Fundamentos de Cálculo Aplicado

Fundamentos de Cálculo Aplicado

José de França Bueno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bueno, José de França
B928f Fundamentos de cálculo aplicado / José de França Bueno. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
256 p.

ISBN 978-85-522-1124-2

1. Cálculo diferencial e integral. 2. Derivadas. 3. Integrais. I. Bueno, José de França. II. Título.

CDD 515

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

A Matemática possui a característica notável de conseguir representar os mais diferentes fenômenos com os quais lidamos, como biológicos, físicos, químicos e até mesmo econômicos. A Matemática é largamente utilizada nos mais diversos problemas. Seja para estudar o comportamento de ligas metálicas ou do concreto conforme a variação de temperatura (utilizadas em questões de construção civil, mecatrônica industrial, fabricação mecânica ou em sistemas biomédicos), para entender a modelagem matemática de sequestro de carbono (utilizada pelos engenheiros florestais), a modelagem de questões de logística e transportes (utilizada pelos especialistas em transportes terrestres), para planejar e dimensionar infraestruturas de telecomunicações e sistemas elétricos para que tais infraestruturas atendam às futuras taxas de crescimento demográfico e/ou econômico.

É bastante frequente encontrarmos ao longo da história da humanidade desenvolvimentos matemáticos que não encontram aplicações sociais ou econômicas no momento em que surgem, e, séculos mais tarde, esses conhecimentos tornam-se imprescindíveis. Vários dos tópicos a serem estudados nesta disciplina incluem-se nesta observação. Por exemplo, o conjunto dos números complexos (estudado na primeira unidade) foi desenvolvido para resolução de equações de segundo grau e tornou-se instrumento indispensável para a modelagem de circuitos elétricos e na área de telecomunicações. Ainda na primeira unidade, além de uma breve revisão de operações algébricas, frações, potenciação e radiciação, estudaremos equações de 1º e 2º grau, exponenciais, logarítmicas e inequações. As equações exponenciais e logarítmicas permitem a modelagem matemática de fenômenos de crescimento em geral, sendo de especial interesse para a modelagem tanto de crescimento de bactérias (questão relevante para profissionais da área biomédica e de engenharia florestal), como para crescimento econômico (importante para praticamente todas as áreas tecnológicas). Ainda, nesta primeira unidade, veremos elementos da trigonometria. A trigonometria é utilizada em muitas aplicações tecnológicas na decomposição de forças atuando sobre um objeto.

Na segunda unidade estudaremos funções afim, quadrática, trigonométricas, exponencial e logarítmica. Assim, teremos condições de avaliar a resposta de fenômenos nas mais diversas aplicações, frente a valores numéricos de entrada. Ao tratar da modelagem matemática de tais fenômenos, você desenvolverá a competência de compreender de forma mais profunda os fundamentos gerais da matemática básica para tratar destes fenômenos no seu dia a dia profissional bem como de forma mais ampla no seu mercado específico de trabalho.

Na terceira unidade você terá contato com os princípios do cálculo diferencial e integral: limites e derivadas. Com o cálculo diferencial e integral conseguimos estudar como as funções variam (a velocidade de variação das funções é importantíssima nas aplicações). Certamente, você será surpreendido com a diversidade enorme de situações que podem ser modeladas matematicamente com o cálculo diferencial e integral. Uma das aplicações mais importantes do cálculo diferencial é a otimização: como determinar um ponto ótimo, no qual conseguimos utilizar da melhor forma possível os recursos disponíveis.

Por fim, encerrando a disciplina, na quarta unidade será visto outro elemento notável no cálculo diferencial e integral: a integral. Ela é importante pois permite determinar, de forma relativamente simples, a área entre curvas definidas por funções matemáticas. Esta área possui interpretações importantes na Biologia e na Economia, por exemplo.

Dessa forma, você está dando início a uma viagem de descobertas rumo a um dos principais ramos da Matemática desenvolvido ao longo dos últimos três séculos, o cálculo diferencial e integral. É uma viagem apaixonante, na qual o seu material didático é seu "Guia de Viagem". Nunca deixe de consulta-lo! Além disso, sempre é válido reforçar a importância da sua disciplina e do autoestudo, portanto, separe um local da sua residência, um horário para estudar e tente criar uma rotina de estudos. Assim, você naturalmente vai criar um hábito de estudar sempre e de forma contínua. Estudar Matemática é resolver exercícios, então, pratique bastante e não deixe acumular dúvidas.

Vamos lá?

Fundamentos gerais de matemática

Convite ao estudo

Uma pergunta importante que você deve sempre se fazer ao concluir um cálculo é "Será que este resultado é consistente com a realidade? Será que ele faz sentido prático no meu ambiente de trabalho? "

Nesta unidade iniciaremos nosso estudo de Matemática, ferramenta utilizada nos mais diversos campos da tecnologia, por profissionais que atuam na indústria mecânica, na construção civil, com equipamentos biomédicos, na área de logística, em telecomunicações e sistemas elétricos são usuários da Matemática. Queremos deixar para você dois motivos para valorizar o que estudaremos nesta disciplina. O primeiro é que tais conhecimentos são importantíssimos para sua atuação profissional e empregabilidade, pois, ao se candidatar a um emprego, tais conhecimentos serão exigidos de você. Além disso, eles são fundamentos sobre os quais serão construídos os conhecimentos específicos da sua área de atuação. Um segundo aspecto para motivar seus estudos nesta disciplina é que a Matemática "abre a cabeça". O conhecimento matemático é perene e facilmente transferível para outras áreas de conhecimento. Assim, ao aprender a usar ferramentas da Matemática, você estará automaticamente tornando-se um profissional muito mais flexível, e, como um prêmio de bônus, sua leitura de mundo será diferenciada. Realmente, vale a pena estudar Matemática!

Nesta unidade, o contexto de aprendizagem considera que você é analista de uma empresa na qual seu trabalho consiste em analisar as planilhas produzidas pelos funcionários para avaliar se as fórmulas estão corretas. Nesta condição você receberá três tarefas, na primeira você deve identificar eventuais erros de digitação de um de seus funcionários em expressões algébricas simples e deverá corrigir e apontá-los para que o funcionário evite errar novamente no futuro. Sua segunda tarefa relaciona-se com equações do 1° grau. Você verificou que a fórmula de um funcionário apresentava problemas, portanto, você deve corrigir os erros e também enviar a correção para que o funcionário produza novas tabelas de resultados corretos. Sua terceira tarefa consiste em corrigir o uso de uma função que utiliza números complexos. Essa função guarda na parte real as oscilações no preço de um produto e na parte imaginária as perdas.

Para que o desafio proposto nas três situações acima possa ser superado, estudaremos os conteúdos descritos na respectiva sequência.

Na primeira seção, veremos conjuntos numéricos, frações, operações de potenciação, radiciação e operações algébricas. Na Seção 1.2 veremos as equações de primeiro e segundo grau, exponenciais e logarítmicas, encerrando essa parte com inequações de primeiro grau. Por fim, na Seção 1.3 estudaremos trigonometria, o ciclo trigonométrico e números complexos.

Seção 1.1

Aspectos fundamentais da álgebra aplicada

Diálogo aberto

É bem possível que você já tenha se deparado com algum erro ou dificuldade ao utilizar uma planilha eletrônica, talvez isso ocorreu no cálculo de seu próprio controle financeiro mensal, dos rendimentos de alguma aplicação financeira ou na utilização de uma planilha no seu ambiente de trabalho. Ao utilizar planilhas eletrônicas no seu trabalho pode ser necessário efetuar alguma alteração nas fórmulas previamente inseridas, talvez por alguma mudança na legislação ou por uma eventual alteração na metodologia de cálculo. Se você não tiver o domínio efetivo sobre os conceitos subjacentes, é possível que encontre dificuldades no processo de implementar alguma alteração em uma planilha pronta ou na produção de uma planilha completamente nova. Daí a importância do domínio do Excel para sua empregabilidade. Certamente, um candidato a um estágio ou emprego que tenha conhecimentos além do Excel básico estará em uma situação muito mais favorável para conquistar a vaga.

Nesta disciplina, pretendemos que você aprofunde seus conhecimentos gerais da matemática básica para que possa modelar matematicamente problemas do seu dia a dia e do seu ambiente de trabalho, bem como desenvolver sua capacidade de avaliar criticamente os resultados obtidos.

Para contextualizar nossos estudos, você terá o papel de um analista em uma empresa que deve analisar planilhas de cálculos produzidas pelos funcionários. Você deverá verificar se as fórmulas e os gráficos produzidos estão corretos, se há algum erro de digitação nas fórmulas matemáticas ou se existem incorreções do ponto de vista dos conceitos matemáticos.

Nesta primeira seção, ao analisar uma planilha de cálculos, você deverá buscar problemas na forma como o funcionário da empresa inseriu as expressões matemáticas no Excel. Você deve analisar com bastante cuidado as expressões digitadas na planilha, pois erros neste ponto podem causar sérios prejuízos à empresa e danos aos clientes.

Suponha que você trabalha em uma empresa de logística, a qual tem um contrato com uma companhia que fabrica tanques cilíndricos para armazenagem de produtos diversos. Estes tanques possuem altura representada pela letra h e raio representado por r. Para avaliar o impacto de variações Δh na altura e Δr no raio sobre o volume dos cilindros e sua consequência nos custos e resultados de sua produção industrial, a empresa utiliza a seguinte expressão: $\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$, onde ΔV representa a resultante variação no volume.

Suponha que o raio inicialmente adotado pela empresa seja $r = 5$ metros e a altura $h = 7$ metros.

Considere ainda nos seus cálculos para a tarefa que $\Delta r = 0,01$ e $\Delta h = 0,02$. É uma boa prática para profissionais que utilizam computadores nos seu dia a dia conferir parte de seus cálculos à mão para verificar se todas as etapas inseridas no computador estão corretas.

Neste exemplo, vale a pena conferir o valor da expressão $\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$ para alguns valores numéricos, como r, h, Δr e Δh. Neste sentido, suponha que $r = 3$, $h = 5$, $\Delta r = 0,02$ e $\Delta h = 0,01$. Substituindo na expressão para ΔV, teremos:

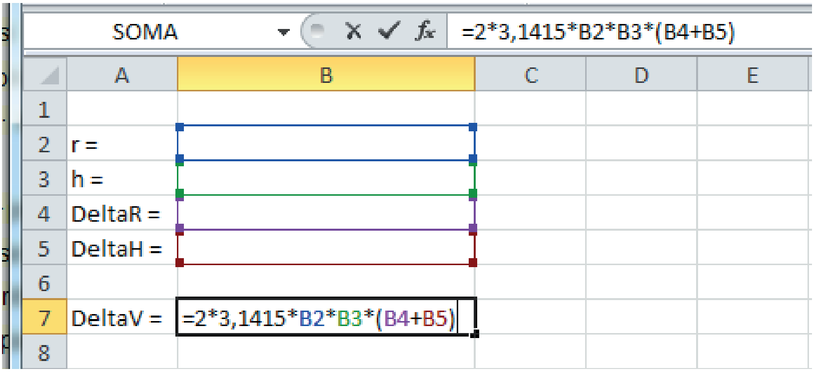
$$\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h =$$

$$2\pi \cdot 3 \cdot 5 \cdot (0,02) + \pi (3)^2 \cdot 0,01 = 0,6\pi + 0,09\pi = 0,69\pi \cong 2,1676$$

Agora que você já trabalhou com a expressão anterior à mão, podemos inseri-la no computador.

Um de seus funcionários, buscando simplificar o trabalho de digitação, digitou a expressão na seguinte forma no Excel, conforme Figura 1.1:

Figura 1.1 | Fórmula ΔV digitada no Excel



Fonte: elaborada pelo autor.

Destacamos que a fórmula na célula B5 (“DeltaV”) é 2*3,1415*B2*B3*(B4+B5).

Seu desafio aqui consiste em identificar se há algum erro nesta digitação e apresentar a correção. Temos certeza da sua competência para superar este desafio, para tanto, é importante que você siga em frente, estudando os conteúdos desta primeira seção.

Não pode faltar

Conjuntos numéricos

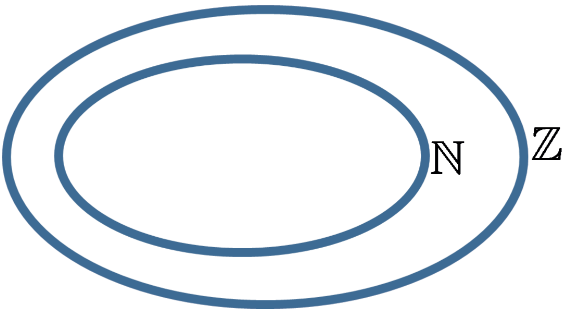
Ao longo da história, a humanidade, frente a cada desafio com o qual se defronta, é pressionada a desenvolver soluções para aquele desafio. Com os conjuntos numéricos não foi diferente. Os números naturais possuem associação direta com os primeiros processos de contagem, muito provavelmente da produção agrícola e pecuária. A seguir, apresentaremos as definições dos conjuntos numéricos.

Definição (conjunto dos números naturais): chamamos o conjunto dos números naturais ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Denota-se por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais excluindo-se o elemento zero de $\mathbb{N}$, assim, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Quando quisermos representar um conjunto numérico qualquer, que denotaremos por A, com a exclusão do zero, ele poderá ser representado por A^*. Foi a partir do crescimento do comércio e da necessidade de se registrar não somente os ganhos, mas também as perdas dos comerciantes que surgiu a necessidade de se representar valores negativos. Vejamos sua definição formal a seguir.

Definição (conjunto dos números inteiros): denomina-se conjunto dos números inteiros ao conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Para representar o conjunto dos números inteiros não negativos escrevemos $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Observe que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. Para representar o conjunto dos números inteiros não positivos escrevemos $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$. O conjunto dos números inteiros positivos é representado por $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Note que $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$.

E o conjunto dos números inteiros negativos é representado por $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$. Todo número natural também é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é um número natural. Dizemos que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros e escrevemos em símbolos matemáticos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Na Figura 1.2, apresentamos esta relação de continência entre estes dois conjuntos numéricos.

Figura 1.2 | Relação de continência entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição (conjunto dos números racionais): quaisquer números que possam ser representados na forma $\frac{p}{q}$ onde p, q são números inteiros com $q \neq 0$ constituem o conjunto dos números racionais.

Em símbolos, temos: $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$. Existem documentos (papiros) que comprovam que os egípcios utilizavam frações há cerca de quatro mil anos.

Exemplificando

São exemplos de números racionais: $\frac{3}{6} = 0,5$

$$\frac{11}{3} = 3,6666...;$$

$$-\frac{3}{4} = -0,75.$$

Ou seja, qualquer número que possa ser escrito em forma decimal finita ou como dízima periódica é um número racional.

Observe que $\frac{\sqrt{2}}{3} \notin \mathbb{Q}$ (pois não é possível representar $\frac{\sqrt{2}}{3}$ como a razão entre dois números inteiros com o denominador não-nulo. Por outro lado, observe que $\frac{\sqrt{16}}{3} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$.

De forma similar à que utilizamos para o conjunto dos números inteiros temos que:

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$: conjunto dos números racionais não-nulos.

$\mathbb{Q}_+$ conjunto dos números racionais excluindo os negativos.

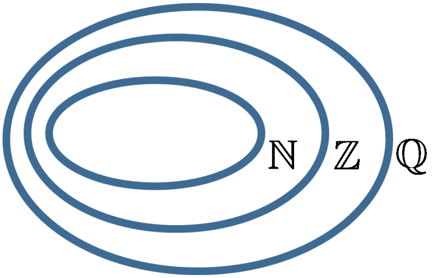
$\mathbb{Q}^*_+$ conjunto dos números racionais excluindo os negativos e o zero (ou seja, é o conjunto dos racionais positivos).

$\mathbb{Q}_-$ conjunto dos números racionais excluindo os positivos.

$\mathbb{Q}_{-}^{*}$ conjunto dos números racionais excluindo-se os negativos e o zero (ou seja, é o conjunto dos racionais negativos).

Na Figura 1.3 apresentamos a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Figura 1.3 | Relação de continência entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

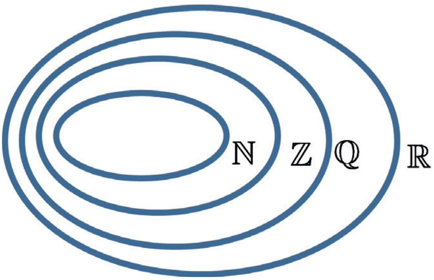


Fonte: elaborada pelo autor.

Existem números que, ao serem escritos na forma decimal, terão necessariamente um número infinito de casas decimais e não-periódica (não são dízimas periódicas). São exemplos o π, as raízes quadradas dos números naturais que não são quadrados perfeitos ($\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{7}, -\sqrt{7}$). O conjunto destes números é denominado de conjunto dos números irracionais (pois não são racionais). Utiliza-se a letra $\mathbb{I}$ para representar o conjunto dos números irracionais.

Definição (conjunto dos números reais): denomina-se conjunto dos números reais ao conjunto união dos números racionais com os números irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$.

Figura 1.4 | Relação de continência entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$



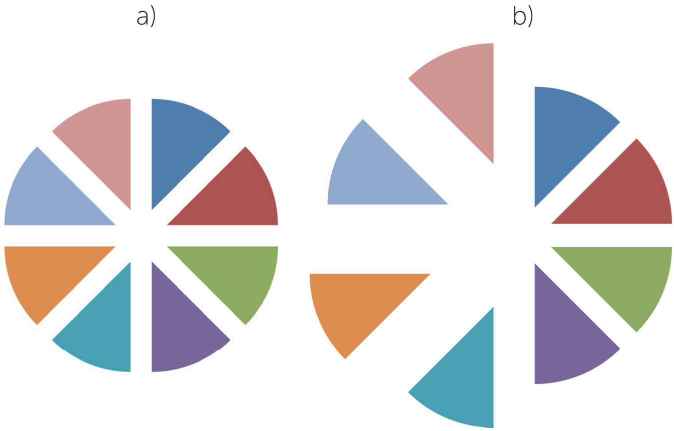
Fonte: elaborada pelo autor.

Frações

Quando dividimos uma pizza ou uma barra de chocolate estamos trabalhando com frações.

Assim, se dividirmos uma pizza em oito partes e pegarmos uma destas partes, cada pedaço corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza (Figura 1.5 a). Dividirmos uma barra de chocolate em quatro partes e pegarmos uma dessas partes corresponde a pegarmos um quarto da barra, ou seja, $\frac{1}{4}$. Observe que dividirmos uma pizza em 8 partes e separarmos 4 partes corresponde à fração $\frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ (Figura 1.5 b).

Figura 1.5 | frações $\frac{1}{8}$ de uma pizza (a), e separação de 50% desse total (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja a seguir a representação formal de uma fração.

Assimile

A fração $\frac{p}{q}$, com q não nulo, significa que dividimos uma quantidade em q partes e tomamos p dessas partes. O número p recebe o nome de numerador da fração e o número q recebe o nome de denominador da fração.

Observe que podemos ter frações tais como $\frac{12}{5}$, $\frac{8}{3}$ ou quaisquer outras em que o numerador seja maior que o denominador. Tais frações são sempre maiores que a unidade. Estas frações recebem o nome de frações impróprias. As frações para as quais o numerador é menor que o denominador recebem o nome de frações próprias.

Números inteiros também são frações (com denominador igual a um): $7 = \frac{7}{1}$.

Considere a situação de dividirmos duas barras de chocolate entre cinco pessoas. Cada barra de chocolate será dividida por cinco. Assim, de cada barra teremos $\frac{1}{5}$. Como temos duas barras para dividir, teremos, ao total, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ de barra de chocolate para cada pessoa. Com este exemplo estamos mostrando que somar uma fração n vezes corresponde a multiplicar esta fração por n: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + ... + \frac{a}{b}(\text{n vezes}) = n \times \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

Frações equivalentes

Talvez você se recorde algumas regras de operações com frações, como somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Essas regras baseiam-se na noção de fração equivalente.

Assimile

Dizemos que as frações $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ são equivalentes se obtemos uma da outra ao multiplicarmos ou dividirmos numerador e denominador de uma delas por um mesmo número não nulo.

Por exemplo, as frações $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$ e $\frac{12}{20}$ são equivalentes entre si pois $\frac{6}{10}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}$; $\frac{9}{15}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{3}{5}$; $\frac{12}{20}=\frac{4\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{3}{5}$.

Simplificação de frações

Simplificar uma fração corresponde a dividir o numerador e o denominador por um divisor comum até que não seja mais possível encontrar nenhum divisor comum.

Exemplo: simplifique a fração $\frac{24}{72}$. Podemos observar que ambos os números são pares e podemos dividir numerador e denominador por 2: $\frac{24}{72}=\frac{12\cdot 2}{36\cdot 2}=\frac{12}{36}$. Se observarmos agora que podemos dividir numerador e denominador por 12 teremos $\frac{12}{36}=\frac{1\cdot 12}{3\cdot 12}=\frac{1}{3}$. Assim, simplificamos a fração $\frac{24}{72}$ até a fração irredutível equivalente a ela, $\frac{1}{3}$. Poderíamos ter dividido com apenas uma única operação, numerador e denominador por 24: $\frac{24}{72}=\frac{1\cdot 24}{3\cdot 24}=\frac{1}{3}$.

Adição e subtração de frações

Para somarmos ou subtrairmos frações temos duas situações, frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes.

Frações com denominadores iguais

Para somar ou subtrair frações com mesmo denominador, mantemos o denominador e somamos ou subtraímos os numeradores. Exemplo: $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ e $\frac{11}{19}-\frac{3}{19}=\frac{8}{19}$.

Frações com denominadores diferentes

Se as frações tiverem denominadores distintos, determinamos o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre eles, transformamos cada uma das frações em uma fração equivalente com este denominador comum e, então, somamos os numeradores. Exemplo: somar as frações $\frac{1}{7}$ e $\frac{3}{5}$. O mínimo múltiplo comum entre 7 e 5 é 35. A fração equivalente a $\frac{1}{7}$ com denominador 35 é $\frac{5}{35}$. A fração equivalente a $\frac{3}{5}$ com denominador 35 é $\frac{21}{35}$. Assim, $\frac{1}{7}+\frac{3}{5}=\frac{5}{35}+\frac{21}{35}=\frac{26}{35}$. Observe que o que acabamos de explicar corresponde àquela regra para somar ou subtrair frações que você aprendeu no Ensino Básico: "dividimos pelo de baixo e multiplicamos pelo de cima". Mas, agora, você tem condições de efetuar a soma e a subtração de frações compreendendo o que está fazendo ao invés de apenas aplicar uma regra.

Multiplicação de frações

Para multiplicarmos duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ basta multiplicarmos numerador com numerador e denominador com denominador.

Exemplificando

Efetue a multiplicação: $\frac{3}{8}\times\frac{5}{11}$:

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{11}=\frac{3\times 5}{8\times 11}=\frac{15}{88}$$

Divisão de frações

Para efetuarmos a divisão da fração $\frac{a}{b}$ pela fração $\frac{c}{d}$, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da fração do denominador. Por exemplo, para efetuar a divisão $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{11}}$, basta efetuarmos: $\frac{3}{8}\times\frac{11}{5}=\frac{3\times 11}{8\times 5}=\frac{33}{40}$.

Potência

Se multiplicarmos um número qualquer (que denominaremos x) por ele mesmo um número n de vezes temos $x\cdot x\cdots x(\text{n vezes})=x^n$, sendo n um inteiro positivo.

Expoente nulo: define-se que se $x\neq 0, \text{então } x^0=1$. A expressão 0^0 é indefinida. Valem as seguintes propriedades com respeito à potenciação:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, a\neq 0 \qquad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$$

$\left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n$ $\quad\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ com $b\neq 0$. Se n for um inteiro positivo, define-se $x^{-n}=\frac{1}{x^n}, x\neq 0$. Exemplo: $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$.

E se o expoente não for um número inteiro, mas um valor fracionário, como definir a expressão $3^{1/2}$? Se elevarmos $3^{1/2}$

ao quadrado obtém-se $\left(3^{1/2}\right)^2$. Para manter a coerência com as propriedades de potência para expoente inteiro, teríamos $\left(3^{1/2}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$. Assim, o número $3^{1/2}$ corresponde ao valor que, elevado ao quadrado é igual a 3. Ou seja, $3^{1/2} = \sqrt{3}$. Aplicando-se o mesmo raciocínio para $3^{1/3}$, teremos que a potência $\frac{1}{3}$ corresponde à raiz cúbica: $3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$. Isso nos leva à definição de raiz n-ésima a seguir.

Definição (raiz n-ésima): suponha que n seja um inteiro positivo e x um número real. Então, a potência $x^{1/n}$ é o número que satisfaz a equação $\left(x^{1/n}\right)^n = x$ tal que,

Se $x < 0, n$ inteiro positivo par, então $x^{1/n}$ não é definido.

Se $x > 0, n$ inteiro positivo par, então $x^{1/n}$ é o valor que satisfaz $\left(x^{1/n}\right)^n = x$. Chama-se o valor $x^{1/n}$ de raiz n-ésima de x (AXLER, 2016).

Operações Algébricas

Definição (termos semelhantes): para efetuar operações literais, ou seja, com letras, devemos identificar o que são termos semelhantes. Diz-se que um termo é semelhante a outro se suas partes literais são as mesmas (são iguais). Assim, $3x^2$ e $7x^3$ não são semelhantes, pois os expoentes da letra x não são iguais. Temos que $3x^2 + 7x^3 \neq 10x^2$ e que $3x^2 + 7x^3 \neq 10x^3$. Já os termos $11x^2y^5z^3$ e $42x^2y^5z^3$ são termos semelhantes. Assim, é correto afirmar que $11x^2y^5z^3 + 42x^2y^5z^3 = 53x^2y^5z^3$.

Agora que vimos como podemos somar ou subtrair expressões com letras, vejamos um exemplo para aplicar estes conceitos.

A área de um retângulo corresponde ao produto da base pela altura: $A_R = b \cdot h$. A área de um triângulo corresponde à expressão $A_T = \frac{1}{2} b \cdot h$. Suponha que os valores de base b e altura h sejam os mesmos para um retângulo genérico qualquer e um triângulo genérico qualquer. Então podemos efetuar a soma literal, ou seja, "somar as letras": $A_R + A_T = b \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h = \left(1 + \frac{1}{2}\right) b \cdot h = \frac{3}{2} b \cdot h$.

Com este exemplo vimos que, para efetuar uma operação algébrica, somarmos (ou subtraímos, multiplicamos ou dividimos) as partes numéricas com cada parte numérica e as partes algébricas ("as letras") com as correspondentes partes algébricas. Usando uma linguagem informal, "somam-se letras iguais com letras iguais".

Por exemplo, para efetuar $9xyz + 5x^2y + 3xy^2 + 2x^2y + 7xz + 4xy^2 + 11xz - 5xyz$ operamos sobre os termos semelhantes. Assim: $(9xyz - 5xyz) + (5x^2y + 2x^2y) + (3xy^2 + 4xy^2) + (7xz + 11xz) =$

$= 4xyz + 7x^2y + 7xy^2 + 18xz$. Note que os parênteses não são essenciais. Foram utilizados apenas para destacar os termos semelhantes. Para efetuarmos multiplicação de expressões algébricas, utilizamos as propriedades de potências: $(9xyz) \cdot (5x^2y) = 45x^3y^2z$.

Cabe ainda calcularmos $(a+b)^2$. Elevar $(a+b)$ ao quadrado corresponde a efetuar $(a+b) \cdot (a+b)$. Ou seja: $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$. Efetuando a distributiva nesta última expressão obtemos: $(a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$

$a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$. Portanto: $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$.

Frações algébricas são somadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas de forma similar às frações numéricas, como $\frac{5}{zyx}+\frac{4}{zx^2}=\frac{5x}{zyx^2}+\frac{4y}{zyx^2}=\frac{5x+4y}{zyx^2}$ (para somar ou subtrair frações algébricas, primeiro transformamos cada fração em uma fração equivalente de tal forma que os denominadores fiquem iguais). Para multiplicar frações algébricas, multiplicamos parte numérica com parte numérica e parte algébrica com parte algébrica: $\frac{3ab^2}{wy}\cdot\frac{7bc^2}{w^3xy^2}=\frac{21ab^3c^2}{w^4xy^3}$. Vejamos um exemplo de como adicionar frações algébricas:

$$\frac{7a^2b-7a^3}{5a^6-10a^5b+5a^4b^2}=\frac{7a^2(b-a)}{5a^4\left(a^2-2ab+b^2\right)}=$$

$$\frac{7a^2(b-a)}{5a^4(a-b)(a-b)}=\frac{-7a^2(a-b)}{5a^4(a-b)(a-b)}=\frac{-7}{5a^2(a-b)}.$$

Exemplificando

Para simplificar a fração algébrica $\frac{11wy^2-11wz^2}{3w^3y+3w^3z}$, fatoramos, no numerador e no denominador, os termos semelhantes: $\frac{11wy^2-11wz^2}{3w^3y+3w^3z}=\frac{11w\left(y^2-z^2\right)}{\left(3w^3\right)(y+z)}$ Lembramos agora da diferença de quadrados: $\left(y^2-z^2\right)=(y+z)(y-z)$;

então, $\frac{11w\left(y^2-z^2\right)}{\left(3w^3\right)(y+z)}=\frac{11(y-z)(y+z)}{3w^2(y+z)}=\frac{11(y-z)}{3w^2}$.

Valor numérico de uma expressão algébrica

Para obter o valor numérico de uma expressão algébrica basta substituirmos os valores numéricos de cada letra na expressão, respeitando a ordem de precedência das operações aritméticas. Em primeiro lugar efetuam-se potenciações e radiciações, depois as multiplicações e divisões, por último, são efetuadas adições e subtrações. Além disso, devemos respeitar a hierarquia de parênteses, chaves e colchetes.

Por exemplo, determine o valor numérico de $5a^3 + 7b - \left(3c + 4d^2\right)$. Para $a = -2, b = -1, c = 3, d = 4$

Solução:

$$5 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-1) - \left(3 \cdot (3) + 4 \cdot (4)^2\right) = 5 \cdot (-8) - 7 - (9 + 4 \cdot 16) = -40 - 7 - (73) = -120$$

Antes de concluir esta seção, faremos uma breve introdução ao Excel.

Cada célula do Excel possui um endereço dado por sua linha (representada por números 1, 2, 3, etc) e por sua coluna (representada por letras maiúsculas A, B, C, D, etc.). Assim, quando se abre o Excel, a célula que fica no alto, na extrema esquerda da tela possui endereço A1. A célula na mesma linha, imediatamente à direita possui endereço B1. Todas as células da primeira coluna à esquerda estão na coluna A. A segunda coluna é identificada por B e assim por diante. As células da segunda linha, a partir da primeira coluna possuem endereço: A2, B2, C2, D2, etc.

Para inserir expressões algébricas no Excel, usamos os operadores aritméticos + (adição), - (subtração), * (multiplicação), / (divisão) e ^ (potenciação). Toda operação aritmética em uma célula do Excel deve ser precisada pelo sinal de "=". Assim, para indicar a adição dos números 2 + 3 em uma célula qualquer escrevemos: =2+3.

Suponha que tenhamos digitado o número 2 na célula A1, o número 3 na célula B1 e o número 4 na célula C1. Se digitarmos, na células D1 a expressão: *=(A1+B1)/C1*, estaremos efetuando o cálculo: $\frac{(2+3)}{4}$ que é igual a 1,25.

Suponha que tenhamos digitado, além dos valores acima, os valores 5 na célula D1, e 6 na célula E1 e a expressão =A1^B1 – C1/(D1+E1)+C1*D1. Esta expressão corresponde a efetuar

$2^3 - \frac{4}{(5+6)} + 4 \cdot 5$ que tem como resultado 27,64. A finalidade principal das planilhas eletrônicas (e o Excel é a mais difundida delas) é facilitar cálculos, permitindo a automação de muitos deles. Para isso, precisamos conhecer como efetuar algumas contas no Excel.

Pesquise mais

Ao utilizar o Excel é frequente que ele apresente mensagens de erro, nem sempre sabemos o significado de cada uma delas e como usá-las para evitar novos erros. Para compreender o significado das mensagens de erro do Excel, verifique no link a seguir. Disponível em: <http://www.excelnaweb.com.br/2017/03/como-corrigir-erros-no-excel.html>. Acesso em: 21 maio 2018.

Para saber como usar parênteses e operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) no Excel, sugerimos que você acesse o link disponível em: <http://www.tiexpert.net/office/excel/operacoes-matematicas.php>. 21 maio 2018.

Reflita

Considere que você pretende usar o Excel para determinar o valor da expressão $\frac{x-y}{z+w}$ para $x=1, y=2, z=3, w=4$. Apresente sua reflexão sobre a diferença entre digitarmos $1-2/(3+4)$ e $(1-2)/(3+4)$.

Sem medo de errar

Vamos recordar nossa situação-problema apresentada. Você trabalha em uma empresa que produz tanques cilíndricos para armazenagem de produtos agrícolas. Um cilindro de altura h e raio da base r possuem volume dado pela expressão algébrica

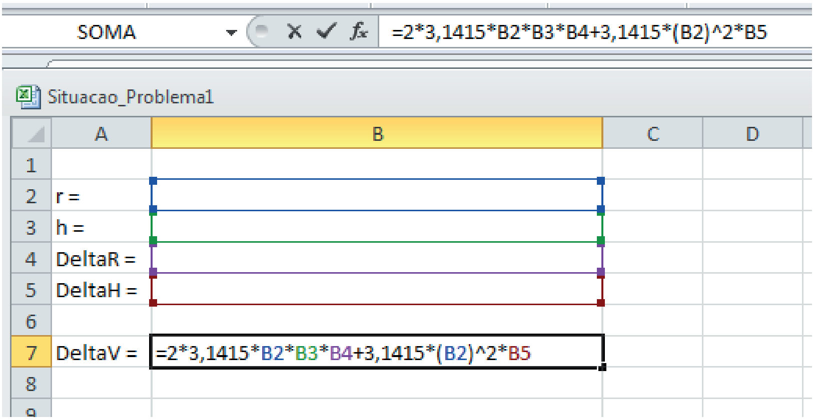
$V = \pi r^2 h$. Com a finalidade de avaliar impactos nos custos e resultados da produção industrial, são utilizados conceitos mais avançados de cálculo diferencial e integral para obtermos a expressão $\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$. ΔV representa a resultante variação no volume, onde $\pi \cong 3{,}1415$. Consideramos que o raio inicialmente adotado pela empresa seja $r = 5$ metros e a altura $h = 7$ metros. Um de seus funcionários, buscando simplificar o trabalho de digitação, digitou no Excel a expressão acima como você pode conferir na Figura 1.1. Você consultou uma fonte para conferir o significado das mensagens de erro do Excel. (Disponível em: <http://urs.bira.nom.br/informatica/office/excel/funcoes_do_excel/localizar_e_corrigir_erros_em_formulas_do_excel.htm>. Acesso em: 21 maio 2018). Para identificar se a expressão algébrica digitada no Excel apresenta algum problema, o recomendável é resgatar a expressão algébrica original e identificar as letras com a fórmula digitada.

Na Figura 1.1 vê-se que a célula B2 armazena o valor de r, a célula B3 armazena o valor de h, a célula B4 o valor de Δr e B5 armazena o valor de Δh. Assim, a expressão digitada, quando resgatada em termos da simbologia matemática, corresponde a $\Delta V = 2\pi rh(\Delta r + \Delta h)$. Se efetuarmos a distributiva, esta expressão é equivalente a $\Delta V = 2\pi rh\Delta r + 2\pi rh\Delta h$.

Contudo, a expressão original é $\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$. Uma das possibilidades de se corrigir a fórmula digitada no Excel é por usar a associação $r \leftrightarrow B2; h \leftrightarrow B3, \Delta r \leftrightarrow B4; \Delta h \leftrightarrow B5$. Assim, a fórmula correta fica, em termos da simbologia do Excel, da seguinte maneira: $\Delta V = 2\pi \cdot (B2) \cdot (B3) \cdot (B4) + \pi (B2)^2 \cdot (B5)$. Os parênteses não são imprescindíveis: $\Delta V = 2\pi \cdot B2 \cdot B3 \cdot B4 + \pi (B2)^2 \cdot B5$.

Dessa forma, teremos a Figura 1.6.

Figura 1.6 | Fórmula digitada no Excel



Fonte: elaborada pelo autor.

O valores numéricos para o cálculo solicitado são $r = 5$ metros, altura $h = 7$, $\Delta r = 0{,}01$ e $\Delta h = 0{,}02$.

Assim,

$$\Delta V = 2\pi \cdot B2 \cdot B3 \cdot B4 + \pi (B2)^2 \cdot B5 = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 \cdot 0{,}01 + \pi (5)^2 \cdot 0{,}02 = 3{,}77 .$$

Desta forma, você concluiu de forma exitosa a tarefa para a qual foi incumbido, demonstrando seu compromisso e engajamento nos estudos. Agora é seguir para o próximo desafio.

Avançando na prática

Fórmula da distância entre pontos

Descrição da situação-problema

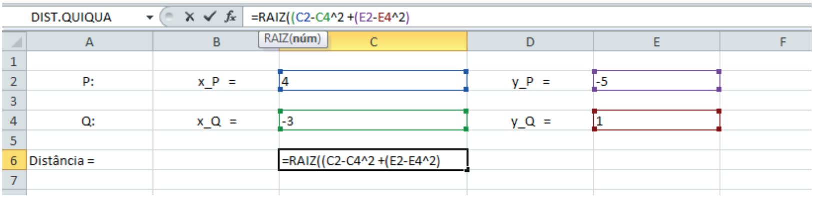
Imagine que você trabalhe em uma empresa em que, com bastante frequência, precisa trabalhar é necessário utilizar fórmulas e equações. Uma das expressões matemáticas utilizadas nas mais diversas aplicações é a fórmula para medir a distância entre dois pontos.

Se esses dois pontos estiverem em um plano, serão representados na forma $P=(x_P,y_P)$ e $Q=(x_Q,y_Q)$. A fórmula para a distância entre os pontos P e Q é $d(P,Q)=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$

Por exemplo, se $P=(3,-2)$ e $Q=(-5,1)$, substituindo os valores numéricos na fórmula, teremos: $d(P,Q)=\sqrt{(3-(-5))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(3+5)^2+(-3)^2}=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$.

Um de seus funcionários digitou a expressão acima para a distância entre dois pontos no Excel e enviou o arquivo para você. Uma cópia da tela está na figura a seguir.

Figura 1.7 | Fórmula inicial



Fonte: elaborada pelo autor.

Pergunta-se: há algum problema na digitação da expressão para a distância entre dois pontos no plano?

Como corrigir algum eventual problema?

Resolução da situação-problema

Para localizar problemas na fórmula digitada no Excel, procederemos conforme explicado no *Sem medo de errar*.

Identificaremos cada célula digitada no Excel com a expressão algébrica da fórmula.

Assim, temos que

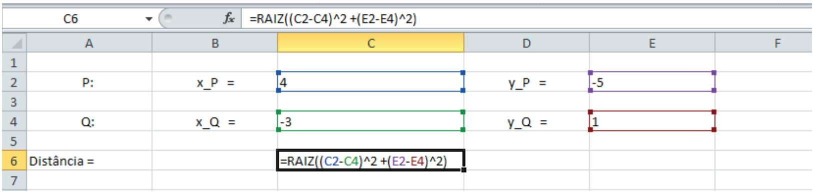
$$x_P \leftrightarrow C2; \quad x_Q \leftrightarrow C4; \quad y_P \leftrightarrow E2; \quad y_Q \leftrightarrow E4; \quad d(P,Q) \leftrightarrow C6$$.

Então, a fórmula para $d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$ escrita em termos das células do Excel fica: $d(P,Q) = \sqrt{(C2 - C4)^2 + (E2 - E4)^2}$. Comparando com a expressão mostrada na Figura 1.7, observamos que após RAIZ, temos dois parênteses sendo abertos e um terceiro parênteses aberto imediatamente antes de E2, mas apenas um parênteses fecha a fórmula. Ou seja: o total de parênteses digitado está incorreto.

Precisamos acrescentar dois parênteses fechando aqueles que estavam abertos. Comparando com a expressão $d(P,Q) = \sqrt{(C2 - C4)^2 + (E2 - E4)^2}$ vemos que, para corrigir a expressão digitada, precisamos incluir um parêntese logo após C4 e outro logo após E4 .

Observe o Excel com as correções feitas.

Figura 1.8 | Fórmula após revisão



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Chama-se de união dos conjuntos A e B o conjunto $A \cup B = \{x \text{ tais que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$ formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.
Chama-se de intersecção dos conjuntos A e B o conjunto $A \cap B = \{x \text{ tais que } x \in A \text{ e } x \in B\}$ formado pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos.

Chama-se de diferença entre os conjuntos A e B ao conjunto $A - B = \{x \text{ tais que } x \in A \text{ e } x \notin B\}$ formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A mas não pertencem ao conjunto B.
Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais), $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros), $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais) e $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

Agora, assinale a alternativa correta.

a) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$.

d) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$.

e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

2. Fatorar uma expressão algébrica corresponde em transformá-la no produto de duas expressões algébricas tal que o resultado será o mesmo. Existem vários casos de fatoração, os principais são:
Fator comum: $ax + ay = a(x + y)$ (o "a" é fator comum entre ax e ay).
Agrupamento:
$ax + bx + ay + by = (a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$
(agrupamos (a+b) e depois aplicamos a fatoração por fator comum).
Diferença de quadrados: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Se fizermos a distributiva no lado direito da igualdade, chegamos à diferença do lado esquerdo.
Trinômio quadrado perfeito:
$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Considere z, x, y, a e b números não nulos e todos diferentes entre si e as afirmações a seguir.

I. A fração algébrica $\dfrac{4x^2y - 4x^3}{3x^6 - 6x^5y + 3x^4y^2}$ é equivalente a $\dfrac{-4}{3x^2(x - y)}$.

II. Simplificando a fração algébrica $\dfrac{za^2 - zb^2}{z^3a + z^3b}$, obtemos $\dfrac{(a - b)}{z^2}$.

III. Simplificando a fração algébrica $\dfrac{3wx - zy + 3wy - zx}{wx + 3zx + 3zy + wy}$, obtemos $\dfrac{3z + w}{3w - z}$.

Assinale a alternativa que apresenta apenas as assertivas corretas.

a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
b) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
c) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
d) Apena a afirmativa III está correta.
e) Apena a afirmativa II está correta.

3. Observe as propriedades das potências:

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \qquad a^n b^n = \left(ab\right)^n \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0 \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad a^0 = 1, a \neq 0$$

Usando as regras de potências para simplificar as expressões, avalie as sentenças:

I. $\dfrac{125a^3b^5c^{-2}}{75a^4b^2c} = \dfrac{5b^3c^{-3}}{3a}$.

II. $\dfrac{x^7\left(x^{3/5}\right)^{10}}{x^{-3}} = x^{14}$.

III. $\left(\dfrac{\left(a^{-3}b^4\right)^{-3}}{\left(a^{-4}b^{-2}\right)^{-2}}\right)^{-2} = \left(\dfrac{b^{16}}{a}\right)^2$.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta:

a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
b) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
c) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
d) Apenas a afirmativa I e está correta.
e) Apena a afirmativa II está correta

Seção 1.2

Equações e inequações

Diálogo aberto

Nesta seção você estudará as equações de 1º e 2º grau, equações exponenciais e logarítmicas. Toda equação é uma relação de igualdade na qual temos uma ou mais incógnitas. As incógnitas são os valores desconhecidos. Resolver uma equação significa determinar estes valores desconhecidos.

Equações de primeiro grau são aquelas nas quais o expoente da incógnita é igual a um. Nas equações de segundo grau a incógnita possui expoente igual a dois. Uma equação exponencial caracteriza-se pelo fato de o valor desconhecido estar em um expoente e em equações logarítmicas o valor desconhecido é parte do argumento de um logaritmo.

Com o propósito de contextualizar sua aprendizagem, lembre-se que você atua como analista em uma empresa de armazenagem. Na seção anterior foi vista a importância de se conferir as planilhas de cálculo com a implementação das operações algébricas do seu modelo matemático. Agora, você tem um novo objetivo, vamos descrevê-lo.

Na empresa em que você trabalha são utilizados equipamentos importados que registram a temperatura em graus Fahrenheit. Tais equipamentos monitoram aspectos da qualidade de armazenagem dos grãos, como a soja. Se tais equipamentos forem submetidos a temperaturas anormalmente elevadas, a pressão pode inclusive levar a explosões e resultar em acidentes de trabalho graves. O funcionário lhe enviou o arquivo apresentado na Tabela 1.1 com a determinação de graus Fahrenheit para valores pré-definidos de graus Celsius e a fórmula do Excel que ele utiliza na conversão, sendo que na coluna "B" consta os valores em Celsius (a tela com estas fórmulas é obtida utilizando-se o recurso do Excel, dentro da aba Fórmulas, Mostrar Fórmulas).

Tabela 1.1 | Dados enviados pelo funcionário, graus Celsius x graus Fahrenheit

Graus Celsius	Graus Fahrenheit	Fórmula utilizada pelo funcionário
-10	-50	=B8*1,8-32
0	-32	=B9*1,8-32
10	-14	=B10*1,8-32
15	-5	=B11*1,8-32
20	4	=B12*1,8-32
30	22	=B13*1,8-32
50	58	=B14*1,8-32

Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que a conversão analítica de Celsius para Fahrenheit seja utilizando a fórmula $C = \frac{F - 32}{1,8}$, Você deve verificar se os dados estão corretos e, caso apresentem algum problema, enviar a correção para o responsável. Além disso, o fabricante do equipamento importado enviou uma mensagem para seu funcionário que o equipamento não pode ser utilizado com temperaturas acima de $85°F$. Seu funcionário não sabe como determinar este valor em graus Celsius. Você deve explicar para ele como resolver essa questão.

Para solucionar problemas como o primeiro exposto, é importante que você compreenda como resolver equações de 1º grau e como representar expressões algébricas no Excel. Vale a pena você investir neste aprendizado, pois ele fará toda a diferença em sua vida profissional. Ao resolver problemas desse tipo você está integrando seus conhecimentos teóricos com as ferramentas práticas necessárias.

Não pode faltar

Equações de 1° e 2° Grau

Uma equação de 1º grau é uma relação de igualdade que pode ser reduzida a uma expressão da forma $ax + b = 0,\ a \neq 0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ com a e b conhecidos e x, valor desconhecido (também denominado de incógnita) a ser determinado.

Exemplos: $5x-7=0$, $6-2x=5x+7$, $\sqrt{5}x-\frac{2}{7}x-\sqrt[3]{17}=\frac{3}{7}x-1$.

Para resolver uma equação do 1º grau, efetuamos operações inversas sobre os valores numéricos até deixar apenas a incógnita de um dos lados do sinal de igualdade. Tipicamente, busca-se deixar a incógnita do lado esquerdo da igualdade e o valor numérico do lado direito.

Exemplificando

Resolva a equação $15x-3=11x+9$.

Como o $11x$ está sendo somado do lado direito, efetuamos a operação inversa para levá-lo ao lado esquerdo da igualdade: $15x-11x-3=9$.

O valor numérico 3 está sendo subtraído do lado esquerdo, então efetuamos a operação inversa (adição) para levá-lo ao lado direito: $15x-11x=9+3$.

Assim: $4x=12$.

Para isolar a incógnita x do lado esquerdo, efetuamos a operação inversa (o valor numérico 4 está multiplicando). Então, dividimos a equação dos dois lados por 4 e temos que $x=\frac{12}{4}=3$.

Você sempre pode verificar se a solução que obteve é, de fato, solução da equação original: basta substituir $x=3$ na equação $15x-3=11x+9$. Você deverá obter o mesmo valor em ambos os lados da igualdade.

Uma equação de 2º grau é uma igualdade em que o valor desconhecido tem como maior expoente o valor dois e seus coeficientes são números reais. Em geral, esse tipo de equação possui o formato: $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.

São exemplos de equações de 2º grau:

i) $3x^2 - 5x + 7 = 0, a = 3, b = -5, c = 7$.

ii) $\frac{\sqrt{5}}{2}x - 9{,}56x^2 = 0, a = -9{,}56, b = \frac{\sqrt{5}}{2}, c = 0$.

iii) $x^2 = 0, a = 1, b = 0, c = 0$.

Equações de 2º grau sempre possuem duas raízes (ou soluções) e para determiná-las, pode-se utilizar a expressão $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ para uma das raízes, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ para a outra raiz, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. A expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ recebe o nome de discriminante, onde Δ é a letra grega *delta*.

Exemplificando

Resolva a equação $2 - 5x^2 + 3x = 0$ utilizando a expressão anterior.

Resolução: inicialmente, precisamos identificar os valores dos coeficientes: $a = -5, b = 3, c = 2$. Observe que a é coeficiente do termo x^2, b é o coeficiente do termo x e c é o termo independente. Calculamos o discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-5)(2) = 9 + 40 = 49$.

Em seguida, calculamos cada uma das raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-3 + 7}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$ e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-3 - 7}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1.$$

O sinal do discriminante informa se a equação de 2º grau possui duas raízes reais e distintas, uma raiz dupla ou nenhuma raiz real.

Se $\Delta > 0$ então a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas.

Se $\Delta = 0$ então a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta < 0$ então a equação do 2º grau não possui raízes reais.

Pesquise mais

Além das equações quadráticas, também existem as equações biquadradas. São equações da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Para saber mais, acesse o link a seguir, nele, você encontrará um exemplo sobre equações biquadradas na página 35, capítulo 5.

Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577809271/cfi/39!/4/4@0.00:28.7>. Acesso em: 23 maio 2018.

Equações exponenciais

Uma equação exponencial é toda equação na qual a incógnita está no expoente. Por exemplo: $3^{x+7} = 27$; $5^{2x} - 5^x + 1 = 0$; $\frac{49^x + \sqrt{7}}{7^x} = 12$. Para resolver equações exponenciais, buscamos reduzir os dois lados da equação as potências na mesma base e então utilizar a propriedade $a^x = a^m \Leftrightarrow x = m, (a > 0, a \neq 1)$. Veja dois exemplos de resolução de equações exponenciais:

a) Resolva a equação $5^{2x-7} = 125$.

Escrevemos 125 como potência de 5: $5^{2x-7} = 5^3$. Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, os expoentes têm que ser iguais. Assim, $2x - 7 = 3$. Portanto, $2x = 10$ e $x = 5$. O conjunto solução será $S = \{5\}$.

b) Resolva a equação $\left(4^x\right)^{x-3} = 128$.

Aplicamos as propriedades de potenciação: $4^{x^2-3x} = 2^7$.

Escrevemos ambos os lados da equação para potências de 2: $\left(2^2\right)^{x^2-3x} = 2^7 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x^2-6x} = 2^7$

Logo, $2x^2 - 6x = 7$. Resolvendo a equação de 2º grau $2x^2 - 6x - 7 = 0$.

$x_{12} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{23}}{2}$. O conjunto solução desta equação será $S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{23}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{23}}{2}\right\}$.

Equações logarítmicas

Antes de apresentar as equações logarítmicas, precisamos definir o que são logaritmos.

Assimile

Define-se por logaritmo de um número *a* na base *b* ao expoente *x*, tal que $b^x = a$. Em símbolos: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Determinadas restrições sobre os valores *b* e *x* devem estar satisfeitas. Essas condições são chamadas de condições de existência do logaritmo: o logaritmando a deve ser um número real e positivo e a base b deve ser um número real, positivo, diferente de 1.

Em símbolos: $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ 0 < b \neq 1$.

Determinar o valor de um logaritmo corresponde a resolver uma equação exponencial.

Veja alguns exemplos de equações logarítmicas:

a) $x = \log_2 32$; b) $x = \log_6 1$; c) $x = \log_{0,01} 1000$

Suponha que $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $0 < b \neq 1$. No Quadro 1.1 estão expostas as consequências da definição de logaritmos.

Quadro 1.1 | Consequências da definição de logaritmos

$\log_b 1 = 0$	$\log_b b = 1$	$\log_b b^m = m$ $m \in \mathbb{R}$	$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$ $x, y \in \mathbb{R}$	$b^{\log_b a} = a$

Fonte: elaborada pelo autor.

Já no Quadro 1.2 estão apresentadas propriedades operatórias dos logaritmos. Suponha que $x, y > 0$, $0 < b \neq 1$, $x, y, b \in \mathbb{R}$.

