Pesquisa operacional: programação matemática

Pesquisa operacional: programação matemática

Igor Polezi Munhoz
Roberto Masahiko Aoki

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Munhoz, Igor Polezi
M963p Pesquisa operacional: programação matemática / Igor Polezi Munhoz, Roberto Masahiko Aoki. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
216 p.

ISBN 978-85-522-0690-3

1. Engenharia. 2. Programação. I. Munhoz, Igor Polezi. II. Aoki, Roberto Masahiko. III. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 |Modelagem na tomada de decisão — **7**

Seção 1.1 - Introdução à pesquisa operacional — 9
Seção 1.2 - Introdução à modelagem em pesquisa operacional — 23
Seção 1.3 - Construção de modelos em pesquisa operacional — 36

Unidade 2 | Programação linear, dualidade e sensibilidade — **51**

Seção 2.1 - Introdução à programação linear — 53
Seção 2.2 - Método simplex — 68
Seção 2.3 - Dualidade e análise de sensibilidade — 84

Unidade 3 | Software de otimização: uso do solver do Excel — **101**

Seção 3.1 - Uso do solver na resolução de problemas de pesquisa operacional — 103
Seção 3.2 - Problema de transportes — 122
Seção 3.3 - Problema de designação — 145

Unidade 4 | Programação inteira — 163

Seção 4.1 - Introdução à programação inteira — 165
Seção 4.2 - Soluções em programação inteira — 179
Seção 4.3 - Programação inteira mista e binária — 198

Palavras do autor

Caro aluno, neste momento inicial você pode se indagar a respeito do motivo de estudarmos a pesquisa operacional, especificamente a programação matemática, bem como a sua aplicação nos diferentes ramos de atividades da sociedade. Uma simples reflexão pode trazer à luz a resposta para a sua pergunta: seja por meio de uma conduta racional, seja por meio de uma conduta emocional, a todo o instante estamos tomando decisões que, por sua vez, estão vinculadas a variáveis e a restrições que se integram na constituição de um processo decisório. Na tomada de decisão, todos buscam alcançar uma melhor solução, certo?

Assim, por caminhos diferentes e muitas vezes peculiares, os indivíduos buscam soluções ótimas para seus problemas a fim de se ter resultados assertivos. É exatamente sob essa perspectiva que se insere a pesquisa operacional: programação matemática, sendo aplicada em empresas dos mais diferentes setores, como indústrias, transporte, comércio, mercado financeiro, entre outros, a fim de buscar otimizar as soluções diante dos mais diversos problemas. Logo, observa-se a importância dessa área na sua atuação profissional, desde uma função estratégica operacional até a função de gestor ou administrador que requer alta tomada de decisão.

Em razão disso, iniciaremos nosso estudo, na Unidade 1, por meio do entendimento da pesquisa operacional como ferramenta gerencial e seu papel na tomada de decisão. Entenderemos a importância dos modelos, bem como seus tipos, processo de modelagem e teste de modelos. Assim, na primeira unidade pretende-se que você possa conhecer e saber analisar criticamente o uso de modelos em pesquisa operacional

Já na Unidade 2, estudaremos os conceitos e aplicação da programação linear, além do funcionamento do método simplex. Aprenderemos a teoria da dualidade e saberemos como desenvolver análise de sensibilidade em pesquisa operacional. Na Unidade 2, espera-se que você consiga formular e implementar um modelo de programação linear para resolução de problemas de pesquisa operacional

Na Unidade 3, teremos contato com um conteúdo aplicado, englobando a assimilação do uso da ferramenta Solver do Excel e o estudo de problemas de transporte e de designação. Por meio do estudo desta unidade, você vai ser capaz de formular e resolver problemas de transportes e designação em pesquisa operacional.

Finalizaremos nosso estudo na Unidade 4, abrangendo a assimilação dos conceitos de programação inteira, abrangendo os conceitos e algoritmos de solução. Nesta unidade, espera-se que você consiga analisar criticamente e resolver problemas de programação inteira.

Perceba que o autoestudo será fundamental, visando à assimilação do conteúdo e à aplicação das melhores práticas de pesquisa operacional do mercado.

Caro aluno, diante de um cenário repleto de boas perspectivas para a área de pesquisa operacional como ferramenta gerencial, esperamos que você se sinta motivado a dedicar seu tempo e seus esforços em um estudo com viés aplicado, que lhe proporcionará chances reais de assimilar os conceitos e as técnicas que você utilizará na sua vida profissional.

Logo, tenha um excelente estudo e seja ativo, a partir de agora, na construção do seu próprio conhecimento!

Modelagem na tomada de decisão

Convite ao estudo

Caro aluno, na Unidade 1, nosso estudo será iniciado por meio do entendimento da pesquisa operacional como ferramenta gerencial e seu papel na tomada de decisão, abrangendo, inclusive, a evolução histórica dessa área, a fim de que você compreenda como começaram os estudos em pesquisa operacional.

Posteriormente, entenderemos a importância do uso de modelos em pesquisa operacional, bem como seus tipos, as fases do processo de modelagem e teste desses modelos.

Então, você verá como construir modelos matemáticos em pesquisa operacional, de acordo com as variáveis de decisão e restrições, e aprenderá a implementar os resultados.

Assim, na primeira unidade, pretende-se que você possa conhecer e saber analisar criticamente o uso de modelos em pesquisa operacional, sendo esse o aspecto fundamental para a sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa de eletrônicos está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes. Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, como você explicaria ao seu gestor o modo por meio do qual a pesquisa operacional contribuirá nesse processo de tomada de decisão?

Para que a pesquisa operacional possa ser aplicada nesse contexto, quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Para a construção do modelo matemático você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Reflita sobre essas indagações e se empenhe no estudo do material a fim de conseguir aplicar esses conhecimentos com sabedoria e de forma efetiva no mercado de trabalho!

Tenha um ótimo estudo!

Seção 1.1

Introdução à pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, iniciaremos nosso estudo a partir de uma perspectiva histórica, refletindo sobre o contexto e perspectiva de surgimento desta área.

Então, exploraremos o uso da pesquisa operacional como ferramenta gerencial, bem como o seu papel na tomada de decisão.

Esse estudo inicial é essencial a fim de você entender a partir de qual demanda surgiu a pesquisa operacional e vislumbrar a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa de eletrônicos está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes. Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução deste problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional. Cabendo a você esse desafio, como você explicaria ao seu gestor o modo por meio do qual a pesquisa operacional contribuirá nesse processo de tomada de decisão? Utilizando o conceito de otimização, reflita sobre essa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, vamos iniciar o nosso estudo de pesquisa operacional entendendo um pouco melhor sobre o seu histórico e contextualização.

Sabemos que desde a Revolução Industrial houve um crescimento acentuado tanto no tamanho quanto na complexidade das organizações. O trabalho, que até então era basicamente artesanal, passou por profundas mudanças para atender todas as novas necessidades e anseios da população e das organizações.

Para termos uma ideia de quão profundas foram essas transformações, vamos analisar um indicador: o consumo de energia pela humanidade. No início dos anos 1700 já existiam alguns geradores de energia a vapor que tinham uma potência média 4.000 watts. Em 1850, logo após a transição marcada pela Revolução Industrial, os geradores já produziam na ordem de 600.000 watts, ou seja, em menos de 150 anos a capacidade dos geradores de energia aumentou também em aproximadamente 150 vezes. E de lá até hoje o aumento foi ainda mais significativo: atualmente, por exemplo, a Usina de Itaipu, que é a hidrelétrica com maior produção de energia elétrica no mundo, tem uma potência instalada de 14.000 megawatts, ou seja, mais de 20 mil vezes a capacidade de um gerador em 1850.

Mas por que tudo isso é importante? O aumento do uso da energia está relacionado ao desenvolvimento da sociedade, o que fez com que novas necessidades surgissem. A produção artesanal não era mais suficiente, o que fez com que a complexidade nos sistemas produtivos crescesse.

A alocação de recursos passou a ser um grande problema, uma vez que com uma maior complexidade fica mais difícil destinar os recursos disponíveis para todas as atividades de modo eficiente. Esse contexto gerou um ambiente propício ao emprego da pesquisa operacional, que usualmente chamaremos de PO.

No entanto, a origem da PO, como nós conhecemos hoje, remonta ao início da Segunda Guerra Mundial. Como assim? O que ocorria na Segunda Guerra que trouxe à tona o conceito de PO? Como vocês devem saber, o ambiente de guerra favorece o surgimento de muitas técnicas e tecnologias, mas nesse caso em especial podemos destacar a necessidade de um planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros. Esses recursos escassos deveriam ser alocados em diversas operações militares, portanto, poderiam ditar o sucesso ou o fracasso nas batalhas.

A necessidade de um planejamento científico para a alocação dos recursos fez com que os comandos norte-americano e britânico escalassem diversos cientistas da época para prover uma solução adequada para esse problema. A questão central aqui seria: como alocar eficientemente os recursos escassos?

Da situação descrita anteriormente surgiu o nome pesquisa operacional, ou seja, foram executadas pesquisas relacionadas às operações militares, e os resultados relacionam-se com o desenvolvimento de diversos métodos eficientes de alocação, o que aliás contribuiu de modo significativo na vitória da Batalha do Atlântico Norte com o uso do radar, combinado às estratégias de administração de operações antissubmarinos.

Nesse contexto, surgiu também o método simplex, que é um algoritmo de otimização que abordaremos futuramente. O simplex foi desenvolvido por George B. Dantzig na década de 1940, enquanto ele trabalhava no Pentágono planejando e programando atividades militares, e foi um dos marcos da PO, sendo Dantzig considerado o pai da programação linear.

No entanto, a aplicação da PO não ficou restrita ao mundo militar, uma vez que a guerra acabou e os problemas das indústrias pós-guerra voltaram a tomar força. A aplicação dos conhecimentos gerados na guerra começou a se disseminar nos anos 1950 em diversas organizações, pois, embora o contexto fosse diferente, os problemas de tomada de decisão eram os mesmos enfrentados pelos militares.

Logo em seguida, outras principais contribuições surgiram, como a própria Teoria das Filas (veremos mais para frente neste livro), que já se encontrava bem desenvolvida antes do final da década de 1950.

Contudo, uma coisa ainda limitava o uso da PO em problemas complexos: a quantidade de cálculos necessários para obtenção da solução. O advento da revolução computacional contribuiu de forma significava para ampliar o uso da PO, uma vez que o desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que os executados pelo homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

O acesso à PO foi se intensificando cada vez mais e, hoje, a grande maioria da população consegue utilizar com facilidade softwares que empregam os conceitos de otimização em computadores pessoais, como o Solver do Microsoft Excel, que veremos com mais detalhes adiante.

Pesquise mais

Caro aluno, vamos nos aprofundar um pouco mais sobre o histórico da pesquisa operacional?

Vale a pena ler na Seção 1.2 (Origens da pesquisa operacional) do livro *Introdução à pesquisa operacional* de André Longaray, na qual o autor apresenta uma cronologia detalhada da origem da pesquisa operacional. Indicamos a leitura das páginas 4 à 6.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013. Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000005844>. Acesso em: 30 ago. 2017.

Como vimos anteriormente, o objetivo da pesquisa operacional é otimizar a alocação de recursos escassos, e isso teve um impacto significativo em diversas organizações no mundo, pois trouxe um meio passível de ser aplicado para aumentar a produtividade das empresas e a economia de muitos países.

Portanto, podemos destacar o uso da PO como uma ferramenta gerencial, dada a sua importância e as suas possíveis aplicações que podem trazer impactos significativos para a gestão empresarial.

Exemplificando

Vamos ver alguns exemplos de aplicações da PO em algumas organizações que obtiveram êxito?

Hillier e Lieberman (2013) apresentam vários casos de sucesso, valendo citar alguns exemplos em diversos segmentos.

Empresas aéreas:

- United Airlines: aplicou os conceitos de PO para ajustar os turnos de trabalho e conseguiu uma economia anual de 6 milhões de dólares.
- Continental Airlines: aplicou os conceitos de PO para realocar tripulantes nas diferenças de horários de voos e conseguiu uma economia anual de 40 milhões de dólares.

Instituições financeiras e de serviços:

- Merrill Lynch: utilizou os conceitos de PO para realizar a gestão de riscos em algumas linhas de crédito e economizou 4 bilhões de dólares, sem contar a liquidez.
- Federal Express: aplicou os conceitos de PO para executar o planejamento logístico dos despachos (valor economizado não informado).

Indústrias:

- Samsung Electronics: aplicou a PO para reduzir o tempo de fabricação e a quantidade estocada, levando a um aumento de 200 milhões de dólares nas receitas.
- Procter & Gamble: utilizou a PO no sistema de produção e na distribuição, economizando mais de 200 milhões de dólares.
- General Motors: aplicou os conceitos de PO para otimizar a eficiência das suas linhas produtivas e conseguiu gerar uma economia anual de 90 milhões de dólares.

Se pensarmos no objetivo da pesquisa operacional e analisarmos as aplicações apresentadas anteriormente, concluíremos que a PO é fundamental no processo de tomada de decisão. Como assim?

Vamos então compreender primeiro o conceito de tomada de decisão, que de acordo com Lachtermacher (2016) é identificar um problema (ou oportunidade) e escolher uma forma de resolvê-lo. O problema ocorre quando o estado atual de um cenário é diferente do esperado e a oportunidade se dá no momento em que as circunstâncias permitem que metas ou objetivos sejam superados.

De modo complementar, a definição de decisão segundo Chiavenato (2003, p. 348) remete ao “processo de análise e escolha entre as alternativas disponíveis de cursos de ações que a pessoa deverá seguir”.

A importância das decisões tomadas é evidente em diversas aplicações, desde a sua vida pessoal, com escolhas rotineiras em diferentes níveis de complexidade, até a gestão de empresas e nações, envolvendo sempre um decisor e diversas opções de caminhos a serem seguidos.

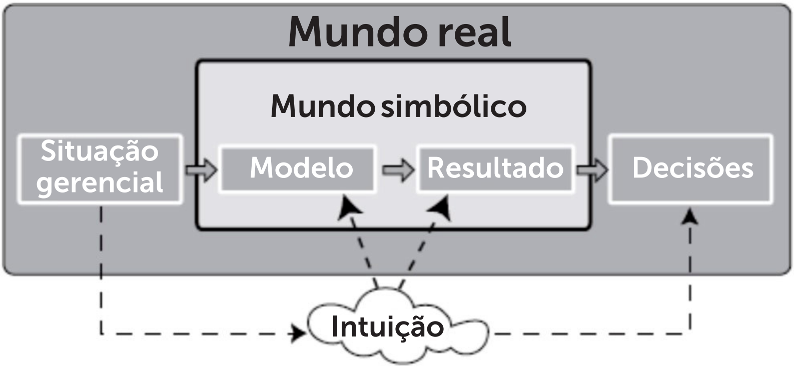
Mas como a pesquisa operacional pode nos ajudar com o processo de escolha?

Tão importante quanto a decisão tomada é o processo que vem antes dela, ou seja, aquilo que vai gerar as ações que podem melhorar o problema, também chamado de processo decisório.

A PO é a ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios.

Ao fazer a alocação adequada dos recursos escassos, estamos na verdade tomando uma decisão, como visto nas aplicações anteriores. A Figura 1.1 representa de modo esquemático o processo de tomada de decisão.

Figura 1.1 | Processo de tomada de decisão



Fonte: Lachtermacher (2016, p. 3) .

Como pode ser observado na Figura 1.1, uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do uso do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Logo, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um método científico de tomada de decisão. Ou seja, como objetivo, o fundamento da PO é otimizar o resultado através de métodos puramente científicos.

Assimile

Caro aluno, vale ressaltar que, quando se pensa na pesquisa operacional em sua essência de aplicação, parte-se do princípio do uso de técnicas e métodos científicos quantitativos, e estes, quando inseridos e desenvolvidos no ambiente organizacional, são analisados por equipes multidisciplinares (isto é, equipe formada por profissionais de diferentes áreas, como administradores, engenheiros, economistas, time de marketing e vendas, equipe de projetos, entre outros), o que confere um enfoque sistêmico à tomada de decisão.

Dessa forma, buscando uma visão mais objetiva e sistêmica (geral e interligada) das atividades, ações, estruturas e, também, dos recursos que serão utilizados para alcançar os objetivos da empresa, as decisões deixam de ser realizadas somente sob o ponto de vista de uma especialidade (marketing, produção, financeiro, etc.), passando a serem desenvolvidas de forma a considerar resultados mais amplos para a organização.

É justamente essa visão sistêmica que permite ao decisor ter um entendimento macro do problema e alinhar a tomada de decisão, utilizando a pesquisa operacional com a estratégia da empresa.

Assim, atualmente faz parte do enfoque da pesquisa operacional um cuidado para se assegurar uma compreensão mais aprofundada (diagnóstico assertivo) do cenário no qual o problema se encontra, possibilitando um melhor reconhecimento dos elementos internos à organização e sua interação com o ambiente externo.

Se observarmos ao nosso redor, é sabido sobre a alta competitividade e reinante dinamismo no mercado, não somente no âmbito local, mas também globalmente, requerendo, a todo o instante, esforços das diversas organizações para se destacarem em relação à concorrência, seja na melhoria do seu produto/serviço, redução de preço, minimização de processos, entre outros.

Nesse sentido, um dos meios de se obter vantagem competitiva se faz por um processo de tomada de decisão rápido, isto é, é a rapidez nas decisões empresariais com baixíssimas margens de erros, de maneira plenamente eficaz e efetiva, torna-se um mecanismo de diferenciação no mercado. Neste cenário, a PO proporciona ao decisor melhor conhecimento do real problema em análise.

Reflita

Vamos refletir na aplicação da pesquisa operacional na tomada de decisões?

Pense: quais exemplos pessoais você acha que poderia empregar a pesquisa operacional?

Prezado aluno, você deve ter reparado que citamos diversas vezes ao longo da nossa seção a palavra otimização, mas será que está claro para você o real significado desse termo? Então vamos tentar entender melhor o que é otimização e sua aplicação em PO.

A primeira pergunta que podemos nos fazer é: será que otimização é somente obter a melhor solução? Observamos que buscar uma solução ótima é um ideal comum na PO e mostraremos ao longo dos nossos estudos diversos métodos para encontrarmos esse tipo de solução para alguns problemas.

Contudo, primeiro temos que entender uma coisa fundamental: nós trabalhamos com modelos porque eles são uma representação simplificada da realidade, pois além do nível de complexidade da realidade, têm alguns parâmetros que podem exercer alguma influência no comportamento real, mas que não nos interessam. É evidente que quanto mais o modelo se aproximar da realidade, mais complexo será e mais difícil para obter a solução ótima, necessitando, para tanto, de um maior processamento.

Vamos pensar num exemplo cotidiano: você pode se perguntar se amanhã vai chover. Existem inúmeros modelos matemáticos, cada um com a sua complexidade, para tentar responder a esta pergunta com a chance de chuva no dia seguinte. Os telejornais normalmente apresentam a previsão do tempo, que nada mais é do que o resultado da análise desses modelos, no entanto, se formos considerar todas as variáveis envolvidas na possibilidade de chuva no dia seguinte, provavelmente teremos um modelo tão complexo e detalhado que ele não terá serventia alguma. O mais interessante seria levar em conta as variáveis mais relevantes e mais determinantes para o nosso problema de previsão do tempo para que o modelo seja possível de ser solucionado com os recursos de processamento disponíveis.

Mas por que isso é relevante para o problema de otimização?

Sabemos que na PO lidamos com modelos, que são uma abstração da realidade, portanto não podemos garantir que uma solução ótima para um modelo será a melhor possível na realidade se for implementada. Se o modelo tiver uma boa formulação e for adequadamente testado, a solução encontrada será uma boa aproximação para o resultado real, como no exemplo da previsão do tempo.

Hillier e Lieberman (2013) destacam que existem duas situações a serem analisadas: satisfatório e otimização. Devemos levar em conta que por vezes pode ser mais interessante procurar uma solução que seja satisfatória, ou seja, suficientemente boa, do que uma solução ótima para o modelo e que não possa ser implementada ou que não seja o ideal para o problema real. Dessa forma, vamos estudar com cuidado o processo de modelagem, pois ele será essencial nos nossos estudos de PO daqui em diante.

Sem medo de errar

Como vimos anteriormente, essa empresa já está atuando há 20 anos no mercado, no entanto um dos seus principais problemas é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais.

O seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você então esse desafio, para convencer o seu gestor sobre a eficiência da pesquisa operacional e explicar o modo por meio do qual a PO pode contribuir no processo de tomada de decisão, a primeira coisa que você deve pensar é sobre a agenda da sua apresentação, que contaria com os seguintes itens:

1. *Apresentar, de modo breve, o surgimento da pesquisa operacional. Neste item, caberia destacar o contexto no qual a PO*

surgiu, que era um ambiente de guerra no qual seria fundamental uma boa alocação de recursos para o sucesso no confronto.

Assim, você deve salientar que a origem da PO, como nós conhecemos hoje, remonta ao início da Segunda Guerra Mundial, ou seja, o ambiente de guerra favoreceu a necessidade de um planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros. Esses recursos escassos deveriam ser alocados em diversas operações militares, portanto poderiam ditar o sucesso ou o fracasso nas batalhas.

A necessidade de um planejamento científico para a alocação dos recursos fez com que os comandos norte-americano e britânico escalassem diversos cientistas da época para prover uma solução adequada para esse problema. Da situação descrita anteriormente surgiu o nome pesquisa operacional.

É interessante você salientar que a quantidade de cálculos necessários para obtenção da solução limitava o uso da PO, de modo que o advento da revolução computacional contribuiu de forma significava para ampliar o uso da PO, uma vez que o desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que os executados pelo homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos, como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

2. *O uso da pesquisa operacional. Neste segundo item cabe a você mostrar alguns casos de sucesso nos quais a pesquisa operacional trouxe significativas economias para a organização.*

Assim, na sua apresentação você poderia citar o exemplo da United Airlines, que aplicou os conceitos de PO para ajustar os turnos de trabalho e conseguiu uma economia anual de 6 milhões de dólares. No mercado financeiro, você poderia destacar que a Merrill Lynch utilizou os conceitos de PO para realizar a gestão de riscos em algumas linhas de crédito e economizou 4 bilhões de dólares, sem contar a liquidez.

3. *O conceito de otimização: aqui você explicará a necessidade de um processo de modelagem para aplicar o conceito de otimização para resolver o problema de definição do mix ótimo de produção, de modo que a solução encontrada possa ser implementada.*

Logo, vale começar explicando na sua apresentação que a PO lida com modelos, que são uma abstração da realidade. Se o modelo tiver uma boa formulação e for adequadamente testado, a solução encontrada será uma boa aproximação para o resultado real. Devemos levar em conta que por vezes pode ser mais interessante procurar uma solução que seja satisfatória, ou seja, suficientemente boa, do que uma solução ótima para o modelo e que não possa ser implementada ou que não seja o ideal para o problema real.

Desse modo, você conseguirá iniciar uma análise crítica do uso da modelagem em pesquisa operacional, aliando as suas competências com a prática.

Parabéns, você concluiu seu primeiro trabalho!

Avançando na prática

Enfoque sistêmico da tomada de decisão e o uso da PO

Descrição da situação-problema

Você foi contratado como consultor de uma empresa que aplica conceitos da pesquisa operacional em diversos problemas de transporte e logística. Em sua primeira demanda, o gestor lhe solicita para treinar novos operadores que aplicam técnicas de PO para a solução de problemas na área citada anteriormente, explicitando o enfoque sistêmico da tomada de decisão.

O que você colocaria na sua apresentação a fim de ressaltar a importância da visão sistêmica no processo de tomada de decisão e a relação disso com a PO, pensando no treinamento de novos operadores?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, é interessante você começar a sua apresentação ressaltando que uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Nesse sentido, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um método científico de tomada de decisão. Ou seja, como objetivo, o fundamento da PO é otimizar o resultado através de métodos puramente científicos.

Dessa forma, deixe claro em seu treinamento que a pesquisa operacional, em sua essência de aplicação, parte do princípio do uso de técnicas e métodos científicos quantitativos, e estes, quando inseridos e desenvolvidos no ambiente organizacional, são analisados por equipes multidisciplinares (isto é, equipe formada por profissionais de diferentes áreas, como administradores, engenheiros, economistas, time de marketing e vendas, equipe de projetos, entre outros), o que confere um enfoque sistêmico à tomada de decisão.

Dessa forma, buscando uma visão mais objetiva e sistêmica (geral e interligada) das atividades, ações, estruturas e, também, dos recursos que serão utilizados para alcançar os objetivos da empresa, as decisões devem deixar de ser realizadas somente sob o ponto de vista de uma especialidade (marketing, produção, financeiro, etc.), passando a serem desenvolvidas de forma a considerar resultados mais amplos para a organização.

É justamente essa visão sistêmica que permite ao decisor ter um entendimento macro do problema e alinhar a tomada de decisão, utilizando a pesquisa operacional com a estratégia da empresa.

Assim, os novos operadores devem atentar ao enfoque atual da pesquisa operacional, que busca assegurar uma compreensão mais aprofundada (diagnóstico assertivo) do cenário no qual o problema se encontra, possibilitando um melhor reconhecimento dos elementos internos à organização e sua interação com o ambiente externo.

Você colocaria algo a mais no seu treinamento?

Parabéns, mais um trabalho executado!

Faça valer a pena

1. Avalie o histórico da pesquisa operacional (PO), considerando as afirmações I, II e III.

I. A origem da PO remonta ao início da Segunda Guerra Mundial, pois o ambiente de guerra requeria planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros, impulsionando métodos de alocação eficiente de recursos escassos.

II. Na década de 1940, surgiu também o método simplex, que é um algoritmo de otimização que foi desenvolvido por George B. Dantzig, enquanto ele trabalhava no Pentágono planejando e programando atividades militares.

III. O advento da revolução computacional contribuiu de forma significava para ampliar o uso da PO, uma vez que o desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que o homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos, como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

Considerando as afirmações I, II e III, assinale a alternativa correta.

a) Somente I é correta.

b) Somente I e III são corretas.

c) Somente II é correta.

d) I, II e III são corretas.

e) Somente III é correta.

2. Avalie o texto abaixo sobre PO e a tomada de decisão.

Uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do uso do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Logo, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um __________ de tomada de decisão, prezando pelo ________ do processo de decisão.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas da frase.

a) Método científico; enfoque sistêmico.

b) Método indutivo; enfoque singular.

c) Método dedutivo; enfoque pluralista.

d) Método sistemático; enfoque sistêmico.

e) Método empírico; enfoque único.

3. Pensando na pesquisa operacional (PO) como ferramenta gerencial, considere as afirmações I e II.

I. A PO é uma ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios.

PORTANTO,

II. Podemos destacar o uso da PO como uma ferramenta gerencial, dada a sua importância e as suas possíveis aplicações que podem trazer impactos significativos para a gestão empresarial.

Considere as afirmações I e II, bem como a relação entre elas, e assinale a alternativa correta.

a) Somente I é correta.

b) Somente II é correta.

c) I e II são corretas, e II é consequência de I.

d) I e II são corretas, mas II não é consequência de I.

e) I e II não estão corretas.

Seção 1.2

Introdução à modelagem em pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, vamos agora explorar o uso de modelos em problemas aplicados a essa área.

Assim, inicialmente nesta seção estudaremos como definir um problema e coletar dados relativos a este, no âmbito da pesquisa operacional.

Então, veremos os tipos de modelos empregados nessa área, bem como as fases do processo de modelagem de um problema.

Também, a fim de melhorar seu processo de aprendizagem e assimilação de conceitos, serão explorados exemplos de problemas de pesquisa operacional e casos de sucesso.

Pensando na sua prática profissional, esses conteúdos são de fundamental importância, pois a definição, coleta de dados e modelagem do problema é o início e a base da resolução de desafios em pesquisa operacional!

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão.

Agora, para que a pesquisa operacional possa ser aplicada nesse contexto, quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que nós já conhecemos a história e os principais conceitos e usos da pesquisa operacional no processo de tomada de decisão, vamos iniciar o processo de modelagem em pesquisa operacional e, para isso, precisamos ter claro o que é a definição do problema e como fazer a coleta de dados.

Em primeiro lugar devemos ressaltar a importância da definição do problema. Parece algo simples e trivial de ser feito, mas veremos em breve que caso o problema não esteja bem estabelecido, procurar por uma solução para algo que não conhecemos bem será uma tarefa mais complexa.

O que significa então definir o problema?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013) definir o problema envolve o delineamento dos objetivos; o levantamento das restrições sobre o que pode e sobre o que deve ser feito; como aquele problema interage com outras áreas da empresa; se podem ser adotados caminhos diferentes; quanto tempo temos disponível para tomar a decisão; entre outros.

Repare que são vários fatores que devemos levar em conta para iniciar o nosso estudo de PO, sendo que a fase de definição do problema é crucial para o que virá adiante.

Você já se questionou se é possível encontrar uma resposta certa para o problema errado? Esse tipo de situação que tentaremos evitar.

Então vamos começar pelos objetivos; quais objetivos serão fundamentais para a definição do nosso problema? A primeira coisa que devemos fazer é verificar quem tomará as decisões e saber o que o decisor pensa a respeito das possibilidades. Isso é importante porque desconhecer o decisor e o pensamento dele a respeito daquela situação dificultará a implementação da solução que você encontrar.

Vamos ver um exemplo do dia a dia para você compreender melhor?

Imagine que um membro da sua família esteja em dúvida com relação à compra de um carro e buscou a sua ajuda para decidir se deve comprar um veículo ou não e qual modelo escolher. Então, nesse caso, o problema é decidir pela compra de um modelo específico. A primeira coisa que você deveria fazer é conversar com a pessoa que será responsável pela compra, aquele que tomará a decisão, e sondar o pensamento dele com relação ao propósito da aquisição. Talvez o objetivo seja gastar pouco dinheiro com combustível, ou seja, ter um carro econômico, ou pode ser que o propósito seja ter um veículo robusto para viajar, entre outras possibilidades.

Uma vez que você sondou o decisor e conseguiu definir o problema em questão, você começará a coletar as informações necessárias para o processo de tomada de decisão. Essa é uma tarefa bem delicada, pois às informações necessárias nem sempre são fáceis de serem obtidas; às vezes elas podem nem existir ou podem depender de pessoas ou processos a que você não tem acesso. Por isso, vale a pena lembrar do que foi dito na seção anterior, isto é, lembre-se de que nós trabalhamos com modelos porque eles são uma representação simplificada da realidade. Muitas vezes não é possível saber todos os dados, além de que não são todas as informações que serão relevantes para o nosso problema e que devem ser obtidas.

Voltando ao nosso exemplo, fica evidente que você precisa coletar todas as informações necessárias para a modelagem e a tomada de decisão, além das informações como as restrições e possíveis alternativas. Alguns dados que você poderia levantar junto ao seu familiar seriam a restrição de quanto gastar na aquisição, a distância mensal percorrida, o preço do combustível, o valor do seguro, entre outros que você julgar relevantes.

Pesquise mais

Prezado aluno, vamos nos aprofundar um pouco mais sobre a definição e a coleta de dados em pesquisa operacional?

Vale a pena ler a Seção 2.1, Definição de um Problema, do livro *Introdução à pesquisa operacional* de André Longaray, na qual o autor apresenta uma abordagem detalhada da definição, como perceber e identificar um problema e utilizar algumas ferramentas para tanto, como o Diagrama de Ishikawa.

Indicamos a leitura das páginas 29 a 34.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013. Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000005844>. Acesso em: 30 ago. 2017.

E como já falamos sobre modelos e já sabemos que a PO é a ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios, quais são os principais tipos de modelos de que nós dispomos?

Nós temos os modelos icônicos, que também podem ser chamados de concretos, modelos analógicos e modelos simbólicos, também chamados de abstratos.

Os modelos icônicos são aqueles que são construídos por meio de fatos da realidade, tal como o mapa da cidade de São Paulo, com a divisão dos bairros, apresentado na Figura 1.2.

Figura 1.2 | Mapa da cidade de São Paulo

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mapa_sp.png>. Acesso em 10 set. 2017

Os modelos analógicos são uma representação física de um fenômeno ou processo para que possamos entender adequadamente seu funcionamento ou origem. Por exemplo, um termômetro é um modelo analógico que tem como finalidade medir a temperatura, ou seja, por meio de um termômetro conseguimos representar um fenômeno físico e fazer uma medição.

Já os modelos abstratos são aqueles que serão aplicados na pesquisa operacional, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. No nosso caso, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema, conforme definimos anteriormente.

Exemplificando

Caro aluno, vamos pensar em um modelo matemático, ou seja, um tipo de modelo abstrato, com que frequentemente nos deparamos?

Você com certeza já deve ter se perguntado se naquele dia choveria, se faria calor ou frio, correto?

A previsão do tempo é o resultado de um modelo matemático complexo que analisa diversos fatores para responder se vai chover, fazer frio, calor ou um dia ensolarado.

Para que possamos executar adequadamente um estudo de pesquisa operacional é interessante que sejam seguidos alguns passos:

1. Formulação do problema: já vimos essa etapa anteriormente, é o momento de definir o problema e coletar os dados necessários.

2. Construção do modelo matemático: como já sabemos, utilizaremos um modelo simbólico que represente a realidade do nosso problema, ou seja, faremos uma modelagem matemática.

Mas por que utilizamos um modelo matemático para resolver os problemas de pesquisa operacional?

Além de ser uma representação simplificada da realidade, os modelos matemáticos podem revelar relacionamentos entre as variáveis que não seriam evidentes de outro modo e também permite o aprendizado por experimentação, ou seja, por tentativa e erro controlado.

3. Obtenção da solução: nesta etapa o foco é buscar uma solução para o problema e, para isso, devemos nos atentar a duas coisas:

a. Se o modelo for demasiadamente complexo, na maioria dos casos achar uma solução também será uma tarefa muito complexa.

b. Vocês se lembram de que mencionamos sobre o tempo disponível para tomar a decisão? Se o tempo para obter a solução for maior do que o tempo disponível para tomada de decisão, então essa solução não terá mais serventia alguma. Vale a pena ficar atento a isso, principalmente em problemas mais complexos nos quais buscar a solução também é uma tarefa complexa.

4. Teste do modelo e da solução: é importante que tanto o modelo quanto a solução sejam testados para verificar se todos os componentes foram incluídos no modelo e se ele pode ser executado. Em outras palavras, o teste do modelo e da solução levará em conta se o modelo foi construído corretamente.

5. Estabelecimento de controles sobre a solução: é importante relembrar que o modelo e sua consequente solução não são exatamente iguais à realidade, portanto devemos analisar se são necessários ajustes para que a solução seja implementada e funcione conforme esperado.

6. Implantação da solução: uma vez que todas as etapas anteriores foram concluídas, a solução pode ser empregada na prática para resolver o problema.

Exemplificando

As mesmas fases apresentadas anteriormente poderiam ser utilizadas em diversas outras aplicações. Vamos ver um exemplo do cotidiano?

Vamos supor que você tenha uma reserva de R$ 10 mil e queira investir o seu dinheiro, tendo duas opções com diferentes riscos e rentabilidades.

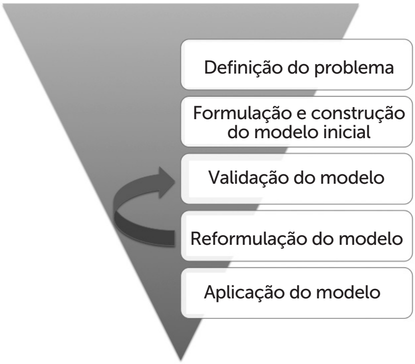
A primeira opção é deixar o dinheiro na poupança tendo um rendimento baixo, mas que em compensação também tem um baixo risco.

A outra opção é comprar ações na bolsa de valores, o que aumenta o rendimento, mas também aumenta significativamente o risco.

Nós conseguimos deixar bem claro qual é o problema que está sendo analisado. Agora precisamos saber mais informações sobre os investimentos para fazer uma avaliação e decidir como o dinheiro será empregado.

Com as informações, você terá condições de construir um modelo, que represente o seu problema real, para na sequência obter a solução. Antes de ir até o banco ou até uma corretora de ações, você ainda precisa testar o modelo e a solução. Em seguida você estabelece controles para a solução, que podem ser por exemplo em função do risco do investimento e por último coloca sua solução na prática.

Figura 1.3. | Processo de modelagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Vale a pena destacar, na Figura 1.3, que caso a etapa de validação não seja concluída de modo satisfatório, o modelo deverá ser reformulado e passar por nova validação, quantas vezes forem necessárias, até que esteja adequado para aplicação.

Reflita

Nós já entendemos como ocorre o processo de modelagem a partir das fases de um estudo de pesquisa operacional, no entanto, como poderíamos validar o modelo na prática?

Reflita nessa indagação e defina alguns critérios para validação do modelo.

Agora que entendemos como executar o processo de modelagem, vamos ver alguns exemplos de casos de sucesso nos quais a pesquisa operacional foi aplicada?

Hillier e Lieberman (2013) apresentam alguns casos que deixam bem evidente o quão fundamental foi a aplicação da pesquisa operacional:

1.IBM – International Business Machines: é uma empresa da área de tecnologia da informação fundada no século XIX, mais precisamente em 1888, que atualmente conta com mais de 400 mil colaboradores no mundo inteiro, sendo considerada a maior empresa de tecnologia da informação no mundo.

Mas para que a IBM poderia aplicar os conceitos de pesquisa operacional?

O objetivo da IBM era melhorar o controle de inventários de peças de reposição por meio da criação de uma rede nacional que melhorasse os serviços de suporte.

Quando a IBM aplicou os conceitos de PO? No ano de 1990.

E qual foi o impacto gerado pelo uso da PO na IBM?

Na ocasião, eles conseguiram uma economia anual da ordem de 20 milhões de dólares, em valores da época, além de uma economia de mais de 250 milhões de dólares por conseguir diminuir o nível nos inventários.

Além disso, dez anos depois, em 2000, a IBM novamente empregou os conceitos de PO, mas dessa vez era para fazer a reengenharia da cadeia global de abastecimento, chegando a uma economia de 750 milhões de dólares somente no primeiro ano.

2. Samsung Electronics: também atua no ramo de tecnologia da informação e está sediada em Seul, na Coreia do Sul. Foi fundada em 1938 e tem um faturamento que representa, sozinha, mais de 10% do PIB da Coreia do Sul.

E onde a Samsung Electronics poderia aplicar os conceitos de PO?

O objetivo da empresa era otimizar o tempo de fabricação e os níveis de estoque.

Quando eles aplicaram esses conceitos? No ano de 2002.

E o impacto gerado pelo emprego da PO?

Eles conseguiram mais de 200 milhões de dólares a mais em receitas.

3. United Airlines: é considerada a terceira maior companhia aérea dos Estados Unidos, com mais de 700 aviões operando em quase 400 destinos ao redor do mundo. Tem mais de 60 mil colaboradores e foi fundada em 1926.

E como a United utilizou os conceitos de PO?

Sabemos que para uma companhia aérea era fundamental que os turnos de trabalho para atendimento nos balcões de reserva fossem otimizados. Hoje, com o uso cada vez maior da internet para reservas de passagens aéreas, esse problema diminuiu.

Quando eles aplicaram os conceitos? Em 1986.

E o impacto da PO na United?

Em valores da época, representou uma economia de aproximadamente 6 milhões de dólares ao ano.

Também podemos destacar o exemplo de outra companhia aérea norte-americana, a Delta Air Lines, considerada a maior empresa aérea do mundo, com aproximadamente 1.400 aeronaves em quase 400 destinos diferentes.

A Delta utilizou os conceitos de PO para otimizar a alocação dos tipos de aeronaves para mais de 2.500 voos domésticos em 1994 e conseguiu uma economia anual de aproximadamente 100 milhões de dólares.

Assimile

Caro aluno, deve ficar bem claro para você que trabalhamos com modelos, pois eles são uma representação simplificada da realidade, sendo que os modelos em pesquisa operacional devem ser abstratos, também chamados de simbólicos.

O processo de modelagem é composto pelas fases:

1. Definição do problema.
2. Formulação do modelo inicial.
3. Validação do modelo.
4. Reformulação, caso o modelo não seja validado.
5. Aplicação.

Sem medo de errar

Vamos retomar o nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema.

Quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Com relação aos dados que devem ser obtidos, vamos ver alguns exemplos:

- custo de fabricação de cada produto.

- quantidade demandada pelo mercado de cada produto.

- funcionamento do processo de produção de cada produto.

- quantidade de matéria-prima disponível.

- restrições de produção, como a quantidade máxima produzida em cada máquina ao longo do dia, entre outros.

Como vimos na Figura 1.3, devemos seguir os seguintes passos no processo de modelagem:

1. Definição do problema – que já concluímos.
2. Formulação e construção do modelo inicial.
3. Validação do modelo.
4. Reformulação do modelo, caso não seja aprovado na validação.

5. Aplicação do modelo.

Nas próximas seções, nós veremos os itens 2 a 5 do processo de modelagem, mas tente refletir como eles seriam formulados.

Parabéns, mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Definição do problema em uma empresa de logística

Descrição da situação-problema

Como gestor do departamento de logística, você tem reparado que os operadores logísticos estão cometendo erros básicos no processo, uma vez que não estão sabendo modelar adequando cada uma das demandas que lhes é atribuída. Ao comentar esse fato com o gerente geral, ele lhe solicita a elaboração de um protocolo geral que direcione os operadores na elaboração do problema e na coleta de informações. Pensando nessa solicitação, o que você colocaria no protocola o fim de auxiliar sua equipe a definir o problema de PO de acordo com a demanda?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, no protocolo já é válido você ressaltar que para iniciar o processo de modelagem em pesquisa operacional é preciso ter clareza da definição do problema e como fazer a coleta de dados.

