



# **Estruturas de Concreto Armado I**



# **Estruturas de Concreto Armado I**

Kátia Regina Custodio

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

André Baltazar Nogueira

Bárbara Nardi Melo

**Editorial**

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

---

Custodio, Kátia Regina

C987e Estruturas de concreto armado I / Kátia Regina Custodio.

– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.

248 p.

ISBN 978-85-522-1120-4

1. Estruturas de concreto. 2. Vigas. 3. Flexão normal simples. I. Custodio, Kátia Regina. II. Título.

CDD 624

---

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 – Londrina – PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Propriedades dos materiais e conceitos fundamentais do concreto armado</b>	<b>7</b>
Seção 1.1 - Materiais e propriedades do concreto armado	10
Seção 1.2 - Conceitos fundamentais do concreto armado	24
Seção 1.3 - Conceitos de dimensionamento do concreto armado	38
<b>Unidade 2   Vigas de seção retangular</b>	<b>55</b>
Seção 2.1 - Conceito de vigas	58
Seção 2.2 - Dimensionamento em armadura simples	74
Seção 2.3 - Dimensionamento em armadura dupla	92
<b>Unidade 3   Vigas de seção T</b>	<b>113</b>
Seção 3.1 - Conceito de viga T	116
Seção 3.2 - Viga T com compressão parcial da mesa	135
Seção 3.3 - Viga T com compressão total da mesa	150
<b>Unidade 4   Lajes de concreto armado</b>	<b>171</b>
Seção 4.1 - Conceito de lajes	173
Seção 4.2 - Comportamento das lajes maciças	193
Seção 4.3 - Dimensionamento das lajes maciças	219



# Palavras do autor

Prezado aluno,

Você inicia agora o estudo das estruturas de concreto armado e não importa se você será um engenheiro de projetos, obras, planejamento, contratos ou de qualquer outro segmento da engenharia civil, pois, em algum momento da sua vida profissional, irá se deparar com uma situação que envolva esse tipo de estrutura.

No Brasil, esse é um dos principais sistemas estruturais utilizados, por isso, é importantíssimo que você esteja preparado e tenha conhecimentos sobre os materiais componentes, suas propriedades e os conceitos fundamentais de dimensionamento.

Para nortear nossos estudos, utilizaremos como principal veículo a norma brasileira NBR-6118, Projeto de estruturas de concreto - Procedimento (ABNT, 2014).

Muita atenção às terminologias utilizadas de agora em diante, elas são o vocabulário usado no dia a dia do engenheiro civil e serão parte do seu cotidiano também.

Nosso livro está dividido em quatro unidades e iniciaremos nossos estudos pelas propriedades dos materiais e conceitos fundamentais do concreto armado.

Nesta unidade, você aprenderá: sobre os materiais, concreto e aço; seus conceitos e suas propriedades principais; como eles trabalham quando são solicitados; e quais as condições limites de tensão e deformação de cada um. Além disso, quais são os tipos de ações que podem atuar em uma estrutura e como o grau de agressividade do ambiente pode influenciar no dimensionamento.

A segunda unidade é uma introdução ao estudo da flexão nas estruturas e as vigas serão os primeiros elementos a serem analisados. Iniciaremos pelas vigas chamadas de seção retangular, que podem ser armadas com armaduras simples e armaduras duplas.

Você aprenderá como são detalhadas as seções transversais de uma viga e como são calculadas as armaduras, garantido a segurança e o melhor aproveitamento dos materiais.

Dando sequência ao assunto vigas, a terceira unidade irá contemplar o cálculo e dimensionamento desses elementos

utilizando uma parcela da laje nos cálculos, essas são as chamadas vigas com seção T.

Finalizando nosso estudo de estruturas submetidas à flexão, a última unidade trabalhará as lajes maciças em concreto armado.

Serão abordados os conceitos, as possibilidades de armação e distribuição dos carregamentos sobre as lajes; além disso, quais são as ações atuantes em cada laje, suas espessuras mínimas, cobrimentos, deformações e finalmente o dimensionamento.

Como você pode ver, serão muitos os desafios daqui para frente, mas estou certa de que a cada etapa vencida, você estará mais preparado e mais próximo de tornar-se um profissional de excelência. Bons estudos!

# Propriedades dos materiais e conceitos fundamentais do concreto armado

### Convite ao estudo

A unidade 1 é a base para o entendimento sobre as estruturas de concreto armado. Nela serão apresentados: os materiais, concreto e aço, seus conceitos e suas propriedades principais; como eles trabalham quando são solicitados; e quais as condições limites de tensão e deformação de cada um. Além disso, quais são os tipos de ações que podem atuar em uma estrutura, e como o grau de agressividade do ambiente pode influenciar no dimensionamento.

Ao final desta unidade, você estará apto para discutir os principais parâmetros do concreto e do aço para cálculo de estruturas, saberá analisar os diagramas de tensão e deformação do aço e do concreto e conhecerá os cálculos para dimensionamento dos elementos estruturais.

A partir de agora você será um engenheiro calculista de estruturas recém-formado e terá uma série de desafios na participação da elaboração de um grande projeto.

Trata-se de um empreendimento composto por 3 torres residenciais denominadas prédios inteligentes, com iluminação proveniente de energia solar, utilização de vidros verdes nas esquadrias (reduzindo os gastos com ar condicionado), elevadores inteligentes, sistemas integrados de CFTV, além de uma lavanderia com reuso de água para atender toda demanda.

O projeto foi estudado para ser construído inicialmente em Belo Horizonte, capital de Minas Gerais, mas devido a sua arquitetura diferenciada e seu sucesso de vendas, o construtor também pretende implantá-lo em outros dois estados brasileiros: Pernambuco e Ceará.

Sua responsabilidade como recém-formado será o cálculo do prédio da lavanderia concebido para ser em concreto armado, composto por 2 pavimentos: térreo e primeiro pavimento.

O desafio inicial é definir os parâmetros relacionados aos materiais concreto e aço e suas propriedades. Para isso, você deverá conhecer os diagramas de tensão e deformação desses materiais.

Definidos os materiais e suas propriedades, o próximo passo será verificar as peculiaridades do projeto para a sua implantação em locais distintos. O projeto base será em Belo Horizonte onde as características ambientais são consideradas moderadas para o uso do concreto armado, no entanto, nas regiões litorâneas, como é o caso das cidades de Recife - PE e Cascavel - CE, o grau de agressividade ambiental é maior, por se tratar de ambiente marítimo.

Diante das características distintas de cada região, você deverá conhecer mais sobre as armaduras e definir quais serão os recobrimentos utilizados no projeto para implantação em cada umas dessas cidades.

Além da proteção da armadura, outra coisa fundamental será o seu conhecimento sobre os limites de deformação dos materiais, os chamados Estados Limites. Você deverá informar em qual estado limite a sua estrutura precisará ser calculada para garantir a segurança e vida útil da obra.

Finalmente, o último desafio está relacionado aos conceitos de dimensionamento das estruturas de concreto armado. Nesse desafio, você deverá classificar as ações que estão

atuando na sua estrutura e determinar em quais domínios serão dimensionados os elementos estruturais, de modo que eles utilizem o máximo desempenho dos materiais.

# Seção 1.1

## Materiais e propriedades do concreto armado

### Diálogo aberto

Você inicia, agora, uma nova etapa em sua formação como engenheiro civil, será sua introdução às estruturas e nessa fase serão apresentados os materiais e as propriedades do concreto armado.

Vamos imaginar que o escritório onde você trabalha ganhou a concorrência para elaboração do projeto estrutural em concreto armado de um grande empreendimento composto por prédios inteligentes. Sendo você um engenheiro recém-formado, sua responsabilidade será o cálculo do prédio da lavanderia, composto por 2 pavimentos: térreo e primeiro pavimento.

Esse projeto foi concebido para ser inicialmente implantado em Belo Horizonte, estado de Minas Gerais, onde o ambiente é considerado com grau de agressividade moderado.

Na elaboração do projeto você utilizará um renomado software de cálculos estruturais, portanto, deverá informar os principais parâmetros a serem utilizados no cálculo da estrutura. Esses parâmetros deverão estar contidos nas notas do projeto.

Sabendo que a concepção estrutural será em concreto armado convencional classe C25 e que o construtor comprou aço CA-50 e brita em granito, você deverá definir os parâmetros dos materiais a serem utilizados no projeto: massa específica do concreto ( $\rho_c$ ), resistência característica tanto à compressão ( $f_{ck}$ ) quanto à tração ( $f_{ct}$ ) do concreto, módulo de elasticidade do concreto ( $E_{ci}$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Conforme a NBR-6118, item 8.2.8, o parâmetro da brita em função de sua natureza, para granito equivale a  $\alpha_E = 1$ .

Conhecendo a categoria do aço comprado, definir sua resistência característica ao escoamento ( $f_{yk}$ ) e traçar os diagramas de tensão versus deformação do aço e do concreto.

### Introdução

Mas afinal, o que é concreto armado?

Concreto armado é um sistema estrutural utilizado na fabricação de pontes, edifícios, bases para equipamentos, muros, pavimentos, túneis e uma infinidade de outras estruturas. Consiste na junção bem-sucedida do concreto (cimento + areia + brita + água) com o aço. O aço, com sua ótima resistência tanto à tração como à compressão, complementa o concreto que possui uma ótima resistência à compressão e baixa resistência à tração.

Embora sejam materiais distintos, o concreto e o aço possuem valores de coeficiente de dilatação térmica muito similar

( $\alpha_{te} = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ) fazendo com que suas deformações também

fiquem muito próximas, e essa característica possibilita que eles trabalhem juntos de maneira satisfatória.

Um outro fator importante é que o concreto, em função de sua alcalinidade, não permite a corrosão do aço e as rugosidades (ou nervuras) das barras fazem com que haja a aderência mecânica entre os dois materiais.

Para os estudos da disciplina de concreto armado I, utilizaremos a norma brasileira NBR-6118 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento (ABNT, 2014).

## Materiais e propriedades

### Concreto

Os materiais componentes do concreto são o cimento + agregados + água + aditivos. Os agregados são areia e brita, sempre nessa ordem quando se refere ao traço.

Lembramos que o traço representa as proporções dos materiais que compõem o concreto. É muito provável que você já tenha aprendido sobre o traço, mas vale relembrar que nele: cada número representa a proporção do material com relação a um saco de

cimento, sendo que o número 1 representa um saco de cimento de 50 kg.

O último parâmetro do traço, antes dos aditivos, significa a proporção de água por quantidade de cimento. Por exemplo: o traço 1:3:5:0,5 significa 1 saco de cimento: 150 kg de areia: 250 kg de brita: 25 kg de água. Quanto aos aditivos eles podem ou não ser usados na composição do concreto. Normalmente são utilizados e servem para melhorar a fluidez ou plasticidade, reduzindo a quantidade de água adicionada e acelerar ou retardar a pega, ou seja, o início do endurecimento do concreto.

Para o estudo das estruturas de concreto armado é fundamental o conhecimento das propriedades de cada material. As principais propriedades são os parâmetros fundamentais para o cálculo dos elementos estruturais, para a fabricação do concreto na usina e para a compra do aço.

Em um projeto de estruturas, os parâmetros relativos ao concreto são normalmente fornecidos na planta de formas pelo engenheiro de projetos e os parâmetros relativos ao aço são fornecidos na planta de armações.

O projeto de armações, além dos principais parâmetros do aço, deve apresentar a tabela de aço com os dados relativos aos diâmetros das barras, comprimentos, dobras e peso.

Um dos principais parâmetros do concreto utilizados no cálculo das estruturas é a massa específica do concreto armado denominado,  $\rho_c$ .

A massa específica do concreto armado equivale a  **$25 \text{ kN} / \text{m}^3$**  e a massa específica do concreto simples (sem o aço) é da ordem de  **$24 \text{ kN} / \text{m}^3$** , de acordo com a NBR-6118, item 8.2.2 (ABNT, 2014).

Os demais pesos específicos dos materiais, bem como as sobrecargas de utilização, podem ser encontrados na norma brasileira NBR-6120 - Cargas para o cálculo de estruturas em edificações (ABNT, 1980).

É importante que você se familiarize com as terminologias que serão utilizadas de agora em diante, pois elas formam o vocabulário comum na vida do engenheiro civil.

Como já mencionamos anteriormente, o concreto é um material que possui uma alta resistência à compressão, essa resistência

aumenta em função do tempo que é medido em dias e seu valor pode ser verificado por meio de ensaios de compressão em corpos de prova extraídos na obra.

A resistência à compressão em função do tempo é chamada de  $f_{cj}$ , onde o j representa o número de dias passados até que o ensaio de compressão seja realizado.



### Exemplificando

Você sabe explicar o que significa dizer que  $f_{c7} = 19 \text{ MPa}$  ?

Resp.: Significa que a resistência do concreto à compressão medida após 7 dias é de 19 MPa.

A resistência característica do concreto à compressão é chamada de  $f_{ck}$  e quando não há indicação da idade, corresponde à resistência do concreto aos 28 dias. Esse é o valor de referência utilizado para os cálculos e foi obtido por meio de inúmeros ensaios à compressão de corpos de prova, em que foi possível traçar a curva de crescimento da resistência do concreto.

A partir dessa curva, verificou-se que aos 28 dias o concreto atinge quase que a totalidade de sua resistência, sendo que a partir daí, ele continua aumentando por algum tempo, mas em proporções muito pequenas.



### Assimile

O concreto armado tem a massa específica  $\rho_c = 25 \text{ kN} / \text{m}^3$  e sua resistência característica à compressão mais utilizada é aos 28 dias, chamada de  $f_{ck}$ .

O  $f_{ck}$  é agrupado em classes de resistência e subdividido em 2 grupos, conforme a NBR-8953 - Concreto para fins estruturais - Classificação por grupo de resistência (ABNT, 2015).

O grupo I representa as classes de resistência C20 a C50, ou seja, concretos com  $f_{ck}$  de 20 a 50 MPa. Esse será o grupo que utilizaremos em nossos cálculos daqui para frente.

O grupo II representa as classes de resistência de C55 a C100. A norma NBR-6118 aplica-se aos grupos I e II, exceto o C100 que não é considerado.

Embora o concreto tenha uma alta resistência à compressão, o mesmo não ocorre com sua resistência à tração, que é da ordem de 1/10 da resistência à compressão.

A resistência característica à tração do concreto é chamada de  $f_{ctk}$  e na falta de ensaios a NBR-6118, item 8.2.5, recomenda calcular a resistência à tração inferior ( $f_{ctk,inf}$ ) e a resistência à tração superior ( $f_{ctk,sup}$ ) a partir da resistência à tração média ( $f_{ct,m}$ ):

- Resistência à tração inferior:  $f_{ctk,inf} = 0,7 \times f_{ct,m}$
- Resistência à tração superior:  $f_{ctk,sup} = 1,3 \times f_{ct,m}$
- Resistência à tração média:  $f_{ct,m} = 0,3 \times f_{ck}^{2/3}$

Os valores anteriores são válidos para concretos até C50 e as unidade de entrada são em MPa.

Outro parâmetro relacionado ao concreto e importante no cálculo dos elementos estruturais é o módulo de elasticidade, representado por  $E_{ci}$ .

Este módulo é um parâmetro relativo a deformação do concreto quando ele é submetido a tensões de compressão.

Quando não for conhecido o módulo de elasticidade por meio de ensaios, a NBR-6118 propõe as seguintes formulações, conforme o item 8.2.8 (ABNT, 2014):

- Módulo de elasticidade do concreto (Para  $f_{ck}$  de 20 a 50 ):  
 $E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}}$

Sendo que  $\alpha_E$  é um coeficiente em função do tipo de brita utilizada na fabricação do concreto:

$\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$  para granito e gnaiss;

$\alpha_E = 0,9$  para calcário;

$\alpha_E = 0,7$  para arenito.

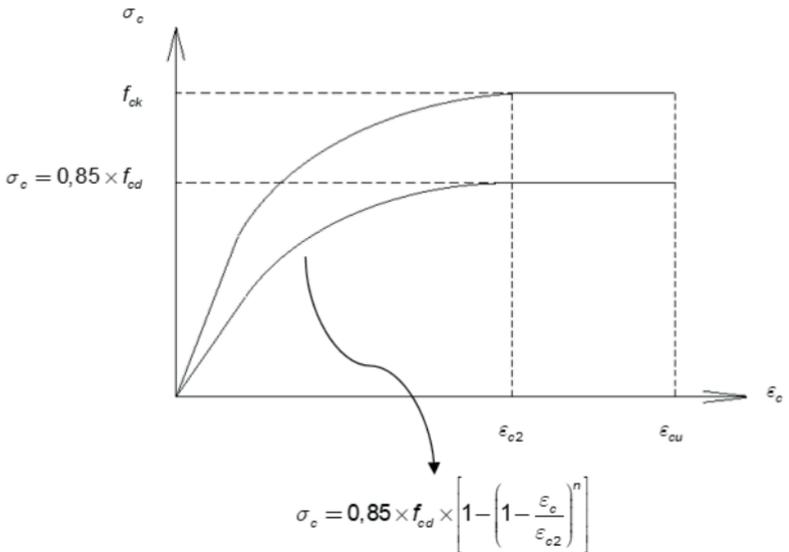
As unidade para  $E_{ci}$  e  $f_{ck}$  são em MPa.

Finalizando os principais parâmetros relacionados ao concreto, temos o coeficiente de Poisson representado pela letra  $\nu$ . Ele traduz a relação entre as deformações transversal e longitudinal

que surgem no concreto quando ele é submetido a um esforço e pode ser adotado igual a 0,2; segundo a NBR-6118, item 8.2.9.

## Diagrama de tensão *versus* Deformação do concreto à compressão

Figura 1.1 | Diagrama tensão-deformação, item 8.2.10 da NBR-6118



Fonte: ABNT (2014, p. 26).

O diagrama de tensão *versus* deformação do concreto à compressão mostra que para uma deformação inicial de zero até uma deformação de  $\epsilon_{c2} = 2\text{‰}$  a tensão no concreto equivale à equação da parábola conforme indicado no diagrama, sendo que para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ :  $n = 2$ .

Lembrando que o nosso objetivo é sempre buscar o máximo aproveitamento dos materiais dentro dos limites de segurança; devemos trabalhar utilizando a máxima tensão dos materiais e o seu limite máximo de deformação.

No diagrama de tensão *versus* deformação do concreto, verificamos que quando o concreto atinge a tensão máxima  $f_{ck}$  ele inicia um trecho de deformação constante, representada pelo patamar, que vai até o limite máximo do encurtamento do concreto  $\epsilon_{cu}$ .

Nesse trecho do patamar, onde a tensão é máxima, a deformação específica de encurtamento do concreto tem início em  $\epsilon_{c2}$  onde o encurtamento é de  $2\text{‰}$ , ou seja, o concreto encurta 2 mm por metro, e vai até o encurtamento máximo do concreto na ruptura de  $3,5\text{‰}$  ou 3,5 mm por metro.

Para garantirmos a segurança durante o cálculo de uma estrutura, o valor da resistência dos materiais deve ser minorado, enquanto que os esforços aplicados na estrutura devem ser majorados.

No caso do concreto, o valor da tensão máxima  $f_{ck}$  deve ser minorado pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_c = 1,4$ ; portanto, o valor da resistência de cálculo à compressão do concreto é  $f_{cd} = f_{ck}/1,4$ .

Além da minoração pelo coeficiente de ponderação, a tensão do concreto também sofre uma redução de 15% em função do chamado efeito Rush.

O efeito Rush é uma redução da resistência do concreto por conta da atuação de cargas de longa duração, portanto, após a aplicação do coeficiente de ponderação da resistência do concreto  $\gamma_c$  e da redução devido ao efeito Rush, a nossa tensão máxima para cálculo será  $\sigma = 0,85 \times f_{cd}$ .



### Exemplificando

Qual o valor da tensão máxima a ser utilizada no cálculo de uma estrutura com concreto C25?

Resp.:  $\sigma = 0,85 \times f_{cd} = 0,85 \times 25/1,4 = 15,17\text{MPa}$

## Aço

Agora que sabemos mais sobre o concreto e suas propriedades, vamos aprender um pouco sobre o outro componente do concreto armado: o aço.

O aço é classificado por categorias, que são barras e fios, sendo que as barras apresentam diâmetros comerciais que variam de 5 a 40 mm e os fios diâmetros de 2,4 a 10 mm, de acordo com a norma NBR-7480 (ABNT, 2007).

As categorias do aço são CA-25 e CA-50 para as barras e CA-60 para os fios. O número que aparece na categoria representa

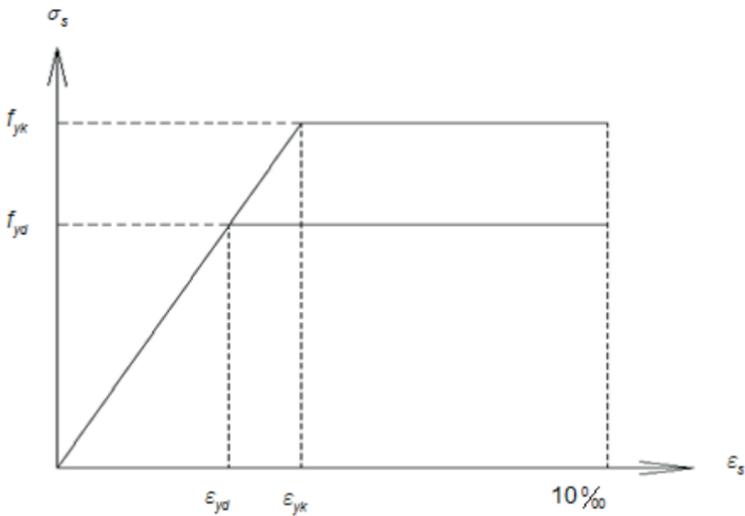
a resistência característica ao escoamento do aço à tração  $f_{yk}$ , expressa em  $KN/cm^2$ .

Como já foi dito, a principal função do aço no concreto armado é absorver os esforços de tração e a categoria mais utilizada são as barras de aço CA-50.

O peso específico do aço é de  $7.850 \text{ Kg}/m^3$  e seu módulo de elasticidade  $E_s$  pode ser considerado  $210.000 \text{ MPa}$  ou  $21.000 \text{ KN}/cm^2$ , conforme orientação da NBR-6118, itens 8.4.2 e 8.4.4 (ABNT, 2014).

### Diagrama de tensão versus Deformação do aço

Figura 1.2 | Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva, item 8.4 da NBR-6118



Fonte: ABNT (2014, p. 29).

Assim como no concreto, o aço apresenta em seu diagrama de tensão *versus* deformação sua tensão máxima, que é representada pelo valor  $f_{yk}$ , e os seus limites de deformação, que se encontram no patamar de escoamento do aço que inicia em  $\epsilon_{yd}$  até o limite de  $10\text{‰}$ , ou seja, o valor limite de alongamento do aço é de 10 mm por metro.

O valor da deformação do aço no início do patamar de escoamento é:  $\epsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$ .

No cálculo das estruturas também devemos minorar o valor da resistência característica ao escoamento do aço  $f_{yk}$  à favor da segurança.

O coeficiente de ponderação da resistência do aço é o  $\gamma_s$  e seu valor é de 1,15. Portanto, para o cálculo de uma estrutura de concreto armado, o valor máximo de tensão do aço deverá ser  $f_{yd} = f_{yk} / 1,15$ , que corresponde às deformações limites do aço, conforme o diagrama.



### Exemplificando

Quais as deformações limites para um aço CA-50?

Resp.: As deformações limites são:

$$\epsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = (50 / 1,15) / 21000 = 2,07 \times 10^{-3} \text{ e } 10\%.$$

As unidades estão em  $KN / cm^2$ .



### Refleta

Você está calculando uma estrutura em concreto armado com aço CA-50 e  $f_{ck} = 30MPa$ . Ambos apresentam deformações abaixo dos seus respectivos limites. O que isso significa?



### Pesquise mais

Tenha sempre com você a norma brasileira NBR-6118.

É importante que você se familiarize com as terminologias utilizadas.

## Sem medo de errar

Agora que não existem mais segredos entre você e o concreto armado, ficou mais fácil participar de reuniões para discutir sobre esse sistema estrutural.

Você já conhece os materiais componentes do concreto armado, suas principais propriedades e os limites de tensão e deformação que devem ser utilizados nos cálculos dos elementos estruturais.

Com o conhecimento adquirido, é hora de retornar ao seu primeiro desafio desta unidade como engenheiro recém-formado, responsável pelo projeto de estrutura da lavanderia de um empreendimento composto por um conjunto de rédios inteligentes.

Lembrando que o projeto será inicialmente implantado em Belo Horizonte, Minas Gerais, e que você está utilizando um software de cálculos estruturais.

Vamos lá, é hora de alimentar o software com os parâmetros dos materiais que você usará no seu cálculo e traçar os diagramas de tensão e deformação do concreto e do aço.

Nós sabemos que o construtor já comprou o aço de categoria CA-50 e que o concreto será classe C25, portanto, os principais parâmetros são:

- peso específico do concreto armado:  $25 \text{ kN/cm}^3$ ;

- resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias ( $f_{ct}$ ):

como o concreto é classe C25, teremos  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ ;

- resistência do concreto à tração ( $f_{ct}$ ):

primeiro calculamos a resistência média à tração:

$$f_{ct,m} = 0,3 \times f_{ck}^{2/3}, \text{ em MPa};$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \times 25^{2/3} = 2,56 \text{ MPa};$$

com a resistência média, obtemos a resistência à tração inferior e superior:

- resistência à tração inferior:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \times f_{ct,m} = 0,7 \times 2,56 = 1,79 \text{ MPa};$$

- resistência à tração superior:

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \times f_{ct,m} = 1,3 \times 2,56 = 3,33 \text{ MPa};$$

- módulo de elasticidade do concreto:

para classe C25 e granito para a brita, dado  $\alpha_E = 1,0$ ; o módulo é:

$$E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} = 1 \times 5600 \times \sqrt{25} = 28000 \text{ MPa};$$

- coeficiente de Poisson:

$$\nu = 0,2$$

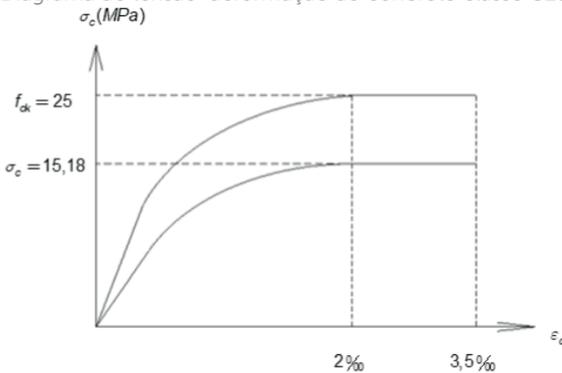
- resistência característica ao escoamento do aço ( $f_{yk}$ ):

como a categoria utilizada para o aço é CA-50, a resistência característica ao escoamento do aço à tração é:

$$f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2 = 500 \text{ MPa}.$$

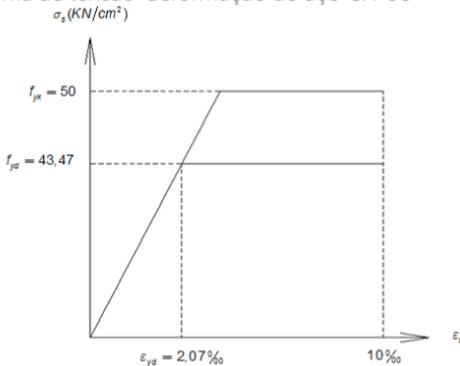
Após definirmos os parâmetros que irão alimentar o software, podemos traçar os diagramas de tensão *versus* deformação do concreto e do aço.

Figura 1.3 | Diagrama de tensão-deformação do concreto classe C25



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.4 | Diagrama de tensão-deformação do aço CA-50



Fonte: elaborada pelo autor.

## Avançando na prática

### Tensões máximas para cálculo de estruturas de concreto armado

#### Descrição da situação-problema

Os projetos industriais possuem algumas características próprias. Normalmente a resistência do concreto é mais elevada em função da agressividade do meio.

Agora você irá projetar a estrutura de um *pipe rack* para uma empresa de fertilizantes. *Pipe rack* é uma estrutura de vigas e pilares que suportam os carregamentos de tubulações industriais. Você tem a locação e os dados das ações da equipe de tubulação e sabe que todo o projeto foi concebido para uso do concreto classe C35 e do aço CA-50. Quais as tensões do aço e do concreto você utilizará no cálculo dessa estrutura, considerando os limites de deformação de cada material?

#### Resolução da situação-problema

Conhecendo os diagramas de tensão versus deformação do concreto e do aço, fica fácil definir as tensões máximas de cálculo, basta utilizarmos as tensões do diagrama que correspondem aos limites de deformação, ou seja, as tensões que correspondem aos patamares de cada diagrama.

Para o projeto do *pipe rack*, sendo o  $f_{ck} = 35$  MPa, a tensão de cálculo do concreto será:

$$f_{cd} = f_{ck} / 1,4 = 35 / 1,4 = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 0,85 \times f_{cd} = 0,85 \times 25 = 21,25 \text{ MPa} .$$

E a tensão de cálculo utilizada para o aço CA-50, será:

$$f_{yd} = f_{yk} / 1,15 = 50 / 1,15 = 43,47 \text{ kN} / \text{m}^2 .$$

## Faça valer a pena

**1.** Quando se utiliza um software de cálculos estruturais é responsabilidade do engenheiro civil fornecer e/ou verificar as configurações desse software

relacionadas aos parâmetros dos materiais concreto e aço, antes de iniciar os cálculos.

Com relação ao concreto armado, qual o valor da massa específica  $\rho_c$  e do módulo de elasticidade  $E_{ci}$  para concreto classe C35 e brita com parâmetro  $\alpha_E = 1,2$ , respectivamente? Escolha a alternativa correta:

- a)  $\rho_c = 22 \text{ kN/cm}^3$  e  $E_{ci} = 39756 \text{ MPa}$ .
- b)  $\rho_c = 25 \text{ kN/cm}^3$  e  $E_{ci} = 39756 \text{ MPa}$ .
- c)  $\rho_c = 24 \text{ kN/cm}^3$  e  $E_{ci} = 30052 \text{ MPa}$ .
- d)  $\rho_c = 23 \text{ kN/cm}^3$  e  $E_{ci} = 36807 \text{ MPa}$ .
- e)  $\rho_c = 35 \text{ kN/cm}^3$  e  $E_{ci} = 30052 \text{ MPa}$ .

**2.** O engenheiro civil residente da obra do metrô irá agendar a concretagem das lajes do segundo subsolo da estação, para isso, ele deve fornecer à usina alguns dados básicos sobre o concreto e o aço.

De posse do projeto estrutural ele obtém o valor da resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias no valor 30 MPa e a resistência característica ao escoamento do aço no valor de  $50 \text{ KN/cm}^2$ .

Qual a classe do concreto e a categoria do aço especificados na planilha de compra?

- a) C25; CA-50.
- b) C30; CA-40.
- c) C30; CA-60.
- d) C25; CA-60.
- e) C30; CA-50.

**3.** Um dos objetivos do engenheiro de cálculo estrutural é otimizar o uso dos materiais sempre garantindo a segurança e a vida útil das estruturas. No caso das estruturas de concreto armado é importante que ele utilize o máximo potencial de tensão e de deformação do aço e do concreto.

Quais são os limites de deformação do concreto para um  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e do aço para categoria CA-40?

- a) Concreto de 0,002 a 0,0035 e aço de 0,00166 a 0,01.
- b) Concreto de 2% a 3,5% e aço de 0,00166 a 0,01.
- c) Concreto de 0,02 a 0,035 e aço de 0,0166 a 0,1.
- d) Concreto de  $2\text{‰}$  a  $3,5\text{‰}$  e aço de  $2\text{‰}$  a  $10\text{‰}$ .
- e) Concreto de  $2\text{‰}$  a  $3,5\text{‰}$  e aço de  $2,07\text{‰}$  a  $10\text{‰}$ .

## Seção 1.2

### Conceitos fundamentais do concreto armado

#### Diálogo aberto

Agora que você já sabe o que é concreto armado, quais são suas principais propriedades e seus conceitos de dimensionamento, vamos avançar em direção aos conceitos de armaduras, altura útil, recobrimentos e o que são estados limites. Para isso, vamos voltar ao seu projeto da lavanderia.