Quadro 1.2 | Propriedades dos logaritmos

	Propriedade	Exemplo
Logaritmo do produto	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$\log_5(6) = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5(2) + \log_5(3)$
Logaritmo do quociente	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	$\log_2\left(\frac{7}{5}\right) = \log_2 7 - \log_2 5$
Logaritmo da potência	$\log_b(x^k) = k\log_b x,\ \ k > 0,\ \ k \in \mathbb{R}$	$\log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3\log_{10} 10 = 3$

Fonte: elaborada pelo autor.

Fórmula de mudança de base

Considere o logaritmo $\log_b x$. Podemos escrevê-lo em uma nova base c aplicando a expressão $\log_b x = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$.

Notação: quando a base é 10, não costuma-se escrever $\log_{10}(x)$. O usual é escrever $\log(x)$. Assim, quando a base é omitida, entenda-se que a base do sistema de logaritmos é 10.

Reflita

Sabendo que $\log 2 = 0,3,\ \log 3 = 0,47,\ \log 5 = 0,69$ como podemos determinar $\log_{25} 1000$?

Equações logarítmicas

Equações logarítmicas são equações nas quais temos a incógnita em um ou mais dos logaritmandos. Veja dois exemplos de equações logarítmicas.

a) $\log_b\left(f\left(x\right)\right)=k$, onde k é um número real positivo e $f(x)$ é uma expressão para a qual tem que estar satisfeitas as condições de existência de logaritmos.

Para resolver esse tipo de equação, basta aplicar a própria definição de logaritmo.

Exemplo: $\log_5\left(3x-5\right)=2$

$3x-5=5^2$

$3x=5+25 \Rightarrow 3x=30 \Rightarrow x=10$. É preciso cuidado neste ponto. Ainda não podemos afirmar que x= 10 é a solução da equação $\log_5\left(3x-5\right)=2$. É necessário verificar se x =10 atende a condição de existência para $\log_5\left(3x-5\right)$. Analisar a condição de existência para o logaritmando significa verificar se os valores candidatos a solução satisfazem à condição f(x) > 0. Neste caso, devemos verificar para quais valores de x temos 3x – 5 > 0. Substituindo o valor candidato a solução no logaritmando 3x – 5 temos: $3\cdot 10-5=25>0$ como $x=10$ satisfaz a condição de existência, então o conjunto solução será $S=\{10\}$.

b) $\log_b x=\log_b y$.

Exemplo: $\log_3\left(3x+5\right)=\log_3\left(7x-2\right)$. Temos que $3x+5=7x-2$. Então, $-4x=-7$. Assim, $x=\dfrac{7}{4}$. Substituímos este valor nos dois logaritmandos para verificar as condições de existência:

$3\cdot\dfrac{7}{4}+5>0$ satisfaz a condição de existência.

$7 \cdot \frac{7}{4} - 2 > 0$ também satisfaz a condição de existência. Portanto,

$S = \left\{ \frac{7}{4} \right\}$.

Exemplificando

Equações exponenciais aparecem naturalmente em problemas de juros compostos. Suponha que após você se formar, seu salário terá aumentos reais de 1% ao ano. Se seu salário no primeiro ano após formado for de R$ 5.000,00, daqui a quantos anos seu salário será de R$ 7.000,00?

Resolução: no primeiro ano após formado teremos que: $a_1 = 5000 + 1\% \cdot 5000 = (1{,}01) \cdot 5000$.

No segundo ano teremos: $a_2 = a_1 + 0{,}01 \cdot a_1 = (1{,}01) \cdot a_1 = (1{,}01)^2 \cdot a_1 = (1{,}01)^2 \cdot 5000$.

Para um ano N qualquer teremos: $a_n = (1{,}01)^n \cdot 5000$.

Lembre-se que queremos determinar para qual n $a_n = 7000$. Temos a equação $7000 = (1{,}01)^n \cdot 5000 \Rightarrow \frac{7}{5} = (1{,}01)^n = (1{,}01)^n$.

Aplicamos logaritmo a ambos os lados desta equação:

$$\log\left(\frac{7}{5}\right) = \log\left(1{,}01^n\right) \Rightarrow \log\left(\frac{7}{5}\right) = n \cdot \log(1{,}01) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{7}{5}\right)}{\log(1{,}01)}.$$

Então

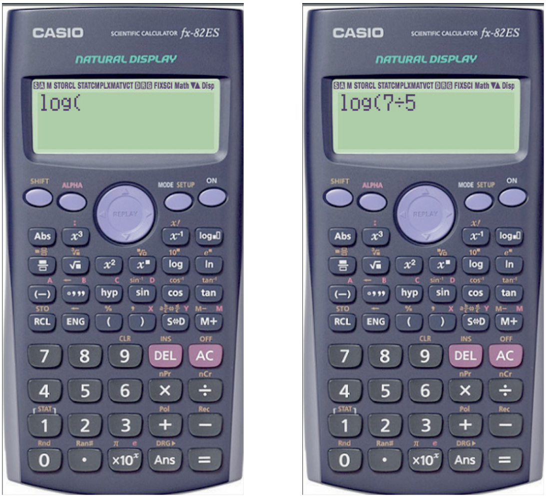
$n = \frac{0{,}146128}{0{,}004321} = 33{,}82$. Como interpretar este valor 33,82? A unidade aqui é anos. Assim, $n = 33{,}82$ corresponde a 33 anos inteiros mais a fração 0,82. Ao multiplicarmos esta fração por 12 meses (igual a 1 ano), teremos este valor em meses. Assim, $0{,}82 \cdot 12 = 9{,}84$ meses inteiros e a fração 0,84 de mês. Considerando que um mês possui 30 dias em média, fazendo $0,84 \cdot 30$ dias teremos 25 dias. Assim, 33,82 corresponde a 33 anos, 9 meses e 25 dias. Para fins comerciais/financeiros, despreza-se as frações inferiores a um dia.

Veja agora como realizar os cálculos finais deste exemplo em uma calculadora científica (usamos aqui uma Casio fx-82ES). Você pode efetuar o download de um emulador desta calculadora no link a seguir. Disponível em: <http://maralboran.eu/matematicas/2016/05/25/emuladores-de-calculadoras-casio/>. Acesso em: 23 maio 2018.

Aperte o botão do log (Figura 1.9a) e digite o valor a ser calculado no logaritmo no numerador, $\frac{7}{5}$ (Figura 1.9b). Não se esqueça de fechar os parênteses e aperte o botão de divisão (Figura 1.9c). Depois, digite o outro logaritmo e feche os parênteses (Figura 1.9d). Aperte o botão do sinal de igualdade e arredondamos o resultado para 33,82.

Figura 1.9 | Cálculos em calculadora científica

a) b)



c)

d)

Fonte: <http://maralboran.eu/matematicas/2016/05/25/emuladores-de-calculadoras-casio/>. Acesso em: 23 maio 2018.

Inequações

Vimos equações de 1º e 2º grau, exponenciais e logarítmicas. De forma similar às equações, também existem inequações de 1º e 2º grau, exponenciais e logarítmicas. Uma inequação envolve uma ou mais incógnitas relacionadas com uma desigualdade, com sinais de menor (<), menor ou igual ($\leq$), maior (>), maior ou igual ($\geq$). Vejamos as inequações de 1º grau.

Inequações de 1º grau

São inequações que podem ser reduzidas a uma das formas: $ax+b<0$, ax+b>0, $ax+b\leq 0$ ou

$ax+b\geq 0$, $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.

Veja como resolver esse tipo de equação.

Resolva $5(3-2x)>2(x-4)+2x-1$.

Fazemos a distributiva: $15-10x>2x-8+2x-1$.

Juntamos os termos semelhantes: $-10x-4x>-9-15$.

Então: $-14x>-24$. Como vamos dividir ambos os membros da equação por -14, invertemos a desigualdade: $x<\frac{-24}{-14}=\frac{24}{14}=\frac{12}{7}$.

Veja agora outro exemplo. Resolva a inequação $-5x-12>13$

Transpomos o -12 para o lado direito: $-5x>25$. Agora devemos ter um cuidado especial. No lado esquerdo da inequação temos um valor negativo. Para obter valores positivo para x, multiplicamos a equação por (-1) e invertemos o sinal da inequação: $5x<-25$. Agora podemos dividir os dois lados da equação por 5, obtendo: $x<-5$.

Notemos que afirmar que $-x>5$ é equivalente a afirmar que $x<-5$. Este é o principal cuidado que devemos ter ao resolver inequações: se a incógnita possui sinal negativo, invertemos o sinal da incógnita, mas também devemos lembrar de inverter o sinal da desigualdade.

Sem medo de errar

Você recebeu de seu funcionário um arquivo com uma tabela contendo valores de temperatura em graus Fahrenheit para valores pré-definidos de graus Celsius. Seu funcionário recebeu a expressão $C=\frac{F-32}{1{,}8}$ para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius. Foi pedido que ele fornecesse os valores em graus Fahrenheit correspondentes a -10 ºC, 0 ºC, 10 ºC, 15 ºC, 30 ºC e 50 ºC. São várias equações de 1º grau a serem resolvidas e ele enviou a Tabela 1.1, contendo as fórmulas e os resultados.

Você explicou ao seu funcionário que para escrever Fahrenheit em termos de Celsius, isolamos F na expressão $C=\frac{F-32}{1{,}8}$:

Como o valor 1,8 está dividindo, será transposto para o lado esquerdo da equação multiplicando: $1,8C = F - 32$. Depois, somamos 32 de ambos os lados da equação: $F = 1,8C + 32$.

Comparando a expressão que você obteve com as fórmulas digitadas por seu funcionário, é fácil ver que as fórmulas no Excel estão digitadas com erro. As fórmulas corretas estão apresentadas na Tabela 1.2, bem como os resultados corretos em Fahrenheit.

Tabela 1.2 | Novos valores em graus Fahrenheit com correção da fórmula

Graus Celsius	Graus Fahrenheit	Fórmula correta
-10	14	=B8*1,8+32
0	32	=B9*1,8+32
10	50	=B10*1,8+32
15	59	=B11*1,8+32
20	68	=B12*1,8+32
30	86	=B13*1,8+32
50	122	=B14*1,8+32

Fonte: elaborada pelo autor.

Resta a segunda questão: sua empresa foi informada que os equipamentos importados não podem ser utilizados em temperaturas acima de $85°F$. Você ficou incumbido de explicar ao seu funcionário como determinar, em graus Celsius, a faixa de temperatura de funcionamento. A equação para transformar graus Celsius em Fahrenheit é $F = 1,8C + 32$. Determinar na escala Celsius os valores que correspondem a $F > 85$ corresponde a resolver a inequação de 1º grau: $F = 1,8C + 32 > 85$.

Assim: $1,8C > 85 - 32$. Então $1,8C > 53$.

Portanto, $C > \dfrac{53}{1,8} = 29,444...$.

Avançando na prática

Equações exponenciais e logarítmicas

Descrição da situação-problema

Imagine que você trabalha em uma empresa de consultoria em engenharia e vocês foram contratados para efetuar obras na capital do Chile, Santiago, região sujeita a terremotos. Para atender a uma solicitação de seu cliente, você precisa estimar quantas vezes um terremoto é mais intenso que o outro. Para isso, foi necessário pesquisar sobre a escala Richter para terremotos, descobrindo que esta é uma escala que se utiliza logaritmos e é definida como $E = \log\left(\frac{S}{S_0}\right)$, onde S é o tamanho das ondas sísmicas de um terremoto e S_0 é um valor de referência adotado por Charles Richter em 1935.

Considere um terremoto na cidade A com magnitude igual a 9,0 e outro terremoto, na cidade B, com magnitude igual a 8,5 na escala Richter.

Quantas vezes o primeiro terremoto foi mais intenso que o segundo?

Resolução da situação-problema

Para o primeiro terremoto, temos $E_1 = 9{,}0 = \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$.

Para o segundo terremoto temos $E_2 = 8{,}5 = \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$.

Desconhecemos o valor exato de S_1 e S_2, mas podemos utilizar as propriedades do logaritmo a nosso favor.

Fazemos:

$$E_1 - E_2 = 9{,}0 - 8{,}5 = \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) - \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) = \log\left[\frac{S_1/S_0}{S_2/S_0}\right] = \log\left[\frac{S_1}{S_2}\right]$$

$$0{,}5 = \log\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \Rightarrow 10^{0{,}5} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow S_1 = \sqrt{10}S_2$$

$S_1 \cong 3{,}16S_2$. Ou seja, o primeiro terremoto teve pouco mais do triplo de intensidade que o segundo.

Faça valer a pena

1. Inequações de 1º grau envolvem uma desigualdade do tipo $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$ e uma incógnita x.
Essas inequações podem ser reduzidas a uma das seguintes formas $ax+b<0,\ ax+b>0,\ ax+b\leq 0$ ou $ax+b\geq 0,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.
É importante notar que $-x>b \Leftrightarrow x<-b,\ \ b\in\mathbb{R}$.

Considere a inequação $\frac{2}{3}(x-5)-\frac{1}{5}(3-x)<2(x+1)-4(3-x)$.

Assinale a alternativa correta a respeito do conjunto solução da inequação anterior.

a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{32}{71}\right\}$.

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{11}{59}\right\}$.

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{143}{7}\right\}$.

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{13}{11}\right\}$.

e) $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{281}{93}\right\}$.

2. Funções exponenciais são utilizadas para modelar situações de crescimento e decrescimento na Biologia, na Economia e na Física. Uma quantidade que decresce a uma taxa percentual constante é uma quantidade que decresce de forma exponencial.

A datação por carbono-14 é utilizada por arqueólogos para efetuar a estimativa da idade de compostos orgânicos. Sabe-se que o carbono-14 radioativo decai a uma taxa de 11,4% a cada período de 1.000 anos.

Assim, se tivermos uma quantidade inicial de 100 microgramas de carbono-14, após 1.000 anos teremos $100 - 11{,}4\% \cdot 100 = 100 \cdot (1 - 0{,}114) = 100 \cdot 0{,}886 = 88{,}6$ microgramas.

A quantidade inicial era de 100 microgramas e, após 1.000 anos, passa a ser de 88,6 microgramas. Multiplicando este valor de 88,6 microgramas por (1 – 0,114), após 2.000 anos teremos $88{,}6 \cdot (1 - 0{,}114) = 100 \cdot (1 - 0{,}114) \cdot (1 - 0{,}114) = 100 \cdot (1 - 0{,}114)^2 = 78{,}4996$ microgramas.

Assim, se a quantidade inicial de um material era de 100 microgramas, após t anos, a quantidade será dada pela equação $M(t) = 100 \cdot 0{,}886^t$

Assinale a alternativa que apresenta o tempo necessário para decaimento do carbono-14 até 20 gramas.

a) $\dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}886)}$.=13,3 milhares de anos.

b) $\dfrac{\log(2)}{\log(8{,}86)}$ =0,3177 milhares de anos.

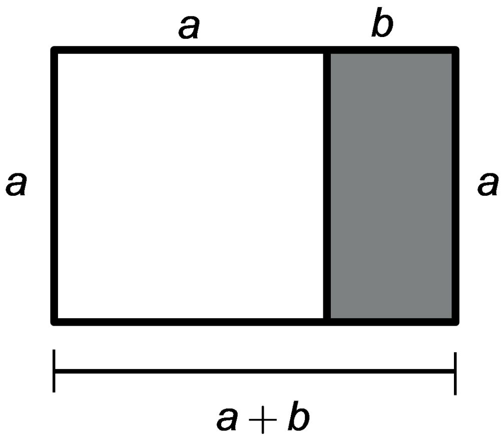
c) $\log(20) - \log(0{,}886)$ =1,3535 milhares de anos.

d) $\log(0{,}443)$ =-0,3536 milhares de anos.

e) $\log(17{,}72)$ =1,2484 milhares de anos.

3. Denomina-se retângulo áureo o retângulo constituído por um quadrado de lados a e um retângulo de lados *a* e *b*, conforme a Figura 1.10, de tal forma que o retângulo cinza de lados a e b seja semelhante ao retângulo maior de lados $a + b$ e *a*.

Figura 1.10 | Retângulo áureo

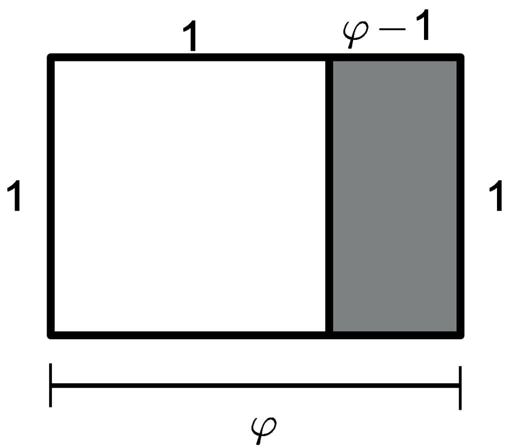


Fonte: elaborada pelo autor.

Em decorrência da semelhança entre os retângulos, vale a relação $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a}$.

Podemos reescrever a expressão acima tomando $a=1$. Dessa forma teremos a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Retângulo áureo tomando $a=1$



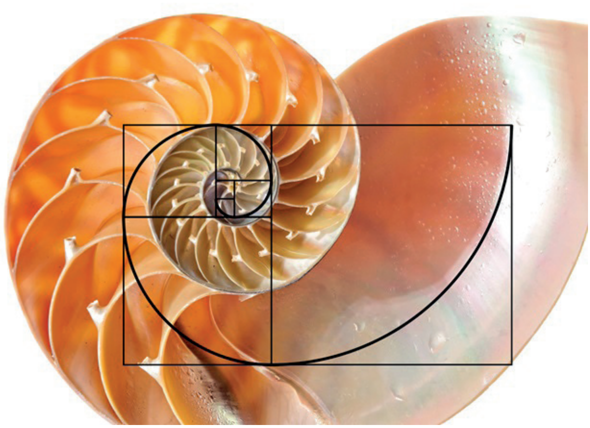
Fonte: elaborada pelo autor.

A relação anterior pode ser reescrita como $\dfrac{1}{1+(\varphi-1)}=\dfrac{\varphi-1}{1}$.Ou ainda: $\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{\varphi-1}{1}$.

O retângulo áureo possui muitas aplicações na arquitetura, no design gráfico e também é um padrão que aparece na natureza.

Por exemplo, em algumas conchas, identifica-se um padrão espiral associado a infinitos retângulos áureos. Veja a Figura 1.12.

Figura 1.12 | Retângulo áureo na natureza.



Fonte: <https://www-images.christianitytoday.com/images/71011.jpg?h=455&w=620>. Acesso em: 23 maio 2018.

Considere a relação $\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{\varphi-1}{1}$. A partir dela é possível obter uma equação de 2º grau. Assinale a alternativa que apresenta esta equação de 2ºgrau e suas raízes.

a) $-\varphi^2+\varphi-1=0$, $\varphi_1=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$, $\varphi_2=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$.

b) $\varphi^2-\varphi-1=0$, $\varphi_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) $\varphi^2-\varphi+1=0$, $\varphi_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

d) $\varphi^2 - \varphi + 1 = 0$, $\varphi_1 = \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{1-\sqrt{11}}{2}$.

e) $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, $\varphi_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Seção 1.3

Trigonometria e números complexos

Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos as equações de 1º e 2º grau, equações exponenciais e logarítmicas, concluímos a seção com inequações de 1º grau. Agora, iniciaremos nosso estudo de trigonometria.

A trigonometria já era usada, há três mil anos, por egípcios para medir as terras alagadas pelas cheias do rio Nilo. Atualmente usamos a trigonometria na topografia, na construção civil, no posicionamento de satélites espaciais, em empresas de logística e transportes que a utilizam na localização de suas frotas, até mesmo equipamentos biomédicos usam as funções seno e cosseno no imageamento (radiografia) de partes do corpo humano.

Inicialmente, veremos as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, o ciclo trigonométrico e a definição de radiano. Uma das aplicações das funções trigonométricas é a modelagem de fenômenos periódicos. Em seguida, veremos algumas das principais identidades trigonométricas que nos permitem simplificar equações que envolvam funções trigonométricas.

Na sequência, iniciaremos nosso estudo sobre o conjunto dos números complexos, que é uma ampliação do conjunto dos números reais. Veremos ainda a representação e operações com números complexos (adição, subtração, multiplicação e divisão). O reconhecimento do conjunto dos números complexos ocorre a partir do século XVI com interesse teórico. Posteriormente os físicos e engenheiros perceberam que poderiam utilizar os números complexos na resolução de problemas da eletricidade e mecânica de fluidos.

Para contextualizar a aprendizagem, considere que você recebeu de um de seus funcionários a última planilha com a produção da empresa. Nela, ele utilizou uma função complexa para guardar, na parte real, as oscilações do preço de um produto e na parte imaginária o fluxo de caixa em função da variável *t*, que representa o número de dias após o início da produção. A parte real (preço do produto) é dada por $1000 \cdot \cos(t)$ e a parte imaginária (fluxo de caixa) é dada por $1000 \cdot \text{sen}(t)$. Ou seja, foi adotada uma representação com números complexos na forma $z(t) = 1000 \cdot \cos(t) + 1000 \cdot \text{sen}(t)i$. Seu funcionário digitou a expressão no Excel e enviou para você a Tabela 1.3.

Tabela 1.3 | Representação do preço do produto e das perdas

Dias após o início da produção	Parte Real (preço do produto)	Parte Imaginária (fluxo de caixa)
0	100,00	0,00
30	154,25	-988,03
45	525,32	850,90
60	-952,41	-304,81
90	-448,07	894,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Você tem certeza que esta tabela apresenta problemas, pois um dos pontos de checagem na sua empresa é que vocês possuem a informação, com base em dados históricos, que o preço do produto 60 dias após o início da produção é de R$ 500,00, e o fluxo de caixa, após 30 dias do início da produção, também é igual a R$ 500,00. Você acredita que o problema pode estar relaciona à forma como seu funcionário calculou seno e cosseno no Excel.

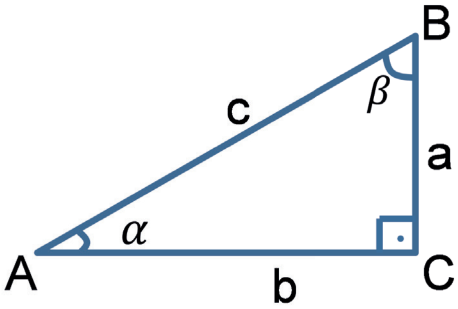
Você deve identificar o problema e enviá-lo a seu funcionário, explicando como ele deve fazer para evitar cometer este erro no futuro.

Não pode faltar

Triângulos e círculo trigonométrico

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de noventa graus. Considere o triângulo retângulo com vértices A, B e C apresentado na Figura 1.13

Figura 1.13 | Triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

O lado oposto ao ângulo reto é denominado de hipotenusa. Na Figura 1.13, a hipotenusa possui comprimento c. Os outros dois lados são denominados de catetos. Com respeito ao ângulo α, o cateto BC é o cateto oposto e o cateto AC é o cateto adjacente. Em relação ao ângulo β, o cateto BC é o cateto adjacente e o cateto AC é o cateto oposto. Portanto, a denominação cateto oposto ou cateto adjacente é dada em função de qual ângulo estamos falando.

Definição: seno, cosseno e tangente

Dado o ângulo alfa em um triângulo retângulo, define-se:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

Se calcularmos seno, cosseno e tangente com respeito ao ângulo β, teremos

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c},$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c},$$

$$\tan(\beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{a}$$

Os ângulos $30°, 45°, 60°$ recebem a denominação de ângulos notáveis. Na Tabela 1.4 apresentamos os valores das funções seno, cosseno e tangente nestes três valores de ângulo.

Tabela 1.4 | Valores de funções trigonométricas em ângulos notáveis

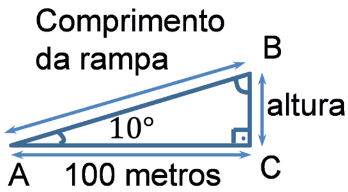
Θ	**sem (Θ)**	**cos (Θ)**	**tg (Θ)**
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Você foi contratado por uma empresa para definir os custos de recobrimento de uma rampa como a da Figura 1.14. Sabendo que $\text{sen}(10°) = 0{,}1736$ e $\cos(10°) = 0{,}9848$, determine a altura da rampa e o comprimento do lado AB.

Figura 1.14 | Determinação altura e comprimento da rampa



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Temos que $\cos(10°) = \dfrac{100}{\text{comprimento da rampa}} = 0,9848$.

Portanto, $\text{comprimento da rampa} = \dfrac{100}{0,9848} = 101,54$ metros.

Usando agora o seno:

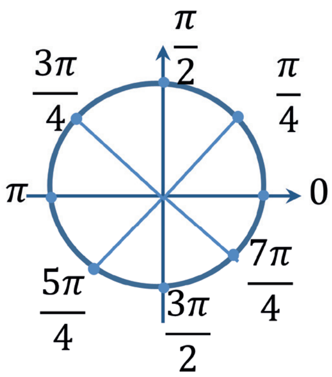
$$\text{sen}(10°) = \frac{\text{altura}}{\text{comprimento da rampa}} = \frac{\text{altura}}{101,54} = 0,1736$$

Então, $\text{altura} = 101,54 \cdot 0,1736 = 17,63$ metros.

Definição de círculo trigonométrico: o círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário centrado na origem (0,0) do plano cartesiano.

No círculo trigonométrico associamos números reais a ângulos. A fórmula do comprimento de um círculo qualquer é $C = 2\pi r$. No círculo trigonométrico temos $C = 2\pi$. Assim, uma volta no círculo trigonométrico possui comprimento igual a 2π. Portanto, meia-volta possui comprimento igual a π. Na Figura 1.15 apresentamos o círculo trigonométrico, destacando alguns ângulos.

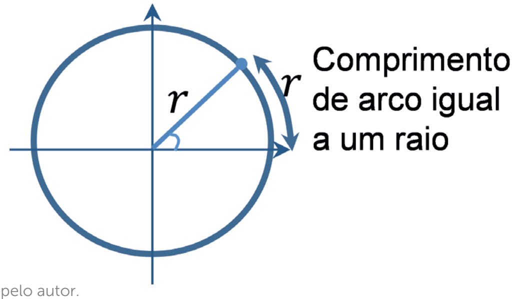
Figura 1.15 | Círculo trigonométrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição de radiano: um radiano é o ângulo correspondente a um arco de comprimento igual a um raio.

Figura 1.16 | Definição de radiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Para transformar graus em radianos ou radianos em graus, definimos que meia-volta no ciclo trigonométrico é igual a π radianos e que meia-volta também é igual a $180°$.

Para transformar $20°$ em radianos usamos a regra de três:

$$\pi \text{ radianos --- } 180°$$

$$x \text{ radianos --- } 20°$$

Então $x \text{ radianos} = \dfrac{20°\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{9}$.

É importante lembrar que, no Excel, as funções trigonométricas são calculadas em radianos. Para determinar o valor de uma função trigonométrica em graus, devemos efetuar a transformação. Na Tabela 1.5 é apresentado como efetuar esta transformação.

Tabela 1.5 | Usando seno e cosseno no Excel

a) Resultados

b) Fórmulas utilizadas

graus	radianos	seno	cosseno	graus	radianos	seno	cosseno
0	0,0000	0,0000	1,0000	0	=H21*3,1415926536/180	=SEN(I21)	=COS(I21)
5	0,0873	0,0872	0,9962	5	=H22*3,1415926536/180	=SEN(I22)	=COS(I22)

graus	radianos	seno	cosseno	graus	radianos	seno	cosseno
10	0,1745	0,1736	0,9848	10	=H23*3,1415926536/181	=SEN(I23)	=COS(I23)
30	0,5236	0,5000	0,8660	30	=H24*3,1415926536/182	=SEN(I24)	=COS(I24)
45	0,7854	0,7071	0,7071	45	=H25*3,1415926536/183	=SEN(I25)	=COS(I25)
57, 2958	1,0000	0,8415	0,5403	57, 2958	=H26*3,1415926536/184	=SEN(I26)	=COS(I26)
60	1,0472	0,8660	0,5000	60	=H27*3,1415926536/185	=SEN(I27)	=COS(I27)

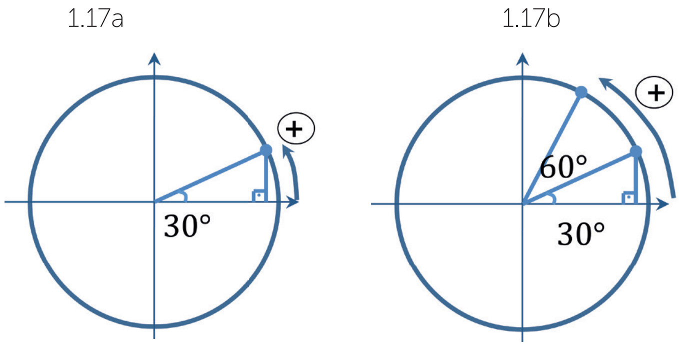
Fonte: elaborada pelo autor.

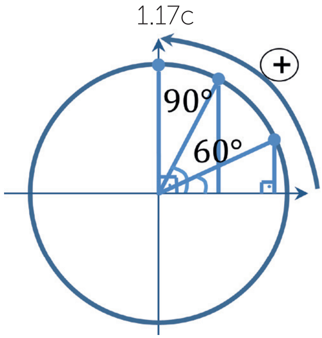
Uma alternativa é utilizar a função RADIANOS (x) do Excel, a qual transforma um ângulo em graus para radianos. Assim, para obter o valor em radianos de 30º, fazemos no Excel RADIANOS (30).

O ângulo pode ser tomado como uma variável, a qual pode assumir valores no conjunto dos números reais positivos ou negativos, ou seja, maiores que $360°$ ou uma volta completa. Se tomarmos como exemplo o ângulo de 30º, podemos, a partir dele, obter múltiplos de 30º, fazendo $k \cdot 30°$ com $k = 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Nas Figuras 1.17 e 1.18 ilustramos estas ideias (ainda sem ultrapassar uma volta completa de $360°$).

Na Figura 1.17a vemos o ângulo 30º, na Figura 1.17b temos um deslocamento no sentido positivo de 30º em relação ao primeiro ângulo, correspondendo ao ângulo de 60º, por fim, na Figura 1.17c temos um acréscimo de 30º sobre o segundo ângulo de 60º. Já na Figura 1.18 apresentamos os ângulos correspondentes ao sentido negativo.

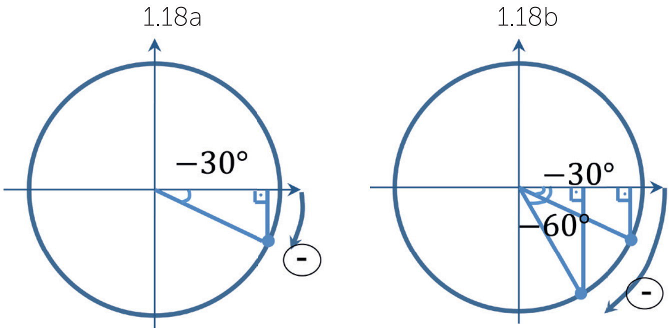
Figura 1.17 | Ângulo com orientação positiva no ciclo trigonométrico

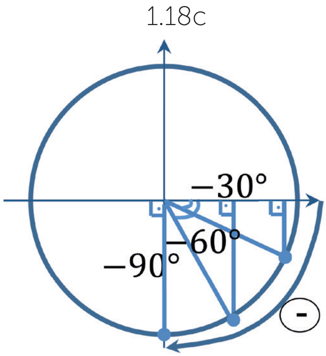




Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.18 | Ângulo com orientação negativa no ciclo trigonométrico





Fonte: elaborada pelo autor.

Até agora nos referimos a ângulos no ciclo trigonométrico supondo que não tenhamos ultrapassado uma volta completa no ciclo. Contudo, como as funções trigonométricas são muito utilizadas na modelagem de fenômenos periódicos, é bastante conveniente entendermos como trabalhar com ângulos se dermos mais de uma volta completa no ciclo trigonométrico. Por exemplo, o ângulo $390°$ possui a mesma origem e a mesma extremidade que o ângulo $30°$. Veja que $390° = 13 \cdot 30°$. Dizemos que os ângulos $30°$ e $390°$ são **ângulos côngruos**. Veja que $390° = 30° + 360°$ e $750° = 30° + 2 \cdot 360°$. Assim, o ângulo $750°$ difere do ângulo de $30°$ por duas voltas inteiras no sentido positivo. Já o ângulo $-1050°$ possui mesma origem e extremidade que o ângulo $30°$, diferindo deste último por três voltas inteiras no sentido negativo, pois $-1050° = 30° - 3 \cdot 360°$.

Reflita

É possível efetuar os cálculos que fizemos para os ângulos $390°$ no sentido positivo e $-1050°$ no sentido negativo mas com os ângulos medidos em radianos?

Trigonometria e identidades trigonométricas

A partir das definições anteriores para seno, cosseno e tangente são definidas a cotangente, a secante e a cossecante de um ângulo α como mostrado a seguir.

Cotangente de α: $\text{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$, para todo $\alpha \neq k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Os valores $\alpha = k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ são excluídos para evitar a divisão por zero, pois $\text{sen}(\alpha) = 0$, para $\alpha = k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

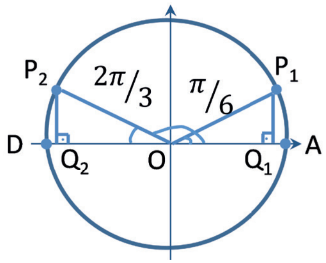
Secante de α: $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$, para todo $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Os valores $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ são excluídos para evitar a divisão por zero, pois $\cos(\alpha) = 0$, para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

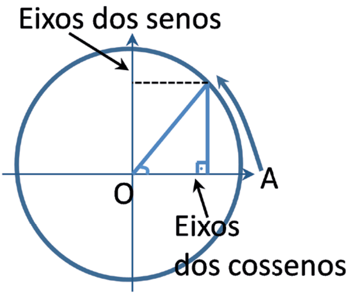
Cossecante de α: $\text{cossec}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}$, para todo $\alpha \neq k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Identidades trigonométricas

Assim como existem equações de 1º e 2º grau, logarítmicas e exponenciais, também existem equações trigonométricas. Por exemplo: $sen(x) = \dfrac{1}{2}$. Observando o ciclo trigonométrico, vemos que $sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Na Figura 1.19 assumimos que os ângulos $P_1\hat{O}Q_1$ e $P_2\hat{O}Q_2$ possuem a mesma medida, $\dfrac{\pi}{6}$. Assim, os triângulos P_1OQ_1 e P_2OQ_2 são semelhantes (observe que podemos "rebater" um triângulo sobre o outro). Dessa forma, dizemos que cada um dos triângulos é simétrico do outro em relação ao eixo y. Logo, os segmentos P_1Q_1 e P_2Q_2 possuem mesma medida. Por consequência, suas projeções sobre o eixo dos senos serão iguais. Apresentamos os eixos dos senos e dos cossenos na Figura 1.19b. Observe que o arco AP_2 possui medida $\dfrac{2\pi}{3}$. Portanto, temos que $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Este raciocínio de usar a simetria do triângulo retângulo nos vários quadrantes do ciclo trigonométrico pode ser estendido para os outros quadrantes.

Figura 1.19 | Determinação do conjunto solução de $\text{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ e eixo dos senos e dos cossenos





Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, o conjunto solução da equação trigonométrica $\text{sen}(x)=\frac{1}{2}$ é $S=\left\{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Além das equações trigonométricas existem igualdades nas quais temos funções trigonométricas que são verdadeiras para qualquer valor que a variável possa assumir. Tais identidades são importantes por permitem simplificações de muitas expressões que envolvem funções trigonométricas. A seguir são apresentadas algumas das principais identidades da trigonometria.

Identidade da tangente: como $\tan(\alpha)=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, para todo ângulo α, com $\cos(a)\neq 0$, concluímos que $\tan(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, com $\cos(a)\neq 0$.

Assimile

Vamos distinguir equações de identidades. Em uma equação temos uma incógnita, então, resolver a equação significa determinar o valor dessa incógnita que deixa verdadeira a equação. Uma equação só é verdadeira para os valores do seu conjunto solução, que inclusive pode ser vazio.

Já uma identidade (seja trigonométrica ou não) é verdadeira para todos os valores da variável(eis) inscrita(s) na mesma.

Vamos ver agora a identidade fundamental da trigonometria.

Identidade fundamental da trigonometria: do teorema de Pitágoras, deduz-se que $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ para todo ângulo α.

Destacamos ainda as identidades:

$$\sec^2(\alpha)=1+tg^2(\alpha)\text{ , para }\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\alpha\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z};$$

$$\text{cossec}^2(\alpha)=1+cotg^2(\alpha)\text{ , para }\alpha\neq k\pi,\alpha\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}.$$

Exemplificando

Mostre que a igualdade $\text{cossec}^2(\alpha)-\text{cotg}^2(\alpha)=1$ é verdadeira para todos os valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, tais que $\alpha\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$ Ou seja, mostre que $\text{cossec}^2(\alpha)-\text{cotg}^2(\alpha)=1$ é uma identidade trigonométrica.

Resolução:

Uma das formas de se demonstrar que uma igualdade é uma identidade trigonométrica é por reescrevermos um dos lados da igualdade de forma a obter uma expressão que seja idêntica ao outro lado da igualdade. Em primeiro lugar substituímos $\text{cossec}^2(\alpha)=\dfrac{1}{\text{sen}^2(\alpha)}$ e $\text{cotg}^2(\alpha)=\dfrac{\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}$

$$\text{cossec}^2(\alpha)-\text{cotg}^2(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)}-\frac{\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}=\frac{1-\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}$$

efetuando a soma indicada.

Então, lembrando da identidade fundamental da trigonometria temos que $\frac{1-\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} = \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} = 1$, para todo $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Concluindo, assim, a demonstração da validade da identidade.

Para saber mais sobre identidades trigonométricas, você pode consultar o link sugerido a seguir.

Pesquise mais

Como sugestão para conhecer mais sobre identidades trigonométricas sugerimos, na Biblioteca Virtual, consultar a obra de Sheldon Axler. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582603215/cfi/156!/4/4@0.00:45.7>. Acesso em: 4 maio 2018.

Veja também o livro de além de Fred Safier. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577809271/cfi/220!/4/4@0.00:0.00>. Acesso em: 4 maio 2018.

Conjunto dos números complexos

Considere a equação do 2º grau $x^2 + 4 = 0$, ao tentar resolvê-la, obtemos $x = \sqrt{-4}$. Assim, temos que seu conjunto solução no conjunto dos números reais é vazio: $S = \{\ \}$. No entanto, a partir das investigações de matemáticos, físicos e engenheiros, percebeu-se que é possível ampliar o conjunto dos números reais de forma a se obter solução para equações do segundo grau como a apresentada anteriormente, e mesmo assim as propriedades algébricas dos números reais se mantinham. Mais importante, este conjunto "ampliado" possibilitava a resolução e interpretação física de problemas importantíssimos na Física e na Engenharia. Dentre os campos de particular relevância dessas aplicações estavam a eletricidade e a mecânica de fluidos.

Define-se assim um novo tipo de número: o **número complexo**, que pode ser representado na forma algébrica $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária definida por $i^2 = -1$. Chamamos o número *a* de parte real de *z* e o número *b* de parte imaginária de *z*, escrevendo-se $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$. Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, dizemos que o número complexo $z = 0 + bi$ é um número imaginário puro.

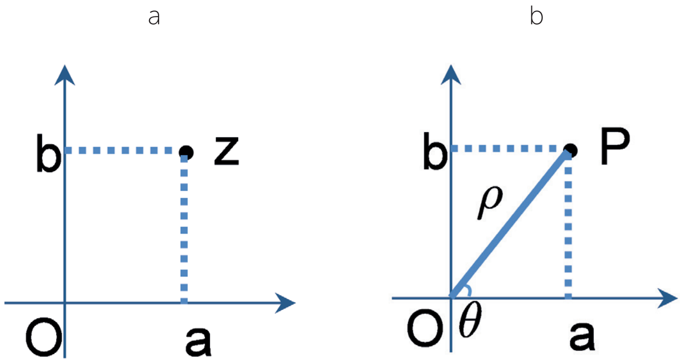
Representa-se o conjunto dos números complexos com a letra $\mathbb{C}$. Temos que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Destacamos que se $b = 0$, temos um número real.

Também podemos representar um número complexo $z = a + bi$ na forma de par ordenado (a, b).

Representação de números complexos e suas aplicações

Uma outra forma de representação dos números complexos é a representação no assim chamado Plano de Argand-Gauss. A parte real a do número complexo $z = a + bi$ é assinalada no eixo das abscissas e a parte imaginária b é representada no eixo das ordenadas, conforme mostrado na Figura 1.20a. Já na Figura 1.20b vemos a representação de um número complexo na forma polar. O ponto P, correspondente ao complexo $z = a + bi$ é denominado afixo de z. Para escrever um número complexo na forma polar utilizamos seu módulo, representado pela letra grega ρ, que indica a distância do afixo até a origem. O módulo do complexo $z = a + bi$ é obtido a partir do Teorema de Pitágoras: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. O ângulo θ é chamado de argumento de z. Temos ainda que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen(\theta) = \dfrac{b}{\rho}$.

Figura 1.20 | Representação de um número complexo no plano Argand-Gauss (a) e polar (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Igualdade de números complexos

Diz-se que os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Oposto de um número complexo

Define-se o oposto do número complexo $z = a + bi$ como sendo o número complexo $-z = -a - bi$.

Conjugado de um número complexo

Denomina-se de conjugado do número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\overline{z} = a - bi$. Note que representamos o conjugado de z como: $\overline{z}$.

Adição e subtração de números complexos

Considere dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. A adição dos complexos z e w é definida por

$z+w=(a+c)+(b+d)i$, ou seja, somamos parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

De forma similar, define-se a subtração de números complexos: $z-w=(a-c)+(b-d)i$.

Multiplicação de números complexos

A multiplicação entre os complexos $z=a+bi$ e $w=c+di$ é definida da seguinte forma: $z\cdot w=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd$.

Então: $z\cdot w=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Divisão de números complexos

Dados os números complexos $z=a+bi$ e $w=c+di$ com $w=c+di\neq 0$, a divisão $\frac{z}{w}$ é definida multiplicando dividendo e divisor pelo complexo conjugado de w. Então,

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(a+bi)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Exemplificando

Veja a seguir alguns exemplos de operações com números complexos:

a) Determine x de forma que os complexos $z=3-5xi$ e $w=2y+10i$ sejam iguais.

Resolução: precisamos igualar parte real de z com parte real de w e parte imaginária de z com parte imaginária de w.

$3=2y$ e $-5x=10$. Portanto, $y=\frac{3}{2}$ e $x=-2$.

b) Considerando os números complexos $z=3-i$ e $w=1-2i$, determine a divisão $\frac{z}{w}$.

Resolução: fazemos

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{(3-i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}=\frac{3+6i-i+2}{1+4}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

.

Vamos retomar a equação do 2º grau do início desta seção sobre números complexos, que é $x^2+4=0$. Vimos que esta equação possui conjunto solução vazio no conjunto dos números reais. Contudo, ao aplicarmos a fórmula de Báskara temos: $x_1=\frac{-0+\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{\sqrt{-16}}{2}=\frac{4\sqrt{-1}}{2}=2i$ e

$$x_2=\frac{-0-\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-\sqrt{-16}}{2}=\frac{-4\sqrt{-1}}{2}=-2i$$

. Dessa forma, no conjunto dos números complexos suas raízes são $x_1=2i$ e $x_2=-2i$.

Sem medo de errar

Lembremos que você recebeu a planilha representada pela Figura 1.21 do seu funcionário.

Figura 1.21 | Representação do preço do produto e do fluxo de caixa

	A	B	C	D
1	Dias após o início da	Parte Real	Parte Imaginária	
2	produção	(preço do produto)	(fluxo de caixa)	
3	0	1000,00	0,00	
4	30	154,25	-988,03	
5	45	525,32	850,90	
6	60	-952,41	-304,81	
7				

Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Na sua empresa vocês sabem que o preço do produto, 60 dias após o início da produção, deve ser igual a R$ 500,00. Além disso, vocês também possuem a informação que os dados referentes ao fluxo de caixa (na parte imaginária), 30 dias após o início da produção, devem ser de R$ 500,00.

A parte real é dada por $1000 \cdot \cos(t)$, onde está dado em graus e a unidade de tempo é dias. Com respeito ao preço do produto (parte real do número complexo), temos a informação que, 60 dias após o início da produção, deve valer a igualdade: $1000 \cdot \cos(t) = 500$.

Ou seja $\cos(t) = \dfrac{500}{1000} = 0,5$.

Lembrando da Tabela 1.4 para o valor de seno, cosseno e tangente nos ângulos notáveis $30°, 45°$ e $60°$, identificamos que devemos ter $t = 60°$ para que $\cos(t) = 0,5$. Por outro lado, com respeito às perdas, temos que $1000 \cdot \text{sen}(t) = 500$. Ou seja: $\text{sen}(t) = \dfrac{500}{1000} = 0,5$. Agora devemos ter $t = 30°$ para que $\text{sen}(t) = 0,5$. Mas os valores apresentados na tabela enviada por seu funcionário são $\cos(60) = -952,41$ e $\text{sen}(30) = -988,03$, respectivamente. Observe que faltou multiplicar por 1.000 para obter os valores da última coluna. Lembramos ainda que $\text{sen}(30rad) = -0,988$ e $\cos(60rad) =$ - 0,952. Confira a Figura 1.22.

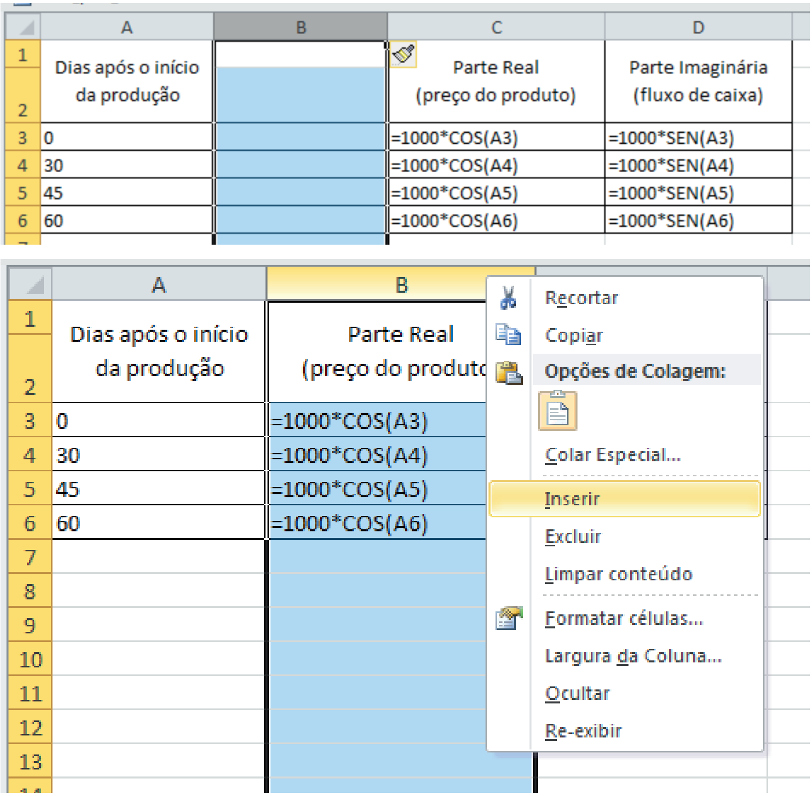
Figura 1.22 | Tabela com os fórmulas e dados originais

	Dias após o início da produção	Parte Real (preço do produto)	Parte Imaginária (fluxo de caixa)
1–2			
3	0	=1000*COS(A3)	=1000*SEN(A3)
4	30	=1000*COS(A4)	=1000*SEN(A4)
5	45	=1000*COS(A5)	=1000*SEN(A5)
6	60	=1000*COS(A6)	=1000*SEN(A6)
7			

Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Neste ponto você se recordou da Tabela 1.5 desta seção, na qual é destacado que o cálculo do seno e cosseno no Excel deve ser realizado em termos de radianos e não em graus. Assim, o argumento do tempo (a coluna à esquerda na tabela) deve ser transformado para radianos para só então calcularmos o seno e cosseno. Para corrigir isso, vamos inserir uma coluna nova no Excel, conforme exemplificado na Figura 1.23. Clique na coluna B e em seguida, clique no botão direito do Mouse. Vá em Inserir. Na Figura 1.23b vemos o resultado após clicar em "Inserir".

Figura 1.23 | Como inserir coluna no Excel



Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Nesta coluna nova escrevemos o comando exibido na Figura 1.24.

Figura 1.24 | Tabela com as correções para cálculo do seno e cosseno no Excel

	A	B	C	D
1	Dias após o início da produção	Radiano (Dias após o início da produção)	Parte Real (preço do produto)	Parte Imaginária (fluxo de caixa)
2				
3	0	=RADIANOS(A3)	=1000*COS(B3)	=1000*SEN(B3)
4	30	=RADIANOS(A4)	=1000*COS(B4)	=1000*SEN(B4)
5	45	=RADIANOS(A5)	=1000*COS(B5)	=1000*SEN(B5)
6	60	=RADIANOS(A6)	=1000*COS(B6)	=1000*SEN(B6)
7				

Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Os valores numéricos constam na Figura 1.25.

Figura 1.25 | Valores numéricos corrigidos para preço do produto e perdas

	A	B	C	D
1	Dias após o início da produção	Radiano (Dias após o início da produção)	Parte Real (preço do produto)	Parte Imaginária (fluxo de caixa)
2				
3	0	0	1000,00	0,00
4	30	0,5236	866,03	500,00
5	45	0,7854	707,11	707,11
6	60	1,0472	500,00	866,03
7				

Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Sua recomendação para seu funcionário é que ele se lembre de, ao utilizar seno e cosseno no Excel, de trabalhar com os argumentos em radianos, e não em graus.

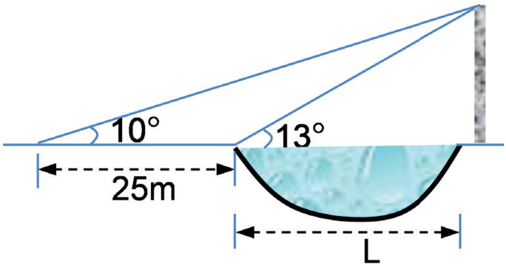
Avançando na prática

Aplicando trigonometria no cálculo de distâncias inacessíveis

Descrição da situação-problema

Uma das aplicações mais importantes da trigonometria é na determinação de distâncias de locais inacessíveis: altura de postes ou montanhas ou a determinação da largura de rios sem atravessar o rio. Considere que você deseja medir a largura de um rio, sabendo que há uma torre de transmissão de sinal de celular do outro lado da margem. Junto a uma das margens do rio você mede o ângulo de elevação da torre, em seguida, você se afasta 25 metros para longe da margem, como apresentado na Figura 1.26 e repete a medição do ângulo de elevação da torre. O ângulo obtido na medição junto à margem do rio foi de $13°$ e o ângulo obtido na medição mais afastada do rio foi de $10°$. Consultando uma calculadora científica ou o Excel você sabe que $\tan(13°) = 0,2308$ e $\tan(10°) = 0,1763$. Determine a largura L do rio, sem atravessá-lo. Será possível, após calcular a largura do rio, determinar a altura da torre de transmissão?

Figura 1.26 | Medindo a largura de um rio sem atravessá-lo



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Representemos a altura da torre de transmissão por h. Então, da definição da tangente temos que:

$\tan(13°) = \dfrac{h}{L}$ e $\tan(10°) = \dfrac{h}{25+L}$. Como sabemos que $\tan(10°) = 0,1763$ e que $\tan(13°) = 0,2308$ então:

$\tan(13°) = \dfrac{h}{L} = 0,2308$ e $\tan(10°) = \dfrac{h}{25+L} = 0,1763$. Assim, temos que, da primeira igualdade, $h = 0,2308 \cdot L$. Da segunda igualdade temos $h = 0,1763 \cdot (25+L)$.

Igualando ambas: $0,2308 \cdot L = 0,1763 \cdot (25+L)$. Fazendo a distributiva: $0,2308 \cdot L = 4,4075 + 0,1763 \cdot L$. Então $0,2308 \cdot L - 0,1763 \cdot L = 4,4075$.