Logo, em primeiro lugar deve-se ressaltar a importância da definição do problema, incluindo:

- delineamento dos objetivos.

- levantamento das restrições sobre o que pode e sobre o que deve ser feito.

- identificação de como aquele problema interage com outras áreas da empresa.

- investigação de como podem ser adotados caminhos diferentes.

- análise do tempo disponível para tomar a decisão, entre outros.

Posteriormente, vale citar que os modelos abstratos, são os mais aplicados na pesquisa operacional, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. Comumente, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema, conforme definimos anteriormente.

Ao ler esses pontos no protocolo, certamente o operador ficará mais atento à definição do problema e já ajudará a pensar na modelagem deste!

Faça valer a pena

1. Considerando que os modelos são muito utilizados em pesquisa operacional, avalie as afirmações I, II e III.

I. São modelos construídos por meio de fatos da realidade.

II. São modelos que podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação e, comumente, eles serão constituídos de equações matemáticas.

III. São modelos que partem de uma representação física de um fenômeno ou processo para que possamos entender adequadamente seu funcionamento ou origem.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o nome dos modelos na ordem I, II e III.

a) icônicos; abstratos; analógicos.

b) icônicos; analógicos; abstratos.

c) analógicos; abstratos; icônicos.

d) abstratos; analógicos; icônicos.

e) abstratos; icônicos; analógicos.

2. Considerando o processo de modelagem em PO, avalie os passos de A à E.

A. Validação do modelo.

B. Aplicação do modelo.

C. Definição do problema.

D. Reformulação do modelo, caso não seja aprovado na validação.

E. Formulação e construção do modelo inicial.

Assinale a alternativa que coloca em ordem correta os passos de A à E.

a) C; D; E; B; A.

b) C; E; A; B; D.

c) A; E; C; B; D.

d) C; E; A; D; B.

e) E; C; D; B; A.

3. Considerando um estudo de pesquisa operacional, analise o texto a seguir:

_________: definição do problema e coleta de dados necessários.

___________: aplicação de um modelo simbólico que representa a realidade do problema identificado, ou seja, faz-se uma modelagem matemática.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas da frase.

a) Implementação da solução; Formulação do problema.

b) Obtenção da solução; Construção do modelo matemático.

c) Formulação do problema; Construção do modelo matemático.

d) Formulação do problema; Obtenção da solução.

e) Obtenção da solução; Formulação do problema.

Seção 1.3

Construção de modelos em pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior estudamos a importância do uso de modelos em problemas de pesquisa operacional, bem como os tipos de modelos aplicados na área, tendo como entendimento o enfoque gerencial da PO.

Neste momento, vamos estudar a construção de modelos matemáticos em PO, aprendendo a identificar e definir a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições, de modo a direcionar a busca da melhor solução para o problema.

Então, veremos como desenvolver teste dos modelos obtidos em PO, além de assimilarmos o processo de implementação dos resultados em PO.

Pensando na sua prática profissional, esses conteúdos são de fundamental importância, pois a construção, o teste e a implementação do modelo é o processo direcionador para a busca da melhor solução do problema, sendo um aspecto essencial na resolução de desafios em pesquisa operacional!

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução deste problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão. Depois, você mostrou os passos que deveriam ser seguidos no processo de modelagem.

Agora, para a construção do modelo matemático, você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que já entendemos o contexto da pesquisa operacional e a importância do processo de modelagem, vamos entender um pouco melhor como realizar a modelagem matemática.

Vale a pena relembrar que na pesquisa operacional nós trabalharemos com modelos abstratos, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. No nosso caso, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema.

Os modelos matemáticos utilizam sistemas de equações para descrever o comportamento da realidade, utilizando para isso símbolos e expressões matemáticas. Mas o que acontece quando estamos falando de um processo de tomada de decisão?

Como já vimos anteriormente na etapa de coleta de dados, precisamos levantar todas as informações para serem utilizadas pelo modelo. Esses dados serão fundamentais na modelagem matemática que executaremos na presente seção.

Dado que já aprendemos o conceito de otimização, que nos guiará ao longo do processo de modelagem matemática, agora precisamos entender o que é um modelo de otimização, para então formular o modelo matemático.

De acordo com Longaray (2013), um modelo de otimização nada mais é do que uma representação de um problema organizado com o propósito de obter uma solução ótima. Mas o que deve ser de fato otimizado?

Neste ponto, insere-se o primeiro conceito-chave desta seção: as variáveis de decisão.

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), as variáveis de decisão são aquelas nas quais os valores devem ser determinados, ou seja, se tivermos infinitas decisões que devem ser tomadas, de algum modo precisamos quantificá-las.

Exemplificando

Vamos supor que você tenha um montante de R$ 20 mil. O gerente da sua conta corrente, ao visualizar o saldo parado em conta, ligou perguntando se você não gostaria de investir aquele dinheiro, ou ao menos parte dele, nas opções que ele tem disponível.

A primeira opção é um investimento de maior risco, no entanto com uma taxa de retorno mais atrativa. Já a segunda opção é um investimento mais conservador (uma poupança) com menor taxa de retorno.

Você ficou em dúvida sobre as duas opções e gostaria de aproveitar os seus conhecimentos em pesquisa operacional para a tomada dessa decisão.

A princípio, você pensou em investir todo o seu dinheiro em uma aplicação ou em outra, mas o gerente falou ser possível investir uma parte em cada tipo de investimento.

Dada essa situação, quais seriam as suas variáveis de decisão para esse problema?

Como vimos anteriormente, se tivermos diversas decisões que iremos quantificar, cada uma delas será uma variável de decisão.

Nesse caso, temos duas decisões a tomar:

- Investir na primeira opção?

- Investir na segunda opção?

Repare que para cada pergunta temos uma variável que representa, de modo quantitativo, a sua respectiva resposta. Portanto, temos duas variáveis de decisão que representam:

- Quantidade de dinheiro investida na primeira opção, que pode ser de R$ 0 (não investir) até R$ 20 mil (investir todo o montante).

- Quantidade de dinheiro investida na segunda opção, que também pode ser de R$ 0 (não investir) até R$ 20 mil (investir todo o montante).

Certo, entendemos que no processo de modelagem é importante definir quais serão as nossas variáveis de decisão. Mas como podemos otimizar um problema de pesquisa operacional utilizando as variáveis de decisão?

Para responder a esse questionamento, primeiro precisamos lembrar que ao trabalharmos com modelagem temos que ter em mente um objetivo, como vimos anteriormente. Este será apresentado no modelo matemático por meio de uma função, que usualmente chamamos de função objetivo.

Mas o que é uma função objetivo?

A função objetivo é uma relação das variáveis de decisão, através de alguns coeficientes, que chamamos de coeficientes da função objetivo. É importante ressaltar que quando falamos em otimização temos que ter em mente que otimizar significa maximizar ou minimizar o valor da função objetivo. Da mesma forma, a solução das variáveis de decisão que maximiza ou minimiza a função objetivo é chamada de solução ótima.

Mas qual exemplo de objetivo que poderíamos ter e como obter uma função objetivo?

Vamos retomar o exemplo do investimento, apresentado no box *Exemplificando*. Caso o objetivo fosse ter lucro com as aplicações, então teríamos interesse em maximizar o nosso lucro, que pode ser representado por meio da função objetivo.

Vamos supor que a primeira opção de investimento lhe dê um lucro mensal de 1,0%, enquanto que a opção dois (poupança) lhe dê um lucro mensal de 0,5%. A sua função objetivo nesse caso é maximizar o lucro do total investido em cada uma das opções, sendo que a quantia investida na primeira opção estará sujeita a um retorno de 1,0% e na segunda de 0,5%.

Mas será que só temos que nos preocupar com a função objetivo?

Não, porque se fosse assim já teríamos a resposta do nosso problema. Seria simplesmente investir todo o dinheiro na opção mais rentável. Então, o está faltando analisar para concluir a nossa modelagem matemática?

Vamos pensar numa questão simples para direcionar o nosso raciocínio: os recursos disponíveis no nosso planeta são ilimitados? Não, por exemplo, se o ouro fosse ilimitado no nosso planeta ele não custaria tão caro.

De modo geral, todos os nossos recursos, sejam matérias-primas, máquinas, mão de obra, entre outros, são escassos ou apresentam alguma restrição de uso.

Nos anos 1970, Eliyahi Goldratt começou a consolidar alguns princípios acerca dessas limitações no que conhecemos hoje como Teoria das Restrições. Ou seja, as restrições podem ser entendidas como qualquer coisa que limita o melhor desempenho do sistema.

No nosso caso do investimento, se a primeira opção fosse perfeita, não teríamos que nos preocupar, pois era só investir todo o dinheiro nela e lucrar mais. Mas, o gerente falou que o risco da primeira opção era maior, ou seja, a chance de você perder dinheiro com esse investimento também é maior.

Na nossa modelagem matemática, também precisamos, de algum modo, adicionar essas restrições. E como faremos isso?

As limitações são chamadas restrições e podem ser expressas na forma de equações ou inequações. Por exemplo, vamos supor que o valor mínimo a ser investido na primeira opção seja de R$ 10 mil. Nesse caso, se você decidir por investir nessa opção, a variável de decisão que representa a quantidade de dinheiro a ser investida nessa opção deverá ser maior ou igual a R$ 10 mil.

Pesquise mais

Ficou curioso com o assunto Teoria das Restrições? Então vamos nos aprofundar nesse assunto lendo o artigo *Os princípios da teoria das restrições sob a ótica da mensuração econômica* do autor Reinaldo Guerreiro?

Nesse artigo, as ideias de Eliyahi Goldratt serão aprofundadas com o enfoque para a área econômica.

GUERREIRO, R. Os princípios da teoria das restrições sob a ótica da mensuração econômica. **Cad. estud**., São Paulo, n. 13, p. 1-10, 1996. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-92511996000100003&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 29 set. 2017.

Agora que já sabemos os constituintes básicos da nossa modelagem matemática em pesquisa operacional, vamos então resumir a terminologia comum em problemas de pesquisa operacional:

1. Função objetivo: é aquela função a ser otimizada, podendo ser maximizada ou minimizada.

2. Restrições: são as limitações do nosso problema e podem ser divididas em restrições funcionais, que são aquelas com função de todas as variáveis de decisão, e as restrições de não negatividade, nas quais todas as variáveis de decisão devem ser maiores ou iguais a zero (são aplicadas em determinados casos, como a programação linear, que veremos mais adiante nos nossos estudos).

3. Solução: é a especificação de valores para as nossas variáveis de decisão. Podemos ter soluções:

   a. Viáveis: todas as restrições são satisfeitas.

   b. Inviáveis: quando ao menos uma das restrições não é satisfeita.

   c. Região de soluções viáveis: é o conjunto de todas as soluções viáveis.

   d. Ótimas: é o valor mais favorável da função objetivo, seja ele máximo ou mínimo.

E como ficaria a nossa modelagem matemática, envolvendo as equações e as variáveis de decisão que vimos anteriormente? Vamos a um exemplo genérico de modelagem matemática em pesquisa operacional?

Função objetivo:

$$Z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots a_nx_n$$

Restrições funcionais:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots b_{1n}x_n \leq (\geq) c_1$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots b_{2n}x_n \leq (\geq) c_2$$
$$\vdots$$
$$b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + \dots b_{kn}x_n \leq (\geq) c_k$$

Restrição de não negatividade:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n \geq 0$$

Sendo:

x_n as variáveis de decisão.

n o índice que representa o número de decisões.

k o índice que representa o número de restrições.

a_n os coeficientes da função objetivo.

b_{kn} os coeficientes tecnológicos.

c_k as constantes do lado direito.

Essa é a chamada forma-padrão para representação da modelagem matemática de um problema de pesquisa operacional.

Reflita

Agora que já sabemos melhor como realizar uma modelagem matemática e já vimos alguns problemas reais, como o problema da análise de investimento, chegou a hora de você colocar esses conhecimentos em prática: quais as situações cotidianas nas quais você poderia empregar o conceito de modelagem matemática para a tomada de decisões?

E mais um questionamento para você refletir: você se lembra de que a etapa de coleta de dados era essencial para os nossos problemas de pesquisa operacional? Então, agora reflita na importância da coleta de dados sabendo que estes serão utilizados nas etapas de modelagem matemática.

Agora que já sabemos como desenvolver um modelo matemático para os nossos problemas de pesquisa operacional, iremos nos deparar com a seguinte questão: como faremos para testar o nosso modelo?

A primeira coisa que devemos saber é que o nosso modelo inicial poderá apresentar algumas inconsistências ou erros, como vimos na seção anterior sobre o processo de modelagem. Mas como podemos lidar com isso?

A primeira observação é que quando você estiver elaborando um modelo com um número elevado de variáveis de decisão e de restrições, invariavelmente esses erros irão aparecer. Por isso que temos sempre que verificar o modelo. A medida que o modelo for aperfeiçoado, a tendência é que esses erros sejam corrigidos.

O processo de teste depende muito do tipo de problema que está sendo estudado e do modelo utilizado, mas vamos ver alguns exemplos?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013) uma das formas de fazer esse tipo de análise é o chamado teste de retrospectiva. Mas o que é um teste de retrospectiva? Nós utilizamos dados históricos para reconstruir o passado e verificar a eficiência do modelo e da solução utilizando essa abordagem. Ao comparar o resultado do modelo com o que de fato ocorreu, pode nos mostrar qual a melhoria que realmente poderia ter sido feita, em comparação com o que ocorreu.

No entanto, independente da forma que será utilizada para teste do modelo, é preciso levar em consideração que tudo deve ser documentado para que os demais usuários compreendam e confiem no modelo desenvolvido. Se futuramente forem necessárias adaptações ou correções no modelo, a documentação também será extremamente útil para orientar a equipe de desenvolvimento.

Se o modelo foi desenvolvido e foi adequadamente testado, qual a próxima etapa? Lembrando do que vimos no processo de modelagem, agora chegou a vez de aplicar o modelo na prática.

É importante lembrar que apenas encontrar a solução ótima não é o nosso objetivo. O nosso alvo é implementar essa solução ótima. Essa implementação pode levar dias ou meses para ser ocorrer e, dependendo do nível estratégico daquela decisão, poderá deixar consequências no curto, médio e longo prazo. Isso porque as decisões possuem uma inércia, levam um determinado tempo para serem implementadas e também podem demandar muito tempo e esforço para serem revertidas.

Somente após a implementação que os resultados reais da modelagem serão coletados e nos trarão a dimensão real das decisões tomadas. Para que a fase de implementação seja considerada um sucesso, é fundamental que exista um suporte da alta gerência para que as sugestões sejam acatadas.

A análise constante do comportamento do sistema após a implementação da solução é fundamental para verificar se estão ocorrendo desvios daquilo que foi suposto inicialmente, lembrando de que a modelagem partiu de algumas hipóteses iniciais.

Assimile

Agora que já tivemos um primeiro contato com a modelagem matemática em pesquisa operacional, vamos relembrar algumas definições importantes?

Começando pela própria palavra otimização, o que e como otimizar?

Iremos otimizar uma função chamada objetivo, que descreve o objetivo da nossa modelagem, ou seja, é uma função que será maximizada ou minimizada. Por exemplo, o lucro total é um exemplo de função objetivo que nos interessa maximizar. Já o custo total seria um exemplo de função objetivo na qual o nosso interesse seria de minimizar.

Mas o que compõe a nossa função objetivo? As variáveis de decisão e os coeficientes da função objetivo. Os coeficientes são obtidos na fase de coleta de dados e representam uma contribuição de cada variável de decisão para a função objetivo. Os lucros ou os custos unitários seriam exemplos de coeficientes, enquanto que as quantidades seriam representadas pelas variáveis de decisão.

Além da função objetivo, temos as restrições, que são divididas em funcionais e de não negatividade. As restrições existem pois os nossos sistemas reais apresentam limitações que devem ser levadas em conta nos modelos.

Assim que os modelos são construídos, eles devem ser testados e, na sequência, se aprovados, implementados.

Sem medo de errar

Você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Diante desse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão. Depois, você mostrou os passos que deveriam ser seguidos no processo de modelagem.

Agora, para a construção do modelo matemático você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Bom, como nós vimos nesta seção, para testar os modelos nós precisamos em primeiro lugar obter uma versão inicial do modelo. E como faremos isso?

Primeiro definiremos as variáveis de decisão, que nesse caso seria a quantidade a ser produzida de cada produto que compõe o mix de produção.

O objetivo, neste caso, pode ser reduzir o custo total de produção ou maximizar o lucro total, a depender das informações que você dispõe na fase da coleta de dados.

Em seguida, devemos modelar as restrições na forma de equações e/ou inequações.

Uma vez que o modelo inicial foi construído, ele passará para a fase de testes, sendo que uma das possíveis formas de testar o modelo é utilizando um teste de retrospectiva, no qual utilizamos dados históricos para reconstruir o passado e verificar a eficiência do modelo e da solução utilizando essa abordagem.

Outros testes podem ser utilizados, mas é fundamental documentar todos os procedimentos para que os demais usuários compreendam e confiem no modelo desenvolvido.

Você precisará coletar os dados históricos e, com o modelo em mãos, fazer a comparação para análise do desempenho do modelo frente aos resultados obtidos anteriormente.

Quando os testes forem concluídos e o modelo validado, será iniciada a fase de implementação, na qual conheceremos as soluções reais para o nosso problema.

Parabéns, mais uma etapa concluída e agora você já está apto para construir modelos matemáticas de pesquisa operacional!

Avançando na prática

Gestão da produção – maximização da produção

Descrição da situação-problema

Uma empresa de manufatura de peças para automóveis tem três produtos numa de suas linhas de fabricação: polias, pistões e virabrequins. O lucro nessa linha está muito abaixo do esperado, com base na capacidade produtiva disponível. A diretoria está planejando redistribuir os níveis de produção de cada produto, tentando melhorar o lucro da linha, de modo que, como gestor da produção, lhe é solicitada uma modelagem do problema a fim de aumentar o retorno financeiro para a empresa.

Cada um dos produtos pode necessitar de até três recursos para sua produção, sendo eles a furadeira, o torno e a retífica. Sabemos o tempo, em minutos, que cada produto deve ficar em cada recurso, conforme apresentado na Tabela 1.1, bem como o tempo máximo disponível por recurso por semana.

O departamento de vendas aponta que a demanda máxima de virabrequins é de 100 unidades por dia e o lucro unitário é, respectivamente, de R$ 2,20, R$ 3,15 e R$ 2,90 para a polia, o pistão e o virabrequim.

Como você desenvolveria esse modelo para a diretoria da empresa?

Tabela 1.1 | Tempo de cada produto em cada recurso

Recurso	Polia	Pistão	Virabrequim	Tempo disponível (minutos por dia)
Furadeira	10	7	12	480
Torno	6	5	0	420
Retífica	5	0	4	450

Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

As variáveis de decisão (x) devem representar as quantidades de produtos que irão compor o mix de produção, estando associados aos respectivos lucros unitários, uma vez que o propósito da função objetivo no problema é maximizar o lucro. As restrições funcionais são compostas pela limitação dos recursos, que possuem uma capacidade máxima diária e as restrições de não negatividade garantem que as variáveis de decisão sejam maiores ou iguais a zero.

Logo, tem-se:

x_1 = quantidade de polias por dia; x_2 = quantidade de pistões por dia; x_3 = quantidade de virabrequins por dia.

Função objetivo: maximizar $Z = 2{,}20\ x_1 + 3{,}15\ x_2 + 2{,}90\ x_3$

Sujeito às restrições: $10\ x_1 + 7\ x_2 + 12\ x_3 \leq 480$

$6\ x_1 + 5\ x_2 \leq 420$

$5\ x_1 + 4\ x_3 \leq 450$

Restrições de não negatividade: $x_1;\ x_2;\ x_3 \geq 0$

Faça valer a pena

1. Na pesquisa operacional, comumente trabalhamos com modelos abstratos. O _______________ trata-se de uma representação de um problema organizado com o propósito de obter uma solução ótima.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o nome do modelo que completa a lacuna da citação anterior.

a) Modelo de maximização.

b) Modelo de variação.

c) Modelo de decisão.

d) Modelo de otimização.

e) Modelo de minimização.

2. Sobre modelos matemáticos em pesquisa operacional, considere as afirmações I, II e III.

I. As funções objetivos são aquelas nas quais os valores devem ser determinados, ou seja, se tivermos infinitas decisões que devem ser tomadas, de algum modo precisamos quantificá-las.

II. A solução das variáveis de decisão que maximiza ou minimiza a função objetivo é chamada de solução ótima.

III. As restrições podem ser entendidas como qualquer coisa que limita o melhor desempenho do sistema.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) e Falso (F) e assinale a alternativa que apresenta a ordem correta.

a) V, V, F.

b) F, F, V.

c) F, V, V.

d) F, F, F.

e) V, V, V.

3. O lucro total é um exemplo de função objetivo que nos interessa maximizar. Já o custo total seria um exemplo de função objetivo na qual o nosso interesse seria de minimizar. Na função objetivo, os(as) _________ são obtidos(as) na fase de coleta de dados e representam uma contribuição de cada _________ para a função objetivo.

Assinale a alternativa que completa a frase anterior corretamente.

a) Coeficientes; restrição.

b) Variáveis de decisão; restrição.

c) Coeficientes; otimização.

d) Variáveis de decisão; otimização.

e) Coeficientes; variável de decisão.

Referências

CHIAVENATO, I. **Gestão de pessoas**: o novo papel dos recursos humanos nas organizações. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013.

Programação linear, dualidade e sensibilidade

Convite ao estudo

Caro aluno, na Unidade 2, nosso estudo será iniciado por meio do entendimento da programação linear (PL), abrangendo, inclusive, conceito, hipóteses, resolução de problemas e exemplos clássicos de programação linear em PO.

Posteriormente, entenderemos a importância e o funcionamento do método simplex, bem como a álgebra do simplex e o simplex em sua forma tabular.

Então, adentraremos nos estudos de dualidade e sensibilidade, contemplando a análise econômica da dualidade e aplicações da análise de sensibilidade em PO.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que você consiga formular e implementar um modelo de programação linear para resolução de problema de pesquisa operacional, sendo esse aspecto fundamental para a sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação?

Uma vez que as hipóteses estejam satisfeitas, você realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples para resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a solução ótima?

Você já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução encontrada anteriormente, uma vez que agora ela está sendo implementada. Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada?

Reflita sobre essas indagações e se empenhe no estudo do material, a fim de conseguir aplicar esses conhecimentos com sabedoria e de forma efetiva no mercado de trabalho!

Tenha um ótimo estudo!

Seção 2.1

Introdução à programação linear

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre a importância e conceitos de programação linear.

Considerando as diferentes ferramentas da pesquisa operacional, a programação linear é a mais conhecida e utilizada nos problemas que se vinculam à alocação de recursos.

Então, exploraremos o conceito de programação linear em pesquisa pesquisa operacional, bem como hipóteses, resolução de problemas e exemplos clássicos nesse âmbito.

Esse estudo é essencial a fim de você tornar-se apto a formular e implementar modelos de programação linear para diferentes problemas em PO, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que já estamos familiarizados com os conceitos introdutórios de pesquisa operacional e com o processo de modelagem matemática, vamos iniciar nossos estudos utilizando uma das possíveis técnicas de otimização que é a programação linear.

O que é programação linear?

Relembrando o que vimos anteriormente na construção de modelos em pesquisa operacional, temos basicamente uma função objetivo, que é aquela que queremos otimizar (maximizar ou minimizar), as restrições funcionais e a restrição de não negatividade. A função objetivo e as restrições funcionais são equações, ou inequações (no caso das restrições funcionais), sendo compostas pelas variáveis de decisão e pelos diversos coeficientes, explicados anteriormente.

Uma das técnicas de programação matemática é a programação linear, que também poderemos abreviar por PL. Na PL as funções, equações e inequações apresentam comportamento linear.

As equações lineares podem ser representadas de modo genérico por $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = b$, sendo $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ os coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$; e b é chamado de termo independente, sendo que se $b = 0$ a equação é chamada homogênea.

Exemplificando

Vamos executar a modelagem de um problema de programação linear?

Então, vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos, que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.1, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.1 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R$ 3,00 e de cada lousa R$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Em primeiro lugar, temos que definir as variáveis de decisão, que nesse caso serão as quantidades de bonecos e de lousas. Assim, podemos dizer que x_1 é a quantidade de bonecos e x_2 de lousas. A nossa função objetivo representará o lucro total, que deve ser maximizado. O lucro total é uma função da quantidade de bonecos e lousas multiplicada pelo lucro unitário de cada produto.

Função objetivo: $\max Z = 3{,}00x_1 + 2{,}00x_2$

E quais as restrições? Temos as restrições funcionais, que são as limitações de cada uma das três máquinas, que foram obtidas pelo Quadro 2.1.

Restrição da máquina 1: $1x_1 + 2x_2 \leq 12$

Restrição da máquina 2: $2x_1 + 3x_2 \leq 12$

Restrição da máquina 3: $2x_1 + 1x_2 \leq 8$

Restrição de não negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$, ou seja, a quantidade de bonecos e de lousas deve ser maior ou igual a zero.

O nosso problema ficaria:

$$\max Z = 3{,}00x_1 + 2{,}00x_2$$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Agora que já sabemos o que é a PL, temos que levar em conta alguns pressupostos, ou hipóteses, para a resolução de problemas de programação linear. Quais são essas hipóteses?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), considerando-se o ponto de vista matemático da modelagem, existem quatro hipóteses que devem ser satisfeitas com relação às atividades e aos dados coletados que compõem o problema.

1. Hipótese de proporcionalidade: se aplica tanto à função objetivo quanto às restrições. Tem-se que a contribuição de cada atividade ao valor de Z (função objetivo) é proporcional ao nível da atividade (variável de decisão), conforme representado pelo parâmetro na função objetivo. O alvo dessa hipótese é garantir que o expoente seja igual a um para qualquer variável de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições funcionais. Isso garante que o modelo é linear. No Quadro 2.2 é apresentado um exemplo em que a hipótese é satisfeita e violada.

Quadro 2.2 | Hipótese de proporcionalidade

Variável de decisão (x_1)	Medida de desempenho global ($Z = 4x_1$)	
	Hipótese satisfeita	Hipótese violada
0	0	0
1	4	5
2	8	10
3	12	13

Fonte: elaborada pelo autor.

2. Hipótese de aditividade: garante que o efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais, ou seja, toda função num modelo de programação linear será a soma das contribuições

individuais de cada respectiva atividade. Por exemplo, se a medida de desempenho global Z indicar o custo total, ela será a soma dos custos individuais de cada atividade.

3. Hipótese de divisibilidade: como estamos trabalhando com um modelo de programação linear, as variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros (fracionados). Se as variáveis assumirem apenas valores inteiros, trata-se de programação inteira.

4. Hipótese de certeza: garante que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são assumidos como conhecidos. Essa hipótese vale tanto para os parâmetros da função objetivo quanto para as restrições funcionais, de modo que são não valores aleatórios.

Para que tenhamos um modelo de programação linear, tanto as hipóteses do modelo quanto as hipóteses da modelagem devem ser satisfeitas, pois caso contrário as soluções obtidas não poderão ser validadas.

Para que o problema em questão possa ser resolvido como um problema de PL, obrigatoriamente, as quatro hipóteses apresentadas devem ser satisfeitas. No entanto, na maioria dos problemas reais as hipóteses apresentadas podem não ser satisfeitas. E agora? Isso inviabiliza o uso da programação linear em problemas reais?

A resposta para essa pergunta é *não* e a justificativa é que utilizamos modelos, que nada mais são do que uma representação aproximada da realidade, ou seja, temos uma abstração da realidade. Como já vimos, não são todas as informações reais que deverão ser agregadas no nosso modelo, pois isso deixaria o modelo muito complexo e, com isso, provavelmente não encontraríamos uma solução, o que dirá uma solução ótima.

Portanto, é importante que ao formular o problema você analise bem as hipóteses e as diferenças entre o problema real e o modelo obtido. Se para criar um modelo que descreva adequadamente a realidade você violar de forma significativa as quatro hipóteses ou se ao satisfazer as quatro hipóteses o seu modelo se distanciar muito da realidade, pare e repense o uso da programação linear. Para esses casos, temos outras possibilidades de soluções que veremos mais adiante.

Reflita

Sabendo quais são as hipóteses da PL que devem ser satisfeitas, reflita no exemplo da indústria de brinquedos (apresentado no box *Exemplificando*) que modelamos anteriormente e verifique se as quatro hipóteses são satisfeitas para esse problema. Lembrando que temos as hipóteses de proporcionalidade, de aditividade, de divisibilidade e de certeza.

Agora que já sabemos o que é programação linear e as hipóteses que devem ser satisfeitas para que o nosso problema possa se enquadrar nesse tipo de programação matemática, como podemos encontrar uma solução ótima para essa classe de problemas?

O primeiro método que aprenderemos é muito intuitivo e de fácil visualização; a este método chamaremos de Método Gráfico. Posteriormente, ficará evidente o motivo do uso desse nome para obter uma solução, e, caso ela exista, verificar se ela é ótima.

Para isso, necessitamos relembrar alguns conceitos, a começar pelos tipos de soluções possíveis, considerando-se que um modelo de programação linear consiste, basicamente, de um sistema de equações lineares.

- Solução viável: para uma solução ser viável todas as restrições devem ser satisfeitas.

- Solução inviável: se ao menos uma das restrições for violada, a solução é inviável.

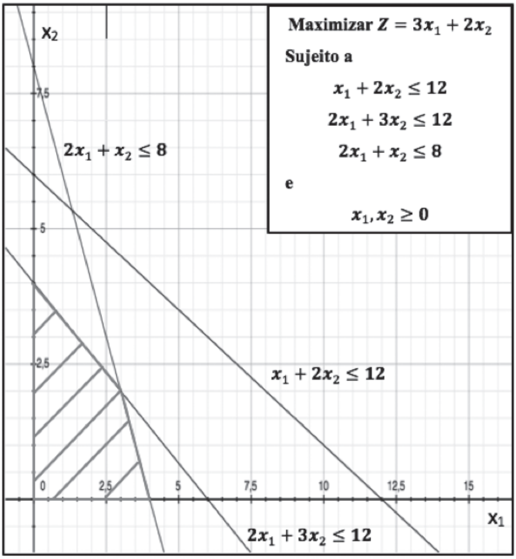
- Região de soluções viáveis: é o conjunto de todas as soluções viáveis.

- Solução ótima: trata-se do valor mais favorável da função objetivo (maior ou menor valor da função objetivo).

- Nenhuma solução ótima.

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), uma solução viável em ponto extremo (também chamada de solução FPE) é aquela que está no vértice da região de soluções viáveis. A Figura 2.1 apresenta um exemplo de região de soluções viáveis, obtida a partir da modelagem do problema de programação linear da indústria de brinquedos (apresentado no box *Exemplificando*), que satisfaz as quatro hipóteses verificadas anteriormente, na qual podemos destacar as soluções FPE.

Figura 2.1 | Exemplo de região de soluções viáveis



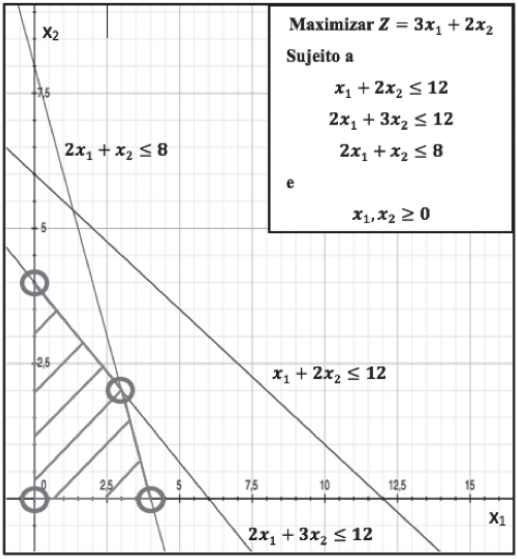
Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2.1 apresenta as restrições do modelo de programação linear em um gráfico bidimensional de x1 e x2. Como já vimos anteriormente, na região de soluções viáveis todas as restrições do problema são satisfeitas, portanto, são candidatas a solução ótima. Se um problema tiver apenas uma solução ótima, esta obrigatoriamente será uma solução FPE. Caso o problema tenha múltiplas soluções ótimas, ao menos duas das soluções ótimas serão soluções FPE.

Considerando as definições de Hillier e Lieberman (2013), o Método Gráfico consiste na identificação da região de soluções viáveis, para que sejam localizadas as soluções FPE. Como a solução ótima é obrigatoriamente uma solução FPE, nos problemas cuja solução ótima existe e seja única, precisamos descobrir qual solução FPE é a melhor, portanto, a ótima.

Vamos voltar ao exemplo da Figura 2.1, na qual identificamos a região de soluções viáveis, composta pela intersecção das retas que representam as restrições funcionais (área hachurada pelas retas vermelhas, incluindo o contorno). As soluções FPE são apresentadas na Figura 2.2, nas intersecções circuladas.

Figura 2.2 | Soluções FPE



Fonte: elaborada pelo autor.

As soluções FPE (x_1, x_2) são: $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,2)$, $(4,0)$. Para determinar a solução ótima, caso ela seja única, sabemos que obrigatoriamente será a melhor solução FPE.

Para descobrir qual a melhor solução FPE, precisamos substituir os valores de x1 e x2 encontrados em cada uma na função objetivo, conforme apresentado:

$$(x_1, x_2) = (0,0) \rightarrow Z = 0$$

$$(x_1, x_2) = (0,4) \rightarrow Z = 8$$

$$(x_1, x_2) = (3,2) \rightarrow Z = 13$$

$$(x_1, x_2) = (4,0) \rightarrow Z = 12$$

Considerando-se que neste caso o problema é de maximização, a solução ótima será o valor mais positivo, ou seja, a medida de desempenho global Z, que é 13. Portanto, existe uma única solução ótima $(x_1, x_2) = (3,2)$. Logo, com a limitação das máquinas, devemos produzir três bonecos e duas lousas por dia e ter um lucro máximo de R$ 13,00.

É evidente que problemas mais complexos, que envolvam um número maior de variáveis de decisão, não poderão ser resolvidos pelo Método Gráfico. Para esses casos, utilizaremos uma outra abordagem, que é o método simplex, que veremos mais adiante.

Assimile

Caro aluno, perceba que os problemas de programação linear apresentam, como característica fundamental, funções, equações e inequações na forma linear. Para esse tipo específico de problema, devemos satisfazer quatro hipóteses: proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e certeza.

Para resolvermos problemas de programação linear utilizando o Método Gráfico, devemos ter em mente os conceitos de: solução viável, solução inviável, região de soluções viáveis e solução ótima.

Vamos ver alguns exemplos clássicos de programação linear a fim de você entender a aplicação de PL em sua prática profissional?

Como já vimos no problema da indústria de brinquedos, um dos problemas mais recorrentes dentro da programação linear é a escolha do mix ótimo de produção de bens ou serviços. Isso porque geralmente temos um lucro ou um custo unitário para cada produto ou serviço, de modo que queremos otimizar o lucro ou o custo total.

Evidentemente que essa não é a única aplicação possível dos problemas de PL, sendo que um outro exemplo é a definição de escala de funcionários para atendimento aos clientes. Por exemplo, em um *call center* ou em um balcão de atendimento de uma empresa, o objetivo é verificar a quantidade de funcionários necessária para atingir um nível de atendimento mínimo, de modo que o custo com os funcionários seja minimizado.

Um outro exemplo muito recorrente e que será estudado de modo mais detalhado na próxima unidade, é o problema de transporte. Nesse caso, devemos ter em mente que existe uma dada oferta de produtos ou serviços na origem e uma demanda no destino. A questão central aqui é como minimizar o custo total de transporte entre as origens e os destinos.

Pesquise mais

Vamos avançar nossos estudos em programação linear?

Faça a leitura das páginas 52 a 54 do capítulo 3 (Introdução à programação linear) do livro *Introdução à pesquisa operacional* dos autores Frederick Hillier e Gerald Lieberman. Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/>. Acesso em: 2 nov. 2017.

Bons estudos!

Sem medo de errar

Você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação?

Para que a verificação comece, primeiro vamos à hipótese de proporcionalidade. Sabemos que a contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo é proporcional ao nível da atividade (variável de decisão). Portanto, devemos garantir, por meio dessa hipótese, que o nosso problema do negócio de doces apresenta expoente igual a um para qualquer variável de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições funcionais, ou seja, que é de fato um problema com comportamento linear, configurando um problema de programação linear.

Em seguida, temos a hipótese de aditividade, sendo que o efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais, ou seja, toda função num modelo de programação linear será a soma das contribuições individuais de cada respectiva atividade. Por exemplo, se a medida de desempenho global Z indicar o lucro total com os diferentes tipos de doces produzidos, ela será a soma dos lucros individuais de cada tipo de doce, multiplicada pela quantidade de cada tipo de doce a ser produzida.

Já a hipótese de divisibilidade garante que as variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros (fracionados). Nesse caso, poderíamos ter um valor fracionado do mix de produção dos diferentes tipos de doces. Se o valor fracionado não tiver sentido real para o nosso problema, veremos como resolver isso utilizando o conceito de programação inteira.

Por último, é fundamental que cada parâmetro do nosso problema seja assumido como conhecido, por exemplo, o lucro unitário de cada doce, a capacidade máxima de produção de cada equipamento, quais os requisitos de produção para cada tipo de doce, entre outros. É isso o que nos garante a hipótese de certeza, que os parâmetros da função objetivo e das restrições funcionais são conhecidos e não valores aleatórios.

Avançando na prática

Investimento financeiro

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhamentos sobre os dois tipos de investimentos, conforme ao Quadro 2.3.

Quadro 2.3 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada R$ 100 por mês)	Investimento B (a cada R$ 100 por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pela programação linear. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução; como você faria essa indicação?

Resolução da situação-problema

Em primeiro lugar, o modelo matemático que descreve o problema é:

$\mathbf{X_1}$ = investimento em A (múltiplo de R$100,00)

$\mathbf{X_2}$ = investimento em B (múltiplo de R$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

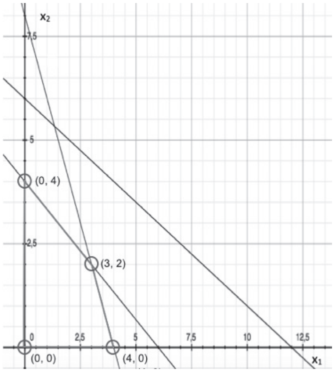
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

E

$$0 \leq x_1, x_2$$

Utilizando o Método Gráfico para solucionar o problema de programação linear, encontramos a seguinte região de soluções viáveis e as soluções FPE conforme apresentado na Figura 2.3:

Figura 2.3 | Soluções FPE



Fonte: elaborada pelo autor.

As soluções FPE e seus respectivos valores para a função objetivo (Z) são (X_1, X_2):

- (0, 0) com Z = 0
- (0, 4) com Z = 8
- (3, 2) com Z = 13
- (4, 0) com Z = 12

Dentre as soluções FPE apresentadas, a que tem o melhor valor, uma vez que o objetivo é maximizar o retorno, é a solução (3, 2), R$ 300 no investimento A e R$ 200 no investimento B, com retorno de R$ 130.

Parabéns, você conseguiu indicar ao seu cliente qual era o melhor investimento!

Faça valer a pena

1. Uma Empresa, produtora de aço, está implantando uma política de redução da poluição do ar, tendo em vista as crescentes preocupações ambientais e sociais, para se manter competitiva no mercado.
Um levantamento realizado por funcionários junto à companhia ambiental do município identificou que a taxa anual máxima (em milhões de toneladas) de emissão de hidrocarbonetos, particulados e óxido de enxofre na atmosfera deve ser, respectivamente, 30, 12 e 20. Caso esses limites sejam respeitados, será seguido um rigoroso padrão de qualidade do ar no município.
Esta empresa fabricante de aço utiliza dois tipos de fornos: os altos-fornos e os fornos Siemens-Martin e cada um deles tem uma taxa de emissão de poluentes, conforme apresentado no Quadro 2.4.

Quadro 2.4 | Emissão de poluentes em cada tipo de forno (milhões de toneladas por mês)

Poluente	Alto-forno	Siemens-Martin
Hidrocarbonetos	2	3
Particulados	1	1
Óxido de enxofre	2	1

Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando-se que o uso do alto-forno gera um lucro mensal de R$ 40 milhões e que o uso do Siemens-Martins gera R$ 50 milhões de lucro no mesmo período, qual o uso ótimo dos fornos ao longo dos meses do ano para manter a qualidade do ar dentro dos padrões estabelecidos?
a) Utilizar apenas o alto-forno por 10 meses.
b) Utilizar apenas o Siemens-Martin por 10 meses.
c) Utilizar o alto-forno por 8 meses e o Siemens-Martin por 4 meses.
d) Utilizar apenas o alto-forno por 11 meses.
e) Utilizar o alto-forno por 6 meses e o Siemens-Martin por 6 meses.

2. A programação linear é bastante versátil, mas a aplicação mais usual envolve a alocação de recursos e atividades. Os recursos geralmente são escassos, portanto a quantidade disponível é limitada e o objetivo é fazer uma alocação cuidadosa, otimizando o uso dos recursos disponíveis.
Com relação à programação linear, avalie as asserções e assinale a alternativa correta:
I. Determinar a alocação ótima nos problemas de programação linear envolve escolher os níveis das atividades que atingem o melhor valor para a função objetivo (ou seja, a medida de desempenho global).