O trabalho de divulgação do empreendimento foi incrível e teve uma grande aceitação pelo mercado local em função do custo *versus* benefício, por apresentar uma arquitetura arrojada e com valor do metro quadrado abaixo do mercado local.

Essa redução no custo do empreendimento foi possível em função da ótima concepção estrutural proposta por você e sua equipe em um estudo básico, pois, possibilitou a otimização dos materiais, mantendo a qualidade, a segurança da obra e o atendimento às normas brasileiras.

O construtor, diante do sucesso e da lucratividade do empreendimento, convidou você para fazer a adequação desse mesmo projeto para que ele fosse implantado em Recife, no estado de Pernambuco, próximo à orla da praia de Boa Viagem, onde há um grau de agressividade ambiental forte.

Diante desse novo cenário relacionado ao ambiente, qual deverá ser sua principal preocupação com as especificações das armaduras do concreto? Quais serão os recobrimentos das armaduras das vigas e das lajes para a implantação do projeto em Belo horizonte e em Recife?

Com relação à resistência do concreto, a diferença no ambiente de implantação da obra provoca alguma alteração? Quais os valores de resistência do concreto a serem utilizados em Belo Horizonte e em Recife?

Para que se mantenha a qualidade e segurança do projeto, você deverá continuar trabalhando atendendo à norma brasileira

NBR-6118, que preconiza os Estados Limites. Qual o estado limite você deverá utilizar no cálculo para verificação do dimensionamento das peças estruturais garantindo a segurança da obra, independente do local de sua implantação? E qual estado limite deverá ser utilizado no cálculo para garantir a qualidade e vida útil?

## Não pode faltar

### Introdução

Quando falamos em estruturas de concreto, imediatamente pensamos em prédios, pontes, passarelas, viadutos. Mas, será que todos os sistemas estruturais de concreto são denominados concreto armado?

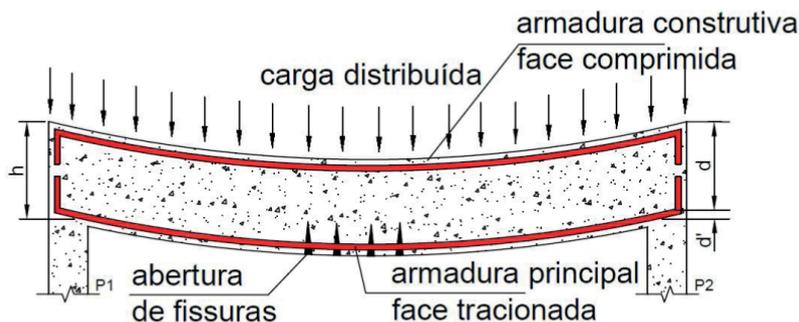
A resposta é não. A denominação varia principalmente em função da condição das armaduras, se elas são ativas ou passivas! Dependendo de como as armaduras trabalham, um sistema estrutural de concreto pode ser denominado concreto armado ou concreto protendido.

### Conceitos de armadura passiva, ativa e altura útil

Já sabemos que o concreto armado é um sistema estrutural resultante da junção dos materiais que constituem o concreto e armaduras, no entanto, existe uma peculiaridade relacionada às armaduras que diferencia o concreto armado do concreto protendido.

No caso do concreto armado, a armadura que integra um elemento estrutural é passiva, ou seja, ela irá trabalhar e se deformar somente após a aplicação dos carregamentos que a estrutura estará sujeita. Como exemplo, podemos pensar em uma viga bi apoiada de concreto armado recebendo constantemente uma carga distribuída. As armaduras dessa viga estarão absorvendo junto com o concreto os esforços provenientes dessa carga distribuída, com isso, ocorrerá o aparecimento de fissuras, até o instante que as armaduras atingirão seu limite de deformação (**10‰**). Caso o carregamento aumente continuamente, haverá o rompimento da peça estrutural.

Figura 1.5 | Viga bi apoiada em concreto armado recebendo uma carga distribuída



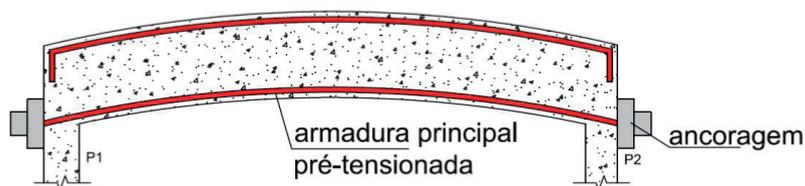
Fonte: elaborada pelo autor.

No concreto protendido, dizemos que as armaduras são ativas, porque elas são solicitadas antes de a estrutura ser carregada. Essa solicitação é feita através de uma pré-tensão ou pós-tensão (alongamento) das armaduras utilizando um macaco hidráulico.

Com a pré-tensão ou a pós-tensão, as armaduras são tracionadas e o concreto é comprimido, e essa é a condição inicial da estrutura para receber os carregamentos posteriormente. A diferença entre pré e pós é que uma é feita antes da concretagem da peça, como no caso de pré-moldados e a outra é feita após a concretagem, como no caso de pontes.

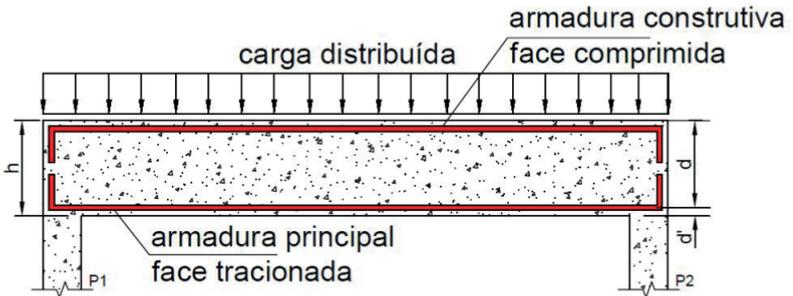
Esse sistema estrutural também é bastante usado no Brasil e viabiliza a execução dos grandes vãos e das estruturas mais leves, além da diminuição de fissuras.

Figura 1.6 | Viga bi apoiada protendida - alongamento inicial das armaduras



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.7 | Viga bi apoiada protendida - posição final após o carregamento



Fonte: elaborada pelo autor.



### Assimile

Armaduras passivas iniciam sua deformação após o carregamento e armaduras ativas são alongadas antes de iniciar o carregamento.

Um outro ponto importante sobre as armaduras, e que precisamos ficar atentos, é o seu posicionamento dentro da seção transversal de um elemento estrutural.

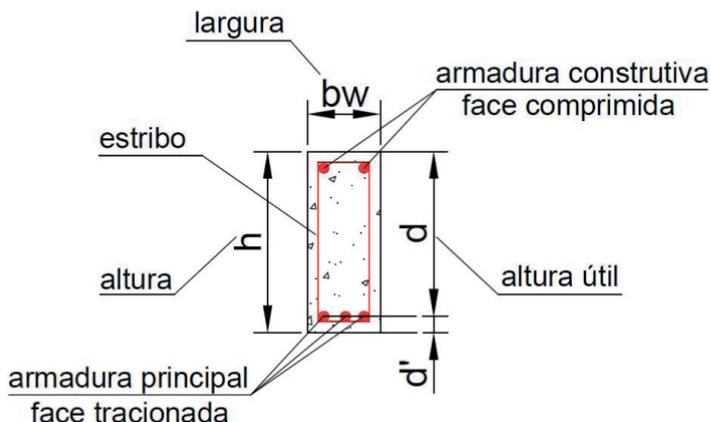
Voltando para nossa viga bi apoiada, se passarmos um corte transversal nela, podemos identificar todas as armaduras existentes.

Sabemos que para uma viga bi apoiada o maior esforço de flexão, provocado pelo momento fletor, está na fibra inferior dessa viga, logo, a armadura principal também estará na fibra inferior.

Para um elemento estrutural sujeito à flexão, a armadura principal é o nome dado à armadura responsável por absorver os esforços de tração.

Para a situação descrita, dizemos que a altura da viga que está trabalhando, é aquela que vai da face mais comprimida (fibra superior) até o centro de gravidade da armadura principal (fibra inferior). Essa altura é a que efetivamente trabalha quando a viga é solicitada. Ela é denominada altura útil e é representada pela letra "d".

Figura 1.8 | Corte transversal da viga bi apoiada - posicionamento das armaduras e altura útil



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Falamos em concreto armado e concreto protendido, mas, e se a estrutura for pré-moldada, estaremos nos referindo ao concreto armado ou ao concreto protendido?

### Agressividade do ambiente - recobrimento das armaduras

As armaduras utilizadas no concreto armado são barras de aço (armaduras passivas) que quando expostas a ambientes úmidos ou agentes agressivos, como gases, podem sofrer um processo de corrosão. Quando há corrosão da armadura, ela perde seção transversal, diminuindo sua área e conseqüentemente sua resistência. Diante disso, é importante que as armaduras utilizadas nos elementos estruturais estejam protegidas pelo concreto.

A proteção das armaduras é feita por meio do recobrimento, que é uma espessura de concreto deixada nas faces do elemento estrutural, durante a concretagem, com a função de garantir a sua vida útil e evitar patologias.

A norma brasileira NBR-6118 (ABNT, 2014), item 6.4.2, tabela 6.1, estipula as espessuras dos cobrimentos das armaduras em função do grau de agressividade do meio ambiente. Quanto maior a agressividade do ambiente, maior deverá ser o cobrimento.

Quadro 1.1 | Classe de agressividade ambiental (CAA) segundo a NBR-6118

Classe de agressividade ambiental (CAA)	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Riscos de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural Submersa	Insignificante
II	Moderada	Urbana	Pequeno
III	Forte	Marinha Industrial	Grande
IV	Muito forte	Respingos de maré	Elevado

Fonte: ABNT (2014, p. 17).

Após a determinação da classe de agressividade ambiental (CAA), deve-se verificar qual o cobrimento a ser utilizado. Para isso, utiliza-se o Quadro 1.2, a seguir.

Quadro 1.2 | Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para  $\Delta_c = 10\text{ mm}$

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental			
		I	II	III	IV
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto armado	Lajes	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo	30	30	40	50
Concreto protendido	Lajes	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

Fonte: ABNT (2014, p. 20).



**Refleta**

Estruturas pré-moldadas são estruturas em concreto armado, no entanto, os cobrimentos utilizados são menores. Você saberia dizer por quê?

Ainda sobre a agressividade do ambiente, é importante saber que o engenheiro projetista deve ficar atento à resistência do concreto a ser especificada no projeto. A classe do concreto também varia com o grau de agressividade.

Quadro 1.3 | Correspondência entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto

Concreto	Tipo	Classe de agressividade			
		I	II	III	IV
Relação água/ cimento em massa	CA	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,45$
	CP	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,50$	$\leq 0,45$
Classe de concreto (ABNT NBR-8953)	CA	$\leq 0,45$	$\geq C20$	$\geq C30$	$\geq C40$
	CP	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C35$	$\geq C40$

Fonte: ABNT (2014, p. 18).

O Quadro 1.3 apresenta as classes do concreto armado (CA) e protendido (CP) para as diferentes classes de agressividade. Nela também é possível obter a maior relação água/cimento para cada classe do concreto. Lembrando que: quanto menor a relação água/cimento e maior o  $f_{ck}$ , menos poroso será o concreto, dificultando a penetração de agentes agressivos e umidade.

## Estados Limites

Quando vamos dimensionar um elemento estrutural, seja ele uma viga, uma laje ou um pilar é importante ficarmos atentos aos valores limites preestabelecidos pela norma, que garantam sua segurança e sua adequação quanto ao uso.

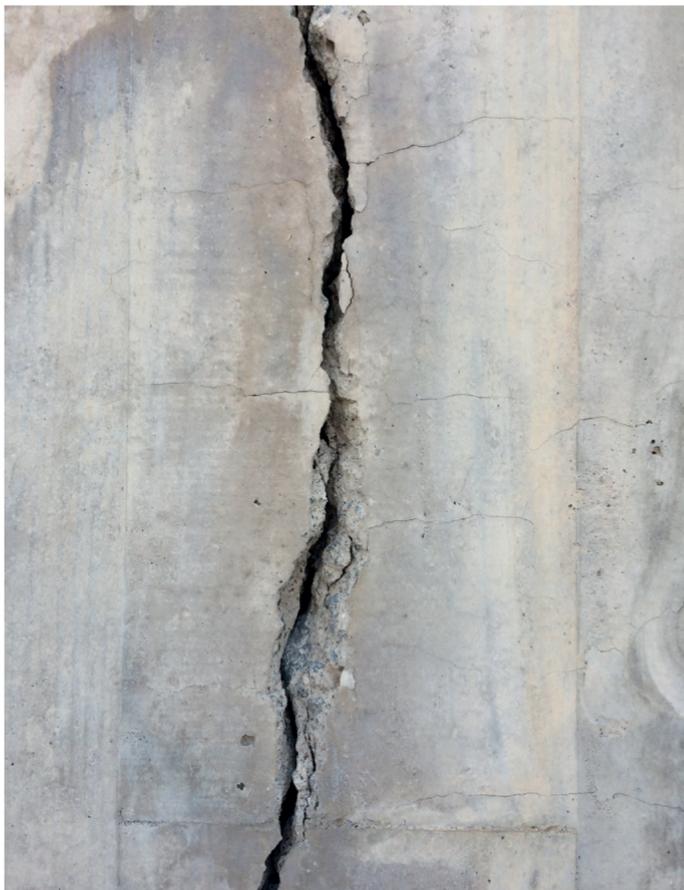
Pensando nisso, a NBR-6118 (ABNT, 2014) estabelece a verificação das estruturas quanto a dois estados limites: o estado limite de serviço (ELS) e o estado limite último (ELU).

## Estado Limite de Serviço (ELS)

O estado limite de serviço é quando a estrutura torna-se inadequada para o uso, ou seja, ela não atende ao usuário, seja por desconforto em função de vibrações ou por apresentar fissuras com aberturas excessivas ou, ainda, devido a grandes flechas (deformações) que causam insegurança ao usuário.

O ELS está relacionado ao conforto, durabilidade, aparência e desempenho das estruturas.

Figura 1.9 | Abertura excessiva de fissura - Exemplo de ELS



Fonte: iStock.



## Exemplificando

Você entra na garagem do seu prédio e percebe que algumas lajes estão "embarrigadas", ou seja, com flecha excessiva. O que significa isso, quando pensamos em estados limites?

Resp.: Significa que ela atingiu seu ELS e não foi dimensionada corretamente.



## Assimile

Uma estrutura não atende ao ELS se ocorrerem:

- Fissuras maiores que as estabelecidas por norma.
- Deslocamentos excessivos.
- Deformações visíveis.
- Movimentação excessiva.



## Refleta

Você saberia explicar por que o concreto fissa?

### Estado Limite Último (ELU)

O estado limite último é quando existe o esgotamento da capacidade de uma estrutura e ela deixa de ser segura.

Quando uma estrutura está em ruína, independente do motivo, dizemos que ela atingiu seu ELU.

Figura 1.10 | Colapso de uma ponte - Exemplo de ELU



Fonte: iStock.



## Assimile

Quando acontece a ruína de uma estrutura, seja por colapso progressivo, esforços dinâmicos excessivos, exposição ao fogo, efeito de segunda ordem acima da norma, abalos sísmicos e outros, significa que essa estrutura atingiu seu ELU.



## Exemplificando

Houve um incêndio em um presídio, provocado pela queima de colchões. O prédio onde estavam os detentos ficou submetido por um período às altas temperaturas e ruiu. O que isso significa quando pensamos em estados limites?

Resp.: Nesse caso, dizemos que a estrutura atingiu seu ELU e não foi dimensionada para suportar altas temperaturas.



## Pesquise mais

É importante que você saiba mais sobre os estados limites! Recomendamos para isso, o estudo do item 3.2 - Definições de estados limites, da NBR-6118 (ABNT, 2014).

## Sem medo de errar

Agora que avançou um pouco mais em seus estudos sobre as estruturas de concreto armado é possível dar andamento ao seu projeto da lavanderia que está sendo concebido para Belo Horizonte, mas, devido ao sucesso de vendas, você foi solicitado a adequá-lo para implantação em Recife, no estado de Pernambuco, próximo à praia de Boa Viagem.

Você aprendeu nesta seção que, em concreto armado, as armaduras podem sofrer um processo de corrosão devido ao ambiente de implantação da estrutura. Com isso, consegue responder ao seu primeiro desafio.

No caso da implantação do projeto próximo à praia, sua principal preocupação com as armaduras é com relação à proteção, que é feita por meio do cobrimento.

Belo Horizonte, que é uma região urbana, como podemos checar no Quadro 1.1, corresponde ao grau de agressividade moderado, classe II.

Conhecendo o grau de agressividade, você poderá determinar os cobrimentos de acordo com o Quadro 1.2.

Os cobrimentos encontrados para as lajes serão 25mm e para as vigas serão de 30 mm.

No entanto, para a região litorânea de Recife, o ambiente é marinho e a Quadro 1.1 indica um grau de agressividade ambiental forte.

Para um ambiente com grau de agressividade forte, a Quadro 1.2 recomenda os cobrimentos de 35 mm para as lajes e 40 mm para as vigas.

Você também está apto a responder sobre a resistência do concreto relacionada ao grau de agressividade. De acordo com a Quadro 1.3, para Belo Horizonte, classe II de agressividade, o valor do  $f_{ck}$  será  $\geq 25$  MPa e para Recife, classe III de agressividade o valor do  $f_{ck}$  passará a ser  $\geq 30$  MPa.

Finalizando o desafio desta seção, você aprendeu que independente do local de implantação de um empreendimento, os cálculos e dimensionamentos das estruturas deverão atender ao ELU para garantir a segurança e atender ao ELS para garantir a qualidade e a vida útil.

## Avançando na prática

### Determinação da altura útil da viga

#### Descrição da situação-problema

Você está fazendo a verificação de uma estrutura industrial denominada *shelter*, que nada mais é que um depósito, e que foi concebido para uma região de agressividade considerada forte. A classe do concreto está indicada no projeto como C30 e os

cobrimentos atendem ao grau de agressividade. No entanto, você tem a informação de que essa estrutura será replicada para outras regiões com um grau de agressividade muito forte.

Pensando nas vigas do projeto e sabendo que elas são bi apoiadas e com dimensões de 25 cm de largura e 50 cm de altura, qual deverá ser a altura útil das vigas para o cálculo na região de agressividade muito forte?

Dados: os estribos são de diâmetro 6,3 mm (0,63 cm) a cada 10 cm e a armadura principal longitudinal é de  $2 \phi 16$  mm (1,6 cm) na fibra inferior.

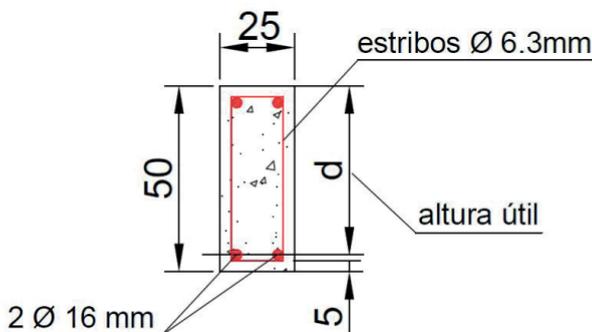
### Resolução da situação-problema

Para região de agressividade muito forte, a classe é IV, conforme o Quadro 1.1.

Para classe IV, os cobrimentos das vigas são de 50 mm ou 5 cm, conforme o Quadro 1.2.

Se a altura da viga é de 50 cm e a altura útil corresponde à altura da fibra mais comprimida até o C.G. da armadura na fibra tracionada, teremos (Figura 1.11):

Figura 1.11 | Seção transversal da viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Cálculo da altura útil "d".

$$d = 50 - (5 + 0,63 + 1,6/2)$$

$$d = 43,57 \text{ cm}$$

## Faça valer a pena

**1.** Existem diversas situações em que o seu conhecimento sobre como as armaduras trabalham pode ser fundamental. Você aprendeu que em estruturas de concreto armado as armaduras são passivas e nas estruturas de concreto protendido elas são ativas.

Armaduras passivas são aquelas que:

- a) Trabalham antes de receber um carregamento.
- b) Trabalham ao longo do tempo.
- c) Trabalham após receber um carregamento.
- d) Não trabalham.
- e) Trabalham antes e após receber um carregamento.

**2.** O recobrimento das armaduras serve para protegê-las contra corrosão, no entanto, quanto maior o recobrimento, menor a altura útil da viga. A altura útil é aquela que será usada no dimensionamento da viga, portanto, quanto menor a altura útil menor será a capacidade resistente da viga.

Como se determina a altura útil de uma viga?

- a) Altura útil é a distância da face mais comprimida da viga até o centro de gravidade da armadura na face tracionada.
- b) Altura útil é a distância da face tracionada da viga até o centro de gravidade da armadura na face comprimida.
- c) Altura útil é a distância entre o centro de gravidade da viga e o centro de gravidade da armadura.
- d) Altura útil é a distância da face inferior da viga até o centro de gravidade da armadura na face superior.
- e) Altura útil é a distância da face superior até a face inferior da viga.

**3.** O estado limite último e o estado limite de serviço devem ser respeitados quando dimensionamos os elementos estruturais em concreto armado. São os estados limites que garantem a segurança, a qualidade e a vida útil de uma estrutura. Também são eles que garantem a excelência do trabalho do engenheiro.

Após sua aula sobre os estados limites, você retorna para casa, cansado, entra no seu quarto e quando olha para cima, lá está a laje "embarrigada" que tanto o incomoda. Então, você pensa:

- a) Essa laje atingiu o estado limite último.
- b) Essa laje precisa de mais cobrimento.
- c) Essa laje não fissurou, então tudo bem, vou dormir.
- d) Essa laje deformou além do limite, isso significa que atingiu o estado limite de serviço.
- e) É uma característica do concreto a deformação excessiva.

## Seção 1.3

### Conceitos de dimensionamento do concreto armado

#### Diálogo aberto

Estamos na última fase das definições relacionadas ao concreto armado, antes de iniciarmos os cálculos e dimensionamentos de um elemento estrutural.

Na seção anterior, você aprendeu sobre as armaduras ativas e passivas, sobre a influência do meio ambiente na determinação dos cobrimentos das armaduras e também sobre os estados limites último e de serviço. Nesse último passo a caminho dos cálculos estruturais, você aprenderá sobre as ações atuantes em uma estrutura, os estádios de dimensionamento e os domínios de deformação. No final desta etapa, você estará apto para avançar mais um passo em seu projeto da lavanderia para o empreendimento dos prédios inteligentes!

Com todo sucesso conquistado pelos projetos implantados em Belo Horizonte e em Recife, você agora terá um novo desafio, que é a implantação no estado do Ceará, na região de Cascavel.

Essa também é uma região litorânea, e você já determinou os parâmetros para esse tipo de ambiente, mas além disso Cascavel, diferentemente de Belo Horizonte e de Recife, apresenta uma peculiaridade. Nessa região, já foram registrados abalos sísmicos com valores consideráveis na escala Richter.

Diante do novo contexto, o construtor solicita a você que considere as ações dinâmicas provocadas pelos abalos, evitando futuros problemas.

O software de cálculos estruturais que você está utilizando precisa que você classifique todas as ações atuantes na estrutura para que ele possa realizar as combinações e obter os esforços mais desfavoráveis para os dimensionamentos.

É responsabilidade do engenheiro a classificação das ações para que sejam dados os respectivos pesos a elas. Após um levantamento, você definiu que as ações atuantes para o projeto,

independentemente do local de implantação, serão: o peso próprio, a sobrecarga de utilização (lavanderia), o vento e, exclusivamente para a cidade de Cascavel, você terá ações em função dos abalos sísmicos. Como você definiria cada ação?

A estrutura passa por estádios de desempenho em função da aplicação dessas ações, em qual estádio deverá ser calculada a sua estrutura, independentemente da região de implantação?

Para que se obtenha o melhor aproveitamento dos materiais (aço e concreto) e se mantenha a segurança estrutural, em quais domínios de dimensionamento você deve trabalhar?

Para que você possa responder a essas questões, fique atento às definições relacionadas aos tipos de ações que serão apresentadas a seguir e atenção total aos diagramas de estádios e domínios. Boa sorte!

## Não pode faltar

### Introdução

Antes de iniciarmos o dimensionamento de uma estrutura, devemos estar atentos aos estados de tensões e deformações que ela está produzindo. Esses são os dados que utilizamos no dimensionamento dos elementos estruturais e que devem atender aos estados limites (ELS e ELU) vistos na seção anterior.

Mas o que geram esses estados de tensões e essas deformações?

Para que surja um estado de tensão e uma deformação é necessário que a estrutura seja solicitada por uma ou mais ações, e cabe ao engenheiro definir quais ações atuarão nessa estrutura.



Refleta

Por que as ações devem ser combinadas entre si, e não apenas somadas?

As ações são classificadas em função de sua variabilidade com relação ao tempo e, conforme a NBR-6118, item 11.2.2, elas são classificadas como: permanentes, variáveis e excepcionais.

Devido ao grande número de combinações que podem ser geradas entre as ações, esse trabalho é normalmente realizado

pelos softwares de cálculo. Nesse sentido, é importante que você como engenheiro verifique se o programa está configurado para realizar as combinações entre as ações e se os coeficientes de ponderação dessas ações estão de acordo com a norma NBR-6118 (ABNT, 2014).



## Assimile

É importante saber que uma estrutura é calculada para diversas combinações entre as ações atuantes e que cada ação é ponderada (através de coeficientes de ponderação) de acordo com sua variação ao longo do tempo.

### Ações permanentes

As ações permanentes são aquelas que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção, além daquelas que aumentam com o tempo, mas tendem a um valor limite constante (ABNT, 2014).

As ações permanentes podem ser diretas ou indiretas.

As ações permanentes diretas são: o peso próprio da estrutura, o peso de elementos fixos e de empuxos permanentes.

As ações permanentes indiretas são: a retração do concreto (encurtamento), a fluência do concreto (deformações lentas), deslocamentos de apoio (pilares, fundação, etc.), imperfeições geométricas locais e/ou gerais (deslocamentos e momento mínimo) e protensão.

### Ações variáveis

São aquelas que não atuam de forma permanente na estrutura. As ações variáveis ou acidentais também podem ser diretas ou indiretas.

As ações variáveis diretas são aquelas constituídas pelas cargas acidentais previstas para o uso da construção (residência, biblioteca, depósito, etc.), e seus valores de referência podem ser obtidos através da norma brasileira NBR-6120, pelas cargas de vento que atuam conforme a norma brasileira NBR-6123, pelos empuxos de água e ações variáveis de execução.

As ações variáveis indiretas incluem as variações de temperatura que podem ser uniformes ou não e as ações dinâmicas relativas ao uso (vibrações ou choques).

### Ações excepcionais

As ações excepcionais são aquelas que não podem ser controladas, como é o caso de furacões e terremotos.



#### Exemplificando

Você está calculando o projeto de uma passarela com estrutura mista em concreto armado e protensão. Antes de iniciar o dimensionamento você fez o levantamento das ações que irão atuar nessa passarela e chegou na seguinte lista: peso próprio da estrutura, protensão, sobrecarga para passagem de pedestres, incidência de vento. Como você classificaria cada uma dessas ações?

#### Resolução:

- Peso próprio: ação permanente direta.
- Protensão: ação permanente indireta.
- Sobrecarga para passagem de pedestres: ação variável direta.
- Vento: ação variável direta.



#### Pesquise mais

Obtenha mais conhecimento sobre as ações e os coeficientes de ponderação utilizados pela norma, consultando o item 11 e as tabelas 11.1, 11.2, 11.3 e 11.4 da NBR-6118 (ABNT, 2014), disponível na Biblioteca Virtual.

### Estádios de cálculo

Os estádios são as fases que uma estrutura de concreto passa quando submetida a um carregamento e que foram divididas em três estágios, iniciando do zero até chegar à ruptura. São eles: estágio I, estágio II e estágio III.

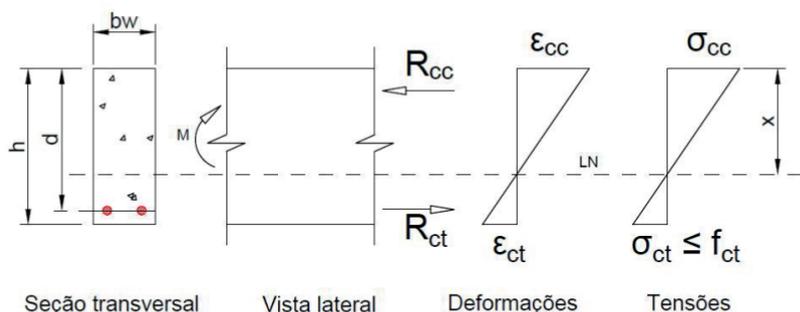
Para entender melhor, imagine uma viga em concreto armado biapoiada sendo submetida a um carregamento.

## Estádio I

O estágio I é definido pelo intervalo entre o início da aplicação do carregamento até o momento que se inicia a fissuração da viga, ou seja, nesse momento o concreto ainda consegue resistir às tensões de tração. Teremos um diagrama linear de tensões e é válida a Lei de Hooke para as deformações. O estágio I termina quando inicia o aparecimento das fissuras. A Figura 1.12 descreve o comportamento de uma viga simplesmente apoiada, submetida a um carregamento externo, e que se encontra no estágio I. A linha neutra (LN) da seção indica a região em que a tensão é zero.

Os esforços produzidos nesse estágio são utilizados para determinar a armadura mínima do elemento estrutural.

Figura 1.12 | Estádio I



Fonte: elaborada pela autora.

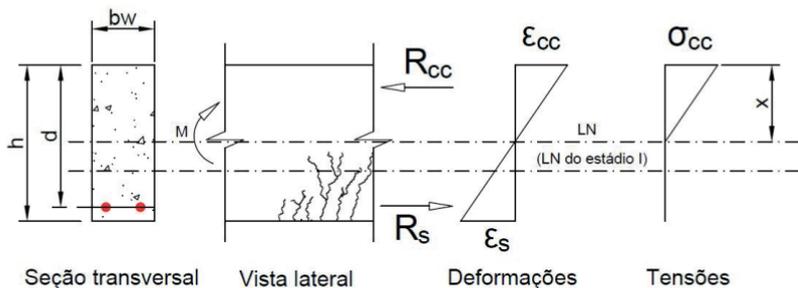
## Estádio II

Assim que se inicia a fissuração da viga, se continuarmos aplicando o carregamento, as fissuras continuarão aparecendo. O estágio II será o intervalo entre o início do aparecimento das fissuras até a fissuração de toda parte tracionada (trecho abaixo da linha neutra) da viga. Nesse caso, a parte comprimida se mantém num diagrama linear de tensões. O concreto não resiste mais à tração.

O estágio II é usado pelo engenheiro para realizar a verificação das estruturas no estado limite de serviço (ELS). Nele, com a continuidade do carregamento, as fissuras caminharão para a borda

comprimida (acima da linha neutra) da viga, assim como a linha neutra (ponto onde as tensões de tração e compressão se anulam). Nesse caso, as tensões de tração aumentam tanto que as armaduras podem atingir o escoamento. O estágio II termina quando se inicia a plastificação do concreto comprimido, conforme apresentado na Figura 1.13.

Figura 1.13 | Estádio II



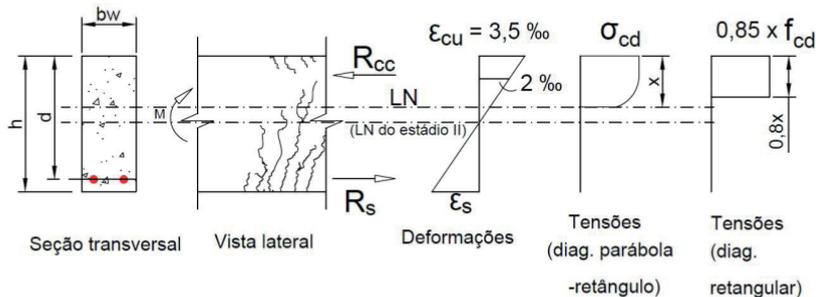
Fonte: elaborada pela autora.