Temos $0,0545 \cdot L = 4,4075$. Portanto, a largura do rio é $L = \dfrac{4,4075}{0,0545} = 80,81$ metros.

Agora que calculamos a largura do rio, podemos calcular a altura da torre de transmissão usando a tangente.

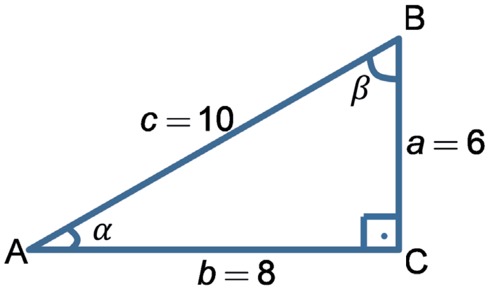
Temos, da definição de tangente, que: $\tan(13) = \dfrac{h}{L} = 0,2308$.

Então $h = 0,2308 \cdot L = 0,2308 \cdot 80,81 = 18,65$ metros.

Faça valer a pena

1. Considere o triângulo retângulo apresentado na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Triângulo retângulo com valores dados



Fonte: elaborada pelo autor.

A alternativa que apresenta os valores corretos para $sen(\alpha)$ e $sen(\beta)$ é

a) 0,8 e 0,6.
b) 0,2 e 0,3.
c) 0,6 e 0,8.
d) 0,9 e 0,2.
e) 0,2 e 0,9.

2. Uma equação do segundo grau tal que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ não possui solução no conjunto dos números reais. No entanto, é possível estender o conjunto dos números reais de forma que existam soluções que sejam consistentes com as propriedades algébricas mais gerais da Matemática. Este novo conjunto é denominado de conjunto dos números complexos,

sendo representado pela letra $\mathbb{C}$. Um número complexo é um par ordenado (a,b) onde $a,b \in \mathbb{R}$.
Considere as afirmações a seguir:
I. Se $z = 3 + 2i$ e $w = -5 + 2i$, então: $z + w = -2 + 4i = 2 \cdot (-1 + 2i)$
II. Se $z = \sqrt{7} - \sqrt{5}i$ e $w = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$, então: $z \cdot w = 2\sqrt{35} + 2i = 2 \cdot \left(\sqrt{35} + i\right)$
III. Se $z = -3 - 4i$ e $w = 5 - 2i$, então: $\frac{z}{w} = \frac{8}{7} - \frac{2}{7}i$.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA.

a) Apenas a afirmativa III está correta
b) As afirmativas II e III estão corretas
c) As afirmativas I e III estão corretas.
d) Apenas a afirmativa I está correta.
e) As afirmativas I e II estão corretas.

3. O radiano é o ângulo que corresponde a um arco de comprimento igual a um raio.
Lembremos que $2\pi = 360^\circ$.
Considere as afirmações a seguir:
I. O valor de 10° em radianos é igual a $\frac{\pi}{36}$.

II. O valor de 120° em radianos é igual a $\frac{2\pi}{3}$.

III. O valor de 330° em radianos é igual a $\frac{11\pi}{6}$.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA.

a) Apenas a afirmativa III está correta.
b) As afirmativas II e III estão corretas.
c) As afirmativas I e III estão corretas.
d) Apenas a afirmativa I está correta.
e) As afirmativas I e II estão corretas.

Referências

ADAMI, Adriana Morelli; DORNELLES, Filho Adalberto; LORANDI, Magda Mantovani. Pré-Cálculo. Porto Alegre: Bookman, 2015.

AXLER, Sheldon. **Pré-Cálculo** - uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

CONNALLY, Eric et al. **Funções para modelar variações** - uma preparação para o Cálculo. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

DEMANA, Franklin et al. **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

FIALKOSKI, Ricardo. 8 Erros no Excel que fazem você perder a cabeça. **Excel na Web**, 2017. <http://www.excelnaweb.com.br/2017/03/como-corrigir-erros-no-excel.html>. Acesso em: 21 maio 2018.

GUIA DO EXCEL. Compreendendo Mensagens de erros em Fórmulas Excel. 2014. <https://www.guiadoexcel.com.br/compreendendo-mensagens-de-erros-em-formulas-excel/>. Acesso em: 21 maio 2018.

JUNIOR, Jeferson. Os erros mais comuns ao utilizar fórmulas no Excel. **Aprender Excel**, 2017. <https://www.aprenderexcel.com.br/2016/dicas/os-erros-mais-comuns-ao-utilizar-formulas-no-excel>. Acesso em: 21 maio 2018.

KIME, Linda Almgren; CLARK, Judith; MICHAEL, Beverly. **Álgebra na universidade**. Um Curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2014.

MARCONDES, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática**. Série Novo Ensino Médio – Volume único. 6. ed. São Paulo: Ática, 2002.

MELILLO, Kelly Maria de Campos Fornero Abreu de Lima. **Investigações Matemáticas e Trigonometria:** uma abordagem no 1º. Ano do Ensino Médio. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. UFMG. Belo Horizonte, setembro de 2009. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~pgmat/monografias/Mono011.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2018.

MICROSOFT. Suporte do Office. Operadores de cálculo e precedência no Excel. 2018. <https://support.office.com/pt-br/article/operadores-de-c%C3%A1lculo-e-preced%C3%AAncia-no-excel-48be406d-4975-4d31-b2b8-7af9e0e2878a>. Acesso em: 21 maio 2018.

________. **Detectar erros em fórmulas**. 2018. Disponível em: <https://support.office.com/pt-br/article/detectar-erros-em-f%C3%B3rmulas-3a8acca5-1d61-4702-80e0-99a36a2822c1>. Acesso em: 21 maio 2018.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. **Matemática para o Ensino Médio.** 1. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2001.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Maziozeki. **Matemática Educação de Jovens e adultos (EJA)**. Curitiba. Editora Intersaberes. 2016.

OLIVEIRA, Sersana Sabedra; OLEQUES, Nívea Maria Barreto; ANGELO, Claudia Laus. **Brincando com logaritmos:** do desenvolvimento às aplicações. In: XX Eremat ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL. Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC_Oliveira_00467900043.pdf>. Acesso em: 23 maio 2018.

PEREIRA, Adelmar Barros; MUNHOZ, Angélica Vier; QUARTIERI, Marli Teresinha. **Atividades de Investigação Matemática para ensino de trigonometria**. Centro Universitário Univates. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas – Mestrado. Disponível em: <https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2015/atividades_de_investigaCAo_matemAtica_para__ensino_de_trigonometria.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2018.

PEREIRA, Mariana Costa. **Logaritmos**: uma abordagem interdisciplinar. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciências e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos de Goytacazes, 2016. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/25042016Mariana-Costa-Pereira.pdf>. Acesso em: 23 maio 2018.

SAFIER, Fred. **Pré-Cálculo**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011

THOMAS, George et al. **Cálculo**. Volume 1. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

_______. _______. Volume 2. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

TI Expert.net. Operações Matemáticas. 2010. <http://www.tiexpert.net/office/excel/operacoes-matematicas.php>. Acesso em: 21 maio 2018.

Universidade Federal do Pampa. PIbid: Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência. Oficina: Domilog. Disponível em: <http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2012/01/Mat-PDP-Oficina-Domilog.pdf>. Acesso em: 23 maio 2018.

Urs.bira. Manual do Excel. Localizar e corrigir erros em fórmulas do Excel. 2016. <http://urs.bira.nom.br/informatica/office/excel/funcoes_do_excel/localizar_e_corrigir_erros_em_formulas_do_excel.htm>. Acesso em: 21 maio 2018.

Fundamentos gerais sobre funções

Convite ao estudo

Na unidade anterior estudamos conjuntos numéricos, frações, regras de potenciação, operações algébricas, equações de primeiro grau, segundo grau, exponenciais e logarítmicas. Finalizamos a unidade com inequações.

Nesta unidade continuamos nosso estudo de matemática nos dedicando ao estudo das funções afim e quadrática, seno, cosseno e tangente e funções exponencial e logarítmica. Podemos utilizar a função afim para modelar inúmeras situações reais, para citar alguns poucos exemplos, temos a modelagem dos valores a serem pagos em planos de telefonia celular; na tomada de decisão se é mais interessante abastecer o carro com álcool ou gasolina ou estimando o valor da receita de um estacionamento em função da quantidade de carros que utilizam o espaço. Em algumas circunstâncias, a função afim pode ser utilizada para modelar a quantidade de hectares plantados e o ano de plantio. Na Física e na Engenharia, a dilatação térmica de muitos metais (chumbo, alumínio, prata, silício e outros) é modelada por uma função afim.

No caso das funções seno, cosseno e tangente, elas são utilizadas para modelar fenômenos periódicos. Existem situações nas quais podemos utilizar a função seno para modelar a poluição do ar. A função exponencial é útil para descrever o crescimento (ou decrescimento) da população de microorganismos e mesmo outras situações de crescimento/decrescimento na economia e na demografia, por exemplo. Já as funções logarítmicas são úteis para modelar fenômenos em que há uma variação de valores muito grande, como na Geologia (escala Richter para terremotos), na acústica (escala decibel), na medição do pH na Química, a luminosidade ou a escala de brilho das estrelas (Astronomia).

O contexto de aprendizagem para esta unidade considera que você foi contratado por uma empresa de agronomia que presta serviços para uma fazenda que produz cana de açúcar e têm um grande desafio: a fazenda foi dividida em quatro lotes (A, B, C e D) com questões a serem investigadas em cada um deles.

Para facilitar seu trabalho, a investigação foi subdividida em três tarefas. A primeira delas parte da constatação que o lote D vem apresentando queda na sua produção ao longo dos últimos anos. A partir de uma tabela com os dados, você deverá descobrir qual a função matemática que descreve esta queda na produção e, em seguida, a partir de outra tabela, estimar a receita do fazendeiro para os próximos seis anos. A segunda tarefa tem por objetivo modelar matematicamente a produção dos outros três lotes. Por fim, a terceira tarefa parte da identificação que o problema no setor D originou-se de uma doença contagiosa e que está se alastrando de forma exponencial. Sua tarefa é determinar em quanto tempo 15% da plantação estará infectada.

A seguir, descrevemos os conteúdos que serão estudados em cada uma das seções para que você possa superar o desafio proposto.

Na primeira seção estudaremos a função afim e a função quadrática com suas propriedades e aplicações. Na Seção 2.2 veremos as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, incluindo seus gráficos e aplicações. Por fim, na terceira e última seção desta unidade veremos as funções exponencial e logarítmica.

Você sabe como funções matemáticas são utilizadas para modelar desde terremotos, crescimento de microorganismos, produção agrícola e até mesmo o brilho das estrelas? Nesta unidade você verá várias dessas aplicações, portanto, aproveite bastante o material disponibilizado, faça todas as questões e atividades para aprofundar seus conhecimentos e competências no uso da Matemática na modelagem de situações práticas.

Não deixe suas dúvidas se acumularem de uma aula para a outra. Pergunte e participe!

Seção 2.1

Função afim e quadrática e suas aplicações

Diálogo aberto

Nesta seção veremos a função afim e a função quadrática, os respectivos gráficos e aplicações. Para contextualizar sua aprendizagem vamos supor que você tenha sido contratado por uma empresa de agronomia que presta serviços para uma fazenda, a qual produz cana-de-açúcar em quatro lotes: A, B, C e D. Foi identificado um problema no lote D e você recebeu dados de um funcionário da fazenda com a produção da cana dos últimos seis anos.

Ao analisar os dados, você verifica que a produção de cana para o lote D está caindo nos últimos anos. Para uma análise mais precisa, você precisará modelar esse decréscimo na produção a partir de alguma função matemática.

Para facilitar seu trabalho, ele foi dividido em duas etapas:

(a) A partir da tabela 2.1, determine qual é a função que descreve a queda na produção.

Tabela 2.1 | Produção do Lote D (últimos seis anos)

Anos	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Produção (milhares de toneladas)	350	320	290	260	230	200

Fonte: elaborada pelo autor.

(b) Analisando a Tabela 2.2 que informa a receita em função da produção, estime a receita do fazendeiro nos próximos seis anos.

Tabela 2.2 | Receita em função da produção do Lote D (R$ 67/tonelada)

Anos	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Receita (em milhares de R$)	23.450	21.440	19.430	17.420	15.410	13.400

Fonte: elaborada pelo autor.

Para superar o desafio proposto, você deverá dominar os conceitos e as propriedades da função afim e da função quadrática. Entre eles estão como relacionar os dados no formato de tabela com a representação gráfica da função. Sem dúvida você está no caminho certo para ultrapassar mais este desafio. Para que você tenha todas as condições necessárias para esta superação, é importante dedicar-se aos conteúdos desta primeira seção.

Não pode faltar

Funções e a função afim

Ao se usar uma expressão matemática para representar uma situação real, diz-se que estamos modelando matematicamente aquela situação. Um dos principais modelos matemáticos é a função afim.

Definição: denomina-se função afim a uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada pela expressão $f(x)=ax+b$, para todo $x\in\mathbb{R}$ com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

O valor a é denominado de coeficiente angular da função afim e o valor b é o termo independente ou intercepto com o eixo y.

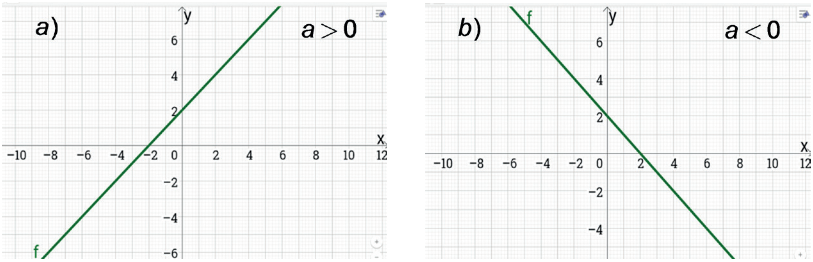
São exemplos de funções afim: a) $f(x)=3x-7$ (neste caso, temos $a=3$ e $b=-7$); b) $f(x)=0,5-\sqrt{2}x$ (neste caso, temos $a=-\sqrt{2}$ e $b=0,5$).

O conjunto domínio de uma função é o conjunto de valores para os quais é permitido realizar o cálculo proposto por aquela função. No caso da função afim, o cálculo consiste em tomar um número real x, multiplicá-lo por um número real não-nulo a e adicionar a este resultado um número real b. Como não há impedimentos para multiplicações e adições (diferentemente para a divisão, por exemplo, na qual não existe divisão por zero), o domínio da função afim é o conjunto dos números reais. Escrevemos, em símbolos, que $D(f)=\mathbb{R}$.

O conjunto Imagem de uma função é o conjunto de resultados obtidos após a aplicação do cálculo proposto por aquela função. No caso da função afim, o cálculo $y=ax+b$ pode resultar em qualquer número real. Assim, o conjunto imagem da função afim é o $\mathbb{R}$. Em símbolos, escrevemos $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$.

O gráfico de toda função afim é uma reta cuja inclinação está associada ao valor do coeficiente angular a. Temos que, se $a > 0$, então o gráfico de $f(x) = ax + b$ é crescente (Figura 2.1a) e se $a < 0$, então o gráfico de $f(x) = ax + b$ é decrescente (Figura 2.1b). Assim, a função $f(x) = 3x - 7$ é crescente e a função $f(x) = 0{,}5 - \sqrt{2}x$ é decrescente. A função plotada na Figura 2.1a é $f(x) = x + 2$, já a função plotada na Figura 2.1b é $f(x) = 2 - x$

Figura 2.1 | Sinal do coeficiente angular e crescimento (a), decrescimento da função afim (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

O termo independente ou intercepto com o eixo y indica o valor que o gráfico de f intercepta o eixo y. Assim, a função $f(x) = 3x - 7$ intercepta o eixo y em -7 e a função $f(x) = 0{,}5 - \sqrt{2}x$ intercepta o eixo y em $0{,}5$.

Reflita

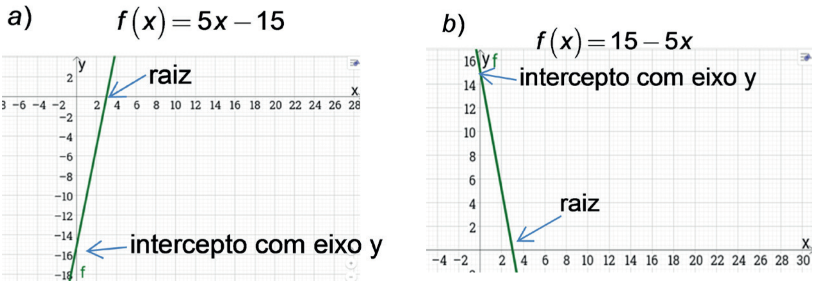
Lembremos que a bissetriz é a semirreta que divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida. O gráfico de $f(x) = x$ é a bissetriz dos quadrantes ímpares. Este gráfico tem como intercepto a origem $b = 0$. Com base nessas informações, como seria o gráfico da função afim $f(x) = x + k,\ k > 0$?

Definição: define-se o zero ou raiz da função afim como o valor x, tal que a $f(x) = ax + b = 0$.

Exemplo: a raiz de $f(x) = 5x - 15$ é obtida fazendo $f(x) = 0$, então, $5x - 15 = 0$, ou seja, $5x = 15$. Logo $x = \frac{15}{5} = 3$. Assim,

$x = 3$ é raiz de $f(x) = 5x - 15$. Graficamente, o zero ou raiz da função afim é o valor do eixo das abscissas (eixo x) interceptado pelo gráfico de f(x).

Figura 2.2 | Raiz da função $f(x) = 5x - 15$ (a), raiz da função $f(x) = 15 - 5x$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja na Figura 2.2a que $f(1) = 5 \cdot 1 - 15 = -10$. Já na função da Figura 2.2b temos $f(1) = 15 - 5 \cdot 1 = 10$.

Reflita

Por que na definição da função afim é feita a suposição de que o coeficiente angular deve ser não nulo?

O coeficiente angular da função afim é associado com a inclinação da reta e é calculado pela razão entre a variação na vertical pela variação na horizontal: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Assim, quanto maior o valor, em módulo, do coeficiente angular, mais inclinada será a reta. Em outras palavras, o coeficiente angular está associado com a velocidade de variação da variável resposta y em relação à variação da variável de entrada x.

Exemplificando

As máquinas, os equipamentos industriais, os computadores, bem como as próprias edificações, desvalorizam-se ao longo do tempo. Em razão de aspectos tributários, é necessário estimar a desvalorização dos equipamentos ao longo dos anos. Um dos modelos matemáticos mais utilizados em cálculos de depreciação é a depreciação linear. Suponha que uma Clínica de Exames Médicos por Imagens adquiriu um equipamento biomédico para imageamento no valor de R$ 80.000,00. A empresa assume que o equipamento é desvalorizado a uma taxa fixa por ano, até que terá valor nulo em 10 anos. Determine a função que apresenta o valor do equipamento ano a ano e apresente uma tabela com os valores do equipamento para os próximos dez anos.

Resolução: para determinar a função que modela a depreciação linear, precisamos determinar o termo independente, b e o coeficiente angular a. Representando a depreciação linear por $f(t) = at + b$ onde t é o número de anos a partir da compra do equipamento, temos que $f(0) = b = 80000$ (valor do equipamento no ano da compra).

O coeficiente angular corresponde à taxa de variação do equipamento ao longo dos dez anos. O valor final do equipamento será R$ 0,00. Então $\Delta y = f(10) - f(0) = 0 - 80000$. Assim, o coeficiente angular é dado por $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-80000}{10} = -8000$. Então, $f(t) = -8000t + 80000$.

A Tabela 2.3 resume o valor do equipamento ao longo dos dez anos:

Tabela 2.3 | Exemplo de depreciação linear

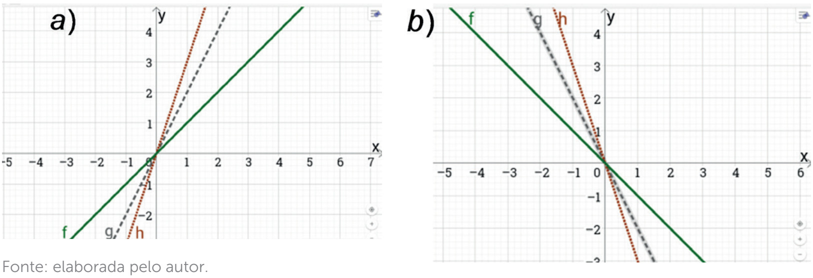
t (anos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t) (R$)	800 00	720 00	640 00	560 00	480 00	400 00	320 00	240 00	160 00	80 00	0

Fonte: elaborada pelo autor.

Quanto maior o valor do coeficiente angular, em módulo, mais inclinada é a reta da função afim. Na Figura 2.3 (a) vemos que o coeficiente angular da função $f(x) = x$ é 1, o coeficiente angular para a função $g(x) = 2x$ é 2 e o coeficiente angular da função

$h(x) = 3x$ é 3. A função $h(x) = 3x$ nesta figura (em pontilhado) é mais inclinada das três (ou seja, a que varia mais rapidamente). Já a função $f(x) = x$ (em linha contínua) é a menos inclinada das três, sendo que a função $g(x) = 2x$ possui inclinação intermediária. Para a Figura 2.3 (b) a função $h(x) = -3x$ apresenta o maior coeficiente angular (em módulo) e, portanto, é a que varia mais rapidamente dentre as três funções desta figura. Confira com a Figura 2.3 para $f(x) = x, g(x) = 2x, h(x) = 3x$ (a) e $f(x) = -x, g(x) = -2x, h(x) = -3x$ (b).

Figura 2.3 | Comparação dos gráficos de funções afim com respeito ao coeficiente angular



Fonte: elaborada pelo autor.

Em outras palavras, podemos dizer que, quanto maior o coeficiente angular, mais rapidamente a função afim cresce (se $a > 0$) ou decresce (se $a < 0$).

Exemplificando

Vejamos como determinar uma função afim a partir de dados apresentados em uma tabela.

Suponha que os dados apresentados na Tabela 2.4 correspondam aos dados de produção de uma indústria de fogões, em milhares de unidades, nos primeiros quatro meses do ano.

a) Qual a função afim que modela tais dados?

b) Utilizando a função determinada no item anterior, apresente uma estimativa para a produção para os próximos quatro meses.

Tabela 2.4 | Exemplo determinando função afim a partir de uma tabela

Mês	janeiro	fevereiro	março	abril
Produção (milhares de unidades)	180	198	216	234

Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

a) Observamos que a taxa de variação entre dois meses consecutivos é constante, caracterizando assim uma função afim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{198-180}{2-1}=\frac{216-198}{2-1}=\frac{216-216}{2-1}=18$$

Determinamos a taxa de variação:

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=18 \text{ milhares de unidades/mês}.$$

Como a função que modela os dados apresentados na Tabela 2.4 é afim, vale que $f(1)=a\cdot 1+b$. Como $f(1)=180$ e $a=18$, temos que $180=f(1)=18\cdot 1+b$ e, então, $b=162$. Portanto, $f(t)=18\cdot a+162$ b) A projeção para os quatro meses seguintes é obtida substituindo-se $t=5,6,7$ e 8 na função acima. Temos a Tabela 2.5:

Tabela 2.5 | Produção para os próximos quatro meses

Mês	janeiro	fevereiro	março	abril	maio	junho	julho	agosto
Produção (milhares de unidades)	180	198	216	234	252	270	288	306

Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Você poderá conhecer outras aplicações envolvendo a função afim consultando, na Biblioteca Integrada, a seção 2.5 "Exemplos reais de uma taxa de variação constante" da obra seguir:

Kime, Linda Almgren; Clark, Judith; Michael, Beverly. **Álgebra na universidade.** Um Curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2014.

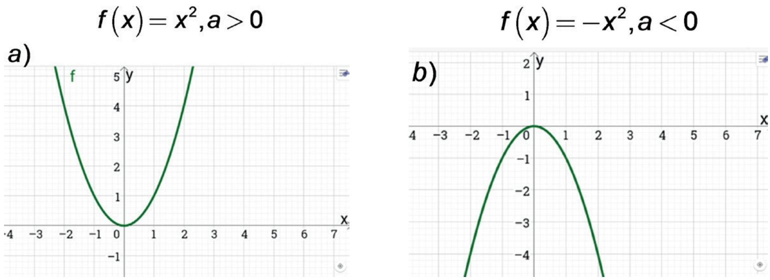
Função quadrática

Definição: chama-se de função quadrática ou função do 2º grau uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. São exemplos de funções do 2º grau: a) $f(x)=-x^2+2x$ $(a=-1, b=2, c=0)$; b) $f(x)=2x^2-0{,}15x+1{,}73$ $(a=2,\ b=-0{,}15,\ c=1{,}73)$.

O conjunto domínio da função quadrático é o conjunto $\mathbb{R}$ visto que podemos efetuar o cálculo ax^2+bx+c com qualquer número real x.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola e ela terá a concavidade voltada para cima ou para baixo dependendo do sinal do coeficiente a. Se $a>0$ então a concavidade será voltada para cima (Figura 2.4a) e se $a<0$, a concavidade será voltada para baixo (Figura 2.4b).

Figura 2.4 | Concavidade da função quadrática para cima (a), e para baixo (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

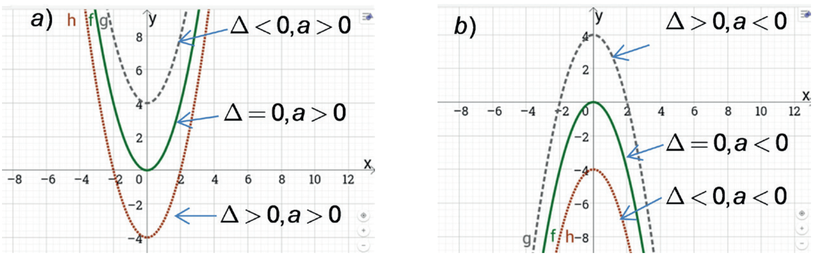
Reflita

Considere o gráfico de $f(x)=x^2$. Como é o gráfico da função $f(x)=x^2+k,\ k>0$? E qual o impacto sobre o gráfico de $f(x)=x^2$ se subtrairmos a constante k: $f(x)=x^2-k,\ k>0$?

As raízes da função quadrática são os valores $x\in\mathbb{R}$, tais que $f(x)=0$. As raízes x_1 e x_2 da função quadrática podem ser obtidas a partir das expressões $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

O sinal do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) aponta se a função quadrática possui duas raízes reais e distintas ($\Delta > 0$), se possui uma raiz real dupla (caso em que $\Delta = 0$) ou se não possui raízes reais (caso em que $\Delta < 0$). Como as raízes são os valores para os quais o gráfico da função intercepta o eixo x, a partir do sinal do delta sabemos quantas vezes o gráfico de uma função quadrática intercepta o eixo x. Na Figura 2.5 apresentamos gráficos com as funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 4$, $f_3(x) = x^2 - 4$, $f_4(x) = -x^2$, $f_5(x) = -x^2 + 4$ e $f_6(x) = -x^2 - 4$. Destacamos que a função $f_1(x) = x^2$ possui raiz dupla $x_1 = x_2 = 0$. Você pode verificar que esta função encosta no eixo x em um único ponto. Já a função $f_3(x) = x^2 - 4$ possui duas raízes reais e distintas: $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$. Podemos visualizar isto graficamente ao observar que $f_3(x)$ intercepta o eixo x nestes dois valores. As funções na Figura 2.5a são $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 4$, $h(x) = x^2 - 4$ e na Figura 2.5b $f(x) = -x^2, g(x) = -x^2 + 4, h(x) = -x^2 - 4$.

Figura 2.5 | Sinal do discriminante (Δ) versus sinal do coeficiente a

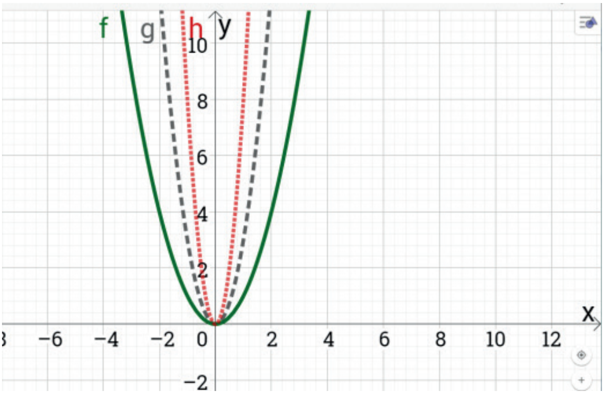


Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na Figura 2.5a que a adição da constante $k = 4$ à função $f(x) = x^2$ resulta em $g(x) = x^2 + 4$. O gráfico de $g(x) = x^2 + 4$ corresponde ao deslocamento verticalmente para cima do gráfico de $f(x)$. Já o gráfico $h(x) = x^2 - 4$ corresponde ao deslocamento verticalmente para baixo do gráfico de $f(x)$. Deslocamentos similares ocorrem, na figura 2.5b, para $f(x) = -x^2$. Observe ainda que multiplicar uma função por (-1) corresponde a efetuar uma rotação do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo das abscissas (eixo x).

Conforme o valor do coeficiente a da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ aumenta, o gráfico de f fica mais alongado no sentido vertical. À medida que o valor do coeficiente a aproxima-se de zero, o gráfico de f ficará mais aberto no sentido vertical. Confira com a Figura 2.6 as funções representadas: $f(x) = x^2,\ g(x) = 3x^2,\ h(x) = 8x^2$.

Figura 2.6 | Comportamento do gráfico da função quadrática conforme aumente o coeficiente a



Fonte: elaborada pelo autor.

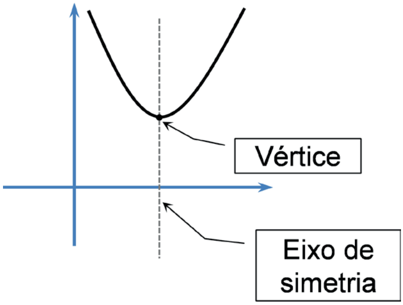
Simetria do gráfico da função quadrática e o vértice

Uma propriedade importante do gráfico da função quadrática é seu eixo de simetria.

Vértice da parábola

O ponto de encontro entre a parábola e seu eixo de simetria é conhecido como vértice da parábola. O vértice da parábola é um ponto de máximo quando a parábola possui concavidade voltada para baixo e é um ponto de mínimo quando a concavidade é voltada para cima.

Figura 2.7 | Eixo de simetria da parábola e vértice



Fonte: elaborada pelo autor.

As coordenadas do vértice são dadas por $V = (x_v; y_v) = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a} \right) \right) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right)$. Esta relação será demonstrada quando estudarmos Cálculo Diferencial.

Exemplificando

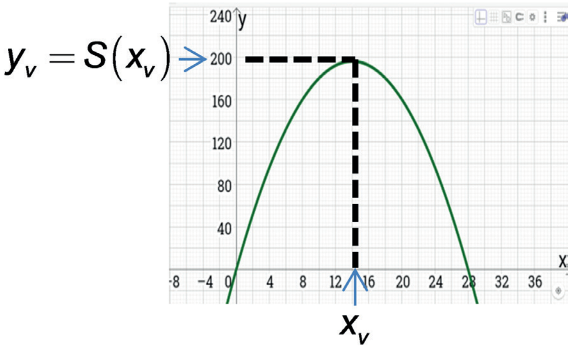
Considere que na empresa em que você trabalha utilizam-se chapas de aço cujo perímetro é de 56 cm, com comprimento x e largura y. Quais devem ser os valores para x e y para que a área da chapa seja a maior possível?

Resolução:

A área da chapa é dada simplesmente pelo produto do comprimento pela largura: $S = xy$. Como o perímetro é igual a 56 cm, vale que $2x + 2y = 56$. Assim, $x + y = 28$. Então $y = 28 - x$.

Assim, $S = x(28 - x) = -x^2 + 28x$ é uma função quadrática com $a = -1, b = 28, c = 0$. A coordenada $x_v = -\frac{b}{2a}$ representa o valor x associado à máxima área da chapa. A coordenada $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ representa a área máxima da chapa. Este valor não foi solicitado na questão.

Figura 2.8 | A máxima área ocorre no vértice da parábola



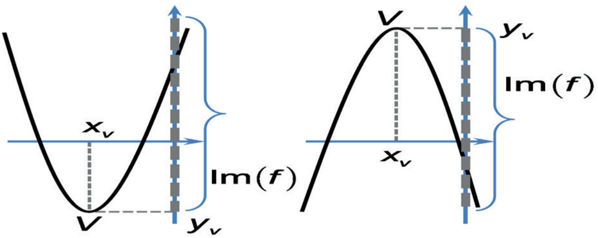
Fonte: elaborada pelo autor.

Determinar o valor x que maximiza a área significa determinar a coordenada x_v : $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2\cdot(-1)} = \frac{-28}{-2} = 14$. Logo, a largura y da chapa é dada por $y = 28 - 14 = 14$. Assim, os valores que maximizam a área correspondem a um quadrado de comprimento $x = 14$ cm e largura $y = 14$ cm.

A coordenada y_v é importante para determinarmos o conjunto imagem da função quadrática.

Se a concavidade da parábola for voltada para cima ($a > 0$), a função quadrática possui um valor mínimo que é dado por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, assim, a função quadrática assume valores $y \geq y_v$. Portanto, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$. Por outro lado, se a concavidade da parábola for voltada para baixo ($a < 0$), a função quadrática assume valores $y \leq y_v$. Logo, neste caso, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$. Confira com a Figura 2.9.

Figura 2.9 | Coordenada <<Eqn142.eps>> e o conjunto imagem da função quadrática



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Em vez de simplesmente memorizar que a coordenada $x_v = -\frac{b}{2a}$, é mais simples lembrar que, da propriedade de simetria apresentada na Figura 2.7, a coordenada x_v corresponde ao ponto médio entre as raízes da função quadrática (se existirem). Assim:

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{2} = \frac{\frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Não tente memorizar a expressão para a coordenada y do vértice. Basta substituir x_v na função para obter a correspondente coordenada do y_v:

$$y_v = f(x_v) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Sem medo de errar

Vamos relembrar o problema que você deve resolver na empresa de agronomia: você foi contratado por uma empresa de agronomia prestadora de serviços para fazendas. Em uma destas fazendas produz-se cana-de-açúcar em quatro lotes: A, B, C e D, sendo que o lote D vem apresentando problemas nos últimos seis anos, com queda na produção. Os dados da produção nestes últimos seis anos estão na Tabela 2.1. A Tabela 2.2 apresenta a receita em função da produção. Você deverá estimar a receita do fazendeiro para os próximos seis anos.

Resolução:

a) Lembremos a Tabela 2.1

Tabela 2.1| Produção do Lote D (últimos seis anos)

Anos	2013	2014	2015	2016	2017	2018
produção (milhares de toneladas)	350	320	290	260	230	200

Fonte: elaborada pelo autor.

Observamos que os dados da Tabela 2.1 podem ser modelados por uma função afim, pois a taxa de variação é constante: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{320-350}{2-1} = \frac{290-320}{3-2} = \frac{260-290}{4-3} = \frac{230-260}{5-4} = \frac{200-230}{6-5} = -30$. Assim, o coeficiente angular é $a = -30$ em milhares de toneladas por ano. Como trata-se de uma função afim, vale que $P(t) = -30 \cdot t + b$. Como em 2013 a produção foi de 350 toneladas, temos que $P(1) = -30 \cdot 1 + b = 350$. Portanto, $b = 350 + 30 = 380$.

A função que modela os dados da Tabela 2.4 é $P(t) = -30 \cdot t + 380$.

b) Observamos que a taxa de variação para os dados da Tabela 2.5 também é constante: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21440-23450}{2-1} = \frac{19430-21440}{3-2} = ... = \frac{13400-15410}{6-5} = -2010$. Representamos a função afim para a Receita por $R(t)$.

De forma análoga ao que fizemos no item a) determinamos que $R(t) = -2010 \cdot t + b$. Então $R(1) = -2010 \cdot 1 + b = 23450$. Portanto $b = 23450 + 2010 = 25460$. Logo, a função afim que modela a produção é $R(t) = -2010 \cdot t + 25460$. Substituindo os valores t = 2019, 2020, 2021, 2022, 2023 e 2024 estimamos os valores da receita para os próximos seis anos. A Tabela 2.6 apresenta a receita para os próximos seis anos.

Tabela 2.6 | Estimativa de receita para os próximos seis anos

Anos	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Receita (em milhares de R$)	11.390	9.380	7.370	5.360	3.350	1.340

Fonte: elaborada pelo autor.

A empresa utilizará o gráfico para apontar ao agricultor a necessidade de investigar a causa da queda na produção deste lote. Após esta investigação o produtor solicita ainda que a produtividade dos outros lotes também seja avaliada.

Avançando na prática

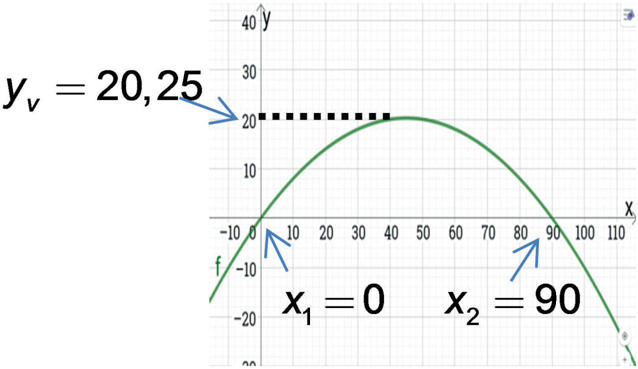
Estufa industrial

Descrição da situação-problema

Você está atuando em uma fábrica de produtos biomédicos como consultor de Métodos Quantitativos. Ao serem introduzidos novos equipamentos na linha de produção ou com a adoção de novos processos, calibragens e ajustes nos equipamentos são necessários.

Vocês receberam uma nova estufa industrial e nas instruções do equipamento é informado que a temperatura (em graus Celsius x 100) na estufa segue o comportamento descrito pela função quadrática visualizada na Figura 2.10, onde x corresponde ao tempo (em minutos) em que a estufa está ligada e estão indicados os valores de tempo para os quais a temperatura da estufa é nula.

Figura 2.10 | Temperatura da estufa em graus Celsius x 100 em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, o manual também informa que, por motivos de segurança, após um certo número de minutos ligada, a estufa começa um processo de resfriamento automático.

Você precisa descobrir a temperatura máxima atingida pela estufa, o tempo decorrido entre a estufa atingir a temperatura máxima e voltar à temperatura de $0°C$ e a função matemática que representa a temperatura da estufa ao longo do tempo.

Resolução da situação-problema

A temperatura máxima da estufa é dada pela coordenada y_v. Este valor é obtido diretamente do gráfico: $y_v = 20{,}25$. Como a temperatura está em graus Celsius x 100, a temperatura máxima é igual a $20{,}25 \cdot 100°C = 2025°C$

Para determinar quanto tempo a estufa leva para resfriar após atingir a temperatura máxima, usamos a simetria da parábola. Os valores de tempo para os quais a temperatura da estufa é nula são as raízes da função quadrática: $x_1 = 0$ min e $x_2 = 90$ min, e sabemos pelo item *Assimile*, logo após a Figura 2.9, que a coordenada x_v corresponde ao ponto médio entre as raízes da função quadrática: $x_v = \frac{0+90}{2} = 45$. Assim, a estufa leva quarenta e cinco minutos da temperatura nula até a temperatura máxima e quarenta e cinco minutos da temperatura máxima até o resfriamento completo.

Falta determinarmos a função matemática que modela a temperatura da estufa. Isto corresponde a determinar os coeficientes a, b e c da função quadrática.

Como o intercepto da parábola com o eixo y é zero, temos que $c = 0$.

Sabemos, do item *Não pode faltar* que $x_v = -\frac{b}{2a}$. Determinamos que $x_v = 45$. Assim, $-\frac{b}{2a} = 45$. Logo $b = -90a$ >>.

Também do *Não pode faltar*, lembramos que $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4 \cdot a}$. Como nesta questão $y_v = 20{,}25$ temos que $-\frac{b^2}{4 \cdot a} = 20{,}25$ (lembre-se que $c = 0$. Temos uma segunda equação relacionando os coeficientes a e b: $b^2 = -81a$. Elevando ao quadrado $b = -90a$, temos $b^2 = 8100a^2$ e igualando com $b = -90a$, temos $8100a^2 = -81a$. Portanto,

$$a = -\frac{81}{8100} = -0{,}01$$

Substituindo o valor $a = -0,01$ em $b^2 = -81a$, e obtemos $b = 0,9$.

Concluindo, a função quadrática que representa a temperatura da estufa é $f(x) = -0,01x^2 + 0,9x$

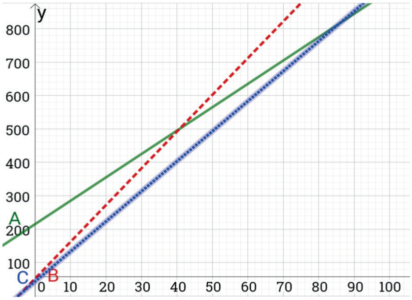
Faça valer a pena

1. Em 2003 foi identificado um número elevado de Síndrome Respiratória Aguda Severa (SRAS) em Hong Kong. O número N de casos após o dia 17 de março de 2003 pode ser modelado pela função afim $N = 78,9 + 30,1t$, onde t representa o número de dias após o dia 17 de março de 2003 (CONNALLY; HUGHES-HALLET, 2009).

Assinale a alternativa correta:
a) O número de casos 30 dias após 17 de março é menor que o número de casos 25 dias após o dia 17 de março.
b) O coeficiente angular 30,1 pode ser interpretado como o número inicial de casos.
c) O intercepto com o eixo y 78,9 pode ser interpretado como a quantidade de novos casos por dia.
d) De acordo com o modelo matemático apresentado, o número de casos de SRAS estimado para o dia 27 de março de 2003 é de aproximadamente 380 casos.
e) Como o coeficiente angular é positivo, esta função é estritamente crescente, portanto, não possui raízes reais.

2. Considere que uma empresa possui três fábricas A, B e C e três cenários de investimento na modernização tecnológica de apenas uma das fábricas. Por restrições técnicas nas plantas de produção no cenário 1, ela poderá investir 30 milhões de reais, no cenário 2, 50 milhões ou, no último cenário, 70 milhões de reais.
A equipe de Planejamento Estratégico da empresa apresentou o gráfico a seguir com a produção resultante (em milhares de toneladas por mês) de chapas metálicas em cada uma das fábricas onde x representa o investimento, em milhares de reais, realizado no mês zero de referência.

Figura 2.11 | Resultado do aumento de produção com investimento em cada uma das fábricas



Fonte: elaborada pelo autor.

Avalie as afirmações abaixo:

I. A fábrica com o melhor resultado do investimento de 30 milhões de reais é a fábrica B.

II. Para um investimento de 50 milhões de reais a fábrica A apresenta um resultado intermediário entre as outras duas fábricas.

III. A fábrica C apresenta o melhor resultado do investimento de 70 milhões de reais.

IV. Para um investimento de 30 milhões de reais, as fábricas B e C apresentam resultado inferior ao da fábrica A.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa IV está correta.

b) As afirmativas II e III estão corretas.

c) As afirmativas II e IV estão corretas.

d) As afirmativas I, II e IV estão corretas.

e) Apenas a afirmativa I está correta.

3. Na empresa onde você atua na área de Métodos Quantitativos é envasado óleo de cozinha. Suponha que o preço de cada vasilha seja dado pela expressão $p = 500 - 0,02x$ (reais/unidade) onde x representa a quantidade de vasilhas.

A quantidade de latas que deve ser vendida para maximizar a receita e a receita máxima em reais são respectivamente:

a) 10.000 e 4.250.000.

b) 12.500 e 5.750.000.

c) 25.000 e 2.850.000.

d) 12.500 e 3.125.000.

e) 18.000 e 4.125.000.

Seção 2.2

Funções trigonométricas e suas aplicações

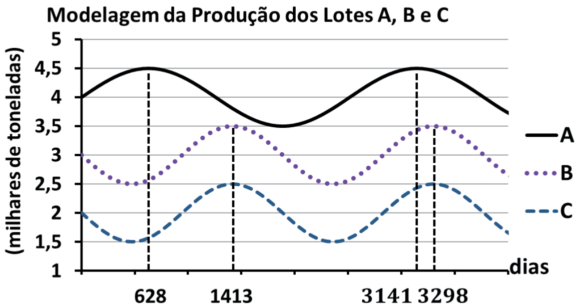
Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos a função afim e a função quadrática. Vimos o comportamento dos gráficos destas duas funções conforme seus coeficientes são modificados, aprendemos também como reconhecer uma função afim a partir de dados apresentados em forma de tabela.

Nesta seção veremos as funções seno, cosseno e tangente. Após ter atingido os objetivos propostos na resolução do problema da seção anterior, a empresa de agronomia em que você trabalha solicitou novas tarefas. Como trata-se de produção agrícola, se tudo estiver ocorrendo dentro da normalidade, existe uma sazonalidade natural na produção. Espera-se que, se a produção estiver ocorrendo dentro da normalidade, exista uma periodicidade nos dados de produção. Em razão destas considerações, justificou-se o estudo de funções matemáticas próprias para tratar fenômenos periódicos, que são as funções seno, cosseno e tangente, as quais serão estudadas nesta seção. Observe que este estudo não se aplica apenas a questões agrícolas. Funções periódicas ocorrem no estudo de fenômenos elétricos, nas telecomunicações, na variação da temperatura ao longo do dia (e mesmo ao longo de um ano) com impactos na construção civil e mesmo nas horas pico e horas vale no trânsito e transporte em uma cidade ou estrada.

Na seção anterior você identificou um problema no lote D da fazenda. Para detectar eventuais problemas nos outros lotes, você decidiu analisar os dados relativos a estes lotes. Os dados foram enviados em um arquivo Excel, no qual na coluna A estão elencados os dias nos quais foram coletados os dados e nas colunas B, C e D estão os dados para os lotes A, B e C. Você deverá modelar a produção nestes três lotes identificando a função que modela os dados para cada lote e responder se essa função explica um comportamento normal.

Figura 2.12 | Produção dos Lotes A, B e C



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que você tenha os elementos necessários para resolver o problema da fazenda, serão apresentadas nesta seção as funções seno, cosseno e tangente, veremos também transformações nestas funções e seu impacto no conjunto imagem, na amplitude, no período e nos gráficos de cada uma delas. Temos certeza que você tem todas as condições para superar mais este desafio.

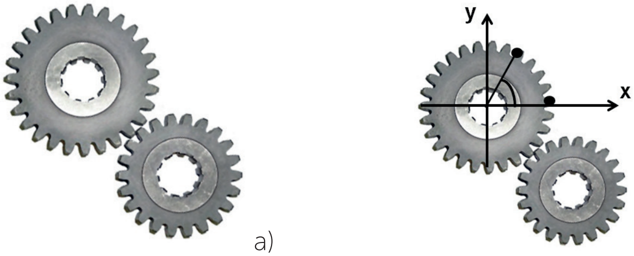
Não pode faltar

Função seno

Você já estudou seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Também deve se recordar de ter estudado o ciclo trigonométrico. O que faremos nesta seção é ampliar as definições de seno, cosseno e tangente válidas no triângulo retângulo (ângulos até 90º).

Considere que você está estudando uma engrenagem de raio igual a 10 centímetros em um equipamento mecânico, como ilustrado na Figura 2.13a. Para que você possa localizar a posição da engrenagem à medida que ela gira, você fez um ponto e inseriu um sistema de coordenadas para representar a posição deste ponto à medida que a peça gira. Em função da projeção de forças na peça, você está interessado no seno do ângulo que a engrenagem faz com a horizontal. Isso significa que você está associando ângulos a valores de seno. Mas, agora, como a engrenagem efetua uma infinidade de voltas, esses valores de seno se repetirão indefinidamente. A associação destes valores de ângulos com o respectivo seno define a função seno: $f(x) = sen(x)$.

Figura 2.13a | Engrenagem (a), engrenagem com sistema cartesiano e ponto referência (b)



Fonte: adaptada de <https://goo.gl/2rCUn9>. Acesso em: 23 jul. 2018.

Interessa-nos, para estudar o comportamento da engrenagem enquanto gira, a projeção do ponto em destaque no eixo y. Este valor corresponde ao seno dos ângulos x. Podemos representar o seno dos ângulos x pela função $y = f(x) = sen(x)$, obtendo então o gráfico da função seno. No exemplo a seguir, mostramos como obter os valores numéricos para a função seno.

Exemplificando

Conforme a engrenagem gira, a cada ângulo do ponto destacado associamos o respectivo valor do seno. Veja a Tabela 2.7 com valores numéricos para exemplificar.

Tabela 2.7 | Valores numéricos da função seno para meia volta (a), uma volta inteira (b) e início da segunda volta (c)

a)

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Sen (x)	0	0,5	0,707	0,866	1	0,866	0,707	0,5	0

b)

x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sen (x)	0	-0,5	-0,707	-0,866	-1	-0,866	-0,707	-0,5	0

c)

x	390°	420°
Sen (x)	0,5	0,707

Note que, à medida que damos mais e mais voltas, os valores numéricos se repetirão. Assim, teremos uma função periódica (ou seja, seu gráfico se repetirá em "blocos" idênticos no intervalo de $0°$ a $360°$). Você pode conferir os valores numéricos acima na sua calculadora ou no Excel. Na Figura 2.14 apresentamos como foi obtida esta tabela no Excel. Recomendamos que você a reconstrua para verificar as afirmações anteriores.

Figura 2.14 | Valores numéricos da função seno no Excel

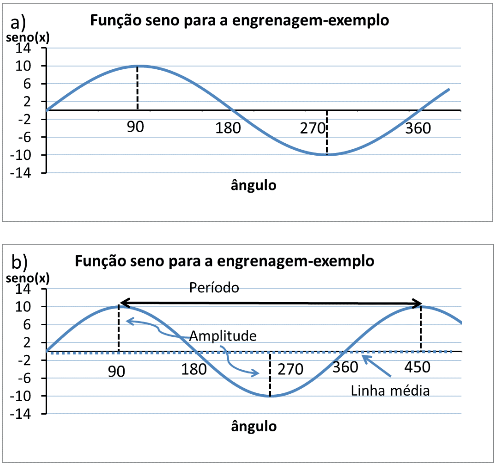
	A	B	C	D	E	F
1						
2		x (em graus)	0	30	45	60
3		y=sen(x)	=SEN(RADIANOS(C2))	=SEN(RADIANOS(D2))	=SEN(RADIANOS(E2))	=SEN(RADIANOS(F2))
4						

Fonte: captura de tela do Excel elaborada pelo autor.

Após calcularmos os valores numéricos para a função seno podemos construir o gráfico da função seno apresentado nas Figuras 2.15a e 2.15b.

O gráfico da função seno, desenvolvido a partir dos valores numéricos da Tabela 2.7, para a engrenagem-exemplo está nas Figuras 2.15a e 2.15b. Vemos a partir dos Gráficos 2.15a e 2.15b os seguintes elementos importantes do gráfico da função seno: período, amplitude e linha média. Posteriormente veremos que tais elementos também possuem a mesma interpretação na função cosseno.

Figura 2.15 | Seno para a engrenagem-exemplo (a), Período, Linha Média e Amplitude (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Observamos na Figura 2.15a que a função seno para a engrenagem-exemplo varia entre um mínimo de -10 e um máximo de 10. A metade da distância entre o máximo e o mínimo é denominada de amplitude da função. As duas flechas verticais na Figura 2.15b indicam a amplitude desta função. A amplitude da função seno, neste exemplo é igual a $A=\frac{10-(-10)}{2}=10$. Se representarmos o valor máximo da função seno por f_{max} e seu valor mínimo por $f_{mín}$ então a fórmula geral para o cálculo da amplitude é $A=\frac{f_{max}-f_{mín}}{2}$.

Reflita

Como se comporta a amplitude da função seno se utilizarmos uma engrenagem de raio 15 cm? E se utilizarmos uma engrenagem de raio 5 cm?

A distância entre dois pontos sucessivos de mínimo (ou de máximo) é conhecida como período da função. Neste caso, temos que o período é $450°-90°=360°$. Lembremos que a frequência é o inverso do período, $f=\frac{1}{T}$. Assim, se a engrenagem girar mais rápido, aumentará a frequência com que o ponto em destaque passa pelo ponto de coordenadas $(15;0)$ e diminuirá o período. Se o período for dividido pela metade, a frequência dobrará.