PORQUE

II. Ter um nível maior nas atividades pode gerar custos desnecessários, no entanto, ter um nível menor pode gerar custos de não atendimento.

Com relação à programação linear, avalie as asserções I e II e assinale a alternativa correta.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.

b) As duas afirmações são verdadeiras, mas II não justifica I.

c) Apenas a afirmação II é verdadeira.

d) As duas afirmações são verdadeiras e a II justifica a I.

e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

3. Sabemos que em um problema de pesquisa operacional, o modelo matemático deve ser uma representação razoável da realidade. Os modelos de programação linear, que são tipos específicos de modelos de pesquisa operacional, partem do pressuposto de que tanto a função objetivo quanto as restrições funcionais são lineares, mas além desses pressupostos, temos algumas hipóteses que norteiam a modelagem. Tratam-se de algumas propriedades matemáticas que devem ser satisfeitas em relação às atividades e aos dados do problema que está sendo modelado.

Com relação às hipóteses da modelagem, analise as afirmações:

I. Hipótese da aditividade

II. Hipótese da certeza

III. Hipótese da divisibilidade

IV. Hipótese da proporcionalidade

A. A contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo é equivalente ao nível da atividade.

B. O efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais.

C. As variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros.

D. Garante que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são conhecidos.

Com relação às hipóteses da modelagem, assinale a alternativa que apresenta a associação correta:

a) I – B; II – D; III – A; IV – C.

b) I – A; II – D; III – C; IV – B.

c) I – B; II – D; III – C; IV – A.

d) I – A; II – C; III – D; IV – B.

e) I – B; II – C; III – D; IV – A.

Seção 2.2

Método simplex

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior, estudamos a resolução dos problemas envolvendo duas variáveis de decisão pelo Método Gráfico.

Você já pensou qual seria um possível método ou ferramenta para a solução de problemas que envolvam mais de duas variáveis e que, assim, não podem ser resolvidos graficamente?

Nesta seção, trabalharemos os conceitos e aplicação do Método simplex para a resolução de problemas que podem envolver mais de duas variáveis e que, assim, não poderiam ser resolvidos graficamente.

Será estudado também a álgebra do método simplex, bem como o simplex em sua forma tabular.

Esse estudo é essencial a fim de você tornar-se apto a resolver diferentes problemas em PO, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Inicialmente, você refletiu sobre algumas hipóteses que precisariam ser satisfeitas.

Agora, você realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples para resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a solução ótima? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão do que e do quanto produzir em seu novo negócio.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, nós já compreendemos como funciona a modelagem em programação linear (PL) e aprendemos a resolver alguns problemas mais simples utilizando o Método Gráfico, mas você deve estar se perguntando: e nos casos mais complexos?

O Método Gráfico restringe a resolução de problemas de programação linear, uma vez que temos a limitação da resolução pelo número de variáveis de decisão que podemos plotar no gráfico e, na grande maioria dos problemas de PL, esse número é extrapolado facilmente.

Para essas situações, utilizaremos o método simplex, que foi desenvolvido por George Dantzig em 1947 e que é utilizado em computadores para resolver problemas de programação linear. O que é o método simplex?

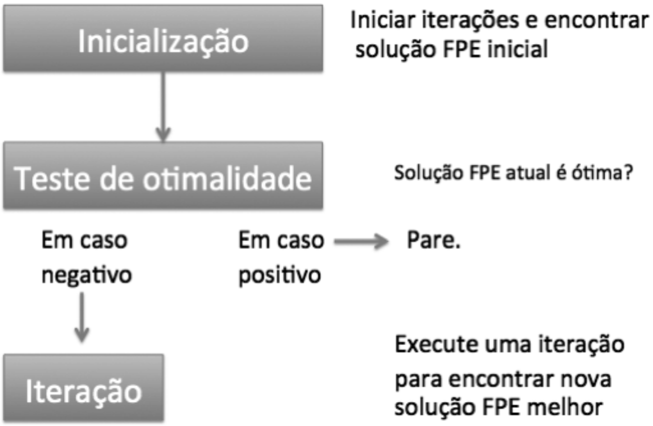
Para responder a essa pergunta, primeiro precisamos lembrar de algo fundamental da programação linear: as funções, equações e/ou inequações apresentam comportamento linear. Isso faz com que tenhamos, na modelagem de problemas de PL, um sistema de equações lineares. O Método simplex nada mais é do que um procedimento algébrico para resolução do sistema de equações lineares que compõe o nosso problema de PL.

Conforme apresentado por Hillier e Lieberman (2013), e também por Lachtermacher (2009), o simplex também apresenta conceitos geométricos, o que nos ajuda a entender o seu funcionamento. Hillier e Lieberman (2013) apresentam seis conceitos-chave para obter as soluções pelo simplex, a saber:

1. O simplex se concentra apenas em soluções FPE (lembrando, são soluções viáveis em pontos extremos).

2.O simplex é um método iterativo, ou seja, possui uma série de passos que são executados de modo repetitivo (que chamaremos de iterações) até chegar-se a uma solução ótima, lembrando que são analisadas apenas soluções FPE. A Figura 2.4 apresenta, de modo prático, como as iterações funcionam.

Figura 2.4 | Funcionamento do simplex



Fonte: adaptada de: Hillier e Lieberman (2013, p. 87).

3. Sempre que for possível, o simplex utiliza como solução inicial a origem (todas as variáveis de decisão são iguais a zero). Em alguns casos veremos que isso não é possível, como nos problemas de minimização ou quando essa solução for inviável, de modo que nesses casos outros procedimentos devem ser empregados para obter a solução inicial.

4. Temos o conceito de solução FPE adjacente, ou seja, uma solução FPE que esteja próxima à solução atual. O simplex verifica as soluções FPE adjacentes para se deslocar da solução atual, não sendo consideradas outras soluções.

5. Como vimos anteriormente no Método Gráfico, a solução atual pode levar a uma solução adjacente. O simplex verifica o deslocamento que trará maior crescimento para a função objetivo e desloca-se nesse sentido para a solução FPE adjacente.

6. Ter uma taxa de crescimento positiva para a função objetivo deslocando-se para a solução FPE adjacente indica que essa solução será melhor do que a atual, mas caso seja uma taxa

de crescimento negativa, a solução adjacente será pior que a atual. Para essa verificação utilizaremos o teste de otimalidade, presente na Figura 2.4.

Reflita

Caro aluno, agora que já sabemos os seis conceitos-chave para o Método simplex, fica a seguinte questão para reflexão: você acha que no exemplo da indústria de brinquedos, apresentado na seção anterior, é possível empregar o conceito-chave 3? Poderíamos utilizar como solução inicial a origem (todas as variáveis de decisão iguais a zero)?

Além dos conceitos apresentados, precisamos inserir as chamadas variáveis de folga no nosso modelo. Como vimos anteriormente, o simplex é um método algébrico utilizado para resolver o sistema de equações lineares oriundo do processo de modelagem do nosso problema de PL. Para que isso ocorra, precisamos transformar as inequações, que por ventura existam nas restrições funcionais, em equações. Como faremos isso? Justamente utilizando as variáveis de folga! Dessa forma, para cada inequação, utilizaremos uma variável de folga que represente a diferença entre o utilizado e o disponível para cada restrição funcional no formato de uma inequação.

As variáveis de folga podem ser representadas por quaisquer letras ou índices, valendo ressaltar que apenas não pode ser adotada exatamente a mesma notação que já foi utilizada para alguma variável de decisão, a fim de evitar equívocos.

Exemplificando

Caro aluno, vamos retomar brevemente o exemplo da indústria de brinquedos, que abordamos na seção anterior, sobre como fazer a modelagem do problema de PL.

Vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.5, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.5 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R$ 3,00 e de cada lousa R$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Relembrando, na seção anterior obtivemos o seguinte modelo para o problema em questão:

$$\max Z = 3{,}00x_1 + 2{,}00x_2$$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Agora, utilizando o simplex, a modelagem será exatamente a mesma, lembrando que precisamos, desta vez, adicionar uma variável de folga para cada restrição funcional que apresente uma inequação.

Logo, como ficaria nesse caso?

A nossa função objetivo não sofrerá alterações, ficando:

$$\max Z = 3{,}00x_1 + 2{,}00x_2$$

Já as nossas restrições funcionais terão alterações. Nesse caso, adotaremos uma variável de folga para cada inequação e transformaremos as desigualdades em igualdades:

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_5 = 8$$

Portanto, as variáveis de folga inseridas foram:

$$x_3; x_4; x_5$$

A restrição de não negatividade permanece igual, sendo:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Além das variáveis de folga, temos o conceito de solução básica, que é uma solução em ponto extremo aumentada pelas variáveis de folga. Portanto, na solução básica temos os valores obtidos para as variáveis de decisão mais os valores das variáveis de folga. Já a solução básica viável é a solução viável em ponto extremo (FPE).

Cada solução básica é composta por variáveis básicas e não básicas. As variáveis não básicas sempre são configuradas em zero, enquanto que as básicas são os valores encontrados pela solução do sistema de equações lineares. O número de variáveis básicas é igual ao número de restrições funcionais, enquanto que o número de não básicas é o total de variáveis menos o número de variáveis básicas (ou o número de restrições).

Assimile

Caro aluno, diante de tantos conceitos novos, vale a pena sumarizarmos os principais fundamentos sobre o Método simplex:

- variáveis de folga: transformam as inequações em equações;
- solução básica: solução ponto extremo aumentada;
- variáveis básicas: encontradas pela solução do sistema de equações;
- variáveis não básicas: são configuradas em zero.

Para facilitar o desenvolvimento algébrico do simplex, utilizaremos alguns quadros, sendo essa forma de resolução também chamada de método tabular, como apresentado nos quadros de 2.6 a 2.13.

Vamos aplicar o simplex, por meio do método tabular, considerando ainda o exemplo da indústria de brinquedos, apresentado no box *Exemplificando*, a fim de ajudá-lo a ter um desencadeamento lógico das ideias.

Vale a pena ressaltar que, para que nosso quadros fiquem padronizados e sejam fáceis de utilizar na solução dos problemas, faremos uma alteração na função objetivo, isto é, os termos que estão à direita irão para a esquerda, logo, para a indústria de brinquedos (Quadro 2.6), teremos: $Z - 3{,}00x_1 - 2{,}00x_2 = 0$.

Quadro 2.6 | Sistema inicial do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
x_3	0	1	2	1	0	0	12
x_4	0	2	3	0	1	0	12
x_5	0	2	1	0	0	1	8

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, precisamos escolher uma coluna, que chamaremos de coluna pivô. Essa coluna é aquela que contribui mais para a nossa função objetivo. Como fizemos uma inversão, nesse exemplo será o valor mais negativo, ou seja, conforme observado no Quadro 2.6, será -3. Essa, que é a variável X_1, é chamada de variável que entra.

O Quadro 2.7 apresenta a coluna pivô e o quociente entre cada termo do lado direito (b) e o respectivo valor da coluna pivô, a exceção da linha que representa a função objetivo.

Quadro 2.7 | Coluna pivô do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Quociente
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	2	1	0	0	12	12/1=12
x_4	0	2	3	0	1	0	12	12/2=6
x_5	0	2	1	0	0	1	8	8/2=4

Fonte: elaborada pelo autor.

A linha que apresentar o menor valor de quociente será chamada de linha pivô. o Quadro 2.8 apresenta a composição do nosso sistema com a coluna e a linha pivôs. O valor que se encontra na interseção entre a coluna e a linha pivôs é chamado de coeficiente pivô.

Quadro 2.8 | Coluna e linha pivôs do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Quociente
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	2	1	0	0	12	12/1=12
x_4	0	2	3	0	1	0	12	12/2=6
x_5	0	2	1	0	0	1	8	8/2=4

Fonte: elaborada pelo autor.

O coeficiente pivô vale 2, portanto, faremos um novo quadro no qual a variável de folga X_5 é a que sai para a entrada de X_1. No novo quadro (2.9), faremos o cálculo de uma nova linha pivô, que é a divisão da linha pivô pelo coeficiente pivô.

Quadro 2.9 | Nova linha pivô para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	Nova linha pivô
x_3	0	1	2	1	0	0	12	
x_4	0	2	3	0	1	0	12	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com Hillier; Lieberman (2013) as demais linhas serão calculadas tendo como base:

1. Se o coeficiente da linha a ser calculada na coluna pivô for negativo, adicionaremos a essa linha o produto desse valor absoluto pela nova linha pivô.

Exemplo: a linha Z apresenta valor na coluna pivô -3. Portanto, adicionaremos a essa linha o produto desse valor absoluto pela nova linha pivô, conforme apresentado no Quadro 2.10.

Quadro 2.10 | Novas linhas Z para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	Nova linha Z
x_3	0	1	2	1	0	0	12	
x_4	0	2	3	0	1	0	12	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

2. Se o coeficiente da linha a ser calculada for positivo, subtrairemos dessa linha o produto desse coeficiente pela nova linha pivô.

Exemplo: a linha X_3 apresenta valor na coluna pivô 1 (positivo). Portanto, subtrairemos dessa linha o produto desse coeficiente pela nova linha pivô. Faremos o mesmo com a linha X_4 e ao final teremos o Quadro 2.11.

Quadro 2.11 | Novas linhas x_3 e x_4 para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	
x_3	0	0	1,5	1	0	-0,5	8	Nova linha x_3
x_4	0	0	2	0	1	-1	4	Nova linha x_4
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora temosno Quadro 2.11 o valor final das variáveis após a primeira iteração. Observamos que x_5 saiu e que x_1 entrou. E agora, o que temos que fazer? Vamos retomar a Figura 2.4? Precisamos fazer o teste de otimalidade para saber se a solução encontrada é ótima ou não. Nesse caso, se existir algum valor negativo na linha Z, significa que a solução não é ótima, pois a função objetivo ainda pode crescer nessa direção.

Conforme observamos no Quadro 2.11, temos o valor de -0,5 para a variável X_2 na linha Z. Portanto, como a solução não é ótima, já que o valor da função objetivo ainda pode crescer, precisaremos fazer uma nova iteração igual feito anteriormente, só que agora a coluna pivô será -0,5, portanto, a variável x_2 será a variável que entra. O Quadro 2.12 mostra a variável que sai, por meio do quociente, que é x_4 e o coeficiente pivô que nesse caso é 2.

Quadro 2.12 | Novas coluna e linha pivô para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	
x_3	0	0	1,5	1	0	-0,5	8	8/1,5=5,33
x_2	0	0	2	0	1	-1	4	4/2=2
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	4/0,5=8

Fonte: elaborada pelo autor.

O novo quadro, com as novas linhas, obtidas de modo similar ao que detalhamos anteriormente, é apresentado no Quadro 2.13.

Ficam agora as perguntas: qual a nova solução? A nova solução é ótima?

Quadro 2.13 | Solução final para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	1	0	0	0	0,25	1,25	13
x_3	0	0	0	1	-0,75	0,25	5
x_2	0	0	1	0	0,5	-0,5	2
x_1	0	1	0	0	0,25	0,75	3

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, verificamos no Quadro 2.13 que não existe nenhum valor positivo para a linha Z, portanto, a solução encontrada é ótima. E qual é a solução encontrada?

Vamos observar as linhas X_1 e X_2:

- $X_1 = 3$, pois X_4 e X_5 são variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.
- $X_2 = 2$, pois X_4 e X_5 são variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.

Desse modo, a solução ótima será (X_1, X_2 = (3, 2) com Z = 13). É exatamente a mesma solução obtida pelo Método Gráfico. Os valores das variáveis de folga não são importantes para o resultado do nosso problema, uma vez que elas foram inseridas apenas para transformar o nosso problema num sistema de equações lineares. Em todo caso da linha X_3, saberemos que $X_3 = 5$ e X_4 e X_5 são as variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.

Pesquise mais

Você ficou curioso para saber como obter uma solução inicial quando não é possível utilizar a origem (todas as variáveis de decisão iguais a zero)?

Um dos métodos é a técnica das variáveis artificiais, que é detalhada junto com outras adaptações a outras formas de modelo, no livro *Introdução à pesquisa operacional*. Leia as páginas 104 a 113 para aprofundar os seus conhecimentos nesses métodos.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9 ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/> Acesso em: 10 out 2017.

Sem medo de errar

Voltando à montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários, sabemos que o seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Agora que você verificou que as hipóteses da programação linear são satisfeitas, realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples de resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a solução ótima? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão do que e do quanto produzir em seu novo negócio.

Agora, já sabemos que quando temos mais de duas variáveis de decisão, a solução pelo Método Gráfico não é viável. Então, tivemos contato com o Método simplex, que nada mais é do que um procedimento algébrico para a resolução do sistema de equações lineares que compõe a sua modelagem.

Você se deparou com algumas questões ao pensar em aplicar o Método simplex, sendo a primeira delas definir as variáveis de folga. Para cada equipamento que tem uma capacidade máxima, você decidiu formular uma restrição funcional na forma de uma inequação. Para que essas inequações sejam transformadas em equações e o Método simplex possa ser empregado, você adicionou uma variável de folga para cada uma delas.

Em seguida, avaliou a possibilidade de ter como solução inicial a origem (variáveis de decisão iguais a zero). Como você decidiu que o seu problema não é de minimização, e sim de maximização de lucros na função objetivo e a solução origem satisfaz todas as restrições, você definiu a origem como solução básica viável inicial para o seu problema.

Agora, utilizando o método tabular, você fará todos os procedimentos algébricos aprendidos anteriormente para chegar até a solução ótima, utilizando o conceito de variáveis básicas e não básicas.

Mais um desafio vencido e mais conhecimento construído para a sua prática profissional! Parabéns!

Avançando na prática

Investimento financeiro – análise pelo método simplex

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhamentos sobre os dois tipos de investimentos, conforme o Quadro 2.14.

Quadro 2.14 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada R$ 100 por mês)	Investimento B (a cada R$ 100 por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pelo simplex. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução; como faria essa indicação pelo simplex?

Apresente esse modelo que, posteriormente, será utilizado pela analista de investimentos para a obtenção da solução ótima.

Resolução da situação-problema

Perceba que o seu papel, como gestor de banco, nesse momento, é modelar o problema, de acordo com o Método simplex, para que, então, o analista de investimentos resolva o problema e identifique a solução ótima.

Logo, em primeiro lugar o modelo matemático que descreve o problema é:

x_1 = investimento em A (múltiplo de R$100,00)

x_2 = investimento em B (múltiplo de R$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 12$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

E

$0 \leq x_1, x_2$

Agora, utilizando o simplex, a modelagem será exatamente a mesma, lembrando que precisamos, desta vez, adicionar uma variável de folga para cada restrição funcional que apresente uma inequação.

A nossa função objetivo não sofrerá alterações, ficando:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Já as nossas restrições funcionais terão alterações. Nesse caso, adotaremos uma variável de folga para cada inequação e transformaremos as desigualdades em igualdades:

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_5 = 8$$

Portanto, as variáveis de folga inseridas foram:

$x_3; x_4; x_5$

A restrição de não negatividade permanece igual, sendo:

$x_1, x_2 \geq 0$

Parabéns, mais um desafio vencido!

Com esse modelo, o analista de investimentos estará pronto para obter a solução ótima para o cliente!

Faça valer a pena

1. Considerando o Método simplex, analise as afirmações I e II.

I. O Método Gráfico restringe a resolução de problemas de programação linear, uma vez que temos a limitação da resolução pelo número de variáveis de decisão que podemos plotar no gráfico. Logo, para problemas de pesquisa operacional com mais de duas variáveis de decisão, o Método Gráfico já não se aplica.

PORTANTO

II. Para problemas mais complexos de pesquisa operacional, o que é facilmente encontrado na prática, utiliza-se o Método simplex, que pode ser empregado em sua forma tabular.

Analise as afirmações I e II, bem como a relação entre elas, e assinale a alternativa correta.

a) Somente I é correta.

b) Somente II é correta.

c) I e II são corretas, mas II não é justificativa de I.

d) I e II são corretas e II é justificativa de I.

e) I e II não são corretas.

2. Sobre o Método simplex, considere a afirmações I, II e III.

I. O Método simplex é um procedimento algébrico para resolução do sistema de equações lineares que compõe o nosso problema de programação linear.

II. O simplex é um método iterativo, no qual uma série de passos são executados de modo repetitivo até chegar-se a uma solução ótima.

III. O simplex não verifica o deslocamento que trará maior crescimento para a função objetivo, de modo a não deslocar-se nesse sentido para a solução FPE adjacente.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) ou Falso (F) e selecione a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) V, F, V.

b) V, V, F.

c) F, F, V.

d) F, V, V.

e) V, F, F.

3. Considerando o Método simplex, analise o tipo de variável (1 a 4) com a sua respectiva representação (A a D):

1. Variáveis de folga

3. Solução básica

2. Variáveis básicas

4. Variáveis não básicas

A - São configuradas em zero.

B - Transformam as inequações em equações.

C - Solução ponto extremo aumentada.

D - Encontradas pela solução do sistema de equações.

Faça a associação correta entre os tipos de variáveis e suas respectivas representações.

a) 1-A; 2-D; 3-C; 4-B.

b) 1-B; 2-C; 3-A; 4-D.

c) 1-C; 2-D; 3-A; 4-B.

d) 1-D; 2-A; 3-D; 4-C.

e) 1-B; 2-D; 3-C; 4-A.

Seção 2.3

Dualidade e análise de sensibilidade

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo agora sobre dualidade e análise de sensibilidade.

Assim, nesta seção estudaremos a teoria da dualidade, análise econômica da dualidade, análise de sensibilidade em PO e suas aplicações.

Esse estudo é essencial a fim de você assimilar o conhecimento sobre análise de pós-otimização, o que lhe será muito útil na sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Na seção anterior, utilizando o Método simplex, você verificou como encontrar a solução ótima, considerando a decisão sobre o que e quanto produzir.

Agora, então, já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução ótima encontrada anteriormente, uma vez que ela está sendo implementada.

Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que precisa dessas informações para manter sua empresa crescendo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Agora que já sabemos como resolver os problemas de programação linear pelo Método Gráfico e pelo simplex, entenderemos melhor sobre a Teoria da dualidade e a análise de sensibilidade.

Primeiro, o que é Teoria da dualidade?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), no início do desenvolvimento da programação linear, estudiosos descobriram algo a que deram o nome de dualidade e esse nome veio porque para todo problema de PL verificaram que existia um outro problema associado a ele, chamado de dual.

Dessa forma, temos que o problema original era chamado primal e havia um problema associado a este, sendo denominado dual. Vale ressaltar que a partir do conceito de dualidade, poderemos também desenvolver a nossa análise de sensibilidade.

Certo, talvez o conceito de dualidade tenha ficado claro, mas qual a importância disso?

De acordo com Lachtermacher (2009), em algumas ocasiões queremos encontrar uma estimativa da solução ótima, ao invés de obtê-la utilizando o simplex. Isso porque em alguns casos, principalmente em problemas complexos com um número muito grande de variáveis de decisão, encontrar a solução ótima pode não ser uma tarefa fácil e rápida, mesmo utilizando recursos computacionais. Nesses casos, podemos procurar valores limites superiores ou inferiores para a nossa solução.

Além disso, o problema dual também poderá trazer outras interpretações para o nosso estudo, como a interpretação econômica, que nos ajuda quando temos dúvidas quanto à hipótese de certeza. A interpretação econômica pode ser obtida por meio dos valores das variáveis do dual. Em alguns casos, também pode ser mais eficiente a resolução do dual, de modo que com a solução de um é possível obter a solução do outro.

Qual é a representação de um problema dual?

A primeira coisa que devemos levar em conta, de acordo com Hillier e Lieberman (2013), é que os parâmetros do problema dual são exatamente os mesmos do primal, apenas em posições diferentes. Para entender melhor, vamos retomar alguns termos de modelagem em PO:

- Coeficientes da função objetivo: são associados às variáveis de decisão na função objetivo.

- Coeficientes tecnológicos: são associados às variáveis de decisão nas restrições funcionais.

- Constantes do lado direito: são os valores do lado direito nas equações ou inequações que representam as restrições funcionais.

O que ocorre, então, num modelo dual com relação ao primal, já que temos apenas uma mudança na posição dos parâmetros?

A primeira coisa que ocorre é com os coeficientes da função objetivo do primal, que se transformam nas constantes do lado direito no dual.

De modo semelhante, as constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual.

Já os coeficientes tecnológicos do primal também são os coeficientes tecnológicos no dual, mas em posição diferente.

Talvez a explicação anterior tenha ficado muito abstrata, então, vamos ver na prática como ficaria o nosso dual? Contudo, antes disso temos que fazer algumas observações iniciais, conforme apresentado nos teoremas a seguir, de acordo Lachtermacher (2009):

1) O dual do dual é o primal.

2) Se a k-ésima restrição do problema primal for uma igualdade, então, a k-ésima variável do dual será sem restrição de sinal, ou seja, poderá assumir valor positivo, negativo ou zero.

3) Se a p-ésima variável do primal for sem restrição de sinal, como visto anteriormente, então, a p-ésima restrição do dual será uma igualdade.

Vamos ao modelo primal genérico:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \le b_m$$

E

$$x_n \ge 0$$

Assim, os coeficientes da função objetivo são representados por $c_1; c_2; \cdots; c_n$. Os coeficientes tecnológicos por $a_{11}; a_{12}; \cdots; a_{1n}; \cdots a_{mn}$ e as constantes do lado direito por $b_1; b_2; \cdots; b_m$.

Nesse caso genérico, como ficaria o nosso problema dual? Vamos retomar o exposto anteriormente, de modo que o dual ficaria:

$$MinW = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots b_my_m$$

Portanto, já observamos que a função objetivo do dual é minimizar, enquanto que no primal era maximizar. Do mesmo modo, o número de variáveis de decisão, que nesse caso passaram a ser y no dual, é o número de restrições do primal e as constantes do lado direito do primal viram coeficientes da função objetivo no dual.

E com relação às restrições funcionais?

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \ge c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{m2}y_m \ge c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots a_{mn}y_m \ge c_n$$

E

$$y_m \ge 0$$

Com relação às restrições, reparamos uma mudança no sinal da desigualdade, bem como a inversão dos coeficientes tecnológicos e a transformação dos coeficientes da função objetivo do problema primal nas constantes do lado direito no problema dual.

Exemplificando

Caro aluno, vamos retomar brevemente o exemplo da indústria de brinquedos, que abordamos na Seção 2.1 sobre como fazer a modelagem do problema de PL.

Vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos, que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.15, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.15 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R$ 3,00 e de cada lousa R$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Vamos retomar o modelo de PL que formulamos a partir das informações obtidas?

Então, vamos lá, o nosso problema era:

$$\max Z = 3{,}00x_1 + 2{,}00x_2$$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Como ficaria o mesmo problema na forma dual?

$$\min W = 12y_1 + 12y_2 + 8y_3$$

Portanto, agora temos três variáveis de decisão. E as restrições funcionais?

$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 2$$

Com relação à restrição de não negatividade, todos os valores das novas variáveis de decisão continuam sendo maiores ou iguais a zero.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Ficou claro a forma de obter o dual a partir do primal? Se estivéssemos trabalhando com o nosso problema na forma matricial, estaríamos fazendo apenas uma transposição entre as matrizes, ou seja, invertendo as posições ocupadas entre as linhas e as colunas.

Reflita

Caro aluno, agora que você já sabe melhor como obter um modelo dual a partir do primal, que tal retornarmos para os teoremas que vimos anteriormente?

Então, vamos lá, sua tarefa agora é refletir sobre os três teoremas e realizar a sua demonstração.

O mais simples, a princípio, é o teorema 1: o dual do dual é o primal. Tente demonstrar cada um dos teoremas com base nos seus conhecimentos adquiridos até o momento e reflita sobre as implicações de cada um deles!

Agora que entendemos o básico com relação à dualidade, que tipos de interpretações podemos explorar que sejam advindas dessa teoria?

Existem várias possibilidades, mas a mais comum é a interpretação econômica do problema dual. Vamos verificar alguns casos? Lachtermacher (2009) apresenta quatro casos possíveis de análise econômica do dual e, para isso, precisamos relembrar o conceito de variáveis de folga que vimos no Método simplex.

O primeiro caso, descrito por Lachtermacher (2009), é quando a variável de folga do problema primal é maior do que zero e a variável de decisão igual a zero, podemos dizer que nem todo recurso (representado pelas restrições funcionais do modelo primal) está sendo consumido pelas atividades, podendo haver sobra do recurso.

No segundo caso, a variável de decisão do dual é maior que zero e a variável de folga do primal é igual a zero. Nesse caso, todo recurso é consumido pelas atividades, portanto, não há sobra do recurso.

Quando o valor da variável de decisão do primal é zero na solução ótima, essa atividade não seria realizada, pois o custo é maior do que o lucro. Se o valor da variável de decisão do primal é maior do que zero, então o valor implícito da produção de uma unidade do produto i será c_i, ou seja, o valor ou lucro desse produto i.

Quando falamos dessas possibilidades, estamos falando sobre um conceito da programação linear que liga a Teoria da dualidade à análise de otimalidade, chamado de coluna preço-sombra, que, de acordo com Hillier e Lieberman (2013), mede o valor marginal do recurso, ou seja, a taxa que aumentaria o valor da função objetivo, aumentando-se a quantidade do recurso que está sendo disponibilizado.

Pesquise mais

Caro aluno, vamos aprofundar os nossos conhecimentos nas relações entre o primal e o dual?

Nós conseguimos iniciar os nossos estudos sobre as relações entre primal e dual quando falamos sobre a Teoria da dualidade, mas o capítulo do livro do Hillier e Lieberman (2013), sobre Teoria da Dualidade e análise de sensibilidade, traz algumas outras relações primal-dual que sugirerimos que você leia! As páginas recomendadas para consulta são da 194 até a 199.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/>. Acesso em: 12 out. 2017.

E a análise de sensibilidade, também denominada análise pós-otimização? O que é esse tipo de análise e quais as suas aplicações?

Como já vimos anteriormente, as hipóteses da programação linear dificilmente são satisfeitas nos problemas reais, principalmente a hipótese de certeza. Apenas relembrando, a hipótese de certeza dizia que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são assumidos como conhecidos. Essa hipótese vale tanto para os parâmetros da função objetivo quanto para as restrições funcionais, de modo que são não valores aleatórios.

Então, o que ocorre se realizarmos mudanças nos valores dos parâmetros do modelo (coeficientes da função objetivo, coeficientes tecnológicos e constantes do lado direito) diante de alguma alteração ocorrida no problema? Será que a nossa solução permanecerá ótima até que nível de alteração nesses parâmetros? E com relação ao problema dual que vimos anteriormente?

Vamos ver alguns exemplos de alterações para responder aos questionamentos anteriores?

O primeiro caso envolve a introdução de uma nova variável no modelo. Como no exemplo da indústria de brinquedos, apresentado no box *Exemplificando*, antes produzíamos bonecos e lousas. E se agora nós quiséssemos fabricar um terceiro produto? Será que isso alteraria a solução ótima que nós já encontramos?

A primeira coisa que teríamos que fazer é acrescentar essa nova variável na função objetivo e nas restrições funcionais existentes. Já no problema dual, como nós vimos anteriormente, a transformação de um problema primal num dual, a única diferença que teríamos é a existência de mais uma restrição funcional. Será que se a nova variável assumisse valor zero, a solução anterior ainda seria ótima? Lembrando que agora teremos uma nova restrição no nosso modelo dual, o que implica numa nova análise para verificar se nossa solução ótima permanece viável no novo modelo. Hillier e Lieberman (2013) demonstram que sim, ou seja, se a nova variável de decisão for igual a zero, a solução ótima anterior se mantem ótima e para analisar o impacto da viabilidade da solução, podemos utilizar os preço-sombra.

E se acrescentarmos uma nova restrição ao nosso modelo? Precisamos verificar de que tipo é essa restrição. As chamadas restrições redundantes, ou seja, repetitivas, não afetam a solução ótima, mas caso a restrição afete a solução, teremos que levá-la em conta na resolução e verificar os seus possíveis impactos na solução do problema.

E se mudarmos os coeficientes de uma variável não básica no nosso modelo? Como vimos anteriormente, as variáveis não básicas são configuradas em zero. Para responder a essa pergunta, é necessário conhecer o coeficiente crítico para a estabilidade da solução. Em outras palavras, precisamos verificar o valor que fará com que a variável se transforme em básica e altere a solução.

Em linhas gerais, nos interessa saber quais são os parâmetros sensíveis, ou seja, aqueles que não podem ser alterados sem alterar a solução ótima. Em problemas menores, é mais simples verificar os impactos dos parâmetros sensíveis, de modo que é suficiente ir aplicando o simplex e verificando o que ocorre com a nossa solução. Contudo, como ocorre em problemas mais complexos?

Os problemas que em geral são encontrados na prática, apresentam uma certeza menor com relação aos parâmetros que serão utilizados na modelagem, ou seja, é realizada uma estimativa. Além disso, nesse mesmo tipo de problema talvez não seja viável replicar o simplex desde o início para buscar possíveis alterações na solução a cada mudança num parâmetro. Nesses casos, é importante termos inicialmente em mente os exemplos que já vimos como o acréscimo de variáveis de decisão, o acréscimo de restrições, entre outros.

Hillier e Lieberman (2013) destacam que em caso de mudanças no modelo original, inicialmente deveríamos verificar se a solução básica viável ótima original ainda é ótima ou se ela tornou-se inviável. Caso continue ótima, poderíamos utilizá-la para reiniciar o simplex como solução básica inicial. Dependendo do grau de mudanças no modelo, chegar a uma nova solução ótima por meio da solução ótima anterior pode ser um procedimento rápido.

Hillier e Lieberman (2013) sintetizaram alguns procedimentos para a análise de sensibilidade, que estão descritos a seguir.

O primeiro passo para a análise de sensibilidade consiste na revisão do modelo, passo esse no qual faremos todas as alterações desejadas ou necessárias no nosso modelo. Em seguida, devemos fazer uma revisão no quadro final do simplex, pois desse modo podemos verificar as mudanças que devem ser executadas em função do passo anterior.

Posteriormente, precisamos converter o nosso quadro (similiar ao que fizemos no simplex) para avaliar a solução básica atual. Caso a solução seja viável, ou seja, todas as variáveis básicas na coluna do lado direito do simplex ainda são não negativas, daremos prosseguimento com o teste de otimalidade.

O teste de otimalidade será utilizado para verificar se a solução é ótima, ou seja, verificaremos se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos, similar ao que foi feito no simplex anteriormente.

Caso a solução não passe pelo teste de viabilidade ou de otimalidade, uma nova solução ótima pode ser obtida, utilizando o quadro atual como simplex atual.

Uma outra forma de trabalhar com a análise de sensibilidade é por meio de planilhas, como no Microsoft Office Excel, utilizando o suplemento Solver. Trata-se de um método simples no qual são avaliadas as alterações provocadas individualmente pela alteração de cada parâmetro e não mais de um parâmetro simultaneamente. Os detalhes da análise de sensibilidade em planilhas serão tratados mais adiante.a

Assimile

Agora nós já sabemos alguns conceitos e aplicações da Teoria da dualidade e da análise de sensibilidade.

Começando pela Teoria da dualidade, descobriu-se que para todo problema de programação linear verificaram que existia um outro problema associado a ele, chamado de dual. O problema original era chamado primal.

Para obter o modelo dual, precisamos levar em conta que os coeficientes da função objetivo do problema primal se transformarão nas constantes do lado direito no dual. De modo semelhante, as constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual. Já os coeficientes tecnológicos do primal também são os coeficientes tecnológicos no dual, mas em posição diferente.

A análise de sensibilidade é utilizada quando precisamos ou desejamos verificar quais são os parâmetros sensíveis, ou seja, os parâmetros que não podemos alterar sem modificar a solução ótima.

Sem medo de errar

Você está investindo na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Agora, então, você já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução ótima encontrada anteriormente, uma vez que ela está sendo implementada.

Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que precisa dessas informações para manter sua empresa crescendo.

Como apresentado por Hillier e Lieberman (2013), a primeira coisa a ser feita para a análise de sensibilidade consiste na revisão do modelo, passo esse no qual faremos todas as alterações desejadas ou necessárias no nosso modelo. Seria o momento no qual verificaremos os primeiros resultados do negócio e levantaríamos os principais pontos a serem melhorados no nosso modelo.

Em seguida, devemos fazer uma revisão no quadro final do simplex, pois desse modo podemos verificar as mudanças que devem ser executadas em função do passo anterior. Nesse momento, consideramos essencial que o simplex tenha sido executado adequadamente, sem que nenhum erro algébrico possa comprometer a obtenção da solução ótima.

Em seguida, precisamos converter o nosso quadro (similar ao que fizemos no simplex) para avaliar a solução básica atual com relação as modificações propostas. Caso essa solução seja viável, ou seja, todas as variáveis básicas na coluna do lado direito do simplex ainda são não negativos, passaremos para o teste de otimalidade.

O teste de otimalidade será utilizado para verificar se a solução é ótima após as alterações no nosso modelo, ou seja, verificaremos se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos, similar ao que foi feito no simplex, anteriormente quando encontramos a solução ótima.

Caso a solução não passe pelo teste de viabilidade ou de otimalidade, uma nova solução ótima pode ser obtida utilizando o quadro atual com o simplex atual. Nesse caso, teremos que obter uma nova solução, uma vez que o refinamento do modelo, proposto, anteriormente, afetou a nossa solução ótima encontrada anteriormente.

Parabéns, mais um desafio vencido e assim você fará a sua empresa crescer!

Avançando na prática

Investimento financeiro e a modelagem do problema dual para posterior análise de sensibilidade

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhamentos sobre os dois tipos de investimentos, conforme o Quadro 2.16.

Quadro 2.16 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada cem reais por mês)	Investimento B (a cada cem reais por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pela programação linear. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução.

Contudo, é sabido que, futuramente, estará à disposição do cliente um novo tipo de investimento C, cujo retorno espera-se que seja entre R$ 2,50 a R$ 2,75.

Diante disso, embora o investimento C ainda não esteja disponível, você prevê a necessidade de fazer uma análise de sensibilidade e, para isso, observa que é necessário construir o problema dual para o caso exposto. Como construiria o problema dual para o fenômeno em análise?

Resolução da situação-problema

O primeiro passo é formular o problema de acordo com o modelo de programação linear, conforme já feito na Seção 2.1

Em primeiro lugar o modelo matemático que descreve o problema é:

$\mathbf{x_1}$ = investimento em A (múltiplo de R$100,00)

$\mathbf{x_2}$ = investimento em B (múltiplo de R$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 12$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

E

$0 \leq x_1,\ x_2$

Posteriormente, deve-se construir o modelo dual:

$$\min W = 12y_1 + 12y_2 + 8y_3$$

Portanto, agora temos três variáveis de decisão. E as restrições funcionais?

$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 2$$

Com relação à restrição de não negatividade, todos os valores das novas variáveis de decisão continuam sendo maiores ou iguais a zero.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Parabéns, mais uma etapa vencida!

Faça valer a pena

1. Sobre o problema dual, analise as afirmações I, II e III.

I. Os coeficientes da função objetivo do primal se transformam nas constantes do lado direito no dual.

II. As constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual.

III. Os coeficientes tecnológicos do primal são os coeficientes tecnológicos no dual e nas mesmas posições.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) ou Falso (F) e selecione a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) V, F, F.

b) V, F, V.

c) F, V, F.

d) F, F, V.

e) V, V, F.

2. Na análise de sensibilidade, aplica-se um teste para verificar se a solução é ótima, ou seja, verificar se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos. Caso a solução não passe pelo teste, uma nova solução ótima pode ser obtida utilizando o quadro atual como o simplex atual.

A qual teste o texto se refere?

a) Teste de sensibilidade.

b) Teste de otimalidade.

c) Teste de variabilidade.

d) Teste de dualidade.

e) Teste de operacionalidade.

3. No tocante à interpretação econômica do problema dual, há quatro casos típicos que podem ser descritos e, para todos eles, é necessário ter o entendimento de __________. Um dos casos ocorre quando a variável de folga do problema __________ é maior do que zero e a ___________ do dual for igual a zero. Neste caso, entendemos que pode haver ___________ do recurso.

Assinale a alternativa que completa corretamente a frase

a) Variáveis de decisão; dual; variável de folga; sobra.

b) Variáveis de folga; primal; variável de decisão; falta.

c) Variáveis de decisão; primal; variável de folga; sobra.

d) Variáveis de folga; dual; variável de decisão; falta.

e) Variáveis de folga; primal; variável de decisão; sobra.

Referências

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

Software de otimização: uso do solver do Excel

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores conhecemos a origem da Pesquisa Operacional, sua importância no processo de tomada de decisão e o conceito de otimização de uma solução. Entendemos também a importância de formular corretamente o problema, coletar e utilizar dados coerentes e pertinentes para que a Pesquisa Operacional seja utilizada como uma excelente ferramenta gerencial.

Um dos problemas mais estudados na Pesquisa Operacional diz respeito aos Problemas de Programação Linear, e resolvemos esses problemas por meio do método gráfico e Algoritmo SIMPLEX. Percebemos que a resolução dos problemas de programação linear pelo simplex tabular exige muita atenção devido às inúmeras repetições do procedimento, o que pode provocar erros nos cálculos e, consequentemente, a solução encontrada não será a ótima. Diferentemente de quando a Pesquisa Operacional se originou, atualmente, é possível utilizar o computador para auxiliar nos cálculos por meio de planilhas eletrônicas.

Na primeira seção desta unidade, vamos utilizar a ferramenta solver da planilha MS Excel ® para resolver problemas de Pesquisa Operacional. Iremos montar o modelo na planilha segundo a função objetivo e as restrições impostas, analisaremos o resultado calculado e interpretaremos os relatórios fornecidos pelo solver.