### Estádio III

O estágio III é quando a região mais comprimida da viga está plastificada, ou seja, está no estado limite último (ELU) ou na iminência da ruptura. Nesse estágio, não temos mais um diagrama linear de tensões. O diagrama no estágio III é chamado de parábola-retângulo.

A norma brasileira NBR-6118 permite que seja utilizado um diagrama retangular equivalente, de altura  $0,8X$ , de modo a simplificar os cálculos, conforme Figura 1.14.

Figura 1.14 | Estádio III



Fonte: elaborada pela autora.



No estágio II, as estruturas de concreto armado são verificadas quanto ao estado limite de serviço (ELS), e no estágio III, elas são dimensionadas no estado limite último (ELU).

## Domínios de deformação

Antes de falarmos dos domínios de deformação, vamos lembrar que o objetivo final deste livro é o dimensionamento de elementos estruturais de concreto armado sujeitos aos esforços de flexão (vigas e lajes). Mas o que é flexão?

Vamos imaginar uma viga de concreto armado biapoiada sendo constantemente solicitada por uma carga uniformemente distribuída. A viga começará a flexionar, então teremos tração do aço na fibra inferior e compressão do concreto na fibra superior. Dizemos que a viga está fletida!

Voltando aos domínios de deformação: eles são as regiões delimitadas pelas possíveis configurações do diagrama de deformações correspondentes ao ELU (máximas deformações do aço e do concreto), para uma determinada seção submetida a solicitações normais.

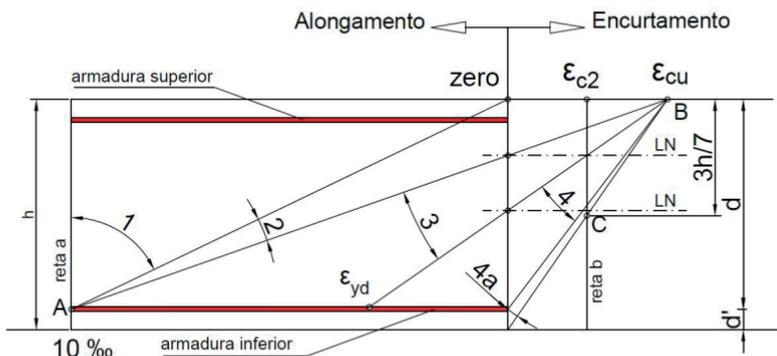
Na Figura 1.15, temos os domínios de deformação representados na lateral de uma viga.

Supondo que seja uma viga biapoiada, temos representados: a altura útil ( $d$ ), que vai da face superior da viga até o c.g. (centro de gravidade) da armadura inferior, e a altura total ( $h$ ), que mede a viga de face a face. Além disso, temos a representação das armaduras inferior e superior e o  $d'$  que representa a distância da face tracionada da viga até o c.g. da armadura tracionada.

Para que sejam definidos os domínios, há representado na viga o ponto zero que divide os diagramas de deformação em: alongamento da armadura (à esquerda) e encurtamento do concreto (à direita).

A linha neutra (LN) passa pelo ponto em que o diagrama de deformação cruza a viga no eixo zero.

Figura 1.15 | Domínios de estado-limite último de uma seção transversal



Fonte: adaptada de ABNT (2014, p.122).

Definições do diagrama de domínios de estado-limite último de uma seção transversal:

ruptura convencional por deformação plástica excessiva, ou seja, ocorre o ELU em unição do alongamento da armadura:

- **Reta a:** tração uniforme.

Neste caso, não temos flexão. O que ocorre é apenas uma tração uniforme das armaduras com um alongamento de  $10\text{‰}$  constante. A linha neutra (LN) tende ao infinito ( $\infty$ ).

- **Domínio 1:** tração não uniforme, sem compressão.

Também ocorre apenas tração da armadura, porém não mais uniforme. A deformação na borda inferior é de  $10\text{‰}$  e na borda superior varia de  $10\text{‰}$  até zero.

A linha (LN) ainda não corta a seção.

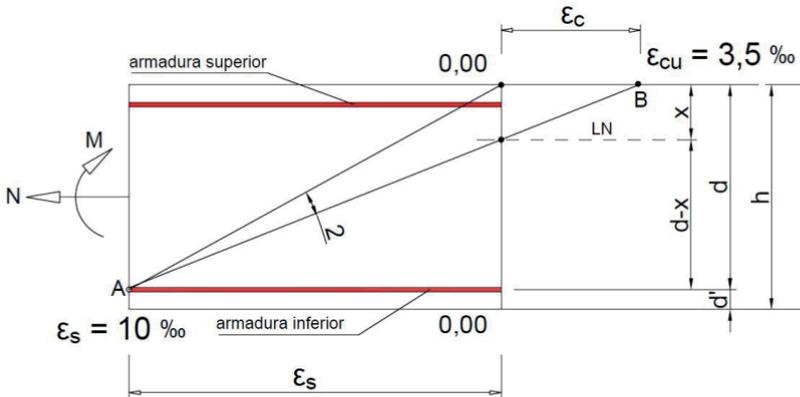
- **Domínio 2:** flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c \leq \epsilon_{cu}$  e com o máximo alongamento da armadura permitido).

Neste caso, temos flexão com o máximo alongamento do aço de  $10\text{‰}$ , e o encurtamento do concreto (compressão) varia de zero até a ruptura de  $3,5\text{‰}$ .

A LN passa dentro da seção da viga, o que corresponde a flexão simples ou flexão composta.

O domínio 2 é um domínio de dimensionamento de estruturas de concreto armado com total aproveitamento do aço. A linha neutra (LN) que separa o domínio 2 do domínio 3 está posicionada a  $x_{2,3} = 0,259 \times d$  da face superior.

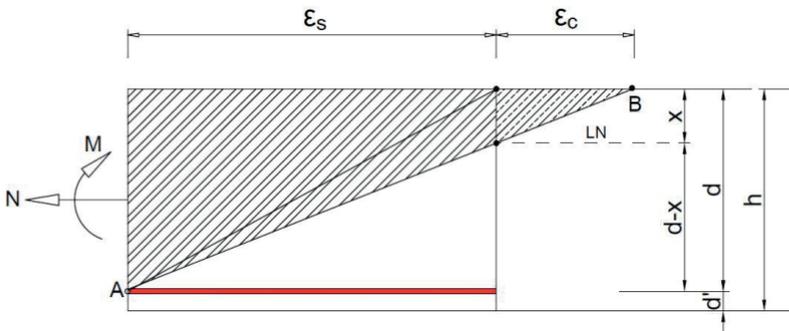
Figura 1.16 | Domínio 2 - Posição da linha neutra - LN



Fonte: elaborada pela autora.

Uma maneira simples de se determinar o valor da posição da linha neutra é determinando o valor de  $x$  através da semelhança de triângulos, conforme Figura 1.17:

Figura 1.17 | Domínio 2 - Semelhança de triângulos



Fonte: elaborada pela autora.

Determinação do valor de  $x$ :

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_c}{d}$$

$$\varepsilon_c \times d = x \times (\varepsilon_s + \varepsilon_c)$$

$$\frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{(\varepsilon_s + \varepsilon_c)}$$

$$\frac{x}{d} = \frac{3,5}{10 + 3,5}$$

$$\frac{x}{d} = 0,259$$

$$x_{2,3} = 0,259 \times d$$

Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto. O ELU em função da compressão do concreto:

- **Domínio 3:** flexão simples (também chamada de seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$ ).

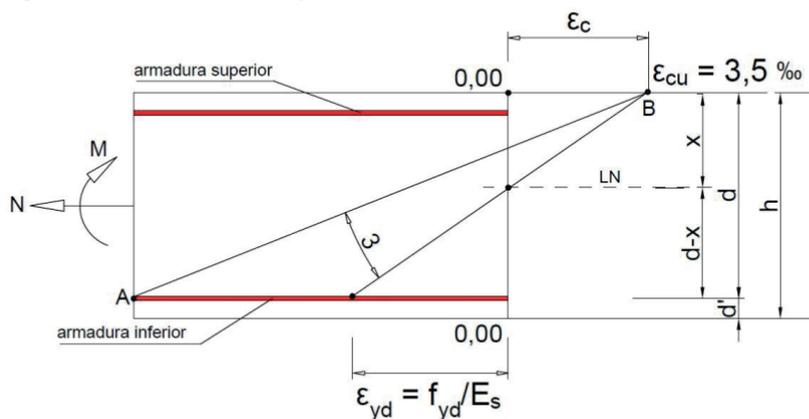
O domínio 3 é um domínio de dimensionamento de estruturas de concreto armado com total aproveitamento do aço e do concreto. Ambos estão trabalhando nos seus limites de deformação.

Em caso de ruína, existe um aviso da estrutura, havendo fissuração aparente e flechas significativas.

A linha neutra, para o aço mais usual, CA-50, corresponde a  $x_{3,4} = 0,628 \times d$ .

O valor de  $x_{3,4}$  pode ser deduzido por semelhança de triângulos, assim como no domínio 2.

Figura 1.18 | Domínio 3 - Posição da linha neutra - LN



Fonte: elaborada pela autora.

- **Domínio 4:** flexão simples (também chamada de seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ ).

Embora no domínio 4 o ELU seja atingido pelo concreto na compressão máxima, a armadura está trabalhando em estado elástico, ou seja, não atingiu seu patamar de escoamento. Dessa forma, em caso de ruína da estrutura, não haverá aviso, pois há pouca fissuração e os deslocamentos são pequenos.

Por não utilizar todo o potencial do aço e pela falta de aviso em caso de ruína, não utilizamos o domínio 4 no dimensionamento das estruturas de concreto armado.

Caso se obtenha o domínio 4 em um dimensionamento, algumas soluções possíveis são: aumentar a seção da peça, alterar a resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) e utilizar armadura dupla (assunto que será tratado posteriormente).

- **Domínio 4a:** flexão composta com armaduras comprimidas.

Caso similar ao domínio 4. Não utilizamos esse domínio no dimensionamento das estruturas de concreto armado.

- **Domínio 5:** compressão não uniforme, sem tração.

Temos a seção totalmente comprimida, embora de maneira não uniforme. Caso de compressão excêntrica. Não utilizamos este domínio no dimensionamento das estruturas de concreto armado.

- **Reta b:** compressão uniforme.

Neste caso temos compressão uniforme, e a LN tende ao infinito ( $\infty$ ). Não utilizamos esse domínio no dimensionamento das estruturas de concreto armado.



### Refleta

As fissuras são características do concreto em função das propriedades do cimento. Isso significa que você não deve se preocupar com as fissuras que aparecem nas estruturas de concreto armado?



### Assimile

Os domínios 2 e 3 são os domínios de dimensionamento das estruturas de concreto armado. Neles há o melhor aproveitamento dos materiais aço e concreto, e a estrutura emite avisos (fissuras e deformações) antes da ruína.

## Sem medo de errar

Estamos cada vez mais próximos do dimensionamento das estruturas de concreto armado. Nesta seção aprendemos sobre a classificação das ações que atuam sobre as estruturas, aprendemos que quando uma estrutura é solicitada passa por três estádios antes da ruptura e que existem os domínios de deformação onde os elementos estruturais devem ser dimensionados, de acordo com sua solicitação.

Com estas informações podemos retornar ao nosso desafio do início desta seção: a implantação da lavanderia dos prédios inteligentes, na região de Cascavel, estado do Ceará.

Como sabemos, Cascavel fica no litoral, assim como Recife, no entanto temos a informação de que em Cascavel há ocorrência de abalos sísmicos.

Nessa etapa, você deverá classificar as ações que irão atuar na estrutura para poder abastecer o software que está sendo utilizado

nos cálculos. Você deverá definir o estágio de cálculo da estrutura e os domínios de dimensionamento dos elementos estruturais, de modo que se obtenha o melhor aproveitamento dos materiais.

### Solução:

Foram fornecidas as ações, e sua classificação é:

Ações	Classificação das ações
Peso próprio	Carga permanente
Sobrecarga de utilização	Carga variável direta
Vento	Carga variável direta
Abalos sísmicos - apenas para Cascavel	Carga excepcional

Estádio de cálculo das estruturas:

Conforme vimos, o estágio III é o estágio de dimensionamento das estruturas de concreto armado. É nele que a região mais comprimida da viga está plastificada, ou seja, está no estado limite último (ELU) ou na iminência da ruptura. Para os cálculos utiliza-se o diagrama parábola-retângulo de tensões.

Domínios de deformação:

Os domínios de deformação 2 e 3 são os domínios utilizados no dimensionamento dos elementos estruturais de concreto armado sujeitos à flexão. Eles permitem o máximo aproveitamento dos materiais, e a estrutura emite avisos antes de entrar em ruína.

## Avançando na prática

### Ações, estádios de cálculo e domínios de deformação

#### Descrição da situação-problema

Você foi contratado para elaborar um laudo técnico relacionado às patologias em um dos pisos de um prédio de três andares.

Esse piso é estruturado com vigas e lajes em concreto armado e utilizado como biblioteca. Os demais pisos são utilizados como escritório.

Você está de posse do projeto estrutural e da memória de cálculo, além do projeto arquitetônico do prédio, que tem apenas cinco anos.

A utilização dos pisos, segundo o projeto de arquitetura, está como escritórios, e existem dois sanitários em cada piso.

Realizada a vistoria, você comprova que as lajes do piso onde está a biblioteca apresentam flechas excessivas para o vão, além de muitas fissuras com aberturas acima dos limites de norma. Diante desta descrição, responda:

- Com relação ao que você aprendeu sobre os estádios e, mais especificamente, sobre o ELU, qual seria sua primeira providência com relação à situação verificada no local?
- O que você pode relatar como possível causa das fissuras e deformações excessivas, com os dados fornecidos no texto?
- Sobre a classificação das ações atuantes na estrutura, como você classificaria a ação "utilização como biblioteca"?
- A estrutura apresenta características (fissuras e flechas) que sugerem que seu dimensionamento foi efetuado em um dos domínios de dimensionamento, 2 ou 3. Você saberia dizer por que, no dimensionamento de uma viga, a resistência à tração do concreto é desconsiderada?

### **Resolução da situação-problema**

- A primeira questão está relacionada ao ELU, estágio III. Você aprendeu que, para chegar até a ruína e atingir o ELU, os materiais precisam deformar até atingirem seu limite, mas, antes de chegar ao limite, um elemento de concreto começa a fissurar e/ou se deformar! Nesse caso, quando você percebe fissuras e deformações "excessivas", a sua primeira providência como engenheiro é se precaver e solicitar o escoramento de todos os elementos que

apresentam as patologias, até que você se certifique da necessidade de reforço ou não da estrutura.

- Com relação às possíveis causas das fissuras e deformações, o texto deixa claro que o prédio foi desenvolvido para ser utilizado como prédio de escritórios, no entanto o piso que apresenta problemas está sendo utilizado como biblioteca. A primeira providência é checar se as sobrecargas para escritório e biblioteca são equivalentes. Após a checagem na *NBR-6120: cargas para cálculo de estruturas de edificações*, você verificou que a sobrecarga para escritórios é de  $250\text{kg} / \text{m}^2$  e a sobrecarga para biblioteca com estantes é de  $600\text{kg} / \text{m}^2$ , logo o excesso de carga não previsto pode ser a causa dos problemas.

- Sobre a classificação das ações: toda sobrecarga de utilização é classificada como ação variável direta. As vigas são elementos estruturais sujeitos à flexão, portanto, quando solicitadas, apresentam esforços de compressão e tração. No dimensionamento das vigas, a resistência à tração do concreto é desconsiderada por ser muito baixa. Quando ocorre esforço de tração, o concreto fissura e tende a romper, por isso são utilizadas as barras de aço, que ficam responsáveis por absorver esses esforços.

## Faça valer a pena

**1.** Você está calculando uma laje em concreto armado com 12 cm de espessura, e sobre ela haverá um contrapiso em argamassa de 3 cm de espessura e, posteriormente, um piso em mármore italiano de 5 cm de espessura. Esse piso será utilizado como museu de quadros de artes sacras, mas em uma das apresentações ele receberá uma estátua de bronze que será colocada no meio da laje.

Classifique as ações respectivamente: peso da laje, peso do piso de mármore, peso da estátua.

- a) Permanente, permanente, permanente.
- b) Permanente, variável direta, variável direta.
- c) Variável indireta, permanente, permanente.
- d) Permanente, permanente, variável direta.
- e) Variável indireta, variável direta, variável direta.

**2.** No estágio III ocorre o dimensionamento dos limites dos materiais, mas para atingir esse limite teremos fissuras e deslocamentos excessivos. Para evitarmos esses deslocamentos e fissuras excessivas, devemos verificar se as peças estruturais atendem ao ELS.

Em qual estágio devemos dimensionar as estruturas para evitar o aparecimento das fissuras ou deslocamentos excessivos?

- a) Estádio I, peça não fissurada.
- b) Estádio II, peça no início da fissuração.
- c) Estádio III, peça com fissura na borda inferior.
- d) Estádio I, peça com fissura na borda superior.
- e) Estádio II, peça totalmente fissurada.

**3.** Além dos estágios de cálculo, temos também os domínios de deformação. Cada domínio está relacionado a um ou mais tipos de esforços. Por exemplo, o domínio 1 está relacionado ao esforço de tração não uniforme.

No nosso caso, vamos estudar lajes e vigas, portanto teremos esforços de flexão.

De acordo com o aprendizado adquirido, quais são os domínios que devemos utilizar no cálculo de estruturas de concreto armado submetidas aos esforços de flexão?

- a) Domínios 1 e 2.
- b) Domínios 2 e 3.
- c) Domínios 3 e 4.
- d) Domínios 4 e 5.
- e) Domínios 1 e 4.

# Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **NBR-6120**: cargas para o cálculo de estruturas. Rio de Janeiro, 1980.

\_\_\_\_\_. **NBR-6123**: forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.

\_\_\_\_\_. **NBR-6118**: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR-8953**: concreto para fins estruturais: classificação por grupo de resistência. Rio de Janeiro, 2015.

# Vigas de seção retangular

### Convite ao estudo

Neste momento, você já possui todo embasamento necessário para dar início aos estudos dos elementos ou peças estruturais de concreto armado.

Nosso primeiro elemento estrutural serão as vigas e durante os estudos você irá aplicar os conhecimentos e fundamentos de dimensionamento de uma viga de seção retangular, em situações de carregamento e comportamento real.

Ao final da Unidade 2, você estará apto a determinar as armaduras longitudinais de uma viga de seção retangular e realizar o detalhamento da armadura na seção transversal.

Com os conhecimentos adquiridos nessa unidade e com os conhecimentos obtidos na unidade anterior, você poderá avançar no projeto estrutural da lavanderia.

Seguindo o cronograma, a próxima etapa do projeto é o lançamento da estrutura no software de cálculo no qual você definirá a locação dos pilares, das vigas e das lajes.

Após o lançamento da estrutura e já com os parâmetros de cálculo definidos, o software deverá ser processado e você iniciará a verificação dos cálculos e dimensionamentos.

Normalmente após o processamento, o software emite alertas de inconsistência e avisos, caso existam. Nesse instante, cabe ao engenheiro a análise dos resultados e adequações.

Com relação ao dimensionamento das armaduras, é importante verificar o detalhamento fornecido, uma vez que,

o software buscando a otimização dos materiais, por vezes, apresenta um detalhamento com uma variedade de bitolas e barras longitudinais fragmentadas, e cabe ao usuário uma análise e adequação das armaduras.

Os primeiros elementos estruturais que você irá verificar em seu projeto serão as vigas do primeiro pavimento e antes de mais nada, é importante entender o que é uma viga e quais os esforços resultantes da solicitação dessa peça estrutural.

Entendido o conceito e de posse do relatório gerado pelo software, você iniciará a verificação do projeto a ser implantado em Belo Horizonte.

Após o processamento, o relatório de cálculo será favorável aos dimensionamentos, então você procederá com a verificação dos detalhamentos das seções transversais. Esse será o seu primeiro desafio!

No editor gráfico das vigas, estão os detalhamentos de todas as vigas do seu projeto, você irá checar manualmente o detalhamento da viga V4, escolhida por ser a mais carregada.

Seu desafio será verificar se a V4 está de acordo com a norma brasileira, quanto aos espaçamentos entre barras utilizado, checando também se a área de aço resultante do software atende à armadura mínima e se há necessidade do uso de armaduras de pele.

Após o detalhamento, avançaremos sobre os cálculos e dimensionamento das armaduras longitudinais das vigas e seu segundo desafio, será checar manualmente o cálculo da viga V4 para condição de seção retangular e armadura simples

Felizmente, após a checagem, todas as vigas do projeto a ser implantado em Belo Horizonte foram resolvidas, no entanto, o processamento para a implantação em Cascavel apresentou problemas, não no detalhamento, mas no dimensionamento da viga V4.

Diante desse novo impasse, seu último desafio será aplicar seu conhecimento sobre como se calcula uma viga compensando com a adição de armadura na região comprimida, a falta de seção transversal. Nesse último desafio você deverá recalcular a viga V4 para seção retangular, mas agora com o que chamamos de armadura dupla. Bons estudos!

# Seção 2.1

## Conceito de vigas

### Diálogo aberto

Finalizada a primeira unidade, você já tem todo embasamento teórico necessário para adquirir seus conhecimentos sobre elementos estruturais.

Iniciaremos nessa seção com os estudos das vigas e daremos continuidade ao seu projeto de Belo Horizonte. Agora, com todos os parâmetros dos materiais e ações definidos, você iniciará o lançamento das formas no software. Lançar formas significa posicionar os pilares, as vigas e definir os painéis das lajes, sobre a arquitetura do prédio.

Os pilares já foram definidos pela arquitetura e você fez a distribuição das vigas e lajes. Todas as vigas estão apoiadas em pilares de seção 20x20 cm e você adotou para as vigas uma seção transversal para início dos cálculos de 20 cm de largura e 40 cm de altura

Seu projeto do primeiro pavimento contempla 5 vigas, e após o processamento pelo software o momento fletor de cálculo resultante da viga V4, que é bi apoiada e também a viga mais carregada do projeto, pois recebe os carregamentos das lajes L1 e L2, foi de  $M_d = 7280 \text{ kN} \times \text{cm}$  e a área de aço resultou em aproximadamente  $6 \text{ cm}^2$ .

Os parâmetros adotados por você em função da agressividade ambiental foram: cobrimento das armaduras de 3 cm; brita de 19 mm; concreto classe C25; e aço CA-50.

De posse do relatório de cálculo, você verifica que não houve nenhum alerta sobre o dimensionamento desta viga V4, isso significa que o dimensionamento foi realizado no ELU e a estabilidade está garantida.

Diante do resultado positivo, você passou para a etapa de verificação do detalhamento das armaduras longitudinais na seção transversal, e constatou que foram utilizadas na V4, três barras de 16 mm de diâmetro, dispostas conforme a Figura 2.1.

Nenhuma outra armadura longitudinal foi detalhada, exceto a armadura construtiva na face superior da viga com 2 barras de 6,3 mm de diâmetro.

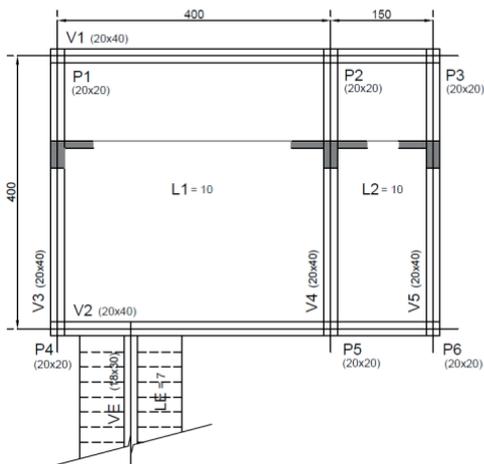
Sabendo que os estribos (armaduras transversais) resultaram em diâmetro de 6,3 mm, quais suas observações a respeito de do detalhamento das armaduras longitudinais desta viga V4?

Figura 2.1 | Detalhamento da viga V4



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 2.2 | Projeto das formas do primeiro pavimento - medidas em centímetros



Fonte: elaborada pela autora.

Fique atento a essa seção, ela apresenta os requisitos da norma brasileira quanto aos espaçamentos entre as barras longitudinais dispostas no detalhamento da seção transversal das vigas. Boa sorte e bons estudos!

### Introdução

No estudo das estruturas de concreto armado, os principais elementos estruturais de uma edificação são as vigas, as lajes e os pilares, como mostra a Figura 2.3 a seguir.

Figura 2.3 | Ilustração dos principais elementos estruturais



Fonte: <<https://shutr.bz/2LrMrWH>>. Acesso em: 17 jul. 2017.

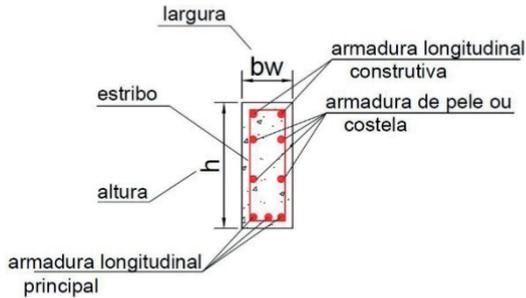
### Definição de viga

Segundo a NBR-6118, itens 14.4.1.1 e 14.4.1 respectivamente, as vigas são elementos lineares em que a flexão é preponderante e os elementos lineares são aqueles em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal (ABNT, 2014).

Nessa primeira seção da Unidade 2, iremos focar nas características geométricas das vigas, incluindo as armaduras longitudinais de flexão, armaduras de pele e armaduras mínimas, como mostra a Figura 2.4.

Os estribos, são armaduras transversais, seu cálculo e dimensionamento serão vistos no livro estruturas de concreto II.

Figura 2.4 | Seção transversal de uma viga



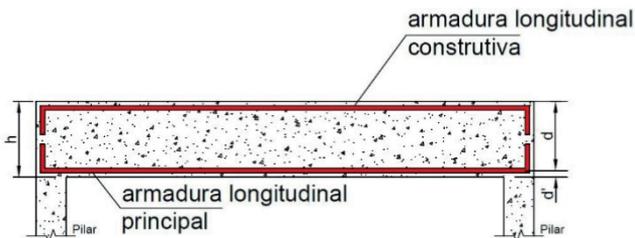
Fonte: elaborada pela autora.

Normalmente a largura da viga ( $b_w$ ) é definida em função da espessura da parede por onde ela passará. A norma brasileira NBR-6118, item 13.2.2, recomenda a espessura mínima de 12 cm para vigas, podendo ser reduzido para 10 cm em casos excepcionais, sempre respeitando o alojamento das armaduras, interferência com outras armaduras, espaçamentos e recobrimentos (ABNT, 2014). O lançamento do concreto e a vibração devem sempre atender a norma NBR 14931 (ABNT, 2004), independente da espessura da viga.

A altura da viga ( $h$ ), depende de vários fatores, como o comprimento do vão, as cargas atuantes e a resistência do concreto.

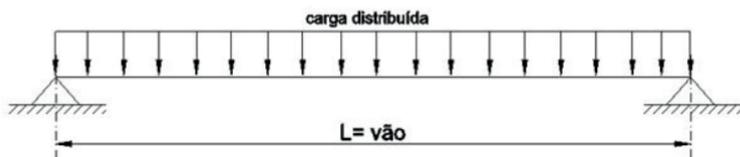
O cálculo inicial de uma viga é feito por meio de um pré-dimensionamento da sua altura. Normalmente para prédios residenciais e de escritórios, utiliza-se a altura das vigas como 1/12 do vão ( $L$ ), ilustrado nas Figuras 2.5 e 2.6

Figura 2.5 | Vista lateral de uma viga bi apoiada



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 2.6 | Esquema estático da viga da Figura 2.5



Fonte: elaborada pela autora.

## Espaçamento vertical e horizontal

Como podemos verificar, na Figura 2.5 temos a armadura longitudinal principal. Essa armadura longitudinal que se encontra na parte tracionada da viga é a responsável por absorver os esforços de tração na flexão.

Após o cálculo da armadura longitudinal principal de uma viga, precisamos transformar a área de aço calculada em barras de aço, que serão dispostas dentro da seção transversal da viga.

A disposição da armadura na seção transversal, deve ser tal que, permita que o concreto entre pela forma e envolva todas as barras, para isso devemos atender aos espaçamentos mínimos entre as faces das barras, conforme a Figura 2.7.

A norma NBR-6118, item 18.3.2.2, define que o espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, conforme a Tabela 2.1 e espaçamentos verticais mínimos conforme a Tabela 2.2.

Tabela 2.1 | Espaçamento mínimo na direção horizontal ( $a_h$ )

$\geq 20 \text{ mm ou } 2 \text{ cm};$
$\geq \text{diâmetro da barra } \phi_l;$
$\geq 1,2 \text{ vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo (brita).}$

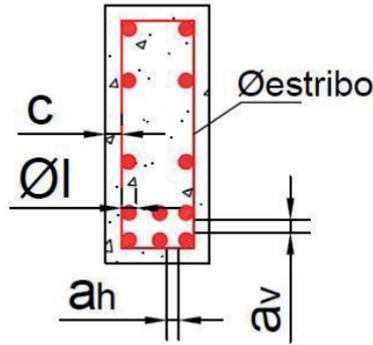
Fonte: ABNT (2014, p.146).

Tabela 2.2 | Espaçamento mínimo na direção vertical ( $a_v$ )

$\geq > 20 \text{ mm ou } 2 \text{ cm};$
$\geq \text{diâmetro da barra } (\phi_l);$
$\geq 0,5 \text{ vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo (brita).}$

Fonte: ABNT (2014, p.147).

Figura 2.7 | Seção transversal - espaçamentos mínimos entre faces das barras de aço



Fonte: elaborada pela autora.



### Exemplificando

Para uma viga de 20 cm de largura ( $b_w$ ), obteve-se no cálculo da armadura longitudinal principal 3 barras de 16 mm de diâmetro. Sabe-se que o cobrimento das armaduras ( $c$ ) é de 3,5 cm; os estribos ( $\phi_t$ ) são de 6,3 mm de diâmetro; e a brita tem diâmetro de 2 cm.

É possível colocar as 3 barras de 16 mm em apenas uma camada?

Resp.: verifica-se o espaçamento horizontal entre as barras:

$$a_h = \frac{b_w - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3,5 + 2 \times 0,63 + 3 \times 1,6)}{2} = 3,47 \text{ cm}$$

Espaçamento horizontal mínimo da norma  $a_h$  :

$$3,47 \text{ cm} \geq 2 \text{ cm}$$

$$3,47 \text{ cm} \geq \phi_l = 1,6 \text{ cm};$$

$$3,47 \geq (1,2 \times 2) = 2,4 \text{ cm}$$

Sim, é possível colocar as 3 barras de 16 mm na primeira camada, porque o espaçamento horizontal ( $a_h$ ) atende aos requisitos da NBR-6118 (as unidades estão em centímetros).

A norma brasileira NBR-6118, item 17.3.5.2, estabelece uma taxa de armadura longitudinal mínima ( $\rho_{min}$ ) para as vigas em função da resistência à compressão do concreto (ABNT, 2014).

Conhecendo a taxa e a área da seção de concreto, podemos dimensionar a armadura mínima. A principal função da armadura mínima é evitar rupturas frágeis (bruscas) na peça estrutural, fazendo com que ela apresente uma deformação razoável antes de entrar em colapso.

Quando calculamos uma viga, precisamos verificar se a área de aço obtida no cálculo é maior ou igual a armadura mínima estabelecida pela norma. Caso seja menor, devemos utilizar a armadura mínima

$$\rho_{min} = \frac{A_{s,min}}{A_c} \text{ , portanto, a armadura mínima equivale a:}$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c \text{ .}$$

Sendo a taxa de aço  $\rho_{min}$ , pode ser obtido na Tabela 2.3 em função do valor do  $f_{ck}$

$A_c$  = equivale a área de concreto da seção transversal:

$$A_c = bw \times h$$

Tabela 2.3 | Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas - Aço CA-50

Forma da seção	Valores de $\rho_{min} = (A_{s,min}/A_c)$ em << % >>									
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Retangular	0,15	0,15	0,15	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226

Fonte: ABNT-6118 (2014, p.130).