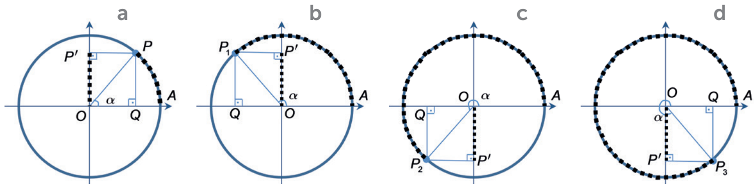
A linha que se encontra no valor médio entre o máximo 10 e o mínimo -10 é conhecida como linha média da função seno. Neste exemplo, a linha média coincide com o próprio eixo x. Quando a função seno é deslocada verticalmente para cima ou para baixo, a linha acompanha o deslocamento.

Agora que já vimos a função seno de um ponto de vista informal, vejamos sua definição de um ponto de vista formal.

Considere o triângulo retângulo OPQ no ciclo trigonométrico da Figura 2.16a. Devemos lembrar que o raio no ciclo trigonométrico possui medida igual a um, então, neste triângulo retângulo temos que $\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{PQ}{1}$. Observe que os segmentos PQ e OP' possuem mesma medida.

Dessa forma, se deslocarmos o ponto P ao longo do ciclo trigonométrico, o seno de cada arco corresponde à projeção, no eixo vertical, de cada arco. Confira com as Figuras 2.16b, 2.16c e 2.16d.

Figura 2.16 | Extensão do seno para o ciclo trigonométrico



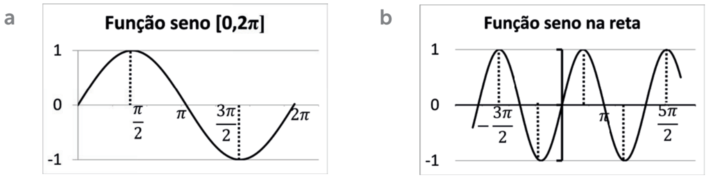
Fonte: elaborada pelo autor.

Definição (seno de um arco): considere, no ciclo trigonométrico da Figura 2.16a, o arco AP com medida, em radianos, igual a x e a projeção, no eixo vertical deste arco, representada pelo segmento OP'. O segmento OP' é a projeção do raio OP sobre o eixo vertical. Define-se o seno de x como sendo o comprimento OP' e escreve-se $\text{sen}(x) = OP'$. Denomina-se o eixo vertical no ciclo trigonométrico de eixo dos senos.

Após definirmos a função seno para um arco, estamos em condições de definir a função seno para qualquer número $x \in \mathbb{R}$.

Definição (função seno): seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer número real x pode ser associado a um arco de mesmo comprimento no ciclo trigonométrico. Como para cada arco de comprimento x existe um único número real $y = \text{sen}(x)$, onde $\text{sen}(x)$ é o seno do arco de comprimento x, podemos definir a função seno de x por $f : x \to y$, onde para x em graus escrevemos $x = \alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ ou para x representado em radianos, escrevemos $x = \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $y = \text{sen}(x)$. Na Figura 2.17a temos o gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$ e na Figura 2.17b o gráfico da função seno na reta.

Figura 2.17 | Gráfico da função seno em $[0, 2\pi]$ (a), gráfico da função seno na reta (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Recordemos que o domínio de uma função é o conjunto de valores para os quais a função está definida, ou seja, para os quais “podemos fazer o cálculo que não dá erro”. Se você digitar na sua calculadora ou no Excel $\sqrt{-5}$ ou $\frac{3}{0}$ você verá que aparecerão mensagens de erro (experimente!). Já para a função seno, não temos restrição alguma em todo o conjunto dos números reais. Portanto, dizemos que o domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$.

Recordemos o conjunto imagem: ele é o conjunto de “chegada” da função, ou seja, os valores de resposta para aquela função. Você pode testar na sua calculadora ou no Excel que, qualquer que seja o número x que utilizemos, o valor $sen(x)$ será sempre um valor entre -1 e 1 (inclusive estes dois valores). Assim, dizemos que o conjunto imagem da função $f(x) = \text{sen}(x)$ é o intervalo fechado $[-1,1]$. Observe que o “1” é o maior valor no conjunto imagem. Assim, a função $f(x) = \text{sen}(x)$ nunca será maior que 1, ou seja, $sen(x) \leq 1$. Por outro lado, temos que “-1” é o menor valor do conjunto imagem $[-1,1]$. Assim, $sen(x) \geq -1$. Juntando essas duas informações relativas ao conjunto imagem, temos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$. Como os valores da função seno se repetem a cada volta no ciclo trigonométrico, a função seno é periódica de período 2π radianos $360°$ se estivermos medindo os ângulos em graus.

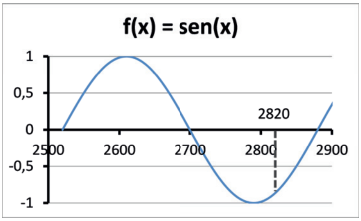
Exemplificando

Neste exemplo veremos como determinar o seno de ângulos maiores que $360°$ (ou 2π radianos).

a) Determine o valor de $\text{sen}(2820°)$.

Verifique na Figura 2.18 a visualização de $\text{sen}(2820°)$.

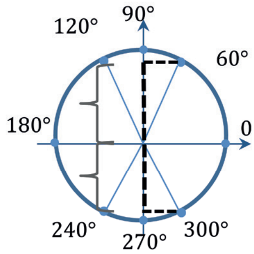
Figura 2.18 | Visualização do valor $\text{sen}(2820°)$ no gráfico da função seno



Fonte: elaborada pelo autor.

Dividindo $2820°$ por $360°$ obtemos $\dfrac{2820}{360} = 7{,}8333...$ Ou seja, o ângulo de $2820°$ corresponde a sete voltas inteiras mais $0{,}833$ de volta. Multiplicando $0{,}833$ por $360°$ obtemos $300°$. Assim, temos que $2820°$ corresponde a dar sete voltas completas no sentido anti-horário e somar $300°$: os arcos $2820°$ e $300°$ são congruentes. Assim, $\operatorname{sen}(2820°) = \operatorname{sen}(300°)$. Para valores de ângulos entre $180°$ e $360°$ o seno é negativo. O valor do seno localiza-se no eixo y. Observamos na Figura 2.19 que o $\operatorname{sen}(300°) = -\operatorname{sen}(60°)$ (ambos os segmentos verticais tracejados possuem igual comprimento). Sabemos da tabela dos valores do seno para ângulos notáveis que $\operatorname{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Figura 2.19 | Ilustração que $\operatorname{sen}(300°) = -\operatorname{sen}(60°)$

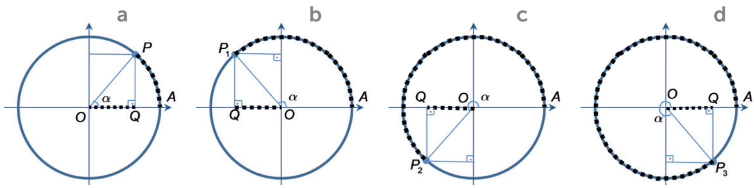


Fonte: elaborada pelo autor.

Função cosseno

De forma similar à que foi feita para o seno de um arco no ciclo trigonométrico, podemos definir o cosseno de um arco. O cosseno de um arco no ciclo trigonométrico corresponde à projeção de cada arco no eixo horizontal. Assim, o cosseno do arco AP corresponde ao comprimento do segmento OQ.

Figura 2.20 | Extensão do cosseno para o ciclo trigonométrico

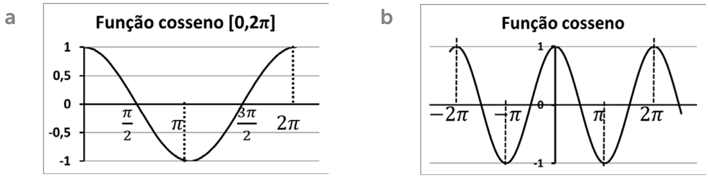


Fonte: elaborada pelo autor.

Definição (cosseno de um arco): para o cosseno de um arco nos referimos à Figura 2.20 (a), (b), (c) e (d). O cosseno de um arco funciona de forma similar ao seno de um arco. Denomina-se o eixo horizontal no ciclo trigonométrico de eixo dos cossenos.

Definição (função cosseno): seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer número real x pode ser associado a um arco de mesmo comprimento no ciclo trigonométrico. Como para cada arco de comprimento x existe um único número real $y = cos(x)$, onde $\cos(x)$ é o cosseno do arco de comprimento x, podemos definir a função cosseno de x por $f : x \to y$, onde escrevemos $x = \alpha + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ para x em graus e $x = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ e $y = cos(x)$. Na Figura 2.21a temos o gráfico da função cosseno no intervalo e na Figura 2.21b o gráfico do cosseno na reta.

Figura 2.21 | Gráfico cosseno em <<Eqn097.eps>>(a), gráfico cosseno na reta (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

O período de uma função é o menor intervalo entre dois valores no eixo x para que o gráfico da função se repita. Assim, no caso das funções seno e cosseno, o período é 2π.

A amplitude das funções seno ou cosseno é a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de cada uma destas funções.

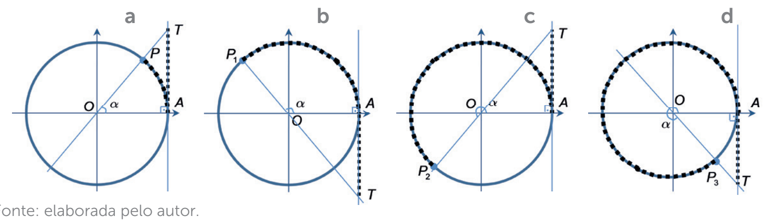
O domínio e o contradomínio da função cosseno é o conjunto $\mathbb{R}$. O conjunto imagem da função $f(x) = cos(x)$ é o intervalo $[-1,1]$. Como os valores da função cosseno se repetem a cada volta no ciclo trigonométrico, a função seno é periódica de período 2π.

Função tangente

Considere a Figura 2.22a. A reta tangente ao ciclo trigonométrico que passa pelos pontos A e T é denominada eixo das tangentes.

Considere o ângulo α indicado nesta figura e a reta que passa pela origem e pelo ponto P. Esta reta intercepta o eixo das tangentes no ponto T. O segmento de comprimento AT é a tangente do ângulo α. Observe que, à medida que este ângulo aproxima-se de $90°$, o segmento AT aumenta de tamanho de tal forma que, para $\alpha = 90°$ (ou, em radianos, para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, este segmento teria um comprimento infinito. Como isto não é possível, dizemos que a função tangente não existe para o ângulo $\alpha = 90°$. Veja agora a Figura 2.22b. Nesta figura estamos considerando ângulos tais que $90° < \alpha < 180°$. Observe que agora o segmento AT está orientado para baixo. Quando os valores de α aproximam-se do ângulo $180°$ o comprimento do segmento AT aproxima-se de zero, até que, para $\alpha = 180°$ teremos que a medida do segmento AT é zero, ou seja, $\tan(180°) = 0$. Se estivermos trabalhando com radianos, isso é equivalente a afirmar que $\tan(\pi) = 0$. Continuando com a Figura 2.22c, teremos ângulos $180° < \alpha < 270°$. Quando o ângulo α aproxima-se de $\alpha = 270°$, novamente o segmento AT terá comprimento cada vez maior tendendo ao infinito, de tal forma que a função tangente também não estará definida (ou seja, não existe) para $\alpha = 270°$. Por fim, na Figura 2.22d concluímos a volta do ciclo trigonométrico de tal forma que, para ângulos α cada vez mais próximos de $360°$, o comprimento do segmento AT aproxima-se de zero novamente, de tal forma que $\tan(360°) = 0$, ou se estivermos trabalhando em radianos, $\tan(2\pi) = 0$.

Figura 2.22 | Tangente de um ângulo α no primeiro quadrante (a); no segundo (b); no terceiro (c) e no quarto (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

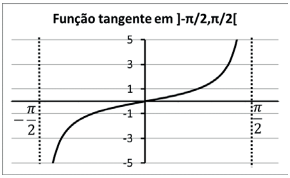
Definição (função tangente): seja $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$. Qualquer número real $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ pode ser associado a um arco de mesmo comprimento no ciclo trigonométrico. Como para cada arco de comprimento x existe um único número real $y = \tan(x)$, onde $\tan(x)$ é a tangente do arco de comprimento x, podemos definir a função tangente de x por $f : x \to y$, onde $x = \alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ se estivermos medindo x em graus; e $x = \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ se x estiver em radianos e $y = \tan(x)$.

Observe que para os ângulos $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a função tangente não está definida. Você pode verificar numericamente em uma calculadora ou no Excel que tais pontos não pertencem ao domínio da função tangente tentando calcular o valor de $\tan(90°)$ ou $\tan(270°)$ ou para ângulos congruentes a estes dois.

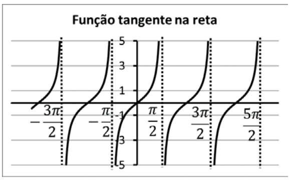
Na Figura 2.23 temos o gráfico da função tangente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (a) e na reta (b).

Figura 2.23 | Função tangente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (a), função tangente na reta (b)

a



b



Fonte: elaborada pelo autor.

O domínio da função tangente é o conjunto $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ e a imagem é o conjunto dos números reais. Observe na Figura 2.23b que o gráfico da tangente repete-se a cada intervalo de comprimento π. Logo, a função tangente possui período igual a π.

Pesquise mais

Para ver um exercício resolvido relacionado com a função tangente sugerimos que você consulte a obra a seguir disponível também em sua Biblioteca Virtual.

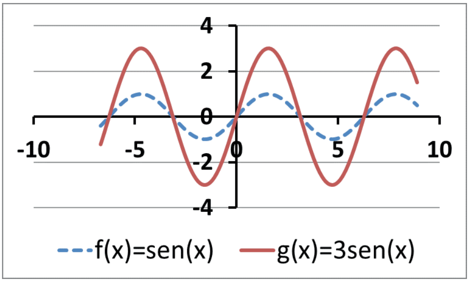
SAFIER, Fred. **Pré-Cálculo.** Porto Alegre: Bookman, 2001.

Análise gráfica

Vamos considerar a função $f_{base}(x) = \text{sen}(x)$ como nossa função base. Veja a nova função $f_{transformada}(x) = A \cdot \text{sen}(C \cdot x + \varphi) + k$ onde os parâmetros A, C, k e φ podem assumir valores quaisquer no conjunto dos números reais. Na sequência veremos como produzir rapidamente o gráfico da função $f_{transformada}(x) = A \cdot \text{sen}(C \cdot x + \varphi) + k$ a partir da função base $f_{base}(x) = \text{sen}(x)$ quando variamos os parâmetros A, C, k e φ.

a) Considere as funções $f(x) = \text{sen}(x)$; $g(x) = 3\text{sen}(x)$ e seus respectivos gráficos plotados na Figura 2.24. O gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ está plotado em linha tracejada e o gráfico de $g(x) = 3\text{sen}(x)$ está plotado em linha contínua. Observe que, para cada um dos pontos da função $g(x) = 3\text{sen}(x)$ teremos que o valor de $sen(x)$ será multiplicado por 3. Assim, o valor original de $\text{sen}(90°) = 1$ será multiplicado por 3 de tal forma que $g(90°) = 3 \cdot f(90°) = 3 \cdot 1 = 3$ e o valor original $\text{sen}(270°) = -1$ será também multiplicado por 3 de tal forma que $g(270°) = 3 \cdot f(270°) = 3 \cdot (-1) = -3$. A multiplicação da função seno ou cosseno pela constante $A = 3$ tem por consequência que a imagem da função $g(x) = 3\text{sen}(x)$ é o conjunto $[-3,3]$.

Figura 2.24 | Gráficos das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = 3\text{sen}(x)$

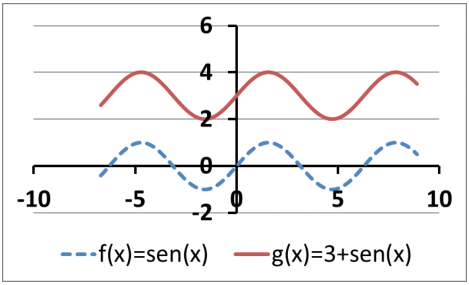


Fonte: elaborada pelo autor.

Resumidamente temos: multiplicar a função $f(x) = \text{sen}(x)$ ou a função $g(x) = \cos(x)$ por uma constante $A > 0$, o que implica ampliar (se $|A| > 1$) ou reduzir (se $|A| < 1$) a amplitude da função sem alterar o período da mesma. O conjunto imagem é modificado de $[-1,1]$ para $[-A,A]$.

b) Considere as funções $f(x)=\text{sen}(x)$ e $g(x)=sen(x)+3$. Na Figura 2.25 está plotado em linha tracejada o gráfico da função $f(x)=\text{sen}(x)$ e em linha contínua, o gráfico de $g(x)=sen(x)+3$. A função $g(x)=sen(x)+3$ está deslocada verticalmente três unidades em relação à função $f(x)=\text{sen}(x)$.

Figura 2.25 | Gráficos das funções

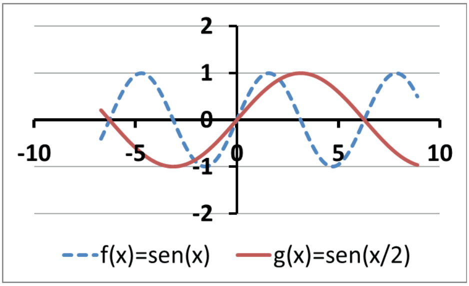


Fonte: elaborada pelo autor.

Em geral temos: somar (ou subtrair) uma constante k à função seno ou à função cosseno, ou seja, transformações do tipo $g(x)=k+\text{sen}(x)$ ou $g(x)=k+\cos(x)$ correspondem a deslocar a função base $f(x)=\text{sen}(x)$ (ou a função base $f(x)=\cos(x)$ k unidades verticalmente para cima (se $k>0$) ou k unidades verticalmente para baixo (se $k<0$).

c) Considere as funções $f(x)=\text{sen}(x)$ e $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Na Figura 2.26 temos o gráfico da função $f(x)=\text{sen}(x)$ em linha tracejada e o gráfico da função $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ em linha contínua. Observe que a função em linha contínua $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ "demora" mais tempo para se repetir, ou seja, seu período é maior que o período da função $f(x)=\text{sen}(x)$, enquanto o período da função $f(x)=\text{sen}(x)$ é 2π o período da função $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ é 4π.

Figura 2.26 | Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

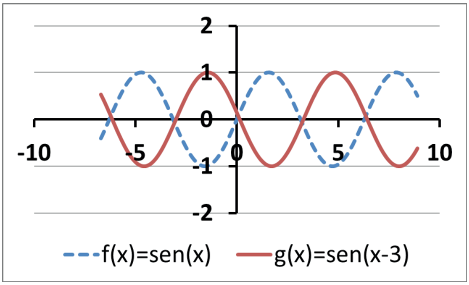


Fonte: elaborada pelo autor.

Em geral temos que transformações do tipo $f(x) = \text{sen}(Cx)$ ou $g(x) = \cos(Cx)$ alteram o período para $T = \frac{2\pi}{|C|}$. Observe que se estamos multiplicando o argumento por $C > 1$, a função estará completando uma volta no ciclo trigonométrico com maior velocidade. Portanto, sua frequência diminuirá. Lembre-se que $f = \frac{1}{T}$.

d) Considere os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}(x-3)$. Na Figura 2.27 temos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em linha tracejada e o gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x-3)$ em linha contínua. O gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x-3)$ está deslocado três unidades para a esquerda. É como se o sinal estivesse "adiantado".

Figura 2.27 | Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}(x-3)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Em geral temos que as transformações $f(x)=sen(x+\varphi)$ ou $g(x)=\cos(x+\varphi)$ implicam no deslocamento na horizontal do gráfico da função base $f(x)=sen(x)$ ou da função base $f(x)=\cos(x)$. Em outras palavras, somar uma constante positiva φ no argumento das funções seno ou cosseno corresponde a efetuar um deslocamento na horizontal para a esquerda se $\varphi>0$ e para a direita se $\varphi<0$. Podemos interpretar o deslocamento de fase para $\varphi<0$ como se o sinal estivesse "atrasado" (desloca-se para a direita).

Sem medo de errar

Na situação apresentada na seção anterior, apenas o Lote D apresentou problema, agora queremos determinar as funções matemáticas que melhor descrevem a produção nos lotes A, B e C.

Na Figura 2.12 temos a produção, em milhares de toneladas, para um período de dias que corresponde a aproximadamente pouco mais de onze anos e meio.

Vamos determinar as funções matemáticas para cada um dos lotes. É imediato que todos os lotes estão associados a funções do tipo seno ou cosseno. Vamos partir da hipótese, em cada caso, de que a função seja do tipo $f(x)=A\cdot \text{sen}(C\cdot x-\varphi)+k$. Queremos determinar as constantes A,C,φ e k.

- **Para o lote A:** inicialmente observamos que o máximo e o mínimo atingidos pelo gráfico da produção do lote A são 4,5 e 3,5 milhares de toneladas. A amplitude, portanto, é igual a $\dfrac{4,5-3,5}{2}=0,5$, sendo que o ponto médio é igual a 4 milhares de toneladas. Como o ponto médio é atingido em 4 milhares de toneladas, vamos supor que esta função seja a função seno adicionada de quatro unidades: $f_A(x)=A\cdot \text{sen}(C\cdot x-\varphi)+4$. Como a amplitude é igual a 0,5 milhar de toneladas, temos que $A=0,5$. $f_A(x)=0,5\cdot \text{sen}(C\cdot x-\varphi)+4$. Os máximos para esta função são atingidos em 628 e 3141. Como $3141-628=2513$ e sabemos que $T=\dfrac{2\pi}{|C|}$ então,

$2513=\dfrac{2\pi}{|C|}\Rightarrow C=0{,}0025$. Como esta função não está "atrasada" nem "adiantada", temos que $\varphi=0$. Assim, $f_A(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(0{,}0025\cdot x)+4$.

- **Para o lote B:** Para o lote B o máximo e o mínimo são 3,5 e 2,5 milhares de toneladas atingidos, respectivamente em 1413 e 3298. A amplitude neste caso será $\dfrac{3{,}5-2{,}5}{2}=0{,}5$ milhares de toneladas. Nossa função hipotética será $f_B(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(C\cdot x-\varphi)+k$. Como o ponto médio da função que representa o lote B é de 3 milhares de toneladas, temos que $k=3$. Logo, $f_B(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(C\cdot x-\varphi)+3$. O período será $3298-1413=1885$. Então, $1885=\dfrac{2\pi}{C}\Rightarrow C=0{,}0033$. Dessa forma, $f_B(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(0{,}0033\cdot x-\varphi)+3$. De forma similar à função para o lote A, temos que $\varphi=0$. Assim, a função que representa a produção do lote B é $f_B(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(0{,}0033\cdot x)+3$.
- **Para o lote C:** como os máximos e mínimos para as funções dos lotes B e C ocorrem nos mesmos valores 1413 e 3298, a constante C é igual: $1885=\dfrac{2\pi}{C}\Rightarrow C=0{,}0033$. A amplitude para o lote C é dada por $\dfrac{2{,}5-1{,}5}{2}=0{,}5$. O centro da função está em 2 milhares de toneladas, ou seja, temos um deslocamento na vertical de 2 milhares de toneladas. Assim, a função hipotética será $f_C(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(0{,}0033\cdot x-\varphi)+2$. Novamente verificamos pelo gráfico que $\varphi=0$. Assim, a função que representa a produção do lote C é $f_C(x)=0{,}5\cdot \text{sen}(0{,}0033\cdot x)+2$. É importante relacionarmos a determinação das funções que modelam matematicamente a produção em cada lote com o conteúdo visto nesta unidade: as funções seno, cosseno e tangente e seus gráficos. Neste problema que acabamos de resolver, vimos como determinar uma função trigonométrica a partir de seu gráfico.

Avançando na prática

Pressão em uma válvula reguladora de gás

Descrição da situação-problema

Uma indústria utiliza gás como combustível em sua linha de produção. Para monitorar a pressão do gás são utilizadas válvulas reguladoras de pressão.

A equipe de segurança vem monitorando as válvulas e levantando as curvas de pressão ao longo das 24 horas do dia em cada uma delas. O tipo de válvula adotado consegue suportar, durante intervalos de tempo bem pequenos e com intervalos de ao menos 30 minutos, pressões de até 450 bar. A pressão máxima admitida sob determinadas condições de produção é de 500 bar. O Departamento de Produção informou que esta pressão do gás não pode ser inferior a 335 bar.

A curva que eles levantaram é dada pela função $P(t) = 387 + 59\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$ bar, onde o tempo é medido em minutos.

Você foi contratado pela Gerência de Operações desta indústria, para fins de monitoramento da produção, para responder às seguintes questões: esta função ultrapassa, em algum momento, as pressões admitidas por curto intervalo de tempo? Esta função ultrapassa a pressão máxima admitida? Qual o período desta função?

Além disso, a Gerência de Operações também solicitou que fosse apresentado o gráfico da pressão com o tempo.

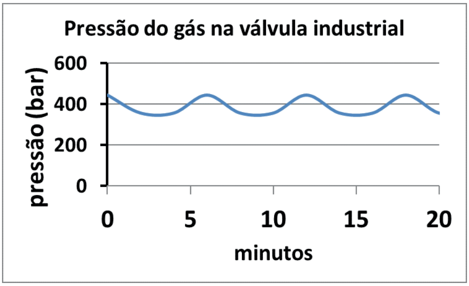
Resolução da situação-problema

Os valores máximo e mínimo da função $P(t)$ são obtidos simplesmente pela adição $P_{max} = 387 + 59 = 446$ e pela subtração $P_{min} = 387 - 59 = 328$. Assim, a pressão nunca ultrapassa o nível perigoso dos 500 bar e nem mesmo o nível dos 450 bar. Contudo, por curtos espaços de tempo, a pressão fica abaixo do valor crítico dos 335 bar, encarecendo o custo de produção.

O período da função é obtido, lembrando que $T = \frac{2\pi}{|C|}$, assim, $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{4\pi}{3}\right|} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}$ minutos.

Na Figura 2.28 apresentamos o gráfico da pressão do gás na válvula industrial em função do tempo em minutos.

Figura 2.28 | Pressão do gás na válvula industrial



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. As funções trigonométricas são utilizadas na modelagem de fenômenos periódicos tais como a temperatura do corpo ao longo do dia, a demanda por energia elétrica em uma cidade ao longo do dia ou o estudo de ondas eletromagnéticas na área de telecomunicações.

Em muitas situações estamos interessados em estudar tais fenômenos periódicos ao longo do tempo. Assim, tornou-se necessário expandir a definição das funções trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.

Considere as afirmativas a seguir:

I. $\text{sen}(3400°) > 0$.

II. $\cos(-1900°) > 0$.

III. $\tan(5445°) = 1$.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA:

a) Somente a afirmativa III está correta.

b) As afirmativas II e III estão corretas.

c) As afirmativas I e III estão corretas.

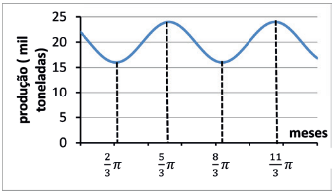
d) As afirmativas I e II estão corretas.

e) Apenas a afirmativa II está correta.

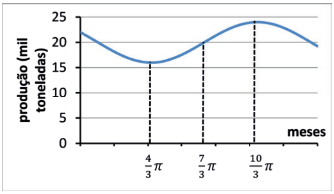
2. A produção agrícola de determinado cereal é fortemente sazonal, seguindo um padrão senoidal dado pela função $f(x) = 20 - 4\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

A alternativa que corresponde ao gráfico da produção deste cereal é dada pela alternativa:

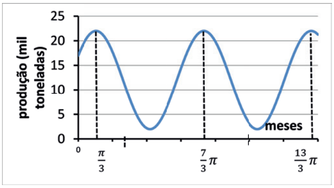
a



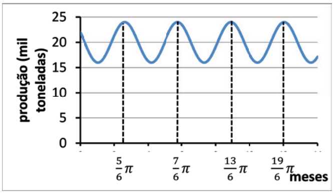
b



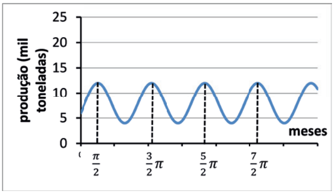
c



d



e



3. Considere as funções gerais $f(x) = A \cdot \text{sen}(C \cdot x) + k$, $g(x) = A \cdot \cos(C \cdot x) + k$, <<Eqn276.eps>> e as afirma-ções a seguir.

( ) O conjunto imagem da função $f_1(x) = 3 - 2\text{sen}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$ é o $[1;5]$.

( ) O período da função $g_1(x) = 4 + 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ é menor que o período da função

$g_2(x) = 5 + 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

( ) o domínio da função $h_1(x) = 3 + 2\tan\left(\frac{x}{4}\right)$ é

$D(h_1(x)) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta:

a) F – V – V.

b) V – V – F.

c) F – F – V

d) V – F – V.

e) F – V – V.

Seção 2.3

Funções exponencial e logarítmica e suas aplicações

Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos as funções seno, cosseno, tangente, bem como seus gráficos e aplicações.

Agora veremos as funções exponenciais e logarítmicas, os respectivos gráficos, conjuntos Domínio e Imagem, bem como suas aplicações.

Com o propósito de contextualizar sua aprendizagem nesta seção, consideramos que você continua atuando na empresa de agronomia que presta serviços para a fazenda que produz cana-de-açúcar.

Utilizando seus conhecimentos de agronomia, você decide realizar uma análise dos dados da saúde das plantas nas plantas do setor D e, a partir de sintomas e comparando com um banco de dados (tabela com várias doenças), descobre que neste lote a cana vem apresentando uma doença contagiosa, mas o contágio se dá apenas nas plantas vizinhas. Através da análise dos dados dos últimos seis meses, você descobre que a doença está se alastrando exponencialmente, tendo efetuado a contagem de indivíduos contaminados na plantação, apresentando a Tabela 2.8. Na data 0 temos a quantidade de cana-de-açúcar (em toneladas) do lote D. Apenas um mês depois (30 dias), foram observadas 181,57 toneladas contaminadas a mais que o mês anterior.

Tabela 2.8 | Quantidade (toneladas) de cana-de-açúcar no Lote D

Tempo (dias)	0	30	60	90	120	150	180
População infectada (t)	10000	10181,57	10366,45	10554,68	10746,32	10941,45	11140,12

Fonte: elaborada pelo autor.

Foi solicitado que você estime o número de dias até que 15% da população inicial na data 0 de cana-de-açúcar colhida na data 0 esteja infectada.

Para que este desafio seja superado você deverá dominar os conceitos relacionados com as funções exponencial e logarítmica, taxas de crescimento e gráficos. Com certeza você está caminhando na direção correta para superar mais este desafio profissional e para que esta superação seja realizada a contento, é de grande importância a sua dedicação aos conteúdos vistos nesta seção.

Não pode faltar

Função Exponencial: conceitos

A função exponencial é importante para modelar muitas situações de crescimento ou decrescimento. A Tabela 2.9 apresenta dois exemplos de funções exponenciais: $f(x)=2^x$ (cuja base é 2) e $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (cuja base é $\frac{1}{2}$). Observe nesta tabela que, para obter o valor $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$ a partir do valor $f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$, multiplicamos $\frac{1}{8}$ por uma constante que é sempre a base da função exponencial (neste exemplo a base é 2). Sucessivamente, para obter o valor $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$ a partir de $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$ também multiplicamos $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$. Também para a função $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, para obtermos o valor $g(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ a partir do valor $g(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$, multiplicamos este último pelo valor da base (neste caso a base é $b=\frac{1}{2}$).

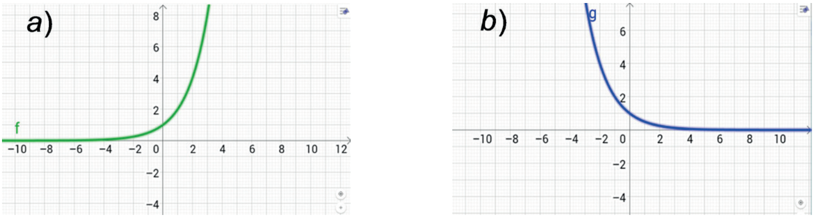
Tabela 2.9 | Funções exponenciais $f(x)=2^x$ e $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$	$g(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
-1	$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$	$g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$f(0)=2^0=1$	$g(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$f(1)=2^1=2$	$g(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$
2	$f(2)=2^2=4$	$g(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe ainda que nos dois casos obtivemos sempre valores estritamente positivos nos valores do conjunto de chegada para ambas funções. Esta última frase é importante para deduzirmos o conjunto imagem da função exponencial. Como podemos observar a partir deste exemplo, a função $f(x)=2^x$ é estritamente crescente $(\textbf{base}=2>1)$ e a função $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é estritamente decrescente $\left(0<\textbf{base}=\frac{1}{2}<1\right)$. Na Figura 2.29a apresentamos o gráfico de $f(x)=2^x$ e na figura 2.29b o gráfico de $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$.

Figura 2.29 | Gráfico de $f(x)=2^x$ (a); Gráfico de $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Enquanto funções afim, ou seja, funções do tipo $f(x)=ax+b$ caracterizam-se por apresentarem uma taxa de mudança constante, que é o próprio coeficiente angular (em outras palavras, adicionamos uma quantidade constante para valores de acréscimo no eixo x, representados por valores de Δx fixados), funções exponenciais caracterizam-se por apresentarem taxas de crescimento cuja razão é constante. Como vimos na Tabela 2.2, a razão de crescimento entre elementos consecutivos para a função $f(x)=2^x$ é 2 (o valor de sua base) e a taxa de crescimento (na verdade, decréscimo) para a função $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é $\frac{1}{2}$.

Após termos visto exemplos numéricos e gráficos de funções exponenciais particulares, vejamos a definição formal.

Definição (função exponencial): uma função exponencial é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=a^x$ onde $a\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$. Dada uma base $a\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$, podemos efetuar a^x para qualquer número real x, o domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais: $D(f)=\mathbb{R}$. Como o resultado da operação a^x é sempre um número estritamente positivo, o conjunto imagem da função exponencial $f(x)=a^x$ é $\mathbb{R}_+^*$ (o conjunto dos números reais estritamente positivos).

Funções exponenciais de base $a>1$ são funções estritamente crescentes e funções exponenciais de base $0<a<1$ são funções estritamente decrescentes. Confira com as Figuras 2.29a e 2.29b.

Reflita

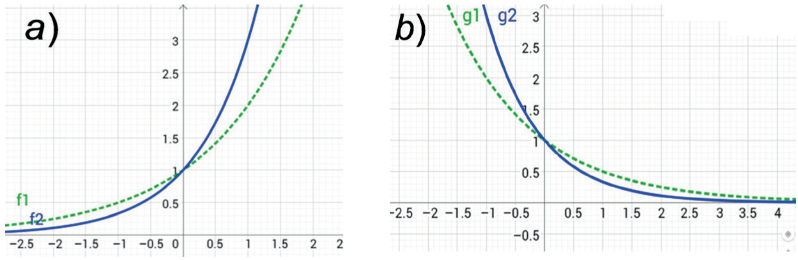
Você consegue dizer qual das funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$ cresce mais rapidamente? É possível identificar para qual subconjunto dos números reais o gráfico da função $f(x) = 2^x$ está acima (respectivamente, abaixo) do gráfico da função $f(x) = 3^x$?

Considere duas funções exponenciais, $f_1(x) = a_1^{\ x}$ e $f_2(x) = a_2^{\ x}$ com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 > a_2 > 1$. Dessa forma, a função $f_1(x) = a_1^{\ x}$ é maior que a função $f_2(x) = a_2^{\ x}$ para $x > 0$ (ou seja, $f_1(x) > f_2(x)$ para $x > 0$), e a função $f_1(x) = a_1^{\ x}$ é menor que a função $f_2(x) = a_2^{\ x}$ para $x < 0$ (ou seja, $f_1(x) < f_2(x)$, para $x < 0$). Confira com a Figura 2.30a. Já para as funções $g_1(x) = b_1^{\ x}$ e $g_2(x) = b_2^{\ x}$ com $b_1, b_2 \in \mathbb{R}, 0 < b_1 < b_2 < 1$, temos que $g_1(x) < g_2(x)$ se $x < 0$ e $g_1(x) > g_2(x)$ se $x > 0$. Confira com a Figura 2.30b.

Antes do próximo parágrafo precisamos explicar o significado do símbolo $x \to -\infty$: este símbolo significa que estamos tomando valores para x menores que qualquer número negativo dado.

Note que, para as funções $f(x) = a^x, a > 1$ para valores de x tais que $x \to -\infty$, temos que $f(x) = a^x \to 0$. Já para as funções $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, temos $f(x) = a^x \to 0$ quando $x \to \infty$. Diz-se que o gráfico da função $f(x) = a^x$ é assintótico ao eixo x, com os valores da função aproximando-se cada vez mais de zero, mas sem nunca atingir este valor. Diz-se que o eixo x é uma assíntota horizontal para a função $f(x) = a^x$. Você pode conferir essa explicação analisando as Figuras 2.30a e (b). Para cada uma destas figuras, observe que a função aproxima-se assintoticamente de zero para $x \to \infty$ no caso da Figura 2.30b e aproxima-se assintoticamente de zero para $x \to -\infty$ no caso da Figura 2.30a.

Figura 2.30 | Gráfico $f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 3^x$ (a) Gráfico $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, g_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

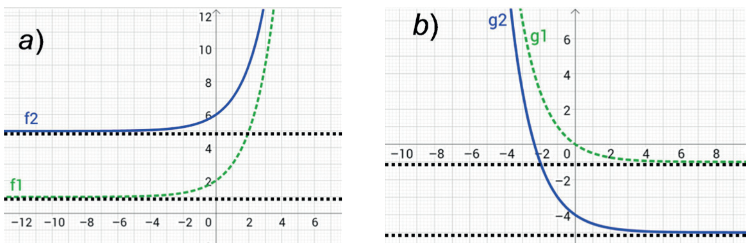
Se adicionarmos uma constante positiva a uma função exponencial, seu gráfico se deslocará verticalmente para cima e se subtrairmos uma constante positiva de uma função exponencial, seu gráfico se deslocará verticalmente para baixo com a assíntota horizontal deslocando-se na mesma direção em cada caso. Confira com a Figura 2.31.

Assimile

Considere funções exponenciais $f(x) = C \cdot a^x$. Esta função será crescente se $a > 1$ e $C > 0$ ou se $0 < a < 1$ e $C < 0$.

A função $f(x) = C \cdot a^x$ será decrescente se $a > 1$ e $C < 0$ ou se $0 < a < 1$ e $C > 0$. Em qualquer um dos casos, o ponto de intersecção de $f(x) = C \cdot a^x$ com o eixo y é $f(0) = C \cdot a^0 = C$.

Figura 2.31 | $f_1(x) = 2^x + 1$, $f_2(x) = 2^x + 5$ (a); $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, g_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

As retas tracejadas nas Figuras 2.31a e b são as assíntotas horizontais para cada caso.

O conjunto imagem da função $f_1(x) = 2^x + 1$ é $\text{Im}(f_1) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ e o conjunto imagem da função $g_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$ é $\text{Im}(g_2) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -5\}$.

Reflita

Qual é o conjunto imagem da função $f(x) = -3^x + 2$? E da função $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$? Qual a relação entre o conjunto imagem de uma função exponencial e suas assíntotas horizontais?

Comparação entre funções lineares e funções exponenciais

Existem dois aspectos a serem destacados quando comparamos funções afim e funções exponenciais: (1) a taxa de crescimento para cada uma destas funções (já comentamos sobre este item) e (2) o comportamento de cada uma destas funções para valores cada vez maiores da variável x. Na terceira coluna da Tabela 2.10, apresentamos a diferença entre elemento consecutivos para a função afim $f(x) = 2x + 3$ e na quarta coluna apresentamos a razão entre elementos consecutivos da função exponencial $g(x) = 3 \cdot 2^x$.

Tabela 2.10 | Comparação entre funções afim e exponencial

x	$f(x) = 2x + 3$	$g(x) = 3 \cdot 2^x$	$f(x_{k+1}) - f(x_k)$	$\frac{g(x_{k+1})}{g(x_k)}$
0	3	3		
1	5	6	2	2
2	7	12	2	2
3	9	24	2	2
4	11	48	2	2

Fonte: elaborada pelo autor.

Da Tabela 2.9 vemos que, para acréscimos iguais na variável x, a diferença entre os respectivos valores da função afim é sempre igual ao coeficiente angular, enquanto para a função exponencial temos que, para acréscimos iguais na variável x, a razão entre os respectivos valores da função exponencial é igual à base desta função. Em outras palavras, para identificar uma função exponencial da forma $f(x)=C\cdot a^{x}$ a partir de seus dados dispostos em uma tabela, dividimos os termos consecutivos para obter a base da função exponencial, enquanto a constante *C* corresponde ao valor da função exponencial no "instante" inicial.

Assimile

Você pode pesquisar mais sobre a relação entre:

- Funções afim e progressões aritméticas.
- Funções exponenciais e progressões geométricas.

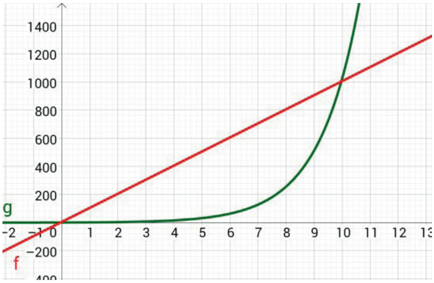
Por exemplo, consulte o artigo *As relações entre progressão aritmética e a função afim com o aplicativo Geogebra*. Disponível em: <http://revistas.ufac.br/revista/index.php/simposioufac/article/viewFile/902/499>. Acesso em: 24 jul. 2018.

E os capítulos 1.1 e 1.2 da pesquisa a seguir.

SOUSA, Isabela Ramos da Silva de. **Relação entre função exponencial e progressão aritmética.** 2016, 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UENF, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <https://goo.gl/1NJZia>. Acesso em: 24 jul. 2018.

Na Figura 2.32 apresentamos os gráficos das funções $f(x)=100x+5$ e $g(x)=2^{x}$. No longo prazo, quando x tende a valores cada vez maiores, se aproximando do infinito, a função exponencial sempre ultrapassa a função afim.

Figura 2.32 | Comparação entre função afim e exponencial para grandes valores de x



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

O que é possível concluir sobre o comportamento das funções $f(x)=3x^2+5x-2$ e $g(x)=3\cdot 2^x$ para valores cada vez maiores da variável x?

É importante observamos que tanto a função exponencial como a função logarítmica (nosso próximo assunto) apresentam crescimentos ilimitados, ou seja, não existe nenhum número real tal que seus gráficos sejam limitados por este número. Contudo, uma diferença importante é que enquanto o crescimento exponencial cresce a taxas cada vez maiores, o crescimento logarítmico cresce a taxas menores (dizemos que funções logarítmicas apresentam crescimento a taxas decrescentes).

No exemplo a seguir vemos como determinar a taxa de crescimento de uma função exponencial a partir dos dados em uma tabela.

Exemplificando

Suponha que um biólogo investigando o crescimento de uma colônia de bactérias obteve a Tabela 2.11.

Tabela 2.11 | Exemplo para determinar taxa de crescimento de função exponencial

Tempo	0	5	10	15
Contagem de colônias de bactérias	1000	1300	1690	2197

Fonte: elaborada pelo autor.

Para construir Tabela 2.12 ele fez medições a cada 5 minutos. O biólogo deseja obter a taxa de crescimento por minuto. Inicialmente, ele observa que as razões entre elementos consecutivos são constantes, caracterizando assim uma função exponencial.

Tabela 2.12 | Contagem na colônia de bactérias e razão entre termos consecutivos

Tempo	0	5	10	15
Contagem de colônias de bactérias	1000	1300	1690	2197
Razão entre termos consecutivos		1,3	1,3	1,3

Fonte: elaborada pelo autor.

Como temos uma função exponencial entre o instante $t = 0$ e $t = 5$, o valor inicial $f(0) = 1000$ foi multiplicado pela taxa de crescimento desconhecida a três vezes. Assim, para obter esta taxa devemos elevar o valor 1,3 à potência $1/5$. Logo, a taxa de crescimento por minuto é $\sqrt[5]{1,3} = 1,05$. Em outras palavras, a população de bactérias cresce a uma taxa de 5,3% por minuto.

Função logarítmica: conceitos

Você já estudou logaritmos na Seção 1.2. Lembremos que não é possível determinar o logaritmo de qualquer número *a* e nem para qualquer base *b*. Existem restrições para o cálculo de logaritmos, as quais são denominadas condições de existência para logaritmos. Na Tabela 2.13 apresentamos os valores para as funções logarítmicas $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ para valores selecionados de x.

Tabela 2.13 | Cálculo de valores selecionados para as funções $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

X	$f(x) = \log_2(x)$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$g\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$

$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$	$g\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)=2$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$	$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=1$
1	$f(1)=\log_2(1)=0$	$g(1)=\log_{\frac{1}{2}}(1)=0$
2	$f(2)=\log_2(2)=1$	$g(2)=\log_{\frac{1}{2}}(2)=-1$

Fonte: elaborada pelo autor.

Um ponto-chave a ser destacado aqui é que a função $f(x)=\log_b(x)$ com $b>1$ é estritamente crescente e é estritamente decrescente para $0<b<1$. Confira estas afirmações com os gráficos apresentados na Figura 2.33.

Observe que, das condições de existência de logaritmos, só podemos efetuar o cálculo dos logaritmos para números reais estritamente positivos. Isto mostra que o domínio da função $f(x)=\log_b(x)$ é o conjunto $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$. Como podemos observar na Tabela 2.12, ao tomarmos o logaritmo de valores arbitrariamente próximos a zero, a função $f(x)=\log_b(x)$, com $b>1$,assume valores negativos tendendo a $-\infty$ e assume valores positivos tendendo a $+\infty$ se $0<b<1$. Por outro lado, para valores $x\to\infty$ a função $f(x)=\log_b(x)$, com $b>1$, assume valores positivos cada vez maiores, tendendo a $+\infty$ e a função $f(x)=\log_b(x)$ com $0<b<1$ assume valores tendendo a $-\infty$ quando $x\to\infty$.

Agora, vamos verificar a definição formal de função logarítmica, mas antes, relembremos o que é uma função bijetora.

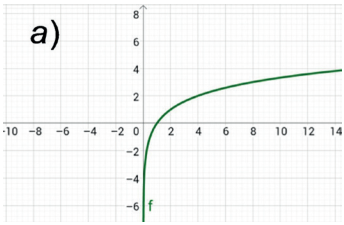
Definição (função bijetora): diz-se que uma função *f* é bijetora se para todo valor *y* que pertença ao conjunto imagem da função existir um e apenas um só valor *x* que pertença ao domínio de *f*, tal que $y=f(x)$.

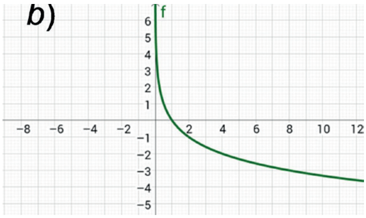
Apenas funções bijetoras podem ter inversas. A inversa de uma função $f: A \rightarrow B$ que associa a cada $x \in A$ um valor $y \in B$, efetua a associação inversa: $f^{-1}: B \rightarrow A$, associando a cada $y \in B$ um único $x \in A$. As funções exponenciais e logarítmicas são inversas uma da outra.

Definição (função logarítmica): denomina-se função logarítmica uma função da forma $f(x): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_b(x)$ com $b \in \mathbb{R}, 0 < b \neq 1$.

São exemplos de funções logarítmicas: $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ e $h(x) = \log_{\sqrt{5}}(x)$.

Figura 2.33 | Gráfico de $f(x) = \log_2(x)$ (a), gráfico de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ (b)

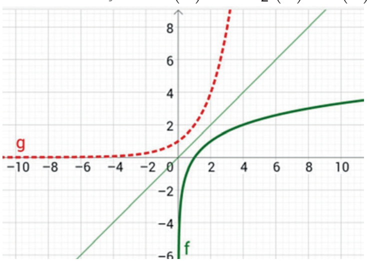




Fonte: elaborada pelo autor.

A função logarítmica $f(x) = \log_b(x)$ com $b \in \mathbb{R}, 0 < b \neq 1$ é bijetora, portanto, possui inversa, sendo sua inversa a função exponencial $f^{-1}(x) = b^x$ com $b \in \mathbb{R}, 0 < b \neq 1$. Em geral, para quaisquer funções $f(x)$ e sua inversa $f^{-1}(x)$, seus gráficos são espelhados em relação à reta que passa pela origem de $y = x$. Em particular, isso vale para as funções logarítmica e exponencial. Na Figura 2.34 ilustramos este aspecto com as funções $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x) = 2^x$

Figura 2.34 | Simetria das funções $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x) = 2^x$

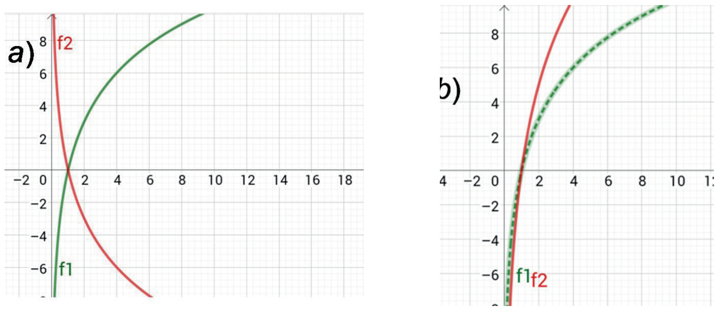


Fonte: elaborada pelo autor.

De forma similar às análises gráficas que já realizamos para a função afim, quadrática, funções trigonométricas e função exponencial, veremos agora o comportamento do domínio, da imagem e o deslocamento do gráfico da função $f(x) = A \cdot \log_b(x - c) + k$ conforme alteramos os parâmetros A, c, k. O parâmetro A, se negativo, provoca uma reflexão do gráfico da função $f(x)$ em relação ao eixo x. Confira com a Figura 2.35a para as funções $f_1(x) = 3 \cdot \log_2(x)$ e $f_2(x) = -3 \cdot \log_2(x)$.

Se $A_2 > A_1$, o gráfico da função $f_2(x) = A_2 \cdot \log_b(x)$ será mais "alongado" na vertical que o gráfico da função $f_1(x) = A_1 \cdot \log_b(x)$. Confira com a Figura 2.35b, para as funções $f_1(x) = 3 \cdot \log_2(x)$ e $f_2(x) = 5 \cdot \log_2(x)$.

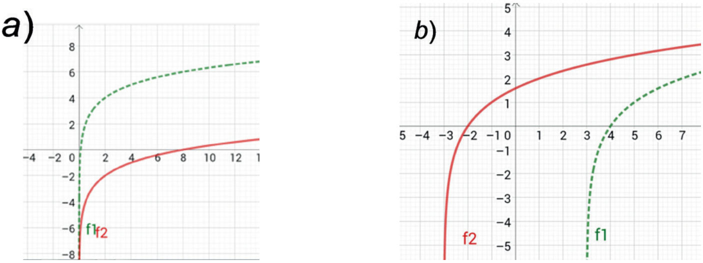
Figura 2.35 | $f_1(x) = 3 \cdot \log_2(x)$ e $f_2(x) = -3 \cdot \log_2(x)$ (a); $f_1(x) = 3 \cdot \log_2(x)$ e $f_2(x) = 5 \cdot \log_2(x)$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

O parâmetro k, de forma totalmente similar ao que já vimos para as outras funções, desloca o gráfico da função verticalmente para cima se $k > 0$ e para baixo se $k < 0$. Veja na Figura 2.36a, com as funções $f_1(x) = \log_2(x) + 3$ e $f_2(x) = \log_2(x) - 3$. Por fim, o parâmetro c define o deslocamento na horizontal do gráfico da função, alterando também o domínio de definição da função. Se $c > 0$, o gráfico da função $f(x) = A \cdot \log_b(x - c) + k$ é deslocado horizontalmente c unidades para a direita e se $c < 0$, o gráfico da função $f(x) = A \cdot \log_b(x - c) + k$ é deslocado horizontalmente c unidades para a esquerda. Confira com a Figura 2.36b com as funções $f_1(x) = \log_2(x - 3)$ e $f_2(x) = \log_2(x + 3)$.