Segundo Slack, Chambers e Johnston (2002) os cinco objetivos da função produção são: Custo, Qualidade, Confiabilidade, Flexibilidade e Rapidez, ou seja, a Administração da Produção deve gerenciar os recursos de forma a obter os melhores resultados da empresa. Dentro desta realidade, como a empresa pode distribuir seus bens ao menor custo de transporte possível? Para esta questão, veremos os problemas de transporte e de designação que serão vistos na segunda e terceira seções desta unidade.

Para contextualizar melhor o cenário, vejamos a seguinte situação: Uma empresa possui três plantas, em cidades distintas, onde fabrica três tipos diferentes de eixos dentados utilizados pelas indústrias automobilísticas. Para a produção desses eixos são utilizados quatro tipos diferentes de máquinas (furadeira, torno, fresadora e retífica). As máquinas oferecem uma determinada quantidade de horas disponíveis que deve ser compartilhada para a produção dos três produtos. Cada produto gera uma margem de lucro diferente. A empresa deseja obter o maior lucro possível e para isso precisa saber: quantos eixos de cada tipo devem ser produzidos?

Outra decisão que a empresa deve tomar diz respeito a sua distribuição. A empresa precisa minimizar seus custos logísticos atendendo a demanda de seus clientes espalhados em três capitais diferentes. Qual o valor mínimo de transporte?

Ainda sobre a distribuição, a empresa estuda designar que cada planta irá atender cada um de seus clientes localizados em estados diferentes. Essa decisão diminuirá os custos de transporte? O gerente geral da empresa delegou para você, gerente industrial, fazer o estudo das questões apresentadas, e você deverá apresentar as soluções encontradas em um relatório técnico que será utilizado pelo gerente geral na próxima reunião da diretoria.

Ao final da unidade, você será capaz de construir modelos de problemas de Pesquisa Operacional no MS Excel, bem como utilizar a ferramenta solver para a solução; formular e resolver problemas de transporte e de designação.

Está pronto para esse novo desafio? Quer aumentar seu conhecimento? Lembre-se de que a riqueza material pode ser perdida, mas a riqueza que o conhecimento nos dá, nunca nos é tirada.

Seção 3.1

Uso do Solver na resolução de problemas de pesquisa operacional

Diálogo aberto

Já estudamos como resolver problemas de Programação Linear envolvendo o compartilhamento de recursos por meio dos métodos gráfico e simplex tabular. Vimos que o método gráfico está limitado ao número de variáveis (duas) e no simplex a dificuldade está nas repetições do procedimento através das diversas iterações que pode levar a erros.

Veremos nessa seção como utilizar a ferramenta solver do MS Excel para resolver problemas de Pesquisa Operacional envolvendo maior número de variáveis e restrições que tornariam a solução "manual" penosa, aumentando a margem de erros, e para isso é preciso que o estudante saiba construir o modelo corretamente, conforme estudado nas unidades anteriores.

Para facilitar nossos estudos, vamos usar uma situação real, porém, simplificada: Uma empresa possui três plantas, em cidades distintas, em todas as fábricas são produzidos três tipos diferentes de eixos dentados utilizados pelas indústrias automobilísticas. O processo de fabricação desses eixos inclui usinagem em quatro tipos diferentes de máquinas (furadeira, torno, fresadora e retífica).

Essas máquinas também são utilizadas em outros produtos produzidos pela empresa, portanto oferecem uma quantidade limitada de horas disponíveis que deve ser compartilhada para a produção dos três produtos (eixos dentados). Cada produto é vendido com preços diferentes e gera uma margem de lucro diferente.

Cada eixo é uma variável. Chamaremos os três modelos dos eixos dentados de x_1, x_2 e x_3.

O lucro unitário de x_1, x_2 e x_3 é de, respectivamente, R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00.

É conhecido o tempo diário disponível de cada máquina. A furadeira está disponível 180 minutos, o torno 280 minutos, a fresadora 300 minutos e a retífica 380 minutos.

Para a produção dos eixos são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 (x_1) - Furadeira: 18 min; Torno: 32 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 30 min.

Eixo modelo 2 (x_2) - Furadeira: 25 min; Torno: 30 min; Fresadora: 35 min; Retífica: 38 min.

Eixo modelo 3 (x_3) - Furadeira: 22 min; Torno: 35 min; Fresadora: 30 min; Retífica: 35 min.

Diante desse dilema, quanto à programação da produção, a empresa deseja obter o maior lucro possível. Para isso, você como Gerente Industrial da planta deve decidir: quantos eixos de cada tipo devem ser produzidos?

Agora é hora de mostrar o que você aprendeu; bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, a fim de melhor compreender os conceitos e aplicação da ferramenta Solver, vamos iniciar com um exemplo.

Uma empresa possui três plantas diferentes que produzem três tipos de eixos dentados e o objeto de estudo é maximizar o lucro total, para isso, deve-se conhecer a quantidade a ser produzida de cada eixo considerando a restrição de tempo de cada equipamento e o lucro unitário de cada eixo produzido.

Para facilitar o entendimento de como modelar o problema na planilha Excel e utilizar a ferramenta solver para resolvê-lo, vamos utilizar os dados de uma segunda planta e utilizar como exemplo.

Para a produção desses eixos são utilizados quatro tipos diferentes de máquinas (furadeira, torno, fresadora e retífica). Vamos chamar os três modelos dos eixos dentados de x_1, x_2 e x_3, considerar que os lucros unitários de x_1, x_2 e x_3 são iguais em todas as plantas e que seu valor é de, respectivamente, R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00.

Na segunda planta, o tempo diário disponível de cada máquina é diferente devido à produção de outros produtos voltados à construção de máquinas operatrizes. A furadeira está disponível 200 minutos, o torno 360 minutos, a fresadora 420 minutos e a retífica 400 minutos.

Para a produção dos eixos são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 (x_1) - Furadeira: 15 min; Torno: 30 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 45 min.

Eixo modelo 2 (x_2) - Furadeira: 22 min; Torno: 25 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 35 min.

Eixo modelo 3 (x_3) - Furadeira: 18 min; Torno: 45 min; Fresadora: 42 min; Retífica: 40 min.

A justificativa para que os tempos necessários de cada máquina para a produção dos eixos sejam diferentes entre as plantas é de que máquinas têm uma redução de produtividade com o passar do tempo de vida útil, independentemente de uma manutenção eficiente.

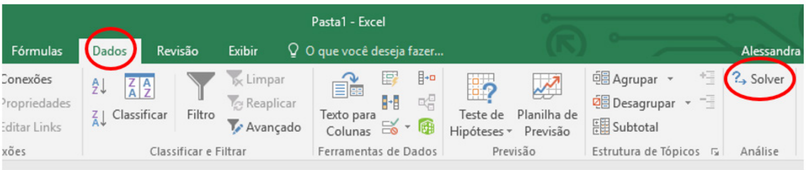
Reflita

Conforme já vimos, a programação linear está baseada em quatro suposições: Certeza, Aditividade, Proporcionalidade e Divisibilidade (LACHTERMACHER, 2016). Diante dessas suposições, os resultados podem apresentar valores fracionados, ou seja, valores não inteiros. Caso a solução que estamos procurando seja do tipo: Quantos produtos devem ser produzidos? Qual a resposta diante de um número fracionado?

Já estudamos como construir modelos, e esse conhecimento é importante para quando formos usar a ferramenta solver do MS Excel.

O Excel é muito útil para efetuar os cálculos, entretanto, de nada adianta a ferramenta se não soubermos estruturar a planilha com os dados referentes ao problema, ou seja, a função objetivo, a definição das variáveis de decisão, os coeficientes das variáveis, as restrições e a condição de não negatividade. Antes de iniciarmos, vamos verificar se a ferramenta solver está habilitada. A Figura 3.1 mostra se a ferramenta solver está habilitada.

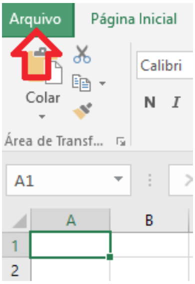
Figura 3.1 | O solver está localizado na aba "Dados"



Fonte: elaborada pelo autor.

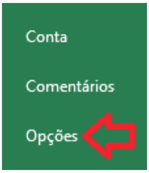
Caso a ferramenta solver não esteja habilitada, clique na aba "Arquivo", conforme a Figura 3.2

Figura 3.2 | Clique na aba Arquivo do MS Excel



Fonte: elaborada pelo autor.

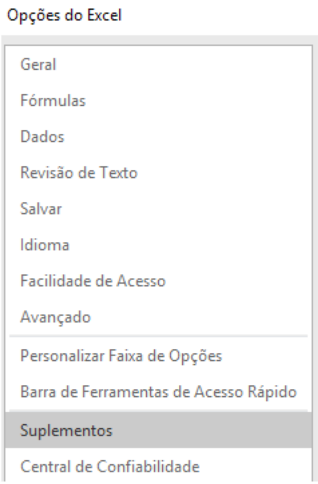
Figura 3.3 | "Opções" encontra-se na última linha à direita da tela



Fonte: elaborada pelo autor.

Selecione "Suplementos", como ilustrado na Figura 3.4.

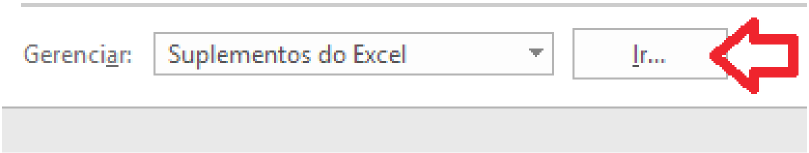
Figura 3.4 | Quadro de opções oferecidas pelo Excel



Fonte: elaborada pelo autor.

Clique em "Ir", como mostrado na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Clicar em "Ir" para abrir as opções de Suplementos do Excel



Fonte: elaborada pelo autor.

Selecione a opção "Solver" e clique em OK.

Retomando nosso exemplo, vamos construir o modelo iniciando com a definição das variáveis. Chamaremos os três modelos dos eixos dentados de x_1, x_2 e x_3.

O lucro unitário de x_1, x_2 e x_3 é de, respectivamente: R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00.

É conhecido o tempo diário disponível de cada máquina. A furadeira está disponível 200 minutos, o torno 360 minutos, a fresadora 420 minutos e a retífica 400 minutos.

Para a produção dos eixos são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 (x_1) - Furadeira: 15 min; Torno: 30 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 45 min.

Eixo modelo 2 (x_2) - Furadeira: 22 min; Torno: 25 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 35 min.

Eixo modelo 3 (x_3) - Furadeira: 18 min; Torno: 45 min; Fresadora: 42 min; Retífica: 40 min.

Temos o modelo final:

$$MaxZ : 1.850x_1 + 1.800x_2 + 1.900x_3$$

Sujeito a:

$$15x_1 + 22x_2 + 18x_3 \leq 200$$

$$30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \leq 360$$

$$40x_1 + 40x_2 + 42x_3 \leq 420$$

$$45x_1 + 35x_2 + 40x_3 \leq 400$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Em uma planilha em branco, vamos colocar os coeficientes das condições de restrições e os valores das disponibilidades. A coluna com o sinal de "menor ou igual" é somente ilustrativo. Acrescentamos a função objetivo e as células variáveis e uma coluna da quantidade de recursos que serão utilizadas.

Os valores iniciais nas células variáveis serão iguais a um e essas células serão alteradas, após o cálculo, pelas quantidades a serem produzidas para se obter o máximo lucro. Os valores da coluna referente à Quantidade Utilizada são representados pelas Figuras 3.6; 3.7; 3.8; e 3.9 respectivamente.

Figura 3.6 | Fórmula refere a quantidade utilizada da Furadeira

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Coeficientes das Restrições					
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	=B4*B11+C4*C11+D4*D11
5	Torno	30	25	45	≤	360	100
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	122
7	Retífica	45	35	40	≤	400	120
8							
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo
10							R$5.550,00
11	VARIÁVEIS	1	1	1			
12							

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.7 | Fórmula refere a quantidade utilizada do Torno

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Coeficientes das Restrições						
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada	
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	55	
5	Torno	30	25	45	≤	360	=B5*B11+C5*C11+D5*D11	
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	122	
7	Retífica	45	35	40	≤	400	120	
8								
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo	
10							R$5.550,00	
11	VARIÁVEIS	1	1	1				

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.8 | Fórmula refere a quantidade utilizada da Fresadora

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Coeficientes das Restrições					
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	55
5	Torno	30	25	45	≤	360	100
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	=B6*B11+C6*C11+D6*D11
7	Retífica	45	35	40	≤	400	120
8							
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo
10							R$5.550,00
11	VARIÁVEIS	1	1	1			
12							

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.9 | Fórmula refere a quantidade utilizada da Retífica

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Coeficientes das Restrições						
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada	
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	55	
5	Torno	30	25	45	≤	360	100	
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	122	
7	Retífica	45	35	40	≤	400	=B7*B11+C7*C11+D7*D11	
8								
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo	
10							R$5.550,00	
11	VARIÁVEIS	1	1	1				
12								

Fonte: elaborada pelo autor.

Em uma outra linha devemos colocar os coeficientes da função objetivo. No nosso problema são os valores unitários do lucro gerado pela venda de um produto e estão nas células B11, C11 e D11.

Na célula G10 será apresentado o valor do lucro maximizado, e para isso devemos adicionar a fórmula referente ao lucro obtido.

Figura 3.10 | Fórmula que calculará o Máximo Lucro obtido

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Coeficientes das Restrições						
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada	
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	55	
5	Torno	30	25	45	≤	360	100	
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	122	
7	Retífica	45	35	40	≤	400	120	
8								
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo	
10							=B9*B11+C9*C11+D9*D11	
11	VARIÁVEIS	1	1	1				

Fonte: elaborada pelo autor.

A montagem final da planilha pode ser vista na Figura 3.11.

Figura 3.11 | Modelagem final na planilha Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Coeficientes das Restrições					
3		x1	x2	x3		Disponibilidade	Quantidade utilizada
4	Furadeira	15	22	18	≤	200	55
5	Torno	30	25	45	≤	360	100
6	Fresadora	40	40	42	≤	420	122
7	Retífica	45	35	40	≤	400	120
8							
9	Max Z	R$1.850,00	R$1.800,00	R$1.900,00			Lucro máximo
10							R$5.550,00
11	VARIÁVEIS	1	1	1			

Fonte: elaborada pelo autor.

O *layout* apresentado na planilha teve como objetivo tornar o entendimento o mais fácil possível, e nada impede de que os dados sejam colocados na forma de uma tabela como o *tableau* inicial é construído no método simplex tabular. O objetivo principal é que você consiga criar e avaliar as fórmulas e relações entre as variáveis, coeficientes e restrições de forma analítica.

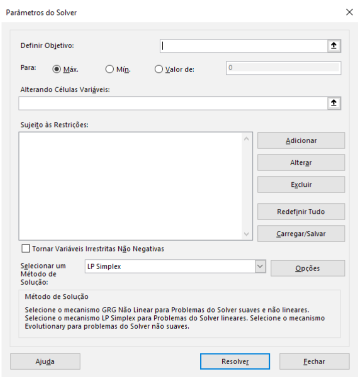
Como exemplo, vamos analisar a fórmula da função objetivo da planilha. Como o objetivo de nossa situação é maximizar o lucro, e conhecendo os lucros unitários de cada eixo vendido, a fórmula que representa o objetivo é a somatória do produto da quantidade produzida de cada eixo pelos seus respectivos lucros unitários. Note que se houver um erro na formulação, o resultado calculado não será a solução ótima.

Assimile

O solver é uma ferramenta muito útil no estudo da Pesquisa Operacional. Entretanto, lembre-se de que as planilhas somente facilitam os cálculos e evitam os erros que podem ser cometidos devido à repetitividade desses cálculos. É necessário que você entenda que o mais importante é ter um sólido conhecimento na construção de modelos, pois a construção correta dos modelos garantirá que os cálculos feitos pela planilha levarão à solução ótima do problema. Portanto, estude até assimilar como formular corretamente os parâmetros que alimentarão o solver.

Uma vez montada a planilha, acionamos a ferramenta solver, e se abrirá o quadro visto na Figura 3.12.

Figura 3.12 | Quadro de preenchimento dos parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor.

No espaço Definir Objetivo deve ser selecionada a célula com a fórmula da função objetivo. No nosso exemplo, a célula da função objetivo é G10. Basta selecionar a célula com o *mouse*.

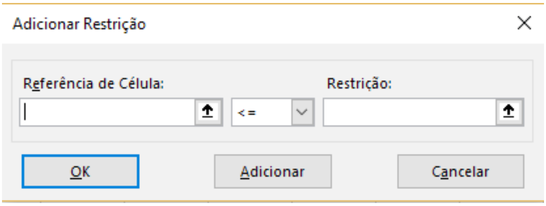
Selecionamos a opção Max (maximizar) no espaço Para: por se tratar de um problema de maximização do resultado.

As células variáveis são colocadas na caixa "Alterando Células Variáveis" que no nosso exemplo são as células B11, C11 e D11. Com o *mouse*, clique com o botão esquerdo em B11 e arraste nas três células.

Por se tratar de um problema de programação linear, selecione a opção LP Simplex (Programação Linear Simplex) como método de solução.

As restrições são inseridas clicando o botão Adicionar, que abrirá a caixa conforme a Figura 3.13.

Figura 3.13 | Quadro de adição das restrições



Fonte: elaborada pelo autor.

Na caixa esquerda são colocadas as células da Quantidade Utilizada; na caixa direita as células com a Disponibilidade dos recursos; e no centro o símbolo referente à inequação que depende das condições do problema analisado.

Exemplificando

Podemos perceber que a ferramenta solver do MS Excel é muito útil e versátil na resolução de problemas de Pesquisa Operacional.

Essa versatilidade está no fato de podermos "misturar" as condições impostas pelo problema sem muitas preocupações. Um exemplo da facilidade que o solver nos proporciona está no fato de podermos resolver problemas com as diversas condições impostas pelas restrições sem a necessidade de adaptações na hora de construir os modelos. Condições do tipo "menor ou igual", "maior ou igual", "igual a" podem estar no mesmo modelo sem nenhum problema.

Exemplo:

Maximizar $x + 3y$

Sujeito a:

$$5x - 3y \geq 10$$
$$7x + 4y = 34$$
$$4x + 13y \leq 154$$
$$x \geq 0;\_\ y \geq 0$$

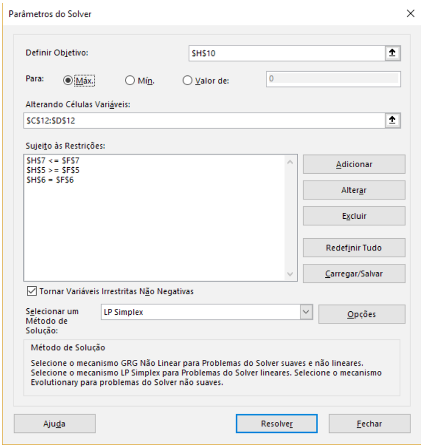
O modelo na planilha fica conforme a Figura 3.14, os parâmetros do Solver conforme a Figura 3.15 e a solução ótima conforme Figura 3.16.

Figura 3.14 | Modelagem final na planilha Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			**Coeficiente das**					**Quantidade**
3			**Restrições**			**Disponibilidade**		**Utilizada**
4			x_1	x_2				
5		Recurso 1	5	-3	≥	10		2
6		Recurso 2	7	4	=	34		11
7		Recurso 3	4	13	≥	154		17
8								
9								**Valor Máximo**
10		Max Z	1	3				4
11								
12		VARIÁVEIS	1	1				

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.15 | Preenchimento dos parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor.

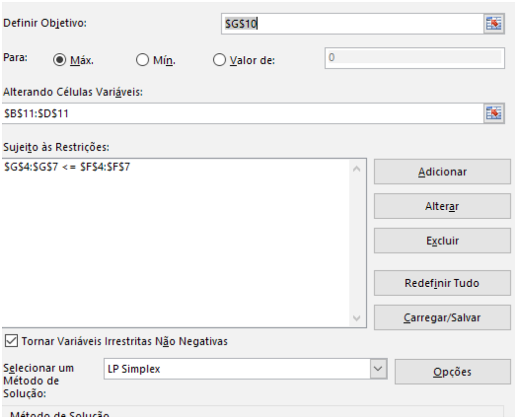
Figura 3.16 | Solução ótima dada pelo Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			**Coeficiente das Restrições**				**Disponibilidade**		**Recurso Utilizado**
3									
4			x_1	x_2	x_3				
5		Restrição 1	1,9	2,2	1,8	≤	25		25
6		Restrição 2	1,5	2,5	4,5	≤	32		32
7		Restrição 3	2,2	1,3	4,2	≤	37		37
8		Restrição 4	1,1	3,5	3,7	≤	40		25,3910275
9									
10		Max Z	5	6	7				74,72937771
11									
12		VARIÁVEIS	9,189580318	0,211287988	3,93054				

Fonte: elaborada pelo autor.

A condição de variáveis não negativas pode ser preenchida adicionando a condição com sendo uma restrição (conforme feito aqui), ou acionando a opção “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas”. A Figura 3.17 ilustra o preenchimento final dos parâmetros do SOLVER.

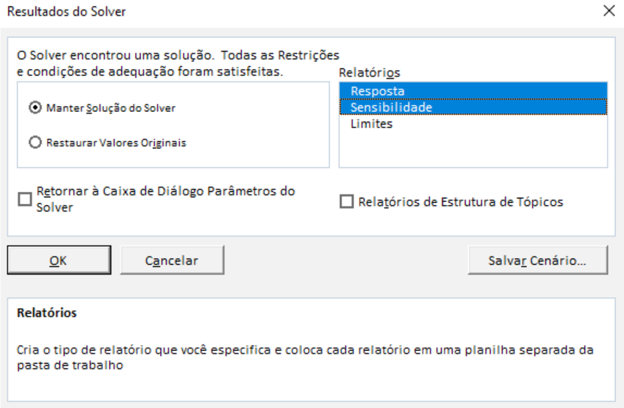
Figura 3.17 | Todos os Parâmetros do Solver preenchidos



Fonte: elaborada pelo autor.

Após completar o preenchimento dos parâmetros, clicando em “Resolver o Solver”, calculará o resultado otimizado. Havendo uma solução viável, as células variáveis terão seus valores alterados e apresentará um quadro conforme a Figura 3.18, onde existem as opções de manter a solução encontrada ou restaurar os valores originais. Também é possível exibir três tipos de relatórios, de Resposta, Sensibilidade e Limites, e para que os relatórios sejam exibidos, basta selecionar as opções apresentadas. Na Figura 3.18 foram selecionados os Relatórios de Resposta e Sensibilidade, mas é possível selecionar todas as alternativas, ou somente uma, dependendo da necessidade de quem analisará os resultados. Os Relatórios aparecerão como novas planilhas e podem ser visualizados nas abas localizadas na parte de baixo da tela.

Figura 3.18 | Quadro de opções de resultados após solução do Solver



Fonte: elaborada pelo autor.

O relatório de respostas do exemplo pode ser visto na Figura 3.19.

Figura 3.19 | Relatório de Respostas do exemplo de maximização

	A	B	C	D	E	F	G
13							
14	Célula do Objetivo (Máx.)						
15		**Célula**	**Nome**	**Valor Original**	**Valor Final**		
16		$G$10	Lucro máximo	R$19.044,25	R$19.044,25		
17							
18							
19	Células Variáveis						
20		**Célula**	**Nome**	**Valor Original**	**Valor Final**	**Número Inteiro**	
21		$B$11	VARIÁVEIS x1	2,300884956	2,300884956	Conting.	
22		$C$11	VARIÁVEIS x2	5,132743363	5,132743363	Conting.	
23		$D$11	VARIÁVEIS x3	2,920353982	2,920353982	Conting.	
24							
25							
26	Restrições						
27		**Célula**	**Nome**	**Valor da Célula**	**Fórmula**	**Status**	**Margem de Atraso**
28		$G$4	≤ Quantidade utilizada	200	$G$4<=$F$4	Associação	0
29		$G$5	≤ Quantidade utilizada	328,7610619	$G$5<=$F$5	Não-associação	31,23893805
30		$G$6	≤ Quantidade utilizada	420	$G$6<=$F$6	Associação	0
31		$G$7	≤ Quantidade utilizada	400	$G$7<=$F$7	Associação	0

Fonte: elaborada pelo autor.

O relatório de resposta mostra o valor final da função objetivo, as quantidades referentes às variáveis de decisão e a utilização dos recursos obedecendo as restrições.

No nosso exemplo, o máximo lucro possível é de R$ 19.044,25. As quantidades a serem fabricadas são de 2,30; 5,13; e 2,92 unidades dos modelos 1, 2 e 3 respectivamente. É certo que não é possível produzir 2,30 eixos. Portanto, nesse momento do nosso processo de aprendizagem, iremos admitir que o número de eixos produzidos são: 2, 5 e 3 dos modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

O segundo relatório disponível é o de sensibilidade e está ilustrado na Figura 3.20.

Figura 3.20 | Relatório de Sensibilidade do exemplo de maximização

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade
Planilha: [SOLVER.xlsx]SP1
Relatório Criado: 22/01/2018 23:54:44

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
$C$15	VARIÁVEIS x1	3,421828909	0	1850	119,2307692	171,8604651
$D$15	VARIÁVEIS x2	1,828908555	0	1800	376,4705882	88,06818182
$E$15	VARIÁVEIS x3	3,303834808	0	1900	142,1153846	345,9459459

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
$I$8	£ Quantidade Utilizada	180	11,43067847	180	35,69230769	14,09090909
$I$9	£ Quantidade Utilizada	280	37,75811209	280	18,23529412	30,27027027
$I$10	£ Quantidade Utilizada	300	10,89970501	300	43,07692308	53,95348837
$I$11	£ Quantidade Utilizada	287,7876106	0	380	1E+30	92,21238938

Fonte: elaborada pelo autor.

A interpretação da análise de sensibilidade foi estudada na Unidade 2, e vamos destacar a coluna “Reduzir Custo” e “Sombra Preço”, que são respostas do Dual do problema.

Sem medo de errar

Nesse novo desafio é preciso calcular o número de eixos a serem produzidos diante das restrições de tempo disponível de cada máquina, considerando o tempo de cada operação, de forma a conseguir o maior lucro possível.

Sabendo-se o lucro unitário de cada modelo, e conhecendo o tempo disponível de cada máquina e o tempo necessário para cada operação, pede-se para calcular a quantidade de cada modelo de eixo com o objetivo de maximizar o lucro.

Relatórios gerenciais servem como instrumentos que auxiliam na tomada de decisão e devem ser escritos de forma clara para facilitar a sua leitura e compreensão.

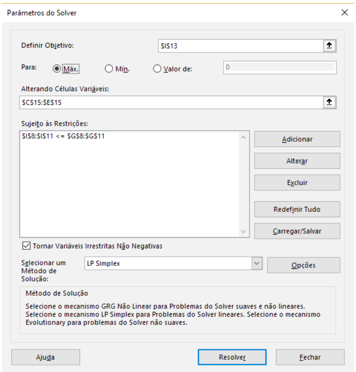
Você, como um bom Gerente Industrial que vem provando ser, pode começar seu relatório mostrando a construção do modelo na planilha Excel como mostrado na Figura 3.21. Posteriormente, mostre como os parâmetros de decisão foram incluídos no solver, como está ilustrado pela Figura 3.22.

Figura 3.21 | Modelo construído na planilha Excel como solução do exemplo

	B	C	D	E	F	G	I
2		Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel					
5–6		Coeficiente das Restrições				**Disponibilidade**	**Quantidade Utilizada**
7		x_1	x_2	x_3			
8	Furadeira	18	25	22	≤	180	65
9	Torno	32	30	35	≤	280	97
10	Fresadora	40	35	30	≤	300	105
11	Retífica	30	38	35	≤	380	103
12							**Máximo Lucro**
13	Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 5.550,00
15	VARIÁVEIS	1	1	1			

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.22 | Parâmetros do solver



Fonte: elaborada pelo autor.

E, finalmente, mostre a solução encontrada pelo Solver, como pode ser vista na Figura 3.23.

Figura 3.23 | Solução da SP encontrada pelo solver

	B	C	D	E	F	G	I
2		Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel					
5–6		Coeficiente das Restrições				**Disponibilidade**	**Quantidade Utilizada**
7		x_1	x_2	x_3			
8	Furadeira	18	25	22	≤	180	180
9	Torno	32	30	35	≤	280	280
10	Fresadora	40	35	30	≤	300	300
11	Retífica	30	38	35	≤	380	287,7876106
12							**Máximo Lucro**
13	Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 15.899,71
15	VARIÁVEIS	3,421828909	1,828908555	3,303834808			

Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos notar que o lucro máximo obtido com a fabricação dos eixos é de R$ 15.899,71.

Com o resultado referente às quantidades a serem produzidas, vemos números fracionados, ou seja, valores "quebrados". É certo que não é possível produzir 3,42 eixos. Portanto, nesse momento do nosso processo de aprendizagem, iremos admitir que o número de eixos produzidos são: 3, 1 e 3 dos modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

Como conseguir soluções com números inteiros será estudado na próxima unidade, quando veremos a Programação Inteira.

Parabéns por mais um desafio vencido. Você está provando ser um excelente Gerente Industrial e mostrando seu valor.

Avançando na prática

Minimização dos custos de produção

Descrição da situação-problema

A empresa fabricante dos eixos teve um aumento significativo em seus pedidos e não conseguirá atender a demanda somente com sua produção. Ela pretende terceirizar parte de sua produção e cabe a você como gerente industrial decidir quantos eixos de cada modelo pedir. Conhecendo a demanda mensal de cada eixo (considerando o mês com 20 dias úteis), os custos de produção própria e os custos de terceirização, como gerente industrial, você necessita responder sobre quantos eixos de cada modelo a empresa deve produzir e quantos deve terceirizar para que o custo seja o mínimo. Como você faria isso?

Demandas (unidades): $x_1 = 60$; $x_2 = 100$; $x_3 = 75$

Custos de Produção (R$/unid): $x_1 = 610$; $x_2 = 600$; $x_3 = 635$

Custos de Terceirização (R$/unid): $x_1 = 860$; $x_2 = 800$; $x_3 = 880$

Resolução da situação-problema

O modelo final do novo cenário pode ser visto na Figura 3.24 a seguir.

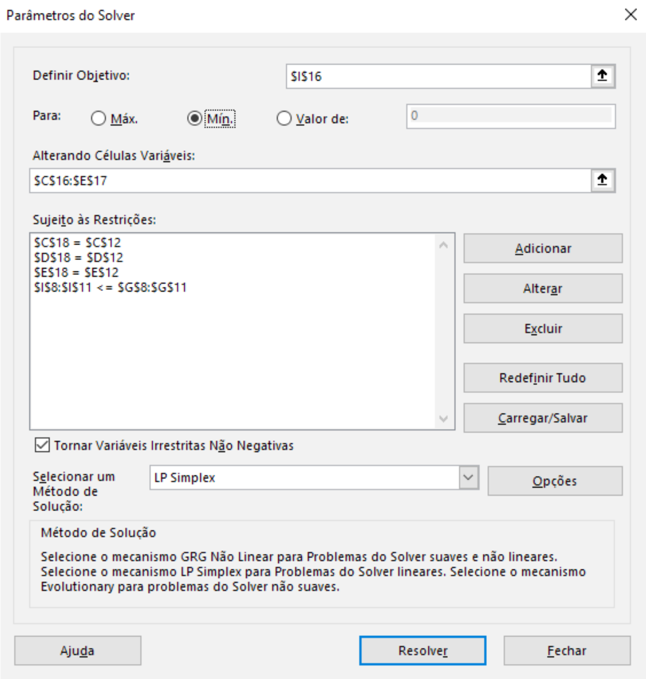
Figura 3.24 | Modelo da nova Situação Problema

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel						
3									
4									
5			Coeficiente das Restrições				Disponibilidade		Quantidade Utilizada
6									
7			x_1	x_2	x_3				
8		Furadeira	15	22	18	≤	4000		55
9		Torno	30	25	45	≤	7200		100
10		Fresadora	40	40	42	≤	8400		122
11		Retífica	45	35	40	≤	8000		120
12		Demanda	60	100	75				
13		Custo de Produção	R$ 610,00	R$ 600,00	R$ 635,00				
14		Custo de Terceirização	R$ 860,00	R$ 800,00	R$ 880,00				
15									Custo Total
16		Produção Própria	1	1	1				R$ 4.385,00
17		Produção Terceirizada	1	1	1				
18		Total	2	2	2				

Fonte: elaborada pelo autor.

Nos parâmetros do Solver, devemos acrescentar a restrições de demanda e, como o objetivo é achar o menor custo, alterar o objetivo para Min (minimizar). Os parâmetros preenchidos estão ilustrados na Figura 3.25.

Figura 3.25 | Preenchimento dos parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor.

O resultado encontrado pelo Solver está mostrado na Figura 3.26.

Figura 3.26 | Resultado encontrado pelo Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel						
3									
4									
5			Coeficiente das Restrições				Disponibilidade		Quantidade Utilizada
6									
7			x_1	x_2	x_3				
8		Furadeira	15	22	18	≤	4000		3953,125
9		Torno	30	25	45	≤	7200		6859,375
10		Fresadora	40	40	42	≤	8400		8400
11		Retífica	45	35	40	≤	8000		8000
12		Demanda	60	100	75				
13		Custo de Produção	R$ 610,00	R$ 600,00	R$ 635,00				
14		Custo de Terceirização	R$ 860,00	R$ 800,00	R$ 880,00				
15									Custo Total
16		Produção Própria	40,625	90,625	75				R$ 150.943,75
17		Produção Terceirizada	19,375	9,375	0				
18		Total	60	100	75				

Fonte: elaborada pelo autor.

Parabéns! Mais um obstáculo foi vencido.

Faça valer a pena

1. A Pesquisa Operacional teve como origem o esforço de grupos de cientistas durante a Segunda Guerra Mundial para solucionar problemas operacionais relacionados à guerra. Após a guerra, o conhecimento adquirido passa a ser aplicado também nas empresas, principalmente após a evolução da indústria de computadores, que permitiu a produção em escala com preços acessíveis às empresas. A constante evolução e inovação da informática permite que hoje problemas de Pesquisa Operacional sejam resolvidos com planilhas eletrônicas como o MS Excel.
A ferramenta do MS Excel para a solução de problemas de Pesquisa Operacional é o (a):

a) Tabela Dinâmica.
b) Solver.
c) Análise de Dados.
d) Teste de Hipóteses.
e) Planilha de Previsão.

2. Após acionar a ferramenta Solver do MS Excel, é aberto o quadro de preenchimento dos parâmetros do problema em estudo. As informações que devem ser fornecidas dizem respeito às células variáveis, definição do objetivo, método de solução e restrições que estão sujeitos.
Considere a planilha eletrônica ilustrada na Figura 3.27.

Figura 3.27 | Modelo do problema de maximização da margem de contribuição

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Utilização da ferramenta SOLVER para Problema de Maximização					
2								
3								
4								
5			**Coeficiente das Restrições**			**Disponibilidade**		**Quantidade Utilizada**
6								
7			x_1	x_2				
8		Recurso A	4	2	≤	100		6
9		Recurso B	2	2	≤	80		4
10		Recurso C	2	0	≤	40		2
11								
12		Margens	6	4				10
13								
14		VARIÁVEIS	1	1				

Fonte: elaborada pelo autor.

A fórmula correta da função cujo objetivo é maximizar a margem de contribuição, conforme os dados da Figura 3.27, pode ser escrita como:

a) =C8*$C$14+D8*$D$14.
b) =$C$14*(C8+C9+C10)+$D$14*(D8+D9+D10).
c) =C10*$C$14+D10*$D$14.
d) =$C$12*C14+$D$12*D14.
e) =$C$12*(C8+C9+C10)+$D$12*(D8+D9+D10).

3. O Solver do MS Excel também fornece três tipos de relatório (Resposta, Sensibilidade e Limites) após encontrar uma solução viável para o problema, o que auxilia a interpretar os resultados obtidos e cenários possíveis. Após a solução de um problema de otimização por meio do Solver, o relatório de resposta apresentou as informações segundo a Figura 3.28.

Figura 3.28 | Relatório de respostas do Solver

14	Célula do Objetivo (Máx.)					
15	**Célula**	**Nome**	**Valor Original**	**Valor Final**		
16	$J$12	Margens	10	180		
17						
18						
19	Células Variáveis					
20	**Célula**	**Nome**	**Valor Original**	**Valor Final**	**Número Inteiro**	
21	$C$14	VARIÁVEIS x1	1	10	Conting.	
22	$D$14	VARIÁVEIS x2	1	30	Conting.	
23						
24						
25	Restrições					
26	**Célula**	**Nome**	**Valor da Célula**	**Fórmula**	**Status**	**Margem de Atraso**
27	$H$8	£ Quantidade Utilizada	100	$H$8<=$F$8	Associação	0
28	$H$9	£ Quantidade Utilizada	80	$H$9<=$F$9	Associação	0
29	$H$10	£ Quantidade Utilizada	20	$H$10<=$F$10	Não-associação	20
30	$C$14	VARIÁVEIS x1	10	$C$14>=0	Não-associação	10
31	$D$14	VARIÁVEIS x2	30	$D$14>=0	Não-associação	30

Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo a leitura e interpretação do relatório de repostas, podemos afirmar que o Solver encontrou a seguinte solução:

a) A máxima margem é de 180; devem ser produzidas 10 unidades de x_1 e 30 unidades de x2 e todos os recursos foram utilizados integralmente.
b) A máxima margem é de 180; devem ser produzidas 30 unidades de x_1 e o Recurso C apresenta uma folga de 20.
c) A máxima margem é de 180; devem ser produzidas 10 unidades de x_1 e 30 unidades de x_2 e há uma folga de 20 unidades do recurso 3.
d) O relatório não informa a máxima margem.
e) O relatório correto para colher as informações é o relatório de sensibilidade.

Seção 3.2

Problema de transportes

Diálogo aberto

Um dos problemas clássicos da Pesquisa Operacional diz respeito ao problema de transporte. O problema ocorre quando se tem a necessidade de distribuir bens e serviços de várias fontes (como a empresa estudada e suas três plantas espalhadas) para diversas localidades (Destinos) onde se encontram os clientes. A capacidade produtiva das plantas é limitada ou fixa, e os clientes têm demandas específicas. O problema básico é determinar entre as diversas formas de distribuir o de menor custo.

Nessa seção estudaremos os problemas de transporte clássico. O desenvolvimento da solução é feito em três etapas. A primeira é achar a solução inicial básica. Essa etapa pode ser resolvida por três métodos: Método do Canto Noroeste; Método de aproximação Vogel; e Método do Menor Custo. Utilizaremos o Método do Canto Noroeste. O resultado inicial é testado para verificar se este obedece o critério de otimalidade, ou seja, se a solução encontrada é a ótima através do método dos multiplicadores. Caso o resultado não seja o ótimo, alteram-se as variáveis de forma a obter-se uma nova solução que será testada. Essa rotina é repetida até que se consiga a solução ótima do problema. Outro problema a ser estudado é o problema de transporte envolvendo pontos de transbordo. O exemplo mais conhecido de ponto de transbordo é o Centro de Distribuição que é muito utilizado por empresas varejistas.

Vimos na seção anterior que as plantas (da empresa produtora de eixos dentados) têm capacidade de produzir quantidades diferentes. Calculamos que a planta 1 produz diariamente 2 unidades do modelo 1, 5 unidades do modelo 2 e dois eixos do modelo 3. Na planta 2 a produção diária é de 3 unidades, 1 unidade e 3 unidades dos modelos 1, 2 e 3 respectivamente. E na terceira planta a produção diária é de 10 unidades, 15 unidades e 5 unidades, respectivamente, do modelo 1, modelo 2 e modelo 3.

O custo de transporte de cada fábrica para os clientes é dado pela Tabela 3.1 em R$/unidade.

Tabela 3.1 | Custo de transporte de Planta i para Destino j

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Planta 1	6	11	15
Planta 2	9	12	16
Planta 3	11	8	17

Fonte: elaborada pelo autor

Cada Destino tem necessidade, semanal, de cada modelo diferente. O cliente que está no Destino 1 precisa de 18 unidades do modelo 1, 19 unidades do modelo 2 e 8 unidades do modelo 3.

O cliente localizado no Destino 2 precisa de 13 unidades do modelo 1, 18 do modelo 2 e 12 unidades do modelo 3.

Finalmente, o cliente do Destino 3 tem necessidade de 14 unidades do modelo 1, 12 do modelo 2 e 10 unidades do modelo 3.

A empresa quer que o custo de transporte seja o mínimo possível. Você como Gerente Industrial deve responder: quantas unidades de cada modelo devem ser enviadas para cada cliente (Destino)?

Você já mostrou seu valor quando solucionou os desafios anteriores, e a empresa precisa de sua ajuda novamente.

A empresa conta com sua competência! Bons estudos!

Não pode faltar

O problema clássico de transporte tem como objetivo determinar a quantidade de produto a ser transportada a partir de diversas fontes para um conjunto de clientes em variadas localidades, de forma que o custo total de transporte seja mínimo.

A capacidade de fornecimento das fontes é limitada ou fixa, e os clientes têm demandas específicas a serem supridas. O problema básico é, portanto, determinar como distribuir produtos atendendo à limitação de fornecimento das fontes e a necessidade dos Destinos com o menor custo de transporte (ANDRADE, 2015).

Vamos utilizar um exemplo para facilitar o entendimento.