Refleta

Lembrando que a área de um círculo equivale a:  $A = \frac{\pi \times d^2}{4}$ , quantas barras de aço de 10 mm serão necessárias para uma área de **2,10 cm<sup>2</sup>** ?



Qual será a armadura longitudinal mínima para uma viga de seção  $30 \times 60$  cm e  $f_{ck} = 30$  MPa?

$$\text{Resp.: } A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c$$

Para  $f_{ck} = 30$  MPa, a taxa na Tabela 2.3:  $\rho_{min} = 0,15\%$

$$A_{s,min} = 0,15\% \times 30 \times 60$$

$$A_{s,min} = 2,70 \text{ cm}^2$$

### Armadura de pele

A armadura de pele ou costela é aquela colocada na lateral das vigas e é utilizada para prevenir a fissuração nessa região.

A norma brasileira NBR-6118, item 17.3.5.2.3, estabelece que armadura de pele seja utilizada em vigas com altura maiores que 60 cm (ABNT, 2014).

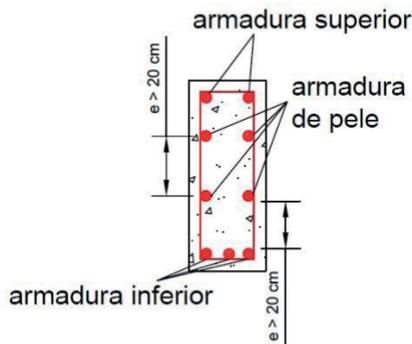
A armadura mínima de pele deve ser 0,10% da área de concreto da seção transversal ( $A_c$ ) em cada face (lateral) da viga.

As barras de aço devem ser CA-50 ou CA-60 e o espaçamento (e) entre as barras não devem ser maiores que 20 cm.

Cálculo da armadura de pele:

$$A_{sp,face} = 0,10\% \times bw \times h$$

Figura 2.8 | Seção transversal - armadura de pele



Fonte: elaborada pela autora.



## Exemplificando

Qual deverá ser a armadura de pele para uma viga de  $20 \times 80 \text{ cm}$  ?

Resp.:  $A_{sp,face} = 0,10\% \times bw \times h$  ;

$$A_{sp,face} = 0,10\% \times 20 \times 80 ;$$

$$A_{sp,face} = 1,60 \text{ cm}^2 \text{ em cada face.}$$



## Assimile

Os diâmetros ou bitolas comerciais mais utilizados nas estruturas de concreto armado são:  $\phi 5 \text{ mm}$ ;  $\phi 6,3 \text{ mm}$ ;  $\phi 8 \text{ mm}$ ;  $\phi 10 \text{ mm}$ ;  $\phi 12,5 \text{ mm}$ ;  $\phi 16 \text{ mm}$ ;  $\phi 20 \text{ mm}$ ;  $\phi 25 \text{ mm}$



## Pesquise mais

A maneira como uma viga é detalhada é tão importante quanto o cálculo da armadura, por isso, sugerimos que você se aprofunde mais em detalhamentos de armaduras, consultando o livro PORTO, PORTO, T; FERNANDES, D. **Curso Básico de Concreto Armado Conforme NBR 6118/2014**. São Paulo: Oficina de Textos, 2015, p. 42 e 43. Disponível na Biblioteca Virtual.

## Sem medo de errar

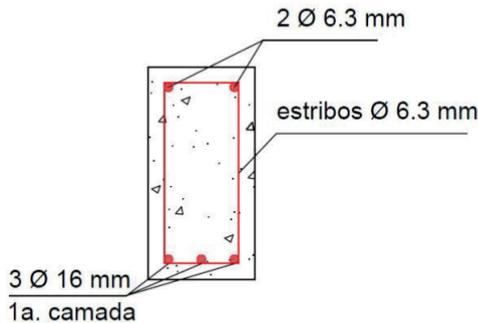
Agora que você já sabe quais são as armaduras longitudinais necessárias e mínimas em uma viga e como elas devem ser distribuídas dentro da seção transversal, fica fácil fazer o detalhamento, atendendo aos espaçamentos determinados pela norma brasileira.

Voltando para o desafio inicial desta seção, você deve checar o detalhamento da viga mais carregada do projeto, a V4, dizendo suas primeiras observações sobre as armaduras longitudinais apresentadas na Figura 2.1.

Relembrando que você já fez o lançamento das formas do primeiro pavimento da lavanderia no software, realizou o processamento dos dados e através do relatório gerado, não encontrou inconsistências ou avisos de dimensionamento

Os parâmetros adotados por você no início do projeto em função da agressividade ambiental foram: cobertura das armaduras de 3 cm, brita de 19 mm, concreto classe C25 e aço CA-50.

Figura 2.1 | Seção transversal - detalhamento da viga V4



Fonte: elaborada pela autora.

Resposta:

- A primeira observação é que a viga atende ao requisito sobre armadura de pele. Como sua altura é inferior a 60 cm, não há necessidade dessa armadura, portanto, o detalhamento está ok!

- Verificação de armadura mínima: verificamos se armadura principal longitudinal ( $A_s = 6 \text{ cm}^2$ ) de  $3 \phi 16 \text{ mm}$ , é maior ou igual a armadura mínima para essa seção transversal de 20x40 cm e  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ .

Cálculo da armadura mínima:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c$$

$$A_{s,min} = 0,15\% \times bw \times h$$

$$A_{s,min} = 0,15\% \times 20 \times 40$$

$$A_{s,min} = 1,20 \text{ cm}^2$$

Lembrando que o  $\rho_{min} = 0,15\%$ , foi obtido na Tabela 2.3, em função da resistência à compressão do concreto de  $25 \text{ MPa}$ .

$A_s > A_{smin}$ , portanto, o detalhamento atende ao requisito de armadura mínima. Vamos à verificação dos espaçamentos entre as faces das barras.

Para três barras de 16 mm em uma única camada, teremos o seguinte espaçamento horizontal:

$$a_h = \frac{bw - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 3 \times 1,6)}{2}$$

$$a_h = 3,97 \text{ cm}$$

De acordo com a NBR-6118, o espaçamento horizontal deve ser, conforme Tabela 2.1:

$$a_h \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_h \geq \phi l = 1,6 \text{ cm}$$

$$a_h \geq 1,2 \times \phi_{\text{agregado}} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm}$$

Conclusão: o detalhamento apresentado está dentro dos parâmetros da norma. Sobre a possibilidade de outro detalhamento, a resposta é sim. Podemos utilizar outros diâmetros para uma área de aço aproximada. Por exemplo:

Para a área de  $6 \text{ cm}^2$ , podemos usar cinco barras de 12,5 mm. Nesse caso no lugar de  $6 \text{ cm}^2$ , estaríamos usando um pouco a mais de aço, conforme demonstração:

Cálculo da área de 1 barra de 12,5 mm:

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4}$$

$$A = \frac{\pi \times 1,25^2}{4}$$

$A = 1,23 \text{ cm}^2$  Se 1 barra de diâmetro de 12,5 mm tem área de aço igual a  $1,23 \text{ cm}^2$ , 5 barras terão a área igual a:

$$A_{\text{total}} = 5 \times 1,23 = 6,15 \text{ cm}^2 > A_{s,min} = 1,20 \text{ cm}^2 \text{ está ok!}$$

Quando usamos mais barras devemos verificar novamente os espaçamentos mínimos.

Espaçamento horizontal, considerando quatro barras de 12,5 mm na primeira camada e uma barra na segunda camada:

$$a_h = \frac{bw - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 4 \times 1,25)}{3}$$

$$a_h = 2,58 \text{ cm}$$

De acordo com a NBR-6118, o espaçamento horizontal deve ser, conforme Tabela 2.1:

$$a_h \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_h \geq \phi l = 1,25 \text{ cm}$$

$a_h \geq 1,2 \times \phi_{\text{agregado}} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm}$ . Ou seja, o detalhamento nessa segunda solução também estaria ok. Como teremos uma barra na segunda camada, vamos verificar o espaçamento mínimo vertical:

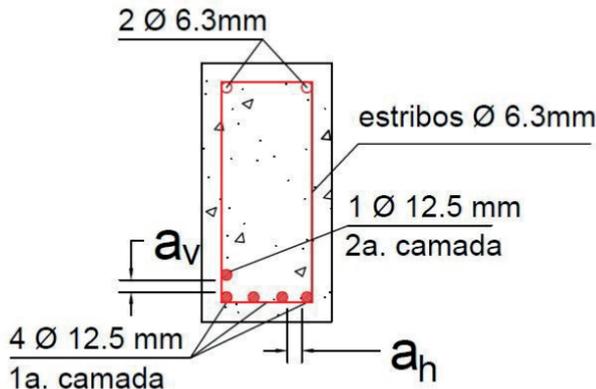
De acordo com a NBR-6118, o espaçamento mínimo vertical deve ser, conforme Tabela 2.2:

$$a_v \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_v \geq \phi l = 1,25 \text{ cm}$$

$a_v \geq 0,5 \times \phi_{\text{agregado}} = 0,5 \times 1,9 = 0,95 \text{ cm}$ . Portanto, o espaçamento vertical final deve ser  $a_v = 2 \text{ cm}$ . Assim, seria possível uma ou mais opções de detalhamento, conforme a Figura 2.9.

Figura 2.9 | Seção transversal - detalhamento da V4 com 5 barras de 12,5 mm



Fonte: elaborada pela autora.

## Observação importante:

As possibilidades de detalhamento são diversas e embora utilizar duas ou mais camadas satisfaça as condições da norma, devemos sempre evitar a utilização de mais de uma camada. Quando colocamos uma camada adicional, estamos mudando o centro de gravidade das armaduras e, com isso, nossa altura útil ( $d$ ) diminui!

Quando diminuimos a altura útil, devemos recalcular a armadura longitudinal principal. Esse assunto será tratado posteriormente.

## Avançando na prática

### Armadura de pele

#### Descrição da situação-problema

Você está trabalhando para uma montadora de veículos e precisa reformar um galpão onde são fabricadas as peças da ferramentaria.

Haverá um adicional de carga para a nova ponte rolante e, com isso, você deve aumentar a altura da viga que receberá essa carga.

Após os cálculos, você obteve uma seção de viga de 30x70, armada com 3 barras de 20 mm na face inferior; 3 barras de 8 mm na face superior; estribos de 6,3 mm; e cobrimento das armaduras de 3,5 cm.

Qual a área de armadura de pele necessária para essa viga e o seu detalhamento?

#### Resolução da situação-problema

A armadura de pele necessária, para cada face da viga, será:

$$A_{sp,face} = 0,10\% \times bw \times h$$

$$A_{sp,face} = 0,10\% \times 30 \times 70$$

$$A_{sp,face} = 2,10 \text{ cm}^2 \text{ por face.}$$

Se utilizarmos barras com diâmetro de 10 mm, vamos precisar de 3 barras de 10 mm em cada face da viga, conforme cálculo a seguir:

Cálculo da área de 1 barra de 10 mm:

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4}$$

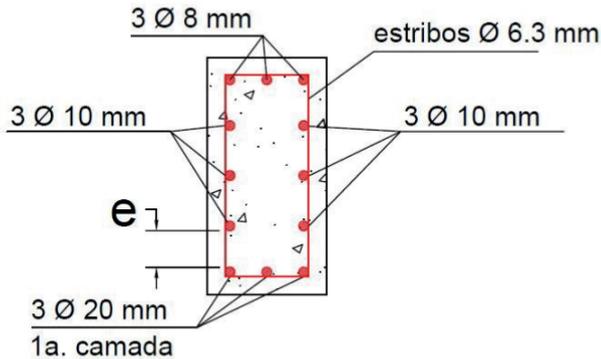
$$A = \frac{\pi \times 1^2}{4}$$

$$A = 0,78 \text{ cm}^2$$

Cálculo de 3 barras de 10 mm:

$$3 \times 0,78 = 2,34 \text{ cm}^2 > 2,10 \text{ cm}^2$$

Figura 2.10 | Detalhamento da viga



Fonte: elaborada pela autora.

O espaçamento ( $e$ ) deve ser  $\leq 20 \text{ cm}$ , segundo a NBR-6118.

A verificação do espaçamento da armadura de pele é similar a verificação do espaçamento horizontal das barras longitudinais da armadura principal, no entanto, para armadura de pele o espaçamento é na vertical:

$$e = \frac{h - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{ barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{ barras} - 1}$$

$$e = \frac{70 - (2 \times 3,5 + 2 \times 0,63 + 1 \times 2 + 1 \times 0,8 + 3 \times 1)}{4}$$

$$e = 14 \text{ cm} < 20 \text{ cm} \quad \text{ok!}$$

## Faça valer a pena

**1.** A construtora que você trabalha foi contratada para executar a construção de um shopping center no interior de São Paulo. Esse será o maior shopping do Brasil e terá 5 subsolos de garagem.

Você foi designado como engenheiro responsável pela obra que já está com todos os projetos detalhados, inclusive a fundação, que foi concebida com vigas robustas.

As vigas da fundação têm seção transversal de 40x70 cm e  $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ . Qual deverá ser a armadura mínima para essa seção de viga?

- a)  $4,20 \text{ cm}^2$  ;
- b)  $5,01 \text{ cm}^2$  ;
- c)  $6,33 \text{ cm}^2$  ;
- d)  $7,00 \text{ cm}^2$  ;
- e)  $7,35 \text{ cm}^2$  .

**2.** O mezanino de um prédio de estocagem de materiais foi concebido com vigas e lajes em concreto armado. Esses elementos estruturais estarão sujeitos a uma série de ações que resultarão em esforços de flexão. As vigas, são todo bi apoiadas, com vão de 6 m de comprimento e seção transversal de 25x50 cm.

Sabendo-se que as vigas foram dimensionadas e resultaram em uma área total de aço de  $8 \text{ cm}^2$  para armadura longitudinal principal, quantas barras de aço de diâmetro de 16 mm serão necessárias para armar essa viga?

- a)  $2\phi 16 \text{ mm}$  ;
- b)  $3\phi 16 \text{ mm}$  ;
- c)  $4\phi 16 \text{ mm}$  ;
- d)  $5\phi 16 \text{ mm}$  ;
- e)  $6\phi 16 \text{ mm}$  .

**3.** Agora você está participando de um projeto estrutural de um edifício de 15 andares, sendo que são 14 pavimentos tipo e uma cobertura. As vigas do pavimento tipo e da cobertura têm dimensão de 20x40 cm de seção transversal e, após o processamento no software de cálculo, verificou-se que as vigas resultaram em uma área de aço total de  $7,3 \text{ cm}^2$ , para a armadura longitudinal principal.

Sabendo-se que o cobrimento utilizado para as armaduras é de 3 cm, os estribos são de 5 mm de diâmetro e a brita 1,9 cm, pergunta-se: como as armaduras longitudinais ficarão dispostas na seção transversal se adotarmos bitola de 12,5 mm?

- a)  $6\phi 12,5\text{ mm}$  na primeira camada;
- b)  $3\phi 12,5\text{ mm}$  na primeira camada e  $2\phi 12,5\text{ mm}$  na segunda camada;
- c)  $4\phi 12,5\text{ mm}$  na primeira camada e  $1\phi 12,5\text{ mm}$  na segunda camada;
- d)  $4\phi 1,25\text{ mm}$  na primeira camada e  $4\phi 12,5\text{ mm}$  na segunda camada;
- e)  $4\phi 12,5\text{ mm}$  na primeira camada e  $2\phi 12,5\text{ mm}$  na segunda camada.

## Seção 2.2

### Dimensionamento em armadura simples

#### Diálogo aberto

Vamos iniciar o cálculo e dimensionamento dos primeiros elementos estruturais. Nessa seção estudaremos as vigas de seção retangular com armadura simples.

Com todo conhecimento adquirido na primeira unidade e na seção anterior, em que você aprendeu a detalhar as armaduras longitudinais na seção transversal da viga, você está pronto para avançar mais um passo em seu projeto.

Na Seção 1, você fez o lançamento das formas no software de cálculo, processou os dados de entrada e não constatou problemas de dimensionamento no relatório gerado.

Seu desafio foi verificar manualmente a viga mais carregada do projeto, a viga V4, e com isso você aprendeu que há possibilidades diferenciadas de detalhamento, dependendo da bitola escolhida, no entanto, as verificações normativas de espaçamento entre barras e armaduras mínimas sempre devem ser respeitadas.

Nessa seção, você aprenderá como é feita a verificação de uma viga no ELU, o cálculo e o dimensionamento da armadura principal longitudinal, e então poderá cumprir com o novo desafio.

Lembramos que os softwares utilizados no cálculo estrutural são testados e checados constantemente por uma equipe técnica que recebe sugestões de alteração dos usuários, de modo a manter as boas práticas da engenharia. É responsabilidade do engenheiro checar se os resultados gerados por um software estão de acordo com a norma e as boas práticas.

Nesse contexto, seu novo desafio será verificar o dimensionamento da armadura longitudinal da viga V4 manualmente e, com isso, confirmar o detalhamento checado na seção anterior.

Nesse primeiro processamento, as vigas foram dimensionadas para seção retangular com armadura simples, com dimensões da seção transversal de 20 cm de largura e 40 cm de altura, o momento

fletor de cálculo dessa viga, pela análise global do software, resultou em  $M_d = 7280 \text{ kN} \times \text{cm}$ , conforme o momento característico fornecido na Figura 2.11, e a área de aço resultou em  $6 \text{ cm}^2$ .

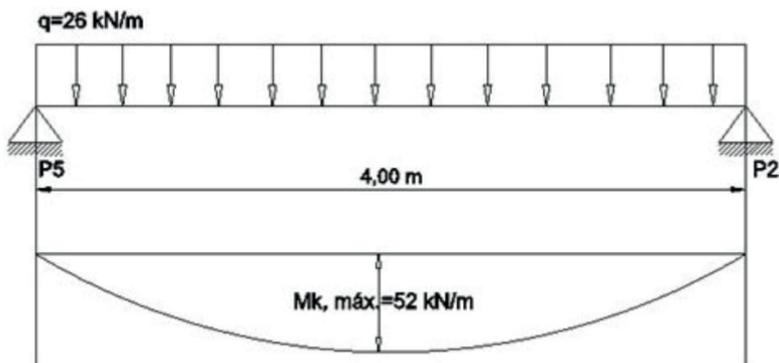
Os seus dados de entrada foram: cobrimento da armadura utilizado em função da classe de agressividade ambiental moderada de 3 cm; concreto classe C25; diâmetro da brita de 19 mm; aço CA-50; e estribos de 6,3 mm de diâmetro.

É importante que você saiba que as armaduras longitudinais são dimensionadas em função dos momentos máximos (positivos e/ou negativos) das vigas.

Fique atento às equações de equilíbrio que serão apresentadas nessa seção. O entendimento do conceito permitirá que você resolva seu desafio e muitas outras questões sobre vigas.

Para se lembrar da planta de formas e do detalhamento da V4, reveja as Figuras 2.2 e 2.1, na Seção 1.

Figura 2.11 | Diagrama de momento fletor da viga V4



Fonte: elaborada pela autora.

## Não pode faltar

### Introdução

Vamos iniciar o aprendizado sobre o cálculo e dimensionamento da área de armadura longitudinal necessária para que uma viga absorva os esforços solicitantes, gerados pelas ações atuantes na estrutura e mantenha sua integridade.

As ações atuantes, como vimos na Unidade 1, são normalmente: o peso próprio da viga somado às reações de apoio das lajes que estão apoiadas nessa viga, e carga de alvenaria sobre a viga. Esses são os carregamentos mais comuns em prédios residenciais, no entanto, cada projeto deve ser analisado de forma independente.

Para que seja possível estabelecer critérios de determinação dos esforços resistentes de uma viga, algumas hipóteses básicas devem ser consideradas, conforme disposto no item 17.2 da NBR-6118 (ABNT, 2014):

### **Hipóteses básicas de equilíbrio**

- As seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- A deformação das barras de aço é a mesma do concreto no seu entorno;
- As tensões de tração no concreto devem ser desprezadas no ELU;
- A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola - retângulo, visto na Unidade 1, Seção 3, Figura 1.14.
- A tensão na armadura deve ser obtida pelo diagrama tensão - deformação do aço, visto na Unidade 1, Seção 1, Figura 1.2.
- O estado limite último (ELU) é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios de deformação, visto na Unidade 1, Seção 3, Figura 1.15.

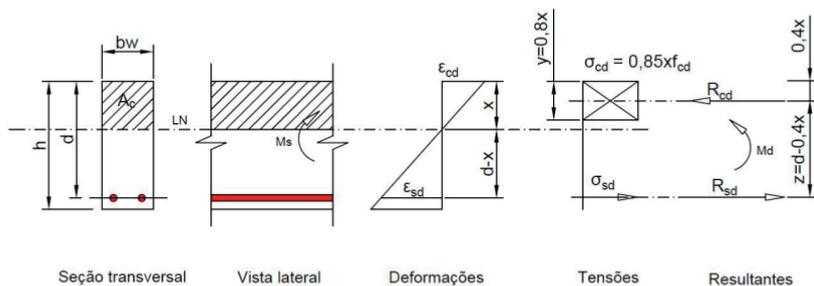
### **Equilíbrio da seção retangular para armadura simples**

Uma viga com seção retangular e armadura simples é aquela que a armadura principal longitudinal é necessária apenas na região tracionada, enquanto que as tensões de compressão são resistidas somente pelo concreto.

Para o caso de uma viga bi apoiada, por exemplo, a armadura principal longitudinal deverá estar na face inferior (região tracionada) da viga e para que seja possível a colocação dos estribos, são dispostas barras construtivas, sem função estrutural, na face superior (região comprimida).

Os esforços internos resistentes são formulados pelas equações de equilíbrio das forças normais,  $\Sigma N = 0$ , e dos momentos fletores  $\Sigma M = 0$ , conforme a Figura 2.12.

Figura 2.12 | Distribuição de tensões, deformações e resultantes - viga retangular com armadura simples - (equacionamento válido para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ )



Fonte: elaborada pela autora.

Nomenclaturas:

$A_c$  = área de concreto na zona comprimida - ( $\text{cm}^2$ )

$A_s$  = área da armadura na zona tracionada - ( $\text{cm}^2$ )

$bw$  = largura da viga - ( $\text{cm}$ )

$h$  = altura da viga - ( $\text{cm}$ )

$d = h - d'$  = altura útil da viga - ( $\text{cm}$ )

$d'$  = distância da face tracionada até o c.g. (centro de gravidade) da armadura tracionada; normalmente usa-se:  $c + 1 \text{ cm}$

$c$  = cobrimento da armadura

$LN$  = linha neutra - ( $\text{cm}$ )

$M_s$  = momento solitante - ( $\text{kN} \times \text{cm}$ )

$\epsilon_{cd}$  = deformação do concreto - encurtamento - ( $\%$ )

$\epsilon_{sd}$  = deformação do aço - alongamento - ( $\%$ )

$X$  = posição da LN - ( $\text{cm}$ )

$\sigma_{cd}$  = tensão de cálculo do concreto - ( $\text{kN} / \text{cm}^2$ )

$\sigma_{sd} = f_{yd}$  = tensão de cálculo no aço - ( $\text{kN} / \text{cm}^2$ )

$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$  = tensão de cálculo no aço - ( $\text{kN} / \text{cm}^2$ )

$f_{yk}$  = tensão característica do aço - ( $\text{kN} / \text{cm}^2$ )

$\gamma_s = 1,15$  = coeficiente de ponderação da resistência do aço - adimensional

$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$  = resistência de cálculo do concreto à compressão - ( $\text{kN} / \text{cm}^2$ )

$\gamma_c = 1,4 =$  coeficiente de ponderação da resistência do concreto - adimensional

$R_{cd} =$  resultante de cálculo do concreto à compressão - (kN)

$R_{sd} =$  resultante de cálculo do aço à tração - (kN)

$M_d = M_k \times \gamma_f =$  momento resistente = momento de cálculo - (kN × cm)

$M_k =$  momento característico - (kN × cm)

$\gamma_f = 1,4$  - coeficiente de ponderação das ações - adimensional

$z =$  braço de alavanca - (cm)



### Assimile

Dizer que uma viga foi armada com armadura simples, significa que não existe armadura trabalhando na face comprimida da viga. As tensões de compressão são absorvidas apenas pelo concreto. A armadura colocada na face comprimida é denominada porta estribos ou armadura construtiva.

### Equilíbrio de forças normais:

Para que haja equilíbrio das forças normais, a somatória deve ser igual a zero:

$\Sigma N = 0$ . Portanto, a resultante de cálculo do concreto deve ser igual a resultante de cálculo do aço:  $R_{cd} = R_{sd}$ . Sabemos que tensão é igual a força dividida por área, assim, podemos obter a resultante de cálculo do concreto:

$\sigma_{cd} = R_{cd} / A_c$ , portanto:

$$R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c$$

Da seção transversal, Figura 2.12, temos a área de concreto na zona comprimida:

$$A_c = (0,8 \times X) \times bw$$

Do diagrama de tensões, Figura 2.12, sabemos:

$$\sigma_{cd} = 0,85 \times f_{cd}$$

Portanto, a resultante de cálculo do concreto à compressão será:

$$R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c$$

$$R_{cd} = (0,85 \times f_{cd}) \times (0,8 \times X \times bw)$$

$$R_{cd} = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd}$$

A resultante de cálculo do aço à tração será:

$$R_{st} = \sigma_{sd} \times A_s$$

$$\sigma_{sd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15}$$

### Equilíbrio dos momentos fletores

As resultantes do concreto e do aço, Figura 2.12, formam um binário, que constituem o momento resistente ou momento de cálculo ( $M_d$ ). A soma desses momentos resulta em zero.

$$\Sigma M = 0.$$

Sabemos que:

$$M_d = R_{cd} \times z \text{ e}$$

$$M_d = R_{sd} \times z$$

$z = (d - 0,4 \times X)$ , teremos:

Equação 1:

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

Equação 2:

$$M_d = \sigma_{sd} \times A_s \times (d - 0,4 \times X)$$

### Cálculo da área de armadura simples

O cálculo das armaduras das vigas é feito a partir das equações de equilíbrio dos momentos fletores demonstradas.

O primeiro passo para calcular a armadura longitudinal de uma viga é verificar se a posição ( $X$ ) da linha neutra da viga está dentro de um dos limites dos domínios 2 ou 3, conforme vimos na Unidade 1, Seção 3. Para isso, utilizamos a equação 1 e determinamos o valor de  $X$ :

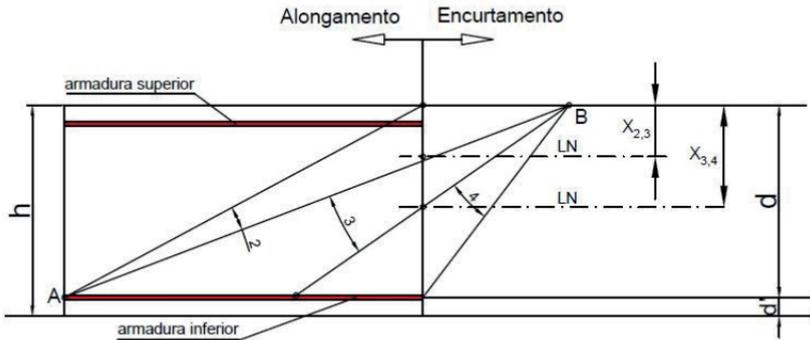
$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

Com o valor de  $X$ , verificamos em qual domínio está a LN:

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \text{ - domínio 2}$$

$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d$  - domínio 3. A Figura 2.13 mostra os limites para os domínios.

Figura 2.13 | Posição da linha neutra - domínios 2, 3 e 4



Fonte: elaborada pela autora.

Além da análise dos domínios, a NBR-6118, no item 14.6.4.3, recomenda que seja verificada a relação entre a posição da linha neutra ( $X$ ) e a altura útil ( $d$ ) (ABNT, 2014):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{MPa}.$$



Refleta

Analisando as incógnitas das equações

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \quad \text{e}$$

$M_d = \sigma_{sd} \times A_s \times (d - 0,4 \times X)$ , você saberia dizer quais parâmetros poderiam ser alterados caso a verificação dos domínios resultasse no domínio 4 e a viga tivesse que ser redimensionada para os domínios 2 ou 3?

Após as verificações quanto ao domínio, utilizamos a equação,  $M_d = \sigma_{sd} \times A_s \times (d - 0,4 \times X)$  para determinar a área de armadura longitudinal necessária para nossa viga:

$$M_d = \sigma_{sd} \times A_s \times (d - 0,4 \times X)$$

Isolando o  $A_s$ , teremos:

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)}.$$

**Fique atento:** as unidades utilizadas nas equações são em kN e cm.

Após o cálculo da armadura necessária, verificamos se ela é

maior que a armadura mínima. Se for menor, usa-se a armadura mínima, conforme visto na Seção 1, Tabela 2.1.



### Exemplificando

Para uma seção retangular de concreto sob ação de um momento fletor positivo, determinar a armadura longitudinal necessária da viga, sabendo que a largura é 20 cm; a altura 50 cm; o cobrimento é 2,0 cm; o aço é do tipo CA50; os estribos são 5 mm de diâmetro e o concreto é da classe C20.

**Resolução:**

**1- Determinar o momento de cálculo:**

$$M_d = M_k \times \gamma_f$$

$$M_d = 11000 \times 1,4 \text{ ou } M_d = 15400 \text{ kN} \times \text{cm}$$

**2- Determinar a posição da linha neutra:**

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$15400 = 0,68 \times 20 \times X \times \frac{2,0}{1,4} \times (47 - 0,4 \times X)$$

$$15400 = 913,14 \times X - 7,77 \times X^2$$

$$7,77 \times X^2 - 913,14 \times X + 15400 = 0$$

Lembrando que  $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$ , temos:

$$\Delta = (-913,14)^2 - 4 \times 7,77 \times 15400 = 355192,66$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \text{ ou seja, } x = \frac{-(-913,14) \pm \sqrt{355192,66}}{2 \times 7,77}$$

$$x_1 = 97,11 \text{ cm} > h = 50 \text{ cm} \text{ - LN fora da seção.}$$

$$x_2 = 20,41 \text{ cm} < h = 50 \text{ cm} \text{ - ok!}$$

**3 - Verificação do domínio**

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \text{ - domínio 2}$$

$$20,41 \leq X_{2,3} = 0,259 \times 47$$

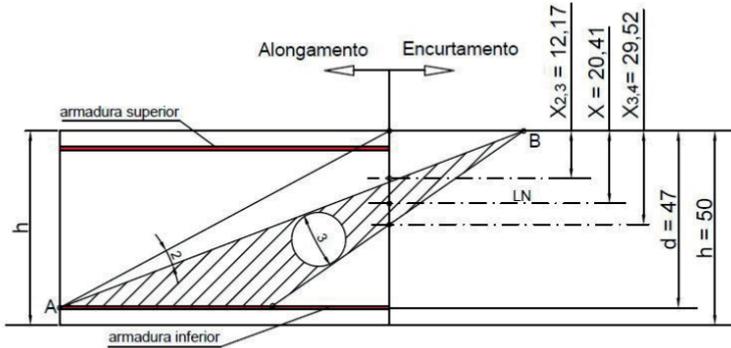
$20,41 > X_{2,3} = 12,17 \text{ cm}$  - não é domínio 2.

$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d$  - domínio 3

$20,41 \leq X_{3,4} = 0,628 \times 47$

$20,41 \leq X_{3,4} = 29,52 \text{ cm}$  - LN está no domínio 3 (Figura 2.14).

Figura 2.14 | Posição da linha neutra - domínios 2, 3 e 4.



Fonte: elaborada pela autora.

4- verificação da norma  $\beta_x = X/d \leq 0,45$

$\beta_x = 20,41/47 \leq 0,45$ . Portanto  $\beta_x = 0,43 < 0,45$  - ok!

5- Cálculo da armadura

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)}$$

$$A_s = \frac{15400}{1,15 \times (47 - 0,4 \times 20,41)} = 9,12 \text{ cm}^2$$

.Se adotarmos barras

de 20 mm, teremos:

Área de 1 barra de 20 mm vale  $A_{1\phi 20} = \frac{\pi \times d^2}{4}$ . Portanto

$A_{1\phi 20} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2$ . Para uma área de  $9,12 \text{ cm}^2$ , teremos

$3\phi 20 \text{ mm}$

## 6- Verificação da armadura mínima

$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c$ . Para a classe C20, na Tabela 2.1 (seção anterior do livro), obtemos o valor de  $\rho_{min} = 0,15\%$ .