Figura 2.36 | $f_1(x) = \log_2(x) + 3$ e $f_2(x) = \log_2(x) - 3$ (a); $f_1(x) = \log_2(x - 3)$ e $f_2(x) = \log_2(x + 3)$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Função Logarítmica: aplicações

Vejamos um exemplo de aplicação da função logarítmica.

Exemplificando

Sabe-se que a equação $f(t) = 325 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ descreve a quantidade de aspirina na corrente sanguínea no instante t medido em períodos de 20 minutos após você ter ingerido uma dose típica de 325 mg. (KIME et al, 2014).

Determine o tempo necessário até que a concentração de aspirina corresponda à metade da quantia inicial.

Resolução: Para determinar este tempo, devemos resolver a equação $325 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{325}{2}$. Temos que $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$. Aplicando logaritmo na base $\frac{1}{2}$ a ambos os lados da equação, teremos: $\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^t\right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.
Então, utilizando que o logaritmo de um número na base base é igual a 1 e a propriedade do logaritmo da potência: $t \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, precisaremos de uma unidade de tempo $t = 1$, o que pelo enunciado, corresponde a 20 minutos para que a quantia inicial se reduza à metade.

Pesquise mais

Talvez você já tenha ouvido falar da relação entre matemática e música. Mas você conhece a relação Logaritmos e Música? Explore esse assunto com os links a seguir.

Disponível em: <https://prezi.com/5fxcvmmflq9r/logaritmo-na-musica/>; <https://musicaeadoracao.com.br/25383/a-musica-e-os-logaritmos/>. Acesso em: 24 jul. 2018

Sem medo de errar

Relembremos o problema apresentado no início desta seção: a partir da coleta de dados dos últimos seis meses da plantação de cana-de-açúcar no lote D, foi possível identificar que uma doença contagiosa vem se espalhando rapidamente. Você foi incumbido pela empresa de agronomia a estimar em quanto tempo 15% da plantação seria atingida pela doença.

A partir da tabela com os dados coletados (Tabela 2.8) e dos seus estudos de Matemática, você resolveu efetuar a diferença e a divisão entre elementos consecutivos da tabela para verificar se a expansão atendia a um padrão conhecido. Se a diferença fosse constante, saberíamos que a expansão poderia ser modelada por uma função afim. Se a razão fosse constante, saberíamos que a expansão poderia ser modelada por uma função exponencial e determinar a taxa de expansão. Os cálculos estão apresentados na Tabela 2.14.

Tabela 2.14 | Investigação do padrão funcional de expansão da doença no Lote D

Tempo (dias)	0	30	60	90	120	150	180
Toneladas de cana-de-açúcar do Lote D	10.000	10.181,57	10.366,45	10.554,68	10.746,32	10.941,45	11.140,12
Diferença entre datas consecutivas		181,57	184,87	188,23	191,65	195,13	198,67
Divisão entre datas consecutivas		1,018157	1,018157	1,018157	1,018157	1,018157	1,018157

Fonte: elaborada pelo autor.

Como a razão entre termos consecutivos é constante, sabemos que a expansão do contágio pode ser modelada por uma função exponencial. Como o intervalo de tempo entre cada contagem é de 30 dias, para determinar a taxa de expansão ao dia extraímos a raiz 30ª de 1,018157: $\sqrt[30]{1,018157} = 1,0006$. Essa taxa corresponde a 0,06% ao dia.

Pretende-se estimar o prazo, em dias, para que tenhamos 15% da quantidade inicial apresentando contaminação. Como a quantidade inicial foi de 10.000 toneladas, queremos determinar t tal que $f(t) = (1 + 0,15) \cdot 10000 = 11500$.

Para determinar o prazo no qual teremos 15% da plantação contaminada devemos resolver a equação: $10000 \cdot 1,0006^t = 11500$, ou seja, queremos determinar t tal que $1,0006^t = \dfrac{11500}{10000} = 1,15$.

Aplicando logaritmo aos dois lados da igualdade: $\log\left(1,0006^t\right) = \log(1,15)$. Da propriedade do logaritmo da potência: $t \cdot \log(1,0006) = \log(1,15)$. Então, $t = \dfrac{\log(1,15)}{\log(1,0006)}$.

Usando uma calculadora científica ou o Excel obtemos que $t = \dfrac{0,060698}{0,00026} = 233,0064$.

Assim, teremos 15% da tonelagem de cana do lote D contaminada aproximadamente 233 dias após a data de início da coleta de dados.

Veja que, para resolver este problema, utilizamos dados tabulados que apresentam razão constante entre tomadas de dados para valores consecutivos que podem ser modelados por uma função exponencial. Também, recordamos a propriedade de logaritmo da potência para resolver equações exponenciais.

Agora, cabe a você apresentar um relatório sucinto do trabalho desenvolvido para seus superiores.

Avançando na prática

Comparação entre crescimentos lineares e exponenciais

Descrição da situação-problema

Você está avaliando a possiblidade de atuar em diferentes setores da economia após se formar e, depois de ler uma reportagem apresentando estimativas de crescimento do número de empregos para cada setor, decidiu utilizar esta informação como um dos seus critérios para avaliação.

As estimativas de números de empregos foram efetuadas a partir das seguintes funções:

Setor Farmacêutico: $f_{\text{Farmacêutico}}(t) = 65.000 \cdot 1{,}09^t$

Setor Metalúrgico: $f_{\text{Metalúrgico}}(t) = 330.000 \cdot 1{,}1^t$

Setor de Transporte de Cargas: $f_{Cargas}(t) = 360.000 + 9.000 \cdot t$

Setor de Extração Mineral: $f_{\text{Extração}}(t) = 365.000 + 12.000 \cdot t$

Você está interessado em comparar os quatros setores na data-base de hoje ($t = 0$) e nos anos $t = 5$ e $t = 10$.

Você está em dúvida se o formato da função (se função afim ou exponencial) apresenta diferenças significativas a longo prazo.

Para verificar isso, você também está interessado em avaliar a tendência de longo prazo. Dessa forma, resolveu plotar os quatro gráficos para efetuar uma análise do comportamento destas funções no longo prazo. O que é possível avaliar no longo prazo sobre o comportamento das funções exponenciais com respeito às bases 1,09 e 1,1?

O que é possível avaliar no longo prazo sobre as funções afim com respeito aos coeficientes angular 23000 e 35000?

Qual família de funções apresentará maior número de empregos no longo prazo?

Resolução da situação-problema

Utilizando uma calculadora ou o Excel, é possível construir a Tabela 2.15.

Tabela 2.15 | Funções afim e exponenciais para cada um dos setores

	$f_{\text{Farmacêutico}}(t)$	$f_{\text{Metalúrgico}}(t)$	$f_{Cargas}(t)$	$f_{\text{Extração}}(t)$
$t = 0$	65.000	330.000	360.000	365.000
$t = 5$	100.010	531.468	405.000	425.000
$t = 10$	153.878	855.935	450.000	485.000

Fonte: elaborada pelo autor.

No ano base o setor que apresenta o maior número de empregos é o de Extração Mineral, já no ano 5 passa a ser o setor Metalúrgico. E no ano 10 continua a ser o setor Metalúrgico.

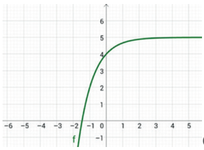
Em relação ao que foi estudado nesta seção sobre as funções exponenciais e função afim, no longo prazo a função exponencial sempre ultrapassa qualquer função afim. E como a base da função $f_{\text{Metalúrgico}}(t) = 330.000 \cdot 1,1^t$ é maior que a base da função $f_{\text{Farmacêutico}}(t) = 65.000 \cdot 1,09^t$. No longo prazo a função que representa o número de empregos no setor metalúrgico ultrapassa a função que representa o setor farmacêutico. Assim, estima-se que o setor metalúrgico produzirá mais emprego entre os quatro setores avaliados no longo prazo.

Faça valer a pena

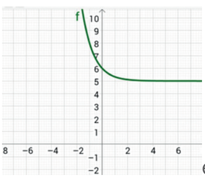
1. De forma similar ao que você já estudou para funções afim, quadráticas e trigonométricas, também para as funções exponenciais e logarítmicas, podemos construir o gráfico de uma função exponencial $f(x) = a \cdot b^x + c$ analisando o impacto de cada uma das constantes a, b e c no gráfico da função $f(x)$.

Considere a função $f(x) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 5$.

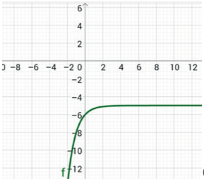
A alternativa que apresenta o gráfico de $f(x) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 5$ e o conjunto imagem é:

a) 

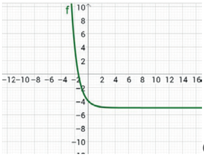
e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} : y < 5\}$

b) 

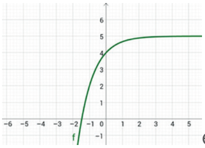
e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} : y < 5\}$

c) 

e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} : y < -5\}$

d) 

e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} : y > -5\}$

e) 

e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} : y < 5\}$

2. A escala de decibéis é um exemplo de escala logarítmica. O nível de um som, medido na escala decibel é dado pela expressão $\text{Nível de som} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ na unidade dB, onde I_0 é a intensidade de um som adotado como padrão e I indica a intensidade do som que estamos medindo.

A intensidade padrão corresponde ao som cuja intensidade é a menor possível, mas ainda assim humanos conseguem escutar e é dada por $I_0 = 10^{-16}\ watts/cm^2$ (CONNALY et al., 2009).

Um avião a jato, decolando, pode atingir 130 dB (a uma distância de 100 metros), em uma festa com música alta, o som pode atingir 110 dB, uma rua com trânsito pesado pode atingir 85dB, um escritório 35dB e uma conversa terá um nível de 55dB.

Quantas vezes é mais intenso o som em uma rua com trânsito pesado comparada com um escritório?

a) 750 vezes.
b) 310 vezes.
c) 180 vezes.
d) 5000 vezes.
e) 30 vezes.

3. Suponha que você invista uma quantia inicial Q_1 em uma aplicação financeira que rende 3% ao mês e uma quantia $Q_2 = \frac{Q_1}{3}$ em uma segunda aplicação que rende 6% ao mês.

A aplicação Q_1 é representada pela função $f_1(t) = Q_1(1{,}03)^t$ e a aplicação Q_2 pela função $f_2(t) = Q_2(1{,}06)^t$.

Enunciado:

Assinale a alternativa que apresenta daqui a quanto tempo a quantia Q_2 será o dobro da quantia Q_1.

a) 46 meses.

b) 50 meses.

c) 62 meses.

d) 84 meses.

e) 96 meses.

Referências

ABREU, Glaucos Ottone Cardoso. **Projetos de Modelagem Matemática envolvendo funções para os ensinos fundamental e médio:** Cenários de investigação a partir da temática “transporte público”. 2011, 39 f. Mestrado profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Ouro Preto, 2011. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2011/Glaucos%20Otonne.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

ADAMI, Adriana Morelli; DORNELLES Filho, Adalberto; LORANDI, Magda Mantovani. **Pré-Cálculo.** Porto Alegre: Bookman, 2015.

AXLER, Sheldon. **Pré-cálculo:** uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2016.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Explorando o conceito de função por meio da modelagem matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Petrópolis, Rio de Janeiro. 2012. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT10/CC13244833004_A.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Editora Lisboa: 1963.

CONNALLY, Eric; et al. **Funções para modelar variações:** uma preparação para o Cálculo. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

DEMANA, Franklin; Waits; Bert; Foley, Gregory; Kennedy, Daniel. **Pré-Cálculo.** 2. edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

DESCOMPLICANDO A MÚSICA. **Matemática na Música.** Disponível em: <http://www.descomplicandoamusica.com/matematica-na-musica/>. Acesso em: 24 jul. 2018.

HUGHES-HALLET, Deborah; GLEASON, Andrew. **Cálculo**, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC. 1997.

KIME, Linda Almgren; CLARK, Judith; MICHAEL, Beverly. **Álgebra na universidade.** Um curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2014.

LEITE, Maria Beatriz Ferreira; FERREIRA, Denise Helena Lombardo; SCRICH, Cintia Rigão. Explorando conteúdos matemáticos a partir de temas ambientais. **Ciência e educação**, v. 15, n. 1, p. 129-138, 2009. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v15n1/v15n1a08.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2018.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2016.

MARCONDES, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática** (Série Novo Ensino Médio). 6. ed. São Paulo: Ática, 2002.

MUSSEL, Romulo. **Estudo de funções logarítmicas no Ensino Médio**. Rio de Janeiro, IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). 2014. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/romulo_mussel.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2018.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. **Matemática para o Ensino Médio.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Maziozeki. **Matemática.** Educação de Jovens e adultos (EJA). Curitiba. Editora Intersaberes. 2016.

PORTAL DA MATEMÁTICA. **Gráfico da função logarítmica.** 2017. Disponível em: <https://youtu.be/IVE1UtgndrU>. Acesso em: 24 jul. 2018.

ROCHA, Kátia Luciane; BISOGNIN, Eleni. A modelagem matemática e a educação ambiental no estudo da função afim. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T14_RE827.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2018.

SAFIER, Fred. **Pré-cálculo.** Coleção Schaum. Porto Alegre: Bookman, 2001.

TVESCOLA. **Arte e Matemática:** Música das Esferas. Disponível em: <https://tvescola.org.br/tve/video/musicadasesferas>. Acesso em: 24 jul. 2018.

Fundamentos gerais sobre limite e derivadas

Convite ao estudo

Na unidade anterior estudamos as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica, seno, cosseno e tangente.

Provavelmente, o tópico mais importante do ponto de vista de aplicações que veremos nesta unidade é o de otimização. Aprenderemos como determinar valores máximos e mínimos de uma função, esta é uma questão de aplicação fundamental nas mais variadas áreas profissionais. A preocupação com a redução de impactos ambientais impõe aos engenheiros de várias áreas (mecânicos, elétricos, civis) que seus projetos de motores, transformadores e edifícios sejam funcionais, apresentem elevada eficiência energética e o menor impacto ambiental possível. Também, os profissionais de gestão buscam métodos e procedimentos que minimizem custos e maximizem lucros. O procedimento usual é desenvolver modelos matemáticos representando os custos ou lucros por funções matemáticas e, aplicando parte dos conceitos que veremos sobre otimização, buscar os pontos de custo mínimo ou lucro máximo. Tais questões também se estendem para profissionais das áreas de saúde, os quais buscam métodos e abordagens de menor custo bem como impacto ambiental, mas que apresentem a máxima eficiência possível na solução de problemas de saúde.

Para iniciar nosso estudo, vamos imaginar que você faz parte do quadro de sócios de uma empresa que produz embalagens. A empresa está avaliando a construção de uma nova fábrica e precisa analisar a viabilidade do projeto. Este problema foi subdividido em três partes. Uma primeira questão envolve os custos variáveis da empresa. Após o levantamento de dados por parte da matriz, obteve-se uma expressão algébrica que resulta nos custos associados ao tempo em meses. Pretende-se determinar o custo no longo prazo, considerando um tempo muito longo, com o propósito de verificar o pior caso. Respondida esta questão, o grupo de sócios deve definir a taxa de variação com a qual certa embalagem pode ser produzida a cada mês como função do consumo de água em milhares de metros cúbicos, bem como apresentar a estimativa para a produção quando são consumidos 10 mil metros cúbicos de água. Por último, na terceira parte do problema, o grupo de empresários tem por objetivo lançar uma embalagem a partir de folhas retangulares de alumínio com comprimento de 50 cm e largura de 30, das quais serão retirados quadrados de lado a cm. Deseja-se determinar o valor do lado a do quadrado a ser retirado de cada placa retangular de tal forma que o volume da caixa seja maximizado. Aqui entram seus conhecimentos de otimização e derivadas.

Descreveremos rapidamente os conteúdos que serão abordados em cada uma destas seções para que você tenha o ferramental matemático para ultrapassar o desafio proposto.

Na primeira seção estudaremos os limites, os limites no infinito, o que são funções contínuas e descontínuas e algumas aplicações de limites. Na segunda seção veremos taxa de variação, as derivadas, as derivadas de funções simples, as regras do produto e do quociente para derivadas, bem como algumas aplicações de derivadas. Prosseguimos nosso estudo de derivadas na terceira seção com a regra da cadeia (derivada de funções compostas) e atingiremos um dos pontos altos do nosso estudo de funções, limites e derivadas estudando a otimização de uma variável.

Para concluir, recomendamos que estude de forma contínua sempre participando e perguntando para que não permaneçam dúvidas. Temos certeza que você está no caminho certo.

Seção 3.1

Fundamentos de cálculo aplicado: limite

Diálogo aberto

Na presente seção veremos limites, limites infinitos e o conceito de continuidade de uma função, que são técnicas muito utilizadas para responder à questões relativas ao comportamento de uma função quando nos aproximamos de determinado valor especialmente importante para aquela aplicação.

Com o propósito de contextualizar seu aprendizado nesta unidade, vamos supor que você faça parte do grupo de sócios de uma empresa que fabrica embalagens. Esta empresa está estudando a construção de uma nova fábrica e, para isto, precisa analisar a viabilidade do projeto.

Com a finalidade de estudar os custos do projeto, a empresa decidiu efetuar a decomposição dos custos em suas várias componentes, sendo que uma delas está relacionada aos custos de uma quantidade específica de trabalhadores ao longo do tempo. Tal componente foi representada por $C(x)$ e você foi incumbido de avaliar o comportamento desta função para um tempo suficientemente longo, ou seja, o limite desta função quando x fica arbitrariamente grande.

A empresa possui bastante experiência implementando novas unidades de fábrica e modelou matematicamente os custos de implantação por meio de dados históricos. Tal modelagem é dada pela função $C(x)=\dfrac{32x^4-27x^3+14x^2-45x+135}{25x^4+36x^3+88x^2+17x+1329}$, onde x representa o tempo em meses e o custo é dado em milhões de reais.

Seus sócios querem saber se este custo cresce indefinidamente. É possível determinar se o custo se aproxima de algum valor numérico específico? Se sim, qual?

Apresente o gráfico para esta função, identificando algum comportamento notável, se existir.

Para que você possa vencer este desafio, leia com atenção os conceitos e as propriedades de limites e continuidade apresentados na presente seção, persistindo sempre para vencer cada obstáculo!

Não pode faltar

Limite: conceito

Considere que você deve efetuar a soma de uma quantidade variável *x* com o número 5. Podemos transformar isso em termos matemáticos escrevendo que queremos calcular os valores da função $f(x) = x + 5$ para vários valores de *x*. Assim, se $x = 1$, $f(1) = 1 + 5 = 6$, se $x = 1{,}5$, $f(1{,}5) = 1{,}5 + 5 = 6{,}5$. Se $x = 1{,}7$, $f(1{,}7) = 1{,}7 + 5 = 6{,}7$. Imagine que um engenheiro civil esteja projetando uma estrutura de grande porte (uma ponte ou um viaduto, digamos) e suponha que o valor $x = 2$ signifique um valor de restrição. Você pode pensar que a estrutura não poderá nunca assumir uma carga de 2 mil toneladas, caso contrário, entrará em colapso. Assim, você quer saber o que ocorre com os valores da função $f(x) = x + 5$ para valores de *x* cada vez mais próximos a 2, mas sem necessariamente *x* em algum momento ser igual a 2. Neste caso, vamos apenas somando os valores. Veja a Tabela 3.1 a seguir.

Tabela 3.1 | Valores de f(x) para x cada vez mais próximo de 2

x	1	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	6	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,99	6,999	6,9999

Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos que o resultado da soma x + 5, quando x se aproxima de 2, aproxima-se cada vez mais de 2. O procedimento acima é tão importante na Matemática, na Física, na Engenharia e em outras aplicações que existe uma simbologia para representa-lo: $\lim_{x \to 2} (x + 5) = 7$.

O conceito de limite está relacionado não com o valor de uma função em um determinado ponto $x = a$, mas com o valor da função quando *x* está "próximo" do valor a.

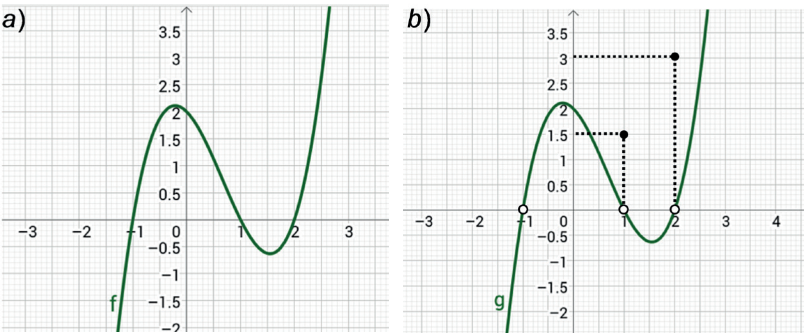
Vamos analisar um exemplo um pouco mais sofisticado. Considere a função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e

$f(x)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$ (forma fatorada). A partir desta função f podemos construir uma função $g(x)$ que coincide com a função f em quase todos os pontos, exceto em dois: $x=1$ e $x=2$. Faremos isso para ressaltar que o valor de uma função em um determinado ponto não precisar ser igual ao limite daquela função naquele ponto. Para isto, faremos a função $g(x)$ assumir o valor 1,5 quando $x=1$ e assumir o valor 3 quando $x=2$. Dessa forma, a função $g(x)$ é definida como $g(x)=\begin{cases}(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1), & x \neq -1, 1, 2 \\ 1{,}5, & x=1 \\ 3, & x=2\end{cases}$.

Observe que $g(x)$ não está definida para $x=-1$,ou seja, não existe o valor $g(-1)$. Dizer que a função não está definida em um ponto ($x=-1$ neste caso), significa que não existe valor *y* no conjunto imagem associado a este valor *x*.

Já para o ponto $x=1$, temos que $g(1)=1{,}5$ e, para $x=2$, $g(2)=3$. Os gráficos destas funções podem ser visualizados nas Figuras 3.1 (a) e (b).

Figura 3.1 | Gráfico da função $f(x)$(a), gráfico da função $g(x)$(b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Da Figura 3.1 (a) vemos que as raízes de f são -1, 1 e 2. Há uma outra forma de se escrever a função f, chamada de forma fatorada, que é $f(x)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Na forma fatorada é fácil de ser observar as raízes desta função, que são -1, 1 e 2, pois $f(-1)=0$, $f(1)=0$ e $f(2)=1$. Note que, se utilizarmos um papel para traçar o gráfico, podemos traçar a função $f(x)$ sem levantar o lápis do papel. Já para a função $g(x)$, temos pontos de descontinuidade: somos obrigados a tirar o lápis do papel quando nos aproximamos dos pontos $x=-1$, $x=1$ e $x=2$. Dizemos que tais pontos são pontos de descontinuidade para a função $g(x)$.

Nas Tabelas 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 apresentamos alguns valores numéricos para as funções $f(x)$ e $g(x)$. Nas Tabelas 3.3, 3.4 e 3.5 apresentamos o valor da função $g(x)$ quando *x* fica próximo, respectivamente de -1, 1 e 2. Compare os valores numéricos nestas tabelas com os gráficos da Figura 3.1 (a) e (b).

Tabela 3.2 | Valores numéricos para a função $f(x)$

X	-3	-2	-1,5	-1	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-40	-12	-4,375	0	2	1,125	0	-0,625	0

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na Tabela 3.3 que, para valores de x cada vez mais próximos a -1 à esquerda, os valores da função $g(x)$ ficam cada vez mais próximos de 0. É importante você conferir estes valores numéricos na Tabela 3.2 com a Figura 3.1 b). O mesmo vale para os valores de x aproximando-se de -1 pela direita. Também, neste caso, os valores da função $g(x)$ aproximam-se de 0. É importante que você verifique isto graficamente na Figura 3.1 b). Note que a função $g(x)$ não existe (não está definida) para $x=-1$, mesmo assim existe o limite da função $g(x)$ quando x aproxima-se de $x=-1$ (e este limite é igual a zero). Escrevemos, usando símbolos matemáticos, da seguinte forma: $\lim\limits_{x \to -1} g(x)=0$ e dizemos que o limite da função $g(x)$ quando *x* aproxima-se de -1 é igual a zero.

Tabela 3.3 | Valores numéricos para a função $g(x)$ para *x* próximo de -1

x	-0,9	-0,99	-0,999	-0,9999	-1	-1,0001	-1,001	-1,01	-1,1
$g(x)$	0,5510	0,0595	0,0060	0,0006	Não definida	-0,0006	-0,0060	-0,0605	-0,6510

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 3.4 temos os valores de x aproximando-se tanto pela esquerda como pela direita de $x=1$ para a função $g(x)$. Em símbolos matemáticos escrevemos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$ e lê-se: o limite de $g(x)$ para x tendendo a 1 é igual a 0. Neste caso, a função existe e vale que $g(1) = 1{,}5$.

Tabela 3.4 | Valores numéricos para a função $g(x)$ para x próximo de 1

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$g(x)$	0,2090	0,020099	0,002001	0,0002	1,5	-0,0002	-0,0020	-0,0199	-0,1890

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 3.5 temos outro exemplo para os valores de x aproximando-se pela esquerda e pela direita de $x = 2$ para a função $g(x)$. Em símbolos matemáticos escrevemos que $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$. Neste caso, a função existe e vale que $g(2) = 3$.

Tabela 3.5 | Valores numéricos para a função $g(x)$ para x próximo de 2

X	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$g(x)$	-0,2610	-0,0296	-0,0030	-0,0003	3	0,0003	0,0030	0,0304	0,3410

Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

Definição (não-rigorosa) de limite de uma função em um ponto:

Considere uma função $f(x)$ que esteja definida em um intervalo aberto que contenha o número a. A função $f(x)$ pode existir ou não neste ponto. Interpretamos $\lim_{x \to a} f(x) = y_0$ da seguinte forma: tomando-se valores de x tão próximos quanto quisermos do número a (mas não necessariamente iguais ao valor a), a função $f(x)$ ficará cada vez mais próxima do valor y_0. Lê-se a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = y_0$ como: o limite da função $f(x)$ quando x tende ao valor a é igual a y_0.

Vejamos alguns exemplos de cálculo imediato de limites.

Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 7} 9x - 5$: Neste caso, basta substituir o valor $x = 7$ na função dentro do limite: $\lim_{x \to 7} 9x - 5 = 9 \cdot 7 - 5 = 58$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 12}$: Observe que o denominador da função $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 12}$ não se anula para o valor no qual pretendemos calcular o limite (neste caso $x = 1$). Assim, basta substituirmos $x = 1$ na expressão da função $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 12}$ para obter o valor do limite: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 12} = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 - 1}{1 - 12} = -\frac{3}{11}$. O único valor para o qual não podemos efetuar esta substituição direta é $x = 12$.

c) $\lim_{x \to -3} \frac{2^x}{x + 5}$: também neste caso o denominador não se anula para $x = -3$. Basta substituirmos $x = -3$ na função dentro do limite: $\lim_{x \to -3} \frac{2^x}{x + 5} = \frac{2^{-3}}{-3 + 5} = \frac{2^{-3}}{2} = 2^{-4}$.

Nos exemplos anteriores não tivemos maiores dificuldades para calcular o limite. Vejamos o exemplo a seguir.

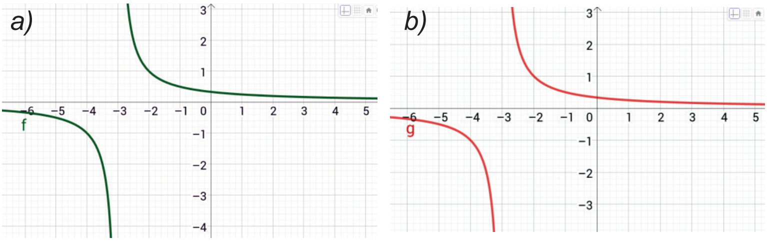
Exemplificando

Determine o valor de $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$.

Resolução: não podemos substituir diretamente o valor $x = 3$ na expressão $\frac{x - 3}{x^2 - 9}$ pois teríamos uma divisão por zero. Mas, observando que $\frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{(x + 3)}$, temos $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3}$. Agora podemos substituir o valor $x = 3$:

$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$. Confira com a Figura 3.2. Observe que, na verdade, as funções $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ e $g(x) = \frac{1}{x+3}$ são a mesma função.

Figura 3.2 | Gráfico de $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ (a) ; e de $g(x) = \frac{1}{x+3}$ (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

As propriedades operatórias de limites que apresentamos a seguir são úteis em grande variedade de situações.

Teorema - propriedades operatórias de limites: suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam duas funções e que existam os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$. Então, valem as seguintes propriedades:

a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

b) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$.

c) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$.

d) $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

e) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

(STEWART, 2016)

Exemplificando

Determine o valor do limite $\lim_{x\to 2}\left[2x^3-4x^2+5x-8+3sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)-3^{-x}\right]$

Aplicamos a propriedade de que o limite da soma é igual à soma dos limites:

$$\lim_{x\to 2}\left[2x^3-4x^2+5x-8+3sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)-3^{-x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}2x^3+\lim_{x\to 2}-4x^2+\lim_{x\to 2}5x+\lim_{x\to 2}-8+\lim_{x\to 2}3sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\lim_{x\to 2}-3^{-x}=$$

$$=2\cdot 2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2-8+3sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-3^{-2}=16-16+10-8+3-3^{-2}=5-\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{44}{9}.$$

Observe a Tabela 3.6 e a Figura 3.3 no que se refere as alíquotas para o Imposto de Renda para 2018. Este é um exemplo de função descontínua, ou seja, uma função que não conseguimos elaborar o gráfico sem levantar o lápis do papel. Em outras palavras, uma função descontínua apresenta algum tipo de salto ou degrau.

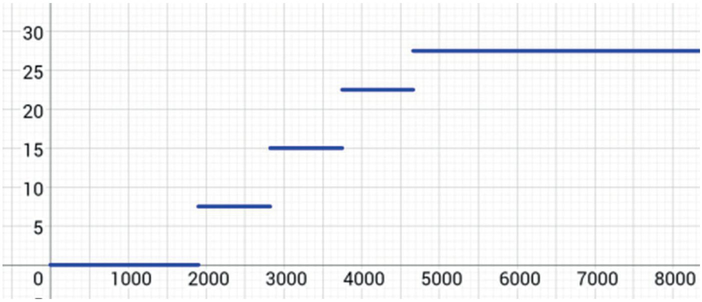
Tabela 3.6 | Alíquotas do Imposto de Renda – exemplo de função descontínua

Base de cálculo (em R$)	Alíquota (%)
Até R$ 1903,98	isento
De R$ 1.903,99 até 2.826,65	7,5
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5
Acima de R$ 4.664,68	27,5

Fonte: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 16 ago. 2018.

Na Figura 3.3 apresentamos o gráfico da função apresentada na Tabela 3.6.

Figura 3.3 | Alíquotas do Imposto de Renda – exemplo de função descontínua

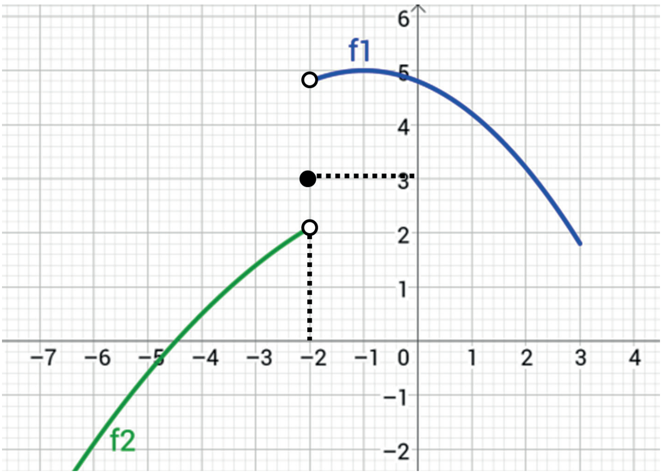


Fonte: elaborada pelo autor.

Por outro lado, funções para as quais conseguimos desenhar o gráfico sem levantar o lápis do papel são chamadas de funções contínuas. As funções contínuas não apresentam saltos. Grande parte dos fenômenos físicos é descrita por funções contínuas: o movimento de um automóvel, por exemplo, não apresenta saltos.

Para exemplificar, considere a função $f(x)=\begin{cases} -0{,}2(x+2)^2+5, & x>-2 \\ 3, & x=-2 \\ -0{,}1(x+2)^2+2, & x<-2 \end{cases}$ e seu gráfico apresentado na Figura 3.4.

Figura 3.4 | Exemplo de descontinuidade



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao nos aproximarmos do ponto $x=-2$, a partir de valores menores que -2, a função assume valores cada vez mais próximos de 2. Para x exatamente igual a -2, a função vale exatamente 3. Quando nos aproximamos do ponto $x=-2$ a partir de valores maiores que -2, a função assume valores cada vez mais próximos de 5. Você poderá verificar isto construindo uma tabela de valores numéricos para tais situações assim como fizemos nas Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4. Quando estamos nos aproximando do ponto $x=-2$ a partir de valores menores que -2, dizemos que estamos tomando o limite lateral à esquerda e escrevemos $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$. No exemplo acima, temos que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=2$.

Esta diferença de resultados dos limites de uma função, dependendo se estamos nos aproximando pela esquerda ou pela direita, leva ao conceito de limite lateral. Se uma função é descontínua por saltos (como a da Figura 3.4), seus limites laterais no ponto de descontinuidade serão diferentes.

Definição limite lateral à direita: o limite à direita da função f(x) no ponto x = a é A e o representamos por lim x→ a+ f(x) = A, quando para valores cada vez mais próximos de a (mas superiores a ele), o valor da função f(x) fica cada vez mais próximo ao valor numérico A. (STEWART, 2016).

Definição limite lateral à esquerda: o limite à esquerda da função f(x) no ponto x = a é A e o representamos por lim x→ a- f(x) = A, quando para valores cada vez mais próximos de a (mas inferiores a ele), vale que o valor da função f(x) fica cada vez mais próximo do valor numérico A. (STEWART, 2016).

No caso da função apresentada na Figura 3.4, quando estamos nos aproximando do ponto $x=-2$ a partir de valores maiores que -2, dizemos que estamos tomando o limite lateral à direita e escrevemos $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$. No exemplo anterior, temos que $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=5$. Observe que os limites laterais podem assumir valores diferentes, além disso, a função $f(x)$ pode assumir um terceiro valor distinto dos anteriores. Assim, temos que $f(-2)=3$.

Definição - existência do limite: dizemos que o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ existe se, e somente se, os limites laterais são iguais a um número L, ou seja: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

Considere a função apresentada na Figura 3.3. Como temos que os limites laterais $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 5$, não existe o limite $\lim_{x \to -2} f(x)$ (STEWART, 2016).

Pesquise mais

Para saber mais sobre limites você pode assistir à vídeo-aula da Univesp do professor Cláudio Possani, Aula 4- Limites, parte 1(do início até 12:00, depois de 14:28 até 19:40) e a parte 2 (do início até 3:42 depois de 6:10 até 8:40 depois de 15:00 até o final).

Disponível em: <https://youtu.be/fXxQ1oJjMSo>; <https://youtu.be/caGzd9W-or0>. Acesso em: 16 ago. 2018.

Agora apresentamos a definição de continuidade de uma função em um ponto $x = a$.

Definição continuidade (STEWART, 2016): dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se:

i) A função $f(x)$ está definida para $x = a$

ii) O limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

iii) Vale que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Assim, retomando a função apresentada na Figura 3.2, ela é contínua em todos os pontos de seu domínio, exceto no ponto $x = -2$, pois o $\lim_{x \to -2} f(x)$ não existe neste ponto.

Dica

Para auxiliá-lo na construção de gráficos de funções e estudar os limites das funções, você poderá consultar o OED especialmente construído para ajudá-lo neste propósito.

Retomando à função apresentada no gráfico da Figura 3.1 (b), temos que ela é contínua em todos os pontos de seu domínio exceto os pontos $x = 1$ e $x = 2$, pois, para cada um destes pontos, vale que $\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq f(1) = 1{,}5$ e $\lim_{x \to 2} f(x) = 0 \neq f(2) = 3$.

Pesquise mais

Para conhecer outros Teoremas importantes sobre limites, sugerimos que você consulte as páginas 111 a 114do livro indicado a seguir, também disponível Biblioteca Virtual.

STEWART, James. **Cálculo Volume** I. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

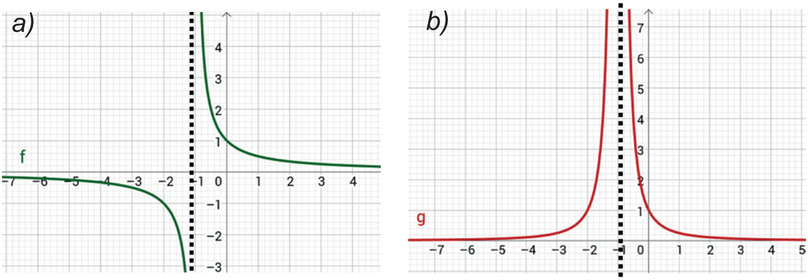
Reflita

Como podemos utilizar a informação que funções trigonométricas são funções contínuas para calcular o limite $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{5 \cdot sen(x)}{4 - \cos(x) \cdot sen(x)}$?

Limites finitos e infinitos, limites no infinito

Considere as funções $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ representadas nos gráficos da Figura 3.5.

Figura 3.5 | (a) – $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ (b),



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que na Figura 3.4 (a), à medida que nos aproximamos de $x=-1$ pela direita (valores maiores que 1), os valores da função $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ficam cada vez maiores (e positivos) e, quando nos aproximamos de $x=-1$ pela esquerda (valores menores que -1), os valores da função $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ficam cada vez menores (e negativos). Assim, dizemos que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\infty$. Já para a função $g(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ temos que $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\infty$. As retas verticais assinaladas nos dois gráficos são denominadas de assíntotas verticais.

Assimile

Definição (assíntotas horizontais): a reta horizontal para a qual tendem os valores de uma função $f(x)$ quando $x\to\infty$, ou $x\to-\infty$, é denominada de assíntota horizontal.

É importante distinguirmos os limites finitos (cuja resposta é um valor numérico bem definido) dos últimos limites que vimos na Figura 3.4 (a) e (b), os quais são denominados limites infinitos. Veja a seguir a apresentação formal do que são limites infinitos. Existem situações nas quais a medida que os valores de x aproximam-se de um valor a, os correspondentes valores da função $f(x)$ definida sobre algum intervalo aberto (que contém o valor a) ficam arbitrariamente maiores que qualquer número real $M>0$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Fenômeno similar ocorre quando temos os valores de $f(x)$ menores que qualquer número real $M<0$. Para isso, escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$. Estas diferentes situações estão exemplificadas nas Figuras 3.4 (a) e (b).

Faça você mesmo

Considere a função $h(x)=\dfrac{5x}{(x+1)^2}$. Determine a assíntota vertical para esta função.

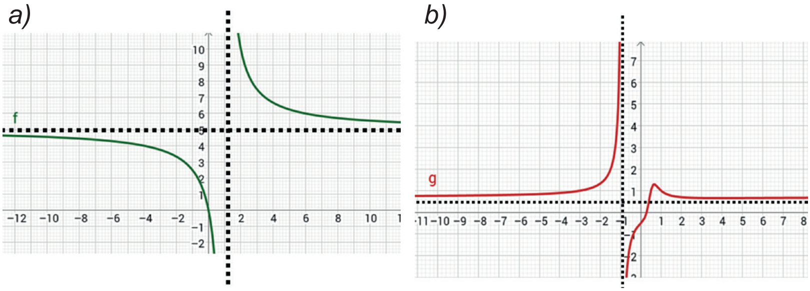
Limites no infinito

Antes de tudo, vamos reforçar a distinção entre limites infinitos e limites no infinito. Por limites infinitos, estamos tratando das funções apresentadas na Figura 3.5. Observe que estas funções "explodem" para + infinito ou para – infinito. Já limites no infinito tratam de situações para as quais o valor do argumento x fica um número positivo cada vez maior (tendendo ao infinito positivo) ou um número negativo cada vez mais negativo (tendendo ao infinito negativo). Uma questão prática relacionada com limites no infinito seria estudar o comportamento de uma máquina (se você for um engenheiro) ou de uma população de bactérias (se você for um estudioso de fenômenos biológicos) após aguardarmos um tempo infinitamente longo. Veja que limites no infinito podem tender a uma constante finita que pode ser positiva ou negativa (muitas vezes isso ocorre na vida real). Esta constante é denominada de assíntota horizontal. Consulte a Figura 3.5 para visualizar limites no infinito.

Vejamos agora dois exemplos de limites no infinito.

Considere as funções $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{5x^3-3x^2+4x-1}{7x^3-4x+2}$ e suponha que estejamos interessados em avaliar seu comportamento para valores de x, tais que $x\to\infty$ e para valores de x, tais que $x\to-\infty$. Podemos fazer os gráficos de cada uma dessas funções para obter alguma intuição visual, muito embora um gráfico não possua o estatuto de demonstrar a veracidade da conclusão que estejamos obtendo. Mesmo assim, observando o gráfico da Figura 3.5 (a) para a função $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$, intuímos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$. Da figura 3.6 (b), intuímos que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ aproximam-se de algum valor pouco inferior a 1.

Figura 3.6 | (a) – $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$ (b) – $g(x)=\dfrac{5x^3-3x^2+4x-1}{7x^3-4x+2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

A função $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$ possui como assíntota vertical a reta $x=1$ e a função $g(x)=\dfrac{5x^3-3x^2+4x-1}{7x^3-4x+2}$ possui como assíntota vertical a reta $x \cong -0{,}93627$.

Vejamos como calcular cada um destes limites. Inicialmente, se dividirmos algum número por valores cada vez maiores (positivos ou negativos), resultará em valores cada vez menores, ou seja, vale que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x[5]}{x\left[1-\dfrac{1}{x}\right]}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\left[1-\dfrac{1}{x}\right]}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{1}=5$. Podemos repetir o mesmo procedimento para mostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x-1}=5$.

Aplicações

Aplicação de limites à Física

Da lei de ohm da eletricidade, sabemos que a corrente elétrica é proporcional à tensão aplicada, o que pode ser expresso pela equação $I=\dfrac{V}{R}$, onde I é a corrente elétrica (medida em ampéres), V é a voltagem (medida em volts) e R é a resistência (em ohms). Podemos utilizar limites para avaliar o comportamento da corrente elétrica em um circuito com voltagem de 5 volts e valores cada vez maiores para a resistência.

Para fazer isso, basta tomarmos o limite $\lim_{R\to\infty} I(R) = \lim_{R\to\infty} \frac{5}{R}$. Como a divisão de um número constante por números cada vez maiores tende a zero, temos que $\lim_{R\to\infty} I(R) = \lim_{R\to\infty} \frac{5}{R} = 0$. Ou seja, um circuito elétrico com resistência muito elevada não permite a passagem de corrente elétrica.

Por outro lado, quando a resistência R tende a zero, temos a situação do curto-circuito. Cabe ressaltar que, na verdade, a resistência nunca cai realmente a zero, embora ela possa tender a zero. Como a divisão de uma constante por números cada vez menores resulta em valores cada vez maiores, concluímos que a corrente elétrica tende a $+\infty$. O que acabamos de afirmar em "palavras", sem símbolos matemática, usaremos limites para avaliar o comportamento da corrente elétrica quando a resistência tende a zero da seguinte forma: $\lim_{R\to 0} I(R) = \lim_{R\to 0} \frac{5}{R} = +\infty$. Qual a consequência disso? Quando a corrente elétrica se torna muito elevada, teremos aquecimento nos fios, podendo resultar em incêndios.

Sem medo de errar

Você faz parte de um grupo de sócios de uma empresa que fabrica embalagens. Esta empresa está estudando a construção de uma nova fábrica e, para isso, precisa analisar a viabilidade do projeto.

A gerência de custos decompôs os custos de produção (em milhões de R$) em suas várias componentes, sendo que uma destas componentes representa os custos para uma quantidade específica de trabalhadores ao longo do tempo e é dada pela função $C(x) = \frac{32x^4 - 27x^3 + 14x^2 - 45x + 135}{25x^4 + 36x^3 + 88x^2 + 17x + 1329}$, onde x representa o tempo em meses.

Vejamos cada uma das questões formuladas:

Este custo cresce indefinidamente? É possível determinar se este custo se aproxima de algum valor numérico específico? Se sim, qual?

Para responder a esta questão, devemos calcular o limite:

$$\lim_{x\to\infty} C(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{32x^4 - 27x^3 + 14x^2 - 45x + 135}{25x^4 + 36x^3 + 88x^2 + 17x + 1329} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left[32 - \frac{27x^3}{x^4} + \frac{14x^2}{x^4} - \frac{45x}{x^4} + \frac{135}{x^4}\right]}{x^4\left[25 + \frac{36x^3}{x^4} + \frac{88x^2}{x^4} + \frac{17x}{x^4} + \frac{1329}{x^4}\right]} =$$

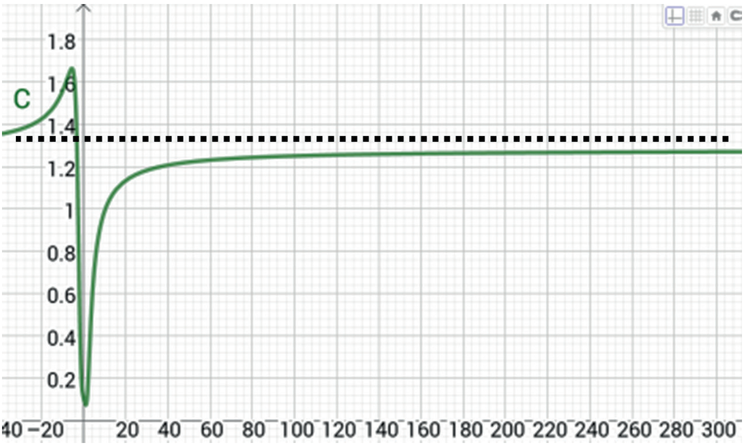
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{32}{25} = \frac{32}{25}.$$

No limite acima devemos ressaltar que x^4 cresce mais rapidamente que x^3, de tal forma que x^3/x^4 assumirá valores cada vez menores se x tende para infinito. Em símbolos matemáticos escrevemos que lim x→ +infinito x^3/x^4 =0. O mesmo vale para lim x→ +infinito x^2/x^4 = 0, lim x→ +infinito 135/x^4 =0 e o limites análogos no denominador da expressão acima.

Portanto, essa função não cresce indefinidamente e o custo tem como limite o valor de R$ $\frac{32}{25}$ milhões.

O gráfico para esta função está representado na Figura 3.7.

Figura 3.7 | Limite da função do problema com assíntota horizontal



Fonte: elaborada pelo autor.

No gráfico apresentado podemos visualizar em destaque a assíntota horizontal para a função.

$$C(x) = \frac{32x^4 - 27x^3 + 14x^2 - 45x + 135}{25x^4 + 36x^3 + 88x^2 + 17x + 1329}.$$

Dessa forma, você concluiu sua primeira tarefa com sucesso.

Avançando na prática

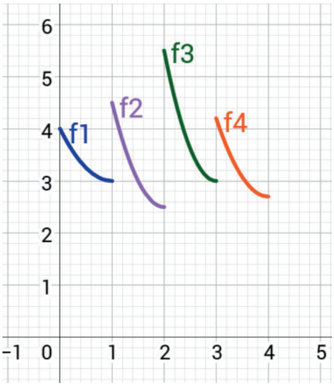
Uso de limites nas Ciências Farmacêuticas

Descrição da situação-problema

Um estudante foi contratado por uma indústria farmacêutica para estudar a melhor forma de se inocular um medicamento em desenvolvimento. Os testes efetuados até o momento apontam que, para que o tratamento tenha sucesso, a concentração no sangue (chamado de nível sérico ou do soro) deste medicamento não pode ultrapassar 6 $\mu g/dL$ (microgramas por decilitro), com valor máximo ideal de 5 $\mu g/dL$, sem nunca ficar abaixo de 3 $\mu g/dL$.

Na Figura 3.8 são apresentadas as funções que descrevem os resultados dos testes efetuados.

Figura 3.8 | Níveis séricos de medicamento em estudo



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos observar os gráficos da concentração de uma medição aplicada por via venosa em um paciente na hora assinalada como zero e o decaimento da concentração deste medicamento na corrente sanguínea até a hora 1. Em seguida, vemos uma nova dose sendo aplicada na hora 1 e o decaimento dela até a hora 2.

O gráfico segue de forma similar com as doses representadas pelas funções f3 e f4.

As funções são dadas pelas expressões

$$f1(x) = (x-1)^2 + 3,\ 0 \le x \le 1$$

$$f2(x) = 2(x-2)^2 + 2{,}5,\ 1 < x \le 2$$

$$f3(x) = 2{,}5(x-3)^2 + 3,\ 2 < x \le 3$$

$$f4(x) = 1{,}5(x-4)^2 + 2{,}7,\ 3 < x \le 4$$

Identifique os limites laterais para cada uma destas funções nos pontos $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$.

Resolução da situação-problema

Para o ponto $x = 1$:

Limite lateral à esquerda: do gráfico acima podemos observar que $\lim\limits_{x \to 1^-} f1(x) = 3$

Limite lateral à direita: $\lim\limits_{x \to 1^+} f2(x) = 4{,}5$. Determinamos este valor substituindo $x = 1$ na função $f2(x) : f2(1) = 2 + 2{,}5 = 4{,}5$

Para o ponto $x = 2$:

Limite lateral à esquerda: $\lim\limits_{x \to 2^-} f2(x) = 2{,}5$. Determinamos este valor substituindo $x = 2$ na função $f2(x) : f2(2) = 2{,}5$.

Limite lateral à direita: $\lim\limits_{x \to 2^+} f3(x) = 5{,}5$. Determinamos este valor substituindo $x = 2$ na função $f3(x) : f3(2) = 5{,}5$.

Para o ponto $x = 3$:

Limite lateral à esquerda: $\lim\limits_{x \to 3^-} f3(x) = 4{,}2$ Determinamos este valor substituindo $x = 3$ na função $f4(x) : f4(3) = 4{,}2$.

Limite lateral à direita: $\lim\limits_{x \to 3^+} f4(x) = 2{,}7$. Determinamos este valor substituindo $x = 3$ na função $f4(x) : f4(4) = 2{,}7$.

Análise dos resultados obtidos: conforme observamos pelos limites laterais, ao final da 2ª hora, o nível sérico do medicamento caiu abaixo do nível mínimo 3 *µg/dL*, mas ao início da 3ª hora ficou acima do nível máximo admitido de 5 *µg/dL*, com isso, o estudante, utilizando limites laterais, obteve a informação de que são necessários ajustes na forma como o medicamento é administrado ou no próprio medicamento que vem sendo pesquisado.

Faça valer a pena

1. Suponha que a função $C(x) = 37 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 11 \cdot 2^{-3x}$ representa o custo por produto por x unidades produzidas em uma fábrica, medido em reais.

Então é correto afirmar que:

a) $\lim_{x \to 0} C(x) = 37$

b) $\lim_{x \to 1} C(x) = 45$

c) $\lim_{x \to \infty} C(x) = 37$

d) $\lim_{x \to 1} C(x) = 37 + \frac{11}{2}$

e) $\lim_{x \to 1} C(x) = 37 + \frac{11}{2}$

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, \ x \leq -1 \\ -2 - x, \ -1 < x \leq 1 \\ 3x, \ 1 < x \leq 3 \\ x^2, \ x > 3 \end{cases}$.

E as afirmações:

I. $x = -1$ é o único ponto de descontinuidade dessa função.

II. Existem dois pontos de descontinuidade: $x = -1$ e $x = 1$.

III. É correto afirmar que $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

IV. A função f é contínua no ponto $x = 3$.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

a) Somente a afirmativa IV está correta.
b) Somente as afirmativas II e III estão corretas.
c) Somente as afirmativas II e IV estão corretas.
d) Somente as afirmativas I, II e IV estão corretas.
e) Somente a afirmativa II está correta.

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{5-2x}{3x-7}$ e se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

( ) Esta função possui uma assíntota horizontal em $x = \dfrac{7}{3}$.

( ) Esta função possui uma assíntota vertical em $y = \dfrac{5}{2}$.

( ) É correto que $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5-2x}{3x-7} = -\dfrac{5}{8}$.

( ) Esta função é contínua para $x = 3$.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) F – F – V – F.
b) F – V – V – F.
c) V – V – F – F.
d) F – F – V – V.
e) F – F – F – V.