Conhecendo três fontes de suprimento de um determinado produto, que serão denominados como F_1, F_2 e F_3, com as seguintes capacidades de produção mensais:

F_1 = 10.000 unidades; F_2 = 15.000 unidades; F_3 = 5.000 unidades

Totalizando 30.000 unidades que devem atender a quatro armazéns indicados como D_1, D_2, D_3 e D_4 que possuem a seguinte demanda:

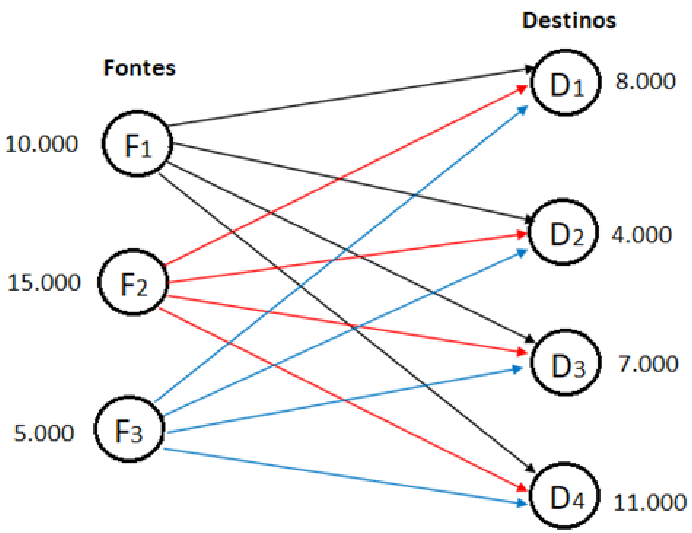
D_1 = 8.000 unidades; D_2 = 4.000 unidades; D_3 = 7.000 unidades; D_4 = 11.000 unidades

São ao total 30.000 unidades demandadas por mês.

Precisamos determinar quanto deve ser enviado de cada fonte (origem) para cada destino de forma a satisfazer as necessidades de demanda e com o menor custo de transporte.

A Figura 3.29 ilustra as fontes e destinos do exemplo.

Figura 3.29 | Rede de fontes e destinos



Fonte: Moreira (2007, p. 112).

Os custos de transporte são conhecidos e têm valores conforme a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 | Matriz de custo de transporte por unidade transportada

		Destino			
		D_1	D_2	D_3	D_4
Origem	F_1	13	8	9	12
	F_2	12	9	10	14
	F_3	8	8	9	6

Fonte: Moreira (2007, p. 113).

Para identificar as fontes e destinos utilizamos a notação x_{ij} onde x é a quantidade a ser despachada, i é a origem (a fonte) e j é o destino. Portanto, quando temos um transporte que tem como origem a fonte 3 que tem como destino o local 2, temos a anotação: x_{32}.

A Tabela 3.3 identifica todas as variáveis em relação à origem e ao destino transportado.

Tabela 3.3 | Representação das variáveis segundo a fonte de origem e seu destino

		Destino			
		D_1	D_2	D_3	D_4
Origem	F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
	F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
	F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Fonte: adaptado de Moreira (2007, p. 113).

O objetivo é calcular o menor custo total, e conhecendo os custos unitários, chegamos à fórmula:

$$13 * x_{11} + 8 * x_{12} + 9 * x_{13} + 12 * x_{14} + 12 * x_{21} + 9 * x_{22} + 10 * x_{23} + 14 * x_{24} +$$

$$+ 8 * x_{31} + 8 * x_{32} + 9 * x_{33} + 6 * x_{34}$$

Assimile

Caro aluno, a solução dos Problemas de Transporte passa por três etapas:

a) Determinar uma solução básica inicial.
b) Verificar a condição de otimalidade (a solução encontrada é analisada para ver se pode ser melhorada observando-se os coeficientes das variáveis não-básicas. Havendo solução melhor à encontrada, a condição de otimalidade não é obedecida) e caso esta não esteja cumprida, determinar a variável não-básica que deve entrar na base.
c) Determinar a variável básica que deve sair da base.

Solucionando o problema

1ª. Etapa – Solução básica inicial pelo Método do Canto Noroeste

O Método do Canto Noroeste é um dos métodos utilizados para se calcular a solução inicial básica nos problemas de transporte, os outros são o Método Vogel e o Método do Mínimo Custo.

No Método do Canto Noroeste, inicialmente, deve-se alocar a maior quantidade possível (respeitando capacidade, fonte e destino) à variável no canto superior esquerdo (noroeste). A linha (ou coluna) satisfeita é bloqueada. Com isso, as demais variáveis dessa linha ou coluna serão iguais a zero (ANDRADE, 2015).

A solução inicial pelo Método do Canto Noroeste utiliza a Tabela 3.4 para facilitar os cálculos

Tabela 3.4 | Tabela inicial para a solução pelo Método do Canto Noroeste.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	10.000
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15.000
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: adaptado de Moreira (2007, p. 113).

A célula superior esquerda (onde se localiza x_{11}) é preenchida com valor que pode ser atendida pela fonte F_1 e que possa atender a demanda D_1, no exemplo, o valor corresponde a 8.000 unidades, conforme visto na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 | Início da solução pelo Método do Canto Noroeste

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000	x_{12}	x_{13}	x_{14}	10.000
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15.000
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos verificar que a demanda é totalmente atendida, porém, a fonte F_1 ainda pode ofertar 2.000 unidades. Portanto, preenchemos a célula x_{12} com as 2.000 unidades disponíveis por F_1. O resultado é o visto na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 | Após a fonte F1 fornecer sua capacidade total

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000	2.000	x_{13}	x_{14}	10.000
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15.000
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

A origem F_1 fornece toda sua capacidade de produção, entretanto, o destino D_2 ainda deve ser atendido por mais 2.000 unidades que será provido pela fonte F_2. É possível visualizar a sistemática na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 | Continuação do Método do Canto Noroeste

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000	2.000	x_{13}	x_{13}	10.000
F_2	x_{21}	2.000	x_{23}	x_{24}	15.000
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor

Ao final do método temos a Tabela 3.8 com os resultados finais.

Tabela 3.8 | Resultado final do Método do Canto Noroeste

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000	2.000			10.000
F_2		2.000	7.000	6.000	15.000
F_3				5.000	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

As variáveis básicas iniciais são:

$x_{11} = 8.000$; $x_{12} = 2.000$; $x_{22} = 2.000$; $x_{23} = 7.000$; $x_{2,4} = 6.000$; $x_{34} = 5.000$ e aplicando os valores na função objetivo, temos o custo mínimo igual a: z = 328.000

Pesquise mais

Outros métodos para encontrar a solução básica inicial são o Método de aproximação de Vogel e o Método do Custo Mínimo. Pesquise como utilizar esses métodos alternativos para a solução básica inicial. No *link* abaixo o vídeo resolve um exemplo de solução para achar a solução básica inicial pelo Método Vogel.

MARTINS, Matusalém V. PO - 5 - 1 - transporte - solução básica inicial Vogel - exe 2. Tempo de duração: 9 minutos e 9 segundos. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=GRTLiJL0hdQ>. Acesso em: 15 jan. 2018.

2ª. Etapa - Verificar a condição de otimalidade

Obtida a solução inicial, é preciso verificar se a solução pode ser melhorada ou não. Para tal utilizaremos o método dos multiplicadores.

Para cada linha é associada uma variável auxiliar u, e para cada coluna uma variável auxiliar v. Para cada variável básica x_{ij}, que compõe a solução atual, escrevemos a equação da seguinte forma:

$C_{ij} - u_i - v_j = 0$ onde C_{ij} é o custo referente ao transporte de i para j e foi dado anteriormente.

Para as variáveis básicas temos:

$$C_{11} - u_1 - v_1 = 0 \rightarrow 13 - u_1 - v_1 = 0$$

$$C_{12} - u_1 - v_2 = 0 \rightarrow 8 - u_1 - v_2 = 0$$

$$C_{22} - u_2 - v_2 = 0 \rightarrow 9 - u_2 - v_2 = 0$$

$$C_{23} - u_2 - v_3 = 0 \rightarrow 10 - u_2 - v_3 = 0$$

$$C_{24} - u_2 - v_4 = 0 \rightarrow 14 - u_2 - v_4 = 0$$

$$C_{34} - u_3 - v_4 = 0 \rightarrow 6 - u_3 - v_4 = 0$$

Para solucionar as equações acima, vamos arbitrar o valor de $u_1 = 0$. Desta forma podemos calcular os valores de todos u e v.

Temos: $v_1 = 13$; $v_2 = 8$; $u_2 = 1$; $v_3 = 9$; $v_4 = 13$ e $u_3 = -7$

Para as variáveis não-básicas o procedimento deve ser o mesmo:

$$C_{13} - u_1 - v_3 = P_{13} \rightarrow 9 - u_1 - v_3 = P_{13} \rightarrow 9 - 0 - 9 = P_{13} \rightarrow P_{13} = 0$$

$$C_{14} - u_1 - v_4 = P_{14} \rightarrow 12 - u_1 - v_4 = P_{14} \rightarrow 12 - 0 - 13 = P_{14} \rightarrow P_{14} = -1$$

$$C_{21} - u_2 - v_1 = P_{21} \rightarrow 12 - u_2 - v_1 = P_{21} \rightarrow 12 - 1 - 13 = P_{21} \rightarrow P_{21} = -2$$

$$C_{31} - u_3 - v_1 = P_{31} \rightarrow 8 - u_3 - v_1 = P_{31} \rightarrow 8 - (-7) - 11 = P_{31} \rightarrow P_{31} = 4$$

$$C_{32} - u_3 - v_2 = P_{32} \rightarrow 8 - u_3 - v_2 = P_{32} \rightarrow 8 - (-7) - 8 = P_{32} \rightarrow P_{32} = 7$$

$$C_{33} - u_3 - v_3 = P_{33} \rightarrow 9 - u_3 - v_3 = P_{33} \rightarrow 9 - (-7) - 9 = P_{33} \rightarrow P_{33} = 7$$

O sistema calculado não é ótimo pois existem valores negativos (P_{14} e P_{21}). Para que se chegue à solução ótima não devem existir valores negativos entre as variáveis não-básicas. P_{ij} representa a taxa que a função objetivo irá evoluir à medida que a variável x_{ij} aumenta. Enquanto houver um P_{ij} negativo significa que é possível uma evolução na função objetivo, portanto, a solução ótima não foi atingida.

3ª. Etapa – Como o sistema não é o ótimo, a variável que entra na base é o maior valor negativo absoluto. No nosso exemplo, P_{21} entrará na base.

Montamos uma nova tabela para a continuação da resolução e adicionamos a variável entrante representada por θ, conforme a Tabela 3.9.

Tabela 3.9 | Nova tabela para determinar solução ótima

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000	2.000			10.000
F_2	θ	2.000	7.000	6.000	15.000
F_3				5.000	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

A adição da variável não deve desrespeitar as restrições impostas. Portanto, para compensar a entrada da variável, devemos montar um circuito de compensação com as linhas e colunas adjacentes. A função do circuito é não permitir que as restrições de fornecimento e demanda sejam desobedecidas após a entrada e saída de variáveis na base. A Tabela 3.10 ilustra o circuito de compensação que mantém a obediência das restrições de demanda e fornecimento.

Tabela 3.10 | Circuito de compensação para a variável que entra na base

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	8.000-θ	2.000+θ			10.000
F_2	θ	2.000-θ	7.000	6.000	15.000
F_3				5.000	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor θ deve ser escolhido entre o menor θ negativo, no nosso exemplo, o menor valor é 2.000.

Para θ = 2.000 unidades, realizamos os cálculos e temos como resultado a Tabela 3.11.

Tabela 3.11 | Resultado após o cálculo do circuito de compensação

	D_1	D_2	D_3	D_4	Fornecimento
F_1	6.000	4.000			10.000
F_2	2.000		7.000	6.000	15.000
F_3				5.000	5.000
Demanda	8.000	4.000	7.000	11.000	30.000

Fonte: elaborada pelo autor.

Houve a entrada de uma nova variável. O circuito de compensação foi calculado com a variável que entrou, e o resultado deve ser analisado por meio de um novo teste de otimalidade.

Caso o teste de otimilidade apresente valor negativo nas variáveis não-básicas, deve-se repetir o procedimento de determinar a variável que entra, a variável que sai e montar um novo circuito de compensação. Essa rotina deve ser repetida até que não exista mais valores negativos nas variáveis não-básicas.

É possível usar a ferramenta solver do MS Excel para resolver problemas de transporte. O procedimento é semelhante aos estudados anteriormente. A etapa inicial é a construção do modelo em uma planilha, tomando cuidado na montagem das equações e fórmulas referentes às restrições e função objetivo. O passo seguinte é preencher os parâmetros do Solver e finalmente solicitar a solução do problema.

Na seção "Sem Medo de Errar" veremos a aplicação através do Solver.

Reflita

No caso estudado se considera a oferta e a demanda balanceadas, ou seja, a soma das capacidades das plantas e das necessidades dos clientes são iguais. Como solucionar situações onde a demanda e a capacidade não estão balanceadas?

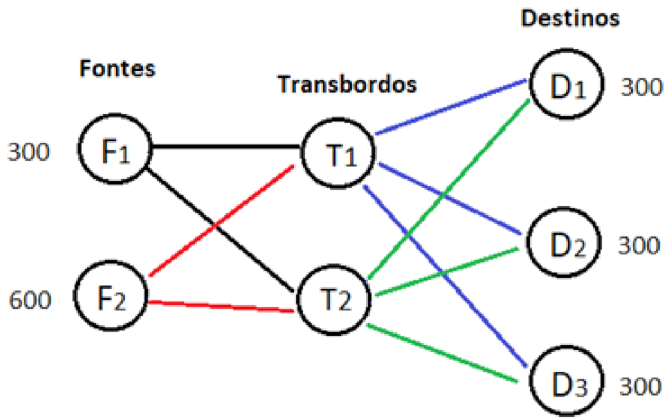
Problema de transporte com transbordo

A distribuição direta da fonte até o destino nem sempre é a melhor solução. A utilização de intermediários (centros de distribuição) antes do produto chegar até o destino final muitas vezes é mais viável economicamente (ANDRADE, 2015). Essa passagem pelo intermediário é conhecida como transbordo.

Para solucionar esse problema devemos adaptar o modelo clássico visto anteriormente.

Vejamos o exemplo esquematizado pela Figura 3.30 abaixo:

Figura 3.30 | Duas fontes abastecem dois pontos de transbordo que fornecem para três destinos com seus respectivos fornecimentos e demandas



Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos duas fontes que abastecem dois pontos de transbordo que posteriormente enviam para três destinos diferentes. Na figura 3.16 também é possível ver a capacidade de fornecimento das fontes, bem como a demanda de cada destino. A novidade em relação ao exemplo do problema clássico são os pontos de transbordo.

Podemos notar que os pontos de transbordo podem ser considerados como sendo destinatários (dos fornecimentos das fontes F_1 e F_2) e ao mesmo tempo como fontes (de abastecimento para os destinos D_1, D_2 e D_3), desta forma teremos cinco pontos de abastecimentos e cinco pontos de recebimentos.

Como toda demanda pode ser concentrada em qualquer ponto, devemos atribuir uma demanda fictícia (D) de abastecimento e de recebimento em cada um dos pontos que deve ser maior ou igual a soma de todas as demandas iniciais do problema.

Para achar a solução do problema basta desenvolver a solução conforme visto anteriormente, ou seja, acha-se a solução inicial pelo Método do Canto Noroeste e verifica-se a otimalidade. Não havendo variáveis negativas nas variáveis não-básicas, a solução é ótima, caso contrário, deve-se promover a entrada da variável com maior valor absoluto negativo. Veremos um exemplo com Transbordo na seção "Avançando na Prática".

Exemplificando

Um Centro de Distribuição é um exemplo de ponto de transbordo. O centro de distribuição é um importante elemento em uma cadeia de logística. O uso de centro de distribuição aumenta o nível de serviço, evitando gargalos no fornecimento de materiais, por esse motivo grandes empresas varejistas investem na construção de centros de distribuição em posições que atendam o maior número de localidades possível.

A decisão sobre a localidade do centro de distribuição também pode ser estudada por meio da Pesquisa Operacional.

Sem medo de errar

A solução para o cenário apresentado é determinar a quantidade de eixos que cada modelo deve ser enviado para cada cliente em diferentes destinos com o mínimo custo. É conhecida a capacidade produtiva dos diferentes tipos de eixos em cada planta (lembre-se de que as soluções encontradas na seção anterior dizem respeito à produção diária, e a demanda dos clientes é semanal. Consideramos a semana com cinco dias úteis).

Inicialmente vamos construir o modelo do problema referente ao fornecimento do eixo modelo 1, pelas três plantas aos três clientes (Destinos), em uma planilha em branco conforme a Figura 3.31 abaixo.

Figura 3.31 | Construção do modelo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Custos de Transporte							
3				Cliente					
4			Destino 1	Destino 2	Destino 3				
5		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00				
6		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00				
7		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00				
8									
9		Quantidade_Transportada_Modelo 1							
10				Cliente					
11		Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3		Qtde_fornecida		Capacidade
12		Planta 1	1	1	1		3	=	10
13		Planta 2	1	1	1		3	=	15
14		Planta 3	1	1	1		3	=	20
15									
16		Qtde_Entregue	3	3	3				
17									Custo Total
18		Demanda	18	13	14				R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

As fórmulas referentes às Quantidades Entregues podem ser observadas nas Figuras 3.32, 3.33 e 3.34.

Figura 3.32 | Fórmula referente à Quantidade Entregue ao Destino 1

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
		Cliente				
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	3	=	10
Planta 2	1	1	1	3	=	15
Planta 3	1	1	1	3	=	20
Qtde_Entregue	=C12+C13+C14		3			
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.33 | Fórmula referente à Quantidade Entregue ao Destino 2

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
		Cliente				
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	3	=	10
Planta 2	1	1	1	3	=	15
Planta 3	1	1	1	3	=	20
Qtde_Entregue	3	=D12+D13+D14				
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.34 | Fórmula referente à Quantidade Entregue ao Destino 3

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
	Cliente					
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	3	=	10
Planta 2	1	1	1	3	=	15
Planta 3	1	1	1	3	=	20
Qtde_Entregue	3	3	=E12+E13+E14			
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

As fórmulas das quantidades entregues por cada planta podem ser verificadas conforme as Figuras 3.35, 3.36 e 3.37 a seguir.

Figura 3.35 | Fórmula referente à Quantidade fornecida pela Planta 1

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
	Cliente					
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	=C12+D12+E12		10
Planta 2	1	1	1	3	=	15
Planta 3	1	1	1	3	=	20
Qtde_Entregue	3	3	3			
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.36 | Fórmula referente à Quantidade fornecida pela Planta 2

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
	Cliente					
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	3	=	10
Planta 2	1	1	1	=C13+D13+E13		15
Planta 3	1	1	1	3	=	20
Qtde_Entregue	3	3	3			
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.37 | Fórmula referente à Quantidade fornecida pela Planta 3

Quantidade_Transportada_Modelo 1						
	Cliente					
Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
Planta 1	1	1	1	3	=	10
Planta 2	1	1	1	3	=	15
Planta 3	1	1	1	=C14+D14+E14		20
Qtde_Entregue	3	3	3			
						Custo Total
Demanda	18	13	14			R$ 105,00

Fonte: elaborada pelo autor.

A fórmula do Custo Total de Transporte é demonstrada na Figura 3.38.

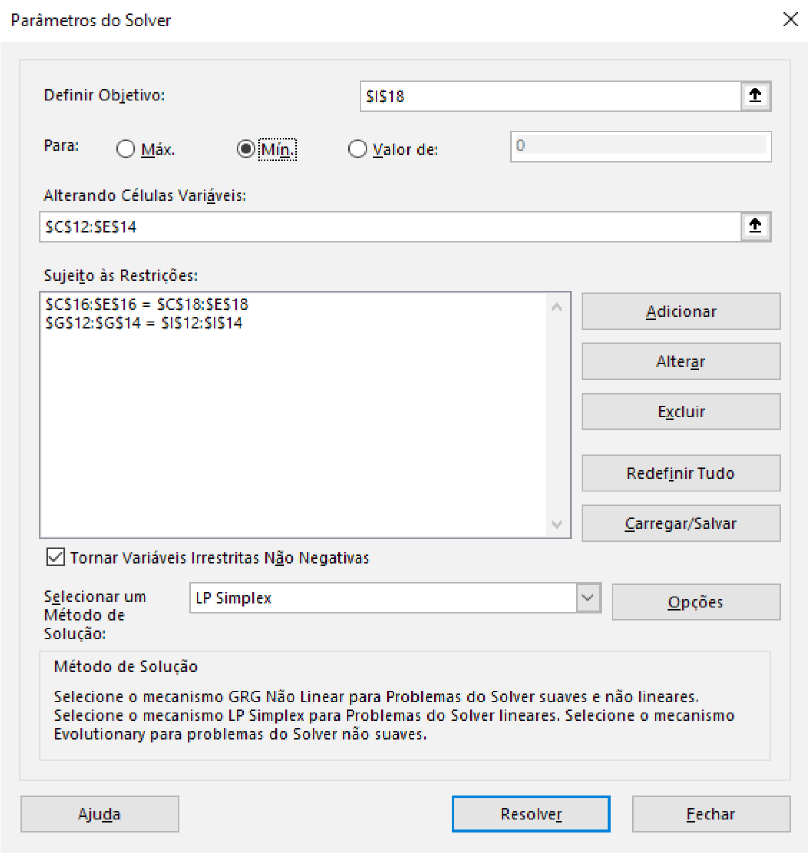
Figura 3.38 | Fórmula do Custo Total de Transporte do modelo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Custos de Transporte									
3				Cliente								
4			Destino 1	Destino 2	Destino 3							
5		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00							
6		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00							
7		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00							
8												
9		Quantidade_Transportada_Modelo 1										
10				Cliente								
11		Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3		Qtde_fornecida		Capacidade			
12		Planta 1	1	1	1		3	=	10			
13		Planta 2	1	1	1		3	=	15			
14		Planta 3	1	1	1		3	=	20			
15												
16		Qtde_Entregue	3	3	3							
17									**Custo Total**			
18		Demanda	18	13	14				=SOMARPRODUTO(C5:E7;C12:E14)			

Fonte: elaborada pelo autor.

Os parâmetros do solver devem ser preenchidos segundo as condições do problema e podem ser vistos na Figura 3.39.

Figura 3.39 | Preenchimento dos parâmetros do SOLVER



Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo a solução encontrada, a Planta 1 deve enviar toda sua capacidade (10 unidades) ao Destino 1; a Planta 2 dividirá sua produção em 8 unidades para o Destino 1 e 7 unidades para o Destino 3; e, finalmente, a Planta 3 enviará 13 unidades para o Destino 2 e 7 unidades para o Destino 3. A solução pode ser vista na Figura 3.40. E o custo mínimo de transporte é de R$ 467,00.

Figura 3.40 | Solução encontrada para o eixo modelo 1

9	Quantidade_Transportada_Modelo 1						
10		Cliente					
11	Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
12	Planta 1	10	0	0	10	=	10
13	Planta 2	8	0	7	15	=	15
14	Planta 3	0	13	7	20	=	20
15							
16	Qtde_Entregue	18	13	14			
17							**Custo Total**
18	Demanda	18	13	14			R$ 467,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Para o eixo modelo 2 só é preciso alterar os valores das capacidades e demandas na planilha e acionar o solver para determinar a solução. A solução pode ser vista na Figura 3.41 O resultado nos mostra quantos eixos do modelo 2 devem ser enviados de cada planta para cada destino, com o mínimo custo de transporte, ou seja, a Planta 1 enviará 10 eixos para o Destino 1, 3 para o Destino 2 e 12 eixos para o Destino 3. Isso a um custo de R$ 413,00.

Figura 3.41 | Solução para o eixo modelo 2

9	Quantidade_Transportada_Modelo 2						
10		Cliente					
11	Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
12	Planta 1	10	3	12	25	=	25
13	Planta 2	0	5	0	5	=	5
14	Planta 3	0	10	0	10	=	10
15							
16	Qtde_Entregue	10	18	12			
17							**Custo Total**
18	Demanda	10	18	12			R$ 413,00

Fonte: elaborada pelo autor.

A solução para o eixo modelo 3 está ilustrado na Figura 3.42.

Figura 3.42 | Solução para o eixo modelo 3

9	Quantidade_Transportada_Modelo 3						
10		Cliente					
11	Fornecedor	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Qtde_fornecida		Capacidade
12	Planta 1	8	0	2	10	=	10
13	Planta 2	0	7	8	15	=	15
14	Planta 3	0	5	0	5	=	5
15							
16	Qtde_Entregue	8	12	10			
17							**Custo Total**
18	Demanda	8	12	10			R$ 330,00

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor calculado é o Mínimo Custo Total de transporte, e é a soma do custo de transporte relativo a cada um dos modelos, ou seja: R$ 467,00 + R$ 413,00 + R$ 330,00 totalizando R$ 1.210,00.

Qualquer outro arranjo de envio entre as fontes e destinos resultarão em um valor de transporte maior que R$ 1.210,00.

Muito bem! Você solucionou mais um problema com o auxílio da Pesquisa Operacional e tem se mostrado um excelente Gerente.

Avançando na prática

Usando pontos de transbordo

Descrição da situação-problema

A análise inicial estudada anteriormente diz respeito ao problema clássico de transporte onde o objetivo é determinar a quantidade de produto a ser transportada a partir de diversas fontes para um conjunto de clientes em diversas localidades, de forma que o custo total de transporte seja mínimo.

Foi visto que a capacidade de fornecimento das fontes é limitada ou fixa, e os clientes têm demandas específicas a serem supridas. O problema básico é, portanto, determinar como distribuir produtos atendendo à limitação de fornecimento das fontes e a necessidade dos Destinos com o menor custo de transporte.

Em uma nova possibilidade, a empresa estuda utilizar dois pontos de transbordo para enviar seus produtos das diferentes Plantas aos clientes em seus diferentes Destinos como forma de diminuir seu custo de distribuição, e cabe a você, como Gerente Industrial, avaliar a nova situação. A empresa já escolheu os locais dos pontos de transbordo e fez o levantamento dos custos de transporte de suas fábricas até os locais de transbordo e dos pontos de transbordo até os Destinos. A utilização dos pontos de transbordo diminuirá o custo de transporte?

Resolução da situação-problema

A modelagem do problema está ilustrada na Figura 3.43 e o preenchimento das células da planilha pode ser visto na Tabela 3.12.

Figura 3.43 | Modelagem do problema de transporte com transbordo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		Custo de Transporte da Planta para Transbordo								Custo de Transporte do Transbordo para Destino					
3			Transbordo								Destinos				
4			Transb 1	Transb 2							Destino 1	Destino 2	Destino 3		
5		Planta 1	R$ 8,00	R$ 7,00						Transb 1	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00		
6		Planta 2	R$ 7,00	R$ 5,00						Transb 2	R$ 3,00	R$ 2,00	R$ 5,00		
7		Planta 3	R$ 6,00	R$ 6,00											
8															
9		Quantidade Transportada da Planta para Transbordo								Quantidade Transportada do Transbordo para Destino					
10			Transbordo			Total									
11			Transb 1	Transb 2		Enviado					Destino 1	Destino 2	Destino 3		
12		Planta 1	1	1		2	=	10		Transb 1	1	1	1		3
13		Planta 2	1	1		2	=	15		Transb 2	1	1	1		3
14		Planta 3	1	1		2	=	20							
15															
16		Quantidade Enviada	3	3						Quantidade Entregue	2	2	2		
17											=	=	=		
18				Custo Total		R$ 58,00				Demanda	18	13	14		

Fonte: elaborada pelo autor.

As células devem ser preenchidas segundo as fórmulas vistas na Tabela 3.12.

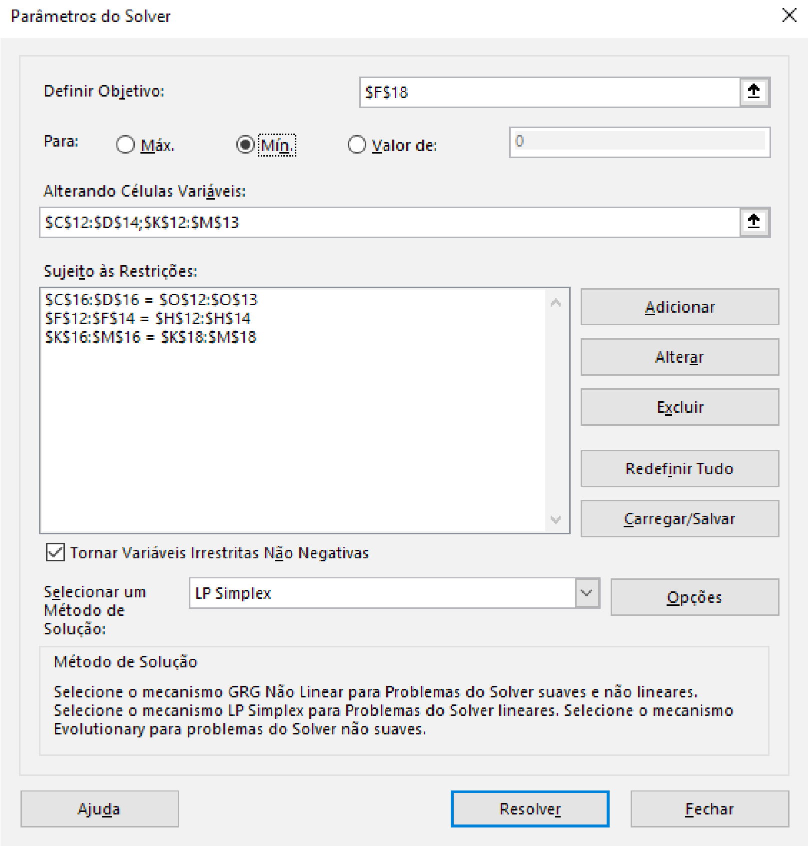
Tabela 3.12 | Preenchimento das células da planilha com a modelagem do problema

F18	=SOMARPRODUTO(C5:D7;C12:D14)+ SOMARPRODUTO(K5:M6;K12:M13)
C16	=SOMA(C12:C14)
D16	=SOMA(D12:D14)
F12	=C12+D12
F13	=C13+D13
F14	=C14+D14
K16	=K12+K13
L16	=L12+L13
M16	=M12+M13
O12	=SOMA(K12:M12)
O13	=SOMA(K13:M13)

Fonte: elaborada pelo autor.

E os parâmetros conforme a Figura 3.44.

Figura 3.44 | Preenchimento dos parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor.

O custo de transporte calculado pelo solver é igual a R$ 395,00 para o eixo modelo 1, o modelo 2 tem um custo de R$ 376,00 e para o modelo 3, o custo de transporte é de R$ 268,00, totalizando R$ 1.039,00 que é menor que o custo de transporte sem passar pelos pontos de transbordo.

Faça valer a pena

1. (PETROBRAS/2009 – Adaptado) – Uma empresa fabricante de lubrificantes especiais para o mercado industrial tem duas refinarias, uma em Duque de Caxias (RJ) e outra em Paulínia (SP), e três centros de distribuição nas cidades de São Paulo (SP), Belo Horizonte (MG) e Brasília (DF). Considere os custos de transportes dados na Tabela 3.13 abaixo.

Tabela 3.13 | Tabela de custo de transporte das Refinarias para os Distribuidores

Centro de Produção (Refinarias)	Custo Unitário de Transporte da Refinaria para o Centro de Distribuição (R$/t.dia)		
	Distribuição 1	Distribuição 2	Distribuição 3
Refinaria 1	5	7	10
Refinaria 2	1	6	11

Fonte: <http://site.cesgranrio.org.br/eventos/concursos/petrobras0109/pdf/demais_cargos/Provas/PROVA%2016%20-%20ENGENHEIRO%20DE%20PRODU%C3%87%C3%83O%20J%C3%9ANIOR.pdf> Acesso em: 20 jan. 2018

Com base nos dados acima e considerando x_{mn} a quantidade transportada da cidade produtora m para a cidade consumidora n, qual função tem o objetivo de otimizar os custos de transporte para distribuição dos lubrificantes?

a) $Max: 5x_{11} + 7x12 + 10x_{13} + 1x_{21} + 6x_{22} + 11x_{23}$

b) $Max: -500x_{1} - 400x_{12} - 800x_{23} + 1.000x_{24} + 800x_{15}$

c) $Min: 5x_{11} + 1x_{21} + 7x_{12} + 6x_{22} - 10x_{13} - 11x_{23}$

d) $Min: 5x_{11} + 1x_{21} + 7x_{12} + 6x_{22} + 10x_{13} + 11x_{23}$

e) $Min: 1x_{24} + 8x_{13} - 5x_{11} - 4x_{12} - 8x_{23}$

2. O gerente de logística de uma empresa fabricante de vassouras precisa solucionar a distribuição de forma a atender as necessidades de seus clientes respeitando a capacidade de fornecimento de cada fábrica. Os dados de capacidade de fornecimento e da demanda de cada cliente estão na Tabela 3.14 abaixo.

Tabela 3.14 | Capacidade de fornecimento das fontes e necessidades dos destinos

	D_1	D_2	D_3	Fornecimento
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	10.000
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	20.000
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	10.000
F_4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	15.000
Demanda	8.000	30.000	17.000	55.000

Fonte: elaborada pelo autor

Calcular a solução inicial do quadro de transporte pelo Método do Canto Noroeste. Quais são as variáveis básicas da solução inicial?

a) $x_{12} = 8000$; $x_{13} = 2000$; $x_{21} = 8000$; $x_{22} = 12000$; $x_{32} = 10000$; $x_{43} = 15000$

b) $x_{11} = 8000$; $x_{12} = 2000$; $x_{22} = 20000$; $x_{32} = 8000$; $x_{33} = 2000$; $x_{43} = 15000$

c) $x_{11} = 8000$; $x_{13} = 2000$; $x_{22} = 20000$; $x_{32} = 5000$; $x_{33} = 5000$; $x_{42} = 5000$; $x_{43} = 10000$

d) $x_{11} = 8000$; $x_{12} = 2000$; $x_{22} = 10000$; $x_{23} = 10000$; $x_{32} = 3000$; $x_{33} = 7000$; $x_{42} = 15000$

e) $x_{11} = 8000$; $x_{12} = 2000$; $x_{22} = 10000$; $x_{23} = 10000$; $x_{32} = 7000$; $x_{33} = 3000$; $x_{42} = 11000$; $x_{43} = 4000$

3. A primeira etapa da solução dos problemas clássicos de transporte é determinar uma solução básica inicial e a etapa posterior é verificar se a solução encontrada é a ótima. Caso a solução não seja a ótima, é preciso determinar a variável que entra e a variável que sai da base e posteriormente realocar as cargas entre as fontes e demandas.

Qual a finalidade do circuito de compensação?

a) Determinar novas alternativas de fornecimentos e demandas.

b) Armazenar cargas a espera de transporte para outras localidades.

c) Não permitir que as restrições de fornecimento e demanda sejam desobedecidas após a entrada e saída de variáveis na base.

d) Verificar a otimalidade da solução.

e) Definir qual variável entrará na base.

Seção 3.3

Problema de designação

Diálogo aberto

Entre as diversas decisões que uma empresa deve tomar está a atribuição de tarefas para máquinas específicas, projetos para equipe, distribuição da produção por uma determinada planta etc. A esses problemas é dado o nome de Problemas de Designação.

A execução de projetos, por exemplo, depende da experiência da equipe, e essa experiência fará com que o projeto seja executado no menor prazo possível. Quando há somente um projeto e uma equipe, não existe um problema, entretanto, imaginemos que uma empresa tenha *n* projetos que devem ser executados por *n* equipes. Como alocar as equipes entre os projetos de forma que o tempo de execução de todos seja o mínimo? Ou o custo total dos projetos seja o mínimo? Ou então, como montar uma equipe de forma a maximizar o potencial de execução?

Nesta seção estudaremos os problemas de designação. O desenvolvimento da solução é feito pelo Método Húngaro (em homenagem aos pesquisadores húngaros E. Egerváry e D. König que desenvolveram o método), que utiliza um algoritmo em quatro etapas. Veremos, também, como construir o modelo na planilha e preencher os parâmetros do Solver.

Nas seções anteriores você como Gerente Industrial solucionou problemas relacionados à programação da produção e transportes. Agora tem mais um desafio pela frente. A empresa estuda a possibilidade de cada planta atender exclusivamente um cliente, ou seja, designar cada planta para um cliente.

Vamos considerar o custo de transporte da cada fábrica para os clientes dado pela Tabela 3.15 (apresentada na seção anterior) em R$/unidade.

Tabela 3.15 | Custo de transporte de Planta *i* para Destino *j*

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Planta 1	6	11	15
Planta 2	9	12	16
Planta 3	11	8	17

Fonte: elaborada pelo autor

A empresa quer saber qual planta atenderá qual cliente, e quer saber, também, qual o custo mínimo de transporte.

Mais um desafio que você como Gerente Industrial deverá aceitar. Como vencer mais esse obstáculo?

Não pode faltar

Problema de Designação é um caso especial do Problema de Transporte e é também conhecido como Problema de Atribuição, ou Problema de Alocação (COLIN, 2007, p. 118) e são usados indistintamente.

Com a designação de pessoas a projetos e tarefas, assume-se a hipótese de que cada elemento a ser designado (pessoa, trabalho etc.) corresponderá a um único objeto (projeto, tarefa, máquina etc.). Geralmente, cada atribuição tem uma variável de decisão associada (custo, tempo, lucro etc.) (MOREIRA, 2007, p. 122).

Pesquise mais

Problemas de designação, normalmente, têm como objetivo minimizar os custos de transporte, entretanto, em alguns casos, o objetivo pode ser maximizar os lucros obtidos através da designação de vendedores para atuarem em diversas localidades. No *link* abaixo há um exemplo desse caso.

MARTINS, Matusalém V. PO - 6 - 1 - designação – o caso de maximização - exemplo 1. Tempo de duração: 14 minutos e 2 segundos. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=w_4ehPxTT3k>. Acesso em: 5 mar. 2018.

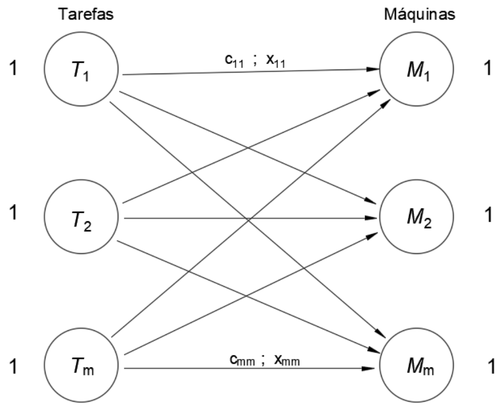
A construção do modelo de um problema de designação é semelhante à construção do modelo de um problema de transporte onde as fontes (fornecedores) correspondem às tarefas e as demandas equivalem às máquinas (Destinos). Cada tarefa é designada a apenas uma máquina, e cada máquina pode processar apenas uma tarefa. Como o problema de designação é modelado como um problema de transporte, a capacidade de cada fornecedor e a demanda de cada cliente corresponderá a 1 (FÁVERO; BELFIORE, 2013, p. 309).

As variáveis de decisão x_{ij} assumem somente duas possibilidades: ser designado para a tarefa, ou não ser designada para a tarefa. Quando a variável é designada, assumirá o valor 1, caso contrário (não assumir a tarefa) assumirá o valor 0 (ANDRADE, 2015). Problemas onde as variáveis de decisão assumem somente valores 0 e 1 são chamadas de problemas de programação binária e serão estudados na Unidade 4.

O problema mais simples de designação envolve m tarefas e m agentes. Como dito anteriormente, cada tarefa é executada por um único agente e cada agente executa uma única tarefa. A execução da tarefa *j* pelo agente *i* tem um custo c_{ij}. O problema, então, consiste em designar tarefas a agentes de modo a minimizar o custo total. A representação desse problema de designação pode ser vista na Figura 3.45.

Note que podemos tomar outra variável de decisão que não seja o custo. Existem casos que a rapidez na entrega tem maior importância na decisão. Nesse caso a função objetivo é a de minimizar o tempo de entrega.

Figura 3.45 | Representação do problema de designação como um problema de transporte



Fonte: Fávero e Belfiore (2013, p. 309).

A variável x_{11} diz respeito à Tarefa 1 sendo executada pela Máquina 1, com um custo c_{11}.

Assimile

Um método muito utilizado para a resolução do problema de designação é o Método Húngaro (em homenagem aos pesquisadores húngaros que desenvolveram o método), que consiste em 4 etapas (BELFIORE; FÁVERO, 2013 p. 310):

Etapa 1. Encontra o elemento de menor valor em cada linha de uma matriz m x m. Subtrair o menor valor encontrado de todos os elementos da linha. Construir uma nova matriz com a diferença entre os valores originais e o menor elemento da linha selecionado.

Etapa 2. Na matriz resultante na Etapa 1, encontrar o elemento com menor valor em cada coluna. Subtrair o menor valor encontrado em cada coluna de todos elementos da coluna. Construir uma nova matriz (chamada matriz de custo reduzido) com a diferença entre os valores originais e o menor elemento da coluna selecionado.

Etapa 3. Trace o menor número possível de retas horizontais e verticais de forma que todos os elementos com valores iguais a zero da matriz sejam cobertos. Se m retas foram necessárias (lembre-se de uma matriz m x m), há uma solução ótima entre os elementos com valores nulos cobertos na matriz. Se foram utilizados menos de m retas, vá até a Etapa 4.