Portanto  $A_{s,min} = \frac{0,15}{100} \times 20 \times 50$ , ou seja:

$$A_{s,min} = 1,50 \text{ cm}^2 < 9,12 \text{ cm}^2 \quad \text{- ok!}$$

## Detalhamento da seção transversal

O detalhamento da seção transversal deverá ser feito de acordo com as premissas estudadas na Seção 1 desta unidade, respeitando os espaçamentos verticais e horizontais de acordo com a NBR-6118 e incluindo armadura de pele para vigas com seção transversal maior que 60 cm.



## Exemplificando

Detalhar a seção transversal da viga do exemplificando anterior. Dados:

$A_s = 9,12 \text{ cm}^2$  adotado  $3\phi 20 \text{ mm}$ ;  $b_w = 20 \text{ cm}$  e  $h = 50 \text{ cm}$ ; cobrimento das armaduras  $c = 2,0 \text{ cm}$ ; brita 1 = 19 mm; aço CA-50; estribos:  $\phi 5 \text{ mm}$  e armadura construtiva de  $2\phi 8 \text{ mm}$ .

Resolução:

Cálculo do espaçamento entre as faces das barras horizontais:

$$a_h = \frac{b_w - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 2 + 2 \times 0,5 + 3 \times 2)}{3 - 1} = 4,50 \text{ cm}$$

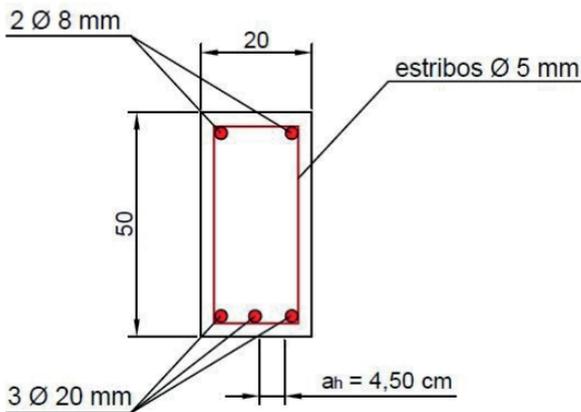
Espaçamento horizontal mínimo da norma  $a_h$  :

$$4,50 \text{ cm} \geq 2 \text{ cm ok!}$$

$$4,50 \text{ cm} \geq \ll \phi_l = 2 \text{ cm ok!}$$

$4,50 \text{ cm} \geq (1,2 \times 1,9) = 2,28 \text{ cm}$  ok! A Figura 2.15 mostra o detalhamento.

Figura 2.15 | Detalhamento



Fonte: elaborada pela autora.



Pesquise mais

Você poderá se aprofundar mais no detalhamento das armaduras passivas, visitando a Biblioteca Virtual e consultando o livro dos autores Thiago Bom Jardim e Danielle Stefane Gualberto Fernandes

PORTO, T; FERNANDES, D. **Curso Básico de Concreto Armado Conforme NBR 6118/2014**. São Paulo: Oficina de Textos, 2015.

Existem também tabelas que ajudam no detalhamento das seções. Como exemplo, temos a tabela A-4, da apostila da faculdade de engenharia da UNESP (2015, p. 77). Nela você fornece qual a bitola utilizada no seu detalhamento da armadura longitudinal, e pela área de aço ou número de barras, você verifica se a largura ( $b_w$ ) adotada, atende aos espaçamentos da norma, em função do diâmetro da brita.

Observe que a tabela vale para estribos de 6.3 mm e cobrimento de 2 cm. Para outros cobrimentos, veja a observação no final da tabela.

BASTOS, P. **Flexão normal simples** - vigas. Notas de aula. Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2JyYGif>>. Acesso em: 18 jul. 2018.

## Sem medo de errar

Agora que você já conhece as equações de equilíbrio das forças normais e momentos fletores para uma viga com seção retangular e armadura simples, e também já sabe fazer o detalhamento na seção transversal, é hora de se arriscar e colocar em prática esse aprendizado, resolvendo o desafio dessa seção, que é verificar o dimensionamento da armadura longitudinal da viga V4 manualmente, e confirmar o detalhamento da seção transversal, checado na seção anterior.

### Foram fornecidos pelo software:

Diagrama de momento fletor característico máximo:  $M_k = 5200 \text{ kN} \times \text{cm}$ . Portanto o momento de cálculo é  $M_d = 5200 \times 1,4 = 7280 \text{ kN} \times \text{cm}$ . Os estribos possuem diâmetro  $\phi 6,3 \text{ mm}$  e área longitudinal de aço:  $6 \text{ cm}^2$  (a ser verificada).

### Seus dados de entrada foram:

- Viga V4: 20x40 cm; concreto classe C25 ( $f_{ck}$ ); cobrimento das armaduras de 3 cm; brita de 19 mm; aço CA-50 ( $f_{yk}$ ) e altura útil:  $d = h - d' = 40 - (3 + 1) = 36 \text{ cm}$ .

### Resolução:

#### 1- Determinar o momento de cálculo:

$$M_d = 7280 \text{ kN} \times \text{cm} \text{ (fornecido)}$$

#### 2- Determinar a posição da linha neutra:

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$7280 = 0,68 \times 20 \times X \times \frac{2,5}{1,4} \times (36 - 0,4 \times X)$$

$$7280 = 874,29 \times X - 9,71 \times X^2$$

$9,71 \times X^2 - 874,29 \times X + 7280 = 0$ . Lembrando que  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ , temos que  $\Delta = (-874,29)^2 - 4 \cdot 9,71 \cdot 7280$  ou  $\Delta = 481627,80$ .

As raízes são dadas por  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ . Assim,

$$X = \frac{-(-874,29) \pm \sqrt{481627,80}}{2 \cdot 9,71}$$

$$x_1 = 9,28 \text{ cm} < h = 40 \text{ cm} \quad - \text{ ok!} \quad \text{E} \quad x_2 = 80,75 \text{ cm} > h = 40 \text{ cm}$$

- Desconsiderado! LN fora da seção da viga.

### 3- Verificação do domínio

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d$$

$$9,28 \leq X_{2,3} = 0,259 \times 36$$

$$9,28 < X_{2,3} = 9,32 \text{ cm} \quad - \text{ viga no domínio 2!}$$

### 4- Verificação da norma

$\beta_x = \frac{x}{d}$ . Com os dados temos que  $\beta_x = \frac{9,28}{36} \leq 0,45$ , ou  
 $\beta_x = 0,26 < 0,45$  - ok!

### 5- Cálculo da armadura

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)}. \quad \text{Utilizando os valores encontrados}$$

$$A_s = \frac{7280}{\frac{50}{1,15} \times (36 - 0,4 \times 9,28)} = 5,19 \text{ cm}^2. \quad \text{Adotado } 6 \text{ cm}^2$$

está ok, de acordo com o software. Se adotarmos barras de 16 mm, teremos que a área de 1 barra de 16 mm é  $A_{1\phi 16} = \frac{\pi \times d^2}{4}$ , portanto

$$A_{1\phi 16} = \frac{\pi \times 1,6^2}{4} = 2,00 \text{ cm}^2. \quad \text{Para uma área total de } 6 \text{ cm}^2 \text{ teremos}$$

$3\phi 16 \text{ mm}$  - ok, de acordo com o software.

### 6- Verificação da armadura mínima

$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c$ . Para uma classe de concreto C25, na Tabela 2.1 da seção anterior, obtemos o valor de  $\rho_{min} = 0,15\%$ . Assim,

$$A_{s,min} = \frac{0,15}{100} \times 20 \times 40, \text{ ou seja } A_{s,min} = 1,20 \text{ cm}^2 < 6,00 \text{ cm}^2 \quad - \text{ ok!}$$

## 7- Checagem do detalhamento:

Verificação do espaçamento entre barras horizontais segundo a norma:

$$a_h \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_h \geq \phi_l = 1,6 \text{ cm}$$

$$a_h \geq 1,2 \times \phi_{\text{agregado}} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm}$$

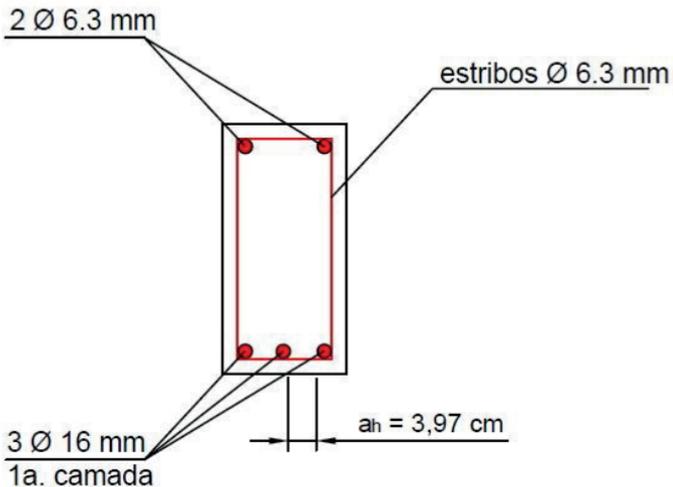
Cálculo do espaçamento horizontal:

$$a_h = \frac{bw - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 3 \times 1,6)}{2}$$

Portanto  $a_h = 3,97 \text{ cm} > 2,28 \text{ cm}$  - ok! A Figura 2.16 mostra o detalhamento final da seção.

Figura 2.16 | Detalhamento confirmado



Fonte: elaborada pela autora.

- Não necessita armadura de pele, viga com  $h < 60 \text{ cm}$ .

### Verificação de armadura simples existente.

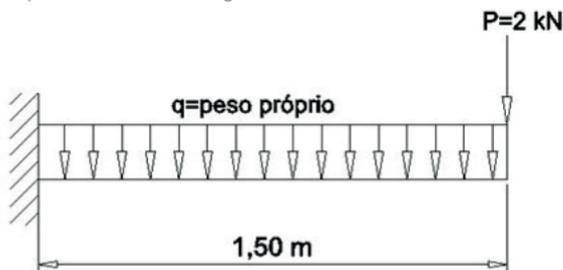
#### Descrição da situação-problema

O escritório onde você trabalha como calculista de estruturas de concreto armado venceu a licitação para um projeto de verificação estrutural. Trata-se de uma academia de ginástica, em que uma das vigas existentes irá receber uma carga adicional de 200 Kg que será colocada em sua extremidade (Figura 2.17). Atualmente esta viga não recebe carga alguma além do seu próprio peso.

A viga tem seção de 25x50 cm, está em balanço com vão de 1,5 m e foi armada com  $3\phi 12,5\text{ mm}$  na face superior. Sabe-se que o cobrimento da armadura usado foi de 3 cm e a resistência característica do concreto à compressão foi de 20 MPa.

Pergunta: a armadura existente na viga é suficiente para atender ao acréscimo de carga de  $200\text{ kg} = 2\text{ kN}$ , colocado na extremidade do balanço?

Figura 2.17 | Esquema estático da viga



Fonte: elaborada pela autora.

#### Resolução da situação-problema

Em primeiro lugar, devemos saber qual o momento atuante com a nova carga.

##### 1- Ações:

Peso próprio (p.p.) =  $bw \times h \times \rho_c$ ; massa específica do concreto armado  $\rho_c$ :  $25\text{ kN} / \text{m}^3$ .

$p.p = 0,25 \times 0,50 \times 25 = 3,125 \text{ kN} / \text{m}$ . Carga pontual adicional:  $200 \text{ kgf} = 2 \text{ kN}$

2- Cálculo do momento fletor característico:

$$M_k = -\left(\frac{q \times l^2}{2}\right) + (P \times l). \text{ Portanto}$$

$$M_k = -\left(3,125 \times 1,5 \times \frac{1,5}{2}\right) + (2 \times 1,5) = -6,5156 \text{ kNm}.$$

Ou  $-651,56 \text{ kNcm}$  (o sinal negativo do momento indica que a face tracionada é a superior).

3- Determinação do momento de cálculo

$$M_d = M_k \times \gamma_f$$

$$M_d = 651,56 \times 1,4 = 912,19 \text{ kN} \times \text{cm}$$

4- Determinação da posição da LN

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$d = h - 4 = 50 - 4 = 46 \text{ cm}$$

$$912,19 = 0,68 \times 25 \times X \times \frac{2}{1,4} \times (46 - 0,4 \times X)$$

$$912,19 = 1117,14 \times X - 9,71 \times X^2$$

$$\text{ou } 9,71 \times X^2 - 1117,14 \times X + 912,19 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c.$$

$$\text{Portanto } \Delta = (-1117,14)^2 - 4 \times 9,71 \times 912,19 = 1212572,32$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a}. \text{ Portanto } x = \frac{-(-1117,14) \pm \sqrt{1212572,32}}{2 \times 9,71}$$

$$X_1 = 114,23 \text{ cm} > 50 \text{ cm} - \text{desconsiderado!}$$

$$X_2 = 0,82 \text{ cm} < 50 \text{ cm} - \text{ok!}$$

## 5- Verificação do domínio

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d = 0,259 \times 46.$$

Portanto  $0,82 < X_{2,3} = 11,91 \text{ cm}$  - está no domínio 2, não é necessário verificar o domínio 3.

## 6- Verificação da norma

$$\beta_x = \frac{x}{d}$$

$$\beta_x = \frac{0,82}{46} \leq 0,45; \text{ portanto } \beta_x = 0,02 < 0,45 - \text{ok!}$$

## 7- Cálculo da armadura

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)}. \text{ Utilizando os dados temos que}$$

$$A_s = \frac{912,19}{\frac{50}{1,15} \times (46 - 0,4 \times 0,82)} = 0,46 \text{ cm}^2$$

A viga foi armada com  $3\phi 12,5 \text{ mm}$ . Área de 1 barra  $12,5 \text{ mm} =$

$$A_{1\phi 12,5} = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times 1,25^2}{4} = 1,23 \text{ cm}^2. \quad \text{Para } 3\phi 12,5,$$

teremos uma área de armadura total de  $3 \times 1,23 = 3,69 \text{ cm}^2 > 0,46 \text{ cm}^2$  ok!

∴ A viga existente poderá receber a carga adicional de 200 kg.

## Faça valer a pena

**1.** Para determinarmos a área necessária de armadura longitudinal de uma viga de concreto armado precisamos conhecer as dimensões da viga, a resistência característica do concreto à compressão, o cobrimento das armaduras em função da classe de agressividade ambiental e o momento fletor atuante.

O sinal do momento fletor é extremamente importante, embora nos cálculos seja utilizado o valor absoluto (sem sinal). Quando o momento é negativo, nós sabemos que a armadura longitudinal será posicionada:

- a) na face inferior da viga, porque é a face tracionada.
- b) na face inferior da viga, porque é a face comprimida.
- c) na face superior da viga, porque é a face tracionada.
- d) na face superior da viga, porque é a face comprimida.
- e) nas laterais da viga.

**2.** Após todo embasamento do curso sobre o que é o concreto armado, suas propriedades e principais parâmetros, o primeiro elemento estrutural a ser estudado são as vigas. Para iniciar o cálculo das armaduras longitudinais das vigas, é importante entender como são geradas as formulações utilizadas nos cálculos.

Para que seja possível o uso das equações de equilíbrio a partir da seção transversal, algumas hipóteses básicas são adotadas. Qual hipótese quer dizer que, mesmo que exista a deformação longitudinal da viga, transversalmente as seções se mantêm rígidas e com distribuição linear de deformações?

- a) A deformação das barras de aço é a mesma do concreto no seu entorno.
- b) As seções transversais se mantêm planas após a deformação.
- c) As tensões de tração no concreto devem ser desprezadas no ELU.
- d) A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola – retângulo.
- e) A tensão na armadura deve ser obtida pelo diagrama tensão – deformação do aço.

**3.** Uma loja de conveniências está passando por uma "retrofit" e uma de suas vigas precisa ser verificada para receber um painel luminoso. A viga é bi apoiada, com vão de 4 m e dimensões da seção de 19x45 cm; apresenta armadura longitudinal na face inferior de  $3\phi 12,5\text{ mm}$ ; classe do concreto C20; cobrimento das armaduras de 2,5 cm; e brita 1 de 19 mm.

Qual o carregamento máximo distribuído ao longo de seu comprimento, que poderá ser suportado por essa viga, incluindo o peso próprio e atendendo ao ELU?

- a)  $25\text{kN} / \text{m}$
- b) 1,93 tf/m
- c)  $0,25\text{kN} / \text{cm}$
- d)  $2500\text{Kg} / \text{m}$
- e)  $19\text{kN} / \text{cm}$

## Seção 2.3

### Dimensionamento em armadura dupla

#### Diálogo aberto

Um passo após o outro e, finalizada a seção anterior, você já sabe calcular e detalhar as seções transversais das vigas de seção retangular com armadura simples. Lembrando que viga com armadura simples é o nome que se dá para as vigas nas quais a armadura longitudinal principal está apenas na face tracionada!

Dando continuidade ao seu desafio maior, que é o projeto da lavanderia, você aprenderá como resolver uma viga que resultou no domínio 4 e que você não pode alterar sua geometria.

Estamos falando da seção retangular com armadura dupla, ou seja, vigas em que as armaduras principais estão tanto na face tracionada, quanto na face comprimida.

O projeto da lavanderia para as condições ambientais de Belo Horizonte foi finalizado com sucesso após a verificação manual da viga V4, e agora seu próximo passo será realizar as verificações das vigas para a implantação do mesmo projeto em Recife e Cascavel, com classe de agressividade ambiental forte, ou seja, o cobrimento das armaduras passará a ser de 4 cm e a resistência do concreto à compressão aos 28 dias será classe C30, de acordo com a NBR-6118.

Recife e Cascavel são regiões litorâneas, mas Cascavel, no estado do Ceará, é uma região que já registrou consideráveis abalos sísmicos. É comum diante de esforços dinâmicos termos que aumentar as dimensões dos elementos estruturais.

Após o processamento do software para as novas condições de implantação, você identificou novamente um alerta para a viga V4 mas, desta vez, não está relacionado ao detalhamento, mas sim ao dimensionamento.

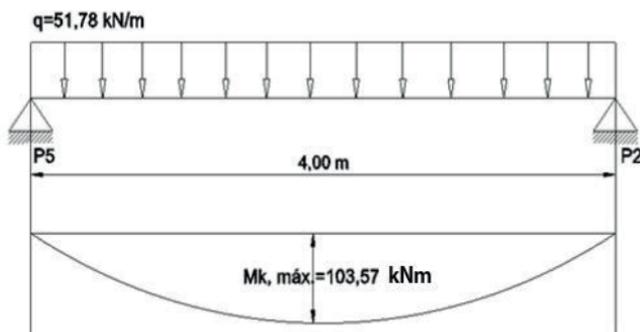
A consideração de um cobrimento maior das armaduras e a ação de um provável sismo, provocou um acréscimo de carga, que ocasionou o não atendimento dessa viga ao dimensionamento para seção retangular com armadura simples.

O momento de cálculo obtido no relatório para a condição atual (implantação em Cascavel), foi de  $M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$ , conforme a Figura 2.18, praticamente o dobro do momento para implantação do projeto em Belo Horizonte, e o programa emitiu o alerta de que a viga ultrapassa o valor de 0,45 que é o limite, que pode haver na relação entre a posição da linha neutra e a altura útil da viga, segundo a norma brasileira.

Sabendo que você deve manter o cálculo das vigas dentro dos domínios 2 ou 3 e que nesse projeto você optou por manter todas as vigas com as mesmas dimensões, como você pode resolver esse problema sem abrir mão da seção de 20x40 cm?

Fique atento as equações de equilíbrio, pois uma nova resultante será incorporada aos cálculos e ajudará você a resolver seu desafio. Não se esqueça de apresentar os cálculos e o novo detalhamento da seção transversal da viga. Bons estudos!

Figura 2.18 | Diagrama de momento fletor da viga V4 - Cascavel



Fonte: elaborada pela autora.

## Não pode faltar

### Introdução

Como já foi dito, vamos avançar um pouco mais nos cálculos de vigas com seção retangular, no entanto, vamos tratar da seção retangular com armadura dupla.

### Definição de armadura dupla

Chamamos de viga com armadura dupla quando a armadura longitudinal calculada está presente tanto na região tracionada, quanto na região comprimida da viga.

A armadura dupla é normalmente utilizada quando no dimensionamento de uma viga a posição da linha neutra não satisfaz os domínios 2 ou 3, havendo a necessidade do aumento da seção transversal da viga ou da resistência à compressão do concreto.

Uma outra situação, bastante comum, para o uso de armadura dupla seria por imposição da arquitetura. Muitas vezes, o arquiteto idealiza um conjunto de vigas, todas com as mesmas dimensões, mas algumas vezes, para que isso seja possível, nós temos que recorrer ao uso da armadura dupla e verificar a possibilidade de manter a seção com as dimensões solicitadas.

Nesse caso, para que não seja necessário o aumento de seção da viga ou o aumento da resistência do concreto, forçamos o cálculo para que a viga se mantenha no domínio 3. Para isso, utilizamos o valor limite da posição da LN de  $X \leq 0,45 \times d$  para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ , conforme item 14.6.4.3 da NBR-6118 (ABNT, 2014).

Além de mantermos a viga no domínio 3, no limite estabelecido pela norma, temos que compensar a falta de seção transversal ou a necessidade de uma resistência à compressão maior, colocando armadura longitudinal na região comprimida da viga. Essa armadura é que caracteriza a seção com armadura dupla e a chamaremos de  $A'_s$  (área de armadura na zona comprimida).

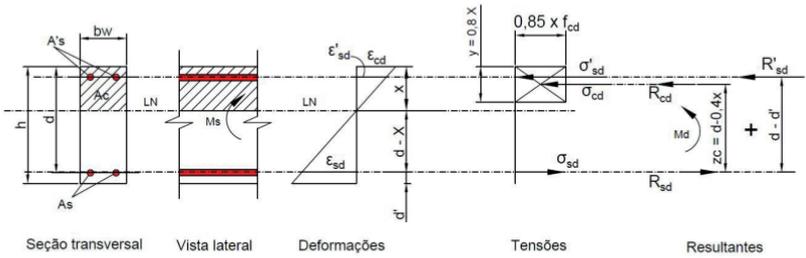
As hipóteses básicas que definem os critérios para determinar os esforços resistentes de uma viga com armadura dupla, são as mesmas das vigas com armadura simples, visto na Seção 2, ou ainda no item 17.2 da NBR-6118 (ABNT, 2014).

### Equilíbrio da seção retangular para armadura dupla

Da mesma forma que nas vigas de seção retangular com armaduras simples, os esforços internos resistentes são formulados através das equações de equilíbrio das forças normais, em que  $\Sigma N = 0$ , e dos momentos fletores  $\Sigma M = 0$ .

A diferença com relação a armadura simples é o acréscimo da resultante ( $R'_{sd}$ ) da armadura comprimida, que gerará uma parcela adicional de momento fletor a ser somado com a parcela de momento resultante do concreto comprimido, conforme a Figura 2.19:

Figura 2.19 | Distribuição de tensões, deformações e resultantes - viga retangular com armadura dupla



Fonte: elaborada pela autora.

Nomenclaturas:

$A_c$  = área de concreto na zona comprimida - ( $cm^2$ ).

$A_s$  = área da armadura na zona tracionada - ( $cm^2$ ).

$A'_s$  = área da armadura na zona comprimida - ( $cm^2$ ).

$\epsilon_{cd}$  = deformação do concreto - encurtamento - ( $\%$ ).

$\epsilon'_{sd}$  = deformação do aço - encurtamento - ( $\%$ ).

$\epsilon_{sd}$  = deformação do aço - alongamento - ( $\%$ ).

$\sigma_{cd}$  = tensão de cálculo do concreto - ( $kN / cm^2$ ).

$\sigma'_{sd}$  = tensão de cálculo da armadura comprimida - ( $kN / cm^2$ ).

$\sigma_{sd} = f_{yd}$  = tensão de cálculo da armadura tracionada - ( $kN / cm^2$ ).

$R_{cd}$  = resultante de cálculo do concreto à compressão - ( $kN$ ).

$R_{sd}$  = resultante de cálculo do aço à tração - ( $kN$ ).

$R'_{sd}$  = resultante de cálculo do aço à compressão - ( $kN$ ).

$z_c = (d - 0,4 \times X)$  - braço de alavanca - ( $cm$ ).

$z_s = (d - d')$  - braço de alavanca - ( $cm$ ).



**Assimile**

Dizer que uma viga foi armada com armadura dupla significa que existe armadura trabalhando na face tracionada e na face comprimida da viga. Parte das tensões de compressão são absorvidas pela armadura e a outra parte pelo concreto. A armadura colocada na face comprimida também é armadura principal e não apenas porta estribo.

## Equilíbrio de forças normais:

Para que haja equilíbrio das forças normais, a somatória dos esforços deve ser igual a zero  $\Sigma N = 0$

Portanto, a resultante de cálculo do concreto mais a resultante de cálculo do aço à compressão deve ser igual a resultante de cálculo do aço à tração, conforme a Figura 2.19:

$$R_{cd} + R'_{sd} = R_{sd}. \quad \text{Sabemos que: } R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c \quad \text{e} \\ A_c = (0,8 \times X) \times bw.$$

Do diagrama de tensões, Figura 2.19, sabemos que  $\sigma_{cd} = 0,85 \times f_{cd}$ , portanto, a resultante de cálculo do concreto comprimido será:

$$R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c, \quad \text{ou seja: } R_{cd} = (0,85 \times f_{cd}) \times (0,8 \times X \times bw) \\ \text{ou } R_{cd} = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd}.$$

As resultantes de cálculo do aço serão:

$$R_{sd} = \sigma_{sd} \times A_s \\ R'_{sd} = \sigma'_{sd} \times A'_{s}, \quad \text{onde: } \sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15}$$

## Equilíbrio dos momentos fletores

A soma dos momentos resistentes com o momento solicitante deve resultar em zero,  $\Sigma M = 0$ .

O momento fletor resistente  $M_d$ , deve ser equilibrado com os momentos fletores solicitantes provenientes do concreto comprimido e das armaduras, tracionada e comprimida.

Da Figura 2.19, teremos:  $M_d$  total da região comprimida:

$$M_d = (R_{cd} \times z_c) + (R'_{sd} \times z_s), \quad \text{onde: } z_c = (d - 0,4 \times X) \text{ e} \\ z_s = (d - d'), \quad \text{portanto, teremos:}$$

$$M_d = [0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)] + [A'_s \times \sigma'_{s} \times (d - d')].$$

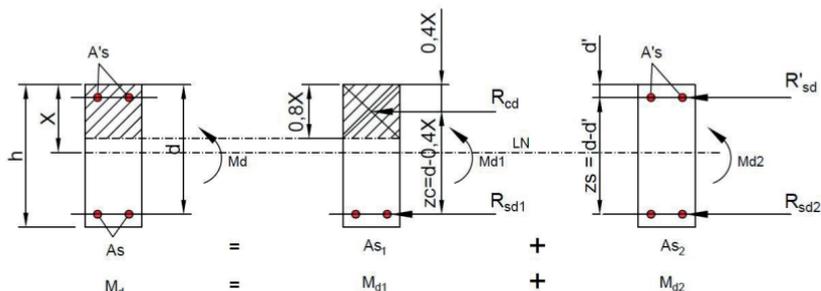
Como podemos verificar, o momento resistente de cálculo à compressão ( $M_d$ ) é composto pela soma de duas parcelas: a primeira referente ao concreto comprimido e a segunda referente a armadura comprimida.

Para que possamos equilibrar a resultante da armadura comprimida ( $A'_{s}$ ), vamos dividir a armadura total tracionada ( $A_s$ ) em duas parcelas ( $A_{s1} + A_{s2}$ ). A resultante da primeira parcela ( $A_{s1}$ ) será equilibrada

com a resultante do concreto à compressão, e a resultante da segunda parcela ( $A_{s2}$ ) será equilibrada com a resultante da armadura comprimida ( $A'_s$ ), conforme demonstrado na Figura 2.20.

Em função da decomposição das resultante, teremos também a decomposição do momento ( $M_d$ ) em duas parcelas ( $M_{d1} + M_{d2}$ ), conforme Figura 2.20.

Figura 2.20 | Decomposição do momento resistente em duas parcelas



Fonte: elaborada pela autora.

Vamos fazer primeiro o equilíbrio do momento  $M_{d1}$ . O equilíbrio do momento  $M_{d1}$  se dá pelo momento resultante da parcela comprimida do concreto com o momento resultante parcela da armadura tracionada, ou seja:

Cálculo de  $M_{d1}$  em função da resultante de cálculo do concreto à compressão,  $R_{cd}$ :

$$M_{d1} = R_{cd} \times z_c, \quad \text{onde:} \quad R_{cd} = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \quad \text{e} \\ z_c = (d - 0,4 \times X), \quad \text{portanto, teremos:}$$

**Equação 1:**

$$M_{d1} = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

Note que a equação 1 é exatamente a mesma usada no cálculo de armadura simples (seção 2) para determinar a posição da linha neutra ( $X$ ), no entanto, como sabemos que a primeira parcela de momento corresponde a situação de LN no limite do domínio 3, podemos adotar  $X = (0,45 \times d)$ .

Cálculo de  $M_{d1}$  em função da resultante do aço à tração,  $R_{sd1}$ :

$M_{d1} = R_{sd1} \times z_c$ , onde:  $R_{sd1} = A_{s1} \times \sigma_{sd1}$  e  $z_c = (d - 0,4 \times X)$ ,  
teremos:

$M_{d1} = (A_{s1} \times \sigma_{sd1}) \times (d - 0,4 \times X)$ , isolando a área de aço  $A_{s1}$ ,  
teremos:

**Equação 2:**

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{\sigma_{sd1} \times (d - 0,4 \times X)}$$

Como sabemos que  $M_d = M_{d1} + M_{d2}$ , teremos:

**Equação 3:**

$$M_{d2} = M_d - M_{d1}$$

Agora vamos ao equilíbrio do momento  $M_{d2}$ . O equilíbrio de  $M_{d2}$  se dá em função da resultante da armadura comprimida ( $R'_{sd}$ ) com a resultante da armadura tracionada ( $R_{sd2}$ ).

O cálculo de  $M_{d2}$  em função da resultante do aço à compressão ( $R'_{sd}$ ) é:

$M_{d2} = R'_{sd} \times z_s$ , onde:  $R'_{sd} = A'_{s1} \times \sigma'_{sd}$  e  $z_s = (d - d')$ ,  
portanto:  $M_{d2} = (A'_{s1} \times \sigma'_{sd}) \times (d - d')$

Isolando  $A'_{s1}$ , teremos:

**Equação 4:**

$$A'_{s1} = \frac{M_{d2}}{\sigma'_{sd} \times (d - d')}$$

Cálculo de  $M_{d2}$  em função da resultante do aço à tração,  $R_{sd2}$ :

$M_{d2} = R_{sd2} \times z_s$ , onde:  $R_{sd2} = A_{s2} \times \sigma_{sd2}$  e  $z_s = (d - d')$ ,  
portanto:  $M_{d2} = (A_{s2} \times \sigma_{sd2}) \times (d - d')$ .

isolando  $A_{s2}$ , teremos:

**Equação 5:**

$$A_{s2} = \frac{M_{d2}}{\sigma_{sd2} \times (d - d')}$$

Concluimos pelas equações 4 e 5 que a área de aço:  $A_{s2} = A'_s$ , conforme prevíamos em função do equilíbrio.

### Cálculo final da armadura dupla:

Área de aço necessária na região tracionada é:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ .

Área de aço necessária na região comprimida é:  $A'_s$ .



### Exemplificando

Determinar a armadura longitudinal de uma viga de seção 20x50 cm.

Sabendo:  $M_k = +16000 \text{ kN} \times \text{cm}$ , cobrimento das armaduras:  $c = 3,0 \text{ cm}$ ; Brita 1 = 19 mm; Aço CA-50; Altura útil  $d = h-d' = 50-4 = 46 \text{ cm}$ ;  $d' = c + 1 \text{ cm}$  Estribos:  $\phi 6,3 \text{ mm}$ ; Concreto classe: C25.