Seção 3.2

Cálculo diferencial

Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos limites, limites infinitos, limites no infinito e continuidade de funções. Associados aos limites no infinito e limites infinitos, também vimos as assíntotas verticais e assíntotas horizontais e a importância desta informação para avaliar o comportamento de uma função.

Nesta seção estudaremos a taxa de variação de uma função, sua relação com a reta tangente a uma função, o conceito de derivada e as regras do produto e do quociente para cálculo de derivadas.

Após você ter resolvido o problema da seção anterior, o grupo de empresários do qual você faz parte precisará nesta etapa definir a taxa de variação com a qual uma certa embalagem pode ser produzida a cada mês como função do consumo de água em milhares de metros cúbicos, bem como apresentar a estimativa para a produção quando são consumidos 10 mil metros cúbicos de água. Após você ter efetuado levantamentos quantitativos junto à gerência de operações da fábrica, foi possível modelar a quantidade de embalagens produzida por mês (em milhares de unidades) como sendo dada pela função $P(x)=\dfrac{3x^3-4x^2+2x-5}{11x^2-3x+19}$.

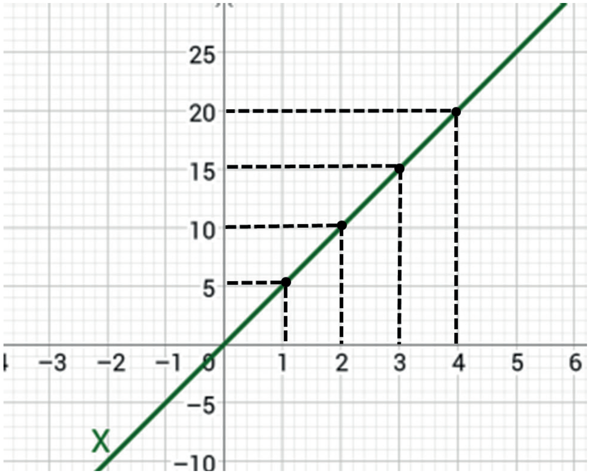
Nesta seção serão apresentados os fundamentos para que você possa resolver este problema, bem como os fundamentos do cálculo diferencial e suas aplicações. Com todas estas informações, você certamente estará aparelhado para vencer a questão proposta.

Não pode faltar

Derivada: conceito e propriedades

Suponha que uma colheitadeira percorra uma fazenda a uma velocidade média de $5\,km/h$. Na Figura 3.9 apresentamos o gráfico da posição da colheitadeira em função do tempo.

Figura 3.9 | Gráfico posição x tempo da colheitadeira de soja



Fonte: elaborada pelo autor.

A função que representa a posição da colheitadeira em função do tempo é $x(t)=5\cdot t$, onde t é medido em horas. Assim, para $t=1$ a posição é $x(1)=5\cdot 1=5km$, para $t=2$ a posição é $x(2)=5\cdot 2=10km$ e assim por diante. A posição da colheitadeira varia 5 quilômetros para cada hora decorrida. Observe que a velocidade da colheitadeira coincide com a inclinação da função afim e que esta velocidade corresponde à taxa de variação média entre cada hora decorrida. A partir deste exemplo, apresentamos a definição a seguir.

Definição taxa média de variação, Define-se a taxa média de variação da função $f(x)$ quando x varia entre x_1e x_2 pela expressão $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (STEWART, 2016).

É importante a seguinte interpretação para a taxa média de variação: a taxa média de variação de uma função mede quantas vezes uma variação no eixo *y* (na vertical) é maior que uma variação no eixo *x* (na horizontal). Em outras palavras, essa taxa é uma medida da "velocidade média" de variação da função entre os pontos x_1 e x_2.

Contudo, este conceito de velocidade média é limitado para descrever o que ocorre na realidade. Quando o motorista de um automóvel "pisa" no acelerador (ou no freio), ele está alterando a velocidade do veículo, ou seja, ele está alterando a taxa com que a distância em quilômetros é percorrida por hora (se a velocidade for medida em km/h). Assim, embora a velocidade média do carro possa ser, digamos, 50 km/h, sua velocidade a cada instante será maior ou menor que este valor. Em muitas aplicações, estamos interessados na taxa de variação da função em um instante específico. Isso nos leva à definição de taxa instantânea de variação.

A taxa instantânea de variação de uma função em um ponto $P = (x_1, f(x_1))$ consiste na avaliação da velocidade instantânea de variação da função naquele ponto e é dada pela definição a seguir.

Definição taxa instantânea de variação de uma função em um ponto: a taxa instantânea de variação da função $f(x)$ no ponto $P = (x_1, f(x_1))$ é dada pelo limite (se existir): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (STEWART, 2016).

Reflita

O que podemos concluir sobre os sinais da taxa de variação das funções $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = 2^{-x}$ observando seus gráficos?

No estudo de funções nós estendemos o conceito de velocidade para o que é chamado de taxa de variação da função. Tomemos como exemplo um engenheiro que esteja estudando a taxa de dilatação térmica de uma barra metálica com a temperatura, ou um administrador de empresas interessado na taxa de variação dos custos de produção à medida que variam as unidades produzidas na fábrica ou, ainda, um profissional da área de saúde interessado na taxa de variação com que um remédio é absorvido pelo paciente.

Em todos estes casos estamos interessados em medir a "velocidade" com que cada uma destas funções varia em determinados pontos. Veremos agora como calcular essa taxa média de variação para a função afim $f(x) = 3x + 1$ entre os pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

A expressão $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ é uma medida da maneira com que a função *f* varia entre os pontos x_0 e x_1. Calculando $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, obtemos $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{(3\cdot 2+1)-(3\cdot 1+1)}{2-1}=3$. Se mudarmos os pontos x_0 e x_1 para $x_0=2$ e $x_1=3$, também obteremos que a taxa média de variação com que a função $f(x)=3x+1$ varia entre dois pontos é igual a 3. Vejamos agora o cálculo para $x_0=2$ e $x_1=3$: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{(3\cdot 3+1)-(3\cdot 2+1)}{2-1}=3$

Na verdade, para quaisquer dois pontos x_0 e x_1, a taxa média de variação desta função $f(x)=3x+1$ é sempre igual a 3. Indo mais além, a velocidade de variação de qualquer função afim $f(x)=ax+b$ é sempre igual a seu coeficiente angular *a*.

Considere agora a função $g(x)=x^2$ e calculemos a velocidade com que ela varia entre os pontos $x_0=1$ e $x_1=2$: $\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$. Refazendo o mesmo cálculo para os pontos $x_0=2$ e $x_1=3$: $\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{3^2-2^2}{3-2}=5$ e para os pontos $x_0=3$ e $x_1=4$, teremos $\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{4^2-3^2}{4-3}=7$. Observe que a velocidade de variação neste caso não é constante, mas está aumentando. Este fato está associado com o gráfico da função, cuja a inclinação da função aumenta conforme *x* aumenta.

No exemplo a seguir vemos como a taxa de variação pode ser utilizada para avaliar a velocidade com que uma função varia em um ponto.

Exemplificando

Suponha que uma empresa produza azulejos para residência a um custo de produção em R$ dado pela função $f(x)=x^2-60x+1085$, onde *x* representa a quantidade (em metros quadrados) de azulejos produzidos.

Qual a taxa de variação do custo ao se produzir $5000\ m^2$ de azulejos?

Resolução: esta taxa de variação é dada pelo limite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{\left[x_2^2-60x_2+1085\right]-\left[x_1^2-60x_1+1085\right]}{x_2-x_1}$$

Onde $x_1=5000$ e x_2 aproxima-se cada vez mais de x_1.

Podemos reescrever o numerador do limite acima como:

$$\left[x_2^2-60x_2+1085\right]-\left[x_1^2-60x_1+1085\right]=x_2^2-x_1^2-60x_2+60x_1$$

Fatorando por diferença de quadrados e usando o 60 como fator comum, temos: $x_2^2-x_1^2-60x_2+60x_1=(x_2-x_1)(x_2+x_1)-60(x_2-x_1)$.

Fatorando novamente chegamos a $(x_2-x_1)(x_2+x_1)-60(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left[(x_2+x_1)-60\right]$.

Substituímos esta última expressão no numerado do limite:

$$\lim_{x_2\to x_1}\frac{\left[x_2^2-60x_2+1085\right]-\left[x_1^2-60x_1+1085\right]}{x_2-x_1}=$$

$\lim_{x_2\to x_1}\dfrac{(x_2-x_1)\left[(x_2+x_1)-60\right]}{x_2-x_1}$ Podemos cancelar o fator (x_2-x_1) chegando a $\lim_{x_2\to x_1}\dfrac{(x_2-x_1)\left[(x_2+x_1)-60\right]}{x_2-x_1}=\lim_{x_2\to x_1}(x_2+x_1)-60$.

Como $x_1=5000$ e x_2 aproximam-se cada vez mais de x_1, substituímos $x_2=5000$ no limite $=\lim_{x_2\to x_1}(x_2+x_1)-60$, obtendo

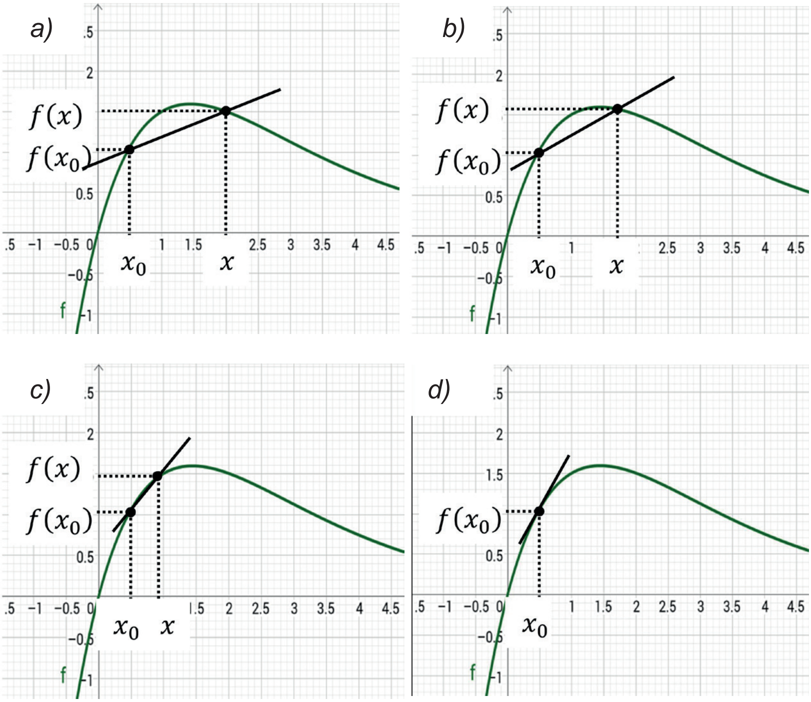
$$\lim_{x_2\to 5000}(x_2+x_1)-60=(5000+5000)-60=10000-60=9940.$$

Podemos interpretar este resultado da seguinte forma: considere que após produzidos 5000 metros quadrados de azulejo, o custo de produção para se fazer $\Delta x=1$ metro quadrado adicional de azulejo será aproximadamente de R$ 9.940,00, ou seja, é quanto o custo varia ao produzirmos esta unidade adicional de metro quadrado de azulejo a partir do valor base de 5000 metros quadrados.

Para avaliarmos a taxa média de variação com que uma função varia em um ponto, partimos da reta secante ao gráfico da função $f(x)$, passando pelos pontos x e x_0. Considere, nos gráficos da Figura 3.10, a reta secante à função $f(x)$, com x cada vez mais próximo de x_0.

Veja que, à medida que $x \to x_0$, a reta secante aproxima-se cada vez mais da reta tangente.

Figura 3.10 | Reta secante à função $f(x)$ para $x \to x_0$ (a); (b) (c) reta tangente à função $f(x)$ (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição reta tangente) Considere a função $f(x)$ e o ponto em seu gráfico $P = (x_0, f(x_0))$. A reta tangente à função $f(x)$, que passa pelo ponto P, possui inclinação dada pelo limite $m = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (STEWART, 2016).

Alternativamente à definição acima, a inclinação da reta tangente à função $f(x)$ passando pelo ponto $P = (x_0, f(x_0))$ também pode ser determinada pelo limite $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, onde usamos que $h = x - x_0$.

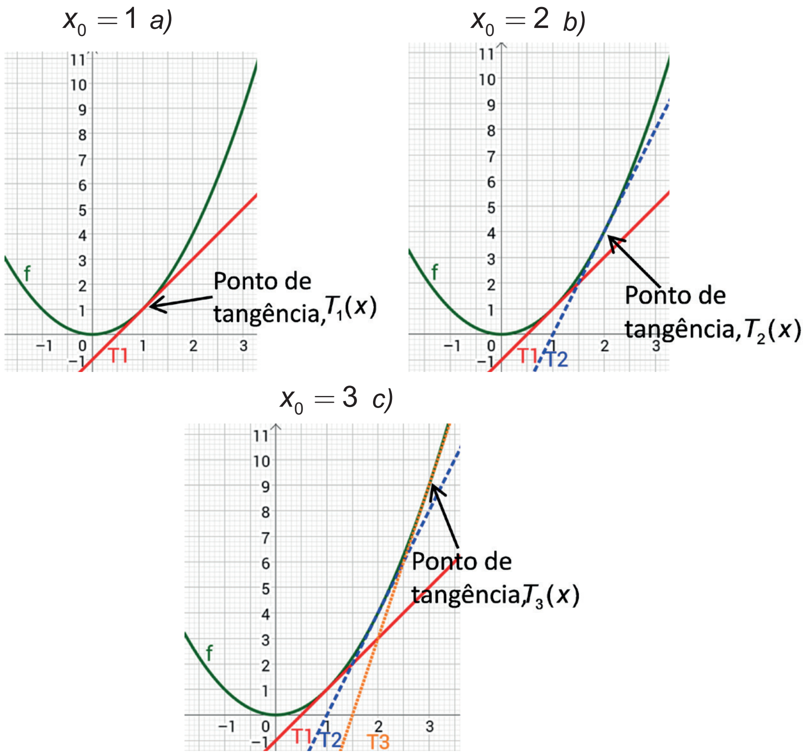
Assimile

O ponto fundamental aqui é: a taxa média de variação com que uma função varia em um ponto está associada com a inclinação da reta tangente à função neste ponto.

Observe a Figura 3.11 apresentando as retas tangentes à função $g(x) = x^2$ nos pontos $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ e $x_0 = 3$. Veja que a velocidade com que esta função varia aumenta para valores cada vez maiores de x.

A equação da reta tangente à função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é dada pela expressão $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Figura 3.11 | Retas tangentes ao gráfico de $g(x) = x^2$ nos pontos indicados



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

As retas tangentes da Figura 3.11 possuem coeficiente angular positivo. Você poderia apresentar exemplos de retas tangentes com coeficiente angular negativo?

A partir da definição de reta tangente introduz-se um dos mais importantes conceitos da Matemática, o conceito de derivada de uma função em um ponto.

Definição derivada de função em um ponto: Define-se a derivada da função $f(x)$ no ponto $P=(x_0,f(x_0))$ pelo limite $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (se este limite existir no ponto). Leia-se o símbolo $f'(x_0)$ como "*f* linha em x_0" ou "derivada de f no ponto x_0" (STEWART, 2016, p. 133).

Além da notação $f'(x)$ para derivada, também é utilizada para indicar a derivada da função *f* a notação $\dfrac{df(x)}{dx}$, ou seja, $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$.

Como já apresentado anteriormente, a derivada de uma função em um ponto está diretamente associada à taxa de variação com que a função varia naquele ponto.

Se uma função $f(x)$ possui derivada em um ponto $P=(x_0,f(x_0))$, dizemos que esta função é derivável naquele ponto.

Derivadas de funções simples

Embora a derivada de uma função em um ponto seja definida a partir de um limite, existem regras práticas que tornam bem mais simples o cálculo de derivadas das funções mais utilizadas na prática. Na Tabela 3.7 apresentamos estas derivadas ($n\in\mathbb{R}$).

Tabela 3.7 | Tabela de derivadas

$f(x)=a \;\; a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=a\cdot x^n$	$f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$, $a,n\in\mathbb{R}$
$f(x)=sen(x)$	$f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=cos(x)$	$f'(x)=-sen(x)$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln(a) \;\; a\in\mathbb{R},a>0$
$f(x)=\log_b(x)$, $x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln(b)}$, $b\in\mathbb{R},0<b\neq 1$.

Fonte: elaborada pelo autor.

Atente-se que a Tabela 3.7 mostrou a expressão $f'(x)=a^x\ln(a)$. Você já calculou logaritmos na base 10 ou em outras bases. Além dessas bases, existe uma outra para logaritmos que aparece em muitos problemas de crescimento ou decrescimento (crescimento de juros compostos continuamente, é uma situação clássica). Esta base que aparece de forma natural na resolução de tais problemas é dada pelo número irracional representado pela letra e, sendo que $e\cong 2{,}71828...$. Os logaritmos tomados nesta base são denominados de logaritmos naturais ou logaritmos neperianos. Para calcular o logaritmo neperiano de algum número no Excel, você deve usar a função $\ln(número)$. Em uma calculadora científica você deve procurar o botão indicando "ln". Para você conferir no Excel ou na sua calculadora científica, calcule o logaritmo neperiano de 2. A resposta é $\ln(2)\cong 0{,}693$.

Outro ponto importante, de forma a simplificar a resolução de uma derivada, é que ao efetuarmos a derivada de uma função multiplicada por uma constante a, essa constante "sai" do sinal de derivação: $[a\cdot f(x)]'=a\cdot f'(x)$

Por exemplo, se $f(x)=7x^5$, então sua derivada será $f'(x)=35x^4$.

Veja este outro exemplo com expoente fracionário: $f(x)=\sqrt[3]{x^{17}}$.

Temos: $f(x)=\sqrt[3]{x^{17}}=x^{\frac{17}{3}}$. Dessa forma,

$$f'(x)=\frac{17}{3}x^{\frac{17}{3}-1}=\frac{17}{3}x^{\frac{17}{3}-\frac{3}{3}}=\frac{17}{3}x^{\frac{14}{3}}=\frac{17}{3}\sqrt[3]{x^{14}}.$$

Após conhecermos as regras acima, fica mais simples determinarmos a equação da reta tangente a uma função, passando por um ponto $P=(x_0,f(x_0))$. É o que faremos na sequência.

A equação da reta tangente à função $f(x)$ que passa pelo ponto $P=(x_0,f(x_0))$ é dada por $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Vejamos um exemplo de como determinar a equação da reta tangente a uma função por um ponto dado.

Exemplificando

Determine a reta tangente à função $f(x)=x^2$ passando pelo ponto cuja abscissa é $x_0=5$.

Resolução: a derivada de f é $f'(x)=2x^{2-1}=2x^1=2x$, calculada no ponto $x_0=5$ fica $f'(x_0)=2\cdot 5=10$. Portanto, a equação da reta tangente à função $f(x)=x^2$ em $x_0=5$ é $T(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=25+10(x-5)=10x-25$.

Sugerimos que você plote as funções $f(x)=x^2$ e $T(x)=10x-25$ no Geogebra. Observe o ponto de tangência em $x_0=5$.

Valem as seguintes propriedades para a derivação de funções.

Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis e $c\in\mathbb{R}$ uma constante. Então vale que:

i. $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$ (a derivada da soma é igual à soma das derivadas).

ii. $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$ (a derivada da diferença é igual à diferença das derivadas).

iii. $[cf(x)]'=cf'(x)$.

Regra do produto e do quociente

Vejamos a regra da derivada do produto de duas funções. Considere $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis. Assim sendo, vale que: $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Exemplo: seja a função $h(x) = 5x^2 \cdot sen(x)$. Neste caso temos as funções $f(x) = 5x^2$ e $g(x) = sen(x)$. Então, aplicando a regra do produto, teremos $h'(x) = \left(5x^2\right)' \cdot sen(x) + 5x^2 \cdot \left(sen(x)\right)' = 10x \cdot sen(x) + 5x^2 \cdot \cos(x)$.

Agora veremos a regra do quociente de duas funções. Considere $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis, com $g(x) \neq 0$. É válido que $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Exemplo: Considere $h(x) = \frac{sen(x)}{x^3 - 4x}$.

Determine a derivada $h'(x)$ da função $h(x)$.

Aplicamos a regra do quociente, identificando as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = x^3 - 4x$. Temos que $f'(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = 3x^2 - 4$.

Portanto, $h'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\left[x^3 - 4x\right] - sen(x)\cdot\left[3x^2 - 4\right]}{\left[x^3 - 4x\right]^2}$

Pesquise mais

Para ver outros exemplos sobre a as regras de derivação e exercícios resolvidos do conteúdo desta seção, sugerimos acessar a página 117 e o exercícios da página 118 da obra a seguir, disponível em sua Biblioteca Virtual.

ÁVILA, G.; Araújo, L.C.L. **Cálculo, ilustrado, prático e descomplicado**, LTC, 2012.

Sem medo de errar

Relembremos que você faz parte do grupo de empresários proprietários de uma empresa que produz embalagens e, por meio de estudos anteriores conduzidos pelo departamento de operações, a quantidade produzida de embalagens em função do consumo de água é dada por $P(x)=\dfrac{3x^3-4x^2+2x-5}{11x^2-3x+19}$.

Você ficou incumbido de duas tarefas, a primeira de estimar para um dos modelos de embalagens produzidos pela indústria a taxa de variação apresentada quando são consumidos 10 mil metros cúbicos de água e, a segunda, qual a produção de embalagens ao serem consumidos 25 mil metros cúbicos de água.

Para determinar a taxa de variação quando são consumidos 10 mil metros cúbicos de água, precisaremos, em primeiro lugar, calcular a derivada desta função.

Para isso, usamos a regra do quociente, identificando a função do numerador como $f(x)=3x^3-4x^2+2x-5$ e a função do denominador como $g(x)=11x^2-3x+19$.

As respectivas derivadas são $f'(x)=9x^2-8x+2$ e $g'(x)=22x-3$. Substituindo na expressão da regra da cadeia para $P'(x)$, teremos:

$$P'(x)=\frac{\left[9x^2-8x+2\right]\left[11x^2-3x+19\right]-\left[3x^3-4x^2+2x-5\right]\left[22x-3\right]}{\left[11x^2-3x+19\right]^2}.$$

A taxa de variação ao se consumirem 10 mil metros cúbicos de água será

$$P'(10)=\frac{[900-80+2][1100-30+19]-[3000-400+20-5][220-3]}{[1100-30+19]^2}=$$

$=\dfrac{895158-567455}{1185921}=0,276$. Interpretamos este valor numérico como correspondendo à variação na quantidade de embalagens produzidas ao se aumentar uma unidade no consumo de água a partir do valor de 10 mil metros cúbicos.

Para responder à segunda questão, basta substituirmos o consumo de 25 mil metros cúbicos de água na função de produção:

$$P(25)=\frac{3\cdot 25^3-4\cdot 25^2+2\cdot 25-5}{11\cdot 25^2-3\cdot 25+19}=\frac{44420}{6819}=6,514$$

Como esta função de produção está dada em milhares de embalagens produzidas, estima-se que, ao se consumirem 25 mil metros cúbicos de água, serão produzidas 6514 embalagens do tipo especificado.

Avançando na prática

Aplicação de derivadas: farmacologia

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja um profissional de uma empresa farmacêutica e o laboratório precisa estimar a concentração no sangue de determinado medicamento após uma quantidade t de minutos após a ingestão de uma dose do medicamento. Sabe-se que após t minutos da ingestão da dose do medicamento, sua concentração (em miligramas por centímetro cúbico de sangue) no sague é dada pela função $C(t)=\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}+\frac{2,8}{t}$.

O laboratório solicitou que você apresentasse a taxa de variação da concentração no sangue deste medicamento após 5, 10 e 15 minutos da ingestão.

Resolução da situação-problema

Para determinar a taxa de variação da concentração no sangue do medicamento em estudo nos três instantes solicitados, precisamos calcular a derivada de $C(t)=\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}+\frac{2,8}{t}$.

Aqui usamos que a derivada da soma de funções é igual à soma das derivadas. Considere a função $C(t)$ como sendo a soma das funções $f_1(t)=\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}$ e $f_2(t)=\frac{2,8}{t}$: $C(t)=f_1(t)+f_2(t)$. Assim, $C'(t)=f_1'(t)+f_2'(t)$.

Devemos derivar, separadamente, $f_1(t)=\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}$ e $f_2(t)=\frac{2,8}{t}$.

Reescrevemos $\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}$ da seguinte forma:

$\frac{6,7t}{\sqrt[3]{t^5}}=\frac{6,7t}{t^{\frac{5}{3}}}=6,7t^{1-\frac{5}{3}}=6,7t^{-\frac{2}{3}}$. A derivada de $f_1(t)=6,7t^{-\frac{2}{3}}$ é

$$f_1'(t)=-\frac{2}{3}6,7t^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{13,4}{3}t^{-\frac{5}{3}}.$$

Para derivar $f_2(t)=\dfrac{2,8}{t}$, lembramos que $f_2(t)=\dfrac{2,8}{t}=2,8t^{-1}$ e usando a derivação de polinômios: $f_2{}'(t)=-2,8t^{-2}=-\dfrac{2,8}{t^2}$.

$$C'(t)=f_1'(t)+f_2'(t)=-\frac{13,4}{3}t^{-\frac{5}{3}}-\frac{2,8}{t^2}.$$

Substituímos os valores $t=5$, $t=10$ e $t=15$ na expressão acima para obter os dados da Tabela 3.8.

Tabela 3.8 | Concentração do medicamento em estudo nos instantes solicitados

t (minutos)	5	10	15
$C'(t)$	-0,417	-0,124	-0,0614

Fonte: elaborada pelo autor.

A taxa de variação é negativa, pois a concentração cai ao longo do tempo.

Faça valer a pena

1. Para efetuar o cálculo de derivadas, não é usual utilizarmos a definição da derivada por limites, mas sim utilizar a Tabela 3.5 de derivadas de funções. Considere as funções $f(x)=5x^4-3x^3+2x^2-4x+7$.

Assinale a alternativa que apresenta a derivada da função $f(x)$.

a) $f'(x)=20x^3-9x^2-4x+4$.
b) $f'(x)=20x^4-9x^3+4x^2-4x$.
c) $f'(x)=-5x^3+9x^2-4x+4$.
d) $f'(x)=-20x^4+3x^3-2x^2+4x-7$.
e) $f'(x)=20x^3-9x^2+4x-4$.

2. Considere as funções apresentadas nos itens a seguir:
I. $f(x)=x^2\cdot sen(x)+2x^2\cdot\cos(x)$.
II. $f(x)=x^2\cdot\cos(x)+x^2\cdot sen(x)$.
III. $f(x)=2x^2\cdot sen(x)-x^2\cdot\cos(x)$.

E as letras com as derivadas para cada uma destas funções:

A. $f'(x) = 4x \cdot sen(x) + 2x^2 \cdot \cos(x) - 2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot sen(x)$.

B. $f'(x) = 2x \cdot sen(x) + x^2 \cdot \cos(x) + 4x \cdot \cos(x) - 2x^2 \cdot sen(x)$.

C. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot sen(x) + 2x \cdot sen(x) + x^2 \cdot \cos(x)$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta da associação entre as colunas.

a) I – A; II – B; III – C
b) I – C; II – A; III – B
c) I – B; II – C; III – A
d) I – B; II – A; III – C
e) I – A; II – C; III – B

3. Como é mais simples trabalharmos com funções afim do que com funções mais sofisticadas, como polinomiais de grau maior que um, logarítmicas, exponenciais, trigonométricas ou outras, em muitas aplicações, o modelo matemático desenvolvido utiliza a aproximação da reta tangente em vez da função mais sofisticada que modelaria, em princípio, o fenômeno em estudo. Considere a função $f(x) = 5 \cdot 3^x + 4$ e as afirmações:

(I) a derivada desta função é $f'(x) = 15 \cdot 3^{x-1}$

(II) a equação da reta tangente a esta função no ponto $x_0 = 2$ é $T(x) = 45x - 45$

(III) o valor numérico da reta tangente a esta função no ponto $x_0 = 2$ quando $x = 2{,}1$ é igual a 50.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

a) Apenas a afirmativa II está correta.
b) As afirmativas II e III estão corretas.
c) As afirmativas I e II estão corretas.
d) As afirmativas I e III estão corretas.
e) Apenas a afirmativa I está correta.

Seção 3.3

Fundamentos de cálculo aplicado: derivação e otimização

Diálogo aberto

Na seção anterior iniciamos nosso estudo sobre derivadas, vimos a definição de derivada, a equação da reta tangente a uma função em um ponto dado, as regras de derivação mais utilizadas e concluímos com as regras de derivação do produto e do quociente de funções.

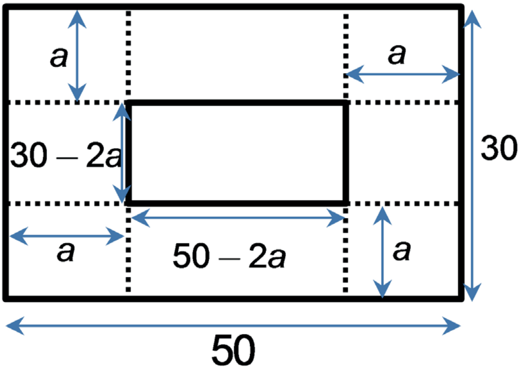
Nesta seção veremos a regra da cadeia, a qual consiste em como efetuar a derivação de funções compostas, abordaremos também os principais teoremas relacionados com a determinação de máximos e mínimos de funções e uma das mais importantes aplicações das derivadas: a otimização.

A determinação de máximos ou mínimos de funções, ou seja, buscar os valores ótimos corresponde a uma das principais aplicações da Matemática. Para citar algumas dessas aplicações considere um engenheiro de uma indústria de alimentação que deve apresentar propostas de embalagens que apresentem custo mínimo de produção e contenham o maior volume possível de produto. Outra situação encontra-se em problemas de administração de empresas e gestão em geral: o lucro da organização é representado em termos da quantidade de unidades vendidas e deseja-se estimar o número de unidades vendidas que corresponde ao lucro máximo.

Para que contextualizemos sua aprendizagem, imagine que você e o seu grupo de empresários está estudando alternativas para lançar uma embalagem com um novo desenho. Como seus colegas sabem sobre seus conhecimentos de matemática, solicitaram que você desenvolvesse uma avaliação para que a nova embalagem minimize gastos com o material envolvido, sendo necessário investigar sob quais condições este mínimo pode ser atingido.

A embalagem é produzida a partir de folhas retangulares de alumínio de comprimento 50 cm e largura 30 cm, das quais serão retirados quadrados de lado a cm. Confira na Figura 3.12 a seguir.

Figura 3.12 | Folhas retangulares a partir das quais serão projetadas as embalagens



Fonte: elaborada pelo autor.

Deseja-se determinar o valor do lado *a* do quadrado a ser retirado de cada folha retangular de tal forma que o volume da caixa seja maximizado. Além disso, apresente a função que representa a área lateral da caixa. Qual o valor da área da caixa quando utilizar o valor de a que maximiza o volume? Se, por questões de redução de custos na produção tivermos que adotar um valor para a um pouco menor que o valor que maximiza o volume, a área correspondente será menor ou maior?

Você deverá estudar com afinco os conceitos e as técnicas desta seção para resolver o problema proposto. Dentre os conceitos, destacamos os Testes da Derivada primeira e da Derivada segunda como centrais. Já para as técnicas, você precisará ter domínio de derivação de funções (incluindo as já vistas Regra do Produto, do Quociente e da Cadeia) e resolução de equações.

Por todos os desafios já superados até aqui, você já consegue identificar o quanto evoluiu sua compreensão da Matemática e suas aplicações em seu ambiente profissional. Certamente você está se desenvolvendo para atingir suas metas profissionais e acadêmicas. Para continuar esta evolução positiva, continue a se dedicar e mostrar o empenho que você já apresentou até aqui.

Não pode faltar

Regra da cadeia

Considere a função $f(x)=2^{3x+1}$. Lembremos a regra para derivar a função $f(x)=a^x$: $f'(x)=a^x \cdot \ln(a)$. Contudo, devemos observar que o expoente da função $f(x)=2^{3x+1}$ não é simplesmente x, mas sim a função $g(x)=3x+1$. Se recordarmos do conceito de derivada como taxa de variação de uma função, será possível perceber que aplicar a regra de derivação para funções do tipo $f(x)=a^x$ para uma função tal como $f(x)=2^{3x+1}$ não levará em conta esta taxa de variação dada pelo expoente $g(x)=3x+1$. Note que esse expoente varia três vezes mais rápido que o expoente x da função $f(x)=a^x$. Assim, precisamos de outra estratégia para derivar funções como $f(x)=2^{3x+1}$. Veja que esta é uma função composta de duas outras funções.

Considere as funções $f(x)=2^x$ e $g(x)=3x+1$. A função composta $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ é igual a $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2^{3x+1}$. Até o presente momento não sabemos como efetuar a derivada de $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ de uma forma prática. A regra da cadeia é justamente esta regra prática e está apresenta a seguir.

Regra da Cadeia: a derivada da função composta $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ é dada por $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Podemos traduzir em palavras a regra da cadeia da seguinte maneira: a derivada da função composta $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ é igual a obter o produto da derivada $f'(g(x))$ pela derivada $g'(x)$.

Considere as funções $f(x)=2^x$ e $g(x)=3x+1$.

$F'(x)=2^x\ln(2)$ e $g'(x)=3$. Então $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=$ $2^{3x+1}\cdot\ln(2)\cdot 3=3\ln(2)2^{3x+1}$.

Vejamos alguns exemplos da regra da cadeia.

Exemplificando

Encontre a derivada para a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

a. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 11$ e $g(x) = sen(x)$

b. $f(x) = 5cos(x)$ e $g(x) = 5x^2 - 3x + 2$

a) Para obter a derivada da composta $(f \circ g)(x)$, primeiro derivamos a função $f(x)$, calculamos esta derivada na função $g(x)$ e multiplicamos este resultado pela derivada da função $g(x)$. Vejamos:

Derivada da função $f(x)$: $f'(x) = 15x^2 - 14x + 3$.

Substituímos a função $g(x) = sen(x)$ na expressão acima para obter $f'(g(x))$: $f'(g(x)) = 15[sen(x)]^2 - 14[sen(x)] + 3 = 15sen^2(x) - 14sen(x) + 3$.

A derivada da função $g(x)$ é $g'(x) = \cos(x)$.

Finalmente:
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = [15sen^2(x) - 14sen(x) + 3] \cdot \cos(x)$.

b) Efetuamos a derivada $f'(x) = -5sen(x)$ e calculamos esta derivada na função $g(x)$: $f'(g(x)) = -5sen(5x^2 - 3x + 2)$. Agora efetuamos $g'(x) = 10x - 3$. Então, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -5sen(5x^2 - 3x + 2) \cdot (10x - 3)$.

Aplicações da regra da cadeia

Imagine que na indústria de embalagens da qual você faz parte do quadro societário, são utilizadas máquinas em uma das etapas de produção, cujo custo de produção (em milhares de R$) em função da energia elétrica necessária (em kWh) é dado pela função $C(E) = 0,329\sqrt{E}$, onde E representa a energia elétrica. Considere que a função que associa a uma determinada quantidade q de embalagens a ser produzida com a energia elétrica necessária seja $E(q) = 9500q + 125$. Qual a taxa de variação no Custo de produção quando são produzidas 1000 embalagens?

Note que a derivada de $C(E)$ é medida em R$/kWh, e a derivada de $E(q)$ é medida em kWh/unidades de embalagens produzidas. Ao multiplicarmos as duas derivadas, teremos (R$/kWh)*(kWh/unidades) = R$/unidades, ou seja, estaremos avaliando a taxa de variação do custo em termos da quantidade de embalagens produzidas.

Para determinar a taxa de variação do custo de produção em termos da variação na quantidade de embalagens produzidas, devemos derivar a função composta $(C \circ E)(q) = C(E(q)) = 0{,}329\sqrt{9500q + 125}$. Para isso, usaremos a regra da cadeia:

$C'(E) = \dfrac{0{,}329}{2\sqrt{E}}$ e $E'(q) = 9500q + 125$. Dessa forma, pela regra da cadeia $(C \circ E)'(q) = C'(E(q)) \cdot E'(q) = \dfrac{0{,}329[9500]}{2\sqrt{9500q + 125}}$.

Agora basta substituirmos $q = 1000$ na expressão acima: $C'(E(1000)) \cdot E'(1000) = 0{,}5070 \text{ R\$/unidade}$.

Assimile

Você pode entender a Regra da Cadeia para derivar a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ da seguinte forma: derivamos a função "de fora" calculada na função "de dentro" e multiplicamos pela derivada da função "de dentro".

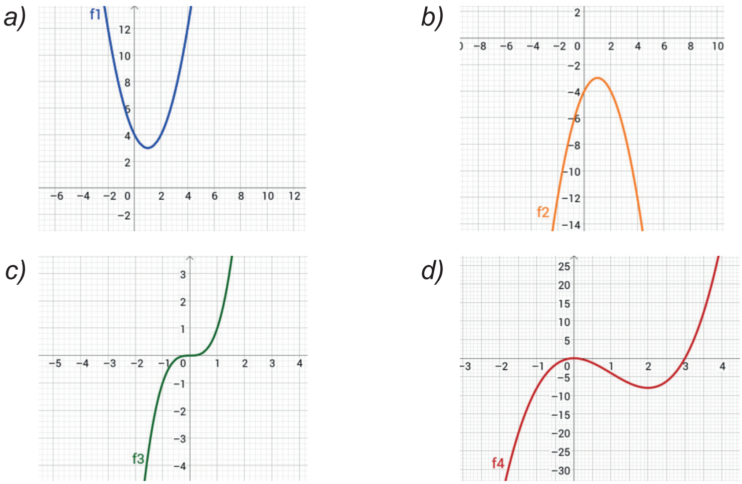
Definição segunda derivada

Se derivarmos uma função $f(x)$, obtemos outra função, a $f'(x)$. Se esta função, que é a derivada de f, também for derivável, teremos o que se denomina segunda derivada de f, também chamada de derivada de ordem dois de *f*, e denota-se por $f''(x)$. (STEWART, 2016).

Fundamentos de otimização

Considere os gráficos das funções $f_1(x) = (x-1)^2 + 3$, $f_2(x) = -(x-1)^2 - 3$, $f_3(x) = x^3$ e $f_4(x) = 2x^2(x-3)$ representados na Figura 3.13.

Figura 3.13 | Gráfico de $f_1(x)=(x-1)^2+3$ (a); $f_2(x)=-(x-1)^2-3$ (b); $f_3(x)=x^3$ (c); $f_4(x)=2x^2(x-3)$ (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

Observando os gráficos, podemos verificar que o ponto $x_0=1$ no gráfico de f_1 é um ponto de mínimo global, ou seja, é o menor valor que a função f_1 assume em todo seu domínio. O ponto $x_0=1$ no gráfico de f_2 é um ponto de máximo global, ou seja, é o maior valor que a função f_2 assume em todo seu domínio. Já o ponto $x_0=0$ no gráfico de f_3 não é nem ponto de máximo nem mínimo, e o ponto $x_0=2$ é o ponto de mínimo local para a função f_4, enquanto o ponto $x_0=0$ é um ponto de máximo local para f_4. Um ponto x_0 é chamado de máximo local se, para valores x suficientemente próximos de x_0, o valor da função em cada $f(x)$ é sempre menor que o valor da função no próprio ponto x_0. Por outro lado, um ponto x_0 é chamado de mínimo local se, para valores x suficientemente próximos de x_0, o valor da função em cada $f(x)$ for sempre maior que o valor da função no próprio ponto x_0.

Considere a função f_1. Esta função é decrescente para valores de $x<x_0=1$ e é crescente para valores de $x>x_0=1$. Para a função f_2 temos uma situação oposta: f_2 é crescente para $x<x_0=1$ e é decrescente para $x>x_0=1$. A função f_3 é crescente para todos os valores de x e a função f_4 é crescente para $x\in(-\infty,0)$ ou $x\in(2,+\infty)$ e decrescente para $x\in(0,2)$.

Observe ainda que a função $f_1(x) = (x-1)^2 + 3$ não possui um valor máximo, pois para qualquer valor de $f_1(x_1)$ que tomemos, sempre é possível escolher algum valor x_2, tal que $f(x_2) > f(x_1)$. De forma simétrica, a função $f_2(x) = -(x-1)^2 - 3$ não possui mínimo.

Definição função crescente: diz-se que uma função $f(x)$ é crescente em um intervalo se, para todos *x*, *y* no intervalo, tais que $x < y$, temos $f(x) < f(y)$ (SIMMONS, 1987, p. 146).

Definição função decrescente: diz-se que uma função $f(x)$ é decrescente em um intervalo se, para todos *x*, *y* no intervalo tais que $x < y$ temos $f(x) > f(y)$ (SIMMONS, 1987).

Como já apresentamos na Figura 3.13 exemplos de máximos e mínimos, veremos agora a definição formal desses conceitos.

Definição ponto de máximo global: o ponto $x = x_0$ é máximo global da função *f* se $f(x_0) \geq f(x)$ para *x* no domínio de *f*. O valor $f(x_0)$ é denominado valor máximo da função *f* no domínio da função (STEWART, 2006, p. 302).

Definição ponto de mínimo global: o ponto $x = x_0$ é mínimo global da função *f* se $f(x_0) \leq f(x)$ para *x* no domínio de *f*. O valor $f(x_0)$ é denominado valor mínimo da função *f* no domínio da função (STEWART, 2006).

Além das definições acima de máximo e mínimo global, uma função pode apresentar máximos e mínimos locais (também conhecidos como máximo ou mínimo relativo).

Definição máximo local ou máximo relativo: diz-se que o ponto $x = x_0$ é máximo local ou máximo relativo se $f(x_0)$ for maior ou igual a $f(x)$ para todo x suficientemente próximo de x_0 (STEWART, 2006).

Definição mínimo local ou mínimo relativo: diz-se que o ponto $x = x_0$ é mínimo local ou mínimo relativo se $f(x_0)$ for menor ou igual a $f(x)$ para todo x suficientemente próximo de x_0 (STEWART, 2006).

Reflita

Todo máximo relativo também é máximo absoluto? E todo máximo absoluto também é máximo relativo? Uma função pode exigir um máximo relativo que não seja máximo absoluto?

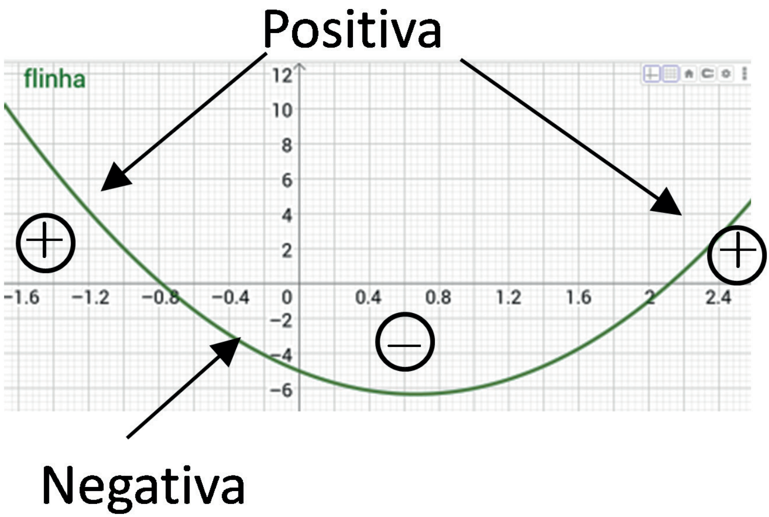
A função f_4 apresentada na Figura 3.13 apresenta um máximo local no ponto $x = 0$ e o mínimo local em $x = 2$.

O sinal da primeira derivada pode ser utilizado para decidirmos se uma função é crescente ou decrescente em um intervalo. O próximo teorema nos ensina sobre esta aplicação da derivada.

Teorema: a função $f(x)$ é crescente em um intervalo no qual $f'(x) > 0$ e $f(x)$ é decrescente no intervalo no qual $f'(x) < 0$ (SIMMONS, 1987).

A seguir, apresentamos um exemplo de como utilizar o teorema acima para identificar em quais intervalos a função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ é crescente ou decrescente. Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$ e, resolvendo a equação de 2º grau $3x^2 - 4x - 5 = 0$, as raízes são $x_1 = \frac{\left[4 - \sqrt{76}\right]}{6} \cong -0{,}79$ e $x_2 = \frac{\left[4 + \sqrt{76}\right]}{6} \cong 2{,}12$. Assim, $f'(x) > 0$ se $x < x_1$ ou se $x > x_2$, e $f'(x) < 0$ se $x_1 < x < x_2$. Confira com a Figura 3.14 onde a função $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$ é positiva ou negativa.

Figura 3.14 | Gráfico de $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$



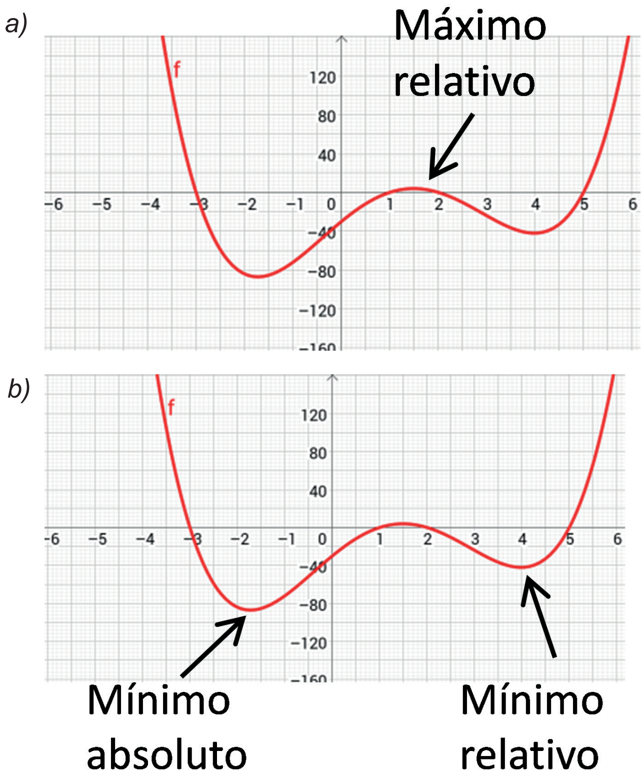
Fonte: elaborada pelo autor.

Agora estamos em condições de apresentar um resultado bastante utilizado para encontrar candidatos a pontos de máximo ou de mínimo.

Teorema: considere que a função *f* esteja definida no intervalo aberto (a,b) e que possua um máximo ou um mínimo relativo no ponto $x = x_0$, com $x_0 \in (a,b)$. Se a derivada $f'(x_0)$ existir, então $f'(x_0) = 0$ (GONÇALVES, 2006).

O que este teorema afirma, do ponto de vista geométrico, é que se a função possui um máximo (ou mínimo) relativo em um intervalo e existe a derivada da função no ponto de máximo (ou mínimo), então a derivada neste ponto é paralela ao eixo x. Considere a Figura 3.15 da função $f(x) = (x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-5)$.

Figura 3.15 | Máximo relativo (a) mínimo relativo (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.15 vemos que $f'(x_0) = 0$, mas nem por isso o ponto x_0 é máximo/mínimo relativo. Deve ser destacado que este teorema apresenta uma condição <u>necessária</u> para que exista o máximo ou mínimo relativo em x_0, mas ele não apresenta uma condição <u>suficiente</u> para a existência deste máximo/mínimo relativo. No caso da função $f(x) = |x|$, embora $x_0 = 0$ seja mínimo para esta função, não existe a derivada $f'(0)$. Já para a função $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ e $x_0 = 0$ não é mínimo nem máximo. No caso específico da função $f(x) = x^3$, esta função apresenta o sinal da segunda derivada negativo para $x < 0$ e o sinal da segunda derivada positivo para $x > 0$.

O sinal da segunda derivada nos informa sobre a concavidade da função. A esse respeito temos o teorema seguinte.

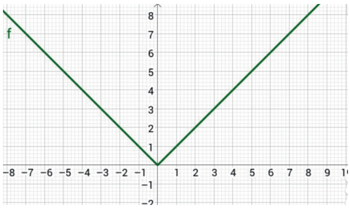
Teorema (concavidade): se a função *f* for duas vezes derivável em um intervalo aberto (a,b) e se $f''(x) > 0$ para todo *x* neste intervalo, então esta função apresenta concavidade voltada para cima neste intervalo. Por outro lado, se $f''(x) < 0$ para todo *x* neste intervalo, então a função *f* apresenta concavidade voltada para baixo neste intervalo. (STEWART, 2014).

A função $f(x) = x^3$ é o exemplo clássico de ponto de inflexão.

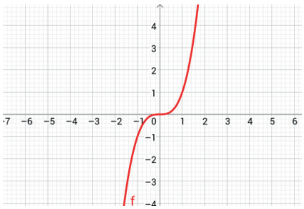
Definição ponto de inflexão: dizemos que $x_0 \in (a,b)$ é um ponto de inflexão da função *f* contínua neste intervalo se a função apresentar mudança de concavidade neste ponto. (STEWART, 2016).

Figura 3.16 | $f(x) = |x|$ (a) $f(x) = x^3$ (b) (c)

a)



b)



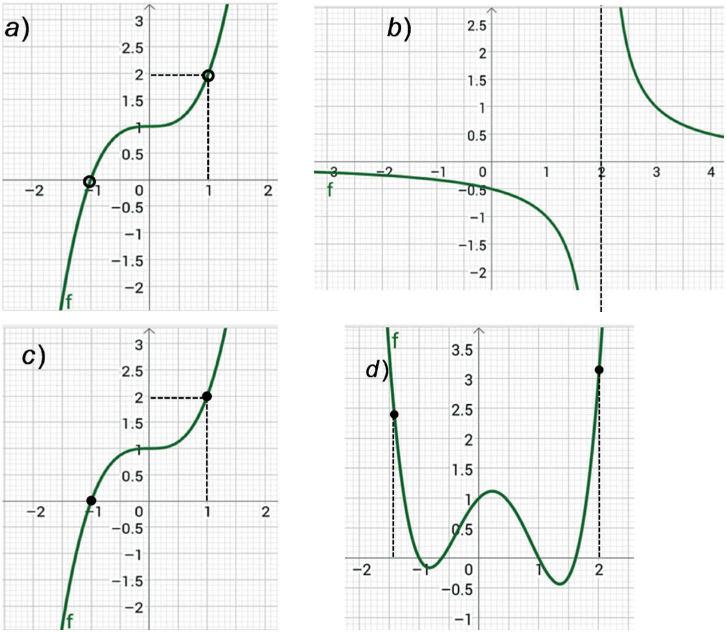
Fonte: elaborada pelo autor.

Já o próximo teorema afirma que uma função contínua em um intervalo fechado possui máximo e mínimo absolutos.

Teorema máximo e mínimo absoluto em um intervalo fechado: suponha que a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua, então, *f* possui máximo e mínimo absolutos no intervalo $[a,b]$ (GONÇALVES, 2005).

Na Figura 3.17 ilustramos que se qualquer uma das hipóteses de a função ser contínua em um intervalo fechado não for satisfeita, não poderemos garantir que a função venha a ter máximo e mínimo no intervalo. Na Figura 3.17(a) a função $f(x)=x^3+1$ é contínua no intervalo $(-1,1)$. Como esse intervalo é aberto, para qualquer valor x_0 arbitrariamente próximo de +1 existe um número $x_0<x_1<1$ tal que $f(x_1)>f(x_0)$ (e valendo o mesmo raciocínio para -1). Na Figura 3.17(b) temos a função descontínua $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ no intervalo fechado $[0,3]$ que não possui máximo nem mínimo. Na Figura 3.17(c) temos a função contínua $f(x)=x^3+1$ no intervalo fechado $[-1,1]$, no qual estão indicados os valores máximo e mínimo desta função neste intervalo. Por fim, a Figura 3.17(d), com a função $f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$ mostra que o teorema garante a existência de máximo e mínimo no intervalo fechado, mas não afirma que estes máximos (ou mínimos) sejam únicos.