Etapa 4. Dos elementos que não foram cobertos na Etapa 3, selecione aquele com menor valor e subtraia-o de cada elemento não coberto na matriz; adicione o mesmo valor para cada elemento coberto tanto por linha como por coluna (2 traços). Os demais elementos permanecem inalterados. Retorne à Etapa 3 até que o número de retas seja igual ao número de ordem m da matriz.

As variáveis de decisão assumem:

$x_{ij} = 1$ caso a Tarefa i é designada para a Máquina j

$x_{ij} = 0$ situação contrária

Exemplificando

Vejamos um exemplo de um problema de designação.

Em uma empresa de produtos eletrônicos, há três projetos de novos produtos que podem ser alocados a três equipes de desenvolvedores diferentes. A experiência e a habilitação de cada equipe são diferentes, e influencia diretamente no tempo de término de cada projeto. Portanto o tempo de conclusão dependerá da equipe que será alocado para cada projeto. A matriz ilustrada na Tabela 3.16 mostra os tempos de desenvolvimento dos projetos (em semanas), conforme cada uma das equipes. Aplicar o Método Húngaro para chegar à alocação ótima, isto é, ao menor tempo total de desenvolvimento (menor soma dos tempos de desenvolvimento de cada projeto após a alocação).

Tabela 3.16 | Matriz dos tempos X Equipes

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	16	20	24
Equipe 2	30	26	24
Equipe 3	16	24	20

Fonte: elaborada pelo autor

O objetivo do problema é minimizar o tempo total de desenvolvimento dos três projetos.

A função objetivo:

$$MinZ = 16x_{11} + 20x_{12} + 24x_{13} + 30x_{21} + 26x_{22} + 24x_{23} + 16x_{31} + 24x_{32} + 20x_{33}$$

Resolução pelo Método Húngaro

Etapa 1. Encontrar o elemento de menor valor em cada linha de uma matriz *m* x *m*. Subtrair o menor valor encontrado de todos os elementos da linha. Construir uma nova matriz com a diferença entre os valores originais e o menor elemento da linha selecionado. Como mostrado na Tabela 3.17.

Tabela 3.17 | Subtração dos menores valores de cada linha

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	16 – 16 = 0	20 – 16 = 4	24 – 16 = 8
Equipe 2	30 – 24 = 6	26 – 24 = 2	24 – 24 = 0
Equipe 3	16 – 16 = 0	24 – 16 = 8	20 – 16 = 4

Fonte: elaborada pelo autor

Etapa 2. Na matriz resultante na Etapa 1, encontrar o elemento com menor valor em cada coluna. Subtrair o menor valor encontrado em cada coluna de todos elementos da coluna. Construir uma nova matriz com a diferença entre os valores originais e o menor elemento da coluna selecionado conforme a Tabela 3.18.

Tabela 3.18 | Subtração dos menos valores de cada coluna

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	0	4 – 2 = 0	8
Equipe 2	6	2 – 2 = 0	0
Equipe 3	0	8 – 2 = 6	4

Fonte: elaborada pelo autor

As colunas referentes aos Projetos 1 e 3, o menor valor é zero, portanto, as colunas permanecem inalteradas.

Etapa 3. Trace o menor número possível de retas horizontais e verticais de forma que todos os elementos com valores iguais a zero da matriz sejam cobertos. Se *m* retas foram necessárias (lembre-se de uma matriz *m* x *m*), há uma solução ótima entre os elementos com valores nulos cobertos na matriz. Se foram utilizados menos de *m* retas, vá até a Etapa 4. A Figura 3.46 mostra as retas cobrindo todos os zeros.

Figura 3.46 | Retas cobrindo os valores nulos

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	0	2	8
Equipe 2	6	0	0
Equipe 3	0	6	4

Fonte: elaborada pelo autor

O menor número de retas é igual a dois, pois poderíamos traçar três retas verticais para cobrir os zeros.

Como temos duas retas, mas a matriz é de ordem três, ainda não chegamos à melhor solução. Devemos ir para a Etapa 4.

Etapa 4. Dos elementos que não foram cobertos na Etapa 3, selecione aquele com menor valor e subtraia-o de cada elemento não coberto na matriz; adicione o mesmo valor para cada elemento coberto tanto por linha como por coluna, respectivamente (Tabela 3.19). Os demais elementos permanecem inalterados.

Tabela 3.19 | Subtração do menor valor dos termos não cobertos e adição do mesmo valor para o termo coberto.

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	0	2 – 2 = 0	8 – 2 = 6
Equipe 2	6 + 2 = 8	0	0
Equipe 3	0	6 – 2 = 4	4 – 2 = 2

Fonte: elaborada pelo autor

Novamente cobrimos os valores nulos da tabela, como ilustrado na Figura 3.47.

Figura 3.47 | Retas cobrindo todos os zeros

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	0	0	6
Equipe 2	8	0	0
Equipe 3	0	4	2

Fonte: elaborada pelo autor

O número de retas é igual a três (mesma ordem da matriz), portanto, chegamos à solução ótima.

Para determinar qual a solução ótima, selecionamos a linha (ou coluna) que tenha somente um zero. Podemos ver que o Projeto 3 atende a essa condição, portanto, a variável x_{23} é parte da solução, ou seja, o Projeto 3 será atendido pela Equipe 2, portanto, a linha referente à Equipe 2 e a coluna do Projeto 3 não podem mais ser utilizadas. O projeto 2 somente poderá ser atendido pela Equipe 1 (onde está localizado o outro zero). E, por fim, o Projeto 1 é atendido pela Equipe 3.

A solução final, conforme a Figura 3.33, é: x_{12}; x_{23} e x_{31} que assumem o valor igual a um (lembre-se de que as variáveis selecionadas assumem o valor um e as demais variáveis assumem valor zero).

Substituindo as variáveis na função-objetivo, temos como resultado Z = 60 semanas.

O problema de designação também pode ser resolvido pelo Excel com o auxílio do Solver. Vamos resolver o problema abordado no box Exemplificando através do MS Excel utilizando o Solver.

A construção do modelo é ilustrada na Figura 3.48.

Figura 3.48 | Construção do modelo do problema de designação

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Tempo de desenvolvimento (semanas)						
3			Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3				
4		Equipe 1	16	20	24				
5		Equipe 2	30	26	24				
6		Equipe 3	16	24	20				
7									
8									
9				Designação					
10			Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3		Projeto Equipe		
11		Equipe 1	0	0	0		0	=	1
12		Equipe 2	0	0	0		0	=	1
13		Equipe 3	0	0	0		0	=	1
14									
15		Equipe Projeto	0	0	0				
16			=	=	=		**Tempo Total**		
17			1	1	1		0		

Fonte: elaborada pelo autor

As fórmulas usadas no modelo podem ser vistas nas Figuras 3.49, 3.50 e 3.51.

Figura 3.49 | Fórmula referente às equipes

		Designação				
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto Equipe		
Equipe 1	0	0	0	=C11+D11+E11		1
Equipe 2	0	0	0	0	=	1
Equipe 3	0	0	0	0	=	1
Equipe Projeto	0	0	0			
	=	=	=	**Tempo Total**		
	1	1	1	0		

Fonte: elaborada pelo autor

A fórmula é copiada para as linhas referentes às Equipes 2 e 3.

Fórmula 3.50 | Fórmula referente aos projetos

		Designação				
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto Equipe		
Equipe 1	0	0	0	0	=	1
Equipe 2	0	0	0	0	=	1
Equipe 3	0	0	0	0	=	1
Equipe Projeto	=C11+C12+C13		0			
	=	=	=	**Tempo Total**		
	1	1	1	0		

Fonte: elaborada pelo autor

A fórmula é copiada para as colunas referentes aos Projetos 2 e 3.

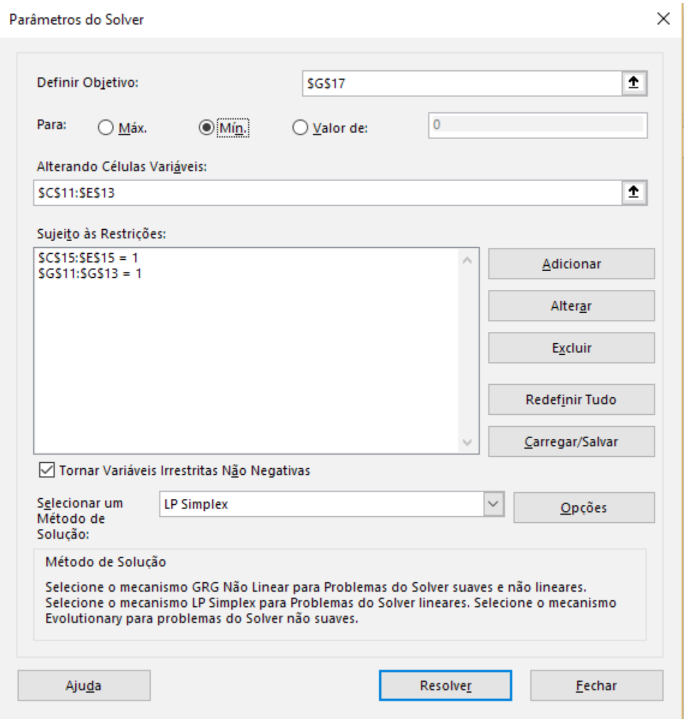
Figura 3.51 | Fórmula da função objetivo

	Tempo de desenvolvimento (semanas)					
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3			
Equipe 1	16	20	24			
Equipe 2	30	26	24			
Equipe 3	16	24	20			
	Designação					
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto Equipe		
Equipe 1	0	0	0	0	=	1
Equipe 2	0	0	0	0	=	1
Equipe 3	0	0	0	0	=	1
Equipe Projeto	0	0	0			
	=	=	=	**Tempo Total**		
	1	1	1	=SOMARPRODUTO(C4:E6;C11:E13)		

Fonte: elaborada pelo autor

A seguir devem ser preenchidos os parâmetros do Solver que estão mostrados na Figura 3.52.

Figura 3.52 | Parâmetros do Solver para o problema de designação



Fonte: elaborada pelo autor

O resultado encontrado pelo Solver pode ser visto na Figura 3.53.

Figura 3.53 | Resultado encontrado pelo Solver para o problema de designação

	Tempo de desenvolvimento (semanas)					
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3			
Equipe 1	16	20	24			
Equipe 2	30	26	24			
Equipe 3	16	24	20			
		Designação				
	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto Equipe		
Equipe 1	0	1	0	1	=	1
Equipe 2	0	0	1	1	=	1
Equipe 3	1	0	0	1	=	1
Equipe Projeto	1	1	1			
	=	=	=	**Tempo Total**		
	1	1	1	60		

Fonte: elaborada pelo autor

Note que a solução encontrada pelo Solver é a mesma obtida pelo Método Húngaro.

Reflita

Ao longo das seções dessa Unidade estudamos situações envolvendo problema de transporte clássico e problema de transporte envolvendo transbordo considerando como variável de decisão os custos. Numa situação onde existem outras variáveis de decisão que são tão relevantes como o custo, como você construirá seu modelar e decidirá sob esse cenário?

Sem medo de errar

A empresa estuda a possibilidade de cada planta atender exclusivamente um cliente, ou seja, designar cada planta para um cliente.

Para realizar o estudo, vamos considerar o custo de transporte da cada fábrica para os clientes dado pela Tabela 3.20 (apresentada na seção anterior) em R$/unidade.

Tabela 3.20 | Custo de transporte de Planta *i* para Destino *j*

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	6	11	15
Equipe 2	9	12	16
Equipe 3	11	8	17

Fonte: elaborada pelo autor

Iniciamos construindo o modelo na planilha (Figura 3.54).

Figura 3.54 | Modelo do problema de designação em Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Custo de transporte (unidade)						
3			Destino 1	Destino 2	Destino 3				
4		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00				
5		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00				
6		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00				
7									
8									
9				Designação					
10			Destino 1	Destino 2	Destino 3		Destino Planta		
11		Planta 1	0	0	0		0	=	1
12		Planta 2	0	0	0		0	=	1
13		Planta 3	0	0	0		0	=	1
14									
15		Planta Destino	0	0	0				
16			=	=	=		**Custo total**		
17			1	1	1		R$ -		

Fonte: elaborada pelo autor

As fórmulas referentes às Plantas, Destinos e Função objetivo pode ser visto nas Figuras 3.55, 3.56 e 3.57.

Figura 3.55 | Fórmula referente a Planta/Destino

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Custo de transporte (unidade)						
3			Destino 1	Destino 2	Destino 3				
4		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00				
5		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00				
6		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00				
7									
8									
9				Designação					
10			Destino 1	Destino 2	Destino 3		Destino Planta		
11		Planta 1	0	0	0		0	=	1
12		Planta 2	0	0	0		0	=	1
13		Planta 3	0	0	0		0	=	1
14									
15		Planta Destino	=C11+C12+C13		0				
16			=	=	=		**Custo total**		
17			1	1	1		R$ -		

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3.56 | Fórmula referente ao Destino/Planta

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Custo de transporte (unidade)						
3			Destino 1	Destino 2	Destino 3				
4		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00				
5		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00				
6		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00				
7									
8									
9				Designação					
10			Destino 1	Destino 2	Destino 3		Destino Planta		
11		Planta 1	0	0	0		=C11+D11+E11		1
12		Planta 2	0	0	0		0	=	1
13		Planta 3	0	0	0		0	=	1
14									
15		Planta Destino	0	0	0				
16			=	=	=		**Custo total**		
17			1	1	1		R$ -		

Fonte: elaborada pelo autor

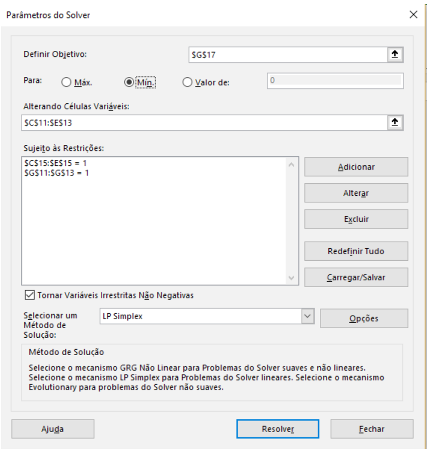
Figura 3.57 | Fórmula da função-objetivo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			Custo de transporte (unidade)							
3			Destino 1	Destino 2	Destino 3					
4		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00					
5		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00					
6		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00					
7										
8										
9				Designação						
10			Destino 1	Destino 2	Destino 3		Destino Planta			
11		Planta 1	0	0	0		0	=	1	
12		Planta 2	0	0	0		0	=	1	
13		Planta 3	0	0	0		0	=	1	
14										
15		Planta Destino	0	0	0					
16			=	=	=		**Custo total**			
17			1	1	1		=SOMARPRODUTO(C4:E6;C11:E13)			

Fonte: elaborada pelo autor

Os parâmetros do Solver são preenchidos conforme a Figura 3.58.

Figura 3.58 | Parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor

O resultado pode ser visto na Figura 3.59.

Figura 3.59 | Resultado do problema de designação

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Custo de transporte (unidade)						
3			Destino 1	Destino 2	Destino 3				
4		Planta 1	R$ 6,00	R$ 11,00	R$ 15,00				
5		Planta 2	R$ 9,00	R$ 12,00	R$ 16,00				
6		Planta 3	R$ 11,00	R$ 8,00	R$ 17,00				
7									
8									
9				Designação					
10			Destino 1	Destino 2	Destino 3		Destino Planta		
11		Planta 1	1	0	0		1	=	1
12		Planta 2	0	0	1		1	=	1
13		Planta 3	0	1	0		1	=	1
14									
15		Planta Destino	1	1	1				
16			=	=	=		**Custo total**		
17			1	1	1		R$ 30,00		

Fonte: elaborada pelo autor

A Planta 1 deve abastecer o cliente do Destino 1, a Planta 2 o cliente do Destino 3 e o Destino 2 deve ser atendido pela Planta 3. E o custo total é de R$ 30,00. Mas vale lembrar que o custo total calculado diz respeito a somente uma unidade transportada.

Parabéns! Mais um desafio foi vencido... logo, logo você receberá uma promoção.

Avançando na prática

Desenvolvimento de novos produtos

Descrição da situação-problema

A empresa pretende desenvolver quatro novos tipos de eixos para atender às novas demandas de seus clientes. São quatro novos projetos que devem ser desenvolvidos no menor prazo possível. O departamento de Pesquisa e Desenvolvimento tem quatro profissionais qualificados que podem gerenciar esses novos projetos, entretanto, por suas formações e experiências, o tempo de conclusão de cada projeto dependerá conforme a Tabela 3.21.

Você como Gerente Industrial ajudou nas decisões anteriores baseado nos custos e agora é solicitado um estudo para alocar os profissionais de forma que os projetos estejam concluídos no menor tempo possível.

Qual é a melhor designação?

Tabela 3.21 | Tempo de desenvolvimento dos projetos (em semanas)

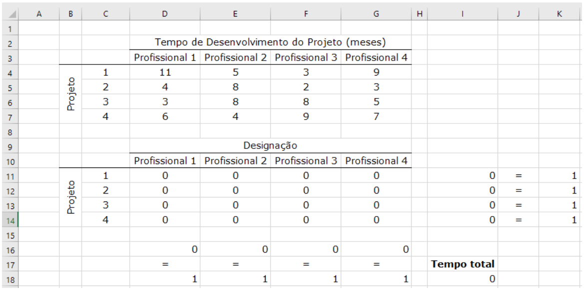
		Tempo de Desenvolvimento do Projeto (meses)			
		Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4
Projeto	1	11	5	3	9
	2	4	8	2	3
	3	3	8	8	5
	4	6	4	9	7

Fonte: elaborada pelo autor

Resolução da situação-problema

A construção do modelo pode ser vista na Figura 3.60 abaixo:

Figura 3.60 | Modelo do problema de designação

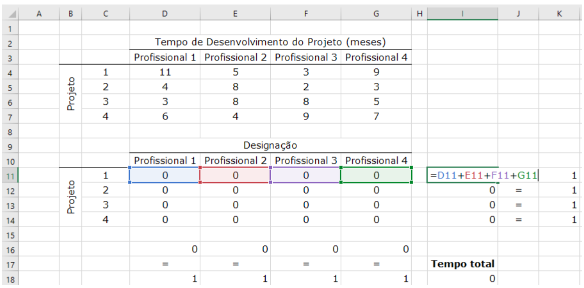


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2				Tempo de Desenvolvimento do Projeto (meses)							
3				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
4			1	11	5	3	9				
5		Projeto	2	4	8	2	3				
6			3	3	8	8	5				
7			4	6	4	9	7				
8											
9				Designação							
10				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
11			1	0	0	0	0		0	=	1
12		Projeto	2	0	0	0	0		0	=	1
13			3	0	0	0	0		0	=	1
14			4	0	0	0	0		0	=	1
15											
16				0	0	0	0				
17				=	=	=	=		Tempo total		
18				1	1	1	1		0		

Fonte: elaborada pelo autor

As fórmulas são semelhantes às usadas anteriormente, as fórmulas referente às linhas pode ser vista na Figura 3.61; enquanto a fórmula das colunas está ilustrada na Figura 3.62 e a fórmula da função objetivo é demonstrada na Figura 3.63.

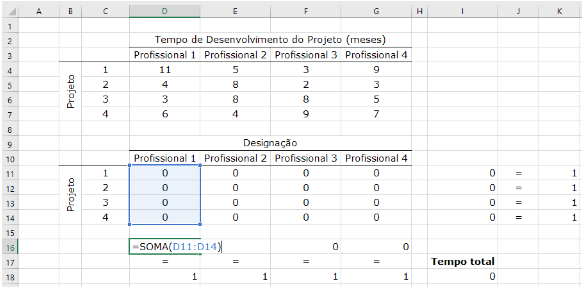
Figura 3.61 | Fórmula das linhas da planilha



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2				Tempo de Desenvolvimento do Projeto (meses)							
3				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
4			1	11	5	3	9				
5		Projeto	2	4	8	2	3				
6			3	3	8	8	5				
7			4	6	4	9	7				
8											
9				Designação							
10				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
11			1	0	0	0	0		=D11+E11+F11+G11		1
12		Projeto	2	0	0	0	0		0	=	1
13			3	0	0	0	0		0	=	1
14			4	0	0	0	0		0	=	1
15											
16				0	0	0	0				
17				=	=	=	=		Tempo total		
18				1	1	1	1		0		

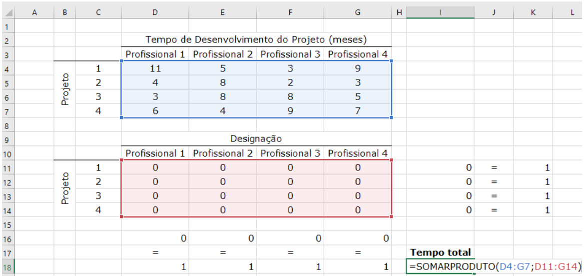
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3.62 | Fórmula das colunas da planilha



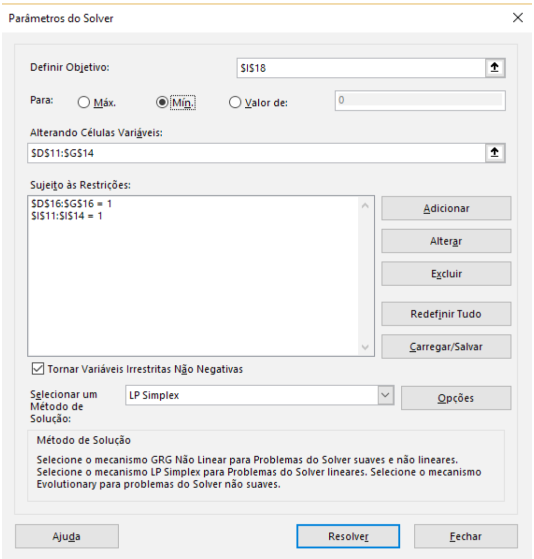
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3.63 | Fórmula da função objetivo



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3.64 | Parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3.65 | Resultado final

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2				Tempo de Desenvolvimento do Projeto (meses)							
3				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
4		Projeto	1	11	5	3	9				
5			2	4	8	2	3				
6			3	3	8	8	5				
7			4	6	4	9	7				
8											
9				Designação							
10				Profissional 1	Profissional 2	Profissional 3	Profissional 4				
11		Projeto	1	0	0	1	0		1	=	1
12			2	0	0	0	1		1	=	1
13			3	1	0	0	0		1	=	1
14			4	0	1	0	0		1	=	1
15											
16				1	1	1	1				
17				=	=	=	=		**Tempo total**		
18				1	1	1	1		13		

Fonte: elaborada pelo autor

Os projetos estarão finalizados ao final da décima terceira semana. O Profissional 1 ficará encarregado pelo Projeto 3, o Profissional 2 pelo Projeto 4, o Profissional 3 pelo Projeto 1 e o Profissional 4 pelo Projeto 2.

Com mais essa vitória, você mostra seu valor profissional. Parabéns!

Faça valer a pena

1. Problema de Designação é um caso especial do Problema de Transporte. Com a designação de pessoas a projetos e tarefas, assume-se a hipótese de que cada elemento a ser designado (pessoa, trabalho etc.) corresponderá a um único objeto (projeto, tarefa, máquina etc.). Geralmente, cada atribuição tem uma variável de decisão associada (custo, tempo, lucro).

Como o Problema de Designação é também conhecido?

a) Problema de Projeto ou Problema de Atribuição
b) Problema de Alocação ou Problema de Recurso
c) Problema de Atribuição ou Problema de Alocação
d) Problema de Transbordo ou Problema de Alocação
e) Problema de Atribuição ou Problema de Programação

2. O Problema de Designação é solucionado através do método baseado em cobrir os valores nulos obtidos pela subtração dos menores valores das linhas de uma matriz n x n e depois dos menores valores das colunas da nova matriz. Quando o número mínimo de traços é igual ao número n da ordem da matriz, chegou-se à solução ótima.

Como é conhecido o método descrito acima?

a) Método de Aproximação Vogel
b) Método do Caminho Mínimo
c) Método do Mínimo Custo
d) Método Húngaro
e) Método Americano

3. Dada a Matriz de Custo Inicial, faça a designação dos ferramenteiros entre as máquinas.

Tabela 3.22 | Matriz de Custos

	Torno	Fresadora	Retífica
Ferramenteiro 1	12	19	13
Ferramenteiro 2	18	26	23
Ferramenteiro 3	17	19	15

Fonte: elaborada pelo autor

Qual é a melhor designação e qual o mínimo custo?

a) $x_{12} = 1;\ x_{23} = 1;\ x_{31} = 1$ com custo mínimo igual a 21
b) $x_{12} = 1;\ x_{22} = 1;\ x_{31} = 1$ com custo mínimo igual a 18
c) $x_{12} = 1;\ x_{23} = 1;\ x_{31} = 1$ com custo mínimo igual a 25
d) $x_{11} = 1;\ x_{22} = 1;\ x_{31} = 1$ com custo mínimo igual a 22
e) $x_{12} = 1;\ x_{23} = 1;\ x_{31} = 1$ com custo mínimo igual a 22

Referências

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para análise de decisões. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

COLIN, E. C. **Pesquisa operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

FÁVERO, Luiz Paulo; BELFIORE, Patrícia. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Pesquisa operacional curso introdutório**. São Paulo: Thomson Leraning, 2007.

PETROBRÁS. Concurso - Engenheiro(a de produção júnior conhecimento específicos. 2009. Disponível em: <http://site.cesgranrio.org. br/eventos/concursos/petrobras0109/pdf/demais_cargos/Provas/PROVA%2016%20 -%20ENGENHEIRO%20DE%20PRODU%C3%87%C3%83O%20J%C3%9ANIOR.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. **Administração da produção**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

Programação inteira

Convite ao estudo

Em nossos estudos de Programação Linear, vimos sua utilidade para solucionar os problemas de otimização de resultados. Entretanto, as propriedades da Programação Linear permitem que os resultados sejam números reais, o que leva a resultados como: 12,57 unidades a serem produzidas, por exemplo, e é claro que não se pode produzir 0,57 unidade de um produto. Em se tratando de valores grandes, é possível "arredondar" o resultado para 12 unidades a serem produzidas, porém, quando os valores são pequenos, como 0,67 unidade a ser produzida, como resolver esse problema? Produzimos uma unidade ou não? Se a decisão for para que a unidade seja produzida, haverá recursos necessários?

A Programação Inteira, ou Programação Linear Inteira, ou ainda Programação Discreta, surgiu da limitação da Programação Linear em lidar com problemas que precisam ser trabalhados com variáveis inteiras. Em 1957, Ralph Gomory inicia estudos a partir da Programação Linear para encontrar soluções com valores inteiros (COLIN, 2007, p. 174). Dessa forma, os problemas de otimização discreta (a Programação Inteira também é conhecida como Programação Discreta) aparecem em diversas áreas da vida real, como transporte, telecomunicações, aviação etc. (ARENALES et al., 2007, p. 163).

Nesta Unidade, estudaremos a Programação Inteira e suas derivações: Programação Inteira Mista e Programação Binária. Procuraremos entender suas diferenças, o que nos permitirá analisar cada tipo de problema e propor a solução ótima para cada um deles.

Para facilitar o entendimento, voltaremos à nossa empresa produtora de eixos. Nos exemplos estudados, resolvemos todos os problemas apresentados com a Programação Linear que nos apresentou como resultado ótimo valores fracionados. Nos cálculos da quantidade a ser produzida, por exemplo, foi considerado o tempo de máquina disponível como sendo a restrição e calculamos a solução ótima. Como as soluções encontradas apresentaram soluções fracionadas, a empresa gostaria de saber o real lucro caso o cálculo do problema considerasse apenas valores inteiros. Essa preocupação é justificada pelo fato de haver "sobras" considerando o arredondamento (para baixo) na produção de seus eixos. Como construir o novo modelo? Qual é a solução ótima pela Programação Inteira?

Outra situação vivida pela empresa é seu crescimento constante nos últimos anos, o que justifica o planejamento de construção de outra unidade fabril. A empresa precisa escolher um local que permita uma maior cobertura de atendimento tendo essa planta como referência. Suponha que você é o gerente de logística da empresa. Qual seria a sua sugestão com base em seus estudos?

Ao final da Unidade, você será capaz de responder a essa e outras perguntas que envolvem a Programação Inteira.

Vamos conquistar novos conhecimentos? Quem sabe essa é a oportunidade para uma promoção? Só depende de você. Então, vamos lá!

Seção 4.1

Introdução à programação inteira

Diálogo aberto

Nas seções anteriores, aprendemos a modelar diversos problemas de Programação Linear e a resolvê-los por meio de diferentes técnicas e utilizando a planilha eletrônica Excel, em especial a ferramenta Solver.

Em todos os nossos problemas, aceitamos soluções ótimas com os valores das variáveis fracionados. E consideramos, na oportunidade, como respostas os valores arredondados ou, como veremos mais adiante, admitimos a relaxação da condição de integralidade que impõe que as variáveis de decisão sejam valores inteiros. Entretanto, no mundo real, nem sempre a solução encontrada de um Problema Relaxado é factível (faz parte do campo das soluções viáveis).

Estudaremos como os problemas "reais" que exigem soluções inteiras devem ser modelados e, futuramente, como são solucionados por meio do algoritmo *Branch and Bound*.

Diante dessa nova situação, vamos retomar à nossa empresa fabricante de eixos dentados. Após a constatação de que ela poderá estar cometendo erros utilizando a Programação Linear para auxiliar nas tomadas de decisão, os diretores estão inseguros quanto às decisões tomadas até agora, e foi pedido que você iniciasse um estudo para a implantação da Programação Inteira a fim de decidir a quantidade de produtos a serem produzidos, considerando a restrição de recursos disponíveis. A insegurança diz respeito às quantidades fracionadas que a programação linear propõe. Diante dessa situação, a empresa estuda mudar sua análise para a programação inteira, em vez da programação linear, e comparar os resultados de ambas. O diretor industrial pediu que você, como gerente industrial, inicie os estudos montando o modelo do problema de alocação de recursos utilizando a Programação Inteira.

Relembrando os dados de produção dos eixos:

Para a fabricação dos eixos são usinados em quatro tipos diferentes de máquinas (furadeira, torno, fresadora e retífica).

Cada eixo é uma variável e eles foram chamados de x_1, x_2 e x_3.

O lucro unitário de x_1, x_2 e x_3 é de, respectivamente, R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00.

É conhecido o tempo diário disponível de cada máquina. A furadeira está disponível 180 minutos, o torno 280 minutos, a fresadora 300 minutos e a retífica 380 minutos.

Para a produção dos eixos são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 – Furadeira: 18 min; Torno: 32 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 30 min.

Eixo modelo 2 – Furadeira: 25 min; Torno: 30 min; Fresadora: 35 min; Retífica: 38 min.

Eixo modelo 3 – Furadeira: 22 min; Torno: 35 min; Fresadora: 30 min; Retífica: 35 min.

Agora é com você. Como ficará o modelo e qual é a solução ótima utilizando a Programação Inteira? Utilize uma planilha e o Solver para chegar ao resultado e apresente um relatório ao diretor industrial.

Não pode faltar

Nos problemas de Programação Linear (PL), vimos que ela está baseada em quatro hipóteses (certeza, aditividade, divisibilidade e proporcionalidade) e essas hipóteses permitem soluções ótimas contínuas e fracionadas. É comum arredondar os resultados fracionados quando os valores são grandes, mas problemas que apresentam como resultados valores muito pequenos, por exemplo $x_1 = 0,67$ e $x_2 = 0,34$, são difíceis de serem arredondados. A melhor solução é considerar $x_1 = 1$? Com que recursos? E x_2? Devemos considerar zero? Existem problemas que, obrigatoriamente, as variáveis devem ser inteiras, ou discretas, como a escala de enfermeiros de plantão (é inaceitável uma resposta como 3,75 enfermeiros de plantão) ou o número de ônibus a serem colocados em circulação. Mas nestes casos é só arredondar, correto? Não, pois nem sempre os valores arredondados continuarão sendo a solução ótima. Veremos mais adiante, nesta unidade, que a resposta arredondada de um problema resolvido pela Programação Linear poderá ser completamente diferente da resposta obtida pela Programação Inteira (PI).

A Programação Linear permite um infinito conjunto de soluções, pois os valores das soluções são contínuos. Por outro lado, a Programação Inteira encontrará um número finito de soluções e estes serão discretos. "Embora o número de soluções alternativas seja infinitamente menor no problema de Programação Inteira, ele é muito mais difícil de resolver" (COLIN, 2007, p. 173).

Existem situações da programação inteira em que a hipótese da divisibilidade deve ser eliminada (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 442). Nos casos em que todas as variáveis são inteiras, os problemas são chamados de Programação Inteira Pura. Os problemas em que algumas variáveis são inteiras e outras podem ser contínuas são conhecidos como Programação Inteira Mista (PIM). Existem, também, problemas em que as variáveis de decisão são "sim" ou "não" (e assumem os valores 1 para "sim" e 0 para "não", por exemplo). Estes são casos especiais da Programação Inteira e são conhecidos como Programação Inteira Binária, ou simplesmente Programação Binária (PB).

Modelo em programação inteira pura

Ralph Gomory, em 1957, inicia um estudo para encontrar soluções com valores inteiros. Em uma palestra, um dos participantes comentou que seria interessante ter respostas com valores inteiros, pois uma resposta fracionada não significava nada (COLIN, 2007, p. 174). Gomory começa a adaptar o método SIMPLEX para resolver problemas com variáveis inteiras.

A modelagem de problemas de PI é muito parecida com a construção de modelo para problemas de Programação Linear. Por esse motivo, a Programação Inteira também é conhecida como Programação Linear Inteira.

Para um problema de Programação Inteira Pura, temos como modelo genérico:

Max ou Min $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_j \geq 0 \text{ e inteiros, } j = 1, 2, ..., n$$

Podemos perceber que todas as variáveis de decisão devem ser maiores que zero (condição de não negatividade) e inteiras.

Exemplo de um modelo genérico para um problema de Programação Inteira Pura (ARENALES et al., 2007, p. 164):

$$MaxZ = 10x_1 + 6x_2$$

Sujeitos a:

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$
$$x_1; x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Os modelos dos problemas de Programação Inteira Mista e Programação Binária serão estudados nas seções seguintes.

Reflita

Aprendemos a modelar problemas para serem resolvidos por meio da Programação Linear e acabamos de ver que a Programação Inteira é utilizada para solucionar problemas "reais", nos quais as variáveis de decisão precisam ter valores inteiros. Considerando as duas situações, quando devemos utilizar a Programação Linear? Em que tipos de problemas a Programação Linear é útil? E quando utilizar a Programação Inteira?

Problema relaxado

Uma forma de se achar a solução ótima para os problemas de PI é desconsiderar as restrições de integralidade das variáveis (em outras palavras, aceitar que as variáveis possam ser fracionadas), tornando-o um problema de Programação Linear, conhecido como Problema Relaxado (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 358) ou Relaxação Linear.

Ao relaxar a restrição de integralidade de um problema de PI, a solução encontrada nem sempre irá satisfazer as condições de integralidade, ou seja, as respostas não serão números inteiros. Uma alternativa poderia ser o arredondamento dos resultados após a relaxação; entretanto, ao fazer o arredondamento, a solução poderá ser infactível, em outras palavras, estará fora da zona viável de soluções.

Exemplificando

Vamos utilizar o modelo para a Programação Inteira Pura mostrado anteriormente para entender melhor o Problema Relaxado.

$$MaxZ = 10x_1 + 6x_2$$

Sujeitos a:
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$
$$x_1; x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

O objetivo da função é de maximização.

Ao relaxarmos a condição de integralidade das variáveis de decisão, e construindo o modelo no Solver conforme a figura 4.1:

Figura 4.1 | Modelo do Problema Relaxado

	Coeficiente das Restrições			**Disponibilidade**	**Quantidade Utilizada**
	x_1	x_2			
restrição 1	9	5	≤	45	14
restrição 2	-4	5	≤	5	1
					Máximo Lucro
Max Z	10	6			16
VARIÁVEIS	1	1			

Fonte: elaborado pelo autor.

A construção do modelo é semelhante aos modelos vistos na Unidade anterior, inclusive os parâmetros do Solver. Teremos como solução o ilustrado na figura 4.2:

Figura 4.2 | Solução do Problema Relaxado

	Coeficiente das Restrições			**Disponibilidade**	**Quantidade Utilizada**
	x_1	x_2			
restrição 1	9	5	≤	45	45
restrição 2	-4	5	≤	5	5
					Máximo Lucro
Max Z	10	6			51,53846154
VARIÁVEIS	3,076923077	3,461538462			

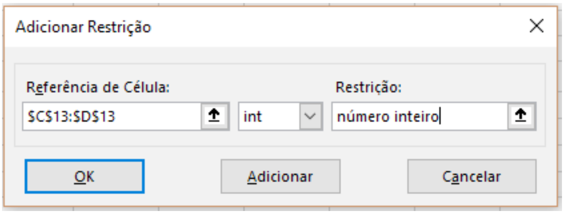
Fonte: elaborado pelo autor.

Notem que na solução ótima do Problema Relaxado temos x_1 = 3,077 e x_2 = 3,462 com valor máximo de 51,538.

Como o resultado deve apresentar variáveis inteiras, vamos arredondar os valores de x_1 e x_2 para 3, e substituindo os valores na função objetivo, teríamos como valor máximo Z = 48.

Iremos agora calcular a solução ótima considerando as variáveis como inteiras, ou seja, as variáveis serão sempre consideradas inteiras durante todo o cálculo (portanto, sem arredondamento no final), e para isso devemos acrescentar no parâmetro do Solver a condição de variáveis inteiras (condição de integralidade), conforme mostrado na figura 4.3.

Figura 4.3 | Condição de que as variáveis x_1 e x_2 são inteiras adicionada no parâmetro do Solver



Fonte: elaborado pelo autor.

Adicionada a condição de integralidade, a solução encontrada pelo Solver é o ilustrado na figura 4.4.

Figura 4.4 | Solução para o problema de Programação Inteira

	Coeficiente das Restrições			Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2			
restrição 1	9	5	≤	45	45
restrição 2	-4	5	≤	5	-20
					Máximo Lucro
Max Z	10	6			50
VARIÁVEIS	5	0			

Fonte: elaborado pelo autor.

Os valores das variáveis e da solução encontrados após a inclusão da condição de integralidade das variáveis (variáveis inteiras) são diferentes dos valores encontrados no Problema Relaxado, e caso utilizássemos as variáveis arredondadas, não teríamos conseguido a maximização da função objetivo.

A solução encontrada pela Programação Inteira nunca será melhor do que a solução encontrada com as variáveis relaxadas. Esse fato pode ser explicado pelo fato de que na Programação Linear explora-se o máximo possível os recursos, enquanto na Programação Inteira podem existir sobras nas restrições do modelo.

Pesquise mais

Outros tipos de Relaxação utilizados na Programação Inteira são a lagrangeana e surrogate. No artigo "O uso das relaxações lagrangeana e surrogate em problemas de programação inteira", os autores fazem uma revisão bibliográfica sobre a Relaxação, os métodos de solução para os duais respectivos e de relações teóricas existentes entre os duais. Disponível em: <www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382002000300006>. Acesso em: 14 fev. 2018.

Aplicações da programação inteira

São várias as aplicações da Programação Inteira, conforme veremos abaixo:

Problema da Mochila

A ideia associada ao problema da mochila é a de uma pessoa que vai viajar e tem uma mochila de dimensão finita. Essa pessoa precisa decidir, entre *n* itens, quais serão selecionados de forma a não exceder a capacidade (volume e peso) da mochila e maximizar a sua utilidade (ARENALES et al., 2007, p. 172).

Um exemplo da aplicação do problema da mochila está nas transportadoras que devem decidir os produtos a serem despachados em um caminhão de forma a não exceder a capacidade em volume e peso.

Outra aplicação do problema da mochila é a escolha de projetos a serem executados dentro de *n* possíveis. Neste caso, a capacidade da mochila diz respeito aos recursos disponíveis (mão de obra, dinheiro, tempo etc.).

Problema de Corte

Diversas áreas industriais exigem um processo de corte de matéria-prima. Indústrias automobilísticas compram o aço em forma de bobinas e as cortam nas dimensões das peças da lataria a serem fabricadas. Nas indústrias gráficas, as bobinas são de papel; nas indústrias de confecção, de tecido etc. O problema a ser resolvido diz respeito a ter o maior aproveitamento possível, ou seja, o menor desperdício possível. Nos problemas de corte, temos duas situações: os cortes unidimensionais (no caso de barras, bobinas de papel etc.); os cortes bidimensionais, como no caso de placas de aço, madeira e tecidos; e os cortes tridimensionais, quando a matéria-prima é um bloco, como um bloco de espuma para fazer colchões, por exemplo (ARENALES et al., 2007, p. 174).

Problema de Designação com Variáveis Inteiras

Em vários ramos de atividades é preciso fazer um escalonamento de pessoal, como de enfermeiros, professores, atendentes em supermercado, motoristas de ônibus, entre tantos outros. "O problema consiste em alocar um conjunto de funcionários entre diferentes horários de trabalho, de forma que os postos de atendimento possam atender sua demanda respeitando as restrições do sistema" (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 407).

Problema de Cobertura

O Problema de Cobertura também é conhecido como Problema de Localização da Fábrica. Neste tipo de problema, procura-se a melhor localidade de forma a atender o maior número possível de pessoas. Exemplos desse tipo de problema são determinar a localidade a ser instalado um centro de distribuição, posicionamento de torres de celular para uma maior cobertura de sinal, localização de hospitais públicos para atender a maior parcela possível da população etc.