Resolução:

1- Determinar o momento de cálculo:

$$M_d = M_k \times \gamma_f, \text{ portanto: } M_d = 16000 \times 1,4 = 22400 \text{ kN} \times \text{cm}$$

2- Determinar a posição da linha neutra:

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$22400 = 0,68 \times 20 \times X \times \frac{2,5}{1,4} \times (46 - 0,4 \times X)$$

$$22400 = 1117,14 \times X - 9,71 \times X^2$$

$$9,71 \times X^2 - 1117,14 \times X + 22400 = 0$$

Cálculo das raízes:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$\Delta = (-1117,14)^2 - 4 \times 9,71 \times 22400$$

portanto:  $\Delta = 377985,78$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a}, \text{ portanto: } x = \frac{-(-1117,14) \pm \sqrt{377985,78}}{2 \times 9,71}$$

$x_1 = 89,18 \text{ cm} > h = 50 \text{ cm}$  - linha neutra fora da seção transversal.

$x_2 = 25,87 \text{ cm} < h = 50 \text{ cm}$  - ok!

### 3- Verificação do domínio

Domínio 2:  $X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d$  ,

portanto:  $25,87 \leq X_{2,3} = 0,259 \times 46$

$25,87 > X_{2,3} = 11,91 \text{ cm}$  - a linha neutra não está no domínio 2.

Domínio 3:  $X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d$  ,

portanto:  $25,87 \leq X_{3,4} = 0,628 \times 46$

$25,87 \leq X_{3,4} = 28,89 \text{ cm}$  - linha neutra está no domínio 3.

4- verificação da norma  $\beta_x = X/d \leq 0,45$

$\beta_x = 25,87/46 \leq 0,45$  , portanto:  $\beta_x = 0,56 > 0,45$  - não atende!

Devemos usar armadura dupla!

Adotamos o limite máximo da posição da LN no domínio 3:

$X = 0,45 \times d$  , portanto:  $X = 0,45 \times 46 \therefore X = 20,70 \text{ cm}$

### 5- Cálculo dos momentos $M_{d1}$ e $M_{d2}$

Equação 1:

$$M_{d1} = 0,68 \times 20 \times 20,70 - \times(2,5 / 1,4) \times (46 - 0,4 \times 20,70)$$

$$M_{d1} = 18962,38 \text{ kN} \times \text{cm}$$

Equação 3:

$$M_{d2} = M_d - M_{d1}$$

$$M_{d2} = 22400 - 18962,38 = 3437,62 \text{ kN} \times \text{cm}$$

## 6- Cálculo das armaduras

Equação 2:

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{\sigma_{sd1} \times (d - 0,4 \times X)}$$

$$A_{s1} = \frac{18962,38}{\frac{50}{1,15} \times (46 - 0,4 \times 20,70)} = 11,56 \text{ cm}^2$$

Equação 4

$$A'_s = \frac{M_{d2}}{\sigma'_{sd} \times (d - d')} \therefore A'_s = \frac{3437,62}{\frac{50}{1,15} \times (46 - 4)} = 1,88 \text{ cm}^2$$

Equação 5

$$A_{s2} = \frac{M_{d2}}{\sigma_{sd2} \times (d - d')} \therefore A_{s2} = \frac{3437,62}{\frac{50}{1,15} \times (46 - 4)} = 1,88 \text{ cm}^2$$

Cálculo final da armadura dupla:

Área de aço necessária na região tracionada é:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

$A_s = 11,56 + 1,88$ .  $A_s = 13,44 \text{ cm}^2$ , se adotarmos barras de  $20 \text{ mm}$ :

Área de 1 barra de  $20 \text{ mm}$  =  $A_{1\phi 20} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2$

Para:  $A_s = 13,44 \text{ cm}^2$ , teremos:  $5\phi 20 \text{ mm}$ .

Área de aço necessária na região comprimida é:  $A'_s$

$A'_s = A_{s2} = 1,88 \text{ cm}^2$ , para barras de  $12,5 \text{ mm}$ , teremos:  $2\phi 12,5 \text{ mm}$ .



Refleta

Você sabe dizer por que o espaçamento horizontal mínimo na face superior da viga deve ser maior que os limites da norma e normalmente usamos  $5 \text{ cm}$ ?

## Detalhamento da seção transversal:

O detalhamento da seção transversal deverá ser feito de acordo com as premissas estudadas na seção 1 desta unidade, respeitando os espaçamentos verticais ( $a_v$ ) e horizontais ( $a_h$ ) de acordo com a NBR-6118 e incluindo armadura de pele para vigas com seção transversal maior que 60 cm.



### Exemplificando

Detalhar a viga calculada anteriormente. Resolução:

**Armadura tracionada:** cálculo do espaçamento entre as faces das barras horizontais:

**Alternativa 1 - considerando as 5 barras de 20 mm na primeira camada:**

$$a_h = \frac{bw - (2 \times c + 2 \times \phi_t + n^\circ \text{barras} \times \phi_l)}{n^\circ \text{barras} - 1}$$

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 5 \times 2)}{5 - 1} = 0,68 \text{ cm} - \text{não atende!}$$

Lembrando que o espaçamento horizontal mínimo da norma é:

$$a_h \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_h \geq \phi_l = 2 \text{ cm}$$

$$a_h \geq 1,2 \times \phi_{\text{bita}} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm}$$

**Alternativa 2 - considerando 4 barras de 20 mm na primeira camada, e 1 barra de 20 mm na segunda camada:**

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 4 \times 2)}{4 - 1} = 1,58 \text{ cm} - \text{não atende!}$$

**Alternativa 3 - considerando 3 barras de 20 mm na primeira camada, e 2 barras de 20 mm na segunda camada:**

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3 + 2 \times 0,63 + 3 \times 2)}{3 - 1} = 3,37 \text{ cm} > 2,28 \text{ cm} -$$

atende! Ver Figura 2.21

Como o total são 5 barras de 20mm, teremos 2 barras na segunda camada. Devemos calcular o espaçamento vertical mínimo da norma:

$$a_v \geq 2 \text{ cm}$$

$$a_v \geq \phi_l = 2 \text{ cm}$$

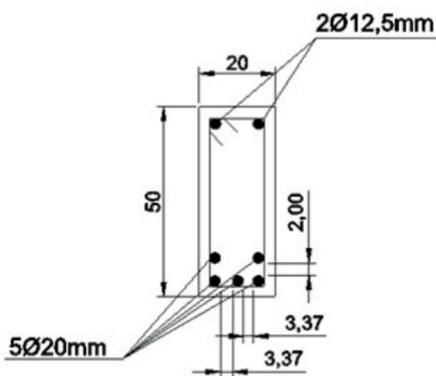
$$a_v \geq 0,5 \times \phi_{\text{brite}} = 0,5 \times 1,9 = 0,95 \text{ cm}$$

Portanto, a distância vertical será o maior dos valores encontrados, sendo: 2 cm, conforme Figura 2.21.

**Armadura comprimida:** cálculo do espaçamento entre as faces das barras horizontais:

São apenas 2 barras de 12,5mm, portanto, não precisamos verificar o espaçamento. Vale observar que o espaçamento mínimo das armaduras na face superior da viga deve ser suficiente para passagem do vibrador do concreto, em que normalmente usamos 5 cm. Ver Figura 2.21.

Figura 2.21 | Detalhamento



Fonte: elaborada pela autora.



**Pesquise mais**

Para se aprofundar sobre o tema e ter acesso a mais exercícios sobre vigas com armadura dupla, acesse a apostila do professor Paulo Bastos e leia as páginas 33 a 43.

BASTOS, P. **Flexão normal simples** - vigas. Notas de aula. Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2JyYGif>>. Acesso em: 18 jul. 2018.

## Sem medo de errar

Como vimos nessa seção, antes de propormos uma mudança de projeto em função de problemas de dimensionamento de uma viga, temos a opção de verificarmos a possibilidade da utilização de armadura dupla nessa viga.

De posse dessa informação, vamos voltar ao seu projeto da lavanderia, que devido a implantação em regiões com agressividade ambiental forte, precisou sofrer alterações na resistência do concreto e no cobrimento das armaduras das vigas. Aumentar a resistência do concreto normalmente favorece o dimensionamento, no entanto, houve um acréscimo de carga, devido aos possíveis abalos sísmicos na região de Cascavel, e isso gerou um aviso no dimensionamento da viga V4.

Como a ideia do projeto é manter todas as vigas com a mesma dimensão de 20x40 cm, a sua proposta é de verificar a viga V4 para a condição de armadura dupla.

O momento obtido para a condição atual da viga V4, foi de  $M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$ , conforme Figura 2.18, cobrimento da armadura de 4cm e classe C30 para o concreto. Os estribos foram mantidos com diâmetro de 6.3mm.

**Resolução:**

**1- Determinar o momento de cálculo:**

$$M_d = M_k \times 1,4, \text{ portanto: } M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$$

**2- Determinar a posição da linha neutra:**

$$M_d = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X), \text{ onde: } d = h - d' \text{ e } d' = c + 1 \text{ cm}$$

$$14500 = 0,68 \times 20 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (35 - 0,4 \times X)$$

$$14500 = 1020 \times X - 11,66 \times X^2$$

$$11,66 \times X^2 - 1020 \times X + 14500 = 0$$

Cálculo das raízes:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c,$$

$$\text{portanto: } \Delta = (-1020)^2 - 4 \times 11,66 \times 14500 = 364120$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a}, \text{ portanto: } x = \frac{-(-1020) \pm \sqrt{364120}}{2 \times 11,66}$$

$$x_1 = 69,62 \text{ cm} > h = 40 \text{ cm} - \text{LN fora da seção!}$$

$$x_2 = 17,86 \text{ cm} < h = 40 \text{ cm}$$

### 3- Verificação do domínio

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d ,$$

portanto:  $17,86 \leq X_{2,3} = 0,259 \times 35 = 9,07 \text{ cm}$  - não é domínio 2.

$$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d ,$$

portanto:  $17,86 \leq X_{3,4} = 0,628 \times 35 = 21,98 \text{ cm}$  - LN está no domínio 3

### 4- Verificação da norma $\beta_x = X/d \leq 0,45$ .

$\beta_x = 17,86/35 \leq 0,45$ , portanto:  $\beta_x = 0,51 > 0,45$  - Não atende! Usar armadura dupla!

Adotamos o limite máximo da posição da LN no domínio 3 :

$$X = 0,45 \times d$$

$$X = 0,45 \times 35 . : X = 15,75 \text{ cm}$$

### 5- Cálculo dos momentos fletores: $M_{d1}$ e $M_{d2}$

Equação 1:

$$M_{d1} = 0,68 \times bw \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$M_{d1} = 0,68 \times 20 \times 15,75 \times \frac{3,0}{1,4} \times (35 - 0,4 \times 15,75) = 13173,30 \text{ kN} \times \text{cm}$$

Equação 3:  $M_{d2} = M_d - M_{d1}$ ,

$$\text{portanto: } M_{d2} = 14500 - 13173,30 = 1326,70 \text{ kN} \times \text{cm}$$

### 6- Cálculo das armaduras

$$\text{Equação 2: } A_{s1} = \frac{M_{d1}}{\sigma_{sd1} \times (d - 0,4 \times X)} ,$$

$$\text{portanto: } A_{s1} = \frac{13173,30}{\frac{50}{1,15} \times (35 - 0,4 \times 15,75)} = 10,56 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Equação 4: } A_{s2} = A'_s = \frac{M_{d2}}{\sigma'_{sd} \times (d - d')},$$

$$\text{portanto: } A'_s = \frac{1326,70}{\frac{50}{1,15} \times (35 - 5)} = 1,02 \text{ cm}^2$$

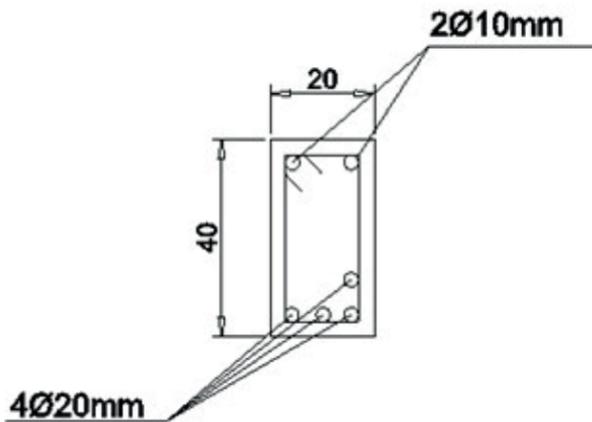
**Cálculo final da armadura dupla:**

Área de aço necessária na região tracionada é:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$   
 $A_s = 10,56 + 1,02. : A_s = 11,58 \text{ cm}^2$ . Se adotarmos barras de 20mm, teremos:  $4\phi 20 \text{ mm}$ , conforme Figura 2.22.

Área de aço necessária na região comprimida:  $A'_s$ .

$A'_s = 1,02 \text{ cm}^2$ , se adotarmos barras de 10mm, teremos:  $2\phi 10 \text{ mm}$ , conforme Figura 2.22.

Detalhamento:



Fonte: elaborada pela autora.

### Análise de carregamento.

#### Descrição da situação-problema

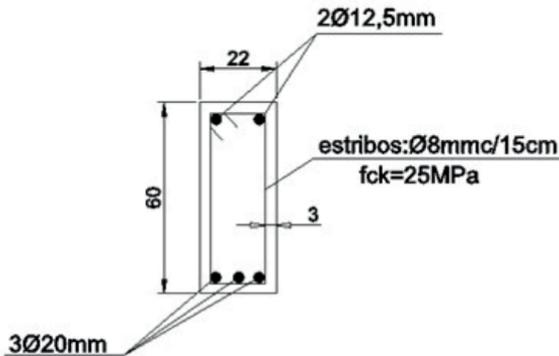
Você foi contratado por uma empresa que compra, reforma e revende imóveis. Sua função é dar o suporte técnico à obra e verificar as estruturas para o caso de algum uso específico.

Nesse momento, você precisa checar a capacidade de carga de uma viga bi apoiada existente. Você não dispõe do projeto estrutural, então, sua primeira atitude foi solicitar uma amostra da viga para que fosse realizado o ensaio de resistência à compressão do concreto, além disso, você checou as armaduras existentes, o cobrimento utilizado e o vão efetivo aproximado.

Você observou que a viga não recebe cargas concentradas, apenas suporta uma laje de piso.

A partir dos resultados obtidos e apresentados na Figura 2.23, qual a carga máxima que a viga poderá suportar?

Figura 2.23 | Dados obtidos



Fonte: elaborada pela autora.

#### Resolução da situação-problema

1- Sabemos que se trata de uma viga bi apoiada, que recebe apenas a carga distribuída de uma laje existente, portanto, o momento solicitante é:  $M_k = \frac{q \times l^2}{8}$ . Devemos encontrar o valor carga.

2- Sabemos que a armadura tracionada ( $A_{s1}$ ) existente é de:  $3\phi 20\text{ mm} = 3 \times 3,14 = 9,42\text{ cm}^2$  e que existe armadura comprimida ( $A'_{s1}$ ) de  $\ll 2\phi 12,5\text{ mm} = 2,46\text{ cm}^2$ .

3- Se  $M_d = M_{d1} + M_{d2}$ , posição da LN limite no domínio 3 é:  $\frac{X}{d} = 0,45$ , cobrimento fornecido de 3 cm.

$$\text{Para: } d' = c + 1\text{ cm} = d' = 4\text{ cm},$$

$$\text{temos que: } d = h - d' \Rightarrow d = 60 - 4 = 56\text{ cm}$$

Portanto  $X = d \times 0,45 \Rightarrow X = 56 \times 0,45 = 25,20\text{ cm}$ . Da equação 2 obtemos o  $M_{d1}$ :

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{\sigma_{sd1} \times (d - 0,4 \times X)} \Rightarrow$$

$$9,42 = \frac{M_{d1}}{\frac{50}{1,15} \times (56 - 0,4 \times 25,20)} = 18807,23\text{ kN} \times \text{cm}$$

Da teoria, sabemos que  $A'_{s1} = A_{s2}$ . ∴ da equação 5, podemos obter o  $M_{d2}$ :

$$A_{s2} = \frac{M_{d2}}{\sigma_{sd2} \times (d - d')} \Rightarrow 2,46 = \frac{M_{d2}}{\frac{50}{1,15} \times (56 - 4)}$$

Portanto:  $M_{d2} = 5561,74\text{ kN} \times \text{cm}$ .

$$M_d = M_{d1} + M_{d2} = 18807,23 + 5561,74 = 24368,97\text{ kN} \times \text{cm}$$

4- Determinamos a carga q:

$$M_d = M_k \times 1,4. ∴ M_k = \frac{24368,97}{1,40} = 17406,41\text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M_k = \frac{q \times l^2}{8} \Rightarrow 17406,41 = \frac{q \times 500^2}{8}$$

A viga suporta uma carga de até:

$$q = 0,56\text{ kN} / \text{cm} \text{ ou } 56\text{ kN} / \text{m} \text{ ou } 5,6\text{ tf} / \text{m}.$$

## Faça valer a pena

**1.** Em vigas contínuas, normalmente os momentos negativos são maiores que os positivos e a seção transversal em alguns casos não é suficiente para absorver esses esforços.

Uma solução seria aumentar a seção transversal, no entanto, essa opção às vezes não pode ser adotada por motivos arquitetônicos ou, dependendo do número de vãos da viga, aumentar sua dimensão em toda extensão em função dos momentos negativos pode ser uma solução antieconômica. Nesse caso, o uso de armadura dupla na região dos apoios, em que o momento é negativo, pode ser uma boa opção.

Com relação aos domínios de dimensionamento, para que não haja aumento de seção transversal, quando é necessário o uso de armadura dupla?

- a) Quando as deformações da viga estão no domínio 2.
- b) Quando as deformações da viga estão no domínio 4.
- c) Quando as deformações da viga estão dentro do limite do domínio 3,  $X/d \leq 0,45$ .
- d) Quando as deformações da viga estão no domínio 3.
- e) Quando as deformações da viga estão concomitantemente nos domínios 2 e 3.

**2.** Uma viga de concreto armado com seção transversal de 22x50 cm e resistência do concreto à compressão de 30 MPa, resultou em um momento fletor negativo de  $M_k = -19000 \text{ kN} \times \text{cm}$ . Sabe-se que foi utilizado um cobrimento de armadura de 4 cm e que as dimensões da viga não poderão ser alteradas.

Qual a área de armadura longitudinal necessária para que a viga possa absorver esse momento no ELU?

- a) A viga necessita de  $11 \text{ cm}^2$  de armadura tracionada e  $6,50 \text{ cm}^2$  de armadura comprimida.
- b) A viga necessita de  $17 \text{ cm}^2$  de armadura tracionada e  $3,50 \text{ cm}^2$  de armadura comprimida.
- c) A viga necessita de  $17 \text{ cm}^2$  de armadura tracionada e  $1,55 \text{ cm}^2$  de armadura comprimida.
- d) A viga necessita de  $11 \text{ cm}^2$  de armadura tracionada e  $1,55 \text{ cm}^2$  de armadura comprimida.

e) A viga necessita de  $11\text{cm}^2$  de armadura tracionada e  $3,50\text{cm}^2$  de armadura comprimida.

**3.** A formulação dos esforços resistentes da seção de uma viga é feita a partir das equações de equilíbrio das forças normais e momentos fletores. Para uma viga bi apoiada de seção  $20 \times 50\text{ cm}$ ; concreto classe C25; cobrimento de  $2,0\text{ cm}$ ; armada com aço CA-50; sendo a armadura inferior de  $3\phi 20\text{ mm} + 2\phi 16\text{ mm}$  e a armadura superior de  $2\phi 12,5\text{ mm}$ .

Qual o valor total do momento gerado pelas resultantes da região comprimida da viga?

- a) Aproximadamente  $20000\text{ kN} \times \text{cm}$
- b) Aproximadamente  $5000\text{ kN} \times \text{cm}$
- c) Aproximadamente  $25000\text{ kN} \times \text{cm}$
- d) Aproximadamente  $15000\text{ kN} \times \text{cm}$
- e) Aproximadamente  $30000\text{ kN} \times \text{cm}$

# Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **Execução de estruturas de concreto – Procedimento**, NBR 14931, ABNT, Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, 221p, 2004.

PORTO, T; FERNANDES, D. **Curso Básico de Concreto Armado Conforme NBR 6118/2014**. São Paulo: Oficina de Textos, 2015.

BASTOS, P. **Flexão normal simples** - vigas. Notas de aula. Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2JyYGif>>. Acesso em: 18 jul. 2018.



# Vigas de seção T

## Convite ao estudo

Vamos iniciar mais uma etapa de nossos estudos sobre vigas. Você já domina os conceitos e parâmetros do concreto armado, inclusive, é capaz de dimensionar e detalhar as armaduras das vigas para seção retangular, com armadura simples e armadura dupla!

Pelos desafios anteriores, já é possível sentir como é a rotina de um engenheiro civil de projetos, e até mesmo de obras ou outras especialidades. É importante para sua formação, que você tenha um conhecimento abrangente de sua área de atuação, conhecendo as normas, as possibilidades de dimensionamentos e dominando os softwares, para que eles sejam seus aliados.

Nessa nossa última etapa sobre vigas, você irá aprender que além das possibilidades de dimensionamento de vigas já estudadas, existe uma possibilidade de dimensionamento, que conta com a contribuição das lajes nos cálculos. É o que chamamos de vigas com seção T.

Serão estudados os conceitos e definições de vigas com seção T, como se calcula a parcela de laje que irá contribuir com as vigas, além do dimensionamento das armaduras para duas situações.

A primeira situação será o cálculo da viga com seção T e LN localizada na mesa, e a segunda situação com a LN localizada na nervura (alma).

No final dessa unidade, você será capaz de determinar a armadura longitudinal de uma viga de seção T e realizar o

detalhamento dessa armadura na seção transversal, mas antes disso, três novos desafios e mais alguns exercícios farão parte dessa caminhada.

Vamos voltar ao seu grande desafio final, que é o projeto de uma lavanderia em concreto armado, para um conjunto de prédios inteligentes a serem implantados em Belo Horizonte, Recife e Cascavel, e que apresentam características ambientais distintas.

Na unidade anterior, você já havia finalizado o projeto de vigas para todas as regiões utilizando um software de cálculo, no entanto, chegaram os comentários do cliente sobre o projeto, e ele solicitou que você repense a viga V4 do primeiro pavimento, para a região de Cascavel, que foi armada com armadura dupla. O cliente prefere não usar armadura dupla no projeto e solicita uma nova solução, sem que seja alterada a seção dessa viga, que é de 20x40 cm.

Seu primeiro desafio sobre essa questão, será verificar a possibilidade de se usar seção T e determinar qual será a colaboração das lajes, ou seja, determinar a largura colaborante!

O uso de seção T é comum em projetos, porque ajuda a otimizar a área de armadura longitudinal das vigas, mas nem sempre é possível usar esse recurso, pois é necessário que os níveis das faces das vigas e lajes sejam coincidentes na região comprimida das peças.

Quando se usa um software de cálculos estruturais, o *default*, normalmente estará habilitado para que as vigas e as lajes trabalhem em conjunto, logo, ele considerará as larguras colaborantes, sempre que possível.

De qualquer maneira, é importante que você cheque os dados de entrada do software e altere os parâmetros, se necessário.

A verificação do primeiro desafio será positiva para o uso de seção T e dois novos desafios serão propostos.

O segundo, será dimensionar a armadura longitudinal da viga V4 do projeto de Cascavel, usando a largura colaborante encontrada e verificar se houve redução da área de aço com relação ao dimensionamento com seção retangular.

Finalizado o segundo desafio, seu projeto de vigas estará praticamente pronto, salvo por um fato corriqueiro entre os calculistas: onde está o cálculo da viga da escada?

Pronto! Seu último desafio será calcular a viga da escada (VE) que dá acesso ao primeiro pavimento, também com seção T.

Mãos à obra e bons estudos!

# Seção 3.1

## Conceito de viga T

### Diálogo aberto

Finalizamos na Unidade 2 o cálculo e detalhamento de vigas de seção retangular com armaduras simples e armadura dupla.

Nessa unidade, vamos finalizar o estudo de vigas, mas agora a seção estudada não é mais retangular, mas sim vigas de seção T. Você aprenderá o que é uma viga T, quando usá-la e como se determina a largura colaborante, que compõe a geometria da viga em forma de T. Esse aprendizado é muito importante, pois a seção T é utilizada na grande maioria dos projetos de concreto armado, uma vez que a consideração desse tipo de seção contribui para a redução de armadura longitudinal das vigas e o modelo de cálculo se aproxima mais da realidade da estrutura.

Relembrando: você faz parte de um importante escritório de cálculo estrutural e seu projeto de vigas da lavanderia está praticamente finalizado. Você realizou o processamento das vigas para implantação do projeto em Belo horizonte, em Recife e em Cascavel.

Após as checagens dos dimensionamentos e dos detalhamentos das vigas, você emitiu o projeto para verificação do cliente, juntamente com a memória de cálculo.

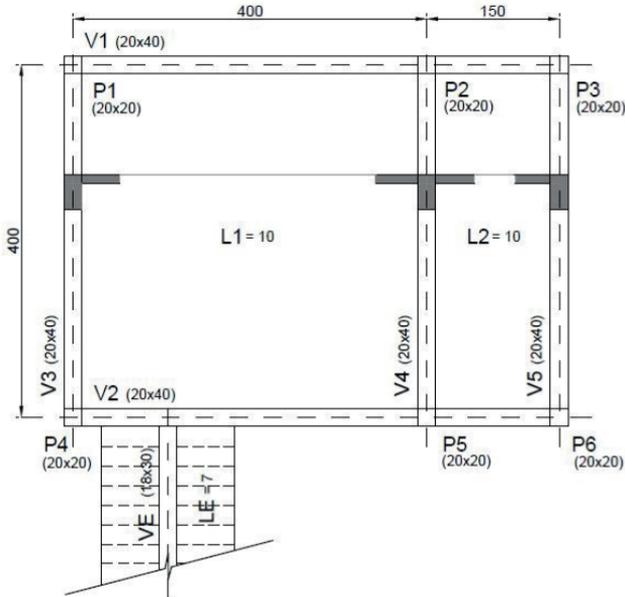
Os comentários do projeto das vigas da lavanderia chegaram após uma semana e houve apenas uma solicitação do cliente referente à viga V4 do primeiro pavimento, do projeto da região de Cascavel.

Essa viga, conforme visto na Seção 3 da Unidade 2, gerou uma inconsistência no dimensionamento e precisou ser armada com armadura dupla.

No comentário, o cliente solicita que você encontre uma solução para essa viga V4, sem que seja necessário a utilização de armadura dupla, atendendo ao ELU e mantendo as dimensões de 20x40 cm. Essa solicitação é um critério específico desse cliente que não costuma utilizar armadura dupla em seus projetos.

Para atender à solicitação, você irá recalcular essa viga V4 do projeto de Cascavel, utilizando as lajes L1 e L2, como colaboradoras no dimensionamento. Para isso, relembre o seu projeto da lavanderia, utilizando as formas do primeiro pavimento, Figura 3.1.

Figura 3.1 | Projeto das formas do primeiro pavimento - medidas em centímetros



Fonte: elaborada pela autora

Seu desafio será determinar se as lajes podem contribuir para o dimensionamento dessa viga e quanto cada laje poderá contribuir, apresentando a largura colaborante final.

Relembrando que para Cascavel, em função da ocorrência de sismo, o momento final de cálculo dessa viga foi de  $M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$ ; o cobrimento das armaduras foi de 4 cm; a resistência do concreto à compressão foi de 30 Mpa; e o aço CA-50.

Para resolver esse desafio, você deverá antes de qualquer coisa conhecer o conceito de vigas T, entender quando é possível ser utilizada a seção T e como determinar a largura colaborante das lajes no dimensionamento da viga. Boa sorte e bons estudos!

## Não pode faltar

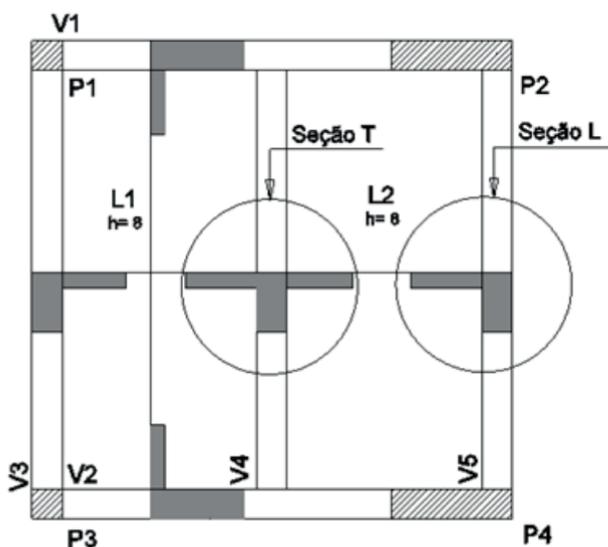
Estamos entrando na reta final do estudo das vigas! Já conhecemos as vigas de seção retangular, com armadura simples e com armadura dupla. Agora, vamos iniciar os estudos sobre as vigas com seção T e armadura simples.

Em um modelo de cálculo realista, existe a interação entre os elementos estruturais, ou seja, o trabalho conjunto entre eles. Esse modelo é possível atualmente por meio dos softwares de cálculo de estruturas.

Para os casos em que não é possível considerar automaticamente essa interação entre vigas e lajes, podemos utilizar o que chamamos de seção T, e dessa forma ficamos mais próximos do modelo ideal. Esse nome é dado quando existem lajes em ambos os lados de uma viga, formando uma geometria em forma de letra T (Figura 3.2).

Quando existe laje em apenas um dos lados, dizemos que se trata de viga L (Figura 3.2).

Figura 3.2 | Projeto das formas - genérico



Fonte: elaborada pela autora.

Quando temos lajes maciças (veremos na Unidade 4), ou seja, aquelas armadas e concretadas no local, existe automaticamente um trabalho conjunto dessas lajes com as vigas do projeto. Nos casos, que são sua maioria, em que a região comprimida da viga coincide com a região comprimida da laje (ambas estão no mesmo nível), podemos utilizar no dimensionamento da viga a seção T.

### Definição da viga T

Vigas com seção T, em estruturas de concreto armado convencional, são aquelas que contam com a contribuição da laje no dimensionamento da viga, ou seja, a laje colabora com a viga ajudando a resistir às tensões de compressão atuantes nela.

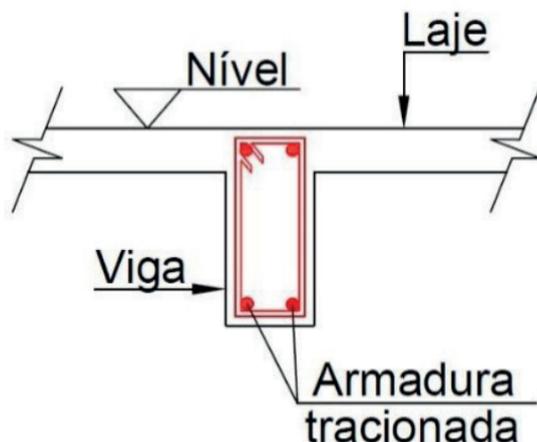
Essa ajuda da laje aumenta a área de concreto comprimido ( $A'_c$ ) que utilizamos no cálculo das vigas, visto na seção anterior. Como consequência do aumento da área de concreto comprimido, temos uma redução na área de armadura longitudinal necessária para a viga.



### Assimile

Para que a laje contribua com o dimensionamento de uma viga, ambas devem estar niveladas pela face comprimida da viga, conforme Figura 3.3.

Figura 3.3 | Corte genérico de viga



Fonte: elaborada pela autora.