Figura 3.17 | Função contínua em intervalo aberto (a) função descontínua em intervalo fechado (b) função descontínua em intervalo fechado (c) função contínua em intervalo fechado (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para você saber mais sobre máximos e mínimos absolutos em um intervalo fechado sugerimos consultar a referência a seguir, também disponível em sua Biblioteca Virtual. Nela, você encontrará mais gráficos alusivos à discussão sobre este teorema.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo volume I.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Se *f* for uma função contínua em um intervalo fechado com derivada em todos os pontos, exceto no máximo em um dos pontos do intervalo, podemos usar os sinais da primeira derivada, determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente e daí identificar máximos ou mínimos relativos de *f* neste intervalo.

Teorema teste da primeira derivada para identificar máximos/mínimos:

Se a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for contínua com derivada para todo $x\in(a,b)$, exceto talvez em um ponto $x=x_0$. Então, se $f'(x)>0$ para $x<x_0$ e $f'(x)<0$ para todo $x>x_0$, *f* possui um máximo relativo em x_0. De forma análoga, se $f'(x)<0$ para $x<x_0$ e se $f'(x)>0$ para $x>x_0$, *f* possui um mínimo relativo em $x=x_0$ (GONÇALVES, 2005).

Exemplo: retomemos a função $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ já apresentada anteriormente. Como vimos, $f'(x)>0$ se $x<x_1$ e $f'(x)<0$ se $x_1<x<x_2$. Dessa forma, $x_1=\frac{4-\sqrt{76}}{6}\cong=-0,79$ é ponto de máximo. Por outro lado, $f'(x)<0$ se $x_1<x<x_2$ e $f'(x)>0$ se $x>x_2$. Logo, $x_2=\frac{4+\sqrt{76}}{6}\cong 2,12$ é ponto de mínimo de *f*.

Reflita

A função $f(x)=x^{2/3}$ possui máximo ou mínimo? Qual o valor de sua derivada em $x=0$?

Por fim, apresentamos o teste da segunda derivada para identificar máximos e mínimos de uma função.

Teorema teste da segunda derivada para identificar máximos e mínimos: Considere *f* uma função que seja derivável no intervalo aberto (a,b) e que $f'(x_0)=0$ com $x_0 \in (a,b)$ e que *f* possua segunda derivada neste intervalo. Então vale que: se $f''(x_0)<0$, então a função *f* possui máximo relativo no ponto $x=x_0$, e se $f''(x_0)>0$, então a função *f* possui mínimo relativo no ponto $x=x_0$ (GONÇALVES, 2005).

No exemplo a seguir mostramos como utilizar o teste da segunda derivada para localizar máximos e mínimos de uma função em um intervalo aberto.

Exemplificando

Considere a função $f(x)=1+xe^{-x}$ definida no aberto $(0,3)$.

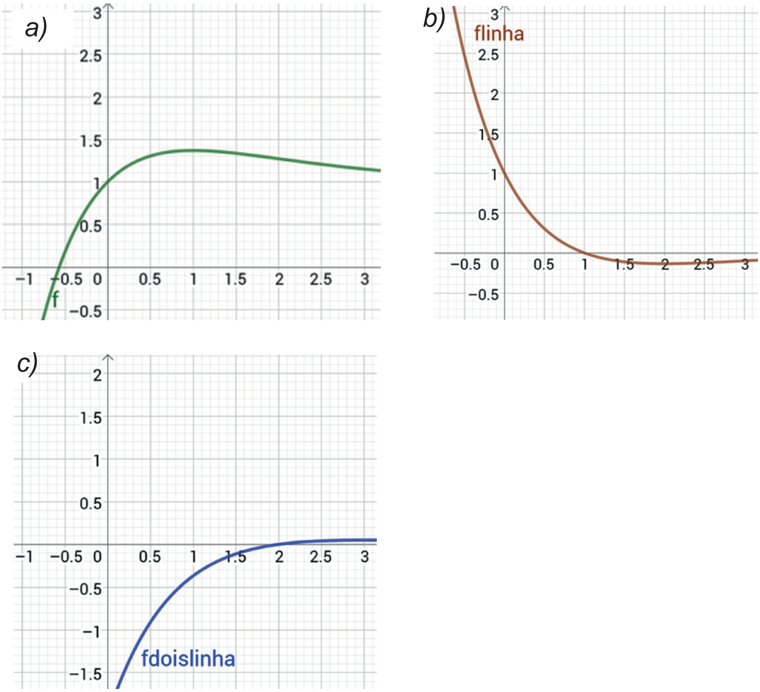
Utilize o teste da derivada segunda para identificar pontos de máximo e de mínimo desta função.

Inicialmente derivamos a função para obter os candidatos a pontos de máximo e mínimo: $f'(x)=(1-x)e^{-x}$. Igualando a zero, temos a equação $f'(x)=(1-x)e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=1$. Assim, temos um candidato a máximo ou mínimo.

Determinamos a segunda derivada de $f(x)=1+xe^{-x}$: $f''(x)=(x-2)e^{-x}$ e calculamos $f''(1)=(1-2)e^{-1}<0$.

Portanto, como o sinal da segunda derivada em $x=1$ é negativo, este é um ponto de máximo. Na Figura 3.18 (a) apresentamos o gráfico de $f(x)=1+xe^{-x}$, na Figura 3.18 (b) o gráfico de $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ e na Figura 3.18 (c) o gráfico de $f''(x)=(x-2)e^{-x}$.

Figura 3.18 | Gráfico de $f(x) = 1 + xe^{-x}$ (a) gráfico de $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ (b) gráfico de $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicações de otimização

Na indústria na qual você trabalha como assessor técnico na diretoria de operações, é produzido um produto químico cujo preço de venda por litro é de $ 50. Suponha que a função Custo Total de produção para a produção de x recipientes contendo um litro seja $C(x) = -500x - \frac{45}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}$. Sabe-se que a demanda por este produto no mercado não ultrapassa de 85 mil recipientes e que há uma demanda mínima segura de 45 mil. Quantos recipientes devem ser produzidos para que o lucro seja máximo neste intervalo?

Resolução: inicialmente construímos a função Receita: $R(x)=50x$. A função lucro é dada por $L(x)=R(x)-C(x)=50x-\frac{x^3}{3}+\frac{45}{2}x^2+500x=-\frac{x^3}{3}+\frac{45}{2}x^2+550x$. Para determinar candidatos a pontos de máximo devemos derivar a função lucro:

$L'(x)=-x^2+45x+550$. Igualamos esta função a zero e determinamos as raízes: $x_1=55$ e $x_2=-10$. A segunda raiz não possui interpretação econômica e é descartada.

A segunda derivada da função lucro é $L''(x)=-2x+45$. Calculando-a no ponto $x_1=55$ obtemos $L''(55)=-2\cdot 55+45=-65<0$, concluindo-se que o ponto $x_1=55$ é ponto de máximo.

O lucro máximo ao se produzir 55 mil recipientes será de $L(55)=42.854{,}17$.

Sem medo de errar

Após ter resolvido os problemas apresentados nas seções anteriores, você e seu grupo de empresários querem lançar uma embalagem que, a partir de folhas retangulares de comprimento 50 cm e largura 30 cm, apresentem volume máximo.

Como a largura e o comprimento da caixa devem ser números positivos, as restrições seguintes devem estar satisfeitas:

$30-2a\geq 0\Leftrightarrow 0\leq a\leq 15$ e $50-2a\geq 0\Leftrightarrow 0\leq a\leq 25$. Ou seja, o valor de a é pesquisado apenas dentro do intervalo $[0,15]$.

O volume da embalagem é dado por $V(a)=(30-2a)(50-2a)a=4a^3-160a^2+1500a$.

Derivamos esta função e a igualamos a zero para determinar os candidatos a pontos críticos:

$V'(a)=12a^2-320a+1500=0\Leftrightarrow a_1\cong 6{,}07;a_2\cong 20{,}60$. Como observado, descartamos o valor $a_2\cong 20{,}60$ cm por ultrapassar os limites admissíveis para a embalagem.

Derivando novamente a função para o volume, obtemos $V''(a)=24a-320$ e substituindo o valor $f(x)=35-\frac{15x}{25+0{,}15x^2}$ cm, temos $V''(6,07) = -174,32 < 0$, o que implica que este valor crítico é um ponto de máximo.

Nas condições dadas a área caixa corresponde à área do fundo somada com as áreas das quatro abas laterais.

Área do fundo: $(50-2a)(30-2a) = 1500 - 160a + 4a^2$

Área das duas laterais maiores: $2a(50-2a) = 100a - 4a^2$

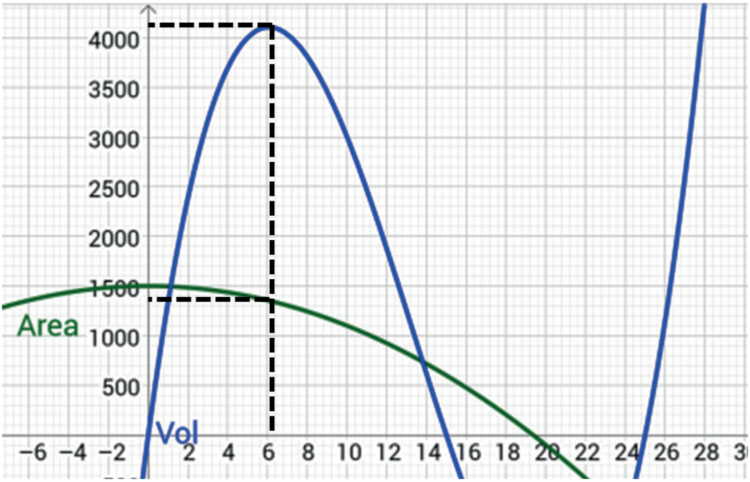
Área das duas laterais menores: $2a(30-2a) = 60a - 4a^2$

Área total: $1500 - 160a + 4a^2 + 160a - 8a^2 = 1500 - 4a^2$

Assim, se $a_1 \cong 6,07$, teremos $Area = 1500 - 4 \cdot (6,07)^2 = 1352,62cm^2$.

Finalmente, plotamos os dois gráficos (volume e área) em um mesmo plano cartesiano para responder à última questão.

Figura 3.19 | Gráficos para volume e área lateral da caixa



Fonte: elaborada pelo autor.

Da Figura 3.19 vemos que se tomarmos um valor para a pouco menor que o ótimo para o volume, obtemos uma área maior que a área obtida com $a_1 \cong 6,07$.

Agora você pode indicar para seus sócios que se retirar quadrados de lado $a_1 \cong 6,07$, o volume da embalagem será o máximo possível nas condições dadas.

Avançando na prática

Otimização na produção industrial

Descrição da situação-problema

Em uma indústria alimentícia sabe-se que o custo unitário de produção de um de seus produtos é função da quantidade (em mililitros) de agentes espessantes e aromatizantes por litro do produto e é dado pela expressão $f(x) = 35 - \dfrac{15x}{25 + 0{,}15x^2}$ (em R$).

A Diretoria de Operações da indústria deseja saber se existe um valor de quantidade de espessantes e aromatizantes que resulta em custo unitário mínimo na produção desses produtos em sua linha de produção.

Resolução da situação-problema

Para determinar a quantidade de agentes espessantes e aromatizantes que minimiza o custo unitário derivamos a função *f*:

$f'(x) = -\dfrac{15\left(25 + 0{,}15x^2\right) - 15x(0{,}3x)}{\left[25 + 0{,}15x^2\right]^2}$ e a igualamos a zero para determinar os candidatos a pontos de máximo ou de mínimo:

$$f'(x) = -\frac{15\left(25 + 0{,}15x^2\right) - 15x(0{,}3x)}{\left[25 + 0{,}15x^2\right]^2} = 0 \Rightarrow 375 - 2{,}25x^2 = 0$$

$x_1 = 12{,}91$ e $x_2 = -12{,}91$

O valor negativo é descartado por não fazer sentido uma quantidade negativa.

Utilizamos o teste da derivada segunda para mostrar que a primeira raiz é um ponto de mínimo:

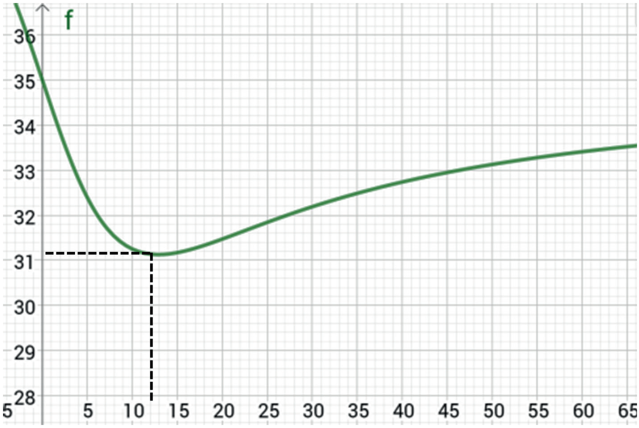
$$f'(x) = -\frac{375 - 2{,}25x^2}{\left[25 + 0{,}15x^2\right]^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{[-4{,}5x]\left[25 + 0{,}15x^2\right]^2 - 2 \cdot 0{,}3x\left[375 - 2{,}25x^2\right]\left[25 + 0{,}15x^2\right]}{\left[25 + 0{,}15x^2\right]^4}$$

Substituímos $x_1 = 12{,}91$ na expressão da segunda derivada:

$f''(x_1) = \dfrac{145.240}{625.108} = 0{,}023 > 0$. Portanto, $x_1 = 12{,}91$ é ponto de mínimo.

Na Figura 3.20 apresentamos o gráfico da função $f(x) = 35 - \dfrac{15x}{25 + 0{,}15x^2}$.

Figura 3.20 | Gráfico de $f(x) = 35 - \dfrac{15x}{25 + 0{,}15x^2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Para determinar os máximos e mínimos de uma função, podemos resolver a equação $f'(x) = 0$ para determinar candidatos a pontos críticos da função. Em seguida, podemos usar o sinal da primeira derivada para valores de x menores que cada raiz de $f'(x) = 0$ e maiores que cada raiz de $f'(x) = 0$ para determinar se o candidato a ponto de máximo ou de mínimo é efetivamente ponto de máximo ou de mínimo.

Considere a função $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$.

Qual a alternativa que apresenta, respectivamente, o ponto no qual ocorre o máximo de *f* e o ponto no qual ocorre o mínimo de *f*?

a) $x_{\text{máximo}} = -2$; $x_{\text{mínimo}} = 2$.

b) $x_{\text{máximo}} = 12$; $x_{\text{mínimo}} = -\dfrac{1}{2}$.

c) $x_{máximo} = 4$; $x_{mínimo} = -4$.

d) $x_{máximo} = 2$; $x_{mínimo} = -2$.

e) $x_{máximo} = -4$; $x_{mínimo} = 4$.

2. A regra da cadeia amplia muito nossa habilidade de derivar funções. Ela afirma que a derivada da função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é igual a $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Considere as funções $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 7sen(x)$, $h(x) = 5\ln(x) + 2$ e os itens:

(I) $(f \circ g)'(x) = 147sen(x)\cos(x) - 70\cos(x)$

(II) $(h \circ g)'(x) = \dfrac{5\cos(x)}{sen(x)}$

(III) $(f \circ h)'(x) = (6[5\ln(x) + 2] - 5) \cdot \dfrac{5}{x}$

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta.

a) Apenas a afirmativa III está correta.
b) As afirmativas II e III estão corretas.
c) As afirmativas I e II estão corretas.
d) Apenas a afirmativa II está correta.
e) As afirmativas I e III estão corretas.

3. Uma empresa precisa projetar um galpão industrial de formato retangular com área total de 2.500 metros quadrados. Eles pretendem gastar o mínimo possível nas paredes para cercar o galpão. Qual a largura e comprimento deste galpão para que o perímetro seja o menor possível?
Considere a Figura 3.21

Figura 3.21 | Galpão com largura *L* e comprimento *C*

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma das funções que podem ser construídas para determinar a largura L associada ao perímetro mínimo e as dimensões do Galpão com perímetro mínimo são dadas pela alternativa:

a) $P(L) = 4000L - \dfrac{25}{L}$, $L = 25m$ e $C = 25m$.

b) $P(L) = \dfrac{2500}{L} + 5000L^2$, $L = 50m$ e $C = 50m$.

c) $P(L) = L^3 - 25L^2 - 5000L$, $L = 75m$ e $C = 25m$.

d) $P(L) = 2L + \dfrac{5000}{L}$, $L = 50m$ e $C = 50m$.

e) $P(L) = 2500L^2 + \dfrac{25}{L^2}$, $L = 25m$ e $C = 75m$.

Referências

BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo diferencial e integral**. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 2000.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1 v.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com geometria analítica**: 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1999. 1 v.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Cálculo A**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 1 v.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Book, 1987. 1 v.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1 v.

THOMAS, George B et al. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 1 v.

UNIVESP. Cálculo I, aula 04 – Limites, Parte 1, Prof Cláudio Possani. Disponível em: <https://youtu.be/fXxQ1oJjMSo>. Acesso em: 16 ago. 2018.

______. Cálculo I, aula 05 – Limites, Parte 2, Prof Cláudio Possani. Disponível em: <https://youtu.be/caGzd9W-or0>. Acesso em: 16 ago. 2018.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1 v.

BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo diferencial e integral**. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 2000.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com geometria analítica**: 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1999. 1 v.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Cálculo A**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 1 v.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Book, 1987. 1 v.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1 v.

THOMAS, George B et al. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 1 v.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1 v.

BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo diferencial e integral**. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 2000.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com geometria analítica**: 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1999. 1 v.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

GOLDSTEIN, Larry; LAY, David; SCHNEIDER, DAVID. **Matemática Aplicada (Economia, Administração e Contabilidade)**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 1 v.

HARIKI, Seiji; ABDOUNUR, Oscar. **Matemática aplicada**. São Paulo: Saraiva.1999.

LEITHOLD, Louis. **Matemática aplicada à economia e administração**. São Paulo: Harbra, 1988.

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. **Cálculo (Funções de uma e várias variáveis)**. São Paulo: Saraiva, 2003.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Book, 1987. 1 v.

STEWART, James. **Cálculo Volume I**. 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

______. **Cálculo Volume I**. 7. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2014.

______. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1 v.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2a. Edição. São Paulo: Thomson, 2001.

THOMAS, George B et al. **Cálculo Volume 1**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2012. 570 p.

THOMAS, George B et al. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 1 v.

UNIVESP. Cálculo I, aula 04 – Limites, Parte 1, Prof Cláudio Possani. Disponível em: <https://youtu.be/fXxQ1oJjMSo>. Acesso em: 16 ago. 2018.

______. Cálculo I, aula 05 – Limites, Parte 2, Prof Cláudio Possani. Disponível em: <https://youtu.be/caGzd9W-or0>. Acesso em: 16 ago. 2018.

WEBER, Jean. **Matemática para Economia e Administração**. São Paulo: Editora Harbra, 1986.

Fundamentos gerais sobre cálculo integral

Convite ao estudo

Na unidade anterior estudamos o conceito de limite e suas propriedades, vimos funções contínuas e descontínuas, trabalhamos com limites infinitos e limites no infinito. Também estudamos derivadas, taxas de variação (média e instantânea), derivada de funções simples e fechamos a unidade com as regras do produto e do quociente.

Nesta última unidade da disciplina veremos a integral. A integral, junto com a derivada, constitui as duas principais ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral, sendo uma operação inversa da outra. A integral permite que calculemos a área sobre curvas irregulares, o que é extremamente relevante em inúmeras aplicações. Algumas dessas aplicações serão vistas nesta unidade. Por exemplo, se soubermos a taxa com que variam os custos por semana em uma indústria, utilizando integrais podemos determinar o custo total daqui a um determinado número de semanas. A importância disso é que é um método geral que pode ser transferido para muitas outras situações que envolvem taxas de variação.

Para contextualizar seu estudo nesta unidade, vamos imaginar que você trabalha na área de planejamento e engenharia de uma fábrica na qual você é responsável por manter o processo de produção otimizado.

Para facilitar, o acompanhamento de seu trabalho foi dividido em três partes. Na primeira etapa, a partir da função que representa a taxa de custos, você precisará determinar o gasto total dentro de um período de tempo delta *t*. Na segunda tarefa você terá duas funções para trabalhar: a função f_1, que representa a receita, e a função f_2, que representa o custo, ambas em função do tempo *t*. Sua tarefa será determinar qual é o lucro total, a partir dessas duas funções.

E, por fim, como terceira e última tarefa você deverá determinar o valor do excedente de consumidor a partir da função demanda $f(x)$ e do preço de mercado p^*.

Vejamos agora, de forma sucinta, o que será visto em cada seção: na primeira veremos que existe uma operação que inverte a operação de derivação: chama-se integral. Esta operação apresenta uma importante aplicação: o cálculo de áreas sob uma curva. Também veremos as principais propriedades de integração.

Na segunda seção estudaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, integrais indefinidas, cálculo de áreas sob curvas e cálculo de área entre duas curvas.

Por fim, na última seção veremos as técnicas de integração por substituição, integração por partes e aplicações de integração em duas áreas: na Economia e na Biologia.

Para concluir, faça todos os exercícios e tire suas dúvidas. Como resultados esperados de aprendizagem desta unidade, espera-se que você calcule a área sob curvas, a área entre duas curvas, que aplique o Teorema Fundamental do Cálculo e que utilize as técnicas de integração por substituição e por partes.

Seção 4.1

Fundamentos de cálculo aplicado: cálculo integral

Diálogo aberto

Após termos estudado derivação na última unidade, agora estudaremos a integração. Enquanto a derivação é utilizada para avaliar a taxa de variação de funções, a integral é utilizada para calcular a área sob uma curva ou entre duas curvas. Para aplicações na Engenharia e na Física, determinar a área sob uma curva está relacionado com o problema de determinar o trabalho realizado por uma força variável ou trabalho realizado por uma máquina térmica em um ciclo termodinâmico. Podemos obter também a velocidade e o deslocamento de uma partícula a partir de sua aceleração, as áreas e volumes de sólidos, correntes e cargas elétricas a partir da integração de campos magnéticos e elétricos, entre muitos outros.

Nesta seção veremos que a integral e a operação inversa da derivada, conceitos básicos sobre a integração, sua visualização geométrica a partir da Integral de Riemann, como efetuar integrais de polinômios e as principais propriedades da integração.

Com o propósito de contextualizar sua aprendizagem, vamos supor que você trabalha na área de planejamento e engenharia de uma fábrica na qual você é o responsável por manter o processo de produção otimizado.

Para facilitar o acompanhamento, seu trabalho foi dividido em três partes. Na primeira etapa, a partir da função que representa a taxa de gastos, você precisará determinar o custo total dentro de um período de tempo delta *t*. Esse cálculo exigirá de você e seus colegas uma compreensão um pouco mais detalhada da interpretação do gráfico.

A Gerência de Finanças levantou, a partir do banco de dados que possui, uma função taxa de custo, em R$/mês (em milhões de reais), produzida pela indústria que é dada por $R(t) = 5 + 7t^{0,45}$, onde *t* representa o tempo em meses. A data inicial $t = 0$ foi ajustada a partir do momento em que a Gerência de Operações informou que obteve-se estabilização nos processos industriais de produção (tomou-se esta decisão para que oscilações no processo de produção ainda não ajustados não interferissem na estimativa de gastos). O custo no momento inicial de coleta dos dados foi identificado como sendo igual a R$ 2,5 milhões de reais.

A Diretoria da empresa pretende obter o custo total em determinados meses para fins de comparação com outras unidades de produção. A partir da função taxa de custos mostrada, você deverá apresentar o custo total representado pelos meses $N_1 = 10$ e $N_2 = 11$.

Para que este desafio possa ser superado, você precisará dominar os conceitos de integral como antiderivada, conceitos básicos de integração, bem como resolver os exercícios propostos.

Não pode faltar

Integral como antiderivada e conceitos básicos de integração

Você já estudou no ensino fundamental e médio como determinar a área de triângulos, quadrados, retângulos e trapézios. Mas como determinar a área de uma figura irregular como um lago ou área de uma peça industrial irregular?

Considere agora outro tipo de problema. Suponha que a colheitadeira de soja utilizada na Seção 3.2 percorra a fazenda de soja não mais com uma velocidade constante, mas com uma velocidade instantânea $v(t)$. Recordemos que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (velocidade é igual à variação do espaço percorrido pela variação do tempo), então o espaço percorrido é igual ao produto da velocidade pela variação do tempo. Podemos escrever $\text{Distância percorrida} = \text{Velocidade média} \cdot \text{Intervalo de tempo}$.

A igualdade acima vale para intervalos de tempo bem pequenos. Se quisermos determinar a distância percorrida entre os instantes $t_1 = a$ e $t_2 = b$, podemos subdividir o intervalo $[a, b]$ em um número arbitrário n de subintervalos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$ e calcularmos a velocidade média em cada um desses subintervalos. Efetuando o produto da velocidade média em cada um destes subintervalos pelo intervalo de tempo correspondente, teremos o deslocamento neste subintervalo: $\Delta s_i = v_{m_i} \cdot \Delta t_i$. Assim, temos que a soma $\sum_{i=1}^{n} v_{m_i} \cdot \Delta t_i$ dos deslocamentos instantâneos resulta no deslocamento total s. Veremos nesta seção que uma operação matemática chamada integração é o equivalente a efetuarmos a soma e tomar partições do intervalo $[a,b]$. Esta operação é representada pelo símbolo $S = \int_a^b v(t)dt$.

Destaque-se que esta é uma situação totalmente nova. Até então não conseguiríamos determinar esta distância percorrida com tal generalidade. Mais importante ainda, ressaltamos que o problema da distância percorrida pode ser transportado para outros contextos.

Para resolver problemas assim, existe uma operação na Matemática chamada Integração. Veremos primeiro o que se denomina de integral indefinida e, em seguida, veremos a integral definida. A integração é o processo inverso da derivação.

Definição primitiva de uma função

Considere uma função $f(x)$ definida sobre um intervalo $[a,b]$. Chama-se de primitiva (ou antiderivada) de f à função F(x), tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$ (GONÇALVES; FLEMMING, 2011).

Como exemplos, considere a função $F_1(x) = x^2$. Esta função é uma primitiva da função $f_1(x) = 2x$, pois, ao derivarmos a função F_1, obtemos $F_1'(x) = 2x = f_1(x)$. Note que qualquer função $F(x) = x^2 + c$, onde c é uma constante, também será primitiva da mesma função $f_1(x) = 2x$, pois $F'(x) = [x^2 + c]' = 2x$ qualquer que seja a constante (a constante c desaparece ao derivarmos $F(x)$). Como outro exemplo, considere a função $F_2(x) = sen(2x) + 11$. Esta função é primitiva de $f_2(x) = 2cos(2x)$, pois $F_2'(x) = 2\cos(2x) = f_2(x)$.

Dos exemplos acima vemos que várias funções $F(x)$ distintas podem ser primitivas de uma mesma função $f(x)$. Este é um resultado importante no cálculo integral.

Definição integral indefinida de uma função

Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$, chama-se de integral indefinida da função $f(x)$ à função $F(x)+c$, onde *c* é denominada constante de integração. Para representar a integral indefinida de uma função $f(x)$, usa-se o símbolo $\int f(x)dx$ e lê-se como sendo "a integral indefinida de $f(x)$ com respeito à variável de integração *x*", ou simplesmente "integral de $f(x)dx$". O símbolo $"dx"$ é utilizado para indicar que estamos efetuando a integração com respeito à variável *x*. (GONÇALVES; FLEMMING, 2011).

Exemplificando

Vejamos alguns exemplos de integração de funções. Caso você não se recorde de algumas derivadas, consulte a Tabela 3.7 – tabela de derivadas, apresentada na Seção 3.2.

i) Seja $f(x) = sen(x)$. Para determinar $\int sen(x)\, dx$, devemos nos lembrar que $\cos'(x) = -sen(x)$. Assim, se tomarmos $F(x) = -\cos(x)$, temos $\int sen(x)\, dx = -\cos(x) + c,$ para alguma constante de integração *c* a ser determinada. A determinação do valor numérico da constante *c* que melhor modela um problema específico será apresentada posteriormente quando estudarmos a integral definida.

ii) $f(x) = x$. Para determinar $\int x\, dx$, lembramos que $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$, então, se tomarmos $F(x) = \frac{x^2}{2}$, teremos $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$.

iii) Seja $f(x) = e^x$. Para determinar $\int f(x)\, dx = \int e^x\, dx$, lembramos que $\left[e^x\right]' = e^x$. Assim, se tomarmos $F(x) = e^x$ teremos que $\int e^x\, dx = e^x + c$.

Como apresentamos na unidade anterior uma tabela de derivadas, de forma similar, também temos uma tabela de integrais imediatas, a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 | Tabela de integrais imediatas

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$f(x) = 1$	$\int dx = x + c$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}, n \neq 1$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$f(x) = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + C$
$f(x) = sen(x)$	$\int sen(x)\, dx = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x)\, dx = sen(x) + c$

$f(x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+c$

Fonte: adaptada de Stewart (2016, p. 361).

Exemplificando

Vejamos dois exemplos de uso da Tabela 4.1

Considere $f(x)=x^{3/5}$. Pela segunda linha da tabela, a integral será

$$\int x^{3/5}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+C=\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+C=\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}+C.$$

Considere $f(x)=e^x$. Para obter $\int e^x dx$, podemos utilizar a Tabela 4.1.

Usando a quarta linha teremos $\int e^x\,dx=\frac{e^x}{\ln(e)}+C$. Como $\ln(e)=1$, então $\int e^x\,dx=\frac{e^x}{1}+C=e^x+C$, o que corresponde ao resultado da terceira linha.

Em resumo: a integral $\int e^x\,dx=e^x+C$ é um caso particular da integral $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln(a)}+C$ quando $a=e$.

Para determinar a constante de integração, precisamos ter o valor inicial da função.

Vejamos um exemplo.

Suponha que um veículo desloque-se em linha reta de acordo com a função velocidade $v(t)=x'(t)=5t$. Sabe-se que no instante inicial sua posição era $x(0)=13$. Obtenha a função posição.

Para determinar a função posição, devemos efetuar a integral $x(t)=\int v(t)\,dt=\int x'(t)\,dt= \quad =\int 5t\,dt=\frac{5t^2}{2}+C$.

Logo $x(t)=\frac{5t^2}{2}+C$

Como fomos informados que $x(0)=13$, então $x(0)=\frac{5\cdot 0^2}{2}+C=13 \Rightarrow C=13$.

Portanto, a função posição fica $x(t)=\frac{5t^2}{2}+13$.

Pesquise mais

Caso necessário você poderá consultar tabelas de integrais mais abrangentes na página 489 da obra a seguir:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume I.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

E também na página 361 de:

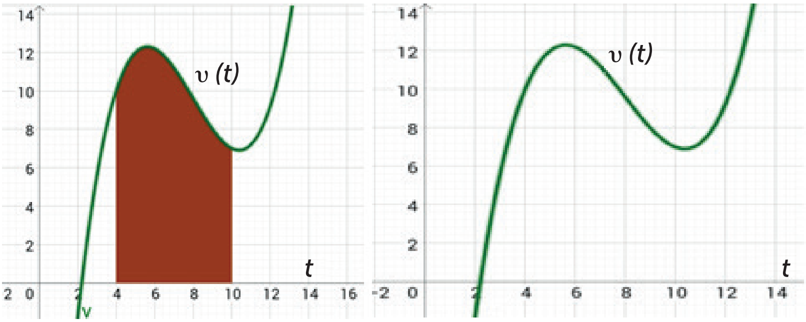
STEWART, James. **Cálculo Volume I.** 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

Ambos livros estão disponíveis em sua biblioteca virtual.

A integral de Riemann e o cálculo de áreas sob e entre curvas

Suponha que o gráfico da função velocidade $v(t)$ de uma partícula em função do tempo seja dado pela Figura 4.1. A área sob a curva da função $v(t)$ e entre $t=a$ e $t=b$ corresponde ao deslocamento da partícula entre estes dois instantes.

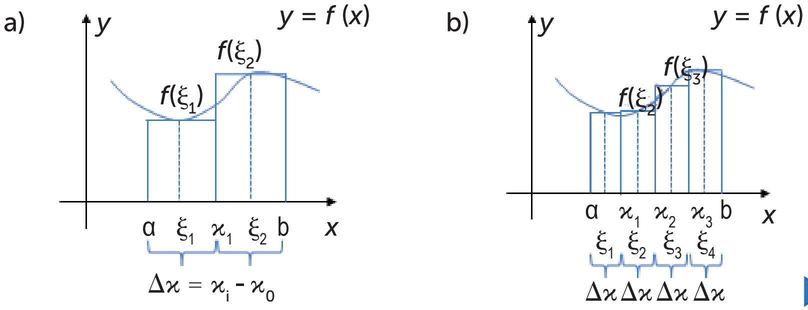
Figura 4.1 | Determinação de áreas sobre curvas



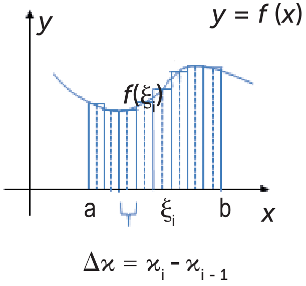
Fonte: elaborada pelo autor.

Como poderíamos obter a área sob uma curva $y = f(x)$ da Figura 4.1? Como sabemos, ao calcular a área de retângulos, poderíamos dividir a região abaixo do gráfico de $y = f(x)$ em retângulos, tomando o valor da função calculado no centro de cada subintervalo, calcular a área de cada retângulo e somar estas áreas. Se dividirmos em dois retângulos, teríamos a Figura 4.2 (a). É fácil de observar que temos área "sobrando" e área "faltando" dependendo do retângulo considerado. É bastante natural imaginar que se aumentarmos o número de retângulo o erro se reduzirá. É o que mostramos nas Figuras 4.2 (b) e (c). Observe que a altura de cada retângulo é dada pelo valor da função $f(\xi_i)$ e a largura da base é dada pela amplitude de cada subintervalo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Figura 4.2 | Divisão em dois retângulos (a) divisão em quatro retângulos (b) muitos retângulos (c)



c)



Fonte: elaborada pelo autor.

A ideia básica aqui é que é possível determinar a área sob a curva $f(x)$ entre os pontos $x=a$ e $x=b$ com a precisão que quisermos, basta aumentar indefinidamente a quantidade de retângulos utilizados. Esta ideia corresponde ao que se chama, no Cálculo Integral de Integral de Riemann.

Considere que o intervalo $[a,b]$ seja dividido em n subintervalos de comprimento, cada um deles igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, representando os pontos que definem os extremos de cada um destes subintervalos da seguinte forma: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$ Cada um destes subintervalos possui comprimento igual a $\Delta x = x_i - x_{i-1}.$ Na Figura 4.2 (a) dividimos o intervalo $[a,b]$ pela metade e teremos como aproximação para a área sob a curva $f(x)$ entre os pontos $x=a$ e $x=b$ e a soma das áreas dos dois retângulos $f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x$. Na Figura 4.2 (b) subdividimos cada retângulo da figura anterior pela metade e obtemos como aproximação para a área sob a curva $f(x)$ entre os pontos $x=a$ e $x=b$ a soma $f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + f(\xi_3)\Delta x + f(\xi_4)\Delta x$. Vamos considerar agora o caso geral de dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos. Considere os pontos ξ_i quaisquer tomados em cada um destes subintervalos $\xi_1 \in [a = x_0, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n = b]$ e o valor da função calculado nestes pontos $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$.

Assim, a área do primeiro retângulo será dada pelo produto da base (que é igual a Δx para cada um dos retângulos) e pela altura (que é igual ao valor da função em ξ_i, ou seja, $f(\xi_1)$: $A_1 = f(\xi_1)\Delta x$). Para o segundo retângulo a área é dada por $A_2 = f(\xi_2)\Delta x$, e assim sucessivamente até o último retângulo. Se somarmos as áreas de todos os retângulos, obtemos o valor aproximado da área *A* sob a curva $f(x)$ entre os extremos inferior e superior do intervalo $[a,b]$. Em símbolos escrevemos que esta área é $A \cong A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n =$ $f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x + f(\xi_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$.

A soma $f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x + f(\xi_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ é denominada de Soma de Riemann.

Agora é importante você rever a Figura 4.2 e imaginar que a quantidade de subintervalos aumentou indefinidamente, ou seja, suponha que $n \to \infty$ (supor isso é o equivalente a supor que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \to 0$). Com isso, a aproximação da área sob a curva da função $f(x)$ ficará cada vez melhor. Dessa forma, temos um procedimento para determinar o valor com a aproximação desejada da área sob uma curva $f(x)$ que seja contínua no intervalo $[a,b]$.

Definição área sob uma curva

Considere a função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ e notação apresentada acima para os subintervalos $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Define-se a área sob o gráfico de *f* entre o extremo inferior *a* e o extremo superior *b* pelo limite $A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, onde os pontos $\tilde{x}_i$ pertencem a cada um dos subtintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. (GONÇALVES; FLEMMING, 2011).

A integral definida e integrais de polinômios

Após apresentar a definição de área sob uma curva, estamos em condições de apresentar a integral definida.

Definição integral definida

Considere os subintervalos $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ do intervalo $[a,b]$. Define-se a integral definida de *a* até *b* da função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e escreve-se $\int_a^b f(x)dx$ pelo limite $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, se o limite existir. Denomina-se o número *a* de extremo inferior de integração e o número *b* de extremo superior de integração e a função $f(x)$ dentro do sinal de integral, que recebe o nome de integrando. Se o limite $\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ existir, diz-se que *f* é integrável. (ANTON; BIVENS; DAVIS; 2012).

Deve ser ressaltado que a soma de Riemann é a construção teórica para justificar as integrais apresentadas na Tabela 4.1. Na prática não efetuamos somas de Riemann, mas utilizamos a Tabela 4.1 para efetuar integrações.

Reflita

Toda função integrável tem que ser obrigatoriamente contínua?

Pesquise mais

Você pode pesquisar mais exemplos envolvendo somas de Riemann consultando, na Biblioteca Virtual, as páginas 339 a 342 da obra de Stewart.

STEWART, James. **Cálculo Volume I.** 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

Assimile

O próprio símbolo $\int f(x)dx$ da integral já nos ajuda a entender o significado dessa operação matemática: é uma letra “s” de soma “esticada”. Assim, é importante fixarmos que integrar corresponde a uma soma de um número de subdivisões do intervalo $[a,b]$ tendendo ao infinito.

Propriedades da integração

De forma similar às propriedades para limites e derivadas, também temos propriedades para integrais. Em todas essas propriedades estamos supondo que as funções envolvidas sejam integráveis.

As propriedades a seguir são úteis no cálculo de integrais.

1. A integral de uma constante c em um intervalo $[a,b]$ corresponde à área de um retângulo de lados $L_1 = c$ e $L_2 = b - a$: $\int_a^b c\ dx = c(b-a)$
2. A integral da soma de duas funções é igual à soma das integrais de cada uma delas: $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. A integral do produto de uma função por um escalar é o produto da integral da função pelo escalar: $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
4. A integral da diferença é a diferença das integrais: $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
5. Se invertermos a ordem de integração, o sinal da integral também será invertido: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

6. Integrar uma função do ponto a até o ponto b e somar com a integral desta função deste ponto b até um ponto c é igual a efetuar a integração de a até c: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (STEWART, 2016).

Exemplificando

a) Determine a integral $\int 3sen(x) + 5e^x - \frac{7}{3}2^x dx$.

Em primeiro lugar, podemos usar que a integral da soma é igual à soma das integrais:

$$\int 3sen(x) + 5e^x - \frac{7}{3}2^x dx = \int 3sen(x)dx + \int 5e^x dx - \int \frac{7}{3}2^x dx =$$

$$= 3\int sen(x)dx + 5\int e^x dx - \frac{7}{3}\int 2^x dx = -3\cos(x) + 5e^x - \frac{7\cdot 2^x}{3\ln(2)} + C$$

b) Determine a integral $\int \frac{9}{t^3} - 2\cos(t) - \frac{\sqrt{11}}{t} dt$

Da mesma forma que o caso anterior, usamos que a integral da soma é igual à soma das integrais:

$$\int \frac{9}{t^3} - 2\cos(t) - \frac{\sqrt{11}}{t} dt = \int \frac{9}{t^3} dt - \int 2\cos(t)dt - \int \frac{\sqrt{11}}{t} dt =$$

$$= \int \frac{9}{t^3} dt - \int 2\cos(t)dt - \int \frac{\sqrt{11}}{t} dt = 9\frac{t^{-3+1}}{-3+1} - 2sen(t) - \sqrt{11}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{9t^{-2}}{2} - 2sen(t) - \sqrt{11}\ln|t| + C.$$

c) Uma das aplicações das propriedades acima surge na integração de polinômios. Considere o polinômio $p(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ e determine sua primitiva.

Neste caso, a integral a ser calculada é $\int (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) dt$.

Aplicando a propriedade de que a integral da soma é igual à soma das integrais, podemos "abrir" a integral acima da seguinte forma:

$$\int\left(t^4+t^3+t^2+t+1\right)dt=\int t^4dt+\int t^3dt+\int t^2dt+\int tdt+\int 1dt$$

Usando a Tabela 4.1 de integrais, temos $\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}+t+C$.

Sem medo de errar

Lembremos que você foi incumbido de determinar o gasto total da indústria entre os meses $N_1=10$ e $N_2=11$ a partir da função taxa de gastos, medida em R$/mês produzida, que é representada pela função $R(t)=5+7t^{0,45}$, onde t representa o tempo em meses.

Observe que uma função taxa de gastos indica a "velocidade" com que os gastos ocorrem. Neste caso, são R$/mês. Para obter o gasto total nos meses $N_1=10$ e $N_2=11$, devemos efetuar a integral da função taxa $R(t)=5+7t^{0,45}$, determinar a constante de integração a partir do valor do custo para $t=0$ e substituir os valores desejados $N_1=10$ e $N_2=11$ na função integrada.

Efetuando a integral, temos: $C(t)=\int R(t)dt=\int 5+7t^{0,45}dt=$

$$5\int dt+7\int t^{0,45}dt==5t+7\frac{t^{0,45+1}}{0,45+1}+K=5t+\frac{7t^{1,45}}{1,45}+K$$

A função Custo fica: $C(t)=5t+\dfrac{7t^{1,45}}{1,45}+K$. Como no instante inicial temos que o custo era de R$ 2,5 milhões, podemos determinar a constante de integração $C(0)=5\cdot 0+\dfrac{7\cdot 0^{1,45}}{1,45}+K=2,5$.

Portanto, $K=2,5$.

Logo, a função Custo é igual a $C(t)=2,5+5t+\dfrac{7t^{1,45}}{1,45}$.

Queremos obter os custos para $N_1 = 10$ e $N_2 = 11$. Então substituímos estes valores na função Custo:

$$C(10) = 2{,}5 + 5 \cdot 10 + \frac{7 \cdot 10^{1{,}45}}{1{,}45} = 188{,}56$$ e

$$C(11) = 2{,}5 + 5 \cdot 11 + \frac{7 \cdot 11^{1{,}45}}{1{,}45} = 213{,}72.$$

Agora você deve produzir um relatório organizando este resultado e explicando de forma sucinta o procedimento adotado para obtê-lo, a fim de que possa ser enviado à diretoria da empresa.

Avançando na prática

Aplicação de integrais na ecologia

Descrição da situação-problema

Suponha que ocorreu um derramamento de um líquido contaminante na Lagoa dos Patos, no Rio Grande do Sul. Estimou-se a área da mancha contaminante sobre a superfície da água no minuto inicial $t = 0$ em $100m^2$. Por acidentes anteriores, estima-se que a taxa de espalhamento desse tipo de contaminante possa ser aproximada pela função $f(t) = 2{,}83 \cdot 1{,}071^t$.

Você foi contratado por uma empresa que produz relatórios de impacto ambiental para quantificar a área ocupada pelo contaminante após os primeiros 10 minutos do vazamento.

Resolução da situação-problema

Para calcular a área ocupada pelo contaminante após 10 minutos, devemos resolver a integral:

$$A(t) = \int 2{,}83 \cdot 1{,}071^t \, dt.$$

Usando a Tabela 4.1 temos $A(t)=\int 2{,}83\cdot 1{,}071^t dt = 2{,}83\cdot\frac{1{,}071^t}{\ln(1{,}071)}+C = 41{,}26\cdot 1{,}071^t + C$.

Fomos informados que para $t=0$ a mancha contaminante possui área de $100m^2$.

Com esta informação determinamos a constante de integração C:

$$A(0)=41{,}26\cdot 1{,}071^0 + C = 100 \Rightarrow C = 100-41{,}26 = 58{,}74.$$

A função que informa a área da mancha contaminante em função do tempo fica:

$$A(t)=41{,}26\cdot 1{,}071^t + 58{,}74.$$

Substituindo $t=10$ na função $A(t)$, obtemos a área após 10 minutos de derramamento do elemento contaminante:

$A(10)=41{,}26\cdot 1{,}071^{10}+58{,}74=140{,}67$ metros quadrados.

Faça valer a pena

1. A integração é a operação inversa da derivação. Lembremos a definição de primitiva de uma função.
Definição de primitiva de uma função: considere uma função $f(x)$ definida sobre um intervalo $[a,b]$. Chama-se de primitiva (ou antiderivada) de f à função F(x), tal que $F'(x)=f(x)$, para todo $x\in[a,b]$.

Assinale a alternativa que apresenta a primitiva correta.

a) $\int 5xdx = 5x^2 + C$.

b) $\int sen(x)\,xdx = sen^2(x)+C$.

c) $\int \frac{11}{3}e^x dx = -\frac{11}{3}e^{2x}+C$.

d) $\int 5dx = 5x + C$.

e) $\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{x^2}+C$.

2. A função velocidade v relaciona-se com a função posição x pela derivação: $v(t) = x'(t)$.

Sabe-se que um veículo viaja em linha reta com velocidade dada por $v(t) = 7\sqrt{t}\ {}^{km}\!/\!_{h}$. Além disso, fomos informados que sua posição no instante inicial era $x(0) = 0\ km$.

Diante dessas condições, a expressão que corresponde ao espaço percorrido pelo veículo entre o instante inicial e $t = 5$ horas é dado pela alternativa:

a) 6,92 km.
b) 8,19 km.
c) 7,45 km.
d) 11,23 km.
e) 5,38 km.

3. A taxa com que o Custo (medido em R$) varia é conhecida como custo marginal. Se a função Custo for representada por C(x), onde x denota o número de unidades produzidas por dia, a função custo marginal é representada por $C'(x)$.
Sabe-se que o custo marginal é dado por $C'(x) = 0{,}22x^2 - 5x + 35$.

A partir da função custo marginal fornecida, determine uma candidata a função Custo total e assinale a alternativa que apresenta este custo.

a) $C(x) = 0{,}22x^3 - 5x^2 + 35x + C$.

b) $C(x) = \dfrac{0{,}22x^2}{2} - 5x + 35 + C$.

c) $C(x) = -\dfrac{0{,}66x^3}{6} + \dfrac{10x^2}{5} - 35x + C$.

d) $C(x) = \dfrac{0{,}11x^3}{2} - \dfrac{2x^4}{5} + 35x^2 + C$.

e) $C(x) = \dfrac{0{,}22}{3}x^3 - \dfrac{5x^2}{2} + 35x + C$.

Seção 4.2

Teorema fundamental do cálculo e suas aplicações

Diálogo aberto

Na última seção iniciamos nosso estudo sobre integração. Vimos que a operação de integração é a inversa da operação de derivação, definimos a primitiva e a integral indefinida de uma função, apresentamos uma tabela de integrais de funções mais utilizadas, além de conhecer a integral de Riemann e o uso de integrais para o cálculo de áreas. Por fim, conhecemos propriedades da integração e como integrar polinômios.

Nesta seção veremos o Teorema Fundamental do Cálculo, como calcular a área sob uma curva, bem como a área entre duas curvas. Veremos também as integrais indefinidas e ampliaremos nossa tabela de integrais. A importância do Teorema Fundamental do Cálculo revela-se por ele permitir determinar a área de superfícies com formatos complexos, o trabalho realizado por uma máquina térmica em um ciclo termodinâmico, além de realizar cálculos avançados com grandezas variáveis no tempo.

Na resolução do problema da seção anterior você teve que determinar o custo total dentro de um certo período de tempo em determinado semestre a partir de uma função que representava a taxa de custo em R$/mês. Agora, ao analisar os dados da empresa, por meio de um processo de modelagem matemática, você determinou duas funções para representar o ganho e o gasto estimados para os próximos 20 meses. Como a empresa está lidando com uma tecnologia disruptiva, espera-se um crescimento exponencial neste período. A função $f_1(t) = 3{,}3 \cdot 1{,}07^t$ que representa a receita (em milhões de R$) e a função $f_2(t) = 2{,}8 \cdot 1{,}07^t$ que representa o custo de produção (em milhões de R$), ambas em função do tempo t. Sua tarefa será determinar qual é o lucro total a partir destas funções entre a data base $t = 0$ e a data final para a qual estima-se que estas funções modelem adequadamente o crescimento, que é $t = 20$ meses.

Você será apresentado, nesta seção, às ferramentas para resolver este problema: a principal delas é o Teorema Fundamental do Cálculo. Para tornar mais simples a operacionalização destes cálculos, frequentemente utilizam-se as tabelas de primitivas. Munido dessas ferramentas e com sua dedicação e compromisso usuais, você estará apto a resolver mais este problema.

Após solucioná-lo, você deverá produzir um relatório sucinto de caráter gerencial para seus superiores, com suas conclusões e hipóteses matemáticas explicitadas.

Não pode faltar

Iniciamos esta seção com o principal teorema do cálculo diferencial e integral. O Teorema que apresentaremos a seguir é importante visto que relaciona as duas operações que já estudamos: a derivação, que resolve o problema de encontrar uma reta tangente a uma função, e a integração, que soluciona o problema de determinar a área sob a curva de uma função), estabelecendo que cada uma destas operações é a inversa da outra.

Antes de enunciar o teorema a seguir, é conveniente definirmos a função auxiliar *F*: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, onde a função *f* é suposta contínua e positiva no intervalo $[a,b]$, com $x \in [a,b]$

Observe que a função *F* é igual à área sob o gráfico da função *f* entre os pontos *a* e *x*.

Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

Considere uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua neste intervalo. Dessa forma, a função $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, com $x \in [a,b]$ é contínua neste intervalo, derivável no intervalo aberto (a,b) e vale que $F'(x)=f(x)$. (STEWART, 2016).

Assimile

Traduzindo em palavras, a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo nos informa que a função $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é uma antiderivada da função *f*, ou seja, se derivarmos uma integral cujo extremo superior é variável (com o extremo inferior fixado), vale que $F'(x)=f(x)$.

Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2)

Considere uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua neste intervalo. Então, vale que $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$ para *F* uma primitiva qualquer da função *f*.

Assimile

A importância da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo está em transformar um problema complicado (calcular a área sob o gráfico da função *f* entre os extremos *a* e *b*), em uma subtração dos valores numéricos da primitiva de *f* nestes extremos.

Perceba que com o Teorema Fundamental do Cálculo podemos calcular áreas de funções mais diversas.

Exemplificando

Vejamos como aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo em alguns exemplos.

i) Determine a área sob a função $f(x)=x^2$ no intervalo $[0,2]$

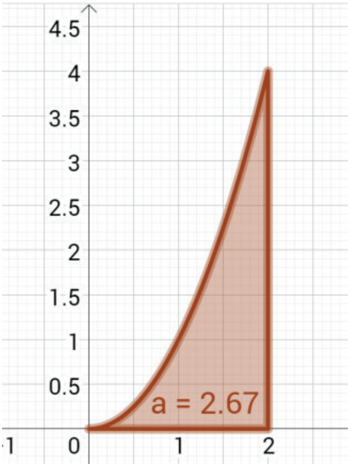
A área é dada pela expressão é $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$ com

$a = 0$, $b = 2$. Sabemos que uma primitiva de $f(x) = x^2$ é

$F(x) = \frac{x^3}{3}$. Assim, $\int_0^2 x^2 dt = F(2) - F(0) = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$.

A Figura 4.3 mostra a área sob a curva em estudo.

Figura 4.3 | Área sob a curva $f(x) = x^2$ entre 0 e 2



Fonte: elaborada pelo autor.

ii) Determine a área sob a função $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

A área é dada pela expressão $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, com

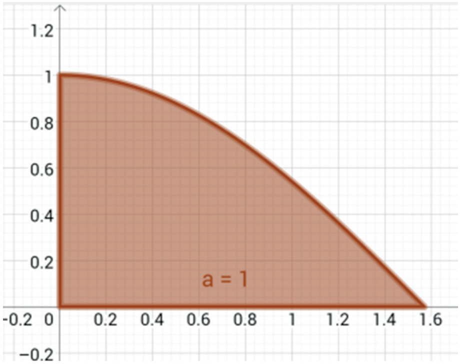
$a = 0, b = \frac{\pi}{2}$. Sabemos que uma primitiva de $f(x) = \cos(x)$ é

$F(x) = sen(x)$. Assim,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) = 1$$

A Figura 4.4 mostra a área da curva para esse segundo exemplo.

