36,25 \cdot 1,45 = 52,56 \text{ MPa} \qquad (8)$$

Portanto, o concreto utilizado deve ter uma resistência nominal maior que 53 MPa.

Faça valer a pena

1. As tensões componentes de um estado plano de tensões num ponto crítico de um tubo de alumínio fundido é exibido na Figura 4.37. Considere a tensão última na tração $\sigma_{últ}^{T} = 160 \text{ MPa}$ e a tensão última na compressão $\sigma_{últ}^{C} = 320 \text{ MPa}$.

Figura 4.37 | Estado de tensão biaxial de elemento de tubo de ferro fundido



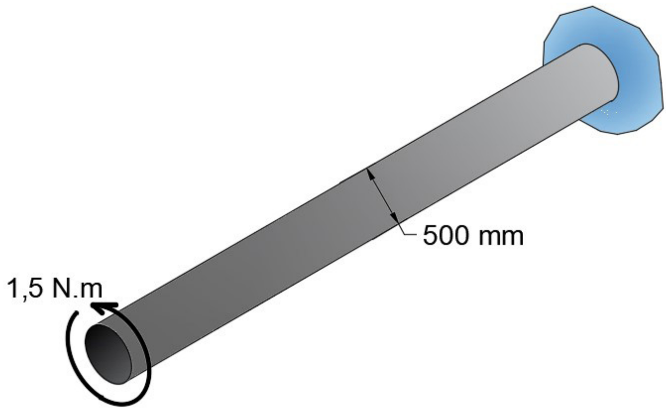
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine pela teoria de Coulomb-Mohr o coeficiente de falha e se o elemento falhará.

a) 0,85 – não falha.
b) 0,75 – não falha.
c) 0,20 – não falha.
d) 1,44 – falha.
e) 1,52 – falha.

2. Uma barra de um material frágil mostrado na Figura 4.38 está sujeito a um torque $T = 1{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}$. O fator de segurança em relação a falha é 1,45 e a tensão última na tração e na compressão é $\sigma_{últ} = 150\ \text{MPa}$.

Figura 4.38 | Tubo de aço sob torção



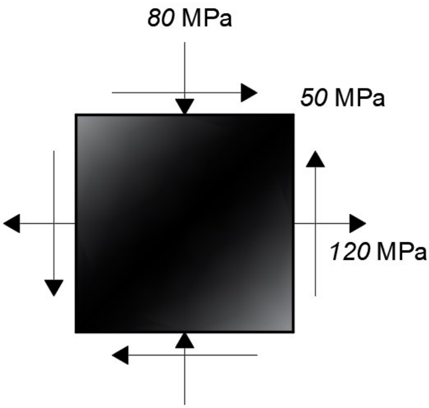
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine pelos critérios da tensão normal máxima, de Coulomb-Mohr e da maior deformação linear se a barra irá falhar.

a) Falha; não falha; não falha.
b) Não falha; falha; não falha.
c) Não falha; não falha; não falha.
d) Não falha; falha; falha.
e) Falha; falha; falha.

3. O estado plano de tensão de uma estrutura de ferro fundido, no ponto onde se concentram as tensões máximas atuantes, é exibido na Figura 4.39. Considere a tensão última na tração $\sigma_{últ}^{T} = 250\ \text{MPa}$ e a tensão última na compressão $\sigma_{últ}^{C} = 650\ \text{MPa}$.

Figura 4.39 | Estado de tensão biaxial de elemento de tubo de ferro fundido



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine o fator de segurança quanto a falha pela teoria da tensão principal máxima e pela teoria de Coulomb-Mohr, respectivamente.

a) 1,90 e 1,62.
b) 2,72 e 1.50.
c) 1,84 e 1,62.
d) 1,50 e 1,90.
e) 1,90 e 1,50.

Referências

BEER, F. P. (ed.). **Mechanics of materials.** 7. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de máquinas de Shigley.** 10. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2016.

CRAIG, R. R. **Mecânica dos materiais.** 2. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2017.

HIBBELER, R. C. **Mechanics of materials.** 9. ed. Boston: Prentice Hall, 2014.

JUVINALL, R. C.; MATSHEK, K. M. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas.** 5. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2016.

PHILPOT, T. A. **Mecânica dos materiais: um sistema integrado de ensino.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

RILEY, W. F.; STURGES, L., D.; MORRIS, D., H. **Mecânica dos materiais.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

UGURAL, A. C. **Mecânica dos materiais.** 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

ISBN 978-85-522-1175-4

9 788552 211754 >