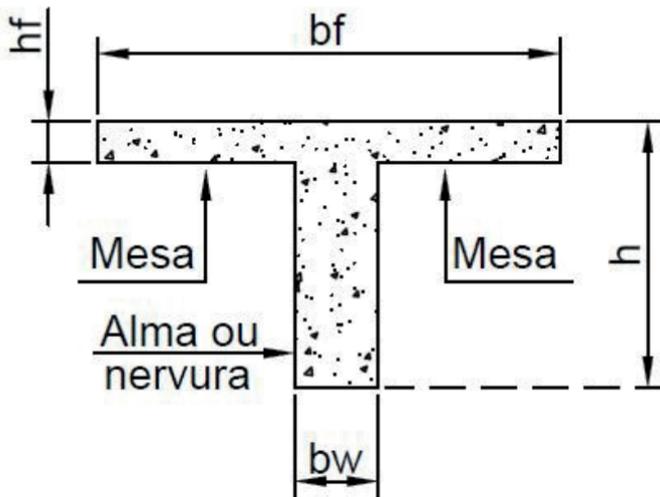
## Conceito de viga T e viga L

As vigas com seção T, são aquelas que recebem contribuição da laje de ambos os lados e a parcela de laje que contribui no cálculo da viga é determinada pelo que chamamos de largura colaborante ( $b_f$ ) ou mesa colaborante, conforme a figura 3.4.

No início de um projeto, você define se o cálculo das vigas será com seção retangular ou seção T. Atualmente, com o advento dos softwares de cálculos estruturais, existe a possibilidade de se configurar para que, seja ou não, utilizada a contribuição da laje no cálculo das vigas.

Existem dois casos em que podemos contar com a laje no cálculo das vigas. Um deles é quando a LN (linha neutra) está localizada na mesa, nesse caso, dizemos que há compressão parcial da mesa (será visto na seção 2, desta unidade) o outro caso, é quando a LN está localizada na alma da viga, dizemos que há compressão total da mesa (será visto na seção 3, desta unidade).

Figura 3.4 | Viga seção T



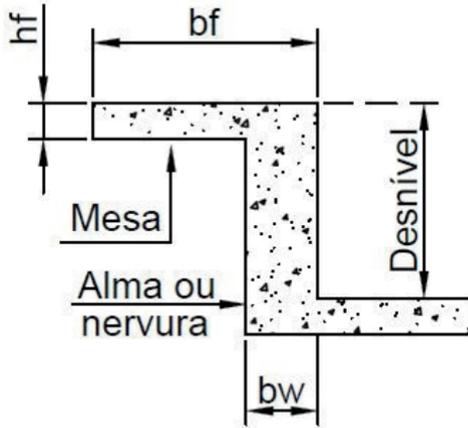
Fonte: elaborada pela autora.

Além das vigas com seção T, pode-se ter a situação em que há um rebaixo em uma das lajes, conforme mostra o corte representado na Figura 3.5.

Uma outra possibilidade geométrica seria não existir laje em um dos lados da viga, conforme Figura 3.6. Nesses dois casos, dizemos que a viga é seção L.

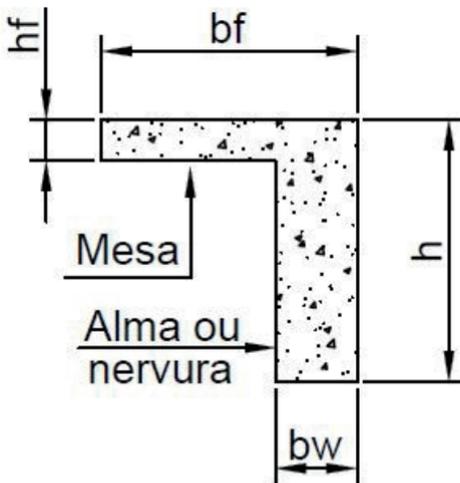
O conceito de vigas com seção L é o mesmo que para vigas com seção T, sendo que há diferença apenas na parcela de contribuição da laje ( $b_f$ ), que para seção L é menor.

Figura 3.5 | Viga seção L - desnível entre as lajes



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.6 | Viga seção L - laje em apenas um dos lados da viga

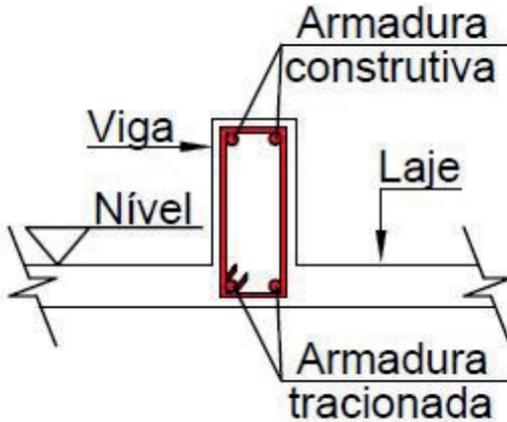


Fonte: elaborada pela autora.



Você saberia dizer se é possível que a laje contribua no dimensionamento de uma viga invertida, conforme a Figura 3.7?

Figura 3.7 | Viga invertida



Fonte: elaborada pela autora.

### Colaboração da laje nos momentos positivos (viga padrão) e negativos (viga invertida)

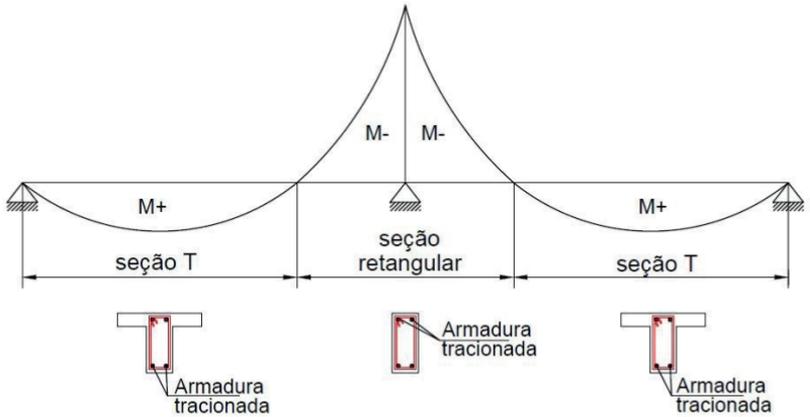
Uma viga contínua (com mais de um vão), apresenta momentos positivos e negativos (Figuras 3.8 e 3.9). O esquema estático de uma viga genérica, representado na Figura 3.8, mostra que para uma viga padrão, ou seja, aquela em que a face superior é nivelada com a laje, haverá contribuição da laje nos trechos de momentos positivos.

Lembramos que, para os momentos positivos, a armadura tracionada está na região inferior da viga, logo, a região superior é a região comprimida e está no mesmo nível da laje, podendo (a laje) colaborar no dimensionamento da armadura tracionada dessa viga.

Se analisarmos a mesma viga (Figura 3.8), mas agora em que o momento é negativo, verificamos que não haverá colaboração da laje no cálculo da armadura negativa, pois a região comprimida não está no mesmo nível da laje.

Quando há momento negativo, a armadura tracionada é posicionada na face superior da viga.

Figura 3.8 | Esquema estático de viga padrão contínua com mesa colaborante

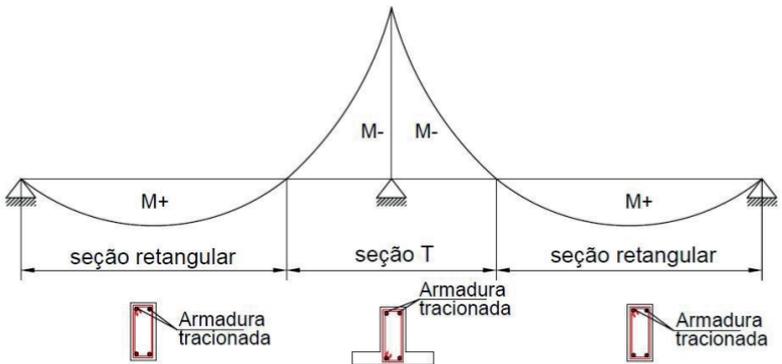


Fonte: elaborada pela autora.

No caso de vigas invertidas, como representado na Figura 3.9, haverá contribuição da laje apenas nos trechos de momentos negativos, na qual a região comprimida (inferior) da viga coincide com o nível da laje.

Perceba que o diagrama de momentos fletores é o mesmo para viga padrão e para viga invertida, o que muda é o nível das lajes (pode estar nivelada por cima ou por baixo da viga).

Figura 3.9 | Esquema estático de viga invertida contínua com mesa colaborante



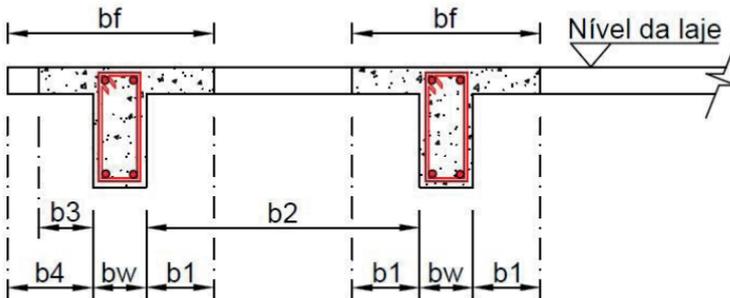
Fonte: elaborada pela autora.

## Cálculo da largura colaborante - $b_f$

Agora que você já entendeu o que é uma viga T e em que situações é possível utilizá-la, vamos aprender qual é a parcela de laje ( $b_f$ ) que contribuirá com o dimensionamento da viga, ajudando a resistir as tensões de compressão atuantes nela.

De maneira geral, a largura colaborante  $b_f$  resulta da soma da largura  $b_w$  da viga, com  $b_1$  ou  $b_3$ , conforme a Figura 3.10.

Figura 3.10 | Largura colaborante



Fonte: elaborada pela autora.

Os valores de  $b_1$  e  $b_3$  devem atender as Tabelas 3.1 e 3.2. Ou seja, o valor de  $b_1$  será o menor valor originado pela Tabela 3.1 e o valor de  $b_3$  será o menor valor originado pela Tabela 3.2.

O valor de  $b_2$  corresponde à distância entre a face da viga que se está calculando, até a face da viga mais próxima a ela. Ver Figura 3.10.

Tabela 3.1 | valores de  $b_1$

$b_1 \leq$	$0,1 \times a$
$b_1 \leq$	$0,5 \times b_2$

Fonte: adaptada de NBR-6118 (ABNT, 2014).

Tabela 3.2 | valores de  $b_3$

$b_3 \leq$	$0,1 \times a$
$b_3 \leq$	$b_4$

Fonte: adaptada de NBR-6118 (ABNT, 2014).

O valor de  $a$  é a distância entre os momentos iguais a zero no diagrama, e pode ser determinado em função da condição de apoio da viga, conforme a Tabela 3.5, sendo que  $l_{ef}$  corresponde ao vão efetivo da viga.

Vão efetivo, representado na Figura 3.11, é o vão utilizado no cálculo das vigas. Corresponde à distância entre as faces dos apoios, acrescida de um valor mínimo que garanta a ligação entre os elementos estruturais.

O item 14.6.2.4, da norma NBR-6118 (ABNT, 2014) fornece a expressão para encontrar o valor do vão de cálculo ou efetivo:

$$l_{ef} = l + a_1 + a_2 .$$

Ou seja, o valor de  $a_1$  será o menor valor originado pela Tabela 3.3 e o valor de  $a_2$  será o menor valor originado pela Tabela 3.4.



**Lembre-se**

É válido lembrar que o vão efetivo ( $l_{ef}$ ) se aplica aqui, também, para o cálculo de  $a$  na seção T, mas conforme mencionado,  $l_{ef}$  é o vão utilizado para cálculo e dimensionamento de qualquer viga!

Tabela 3.3 | Valores de  $a_1$

$a_1 \leq$	$t_1/2$
$a_1 \leq$	$0,3 \times h$

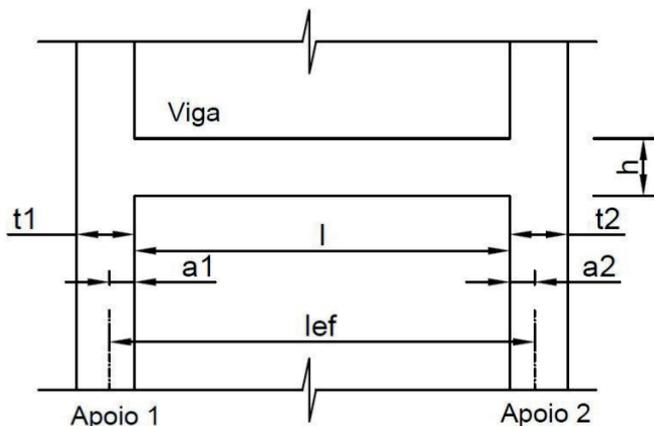
Fonte: elaborada pela autora

Tabela 3.4 | Valores de  $a_2$

$a_2 \leq$	$t_2/2$
$a_2 \leq$	$0,3 \times h$

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.11 | Vão efetivo - corte genérico



Fonte: elaborada pela autora.

Tabela 3.5 | Valores de  $a$  para os diferentes casos de apoios de vigas

Bi apoiadas	$a = l_{ef}$
Bi engastadas	$a = 0,6 \times l_{ef}$
Engastada e apoiada	$a = 0,75 \times l_{ef}$
Engastada e livre (balanço)	$a = 2 \times l_{ef}$

Fonte: elaborada pela autora.

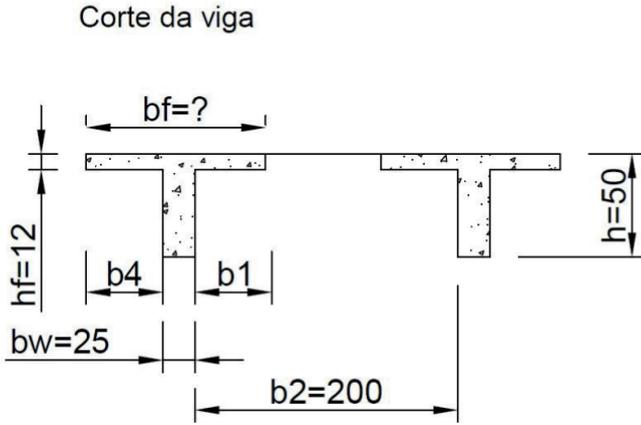
Para lajes com mísulas, consultar a NBR-6118, Figura 14.2 (ABNT, 2014).



### Exemplificando

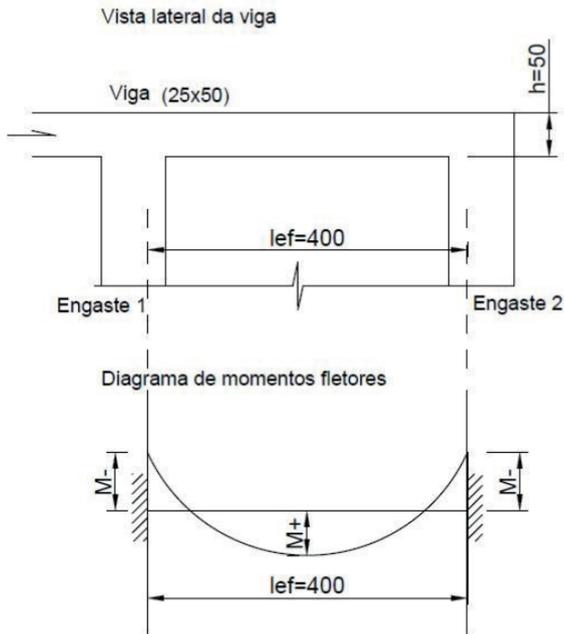
Dada uma viga bi engastada (Figuras 3.12 e 3.13), com vão efetivo ( $l_{ef}$ ) de 4 m; dimensões de 25 x 50 cm; espessura da laje 12 cm; distância entre as faces das vigas  $b_2 = 2\text{ m}$  e  $b_3 = b_4$ . Qual o valor da largura colaborante ( $b_f$ ) da laje que contribuirá para o cálculo da armadura positiva dessa viga? Sabe-se que a laje está nivelada pela face superior da viga (viga padrão).

Figura 3.12 | Detalhe da viga - medidas em centímetros



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.13 | Lateral da viga e diagrama de momentos fletores - medidas em centímetros



Fonte: elaborada pela autora.

### Resolução:

Se a viga é biengastada:  $a = 0,6 \times l_{ef}$ , sendo  $l_{ef} = 400 \text{ cm} \Rightarrow a = 240 \text{ cm}$ .

Da Tabela 3.1, obtemos o valor de  $b_1$ :

$b_1 \leq$	$0,1 \times a = 0,1 \times 240 = 24 \text{ cm}$
$b_1 \leq$	$< 0,5 \times b_2 = 0,5 \times 200 = 100 \text{ cm}$

Portanto: o menor entre os dois valores:  $b_1 = 24 \text{ cm}$ .

Da Tabela 3.2, obtemos o valor de  $b_3$ :

$b_3 \leq$	$0,1 \times a = 0,1 \times 240 = 24 \text{ cm}$
$b_3 \leq$	$b_4 = 24 \text{ cm}$

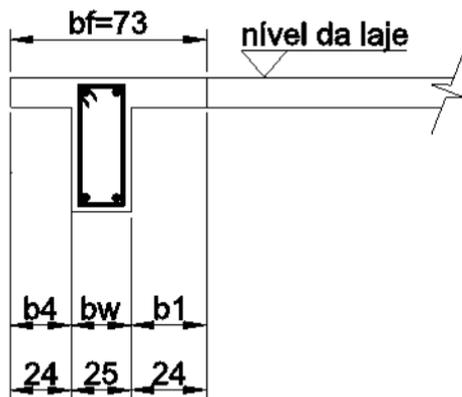
Portanto: o menor entre os dois valores:  $b_3 = 24 \text{ cm}$ .

Cálculo de  $b_f$ :

$$b_f = b_w + b_1 + b_3$$

$$b_f = 25 + 24 + 24 = 73 \text{ cm}$$

Figura 3.14 | Detalhe da largura colaborante



Fonte: elaborada pela autora.



Consulte a apostila de vigas da Unesp e leia as páginas de 15 a 19 para se aprofundar no tema "vigas de seção T".

CAMACHO, J; S. **Curso de Concreto Armado: Estudo das Vigas**. Unesp, Faculdade de Engenharia, departamento de engenharia civil, Ilha Solteira, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2LVOLVW>>. Acesso em: 11 jun. 2018.

## Sem medo de errar

Com o aprendizado adquirido no "Não pode faltar", está fácil retomar o desafio da seção, que é determinar se as lajes L1 e L2 do projeto de formas da lavanderia, Figura 3.1, podem contribuir para o dimensionamento da viga V4 do primeiro pavimento, e qual deverá ser a largura colaborante final.

Relembrando o desafio: os comentários do cliente sobre o projeto das vigas da lavanderia para implantação em Belo Horizonte, Recife e Cascavel chegaram e houve apenas uma solicitação referente a viga V4, do projeto da região de Cascavel, onde há incidência de sismo.

Essa viga, conforme visto na Seção 2.3, gerou uma inconsistência no dimensionamento para armaduras simples e precisou ser armada com armadura dupla.

No comentário, o cliente solicita que você encontre uma solução para essa viga, sem que seja necessária a utilização de armadura dupla e que o ELU e as dimensões atuais (20x40 cm) sejam respeitadas.

Os dados da V4, do projeto para implantação em Cascavel são:

$M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$  ; cobrimento das armaduras 4 cm; resistência do concreto à compressão 30 Mpa; e aço CA-50.

### Resolução:

A opção para não utilizar armadura dupla, tentando manter a seção transversal com 20x40 cm, é verificar a possibilidade de dimensionar a viga V4, com seção T.

Por meio da planta de formas do primeiro pavimento, Figura 3.1, temos que a viga V4 está nivelada por cima com as lajes L1 e L2, ambas com 10 cm de espessura, conforme o corte, apresentado na Figura 3.15.

Figura 3.15 | Corte na forma do primeiro pavimento

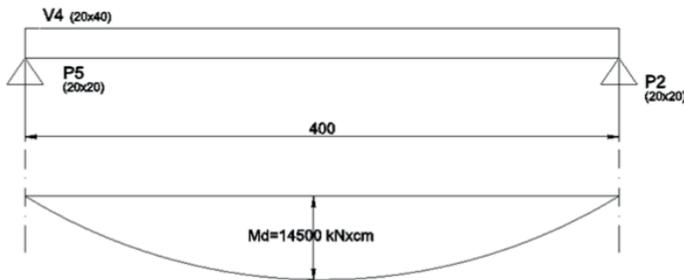


Fonte: elaborada pela autora.

Pelo corte, podemos verificar que é possível calcular a V4 com seção T, utilizando a contribuição das lajes L1 e L2 de espessura de 10 cm.

A partir da planta de formas, Figura 3.1, obtemos o esquema estático da V4, conforme representado na Figura 3.16

Figura 3.16 | Esquema estático da V4

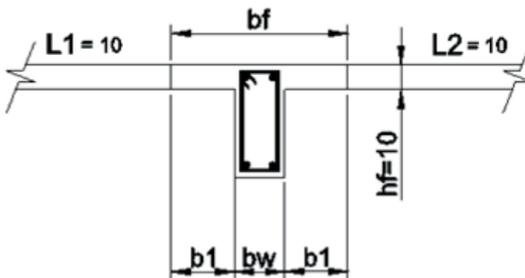


Determinação do vão efetivo,  $l_{ef}$  :

Do esquema estático, temos que a V4 é bi-apoiada (apoiada nos pilares P5 e P2), com vão efetivo  $l_{ef} = 400\text{ cm}$ , portanto:  $a = l_{ef} \Rightarrow 400\text{ cm}$ .

Determinação da largura colaborante,  $b_f$ , conforme Figura 3.17:

Figura 3.17 | Largura colaborante da V4



Fonte: elaborada pela autora.

Da Tabela 3.1, obtemos o valor de  $b_1$ :

$b_1 \leq$	$0,1 \times a = 0,1 \times 400 = 40 \text{ cm}$
$b_1 \leq$	$0,5 \times b_2 = 0,5 \times (150 - 10 - 10) = 65 \text{ cm}$

Lembre-se que todas as vigas do projeto têm seção transversal de 20x40 cm.

**Portanto:**

$b_1 = 40 \text{ cm}$  - o menor dos dois valores.

$b_f = b_w + b_1 + b_1$

$b_f = 20 + 40 + 40 = 100 \text{ cm}$ .

A largura colaborante final para a viga V4, do projeto de Cascavel, será de 100 cm.

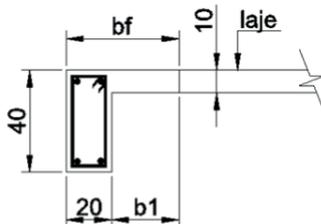
## Avançando na prática

### Cálculo da largura colaborante para seção L

#### Descrição da situação-problema

Vamos supor que você seja um experiente engenheiro calculista e resolveu abrir seu próprio escritório de projetos. Como primeiro trabalho, você dimensionou a viga V3 de borda de uma residência (Figura 3.18) com o auxílio de um software e necessita agora passar para o cliente quanto foi considerado de largura colaborante. Verifica-se que a viga V3 recebe carga de apenas uma laje, que está nivelada com ela pela face superior, conforme Figura 3.18. Sabemos que se trata de uma viga bi apoiada e que o vão efetivo é de 400 cm. A distância entre a face da viga V3 e a face da viga mais próxima é de 380 cm.

Figura 3.18 | Corte da viga V3



Fonte: elaborada pela autora.

## Resolução da situação-problema

Sabemos que a viga é bi apoiada, portanto,  $a = l_{ef} \Rightarrow 400 \text{ cm}$ .

Da Tabela 3.1, obtemos o valor de  $b_1$  :

$b_1 \leq$	$0,1 \times a = 0,1 \times 400 = 40 \text{ cm}$
$b_1 \leq$	$0,5 \times b_2 = 0,5 \times 380 = 190 \text{ cm}$

Fonte: elaborada pela autora.

Portanto:

$b_1 = 40 \text{ cm}$  - o menor dos valores.

$b_f = b_w + b_1$

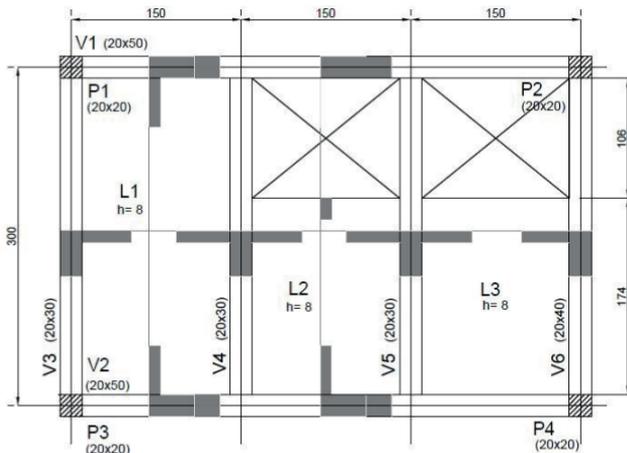
$b_f = 20 + 40 = 60 \text{ cm}$ .

A largura colaborante final para a viga V3 será de 60 cm.

## Faça valer a pena

1. A empresa onde você trabalha participou de uma licitação para desenvolver os projetos de estruturas de concreto armado de uma fábrica de pisos. Sua função será calcular as vigas utilizando a contribuição das lajes no cálculo das vigas. O projeto de formas do primeiro pavimento já está finalizado, conforme a Figura 3.19. As medidas estão em centímetros.

Figura 3.19 | Planta de formas do primeiro pavimento



Fonte: elaborada pela autora.

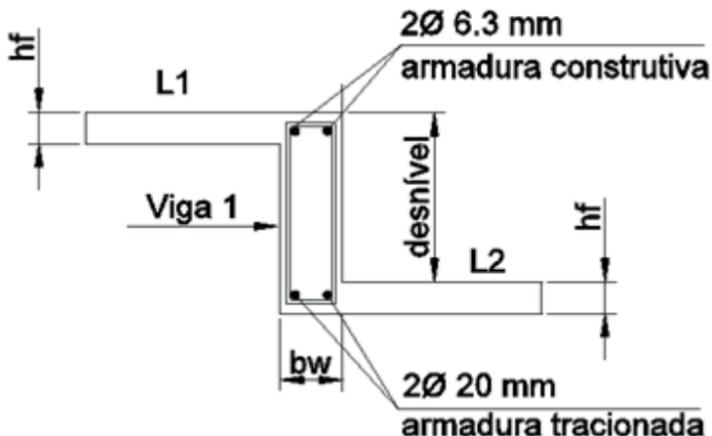
Para a planta de formas recebida (Figura 3.19), algumas vigas poderão contar com a contribuição da laje no seu dimensionamento. Quais as vigas que poderão ser dimensionadas com seção T e quais serão com seção L?

- a) As vigas V4 e V5 serão seção T e as vigas V1, V2, V3 e V6 serão seção L.
- b) Nenhuma viga será em seção T e as vigas V1, V2, V3 e V6 serão em seção L.
- c) As vigas V4 e V5 serão em seção T e nenhuma viga será em seção L.
- d) Nenhuma viga será em seção T e as vigas V2 e V3 serão em seção L.
- e) Nenhuma viga será em seção T e as vigas V2, V3 e V4 serão em seção L.

**2.** O projeto da jardineira de um conjunto residencial foi desenvolvido em um software de cálculo que forneceu dois cortes de uma viga contínua, com dois vãos. Um dos cortes está passando pela região de momento positivo e outro corte pela região de momento negativo.

Sabe-se que essa viga recebe carga de duas lajes (L1 e L2), que estão em toda extensão da viga, conforme o corte da Figura 3.20.

Figura 3.20 | Corte Viga 1



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando que ambas as lajes poderiam contribuir com o cálculo dessa viga, pelo corte representado na Figura 3.20, podemos afirmar que:

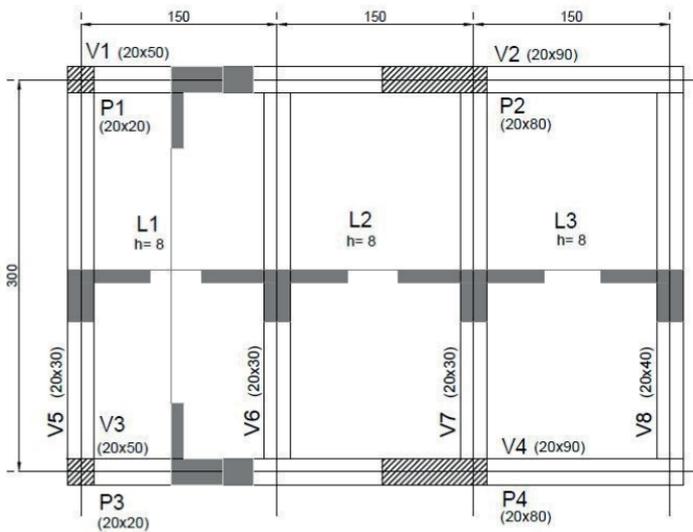
- a) Esse corte está passando pelo momento negativo da viga 1 e a laje L1, poderá contribuir no dimensionamento dessa viga, ajudando a resistir às tensões de compressão atuantes nela.
- b) Esse corte está passando pelo momento positivo da viga 1 e a laje L1, poderá contribuir no dimensionamento dessa viga, ajudando a resistir às tensões de compressão atuantes nela.

c) Esse corte está passando pelo momento negativo da viga 1 e a laje L2, poderá contribuir no dimensionamento dessa viga, ajudando a resistir às tensões de compressão atuantes nela.

e) Esse corte está passando pelo momento positivo da viga 1 e a laje L2, poderá contribuir no dimensionamento dessa viga, ajudando a resistir às tensões de compressão atuantes nela.

**3.** Dando continuidade ao projeto da fábrica de pisos, após uma semana, você recebeu a planta de formas da cobertura de um novo prédio, conforme a Figura 3.21. Você deverá usar o mesmo critério utilizado no projeto anterior, considerando a contribuição das lajes no cálculo das vigas. As medidas estão em centímetros.

Figura 3.21 | Planta de formas da cobertura



Fonte: elaborada pela autora.

Quanto será o valor da largura colaborante ( $b_f$ ) das vigas V2 e V4? Considerar o vão efetivo 160 cm.

- a) 52 cm.
- b) 100 cm.
- c) 36 cm.
- d) zero.
- e) 140 cm.

## Seção 3.2

### Viga T com compressão parcial da mesa

#### Diálogo aberto

Caro aluno, estamos praticamente no meio de nossa jornada e a bagagem adquirida até agora, já faz de você um profissional capacitado a discutir sobre o concreto armado, as vigas de seção retangular e suas possibilidades de dimensionamento, e a introdução às vigas com seção T, iniciada na seção anterior.

Nesta seção, iremos estudar como se dimensiona uma viga com seção T, armadura simples e LN localizada na mesa (compressão parcial da mesa).

Após o aprendizado dessa seção, você estará apto a retomar seu projeto da lavanderia e encarar o novo desafio, que é atender a um comentário do cliente.

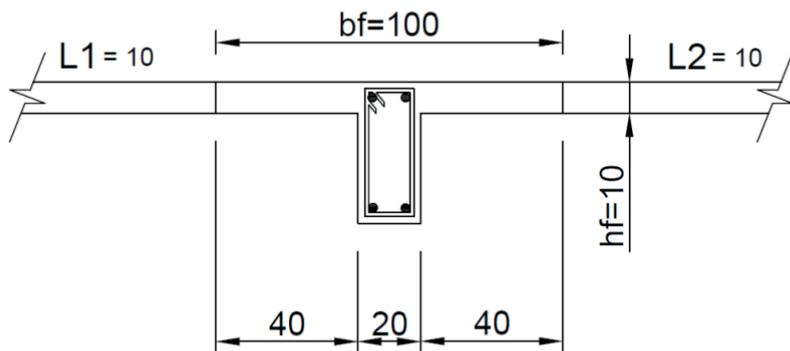
Esse cliente, não costuma utilizar vigas com armadura dupla em seus projetos e você precisou armar a viga V4 do projeto de Cascavel, com armadura dupla, em função do acréscimo de carga provocado pela consideração do sismo e aumento do cobrimento das armaduras, por ser região litorânea.

Seu desafio será encontrar uma solução para dimensionar V4 sem a consideração de armadura dupla e mantendo a seção transversal com 20x40 cm.

Diante da solicitação do cliente e do aprendizado adquirido, você irá verificar se a utilização de viga T, é uma boa opção para solucionar o problema.

Na seção anterior, você já determinou a largura colaborante que será utilizada nos cálculos e está representada na Figura 3.22.

Figura 3.22 | Detalhe da largura colaborante da V4.