Problema do Caixeiro Viajante

Segundo Colin (2007, p. 183), o problema do caixeiro viajante é, provavelmente, o mais conhecido e estudado da PI. Consiste em determinar uma rota de custo mínimo de tal forma que ela passe por todas as cidades ou clientes de uma rede uma única vez e retorne ao ponto de partida (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 394).

Problema de Programação da Produção

O problema de Programação de Produção pode ser resumido como o pronto atendimento das demandas sem atraso, respeitando a capacidade dos recursos e minimizando o custo de produção (ARENALES et al., 2007, p. 205). Nesse contexto, a Programação Inteira é útil no planejamento da produção, no dimensionamento e na programação de lotes, na programação da produção e em outros problemas relacionados com a programação da produção.

Assimile

Os problemas descritos acima são os considerados "puros", ou seja, os problemas originais que iniciaram o estudo de cada tipo de problema. Deles existem variações que lidam com variantes dos problemas iniciais. Por exemplo, os problemas de programação da produção, que lidam com outros problemas relacionados ao custo de preparação das máquinas (*setup*) e do estoque que representam o maior peso no custo total de produção. Existem à disposição vários livros que podem ser consultados para aprofundamento em cada caso. Um bom início é consultar a referência bibliográfica desta seção.

Sem medo de errar

A fábrica produtora de eixos dentados deseja saber a solução ótima considerando a Programação Inteira. Para isso, inicialmente, montamos o modelo matemático.

O objetivo do problema é obter o máximo lucro com a produção dos eixos. Somente para relembrar, o lucro obtido com a comercialização de cada modelo de eixo (x_1, x_2 e x_3) é de R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00, respectivamente. Portanto, temos: $1850x_1 + 1800x_2 + 1900x_3$

As restrições são os tempos de máquinas disponíveis. Temos as seguintes inequações:

Para a furadeira: $18x_1 + 25x_2 + 22x_2 \leq 180$

Para o torno: $32x_1 + 30x_2 + 35x_3 \leq 200$

Para a fresadora: $40x_1 + 35x_2 + 30x_3 \leq 300$

Para a retífica: $30x_1 + 38x_2 + 35x_3 \leq 380$

Como as variáveis não podem ser negativas, temos: $x_1; x_2; x_3 \geq 0$ e elas devem ser inteiras.

O modelo final é:

Max Z: $1850x_1 + 1800x_2 + 1900x_3$

$$\text{Sujeito a: } \begin{aligned} & 18x_1 + 25x_2 + 22x_3 \leq 180 \\ & 32x_1 + 30x_2 + 35x_3 \leq 200 \\ & 40x_1 + 35x_2 + 30x_3 \leq 300 \\ & 30x_1 + 38x_2 + 35x_3 \leq 380 \\ & x_1; x_2; x_3 \geq 0 \\ & x_1; x_2; x_3 \text{ inteiros} \end{aligned}$$

E para solucionar o problema utilizando o Solver, a modelagem fica conforme a figura 4.5.

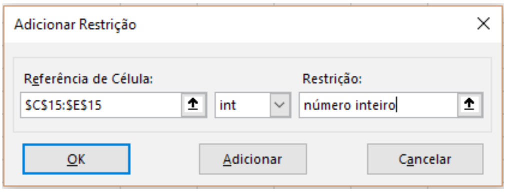
Figura 4.5 | Modelo construído na planilha Excel como solução do exemplo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel						
3									
4									
5			**Coeficiente das Restrições**				**Disponibilidade**		**Quantidade Utilizada**
6									
7			x_1	x_2	x_3				
8		Furadeira	18	25	22	≤	180		65
9		Torno	32	30	35	≤	280		97
10		Fresadora	40	35	30	≤	300		105
11		Retífica	30	38	35	≤	380		103
12									**Máximo Lucro**
13		Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00				R$ 5.550,00
14									
15		VARIÁVEIS	1	1	1				

Fonte: elaborado pelo autor.

Aos parâmetros do Solver devemos acrescentar a condição de integralidade, conforme a figura 4.6.

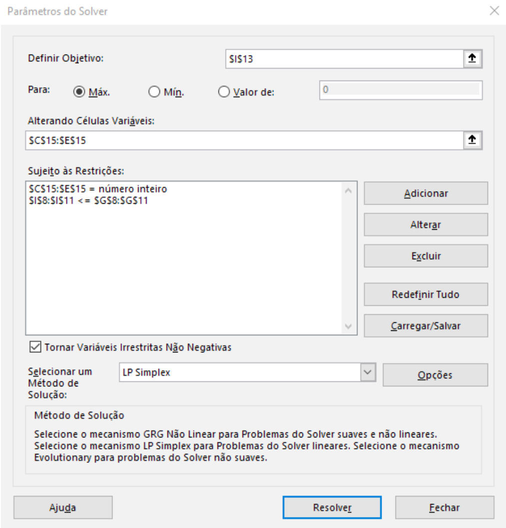
Figura 4.6 | Condição de integralidade das variáveis de decisão



Fonte: elaborado pelo autor.

Todos os parâmetros do Solver podem ser vistos na figura 4.7.

Figura 4.7 | Parâmetros do Solver para o problema de Programação Inteira



Fonte: elaborado pelo autor.

E a solução encontrada é mostrada na figura 4.8:

Figura 4.8 | Solução ótima encontrada pelo Solver

	Coeficiente das Restrições				Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2	x_3			
Furadeira	18	25	22	≤	180	176
Torno	32	30	35	≤	280	280
Fresadora	40	35	30	≤	300	240
Retífica	30	38	35	≤	380	280
						Máximo Lucro
Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 15.200,00
VARIÁVEIS	0	0	8			

Fonte: elaborado pelo autor.

Compare os resultados obtidos com a Programação Inteira (acima) com os resultados da Programação Linear.

Quando solucionado por meio da Programação Linear, os resultados obtidos foram: $x_1 = 3{,}4218$, $x_2 = 1{,}8289$ e $x_3 = 3{,}3038$, com Lucro Máximo de R$ 15.899,71. O resultado obtido pela Programação Inteira é muito diferente do encontrado, o que pode ser explicado pela condição de integralidade, ou seja, durante os cálculos para se chegar ao lucro máximo, as variáveis sempre foram consideradas inteiras, o que levou a resposta a ser bem diferente da solução encontrada pela PI.

Parabéns pelo Sucesso! Mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Minimização dos custos de produção

Descrição da situação-problema

A empresa fabricante dos eixos teve um aumento significativo em seus pedidos e não conseguirá atender a demanda somente com sua produção. Ela pretende terceirizar parte de sua produção e cabe a você como gerente industrial decidir quantos eixos de cada modelo pedir. Conhecendo a demanda mensal de cada eixo (considerando o mês com 20 dias úteis), os custos de produção própria e os custos de terceirização, como gerente industrial você necessita responder sobre quantos eixos de cada modelo a empresa deve produzir e quantos deve terceirizar para que o custo seja o mínimo. Como você faria isso? Utilize a Programação Inteira para resolver o problema.

Demandas (unidades): $x_1 = 60$, $x_2 = 100$ e $x_3 = 75$

Custos de produção (R$/unid): $x_1 = 610$, $x_2 = 600$ e $x_3 = 635$

Custos de terceirização (R$/unid): $x_1 = 860$, $x_2 = 800$ e $x_3 = 880$

Relembrando que:

O lucro unitário de x_1, x_2 e x_3 é de, respectivamente, R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00.

O tempo diário disponível de cada máquina é: a furadeira está disponível 200 minutos, o torno 360 minutos, a fresadora 420 minutos e a retífica 400 minutos.

Para a produção dos eixos, são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 – Furadeira: 15 min; Torno: 30 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 45 min.

Eixo modelo 2 – Furadeira: 22 min; Torno: 25 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 35 min.

Eixo modelo 3 – Furadeira: 18 min; Torno: 45 min; Fresadora: 42 min; Retífica: 40 min.

Resolução da situação-problema

Vimos o mesmo problema na Seção 1 da Unidade 3, mas anteriormente utilizamos a PL para chegarmos à solução. O modelo final é igual ao visto na figura 4.9.

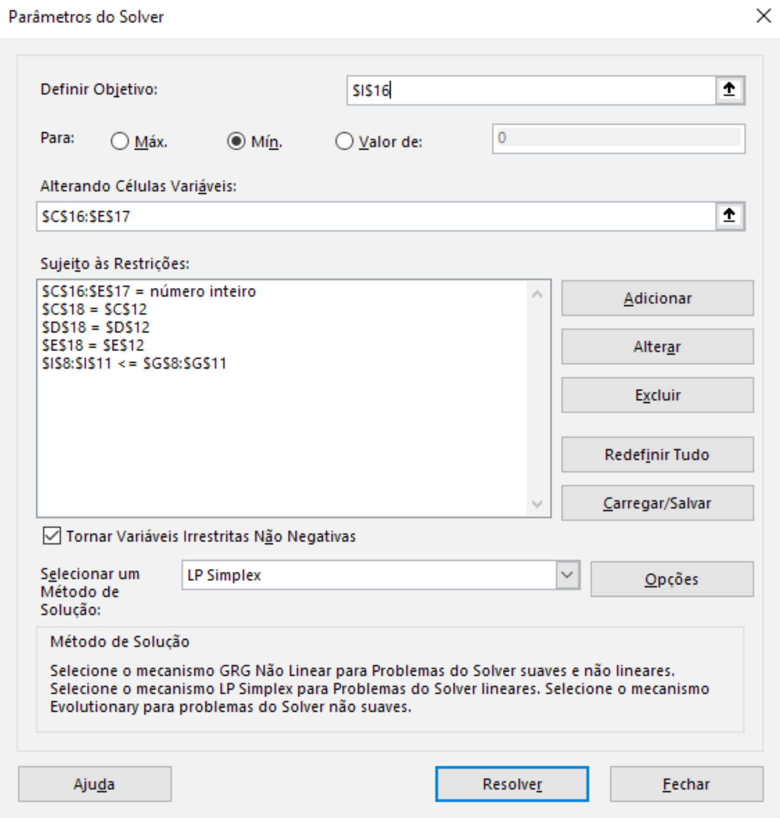
Figura 4.9 | Modelo da nova situação-problema

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Exemplo de utilização da ferramenta SOLVER do Excel						
3									
4									
5			Coeficiente das Restrições						
6							Disponibilidade		Quantidade Utilizada
7			x_1	x_2	x_3				
8		Furadeira	15	22	18	≤	4000		55
9		Torno	30	25	45	≤	7200		100
10		Fresadora	40	40	42	≤	8400		122
11		Retífica	45	35	40	≤	8000		120
12		Demanda	60	100	75				
13		Custo de Produção	R$ 610,00	R$ 600,00	R$ 635,00				
14		Custo de Terceirização	R$ 860,00	R$ 800,00	R$ 880,00				
15									Custo Total
16		Produção Própria	1	1	1				R$ 4.385,00
17		Produção Terceirizada	1	1	1				
18		Total	2	2	2				

Fonte: elaborado pelo autor.

Nos parâmetros do Solver, devemos acrescentar as restrições de demanda e, como o objetivo é achar o menor custo, alterar o objetivo para Min (minimizar). Devemos acrescentar também a condição de integralidade. Os parâmetros preenchidos estão ilustrados na figura 4.10.

Figura 4.10 | Parâmetros do Solver para o problema de minimização de custo utilizando a PI



Fonte: elaborado pelo autor.

Como solução, temos a figura 4.11.

Figura 4.11 | Solução para o problema de minimização do custo utilizando a PI

	Coeficiente das Restrições				Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2	x_3			
Furadeira	15	22	18	≤	4000	3945
Torno	30	25	45	≤	7200	6855
Fresadora	40	40	42	≤	8400	8390
Retífica	45	35	40	≤	8000	7995
Demanda	60	100	75			
Custo de Produção	R$ 610,00	R$ 600,00	R$ 635,00			
Custo de Terceirização	R$ 860,00	R$ 800,00	R$ 880,00			
						Custo Total
Produção Própria	41	90	75			R$ 150.975,00
Produção Terceirizada	19	10	0			
Total	60	100	75			

Fonte: elaborado pelo autor.

Faça valer a pena

1. Nos problemas de Programação Inteira, apesar de haver um número finito de soluções viáveis em comparação à Programação Linear, que apresenta infinitas soluções viáveis, a resolução é muito mais trabalhosa e difícil. Uma forma inicial de se resolver um problema de PI é relaxando as variáveis de decisão.

A solução do Problema Relaxado envolve:

a) ignorar a restrição de não negatividade.
b) arredondar os valores das variáveis ao final da solução.
c) ignorar a restrição de integralidade.
d) ignorar variáveis negativas.
e) ignorar variáveis reais.

2. Vários problemas a serem resolvidos por Programação Inteira envolvem escolhas do tipo “fazer” ou “não fazer”; “comprar” ou “não comprar”; “sim” ou ”não”, ou seja, uma escolha em detrimento de outra, também conhecidas como escolhas dicotômicas.

A Programação desses problemas é conhecida como:

a) Programação Inteira.
b) Programação Linear.
c) Programação Inteira Mista.
d) Programação Binária.
e) Programação Lagrangeana.

3. Uma empresa de logística está tendo problemas de roteamento de seus caminhões. As entregas envolvem um conjunto de cidades em que os caminhões deveriam atender. Os caminhões saem de seu depósito e deveriam retornar após percorrida a rota de entregas. Entretanto, as rotas atuais não cobrem todas as cidades que deveriam ser atendidas, o que obriga que caminhões extras façam a entrega nessas cidades não cobertas, encarecendo assim os custos e as despesas da empresa.

O modelo correto para resolver o caso descrito acima é por meio do:

a) problema do caixeiro viajante.
b) problema de cobertura.
c) problema da mochila.
d) problema de designação de variáveis inteiras.
e) problema de programação da produção.

Seção 4.2

Soluções em programação inteira

Diálogo aberto

Nesta seção, estudaremos como os problemas de Programação Inteira com duas variáveis de decisão podem ser solucionados pelo método gráfico, muito parecido com o método gráfico utilizado para solucionar problemas de Programação Linear. A diferença está no número de soluções possíveis, enquanto na PL toda a área da zona de respostas possíveis é uma resposta aceitável, na PI as respostas possíveis são somente os pontos definidos pelo encontro das variáveis de decisão, portanto será necessário enumerar cada ponto e verificar a solução ótima do problema.

Na Seção 1 desta Unidade, foi calculada a quantidade a ser fabricada considerando uma das plantas pertencentes à empresa. E foi possível ver que as soluções são bem diferentes considerando a PL e a PI.

A direção da empresa, espantada com o resultado, decidiu fazer a mesma investigação nas outras plantas da empresa e o diretor industrial pediu que você, como gerente industrial, fizesse o novo estudo montando o modelo do problema de alocação de recursos utilizando a Programação Inteira na planta 2.

O lucro unitário de x_1, x_2 e x_3 é de, respectivamente, R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00, como em todas as plantas da empresa.

Nessa planta, o tempo diário disponível de cada máquina é:

Furadeira: 200 minutos; Torno: 360 minutos; Fresadora: 420 minutos; Retífica: 400 minutos.

Para a produção dos eixos são necessários os tempos, em minutos, conforme os dados a seguir:

Eixo modelo 1 – Furadeira: 15 min; Torno: 30 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 45 min.

Eixo modelo 2 – Furadeira: 22 min; Torno: 25 min; Fresadora: 40 min; Retífica: 35 min.

Eixo modelo 3 – Furadeira: 18 min; Torno: 45 min; Fresadora: 42 min; Retífica: 40 min.

O diretor conta novamente com sua ajuda. Qual é a solução ótima utilizando a Programação Inteira nessa planta? Utilize uma planilha e o Solver para chegar ao resultado e apresente o relatório ao diretor industrial.

Um novo desfio é sempre motivo para aprender mais e crescer profissionalmente. Você consegue!

Não pode faltar

Programação inteira – solução gráfica

Vimos na seção anterior que a Programação Inteira (PI) foi elaborada para solucionar problemas em que as variáveis devem ser discretas (inteiras). Quando todas as variáveis são inteiras, temos a Programação Inteira Pura. Quando somente parte das variáveis é inteira e outras não, temos a Programação Mista. Estudamos também que as soluções encontradas por meio da Programação Linear (PL) permitem soluções fracionadas e, portanto, um conjunto infinito de possibilidades.

Ainda na seção anterior, resolvemos, utilizando o Solver do Excel, alguns exemplos e pudemos comparar as diferenças entre os resultados considerando a PI e a PL. Agora, vamos nos aprofundar sobre o porquê de soluções tão diferentes.

Para ficar mais fácil de se visualizar as diferenças, vamos usar um exemplo considerando duas variáveis utilizando o Método Gráfico (ANDRADE, 2015, p. 1):

Max $Z = 30x_1 + 40x_2$

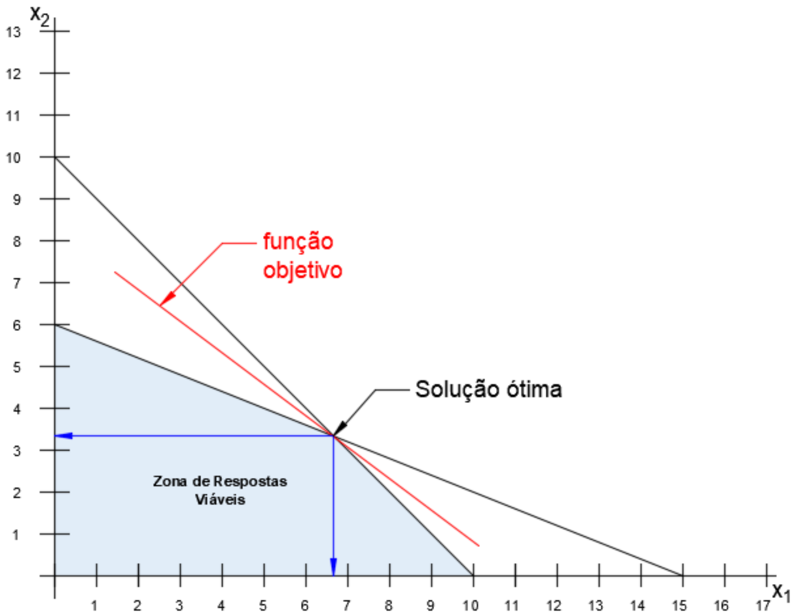
Sujeitos a: $x_1 + x_2 \leq 10$

$0,8x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1; x_2 \geq 0$ e inteiros

Solucionando o problema pelo Método Gráfico de Programação Linear, temos como resultado o gráfico visto na figura 4.12:

Figura 4.12 | Solução do problema pelo Método Gráfico de PL



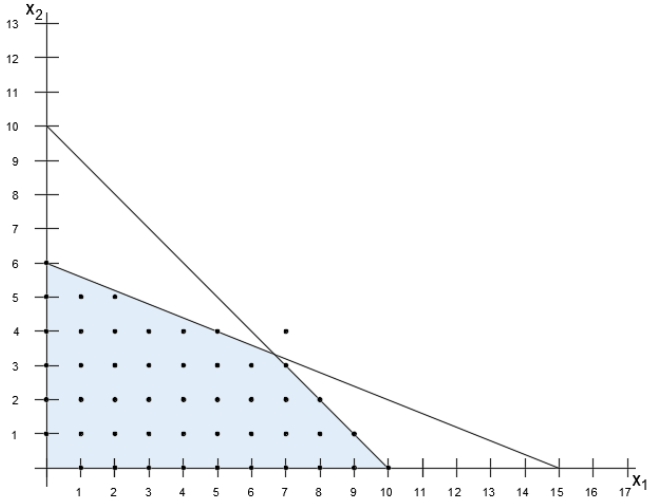
Fonte: Andrade (2015, p. 2).

E como solução ótima, temos: $x_1 = 6,67$; $x_2 = 3,33$ e substituindo x_1 e x_2 na função objetivo: $Z = 333,3$.

Como visto na Seção 1 desta Unidade, quando resolvemos o problema de PI desconsiderando a restrição de integralidade (como foi feito acima), dizemos que o problema foi relaxado, e uma das possibilidades para se obter variáveis inteiras é o arredondamento da solução obtida (FÁVERO; BELFIORE, 2013, p. 358). Teríamos como solução, portanto, $x_1 = 7$ e $x_2 = 4$.

A área sombreada da figura 4.12 e a figura 4.13 representam a zona de respostas viáveis para o problema, e os pontos representam as soluções inteiras possíveis, conforme ilustrado na figura 4.13.

Figura 4.13 | Gráfico da zona de respostas viáveis com destaque para soluções inteiras



Fonte: Andrade (2015, p. 2).

É possível perceber que o ponto no qual $x_1 = 7$ e $x_2 = 4$ não está dentro da zona viável de respostas. Logo, não é uma resposta válida e, portanto, devemos achar qual é a melhor solução para o problema.

Vamos analisar os pontos próximos ao ponto da solução ótima do Problema Relaxado mostrado na figura 4.13 e verificar as soluções correspondentes. No ponto em que $x_1 = 6$ e $x_2 = 3$, o valor da solução é igual a: $Z = 300$. Para que seja possível fazer a comparação dos pontos próximos à solução ótima da PL, vejamos a quadro 4.1.

Quadro 4.1 | Valores da função objetivo com variáveis próximas às encontradas por PL

x_1	5	6	6	6	**7**	7	7	8	8	9	10
x_2	4	3	2	1	**3**	2	1	2	1	1	0
Z	310	300	260	220	**330**	290	250	320	280	310	300

Fonte: elaborado pelo autor.

A solução ótima corresponde às variáveis $x_1 = 7$ e $x_2 = 3$ com $Z = 330$. Perceba que a solução ótima da PI é próxima à solução relaxada (PL), mas nem sempre ambas as soluções (PI e PL) estarão próximas (MOORE; WEATHERFORD, 2005, p. 284). Podemos confirmar as diferenças no caso apresentado no boxe

Exemplificando mostrado na seção 4.1, quando a solução ótima calculada pelo Solver apresentou como resultado: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ e $Z = 50$, enquanto a solução ótima encontrada no problema relaxado (na seção anterior) foi: $x_1 = 3{,}07$ e $x_2 = 3{,}47$, com $Z = 51{,}53$ Portanto, para que se tenha certeza de qual é a melhor solução, seria necessária a análise de todos os pontos que se encontram na zona de respostas viáveis, ou seja, é necessário fazer a enumeração completa de todos os pontos.

Programação inteira – solução por enumeração

A procura por uma solução ótima por enumeração completa nem sempre é razoável, dependendo do número de variáveis. Considere um problema com 20 variáveis de decisão que possam assumir valores de 1 a 50. Teríamos 50^{20} (mais de $9{,}5 \times 10^{33}$) pontos para enumerar e testar (MOORE, 2005, p. 286), o que é demorado até mesmo com o uso de computadores.

Métodos de enumeração e busca foram desenvolvidos e se baseiam no princípio de que é possível enumerar as possíveis soluções inteiras e utilizar testes que permitem analisar as combinações de variáveis mais promissoras. O método mais importante dessa categoria é a técnica *Branch and Bound* (ANDRADE, 2015, p. 5).

Algoritmo *Branch and Bound*

O algoritmo de *Branch and Bound* é composto por 5 etapas, conforme descrito abaixo

1. Resolver o problema como se fosse um problema de PL com as variáveis relaxadas (ignorando a condição de integralidade). Conferir a solução ótima calculada e observar se as variáveis que deveriam ser inteiras são, de fato, inteiras. Caso as variáveis sejam inteiras, o problema foi resolvido. Caso contrário, passar à próxima etapa.

2. Se na etapa anterior houver uma variável não inteira entre dois números inteiros consecutivos e não negativos ($i_1 < x_j < i_2$), dois novos modelos de programação inteira se formam, acrescido ao problema original uma restrição do tipo $x_j \leq i_1$, ou do tipo $x_j \geq i_2$.

3. Se alguma das primeiras aproximações ainda apresentar uma solução não inteira, o problema de PI resultante por essa primeira aproximação torna-se candidato a uma ramificação adicional.

4. Se o problema for de maximização, a ramificação continua até ser obtida uma primeira aproximação inteira (que é uma candidata à solução ótima do problema original, e o valor da função objetivo relativa às variáveis encontradas torna-se o limite inferior para o problema, o que significa que modelos cujas primeiras aproximações apresentem valores da função objetivo menores que o limite inferior devem ser descartados.

5. Se o problema for de minimização, o procedimento é o mesmo. A diferença é que os limites a serem utilizados devem ser superiores, e não inferiores. Logo, o valor da função objetivo a partir da primeira solução inteira torna-se o limite superior do problema, e devem ser descartados os modelos com valor de função objetivo maiores ao limite.

Assimile

O algoritmo *Branch and Bound* (traduzindo *branch* do inglês, temos a palavra "ramo" e *bound* significa "limite") foi proposto por Land e Doig como solução para o problema de Programação Inteira e Binária na década de 1960. O método baseia-se em ramificar os problemas originais em subproblemas menores e posteriormente solucionam-se os subproblemas gerando limite superior (em problemas de maximização) ou limite inferior (para problemas de minimização). As soluções dos subproblemas são combinadas até que se encontre uma solução ótima para o problema original (FÁVERO; BELFIORE, 2013, p. 359).

Exemplificando

Vamos resolver um problema de maximização de Programação Inteira pelo algoritmo *Branch and Bound*.

Dado o modelo abaixo, achar a solução ótima (FÁVERO; BELFIORE, 2013, p. 364).

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &\leq 44 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 27 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1; x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Pelo método Simplex, a solução inicial do problema relaxado é mostrada na tabela 4.1:

Tabela 4.1 | Solução ótima do problema relaxado

Variáveis		
x_1	x_2	Z
1,33333333	5,33333333	32

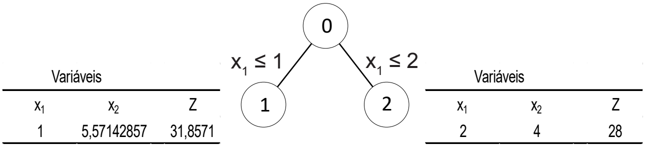
Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 365).

Como as variáveis da solução não são inteiras, passamos para a próxima etapa.

Considerando que nenhuma das variáveis é inteira, escolhemos uma para ramificar os subproblemas. Em nosso exemplo, escolheremos x_1.

No subproblema 1, a variável x_1 assume o valor 1 e se torna mais uma restrição, ou seja, na resolução pelo Simplex, deve-se adicionar a restrição $x_1 \leq 1$, e o mesmo deve ser feito no subproblema 2, em que a restrição é $x_1 \leq 2$. Após calcular a solução para os dois subproblemas, temos o resultado apresentado na figura 4.14.

Figura 4.14 | Soluções para os subproblemas 1 e 2

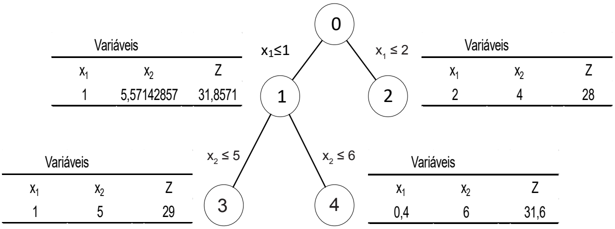


Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 366).

A solução para o subproblema 2 encontrou uma solução, mas como ainda temos possíveis soluções derivadas do subproblema 1, ela é considerada uma candidata à solução ótima.

Para prosseguir, ramificamos o subproblema 1 em mais dois subproblemas (3 e 4) e, agora, além da restrição $x_1 \leq 1$, temos de analisar o subproblema considerando $x_2 \leq 5$ e $x_2 \leq 6$. O resultado pode ser visto na figura 4.15

Figura 4.15 | Solução para os ramos do subproblema 1

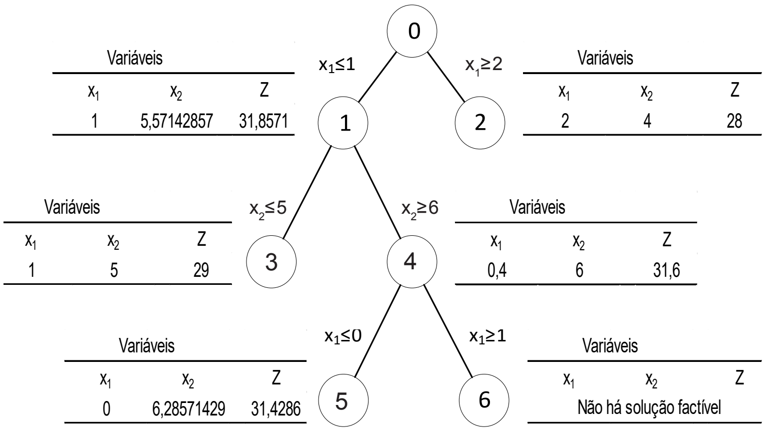


Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 369).

Temos mais uma candidata à solução ótima e podemos perceber que essa situação elimina a candidata anterior, pois o valor da função objetivo é maior que a anterior (lembrando que o problema é de maximização).

Devemos ramificar o subproblema 4 e impor a restrição de que $x_2 \leq 6$. Teremos como solução o mostrado na figura 4.16.

Figura 4.16 | Solução para os ramos do subproblema 4

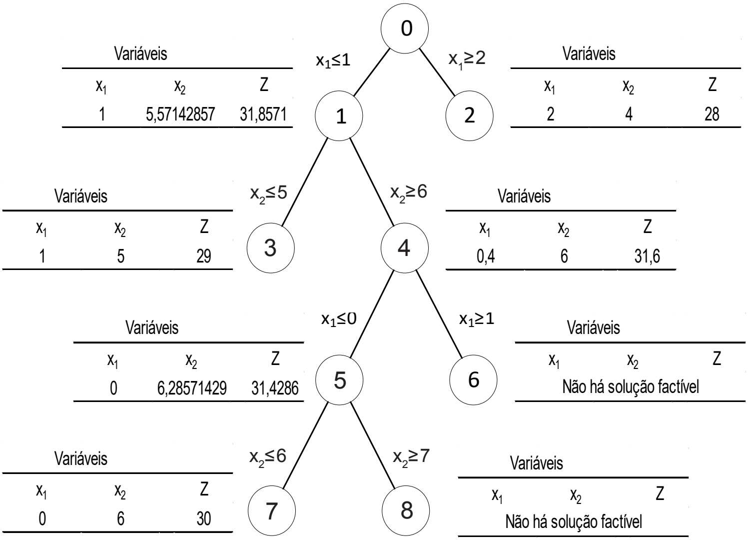


Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 371).

A solução do subproblema 4 considerando $x_1 \geq 1$ não apresenta solução factível (ou seja, não apresenta solução viável), portanto deve ser descartada. Por outro lado, devemos ramificar o subproblema 5 e continuar o desenvolvimento do algoritmo.

A ramificação deve considerar $x_2 \leq 6$ e $x_2 \geq 7$. O resultado pode ser observado na figura 4.17.

Figura 4.17 | Solução para os ramos do subproblema 5



Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 373).

Encontramos mais uma candidata à solução por apresentarem somente variáveis com valores inteiros, e como apresenta o valor da função objetivo maior que as outras candidatas, encontramos a solução ótima para o problema de Programação Inteira por meio do algoritmo *Branch and Bound*.

A solução final é $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, com função objetivo $Z = 30$.

Solução no Excel

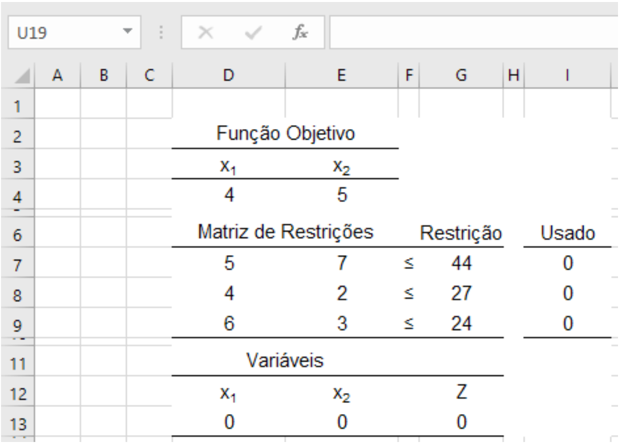
O problema resolvido no boxe *Exemplificando* utilizou o algoritmo *Branch and Bound*, que envolve o uso do método Simplex para a resolução do problema original e os subsequentes subproblemas.

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &\leq 44 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 27 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1; x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Para agilizar a compreensão do algoritmo, foi utilizada a ferramenta Solver, e a construção inicial do modelo é semelhante aos exemplos vistos anteriormente. O modelo da solução do problema original (PI) é relaxado e solucionado como um problema de PL. O modelo é visto na figura 4.18.

Figura 4.18 | Modelo do problema original da seção *Exemplificando*



Fonte: elaborado pelo autor.

As fórmulas referentes à coluna "Usado" (Coluna I da planilha) são preenchidas conforme a tabela 4.2.

Tabela 4.2 | Fórmulas das células da coluna "Usado"

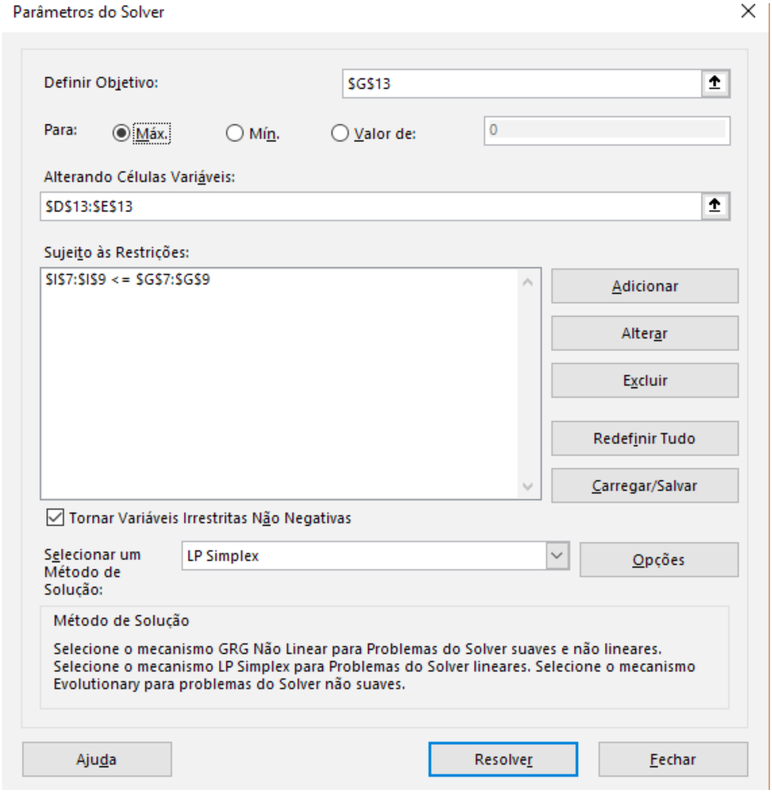
Célula	Fórmula
I7	=SOMARPRODUTO(D13:E13;D7:E7)
I8	=SOMARPRODUTO(D13:E13;D8:E8)
I9	=SOMARPRODUTO(D9:E9;D13:E13)

Fonte: elaborado pelo autor.

A fórmula referente à função objetivo é a soma do produto entre os valores e a quantidade a ser produzida das variáveis x_1 e x_2 refere-se a =SOMARPRODUTO(D4:E4;D13:E13).

O preenchimento dos parâmetros do SOLVER fica claro na figura 4.19

Figura 4.19 | Parâmetros do SOLVER



Fonte: elaborado pelo autor.

E tem como resultado a tabela 4.3, apresentada anteriormente:

Tabela 4.3 | Solução ótima do problema relaxado

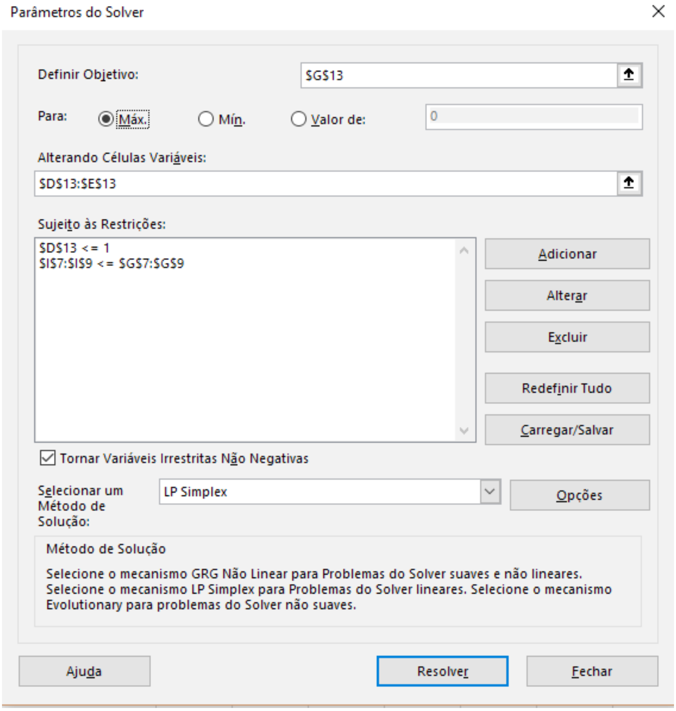
Variáveis		
x_1	x_2	Z
1,33333333	5,33333333	32

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 365).

Seguindo com o algoritmo *Branch and Bound*, escolhemos a variável x_1, conforme explicado na ocasião, a ser ramificada. Para o subproblema 1, usamos $x_1 \leq 1$ como nova restrição e, para o subproblema 2, definimos $x_1 \geq 2$ como nova restrição.

O parâmetro do SOLVER para o subproblema 1 com a nova restrição $x_1 \leq 1$ é visto na figura 4.20.

Figura 4.20 | Parâmetros do Solver para o subproblema 1 com a nova restrição $x_1 \leq 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

O subproblema 1 tem como solução $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}571$ e $Z = 31{,}857$.

Para a solução do subproblema 2, retiramos a restrição $x_1 \leq 1$ dos parâmetros e acrescentamos a restrição $x_1 \geq 2$.

A solução encontrada pelo Solver é $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $Z = 28$.

O mesmo cuidado deve ser tomado na solução dos outros subproblemas até que se chegue à solução ótima conforme o procedimento explicado no algoritmo *Branch and Bound*.

Pesquise mais

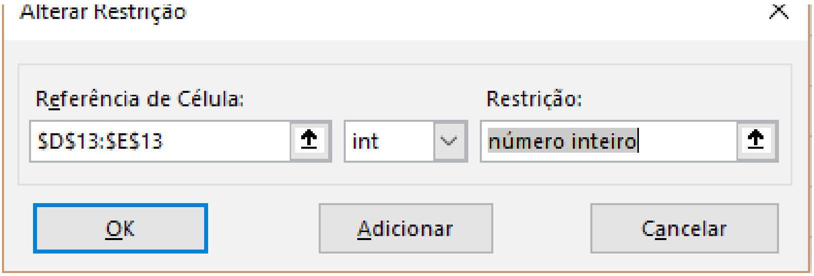
O algoritmo *Branch and Bound* é o método mais utilizado para a solução por meio de enumeração e busca para problemas de Programação Inteira.

Uma outra classe de resolução é conhecida como equações de corte, ou, simplesmente, método de corte. No link abaixo, há um tutorial para a solução de problemas de Programação Inteira pelo plano de cortes de Gomory.

SANTOS, Haroldo G. **Programação Inteira**: cortes. Disponível em: <www.decom.ufop.br/haroldo/proglinear/files/idealForm.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2018.

O último procedimento descrito logo acima teve como objetivo mostrar o uso do SOLVER para fixar a solução de problema de Programação Inteira por meio do algoritmo *Branch and Bound*. Para a solução do problema proposto diretamente pelo Solver, há a necessidade de condicionar as variáveis como inteiras nos parâmetros da ferramenta, que pode ser visto na figura 4.21.

Figura 4.21 | Condição de integralidade das variáveis de decisão



Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado calculado pelo Solver é exatamente igual à solução encontrada pelo algoritmo *Branch and Bound* e pode ser visto na figura 4.22 e comparado com o resultado apresentado na figura 4.15.

Figura 4.22 | Resultado final encontrado pelo SOLVER para o problema de PI

Função Objetivo	
x_1	x_2
4	5

Matriz de Restrições			Restrição	Usado
5	7	≤	44	42
4	2	≤	27	12
6	3	≤	24	18

Variáveis		
x_1	x_2	Z
0	6	30

Fonte: elaborado pelo autor.

Reflita

Os exemplos apresentados ao longo da seção foram essencialmente do tipo problemas de Programação Inteira Pura, ou seja, todas as variáveis são inteiras. Como solucionar os problemas de Programação Inteira Mista ou Inteira Binária? Quais são as diferenças na construção dos modelos e resolução?

Sem medo de errar

O diretor da empresa fabricante de eixos dentados deseja saber a solução ótima para a planta 2 considerando a Programação Inteira.

Vamos, primeiro, montar o modelo matemático.