Figura 4.4 | Área sob a curva $f(x) = \cos(x)$ entre 0 e $\frac{\pi}{2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para saber mais sobre o problema de determinação de áreas, sugerimos consultar na Biblioteca Virtual as páginas 316 a 321 de:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume I.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Prática com integrais indefinidas

Vejamos agora algumas integrais que fazem uso da Tabela 4.1 da seção anterior e das propriedades de integrais também vistas anteriormente.

Exemplificando

Calcule as integrais indefinidas usando a Tabela 4.1 e as propriedades de integrais vistas na seção anterior:

a) $$\int \left(5x^3 + 11 - \sqrt{x}\right)dx$$

Usamos a propriedade da integral da soma, que é a soma das integrais:

$$\int \left(5x^3 + 11 - \sqrt{x}\right)dx = \int 5x^3 dx + \int 11dx - \int x^{1/2}dx = \frac{5x^4}{4} + 11x - \frac{x^{3/2}}{3/2} =$$

$$= \frac{5x^4}{4} + 11x - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

b) $$\int \left(3\sqrt[5]{x^8} - \frac{5}{2x^3} + 2x^{3/7} - 5\cos(x) - 7\cdot 2^x\right)dx$$

Abrindo na soma das integrais, temos que

$$3\int \sqrt[5]{x^8}dx - 5\int \frac{1}{2x^3}dx + 2\int x^{3/7}dx - 5\int \cos(x)dx - 7\int 2^x dx =$$

$$3\int x^{8/5}dx - \frac{5}{2}\int x^{-3}dx + 2\frac{x^{\frac{3}{7}+1}}{\frac{3}{7}+1} - 5sen(x) - 7\frac{2^x}{\ln(2)} =$$

$$3\frac{x^{\frac{8}{5}+1}}{\frac{8}{5}+1} - \frac{5}{2}\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 2\frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} - 5sen(x) - 7\frac{2^x}{\ln(2)} + C =$$

$$\frac{15}{13}x^{\frac{13}{5}} + \frac{5}{4x^2} + \frac{14x^{\frac{10}{7}}}{10} - 5sen(x) - 7\frac{2^x}{\ln(2)} + C$$

Pesquise mais

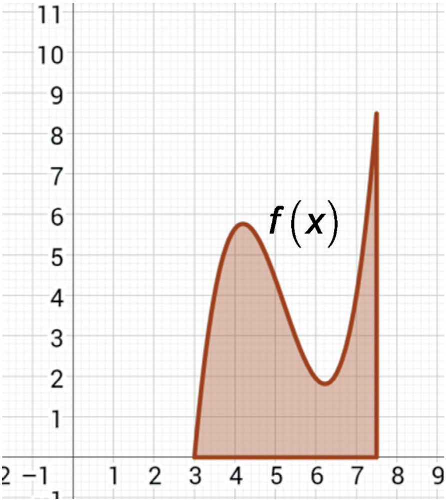
Assista a uma vídeo-aula sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, do início até o minuto 8:40, com o professor Renato Pedrosa do Departamento de Matemática da UNICAMP.

Disponível em: <https://youtu.be/NalgyOeN8KM>. Acesso em: 17 set. 2018.

Cálculo de área sob curvas

Já vimos na seção anterior a definição de área sob uma curva e de integrais definidas. A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ corresponde à área sob a curva *f* entre os extremos *a* e *b*. Agora, veremos exemplos de integrais definidas. A Figura 4.5 exemplifica a área sob uma curva de uma função f(x).

Figura 4.5 | Área sob a curva f(x) entre os extremos a e b



Fonte: elaborada pelo autor.

a) Considere a função $f(x) = 12 - x^2$. A integral definida $\int_2^3 12 - x^2 dx$ corresponde à área sob a curva $f(x) = 12 - x^2$, entre os extremos $a = 2$ e $b = 3$. A função $f(x) = 12 - x^2$ é contínua no intervalo $[2,3]$. Usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular $\int_2^3 12 - x^2 dx$.

A partir do teorema, sabemos que existe uma primitiva $g(x)$ da função *f*. As primitivas de *f* são da forma $g(x) = 12x - \frac{x^3}{3} + C$.

Note que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, qualquer que seja esta constante ela se cancelará. Ainda sobre o teorem, sabemos que

$$\int_2^3 f(x)dx = [g(x)]_2^3 = g(3) - g(2) = \left(12 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(12 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) =$$

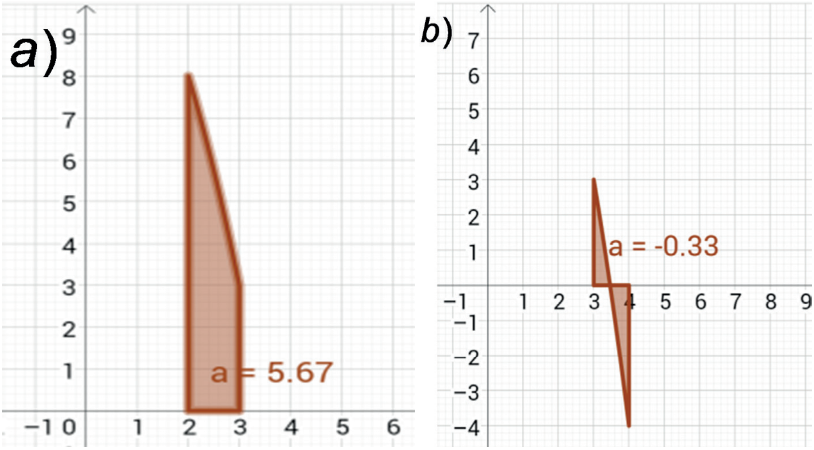
$$= (36 - 9) - \left(24 - \frac{8}{3}\right) = 27 - \frac{64}{3} = \frac{17}{3} = 5{,}666...$$

Se calcularmos a integral $\int_3^4 f(x)dx$, veremos que $\int_3^4 f(x)dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_3^4 =$

$$= \left(12 \cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(12 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) = \left(48 - \frac{64}{3}\right) - (36 - 9) = -0.333...$$

Essas duas primeiras integrais estão ilustradas na Figura 4.6.

Figura 4.6 | Integrais $\int_2^3 12 - x^2 dx$ e $\int_3^4 12 - x^2 dx$



Fonte: elaborada pelo autor.

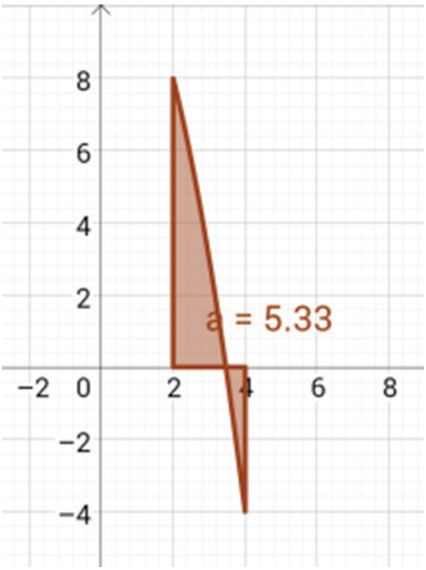
Agora, façamos a integral $\int_2^4 f(x)\,dx$: $\int_2^4 f(x)\,dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 =$

$$= \left(12\cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(12\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) = \left(48 - \frac{64}{3}\right) - \left(24 - \frac{8}{3}\right) = 5,333...$$

Essa integral está ilustrada na Figura 4.7. Compare as Figuras 4.6 e 4.7 e observe que $\int_2^4 f(x)\,dx = 5,333... =$

$$5,666... - 0,333... = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx.$$

Figura 4.7 | Integral $\int_2^4 12 - x^2 dx$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que é diferente integramos uma função como em

$\int_2^4 12 - x^2 dx$ e integrarmos o módulo da função: $\int_2^4 \left|12 - x^2\right| dx$.

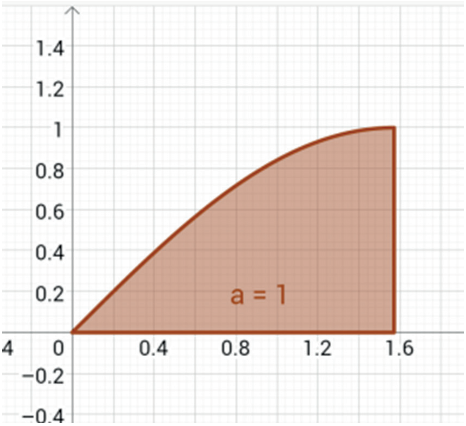
b) Calcule a integral $\int_0^{\pi/2} sen(x)\,dx$.

Uma primitiva de $f(x) = sen(x)$ é $F(x) = -\cos(x) + C.$ Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos(0)\right) = 1 - 0 = 1 .$$

A Figura 4.8 ilustra essa integral estudada.

Figura 4.8 | Integral $\int_0^{\pi/2} sen(x)\,dx$



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Considere um móvel que se desloca com velocidade $v(t) = s'(t)$, onde $s(t)$ representa a função posição do móvel. Do Teorema Fundamental do Cálculo, se integrarmos a função velocidade entre os instantes $a = t_1$ e $b = t_2$, obtemos o deslocamento entre os instantes $a = t_1$ e $b = t_2$:

$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$ = deslocamento. Por que a integral do módulo da velocidade $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$ representa a distância total percorrida?

Ao efetuarmos a integral de uma função que possui seu gráfico acima do eixo *x*, a área será positiva e, se esta função apresentar seu gráfico abaixo do eixo *x*, sua integral será negativa. Portanto, em geral, não vale a igualdade $\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

Para avaliarmos a diferença entre a integral de uma função e a integral do módulo da função vejamos os dois exemplos a seguir.

a) Calcule a integral $\int_0^{2\pi} sen(t)\,dt$.

Da mesma forma que no item b) do exemplo anterior temos:

$$\int_0^{2\pi} sen(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0 \cdot$$

Estamos somando áreas positivas com áreas negativas iguais, resultando em zero no final.

O resultado seria diferente se efetuássemos a integral do módulo do seno. Veja no item a seguir.

d) Calcule a integral $\int_0^{2\pi} |sen(t)|\,dt$.

Para calcular essa integral, observamos que a função seno é positiva para $0 < x < \pi$ e negativa para $\pi < x < 2\pi$.

Então,

$$\int_0^{2\pi} |sen(t)|\,dt = \int_0^{\pi} sen(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -sen(t)dt = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Uma interpretação importante do Teorema Fundamental do Cálculo consiste no seguinte: ao efetuarmos a integral definida de uma taxa de variação, obtemos a variação total. Por exemplo, se você efetuar a integral definida da função velocidade de um corpo (lembre-se que a velocidade é a taxa de variação da posição do corpo), obterá o deslocamento do corpo.

Veja o exemplo a seguir: considere que uma fábrica de equipamentos de mecânica pesada possui um reservatório de água para uso industrial. Nos meses de elevada produção na fábrica, o reservatório perde água a uma taxa dada pela função $V'(t) = 18 \cdot 2^t + 2500$ litros de água por dia. Como podemos determinar a água utilizada ao longo de quatro dias? Como determinar a água utilizada no intervalo de três dias após um dia genérico *k*?

Como queremos determinar o volume de água que saiu do reservatório, devemos multiplicar a função taxa de variação do reservatório pelo intervalo de tempo *dt* e somar para todos os intervalos de tempo entre o dia zero e o 4º dia.

$$V(4) = \int_0^4 18 \cdot 2^t + 2500dt = \left[\frac{18 \cdot 2^t}{\ln(2)}\right]_0^4 + [2500t]_0^4 = \frac{18(2^4 - 2^0)}{\ln(2)} + 2500 \cdot 4 - 2500 \cdot 0 \cong 10.390$$

litros por dia.

Para determinar a água que saiu do reservatório a partir do dia *k*, durante os três dias seguintes fazemos:

$$V(k+3) - V(k) = \int_k^{k+3} 18 \cdot 2^t + 2500dt = \left[\frac{18 \cdot 2^t}{\ln(2)}\right]_k^{k+3} + [2500t]_k^{k+3} =$$

$$= \frac{18(2^{k+3} - 2^k)}{\ln(2)} + 2500 \cdot (k+3) - 2500 \cdot k = \frac{126 \cdot 2^k}{\ln(2)} + 7500$$ litros por dia.

O raciocínio expresso no exemplo anterior pode ser transferido para outras inúmeras aplicações. Quadro 4.1 apresentamos algumas delas.

Quadro 4.1 | Variação total e integral definida associada

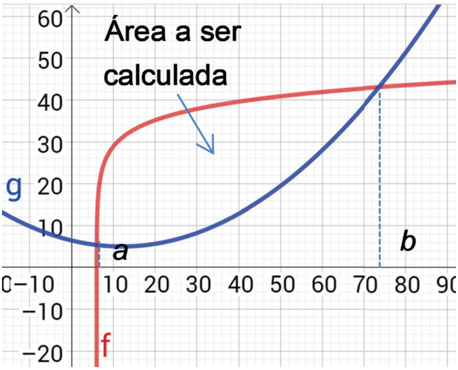
Variação total	Integral definida
Variação total da velocidade	Da aceleração (ou seja, da taxa de variação da velocidade) do corpo
Deslocamento (variação total da posição)	Da velocidade (ou seja, da taxa de variação da posição) do corpo
Variação total da função receita	Da receita marginal
Variação total da função lucro	Do lucro marginal
Variação total da função custo	Do custo marginal
Variação total da população de organismos	Da taxa de crescimento da população

Fonte: elaborada pelo autor.

Cálculo de áreas entre curvas

Até agora, vimos como calcular a área sob a curva de uma função *f* entre os extremos de integração *a* e *b*. Trataremos, neste momento, de uma situação um pouco diferente. Veja a Figura 4.9.

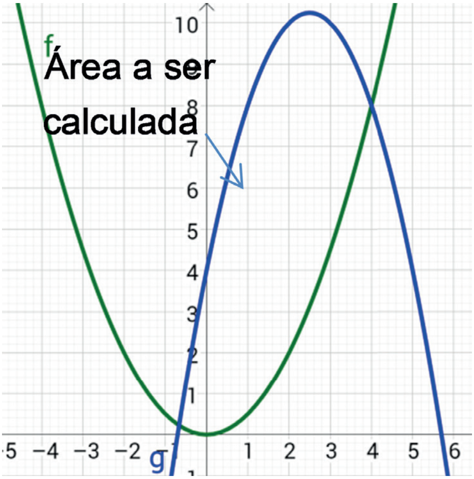
Figura 4.9 | Área entre curvas



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que pretendemos determinar a área compreendida entre as duas curvas definidas pelas funções *f* e *g*. Utilizando o conceito de somas de Riemann, podemos aproximar esta área subdividindo-a em retângulos com extremidade inferior na função inferior e extremidade superior na função superior. Assim, a altura destes retângulos é $h_i = f(x_i) - g(x_i)$, onde cada x_i é o ponto central do i-ésimo retângulo. A largura de cada retângulo é $\Delta x = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (estamos supondo que a largura é a mesma para todos os retângulos. A área de cada retângulo é igual a $\left[f(x_i)-g(x_i)\right]\Delta x_i$. Então, utilizando as somas de Riemann, a área entre as duas curvas *f* e *g* é aproximadamente $A \cong \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-g(x_i)\right]\Delta x_i$. Se tomarmos o limite quando utilizamos o número de retângulos tendendo ao infinito, esta soma transforma-se na integral $\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$. Para exemplificar o cálculo de áreas entre duas curvas, considere as funções $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ e $g(x)=5x-x^2+4$ e determine a área limitada por estas duas funções. Inicialmente, observe a Figura 4.10.

Figura 4.10 | Funções $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ e $g(x)=5x-x^2+4$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular a área compreendida entre as duas curvas, precisamos determinar os extremos de integração. Para isso, precisamos determinar o ponto de encontro entre as duas curvas resolvendo a equação $f(x)=g(x)$.

Resolver essa equação é equivalente a determinar os valores de *x*, tais que $\frac{1}{2}x^2 = 5x - x^2 + 4$. Que, por sua vez, é equivalente a resolver a equação de segundo grau $\frac{3}{2}x^2 - 5x - 4 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 4$ e $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Assim, o extremo inferior de integração é $a = -\frac{2}{3}$, e o extremo superior é $b = 4$. A função que ocupa a parte superior da região a ser integrada é a função *g*, e a função que ocupa a parte inferior é a função *f*. A integral a se calcular é $\int_{-2/3}^{4} \left[g(x) - f(x)\right]dx.$

Substituindo as expressões das duas funções, temos

$$\int_{-2/3}^{4} \left[5x - x^2 + 4 - \frac{1}{2}x^2\right]dx = \int_{-2/3}^{4} \left[-\frac{3}{2}x^2 + 5x + 4\right]dx = \left[-\frac{3x^3}{2 \cdot 3} + 5\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2/3}^{4} =$$

$$= -\frac{4^3}{2} + 5\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 - \left(-\frac{\left(-2/3\right)^3}{2} + 5\frac{\left(-2/3\right)^2}{2} + 4\left(-2/3\right)\right) = 25,41$$

unidades de área.

Pesquise mais

Para saber mais sobre cálculo de área entre curvas, sugerimos consultar, na Biblioteca Virtual as páginas 382 a 387 da obra a seguir. Nela, você encontrará mais exemplos de determinação da área entre curvas.

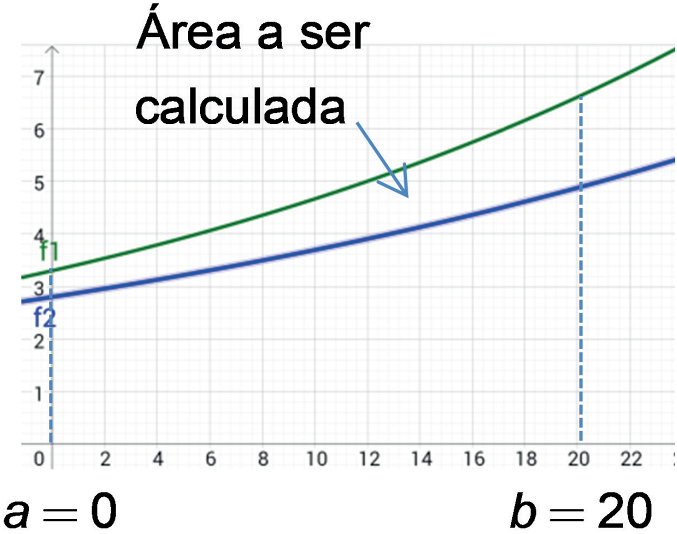
STEWART, James. **Cálculo Volume I.** 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

Sem medo de errar

Vamos relembrar o contexto do problema que você deve resolver: está sob sua responsabilidade determinar o lucro total entre a data base $t = 0$ e a data final $t = 20$ a partir das funções ganho representada por $f_1(t) = 3,3 \cdot 1,07^t$ e a função $f_2(t) = 2,8 \cdot 1,.07^t$ que representa o gasto.

Inicialmente, você plotou os gráficos das duas funções, obtendo a Figura 4.11.

Figura 4.11 | Gráficos das funções $f_1(t) = 3,3 \cdot 1,07^t$ e $f_2(t) = 2,8 \cdot 1,07^t$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular o lucro total neste período, devemos efetuar a integral $\int_0^{20} [f_1(t) - f_2(t)]\,dt$.

Assim,

$$\int_0^{20} [f_1(t) - f_2(t)]\,dt = \int_0^{20} 3,3 \cdot 1,07^t - 2,8 \cdot 1,07^t\,dt = \int_0^{20} 0,5 \cdot 1,07^t\,dt =$$

$$= 0,5 \int_0^{20} 1,07^t\,dt = 0,5 \left[\frac{1,07^t}{\ln(1,07)} \right]_0^{20} =$$

$$= 0,5 \cdot \left(\frac{1,07^{20} - 1,07^0}{\ln(1,07)} \right) = 0,5 \cdot \left(\frac{3,869 - 1}{0,0676} \right) = 21,20$$ (em milhões de R$).

Avançando na prática

Taxa de crescimento de acessos a um site

Descrição da situação-problema

Uma empresa de marketing digital informa que, para alguns tipos de anúncios realizados com suas ferramentas de divulgação nas Redes Sociais, o número de acessos diários ao site divulgado para o cliente cresce a uma taxa dada pela função $f(t) = 9 + 71{,}6t^{0.9}$, onde *t* é dado em dias após o início da vigência do contrato.

O cliente informou que o número de acessos inicial (antes da contratação pela agência de marketing digital) é 12.000.

Você foi contratado para apresentar uma tabela com a estimativa de acessos para daqui a 5, 10, 15 e 20 semanas.

Resolução da situação-problema

Como a função $f(t) = 9 + 71{,}6t^{0.9}$ representa a taxa de crescimento (reportamo-nos ao Quadro 4.1) no número de acessos após *t* dias do início do contrato da agência de marketing digital

Como esta função representa uma taxa, ou seja, uma "velocidade", é interessante escrevê-la na forma $A'(t) = f(t) = 9 + 71{,}6t^{0.9}$, a qual representa a taxa de variação dos acessos t dias após o início da atuação da consultoria.

Temos a informação que o número de acessos no instante inicial $t = 0$ é $A(0) = 12000$.

Integramos a função $A'(t) = f(t) = 9 + 71{,}6t^{0.9}$:

$$A(t) = \int A'(t)dt = \int 9 + 71{,}6t^{0.9}dt .$$

Obtendo: $A(t)=\int 9+71{,}6t^{0.9}dt=9t+71{,}6\dfrac{t^{0{,}9+1}}{1{,}9}+C$.

Como o número de acessos no instante $t=0$ é 12.000, temos a condição inicial $A(0)=12000$.

$$A(0)=9\cdot 0+71{,}6\frac{0^{0{,}9+1}}{1{,}9}+C=12000\,.$$

Portanto, a função $A(t)$ será igual a $A(t)=9t+71{,}6\dfrac{t^{1{,}9}}{1{,}9}+12000$.

Agora basta substituir os valores solicitados $t=5,10,15,20$ e construímos a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 | Estimativa de número de acessos aproximados t dias após o início do contrato

t	5	10	15	20
Acessos estimados	12.847	15.083	18.602	23.351

Fonte: elaborada pelo autor.

Pergunta-se: você acredita que esta consultoria seria contratada? O aumento no número de acessos foi significativo no período considerado?

Faça valer a pena

1. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo afirma que se f é uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então vale que $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$ para F uma primitiva qualquer da função f.

Sendo $f(t)=5e^t$, é correto afirmar que:

a) $\int_0^5 5e^t dt=(e^5-1)\ln(5)$.

b) A função $f(t)=5e^t$ não pode ser integrada para nenhum intervalo fechado $[a,b]$, pois cresce exponencialmente.

c) $\int_0^5 5e^t dt = \frac{(1-e^5)}{5}$.

d) $\int_0^5 5e^t dt = 5(e^5-1)$.

e) $\int_5^{10} 5e^t dt = 10(e^5-1)$.

2. Em uma indústria de produção de chapas metálicas são produzidas placas delimitadas por funções mais diversas.
Para calcular a área de uma chapa delimitada pelas funções $f(x)$, $g(x)$ e pelo eixo y até a reta x = L, com comprimento na base de L cm, deve ser calculada a integral $\int_0^L f(x)-g(x)\,dx$.

Considere que a chapa é delimitada pelas funções $f(x)=0,5x^2+5$ e $g(x)=2^x$ e possui comprimento na base de 3 cm.

Dessa forma, a área desta chapa é, aproximadamente:

a) 5,61 cm^2.
b) 7,31 cm^2.
c) 9,40 cm^2.
d) 11,28 cm^2.
e) 13,16 cm^2.

3. Em uma investigação de contaminação do solo por resíduos industriais, foi constatado que a taxa de absorção do elemento contaminante podia ser adequadamente modelada pela função $A(x)=-0,35x^2+85$ (em kg/dias), e que a taxa de eliminação pelo solo poderia ser modelada pela função $E(x)=0,05x^2+35$ (em kg/dias). Nestas funções, x representa o número

de dias após o início da contaminação representada por $x=0$. No início do processo não havia elemento contaminante algum no solo.
Considere as afirmações a seguir:
I. A área correspondente à diferença entre as funções $A(x)-E(x)$ pode ser interpretada como a quantidade do elemento contaminante no solo após um determinado número de dias.
II. Se for efetuada uma pesquisa por elemento contaminante neste solo após 6 dias, a função absorção A(x) será menor que a função eliminação E(x).
III. A quantidade total de elemento contaminante no solo após um número arbitrário *d* de dias é dada pela função $Q(d)=-0,4\frac{d^3}{3}+50d$. Observe que *d* deve satisfazer restrições para que a resposta possua interpretação física.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a correta.

a) F – V – F.
b) F – F – V.
c) V – F – V.
d) V – V – F.
e) F – F – F.

Seção 4.3

Fundamentos de cálculo aplicado: técnicas de integração

Diálogo aberto

Na última seção estudamos o Teorema Fundamental do Cálculo, como calcular a área sob uma curva e a área entre curvas. Também ampliamos nossa tabela de integrais.

Nesta seção veremos duas técnicas de integração: a integração por substituição e a integração por partes. Além disso, veremos duas aplicações da integração: à Economia e à Biologia.

Na aplicação à Economia estudaremos o excedente do consumidor, já para a Biologia veremos um modelo para determinar o fluxo do sangue em uma artéria humana.

Nesta seção você continua atuando na área de planejamento e engenharia da fábrica, mas agora estudando a produção de máquinas agrícolas. Nesta última etapa, você precisará determinar o valor do excedente de consumidor a partir da função demanda $D(q) = -4{,}83q^2 - 125{,}23q + 56450$ e da função oferta $S(q) = 2{,}97q^2 + 72{,}37q + 32900$.

Os conceitos e as ferramentas técnicas necessárias para resolver este problema serão fornecidos nesta seção. Com isso, você estará aparelhado e em plenas condições de resolver este problema. Nesta seção fechamos nossa disciplina de Fundamentos do Cálculo Aplicado. Você estudou as ferramentas básicas do cálculo, as quais foram muito relevantes para a revolução científica e industrial dos últimos trezentos anos.

Não pode faltar

Integração por substituição

Para motivar a técnica de integração por substituição, tomemos por exemplo a integral $\int e^{2x}dx$. Da forma como ela está, não é possível revolvê-la, pois não consta em nossa tabela de integrais. Contudo, sabemos que multiplicar e dividir uma integral por uma constante não altera a integral: $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2e^{2x}dx$. Definimos a função auxiliar $u(x) = 2x$. Então, vale que $du = 2dx$. Voltando à nossa integral, temos $\frac{1}{2} \cdot \int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2} \cdot \int e^{2x}(2dx) = \frac{1}{2} \cdot \int e^{u}du$. Esta última integral consta da nossa tabela de integrais e vale que: $\frac{1}{2} \cdot \int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u} = \frac{1}{2}e^{2x}$. Tal estratégia pode ser generalizada para outras situações similares e é conhecida como integração por substituição. Vejamos a seguir a apresentação formal da técnica.

Considere que a função $f(x)$ tenha como antiderivada a função $F(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$. Lembremos da regra da cadeia que $F'(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$. Se integrarmos em ambos os lados desta igualdade, teremos $\int F'(g(x))dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx.$ Como temos do lado esquerdo a integral de uma derivada, vale que $\int F'(g(x))dx = F(g(x)) + C$. Como $F(x)$ é antiderivada de $f(x)$, temos que $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$. Fazemos agora a substituição $u = g(x)$ na igualdade acima (observe que $du = g'(x)dx$, assim, trabalhamos com du e dx como se fossem diferenciais) : $\int f(u)du = F(u) + C$. Assim, observamos que agora temos a integral em questão transformada em uma integral imediata. Esta integral imediata consta da nossa tabela de integrais. Vejamos dois exemplos para a integração por substituição.

Exemplificando

a) Calcule a integral $\int 2x(x^2+5)^7\,dx$.

Primeiramente, você deve observar que se tomarmos $u = g(x) = x^2 + 5$, então $u' = \dfrac{du}{dx} = 2x$. Assim, $du = 2xdx$.

Contudo, este elemento pode ser encontrado na integral acima. Temos $\int 2x(x^2+5)^7\,dx = \int (x^2+5)^7(2xdx)$, então substituindo x por u na integral anterior, obtemos a integral $\int u^7du$, que pode ser resolvida utilizando-se a tabela de integrais imediatas. O resultado é $\int u^7du = \dfrac{u^8}{8} + C$. Agora, precisamos retornar para a variável x, obtendo $\int 2x(x^2+5)^7\,dx = \dfrac{(x^2+5)^8}{8} + C$.

b) Calcule a integral $\int cos(3x+11)dx$.

Observe que podemos multiplicar e dividir uma integral por uma constante que não alteramos o valor da integral:

$$\frac{3}{3}\int cos(3x+11)dx = \frac{1}{3}\int 3cos(3x+11)dx.$$

Fazendo $u = g(x) = 3x + 11$ teremos $u' = \dfrac{du}{dx} = g'(x) = 3$. Assim, $du = 3dx$. Portanto,

$$\frac{1}{3}\int cos(3x+11)3dx = \frac{1}{3}\int cos(u)du = \frac{1}{3}sen(3x+11) + C .$$

Deve ser ressaltado que podemos operar com dx e du dentro dos sinais de integração como se fossem diferenciais (STEWART, 2016).

Assimile

A técnica de integral por substituição tem como fundamento a regra da cadeia para derivadas: $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$. A sugestão é usar a técnica de integral por substituição quando for possível escrever a integral na forma $\int f(u)\frac{du}{dx}dx=\int f(u)du$ com $u=g(x)$ e $du=g'(x)dx$.

Integração por partes

Lembremos da regra do produto para derivadas: $(uv)'=u'v+uv'$. Integrando esta equação de ambos os lados temos $\int (uv)'\,dx=uv=\int u'vdx+\int uv'dx$. Podemos reescrever a expressão acima como $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$.

A integração por partes pode ser a técnica adequada para algumas integrais quando a integral $\int u'vdx$ for de fácil determinação.

Vejamos dois exemplos.

Exemplificando

a) Calcule a integral $\int x\,sen(x)dx$.

Escolhemos $u=x$ e $v'(x)=sen(x)$, ou seja, $dv=sen(x)dx$. Então $u'(x)=1$ e $v(x)=-\cos(x)$.

Comparando com $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$,temos

$$\int x\,sen(x)dx=-x\cos(x)+\int \cos(x)dx=-x\cos(x)+sen(x)+C.$$

Note que não teria ajudado na integração se tivéssemos adotado $u = sen(x)$ e $v'(x) = x$, pois teríamos $dv = xdx$, $u'(x) = \cos(x)$ e $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

Com isso, $\int xsen(x)dx = \frac{x^2}{2}sen(x) - \int \frac{x^2}{2}\cos(x)dx$ e agora teríamos uma integral mais complexa para ser calculada e não mais simples.

b) Calcule a integral $\int x^2 e^x dx$

Temos um polinômio $P(x) = x^2$ multiplicado por uma função exponencial e é conveniente adotarmos $u(x) = x^2, v(x) = e^x$.

Assim, $du = 2xdx$ e $v'(x) = e^x$.

Logo, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$. Precisamos efetuar outra integração por partes na integral $\int xe^x dx$. Novamente adotamos o polinômio como a função $u(x)$: $u(x) = x, v(x) = e^x$. Então $du = dx$ e $v'(x) = e^x$.

Logo, $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$.

Substituindo na integral acima:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C.$$

A grande dificuldade na integração por partes é saber escolher adequadamente qual será a função *u* e quem será a função *v*. De uma forma geral recomenda-se adotar como $u(x)$ uma função que sua derivada seja uma função mais simples que a própria $u(x)$, o que ocorre com polinômios.

Reflita

Quais as funções $u(x)$ e $v(x)$ devem ser adotadas no caso da integral $\int x^n \ln(x)\,dx$? E no caso de integrais do tipo $\int x^n e^x dx$?

A integração por partes é particularmente recomendável para integrais do tipo $\int x^n sen(x)\,dx$; $\int x^n \cos(x)\,dx$; $\int x^n \ln^m(x)\,dx$; $\int e^{nx}\cos(mx)\,dx$; $\int e^{nx} sen(mx)\,dx$ e $\int x^n e^{mx} dx$. Para integrais do tipo $\int P(x) f(x)\,dx$, onde $P(x)$ é um polinômio, eventualmente pode ser resolvido pela aplicação repetidas vezes de integração por partes.

Pesquise mais

Você poderá encontrar mais exemplos sobre integração por substituição e por partes nas páginas 335 e 336 e 491 e 494 do livro disponível em sua Na Biblioteca Virtual.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume I.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Veja também as páginas 369 a 371 e páginas 420 a 423 de

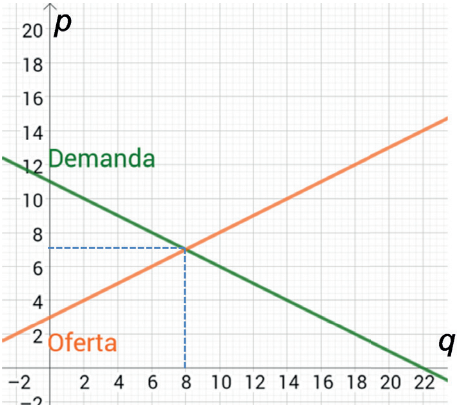
STEWART, James. **Cálculo Volume I.** 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

Aplicações da integração: economia

A oferta e a procura por bens e serviços (pão, frango, camisas, automóveis, educação, saúde, etc) é estudada utilizando modelos matemáticos. Tradicionalmente o preço no eixo *y* e a quantidade no eixo *x*. Isso porque em seus estudos de demanda e oferta, a demanda representa o interesse de compra, assim, o preço aparece representado como função da quantidade a ser comprada com um aumento das vendas associado a menores preços (a função preço

= Demanda(quantidade) é decrescente). Já a função preço = Oferta (quantidade), significa o interesse em ofertar mais itens com o aumento de preço levando ao aumento na produção de mais itens (a função Oferta é crescente com a variável quantidade). O ponto de encontro destas duas curvas é chamado de ponto de equilíbrio de mercado e vamos representá-lo por (q^*, p^*). A Figura 4.12 apresenta funções demanda e oferta genéricas (supostas lineares no gráfico) e o ponto de equilíbrio.

Figura 4.12 | Funções demanda e oferta genéricas (supostas lineares)



Fonte: elaborada pelo autor.

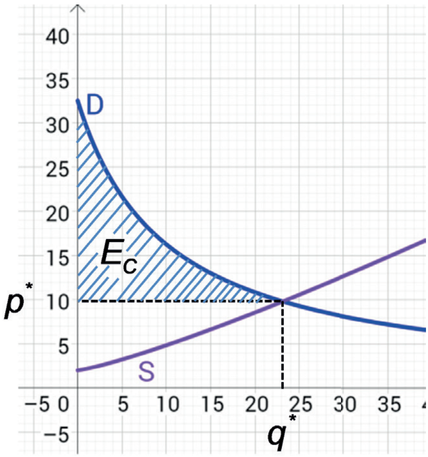
Suponha que você vá comprar uma calça e que tenha saído de casa disposto a pagar R$ 100,00 por um determinado modelo. Você acaba encontrando o produto desejado por um preço de mercado inferior ao que você estava disposto a pagar. Suponha que você compre q_1 unidades da calça ao preço de mercado $p = D(q_1) < 100$. Esta situação o deixará bastante satisfeito. Os economistas denominam isto de Excedente de satisfação.

Para calcular o excedente do consumidor, determinamos a área entre 0 e a quantidade de equilíbrio q^*, abaixo da curva de Demanda $D(q)$ neste intervalo $[0, q^*]$ e acima da reta horizontal definida pelo preço de equilíbrio p^*. Esta área corresponde à integral $\int_0^{q^*} [D(q) - p^*] dq$.

Como p^* é uma constante, vale que $\int_0^{q^*}[D(q)-p^*]dq=\int_0^{q^*}D(q)dq-\int_0^{q^*}p^*dq=\int_0^{q^*}D(q)dq-p^*\cdot q^*$.

Portanto, para calcular o Excedente do consumidor devemos determinar o valor de $\int_0^{q^*}D(q)dq-p^*\cdot q^*$. Para visualizar o Excedente do consumidor, considere a Figura 4.13. Nela temos uma curva de demanda genérica $p=D(q)$ suposta contínua em $[0,q^*]$, onde p é o preço do bem e q representa as unidades deste bem demandadas a este preço. O preço de mercado, também chamado de preço de equilíbrio, corresponde ao encontro entre as curvas de oferta e demanda. O produto p^*q^* corresponde ao valor total pago pelos consumidores se todos comprarem o bem pelo preço p^* de mercado e é a área do retângulo na Figura 4.13.

Figura 4.13 | O excedente do consumidor E_C



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição excedente do consumidor

Considere que a função $p=D(q)$ represente a demanda por determinada mercadoria, onde p é o preço unitário ao serem demandadas q unidades. Representamos o preço de mercado por p^* e q^* a quantidade de unidades associadas ao preço de mercado pela função $D(q)$ (TAN, 2001). Dessa forma, o Excedente do Consumidor é a economia do conjunto de todos os consumidores ao adquirirem determinado bem pelo preço de mercado em relação ao preço que estariam dispostos a pagar, e este valor é dado por

$$E_C = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^* q^* .$$

Exemplificando

Vejamos um exemplo de cálculo de Excedente do Consumidor.

Uma indústria de eletrodomésticos estima que a função que representa a demanda por geladeiras do modelo A é representada pela função $p = D(q) = -0,08q^2 + 2645$ onde o preço é dado em reais e a quantidade em milhares de unidades e a oferta é representada pela função $p = S(q) = 0,1q^2 + 0,1q + 1278$. Determine:

a) A quantidade e o preço de equilíbrio (ou quantidade/preço de mercado).

b) O Excedente do Consumidor.

A O preço de equilíbrio é determinado resolvendo-se a equação $D(q) = S(q)$, ou seja: $-0,08q^2 + 2645 = 0,1q^2 + 0,1q + 1278$. Isso é equivalente a resolver a equação do segundo grau $0,18q^2 + 0,1q - 1367 = 0$, a qual possui as raízes $q_1 = -87,42$ e $q_2 = 86,87$. A raiz negativa é desconsiderada por não ter significado econômico. O preço de equilíbrio associado à demanda de equilíbrio $q_2 = 86,87$ é

$$p^* = S(q^*) = 0,1(q^*)^2 + 0,1q^* + 1278 = 2041,31.$$

O excedente do consumidor é dado pela expressão

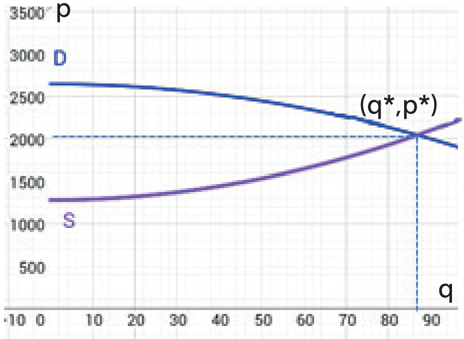
$$E_C = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^* q^* = \int_0^{86,87} \left[-0,08q^2 + 2645\right] dq - (2041,31)(86,87)$$

Temos que

$$\int_0^{86,87} \left[-0,08q^2 + 2645\right] dq = \left[-0,08\frac{q^3}{3} + 2645q\right]_0^{86,87} = 212.289,67.$$

O Excedente do Consumidor fica $E_C = 212.289,67 - 177.328,60 = 34.961,07$. Os gráficos das funções estão contidos na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Gráfico das funções demanda $p = D(q) = -0,08q^2 + 2645$ e oferta $p = S(q) = 0,001q^3 + 0,001q + 1278$

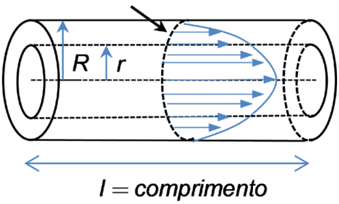


Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicações da integração II: Biologia

O físico francês Jean Louis Poiseuille propôs, em 1840, a Lei de Fluxo Laminar (também conhecida como Lei de Poiseuille) para o fluxo sanguíneo em uma artéria.

Figura 4.15 | Perfil de velocidade do sangue em uma artéria



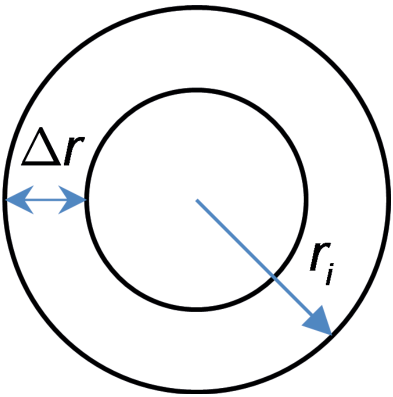
Fonte: adaptada de Stewart (2016, p. 287) e Batschelet (1978, p. 94).

Vamos imaginar uma artéria como um tubo cilíndrico de raio *R*, comprimento *l* (ambos medidos em centímetros) com o sangue escoando paralelamente ao seu eixo central e considerar r a distância do eixo até um ponto qualquer dentro da artéria. A velocidade do sangue (em cm/s) é uma função desta distância *r* e tal que atinge seu valor máximo no centro da artéria e decresce até anular-se nas paredes da artéria devido ao atrito do sangue com as paredes.

A velocidade do sangue a esta distância *r* do eixo central é descrita, pela Lei de Poiseuille pela expressão $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, onde $k = 1{,}1$ e $R = 0{,}2\,cm$ são valores usualmente adotados como realistas para artérias humanas. Assim, considerados fixados os valores acima mencionados para uma artéria humana, a expressão para a velocidade do sangue a uma distância *r* do eixo central é $v\left(r\right) = 1{,}1\left(R^2 - r^2\right)$ (AGUIAR, XAVIER, RODRIGUES, 1988).

Para calcular o volume de sangue fluindo na artéria por unidade de tempo, decompomos a artéria em anéis concêntricos de raios $r_1, r_2, \cdots, r_n$ (confira Figura 4.16) de tal forma que o volume de sangue fluindo em cada anel seja dado pelo produto da área $A_i = 2\pi r_i\left(r_i - r_{i-1}\right) = 2\pi r_i \Delta r$ de cada anel pela velocidade média $v\left(r\right)$ do sangue passando pelo respectivo anel. Admitimos que para cada anel, a velocidade média do sangue pode ser considerada aproximadamente constante.

Figura 4.16 | Anéis concêntricos para o cálculo do volume de sangue fluindo pela artéria



Fonte: elaborada pelo autor.

O volume de sangue que passa pela artéria corresponde a efetuar a soma do volume passando por cada um destes anéis, a partir de $r = 0$ até que o raio coincida com o raio da artéria, ou seja, $r = R$. Esta soma é traduzida pela integral $\int_0^R 2\pi r v(r)\, dr$.

Substituindo a expressão para $v(r) = 1{,}1(0{,}04 - r^2)$, temos que o volume de sangue passando por uma seção transversal por unidade de tempo é dado pela integral $F = \int_0^R (2\pi r) \cdot 1{,}1 \cdot (R^2 - r^2)\, dr$.

Resolvendo esta integral teremos:

$$F = 2{,}2\pi \int_0^R r(R^2 - r^2)\, dr = 2{,}2\pi \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = 2{,}2\pi \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{3} \right]_0^R = \frac{2{,}2}{6} \pi R^4 \cong 0{,}3667\pi R^4$$

Sem medo de errar

Lembremos que você foi incumbido de determinar o Excedente do Consumidor a partir da função demanda $D(q) = -4{,}83q^2 - 125{,}23q + 56.450$ e da função oferta $S(q) = 2{,}97q^2 + 72{,}37q + 32.900$.

Em primeiro lugar, precisamos determinar o preço e a quantidade de equilíbrio. Portanto, precisamos determinar a quantidade que satisfaça a equação $D(q) = S(q)$, ou seja, $-4{,}83q^2 - 125{,}23q + 56.450 = 2{,}97q^2 + 72{,}37q + 32.900.$ Essa equação é equivalente à equação do segundo grau: $7{,}8q^2 + 197{,}6q - 2355 = 0$, cujas raízes são $q_1 = 43{,}72$ e $q_2 = -69{,}05$. A raiz negativa é descartada porque não possui significado econômico.

Como a quantidade de equilíbrio é $q^* = 43{,}72$, o preço de mercado será $p^* = S(q^*) = 2{,}97(q^*)^2 + 72{,}37(q^*) + 32.900 = 41.741$.

Lembrando da expressão para o Excedente do Consumidor: $E_C = \int_0^{q^*} D(q)\, dq - p^* q^*$ efetuamos a integral

$$E_C = \int_0^{43,72} \left[-4,83q^2 - 125,23q + 56.450\right] dq - (41.741)\cdot(43,72).$$

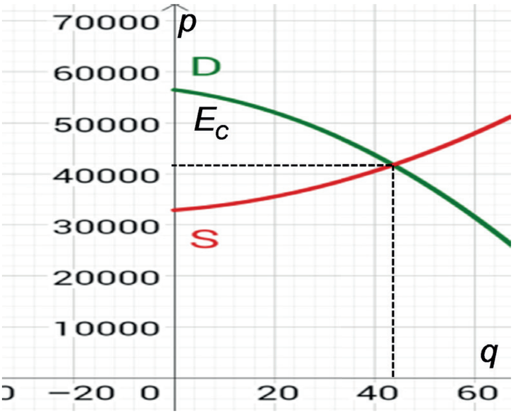
Temos

$$E_C = \left[-4,83\frac{q^3}{3} - 125,23\frac{q^2}{2} + 56.450q\right]_0^{43,72} - 1.824.917,52 =$$

$$E_C = -4,83\frac{(43,72)^3}{3} - 125,23\frac{(43,72)^2}{2} + 56.450\cdot(43,72) - 1.824.917,52 \cong 388.840$$

Na Figura 4.17 apresentamos as funções oferta e demanda para o problema do Excedente do Consumidor.

Figura 4.17 | Funções oferta e demanda para o Problema do Excedente do Consumidor



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Cálculo da área de uma chapa metálica

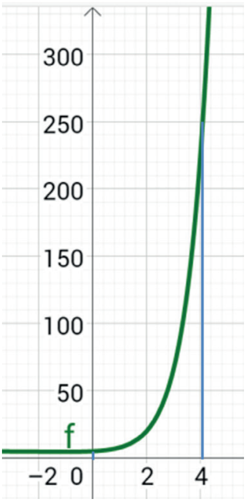
Descrição da situação-problema

Uma empresa produz chapas metálicas de formatos diversos. Um dos formatos de chapa é delimitado pela função $f(x) = xe^x + 5$

com o eixo x, com x variando entre 0 e 4 centímetros, conforme a Figura 4.18. Para fins da produção, a empresa precisa recobrir estas chapas metálicas com produtos anti-ferrugem. Para estimar os custos de produção, um engenheiro da empresa deve utilizar a função para calcular a área do modelo de chapa metálica.

Qual a área desta chapa metálica em centímetros quadrados?

Figura 4.18 | Chapa metálica delimitada pela função $f(x) = xe^x + 5$ entre os pontos $x = 0$ e $x = 4$



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Para resolver o problema, precisamos calcular a integral $\int xe^x + 5dx$. Temos que $\int_0^4 xe^x + 5dx = \int_0^4 xe^x x + \int_0^4 5dx$. A segunda integral é igual a $5\int_0^4 dx = 5 \cdot 4 = 20$. Resta calcular a integral $\int_0^4 xe^x dx$.

Faremos integração por partes, definindo as funções $f(x) = x, f'(x) = 1, g'(x) = e^x, g(x) = e^x$.

Então:

$$\int_0^4 xe^x dx = xe^x\Big|_0^4 - \int_0^4 1 \cdot e^x dx = 4e^4 - 0e^0 - e^x\Big|_0^4 = 4e^4 - \left(e^4 - e^0\right) = 3e^4 + 1.$$

A área da chapa será a soma das duas integrais: $21 + 3e^4 cm^2 \cong 184,8 cm^2$.

Faça valer a pena

1. A integral por substituição baseia-se em reescrever a integral $\int f(g(x))g'(x)dx$,fazendo $u = g(x)$ eusandoque $\frac{du}{dx} = g'(x)$,assim $du = g'(x)dx$ e $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du$.

Calculando a integral $\int \frac{3}{2}\left(x^3 + 2\right)^5 x^2 dx$ qual resultado obtemos?

a) $\frac{\left(x^3 + 2\right)^6}{6} + C$.

b) $\frac{x^{15}}{15} + 2$.

c) $\frac{\left(x^3 + 2\right)^4}{4} + C$.

d) $\frac{\left(x^3 + 2\right)^6}{12} + C$.

e) $\frac{\left(x^3 + 2\right)^5}{5} + C$.

2. Uma empresa de produção de pás para geração de energia eólica estimou que na próxima década a taxa de vendas por mês deste produto poderia ser modelada pela função $TxVendas(t) = t^2 \cdot \ln(t)$, sendo t em meses.

Sabendo-se que no mês 1 foram vendidas 472.945 pás, qual a quantidade total de pás vendidas em um mês $t = 60$?

a) 523.321.
b) 692.495.
c) 319.588.
d) 743.738.
e) 803.276.

3. A integração por partes tem como fundamentação a regra do produto para derivadas.
A integração por partes é uma técnica de integração recomendada para algumas integrais, tais como $\int x^n sen(x)dx$; $\int x^n \cos(x)dx$; $\int x^n \ln^m(x)dx$; $\int e^{nx}\cos(mx)dx$; $\int e^{nx} sen(mx)dx$ e $\int x^n e^{mx}dx$.

A alternativa que apresenta a resposta correta para a integral $\int e^{Kx} sen(Lx)dx$, onde K e L são constantes não nulas é:

a) $$\int e^{Kx} sen(Lx)dx = \left[\frac{e^{Kx}L}{L^2+K^2}\right]\left[-\cos(Lx)+\frac{Ksen(Lx)}{L}\right]$$

b) $$\int e^{Kx} sen(Lx)dx = \left[\frac{e^{Kx}(L^2+K^2)}{L}\right]\left[\cos(Lx)-\frac{sen(Lx)}{L}\right].$$

c) $$\int e^{Kx} sen(Lx)dx = \left[\frac{L}{L^2+K^2}\right]\left[-sen(Lx)+\frac{K\cos(Lx)}{L}\right].$$

d) $$\int e^{Kx} sen(Lx)dx = \left[\frac{Ke^{Kx}}{L+K}\right]\left[-L\cos(Lx)+\frac{Lsen(Lx)}{K}\right].$$

e) $$\int e^{Kx} sen(Lx)dx = \left[\frac{K^2L^2e^{Kx}}{L^2+K^2}\right]\left[\frac{K}{L}\cos(Lx)-\frac{Lsen(Lx)}{K}\right]$$

Referências

AGUIAR, Alberto Flávio; XAVIER, Airton Fonetenel, RODRIGUES, José Euny. **Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas**. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

BATSCHELET, E. **Introdução à Matemática para biocientistas**. São Paulo: Editora Interciência e Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

BOULOS, Paulo; ABUD, Zara Issa. **Cálculo diferencial e integral**. São Paulo: Makron Books, 2000.1 v.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo volume I.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com geometria analítica.** 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1999. 1 v.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Cálculo A.** 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo.** 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 1 v.

HARIKI, Seiji; ABDOUNUR, Oscar. **Matemática aplicada**. São Paulo: Editora Saraiva.1999.

LEITHOLD, Louis. **Matemática aplicada à economia e administração**. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. **Cálculo (Funções de uma e várias variáveis)**. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.

SANTOS, Angela Rocha dos; BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo cálculo com maple**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Book, 1987. 1 v.

STEWART, James. **Cálculo Volume I.** 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

________. **Cálculo Volume I.** 8. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2016.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2a. Edição. São Paulo: Thomson, 2001.

THOMAS, George B; et al. **Cálculo Volume 1.** 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.

WEBER, Jean. **Matemática para economia e administração**. São Paulo: Editora Harbra, 1986.

ISBN 978-85-522-1124-2