O objetivo do problema é obter o máximo lucro com a produção dos eixos. Somente para relembrar, o lucro obtido com a comercialização de cada modelo de eixo (x_1, x_2 e x_3) é de R$ 1.850,00, R$ 1.800,00 e R$ 1.900,00, respectivamente. Portanto, temos: $1850x_1 + 1800x_2 + 1900x_3$

As restrições são os tempos de máquinas disponíveis. Temos as seguintes inequações:

Para a furadeira: $15x_1 + 22x_2 + 18x_3 \leq 200$

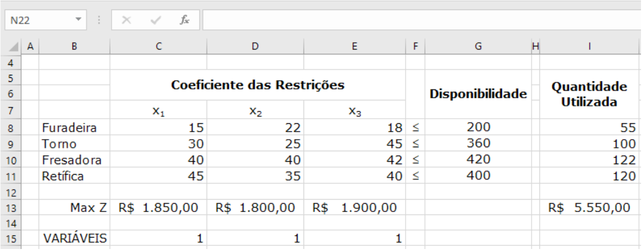
Para o torno: $30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \leq 360$

Para a fresadora: $40x_1 + 40x_2 + 42x_3 \leq 420$

Para a retífica: $45x_1 + 35x_2 + 40x_3 \leq 400$

O modelo final pode ser visto na figura 4.23:

Figura 4.23 | Modelo para a planta 2

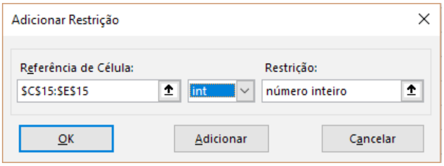


	Coeficiente das Restrições				Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2	x_3			
Furadeira	15	22	18	≤	200	55
Torno	30	25	45	≤	360	100
Fresadora	40	40	42	≤	420	122
Retífica	45	35	40	≤	400	120
Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 5.550,00
VARIÁVEIS	1	1	1			

Fonte: elaborado pelo autor.

Como as variáveis devem ser inteiras, é adicionada uma nova restrição de integralidade, conforme a figura 4.24.

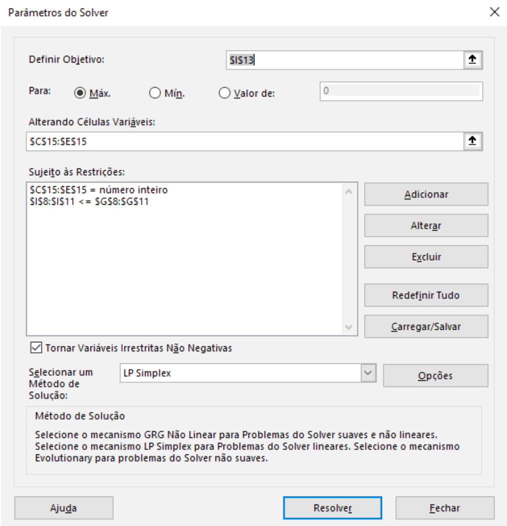
Figura 4.24 | Adição da condição de integralidade das variáveis



Fonte: elaborado pelo autor.

Os parâmetros finais do Solver estão ilustrados na figura 4.25:

Figura 4.25 | Parâmetros do Solver



Fonte: elaborado pelo autor.

E a solução final é mostrada na figura 4.26:

Figura 4.26 | Solução ótima para a planta 2 por meio da PI

	Coeficiente das Restrições				Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2	x_3			
Furadeira	15	22	18	≤	200	186
Torno	30	25	45	≤	360	360
Fresadora	40	40	42	≤	420	410
Retífica	45	35	40	≤	400	395
Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 18.600,00
VARIÁVEIS	2	3	5			

Fonte: elaborado pelo autor.

Como solução ótima da Programação Inteira, temos: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$, com lucro máximo igual a R$ 18.600,00.

A solução encontrada por meio da PL apresentou como resultado: $x_1 = 2{,}30$; $x_2 = 5{,}13$ e $x_3 = 2{,}92$, com lucro máximo igual a R$ 19.044,25. Comparando os dois resultados, percebemos que, caso optássemos pelo arredondamento da solução encontrada pela PL, os valores das variáveis seriam diferentes entre as duas resoluções.

Se analisarmos bem as soluções, é importante considerarmos também que a programação inteira permite uma racionalização do tempo de uso das máquinas, possibilitando que os tempos não utilizados (menores que as restrições) possam ser aproveitados para outros produtos ou para paradas de manutenção preventiva.

Outro bom trabalho desenvolvido pelo excelente gerente industrial.

Avançando na prática

Estudo da planta 3

Descrição da situação-problema

A empresa agora deseja finalizar o estudo, e a terceira planta passa a ser o objeto de estudo por meio da PI.

Considerando os tempos disponíveis de cada máquina e os tempos de usinagem de cada uma delas (tabela 4.4), qual é a quantidade de cada modelo de eixo de forma a se obter o máximo lucro? Utilize a PI.

Tabela 4.4 | Tempos de usinagem e tempo disponível de cada máquina da planta 3

	Tempos de usinagens (minutos)			Disponibilidade
	x_1	x_2	x_3	Total (min)
Furadeira	18	25	22	180
Torno	32	30	35	280
Fresadora	40	35	30	300
Retífica	30	38	35	380

Fonte: elaborado pelo autor.

Resolução da situação-problema

A solução dessa nova situação é bem simples.

Basta trocar os valores das restrições do tempo disponíveis de máquinas e tempos de usinagens pelos dados oferecidos pela tabela 4.4 e utilizar o Solver para calcular o resultado. O resultado final é mostrado na figura 4.27.

Figura 4.27 | Solução ótima para a planta 3 por meio da PI

	Coeficiente das Restrições				Disponibilidade	Quantidade Utilizada
	x_1	x_2	x_3			
Furadeira	18	25	22	≤	180	176
Torno	32	30	35	≤	280	280
Fresadora	40	35	30	≤	300	240
Retífica	30	38	35	≤	380	280
						Máximo Lucro
Max Z	R$ 1.850,00	R$ 1.800,00	R$ 1.900,00			R$ 15.200,00
VARIÁVEIS	0	0	8			

Fonte: elaborado pelo autor.

Durante nossa caminhada, resolvemos uma série de desafios calculando as melhores soluções para cada tipo de situação que apareceu pela frente. Acabamos de calcular a solução ótima para a planta 3 ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$; e $x_3 = 8$ com $Z = 15.200,00$), e se somarmos a produção diária total das plantas pelos resultados obtidos pela PI, teríamos como total: 2 unidades do modelo 1 (x_1), 3 unidades do modelo 2 (x_2) e 21 unidades do modelo 3 (x_3). Mas se a produção obedecer ao que foi calculado, será possível atender a demanda comentada na seção 2 da Unidade 3, quando estudamos o problema de transporte? E se eles forem conflitantes? Como solucionar?

Esses e outros conflitos são parte da realidade e devemos estar preparados. E tenha certeza de que você está no caminho certo para responder a essas e outras perguntas ainda mais desafiadoras.

Faça valer a pena

1. O método gráfico para a solução de problemas de Programação Inteira é semelhante ao método utilizado para a Programação Linear. A diferença diz respeito à forma de se encontrar a solução. Enquanto na PL existe somente uma solução ótima, a PI permite mais de uma solução para o problema.

Qual é a condição para a utilização do método gráfico nos problemas de PI e PL?

a) As variáveis de decisão devem ser todas inteiras.
b) Algumas variáveis podem ser reais, mas pelo menos uma variável deve ser inteira.
c) Deve haver somente duas variáveis de decisão.
d) A solução independe do número de variáveis de decisão.
e) Deve haver sempre uma variável binária.

2. A enumeração completa dos pontos que se encontram na uma zona de respostas viáveis é uma forma de se determinar as possíveis soluções ótimas de um problema de Programação Inteira. Entretanto, esse método encontra uma dificuldade na aplicação quando se trabalha com números muito grandes de variáveis e os valores que podem ser assumidos.

O que se pode afirmar sobre essa dificuldade?

a) O número de pontos a serem verificados e testados pode ser muito grande.
b) Não há como identificar todos os pontos a serem testados.
c) A combinação entre as variáveis e os valores assumidos forma um campo de infinitos resultados.
d) A enumeração completa não deve ser usada em problemas de PL.
e) Os pontos encontrados podem assumir valores negativos.

3. O algoritmo *Branch and Bound* é o método de enumeração mais utilizado nos problemas de Programação Inteira e se baseia em ramificar o conjunto de soluções viáveis em subproblemas, resolver esses subproblemas e testar as soluções encontradas, repetindo o procedimento até que se obtenha uma solução ótima. A etapa inicial do algoritmo é a solução do problema relaxado. Considere que a solução encontrada contenha uma variável não inteira (x_j), de forma que esteja entre dois valores inteiros i_1 e i_2.

Qual é a próxima etapa do algoritmo *Branch and Bound,* caso não se tenha obtido a solução ótima?

a) Testar o resultado do problema original.
b) Utilizar o método gráfico para determinar os pontos possíveis de serem a solução ótima.
c) Resolver o problema pelo Dual-SIMPLEX.
d) Ramificar o problema original em dois novos subproblemas com restrições $x_j \leq i_1$ e $x_j \geq i_2$.
e) Arredondar os valores das variáveis e testar por enumeração.

Seção 4.3

Programação inteira mista e binária

Diálogo aberto

Chegamos à seção final da nossa Unidade em que serão finalizados os estudos sobre os problemas de Programação Inteira, estudando os problemas que envolvem variáveis mistas, ou seja, parte das variáveis devem ser inteiras, enquanto outras assumem valores contínuos (valores fracionados), e os problemas de Programação Binária, quando as variáveis devem ter valores iguais a 0 ou 1. Um exemplo clássico de problema de Programação Binária é o problema de localização, que você deverá solucionar.

A empresa que produz os eixos dentados está em um ritmo de crescimento constante nos últimos anos, que justifica o planejamento da construção de uma nova unidade fabril. A empresa precisa escolher um local que permita maior cobertura de atendimento a partir desta nova planta.

O diretor está em dúvida entre 4 localidades: Sorocaba (SP), Londrina (PR), Vitória (ES) e Campo Grande (MS). Um estudo inicial encomendado mostra a demanda futura de cada planta e o custo de transporte entre as plantas e os mercados consumidores. Neste estudo foi levantado os custos fixos de cada planta considerando-se os custos locais de mão de obra, fornecimento de água e energia elétrica, entre outros, e também a capacidade de fornecimento de cada unidade, considerando expansões futuras.

A nova planta deve atender os novos clientes que a empresa conquistou nos últimos meses, que estão espalhados pelo Brasil, mais especificamente em Goiânia (GO), Salvador (BA), Belo Horizonte (MG), São Paulo (SP) e Florianópolis (SC).

Todos os dados dos estudos iniciais se encontram na tabela 4.5.

Tabela 4.5 | Custos de Transportes, custos fixos, Capacidade e Demanda (Unidades)

Custo Unitário de Transporte							
	Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Custo Fixo	Capacidade
Sorocaba	R$ 1,25	R$ 1,25	R$ 1,60	R$ 0,55	R$ 1,90	R$ 110.000,00	40.000
Londrina	R$ 1,35	R$ 1,65	R$ 1,70	R$ 0,75	R$ 0,85	R$ 90.000,00	30.000
Vitória	R$ 1,85	R$ 0,95	R$ 0,90	R$ 1,25	R$ 2,30	R$ 85.000,00	25.000
Campo Grande	R$ 0,85	R$ 1,15	R$ 1,50	R$ 1,75	R$ 2,50	R$ 100.000,00	30.000
Demanda	2.500	4.500	4.000	10.000	4.000		

Fonte: elaborado pelo autor.

Suponha que você seja o gerente de logística da empresa e o diretor quer seu parecer. Qual seria a sua decisão? Resolva o problema e entregue um relatório gerencial ao diretor.

Mais um novo desafio e, desta vez, uma nova planta será construída. Quem sabe esta não seja a oportunidade de se tornar o Gerente Geral da nova unidade. Vamos em frente!

Não pode faltar

Introdução à programação inteira mista

Os problemas Programação Inteira, estudados até aqui, consideraram que todas as variáveis assumem valores inteiros, tratando-se, portanto, de problema de Programação Inteira Pura. Porém, existem problemas em que parte das variáveis devem ser tratadas como inteiras, e as restantes assumem valores contínuos (fracionados) e são tratadas como problemas de Programação Inteira Mista. Somente para revisar, nos problemas de Programação Inteira Pura a restrição de integralidade abrange todas as variáveis. Nos problemas de Programação Inteira Mista, não. Vejamos o modelo do exemplo abaixo (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 378):

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} x_1 + 1{,}5x_3 \leq 19 \\ x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ 4x_2 \leq 37 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros.

Notem que no modelo, as varáveis x_1 e x_2 devem respeitar a restrição de integralidade, enquanto x_3 pode ser uma variável contínua.

Veremos, a seguir, como solucionar o problema de Programação Inteira Mista utilizando o algoritmo *Branch and Bound*.

Algoritmo *Branch and Bound* para Programação Inteira Mista

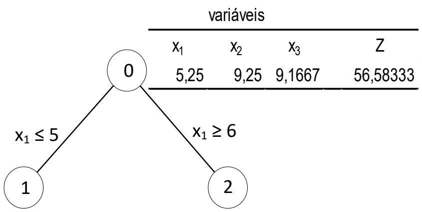
Inicialmente, como resolvido em problemas de Programação Inteira Pura, achamos a solução ótima do problema original relaxado (sem a restrição de integralidade, o que é semelhante à resolução de um problema de Programação Linear). Utilizando a ferramenta Solver do Excel, chegamos aos seguintes resultados: $x_1 = 5{,}25$; $x_2 = 9{,}25$ e $x_3 = 9{,}17$ com $Z = 56{,}58$, conforme figura 4.28.

No algoritmo *Branch and Bound* (ou algoritmo ramificação e avaliação progressiva) a solução inicial corresponde à solução do subproblema 0, e, considerando que a solução do problema inicial não atende a condição de integralidade imposta às variáveis x_1 e x_2, é necessário a ramificação do problema original para se dar continuidade na resolução do problema.

No modelo do problema podemos confirmar que a variável x_3 não precisa obedecer a restrição de integralidade, ou seja, ela pode assumir valor fracionado, portanto, a ramificação deve ser feita por meio das variáveis x_1 ou x_2, pois essas sim precisam ter valores inteiros.

Escolhendo-se a variável x_1 para ser ramificada, temos os subproblemas 1 e 2, conforme a figura 4.28.

Figura 4.28 | Ramificação do problema original



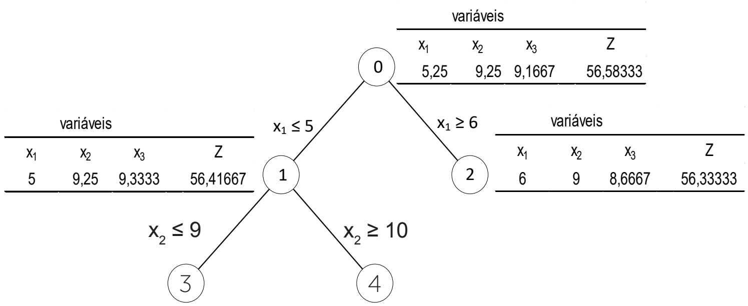
Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 379).

Para calcular a solução para o subproblema 1, é preciso adicionar a restrição que a variável x_1 deve ser menor, ou igual a 5 ($x_1 \leq 5$). Solucionando pelo Solver, chegamos aos seguintes valores: $x_1 = 5$; $x_2 = 9{,}25$ e $x_3 = 9{,}33$ com $Z = 56{,}42$, conforme figura 4.29.

Como não se obteve uma resposta em que x_1 e x_2 são números inteiros, é preciso ramificar o subproblema 1 em subproblemas 3 e 4.

De forma semelhante, resolvemos o subproblema 2, substituímos a restrição $x_1 \leq 5$ por $x_2 \geq 6$ nos parâmetros do Solver. Como resultado, obtemos os seguintes valores: $x_1 = 6$; $x_2 = 9$ e $x_3 = 8{,}67$ com $Z = 56{,}33$, conforme figura 4.30. Como x_1 e x_2 são valores inteiros, a solução encontrada no subproblema 2 é candidata a solução ótima do problema.

Figura 4.29 | Soluções dos subproblemas 1 e 2 com ramificação em 1



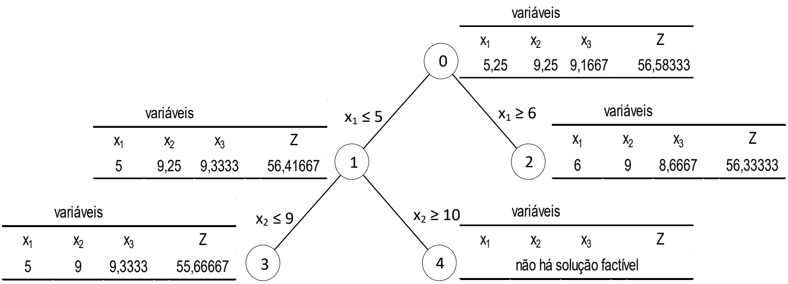
Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 389).

Para a solução do subproblema 3, os parâmetros do Solver devem conter as restrições $x_1 \leq 5$ e $x_2 \leq 9$, que chegou à seguinte solução: $x_1 = 5$; $x_2 = 9$ e $x_3 = 9{,}33$ com $Z = 55{,}67$, conforme figura 4.30. Perceba que os valores das variáveis x_1 e x_2 são inteiras, o que significa que a solução encontrada também é candidata à solução ótima do problema.

Devemos também calcular a solução do subproblema 4 e, para tal, os parâmetros do Solver devem conter as restrições: $x_1 \leq 5$ e $x_2 \geq 10$. Com essas restrições o Solver não consegue encontrar soluções factíveis, ou, em outras palavras, não existe solução viável para o problema com essas restrições.

Como foi encontrada uma candidata à solução no subproblema 3, e não existe solução factível no subproblema 4, o problema chegou ao seu final. A ramificação com os respectivos valores pode ser vista na figura 4.30.

Figura 4.30 | Solução final do problema de Programação Inteira Mista



Fonte: Belfiore e Fávero (2013, p. 379).

Temos duas candidatas à solução ótima para o problema de Programação Inteira Mista, as soluções dos subproblemas 2 e 3. Como a função objetivo do problema é de maximização, a solução ótima é a apresentada pelo subproblema 3, pois apresenta o maior valor de Z. Os valores da solução ótima são: $x_1 = 5$; $x_2 = 9$; $x_3 = 9{,}333$ e $Z = 55{,}667$, conforme figura 4.30.

Introdução à programação inteira binária

Em problemas de Programação Inteira, quando as variáveis são inteiras e assumem valores 1 ou 0, temos um problema de Programação Binária (PB) ou Programação 0-1 (ARENALES et al., 2007, p. 163). Os problemas de PB implicam na ocorrência ou não de um dado evento (ocorrendo o evento, a variável assume o valor 1, se não ocorrer o evento, a variável assume o valor 0).

Vamos apresentar alguns problemas clássicos de Programação Binário:

Problema da Mochila 0-1 – imagine uma pessoa que planeja viajar com somente uma mochila. Ela deve decidir quais itens selecionar de maneira que possa otimizar sua utilidade (ARENALES, 2007, p. 172), considerando o espaço da mochila, que é limitado ao seu espaço físico e sua capacidade de suportar pesos (COLIN, 2007, p. 178). Um exemplo desse tipo de problema é a seleção de projetos a serem colocados em operação, considerando a limitação de recursos.

Pesquise mais

O Problema da Mochila é um dos problemas clássicos da Programação Binária que merece ser estudado. O vídeo do *link* abaixo resolve um exercício-exemplo de forma clara e de simples entendimento.

MURTA, Aurélio. **Problema da Mochila**. Tempo de duração: 19 min. 53 seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7LVipK1wtI0>. Acesso em: 12 mar. 2018.

Problemas de designação – envolve a designação (atribuição) de tarefas a agentes (ARENALES, 2007, p. 178). O problema mais simples envolve n tarefas e n agentes de maneira que cada tarefa é executada por um agente, e cada agente executa uma única tarefa. Escalonamento de pessoal como enfermeiros, professores, motoristas são exemplos de problemas de designação.

Problemas de cobertura – esses problemas tratam uma série de problemas reais, como a localização de fábricas, centro de distribuição, hospitais, de maneira a atender as demandas ao menor custo possível (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 402).

Algoritmo *Branch and Bound* Programação Inteira Binária

A forma genérica para resolver um problema de Programação Binária é usar o algoritmo *Branch and Bound,* conforme a descrição do algoritmo.

Assimile

O Algoritmo *Branch and Bound* para problemas de Programação Binária é um caso particular do algoritmo *Branch and Bound* para a Programação Inteira Pura simplificado, pois as variáveis das ramificações assumem valores 0 e 1 (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 376).

O algoritmo de *Branch and Bound* para problemas de PB é composto pelas etapas descritas a seguir:

1. Resolver o problema como se fosse um problema de PL com as variáveis relaxadas (ignorando a condição de que devem ser binárias). Conferir a solução ótima calculada e observar se as variáveis assumem valores 0 ou 1. Caso todas as variáveis sejam 0 ou 1, o problema foi resolvido. Caso contrário, passar à próxima etapa.

2. Se na etapa anterior apresentar uma variável não inteira, ou diferente de 0 ou 1, dois novos modelos de programação binário se formam acrescido ao problema original uma restrição do tipo $x = 0$, ou do tipo $x = 1$.

3. Se alguma das primeiras aproximações ainda apresentar solução com valores diferentes a 0 ou 1, o problema de PB resultante por essa primeira aproximação torna-se candidato a uma ramificação adicional.

4. A ramificação prossegue até se obter todas as variáveis com valores 0 ou 1, ou até não haver mais soluções factíveis, ou seja, soluções possíveis. As candidatas à solução ótima para o problema de PB são todas as que apresentarem variáveis com valores iguais a 0 ou 1. E a solução ótima entre as candidatas será a que apresentar a melhor resposta para a função objetivo, considerando se o problema é de maximização ou de minimização.

Exemplificando

Resolver o problema de PB aplicando o algoritmo *Branch and Bound* (BELFIORE; FÁVERO, 2013, p. 376).

$$MinZ = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 7 \end{aligned}$$

$$x_1; x_2 \in \{0,1\}$$

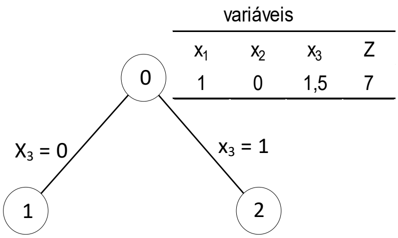
(A linha mostrada se lê "x_1 e x_2 pertencem ao conjunto formado pelos números 0 e 1", ou seja, as variáveis assumem valor 0 ou 1)

Por se tratar de um problema de PB, em que as variáveis assumem valores 0 ou 1, não existe a necessidade da restrição de não negatividade.

O início da solução é a resolução do problema original de PB relaxado, ou seja, sem a restrição das variáveis serem binárias.

Com o auxílio do Solver conseguimos os seguintes resultados: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$ e $x_3 = 1{,}5$ com $Z = 7$. O problema estaria resolvido caso todas as variáveis tivessem valores 0 ou 1, o que não é o caso. Portanto, é necessário ramificar o problema original, atribuindo valores 0 e 1 para os subproblemas 1 e 2. Os valores e a ramificação podem ser vistos na figura 4.30.

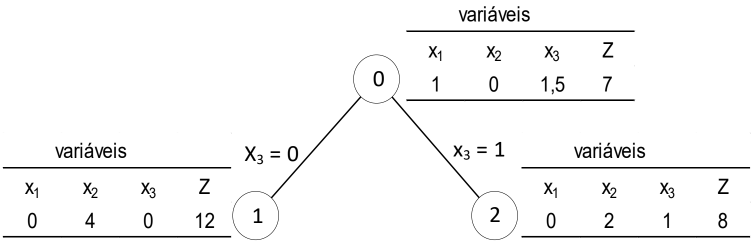
Figura 4.30 | Solução do problema original e ramificação



Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

Solucionando o subproblema 1 com a adição da restrição $x_3 = 0$ nos parâmetros do Solver, e da mesma maneira, adicionando a restrição $x_3 = 1$ no subproblema 2. As soluções dos subproblemas são demonstradas na figura 4.31.

Figura 4.31 | Solução dos subproblemas 1 e 2

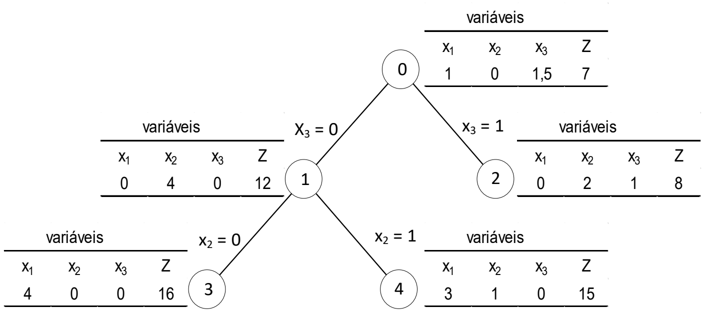


Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

Os valores das variáveis encontradas nas soluções dos subproblemas 1 e 2 não são todos 0 ou 1, portanto, não encontramos candidatas à solução ótima. Devemos prosseguir com o algoritmo e ramificar os subproblemas 1 e 2 em novos subproblemas.

Ramificando o subproblema 1, a variável x_2 assume valores 0 e 1 em cada ramo do subproblema (mantendo a variável $x_3 = 0$). Os resultados calculados pelo Solver podem ser vistos na figura 4.32.

Figura 4.32 | Solução dos subproblemas 3 e 4

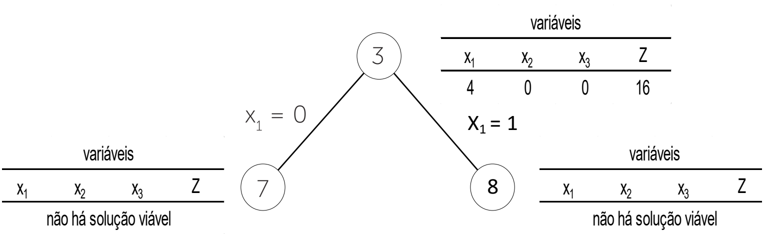


Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

Para que a imagem com as ramificações não fique prejudicada, iremos ilustrar a continuação das ramificações separadamente.

Ramificando o subproblema 3 (nos subproblemas 7 e 8), a variável x_1 assume valores 0 e 1 em cada ramo do subproblema (mantendo a variável $x_3 = 0$ e $x_2 = 0$). Os resultados calculados pelo Solver podem ser vistos na figura 4.33. Dessa forma, não há soluções viáveis para os subproblemas 7 e 8.

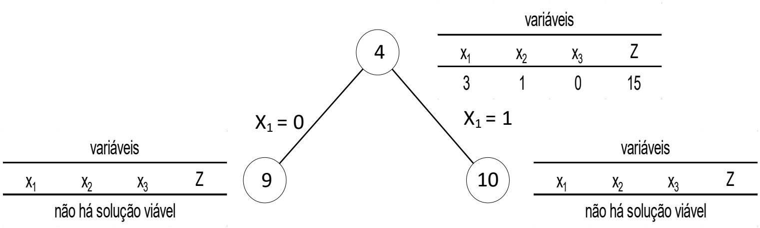
Figura 4.33 | Solução dos subproblemas 7 e 8



Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

Ramificando o subproblema 4 (nos subproblemas 9 e 10), a variável x_1 assume valores 0 e 1 em cada ramo do subproblema (mantendo a variável $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$). Os resultados calculados pelo Solver podem ser vistos na figura 4.34. Assim, não há soluções viáveis para os subproblemas 9 e 10.

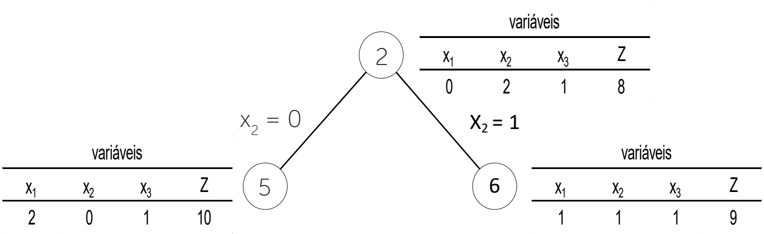
Figura 4.34 | Solução dos subproblemas 7 e 8



Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

Vamos agora ramificar o "outro lado", ou seja, a ramificação do subproblema 2 (nos subproblemas 5 e 6), a variável x_2 assume valores 0 e 1 em cada ramo do subproblema (mantendo a variável $x_3 = 1$). Os resultados calculados pelo Solver podem ser vistos na figura 4.35.

Figura 4.35 | Solução dos subproblemas 5 e 6

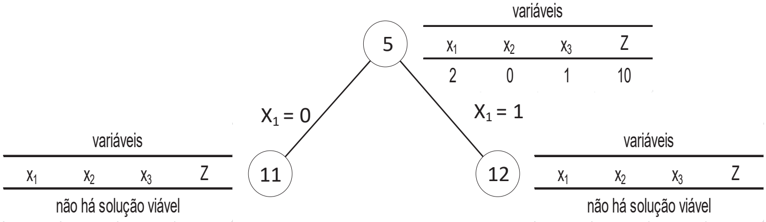


Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

O subproblema 6 tem em sua resposta as variáveis x_1; x_2 e x_3 com valor iguais a 1 e com $Z = 9$. Como todas as variáveis são iguais a 1, o subproblema 6 é candidata a solução do problema.

Dando continuidade, o subproblema 5 é ramificado nos problemas 11 e 12 e são resolvidos com o auxílio do Excel, apresentando como resultados a figura 4.36.

Figura 4.36 | Solução dos subproblemas 11 e 12



Fonte: adaptado de Belfiore e Fávero (2013, p. 377).

A única solução possível para o problema é o encontrado no subproblema 12, que apresenta os seguintes valores: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$ com $Z = 9$.

Reflita

Em um problema de Programação Binária as variáveis assumem valores iguais a 0 ou 1. Vimos durante a seção que uma das aplicações das variáveis binárias diz respeito a uma alternativa ser aceita (quando assume valor igual a 1) ou não aceita (valor igual a 0). Quais são as outras alternativas para o uso das variáveis binárias, além da estudada?

Sem medo de errar

A empresa estuda a construção de uma nova planta, considerando o aumento da demanda. A diretoria pré-selecionou 4 cidades para atender os novos clientes que se encontram em 5 estados diferentes.

Queremos saber a melhor localização da nova planta, pois corresponde a cidade que atenderá as demandas dos clientes ao menor custo para a empresa. Portanto, o objetivo do problema é de minimização de custos.

Trata-se de um problema de Programação Binária, pois uma das cidades em estudos será escolhida (1) enquanto as outras não (0).

As variáveis de decisão são x_{ij}, onde i corresponde à fonte (localidade fornecedora) e j corresponde ao destino (localidade destino) e y_i se a localidade será selecionada ou não.

O modelo ficará:

$$
\begin{aligned}
MinZ = {} & 110000y_1 + 90000y_2 + 85000y_3 + 100000y_4 + \\
& 1{,}25x_{11} + 1{,}25x_{12} + 1{,}60x_{13} + 0{,}55x_{14} + 1{,}90x_{15} + \\
& 1{,}35x_{21} + 1{,}65x_{22} + 1{,}70x_{23} + 0{,}75x_{24} + 0{,}85x_{25} + \\
& 1{,}85x_{31} + 0{,}95x_{32} + 0{,}90x_{33} + 1{,}25x_{34} + 2{,}30x_{35} + \\
& 0{,}85x_{41} + 1{,}15x_{42} + 1{,}50x_{43} + 1{,}75x_{44} + 2{,}50x_{45}
\end{aligned}
$$

(Uma pequena revisão sobre a modelagem da função objetivo: os valores referentes às variáveis $y_1;y_2;y_3;y_4$ dizem respeito ao custo fixo de cada localidade e os valores de $x_{11};x_{12};x_{13};...x_{45}$ são os valores do custo de transporte da fonte i para o destino j. A empresa optará pela localidade que apresentar o menor custo total, ou seja, a soma dos custos de transporte das mercadorias mais a soma do custo fixo da instalação.)

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 2500 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 4500 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 4000 \quad \text{(restrição de demanda)} \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 10000 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 4000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\leq 40000 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\leq 30000 \quad \text{(restrição de capacidade)} \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\leq 25000 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &\leq 30000
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \geq 0$ (restrição de não negatividade)

$y_i \in \{0,1\}$ (binário)

Montando o modelo no Excel, temos a imagem na figura 4.37.

Figura 4.37 | Modelo montado no Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2										
3		Custo Unitário de Transporte								
4			Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Custo Fixo	Capacidade	
5		Sorocaba	R$ 1,25	R$ 1,25	R$ 1,60	R$ 0,55	R$ 1,90	R$ 110.000,00	40000	
6		Londrina	R$ 1,35	R$ 1,65	R$ 1,70	R$ 0,75	R$ 0,85	R$ 90.000,00	30000	
7		Vitória	R$ 1,85	R$ 0,95	R$ 0,90	R$ 1,25	R$ 2,30	R$ 85.000,00	25000	
8		Campo Grande	R$ 0,85	R$ 1,15	R$ 1,50	R$ 1,75	R$ 2,50	R$ 100.000,00	30000	
9		Demanda	2500	4500	4000	10000	4000			
10										
11										
12		Restrição de Capacidade					Restrição de Demanda			
13		Sorocaba	0	≤	0		Goiânia	0	=	2500
14		Londrina	0	≤	0		Salvador	0	=	4500
15		Vitória	0	≤	0		Belo Horizonte	0	=	4000
16		Campo Grande	0	≤	0		São Paulo	0	=	10000
17							Florianópolis	0	=	4000
18										
19										
20		Solução								
21			Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Construir	Custo Mínimo	
22		Sorocaba	0	0	0	0	0	0	R$ -	
23		Londrina	0	0	0	0	0	0		
24		Vitória	0	0	0	0	0	0		
25		Campo Grande	0	0	0	0	0	0		

Fonte: elaborado pelo autor.

As fórmulas das células estão na tabela 4.6

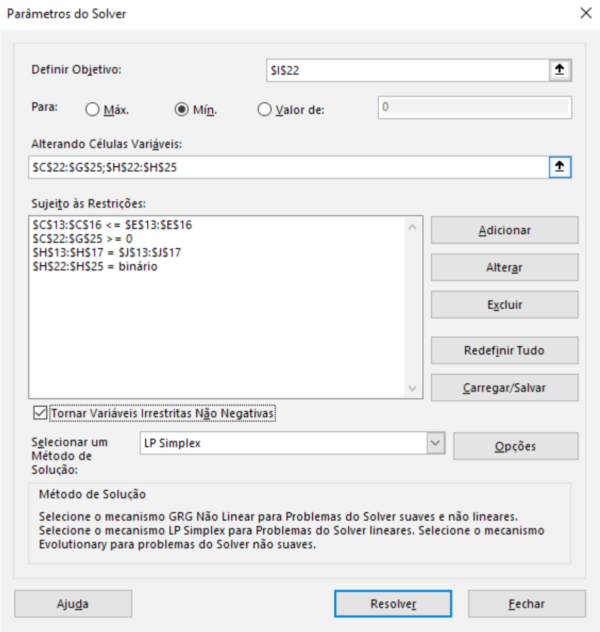
Tabela 4.6 | Fórmulas das células

Célula	Fórmula
C13	=SOMA(C22:G22)
C14	=SOMA(C23:G23)
C15	=SOMA(C24:G24)
C16	=SOMA(C25:G25)
H13	=SOMA(C22:C25)
H14	=SOMA(D22:D25)
H15	=SOMA(E22:E25)
H16	=SOMA(F22:F25)
H17	=SOMA(G22:G25)
I13	=I5*H22
I14	=I6*H23
I15	=I7*H24
I16	=I8*H25
I22	=SOMARPRODUTO(C5:H8;C22:H25)

Fonte: elaborado pelo autor.

O preenchimento dos parâmetros do Solver pede um pouco de atenção, pois o campo "Alterando Células Variáveis" deve ser preenchido com as células correspondentes às variáveis referentes às localidades e pelas variáveis binárias, conforme a figura 4.38.

Figura 4.38 | Parâmetros do Solver



Fonte: elaborado pelo autor.

A solução encontrada pelo Solver é ilustrada na figura 4.39.

Figura 4.39 | Solução encontrada pelo Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19									
20		Solução							
21			Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Construir	Custo Mínimo
22		Sorocaba	0	0	0	0	0	0	R$ 118.500,00
23		Londrina	2500	4500	4000	10000	4000	1	
24		Vitória	0	0	0	0	0	0	
25		Campo Grande	0	0	0	0	0	0	

Fonte: elaborado pelo autor.

Dentre todas as localidades, o Solver selecionou Londrina como a melhor opção, onde deve ser construída a nova planta. A escolha foi feita com o cálculo do custo de R$ 118.500,00, o menor dentre todas as alternativas.

O mesmo modelo poderia ser usado caso o estudo pedisse para selecionar mais de uma localidade, se a demanda a ser atendida for maior que a capacidade de uma só planta, e também calculará a quantidade a ser atendida por cada planta (destino) para cada fonte.

Avançando na prática

Escolha de localidades considerando um cenário futuro de maior prazo

Descrição da situação-problema

Imaginemos que no estudo anterior para a escolha da localidade da nova planta a empresa tenha trabalhado com dados de um cenário futuro de médio prazo. O diretor também tem informações das demandas para um período maior. Nesse novo cenário, o atendimento da demanda não será conseguido com somente uma planta, e a empresa pediu para você simular com os dados referentes ao cenário de longo prazo, que é demonstrado na figura 4.40, para chegar às localidades das novas plantas.

Figura 4.40 | Provisão de demanda para os próximos anos

	Custo Unitário de Transporte						
	Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Custo Fixo	Capacidade
Sorocaba	R$ 1,25	R$ 1,25	R$ 1,60	R$ 0,55	R$ 1,90	R$ 110.000,00	40000
Londrina	R$ 1,35	R$ 1,65	R$ 1,70	R$ 0,75	R$ 0,85	R$ 90.000,00	30000
Vitória	R$ 1,85	R$ 0,95	R$ 0,90	R$ 1,25	R$ 2,30	R$ 85.000,00	25000
Campo Grande	R$ 0,85	R$ 1,15	R$ 1,50	R$ 1,75	R$ 2,50	R$ 100.000,00	30000
Demanda	8500	11000	13000	20000	6500		

Fonte: elaborado pelo autor.

Considerando a informação com o cenário de um prazo mais longo, quais serão as localidades escolhidas? A cidade de Londrina ainda estará entre as escolhidas?

Resolução da situação-problema

Para resolver o problema com o novo cenário, é preciso alterar as demandas com as novas informações relativas ao maior período. Como o modelo foi construído de forma que as células restrições sejam automaticamente preenchidas ao se entrar com os dados na planilha não há necessidade de mais nenhuma alteração. A solução é mostrada na figura 4.41.

Figura 4.41 | solução final considerando o prazo de maior período

Solução							
	Goiânia	Salvador	Belo Horizonte	São Paulo	Florianópolis	Construir	Custo Mínimo
Sorocaba	0	0	0	0	0	0	R$ 250.400,00
Londrina	0	0	2500	20000	6500	1	
Vitória	0	0	0	0	0	0	
Campo Grande	8500	11000	10500	0	0	1	

Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse novo cenário, considerando um período maior da previsão de demanda, podemos perceber que as demandas dos clientes são maiores que no estudo inicial. Como a demanda total (soma da demanda de todos os clientes) é maior que a capacidade de fornecimento da planta de Londrina, foi preciso calcular novamente t (custo de instalação mais custo de transporte). Alterados os campos referentes às demandas na planilha, o Solver calculou a solução para o novo cenário (de longo prazo) e é possível concluir que a planta de Londrina ainda será escolhida, considerando o menor custo total de transporte. E, além de Londrina, a outra cidade a ser escolhida deve ser Campo Grande. O Solver também calculou a designação das quantidades a serem enviadas pelas duas plantas buscando atender as necessidades dos clientes.

Faça valer a pena

1. Problema de Programação Inteira pode ser classificado conforme suas variáveis de decisão. Podemos classificar os problemas como Programação Inteira Pura, Programação Inteira Mista, Programação Inteira Binária, ou, simplesmente, Programação Binária e Programação Binária Mista.

Dado o modelo:

$$MaxZ = 5x_1 + 7x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 13$$

$$8x_1 + 7x_2 \leq 35$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

x_1 inteiro

Qual o tipo de problema Programação Inteira?

a) Programação Inteira Pura
b) Programação Inteira Mista
c) Programação Inteira Binária
d) Programação Binária Mista
e) Programação Linear

2. Problemas de Programação Inteira podem ser solucionados pelo algoritmo *Branch and Bound* em que se resolve o problema original e posteriormente ramifica-se em subproblemas (caso necessário). A etapa inicial do algoritmo é a solução do problema original relaxado, ou seja, como sendo um problema de Programação Linear.

No problema de Programação Binária a relaxação diz respeito a qual restrição?

a) restrição de divisibilidade.
b) restrição de integralidade.
c) restrição de não negatividade.
d) restrição de serem binárias.
e) restrição de proporcionalidade.

3. As variáveis nos problemas de Programação Binárias assumem valores iguais a 0 ou 1. O valor 0 pode significar, por exemplo, uma alternativa não ser selecionada enquanto o valor 1 pode significar ser selecionada. Em problemas de Programação Binária Mista, algumas variáveis podem ter valores diferentes a 0 ou 1.

São exemplos de problemas de Programação Binária:

a) Problema de mistura e problema de minimização.
b) Problema da mochila e problema de mistura.
c) Problema de localização e problema de maximização.
d) Problema de localização e problema de mistura.
e) Problema de mochila e problema de localização.

Referências

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para análise de decisões. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015 (material suplementar).

ARENALES, Marcos [et al.]. **Pesquisa Operacional para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BELFIORE, Patrícia; FÁVERO, Luiz Paulo. **Pesquisa operacional para cursos de Engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

COLIN, Emerson C. **Pesquisa operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, marketing e venda. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013 (recurso eletrônico).

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Campos, 2002.

MOORE, Jeffrey H.; WEATHERFORD, Larry R. **Tomada de decisão em administração com planilhas eletrônicas**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

Anotações

ISBN 978-85-522-0690-3