Fonte: elaborado pelo autor.

Com a determinação da largura,  $b_f$ , você percebeu que é interessante o uso de seção T, pois, além de ser mais próximo da realidade do comportamento estrutural (vigas e lajes trabalhando juntas), é possível obter uma redução da área de aço necessária, devido ao acréscimo de área comprimida de concreto.

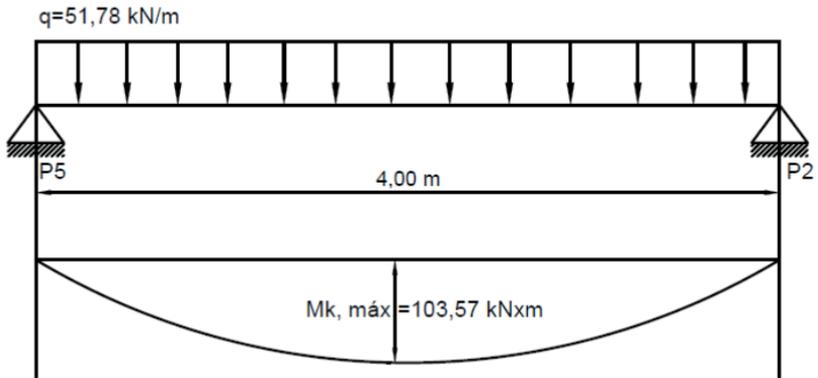
Aproveitando o desafio de redimensionamento da viga V4 solicitado pelo cliente, você também deverá confirmar se realmente há um ganho na área de aço necessária para essa viga, se comparada com a de seção retangular e armadura dupla.

Normalmente, os engenheiros de estruturas, iniciam o projeto considerando a colaboração das lajes no cálculo das vigas, por ser mais realista, no entanto, alguns preferem deixar essa contribuição como uma reserva futura, para o caso de alguma mudança no projeto.

No caso da lavanderia, você calculou todos os projetos (Belo Horizonte, Recife e Cascavel) para seção retangular com armadura simples, exceto a viga V4 do projeto de Cascavel, que não atendeu ao ELU para seção retangular com armadura simples, e você foi obrigado a utilizar armadura dupla.

Após a definição da largura colaborante na seção 1, e conhecendo o valor do momento de cálculo fornecido pelo software,  $M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$ , conforme representado no diagrama de momento da Figura 3.23, você poderá facilmente resolver o desafio.

Figura 3.23| Momento fletor característico da viga V4 - projeto Cascavel.



Fonte: elaborado pelo autor.

Relembrando que Cascavel é região litorânea com possibilidade da ocorrência de abalos sísmicos, onde os parâmetros adotados para essa região foram: concreto classe C30, aço CA-50, cobrimento das armaduras das vigas de 4 cm.

Para que você consiga resolver esse novo desafio, fique atento as equações de equilíbrio e as formulações extraídas delas. Boa sorte e bons estudo!

## Não pode faltar

Como visto na seção anterior, as vigas em concreto armado convencional com seção T, são aquelas que contam com a colaboração de uma parcela da laje no seu dimensionamento.

Na realidade, a viga continua com seção retangular, no entanto, no dimensionamento incluímos as abas (laje) em ambos os lados formando a geometria de uma letra T, nesse caso, estamos admitindo o trabalho conjunto da viga com a laje.

Além da geometria em forma de T, temos também o caso onde a laje está nivelada com a viga em apenas um dos lados. Nesse caso, teremos a seção tipo L.

Independente se a laje contribui com seção T ou L, o cálculo das armaduras é o mesmo. A diferença está apenas na dimensão da mesa colaborante.

Agora vamos nos aprofundar um pouco mais sobre o assunto e entender como se dimensiona uma viga com seção T (ou L), com compressão parcial da mesa colaborante e armadura simples.

### Seção T com armadura simples e compressão parcial da mesa

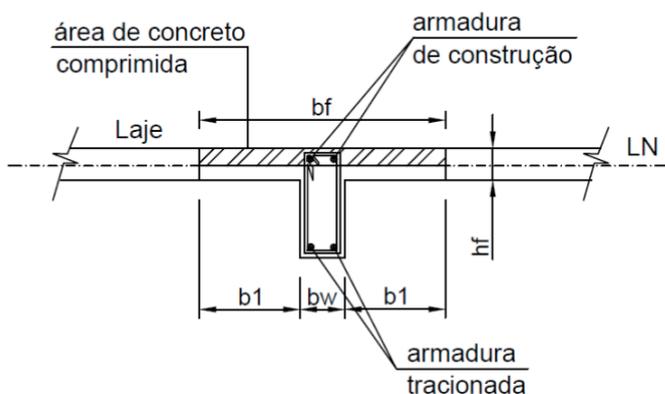
Armadura simples já é um assunto que você domina, basta recapitular a Unidade 2, para vigas com seção retangular, o mesmo conceito é válido para seção T, ou seja, uma viga com armadura simples é aquela onde a armadura é resistente à flexão, está na região tracionada da viga e na região comprimida, estão as armaduras construtivas ou porta estribos.

A novidade para seção T com armadura simples é que a LN pode estar localizada na mesa ou na alma da viga.

A situação onde a LN corta a alma, ou seja, viga com compressão total da mesa, será estudada na próxima na Seção 3.3.

Para o caso da LN cortando a mesa ou chegando até o limite máximo da espessura da laje, conforme a Figura 3.24, dizemos que a viga tem compressão parcial da mesa.

Figura 3.24 | Viga com compressão parcial da mesa



Fonte: elaborada pela autora.



Refleta

Você saberia dizer por que quando adotamos seção T para o cálculo das vigas, temos uma redução da armadura, se comparada com seção retangular?

## Cr terio para dimensionamento com compressão parcial da mesa

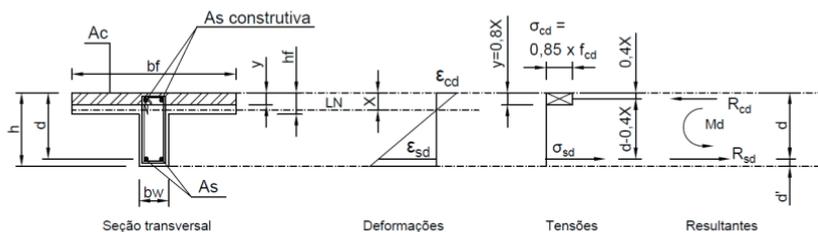
Sabemos que a área comprimida de concreto de uma viga, resultada da largura multiplicada pela altura da região comprimida da viga, que corresponde   altura ( $y$ ), do diagrama retangular simplificado de tensões é ( $y = 0,8 \times X$ ).

Dessa forma, para identificarmos se a viga   seção T com compressão parcial da mesa, basta verificarmos se  $y = 0,8 \times X \leq h_f$ , sendo que,  $h_f$  corresponde   altura da laje (ou da mesa da viga).

## C culo da armadura de flexão simples com compressão parcial da mesa

Assim como no caso de vigas com seção retangular, os esforços internos resistentes das vigas com seção T são formulados por meio das equações de equilíbrio das forças normais,  $\Sigma N = 0$  e dos momentos fletores,  $\Sigma M = 0$ , conforme representado na Figura 3.25.

Figura 3.25 | Viga com compressão parcial da mesa - Diagramas de deformação, tensão e resultantes



Fonte: elaborada pela autora.

Equilíbrio de forças normais:

$$R_{cd} = R_{sd}$$

$$R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c$$

$A_c = (0,8 \times X) \times b_f$  - Como estamos analisando a hipótese de LN localizada na mesa, adotamos a largura da viga como sendo a largura colaborante  $b_f$ .

$$\sigma_{cd} = 0,85 \times f_{cd}$$

Portanto, a resultante de cáculo do concreto   compressão será:

$$R_{cd} = \sigma_{cd} \times A_c \Rightarrow R_{cd} = (0,85 \times f_{cd}) \times (0,8 \times X \times b_f) \Rightarrow R_{cd} = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd}$$

A resultante de cálculo do aço à tração será:

$$R_{sd} = \sigma_{sd} \times A_s$$

### Equilíbrio dos momentos fletores

As resultantes do concreto e do aço, Figura 3.25, formam um binário, que constituem o momento resistente ou momento de cálculo ( $M_d$ ). A soma desses momentos resulta em zero,  $\Sigma M = 0$ .

Sabemos que:

$$M_d = R_{cd} \times z \quad \text{e} \quad M_d = R_{sd} \times z$$

$$z = (d - 0,4 \times X) \text{ , teremos:}$$

#### Equação 1:

$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \Rightarrow$  observe que na equação 1, a largura de viga adotada é a largura colaborante,  $b_f$ .

#### Equação 2:

$$M_d = \sigma_{sd} \times A_s \times (d - 0,4 \times X)$$



### Assimile

O uso da largura colaborante nas vigas, ou seja, seção T, aumenta a área comprimida de concreto e conseqüentemente diminui a área de aço tracionada, se comparada com as vigas de seção retangular.

### Cálculo da área de armadura simples

O cálculo das armaduras das vigas com seção T é feito a partir das equações de equilíbrio dos momentos fletores, assim como fizemos nas vigas de seção retangular.

O primeiro passo para calcular a armadura longitudinal de uma viga com seção T, é verificar se ela tem a mesa colaborante parcialmente ou totalmente comprimida.

Nessa seção, estamos estudando vigas de seção T com mesa parcialmente comprimida, ou seja:  $y = 0,8 \times X \leq h_f \Rightarrow$  sendo  $h_f$ , a espessura da laje.

Primeiramente, determina-se o valor de X pela equação 1 e verifica-se o domínio, conforme visto na Unidade 2, para vigas com seção retangular:

$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \Rightarrow$  equação 1 para determinar o valor de  $X$ .

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \quad \text{- domínio 2}$$

$$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d \quad \text{- domínio 3}$$

Além da análise dos domínios, verificamos também a relação entre a posição da linha neutra ( $X$ ) e a altura útil ( $d$ ), conforme a NBR-6118, item 14.6.4.3 (ABNT, 2014):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{MPa}.$$

Com o valor de  $X$  determinado, os domínios checados e atendendo ao limite da norma, o próximo passo é checar se a espessura comprimida de concreto ( $y$ ) está cortando a mesa ou a alma da viga. Essa verificação se faz comparando a espessura da mesa comprimida com a espessura da laje  $h_f$ .

Se  $y = 0,8 \times X \leq h_f$ , significa que a viga T, tem a mesa colaborante parcialmente comprimida, caso contrário, se  $y = 0,8 \times X > h_f$ , significa que a mesa colaborante é totalmente comprimida e será estudada na próxima seção.

Vale observar que, a situação mais comum nos projetos, é de vigas com seção T e mesa parcialmente comprimida.

Da equação 2, calcula-se a área de armadura tracionada ( $A_s$ ) e verifica-se se ela é  $\geq A_{s,min}$ :

**Equação 3:**

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)} \geq A_{s,min}; \text{ sendo que } A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c.$$

Lembre-se que a taxa de aço  $\rho_{min}$  é obtido na Tabela 2.3 (Unidade 2, Seção 1), em função da classe do concreto e a área de concreto corresponde a  $A_c = b_w \times h$ . Note que para armadura mínima usamos  $b_w$  e não  $b_f$ .

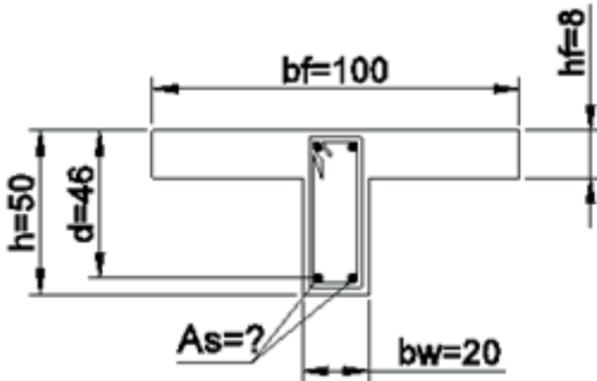
**Atenção**

Fique atento! As unidades utilizadas nas equações são em kN e cm



Calcular a área de armadura longitudinal tracionada necessária para a viga com seção T (Figura 3.23). São dados: aço CA-50; concreto C30; cobrimento das armaduras  $c=3\text{cm}$ ; Brita 19 mm; estribos de 5 mm; e momento característico  $M_k = 14000 \text{ kN} \times \text{cm}$ . Unidades em kN e cm.

Figura 3.26 | Seção transversal da viga



Fonte: elaborada pela autora.

**Resolução:**

1- Momento de cálculo:

$$M_d = M_k \times 1,4 \Rightarrow M_d = 14000 \times 1,4 = 19600 \text{ kN} \times \text{cm}$$

2- Determinação da posição da LN (X):

Equação 1:

$$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$19600 = 0,68 \times 100 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (46 - 0,4 \times X)$$

$$19600 = 6702,86 \times X - 58,29 \times X^2 \Rightarrow 58,29 \times X^2 - 6702,86 \times X + 19600$$

$$\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c$$

$$\Delta = (-6702,86)^2 - 4 \times 58,29 \times 19600 \Rightarrow 40358396,$$

$$X_{1,2} = \frac{-(b) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$$

$$X_1 = \frac{-(-6702,86) + 6352,82}{2 \times 58,29} = 112 \text{ cm} - \text{LN fora da}$$
  
seção transversal

$$X_2 = \frac{-(-6702,86) - 6352,82}{2 \times 58,29} = 3,00 \text{ cm} - \text{ok!}$$

### 3- Verificação dos domínios

Domínio

$$2: X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \Rightarrow 0,259 \times 46 = 11,91 \text{ cm} - \text{ok!}$$

Como resultou em domínio 2, não preciso verificar domínio 3 e limite da norma.

**3- Verificação da posição da LN: na mesa ou na alma da viga?**

$y = 0,8 \times X \leq h_f \Rightarrow 0,8 \times 3,00 \leq 8 \text{ cm} \Rightarrow 2,4 \text{ cm} < 8 \text{ cm}$   
- ok! LN localizada na mesa da viga: mesa colaborante parcialmente comprimida.

### 4- Cálculo da armadura

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)} \geq A_{s,\min} \Rightarrow A_s = \frac{19600}{\frac{50}{1,15} \times (46 - 0,4 \times 3,00)} = 10,06 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\min} = 0,15\% \times b_w \times h = \frac{0,15}{100} \times 20 \times 50 = 1,50 \text{ cm}^2 < A_s$$

- ok! (observe que para determinar a armadura mínima, usamos o  $b_w$  e não o  $b_f$ ).

### Detalhamento da armadura para compressão parcial da mesa

O detalhamento da seção transversal deverá ser feito de acordo com as premissas estudadas na Seção 1 da Unidade 2, respeitando os espaçamentos verticais ( $a_v$ ) e horizontais ( $a_h$ ) de acordo com a NBR-6118 e incluindo armadura de pele para vigas com seção transversal maior que 60 cm.



Complemente seus estudos sobre viga T, com a apresentação do professor Gerson Moacyr Sisniegas Alva, da Universidade Federal de Santa Maria, disponível em: <<https://bit.ly/2uUcBeg>>. Acesso em: 08 jun. 2018.

Para sedimentar seus conhecimentos de viga T, lei a página 117, parte IV, assunto 7 do livro **Caderno de Receitas de Concreto Armado**.

NETO, E. Caderno de Receitas de Concreto Armado, v. 1. .Rio de Janeiro: LTC, 2018. Disponível em: <<https://bit.ly/2LV5VDn>>. Acesso em: 08 jun. 2018.

## Sem medo de errar

Agora ficou fácil resolver vigas com seção T e mesa parcialmente comprimida! Basta você verificar a posição da LN, os domínios e usar as equações de equilíbrio dos momentos.

Seu desafio dessa seção é redimensionar a viga V4, do projeto de Cascavel, sem utilizar armadura dupla, mantendo a seção de 20x40 cm e verificar se existe ganho na área de aço, com uso de seção T se comparada com a seção retangular e armadura dupla.

Na seção anterior desta unidade, você já determinou qual a parcela das lajes L1 e L2, da Figura 3.1, irá contribuir no dimensionamento da viga V4.

Relembrando os dados da viga V4, para a região de Cascavel:  
 $M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm}$  ; concreto classe C30; aço CA-50; cobrimento das armaduras das vigas de 4 cm; estribos de 6,3 mm de diâmetro; largura colaborante (Figura 3.19)  $b_f = 100 \text{ cm}$  ;  $d = 35 \text{ cm}$  ; e espessura das lajes 10 cm.

Resolução:

Como você não pode armar a V4 com armadura dupla, sua opção após o estudo dessa seção é verificar a possibilidade de dimensionar a viga V4 com mesa colaborante, ou seja, seção T.

**1- Momento de cálculo:**

$$M_d = 14500 \text{ kN} \times \text{cm} \text{ - fornecido}$$

**2- Determinação da posição da LN:**

### Equação 1:

$$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \Rightarrow$$

$$14500 = 0,68 \times 100 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (35 - 0,4 \times X)$$

$$14500 = 5100 \times X - 58,29 \times X^2 \Rightarrow 58,29 \times X^2 - 5100 \times X + 14500$$

$$\Delta = (-5100)^2 - 4 \times 58,29 \times 14500 \Rightarrow 22629180$$

$$X_1 = \frac{-(-5100) + 4757,01}{2 \times 58,29} = 85 \text{ cm} - \text{LN fora da seção}$$

$$X_2 = \frac{-(-5100) - 4757,01}{2 \times 58,29} = 2,94 \text{ cm} - \text{ok!}$$

### 3- Verificação dos domínios

Domínio 2:  $X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \Rightarrow 0,259 \times 35 = 9,07 \text{ cm} > 2,94 \text{ cm}$  - ok!

### 4- Verificação da posição da LN: na mesa ou na alma da viga?

$$y = 0,8 \times X \leq h_f \Rightarrow 0,8 \times 2,94 \leq 10 \text{ cm} \Rightarrow 2,35 \text{ cm} < 10 \text{ cm} -$$

ok! LN localizada na mesa da viga. Mesa colaborante parcialmente comprimida.

### 5- Cálculo da armadura tracionada

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \times (d - 0,4 \times X)} \geq A_{s,\min} \Rightarrow A_s = \frac{14500}{\frac{50}{1,15} \times (35 - 0,4 \times 2,94)} =$$

$$9,86 \text{ cm}^2 \therefore 5\phi 16 \text{ mm}$$

$$A_{s,\min} = 0,15\% \times b_w \times h = \frac{0,15}{100} \times 20 \times 40 = 1,20 \text{ cm}^2 < A_s - \text{ok!}$$

### 6- Conclusão:

Para a seção de 20x40 cm, com a contribuição das lajes L1 e L2, teremos uma seção T, com mesa parcialmente comprimida, que resulta em 5 barras de 16 mm, ou seja,  $10 \text{ cm}^2$ .

Se adotarmos para armadura construtiva (face superior da viga)  $2\phi 6,3 \text{ mm} = 0,62 \text{ cm}^2$ , teremos um total de área de aço para armadura longitudinal da viga V4 =  $(10,00 + 0,62) = 10,62 \text{ cm}^2$ .

Na Unidade 2 a mesma viga, foi calculada com armadura dupla e resultou em: 4 barras de 20 mm para armadura tracionada, mais 2 barras de 10 mm para armadura comprimida, resultando em uma área de aço de  $V4 = (12,56 + 1,56) = 14,12 \text{ cm}^2$ .

Ou seja, usando a contribuição das lajes no dimensionamento da V4, vamos atender a solicitação do cliente e ainda teremos uma redução de aproximadamente 25% na área de aço.



#### Dica

Embora 25% de ganho de armadura longitudinal em uma viga possa parecer insignificante, temos que lembrar que projetos de estruturas prediais, possuem repetição considerável de vigas do pavimento tipo e nesse caso, a redução de armadura em função do dimensionamento das vigas com seção T, é bastante significativo.

## Avançando na prática

### Deformação do concreto

#### Descrição da situação-problema

Uma viga de seção transversal 19 x 50 cm, dimensionada com seção T e mesa colaborante parcialmente comprimida, está sendo solicitada por um momento que resultou na deformação máxima do aço no ELU. Sabe-se que a área total de concreto comprimido ( $A'_c$ ) é de  $480 \text{ cm}^2$  e a largura colaborante ( $b_f$ ) é de 80 cm.

Considerando: aço CA-50, cobrimento das armaduras: 3 cm e  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ . Determine a deformação sofrida pelo concreto comprimido dessa viga T.

#### Resolução da situação-problema

Sendo a altura da viga de 50 cm e o cobrimento das armaduras 3 cm, determinamos o valor da altura útil.

$$d = h - (c + 1) \Rightarrow 50 - (3 + 1) = 46 \text{ cm}$$

Sabendo -se que a área total comprimida é de  $480 \text{ cm}^2$ , determinamos a posição da LN, (x).

$$A'_c = b_f \times y \Rightarrow 480 = 80 \times y \Rightarrow y = 6 \text{ cm}$$

$$y = 0,8 \times X \Rightarrow X = \frac{6}{0,8} \Rightarrow X = 7,5 \text{ cm} - \text{posição da LN.}$$

Sabendo-se, que a máxima deformação do aço no ELU é de  $10\%$ , determinamos a deformação do concreto por semelhança de triângulos (Figura 3.22) no diagrama de deformações:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{X} = \frac{\varepsilon_{sd}}{d - X} \Rightarrow \varepsilon_{cd} = \left[ \frac{0,01}{(46 - 7,5)} \right] \times 7,5 \Rightarrow \varepsilon_{cd} = 1,94\%$$

deformação do concreto comprimido.

## Faça valer a pena

**1.** Uma viga bi apoiada existente, com seção de 20x40 cm, foi armada na região tracionada com  $4\phi 20 \text{ mm}$  de aço CA-50 e cobrimento da armadura de 3 cm.

Sabe-se que essa viga suporta um momento característico de  $M_k = 8600 \text{ kN} \times \text{cm}$ , desde que haja a contribuição da laje no seu dimensionamento.

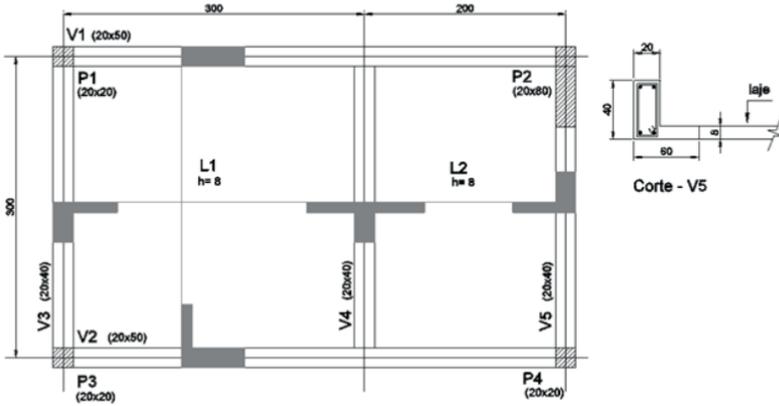
Para as alternativas a seguir, qual deverá ser a espessura mínima da laje, que irá contribuir com o cálculo dessa viga, considerando seção T com mesa parcialmente comprimida?

- a) 10 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) 50 cm

**2.** O projeto de formas da guarita de um centro empresarial (Figura 3.27) foi desenvolvido por um escritório terceirizado e você foi contratado para armar as vigas, considerando a colaboração das lajes no dimensionamento das armaduras.

O projeto de formas contém as seguintes informações: concreto C30; cobrimento das vigas 2,5 cm; aço CA-50.

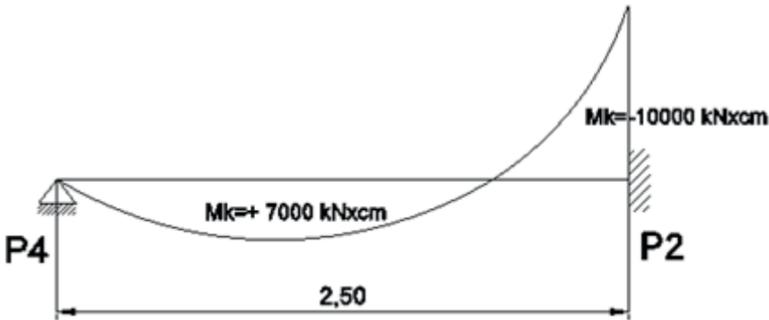
Figura 3.27 | Formas da cobertura da guarita



Fonte: elaborada pela autora.

Conhecendo o diagrama de momentos fletores da viga V5 (Figura 3.28). Qual a área de armadura negativa necessária para essa viga?

Figura 3.28 | Diagrama de momentos fletores da V5



Fonte: elaborada pela autora.

- $2\phi 20 \text{ mm}$
- $3\phi 20 \text{ mm}$
- $4\phi 20 \text{ mm}$
- $2\phi 16 \text{ mm}$
- $3\phi 16 \text{ mm}$

**3.** No estudo de vigas com seção T, verificamos a possibilidade da laje contribuir com o dimensionamento da armadura tracionada da viga. Existem duas opções para o cálculo: quando a mesa está parcialmente comprimida e quando a mesa está totalmente comprimida.

Dizer que a mesa está parcialmente comprimida, significa que:

- a) A linha neutra é zero e nesse ponto a deformação corta a mesa.
- b) A linha neutra corta a alma e nesse ponto a deformação do concreto é **3,5‰**.
- c) A linha neutra corta a mesa e nesse ponto a deformação do concreto é **3,5‰**.
- d) A linha neutra corta a mesa e nesse ponto a deformação é zero.
- e) A linha neutra corta a alma da viga e nesse ponto a deformação é zero.

## Seção 3.3

### Viga T com compressão total da mesa

#### Diálogo aberto

Estamos na reta final do cálculo e dimensionamento de vigas! De modo geral, as vigas de seção retangular (armadura simples e armadura dupla) e as vigas de seção T com mesa parcialmente comprimida, constituem a maior parte de um projeto de estruturas prediais em concreto armado. Podemos dizer que você já conquistou a maior parcela de conhecimento relacionado às vigas!

Após muito trabalho e muitos desafios vencidos, finalmente você obteve a solução para a viga mais carregada do projeto de Cascavel, a V4. Na seção anterior, com a utilização de seção T e mesa parcialmente comprimida no dimensionamento, foi possível atender à solicitação do cliente de não usar armadura dupla nessa viga.

Além de encontrar a solução, você também constatou que a contribuição da laje no dimensionamento dessa viga resultou em uma redução de 25% na armadura longitudinal tracionada, se comparada com a solução em armadura dupla. Soluções econômicas mantendo a segurança e desempenho da edificação fazem parte dos objetivos da nossa área.

Projeto de vigas concluído e revisado, é hora do *check list* para a emissão final dos documentos ao cliente.

Você verificou a existência de uma lacuna ainda não preenchida. As vigas da escada (VEs) não foram dimensionadas e detalhadas, embora você tenha previsto no projeto de formas do primeiro pavimento (Figura 3.1 – planta de formas).

Sua previsão era uma única viga central (VE) para a escada que tem largura de 120 cm, no entanto, o projeto de arquitetura em sua última revisão demanda duas vigas (VEs) de 18x30 cm, uma em cada borda da escada, e laje de 8 cm.

Essas vigas da escada (VE) são inclinadas e apoiadas na viga baldrame (VB6) e na viga do primeiro pavimento (V2), como podemos ver na Figura 3.29.

Quanto aos carregamentos, a sobrecarga adotada na escada foi de  $3\text{ kN} / \text{m}^2$  - conforme NBR-6120 (ABNT, 1980) para acesso ao público ou para lavanderia.

Atualmente, os softwares de cálculos estruturais permitem que a escada seja modelada e dimensionada juntamente com o restante do projeto, mas por ser uma escada simples, você optou por lançar apenas os carregamentos na entrada gráfica do software e obter os esforços (momentos), para cálculo manual das vigas da escada (VEs).

Esse será seu último desafio sobre o assunto vigas: verificar se o pré-dimensionamento das VEs (18x30 cm) feito pela arquitetura, satisfaz o ELU, adotando seção T e armadura simples.

Para vencer esse desafio, você terá que ficar atento ao estudo das vigas com seção T, no entanto, esse estudo ainda não está finalizado.

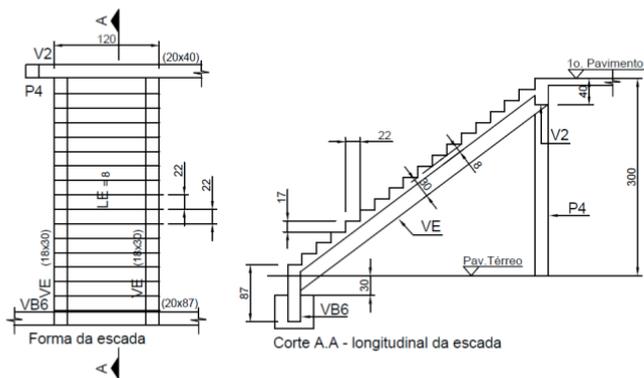
Nessa seção, você aprenderá como solucionar uma viga T, caso a LN esteja posicionada na alma da viga. Essa situação é a que chamamos de compressão total da mesa colaborante, com isso, seu primeiro passo na resolução do desafio, será checar qual a posição da linha neutra das vigas da escada e representar na seção transversal a posição da LN encontrada.

Novas equações de equilíbrio serão deduzidas para essa situação e permitirão que você conclua finalmente o projeto!

Todos os dados geométricos de pré-dimensionamento das vigas VEs estão no projeto específico de formas da escada (Figura 3.29), que será emitido ao cliente. Você deve checar as dimensões adotadas pela arquitetura e alterar, caso necessário.

Do relatório de cálculo fornecido pelo software, você obteve o momento das VEs,  $M_k = 1719\text{ kN} \times \text{cm}$  - cada uma, conforme diagrama de momentos da Figura 3.30.

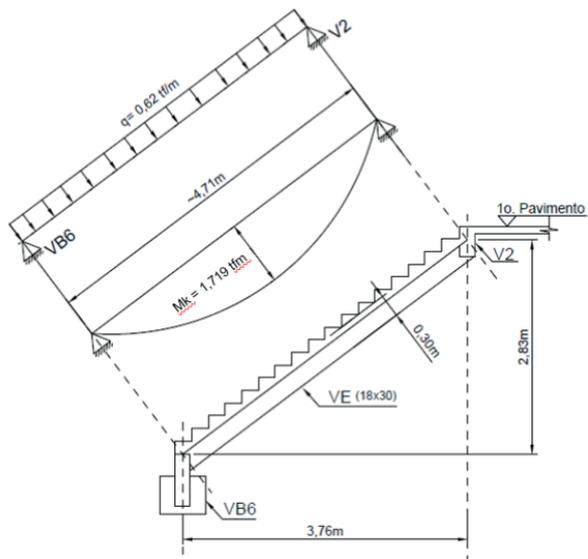
Figura 3.29 | Formas da escada da lavanderia - VE pré-dimensionada (18x30 cm).



**Nota: medidas em centímetros**

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.30 | Diagrama de momentos fletores - VE pré-dimensionada (18x30 cm)



Fonte: elaborada pela autora.

Lembre-se que para o dimensionamento, é mais interessante calcular a escada utilizando os parâmetros de cálculo da região com ambiente mais desfavorável para a estrutura, assim a mesma viga, poderá ser utilizada nos 3 projetos (Belo Horizonte, Recife e Cascavel).

Dados da região mais desfavorável (Cascavel):

cobrimento das armaduras: 4 cm,  $< f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , aço CA-50, estribos  $\phi 6,3 \text{ mm}$  (adotado) e brita 19 mm.

Composição do carregamento da laje:

peso próprio =  $0,08 \times 2,5 = 0,20 \text{ tf / m}^2$ ; peso dos degraus =  $0,085 \times 2,5 = 0,21 \text{ tf / m}^2$ ; sobrecarga =  $0,30 \text{ tf / m}^2$ ; revestimento adotado =  $0,10 \text{ tf / m}^2 \Rightarrow$  Totalizando =  $0,81 \text{ tf / m}^2$

Para a laje de 1,20m, teremos em cada viga:

$$0,81 \times \frac{1,20}{2} = 0,49 \text{ tf / m} + pp \text{ viga} = 0,62 \text{ tf / m}$$

Boa sorte!

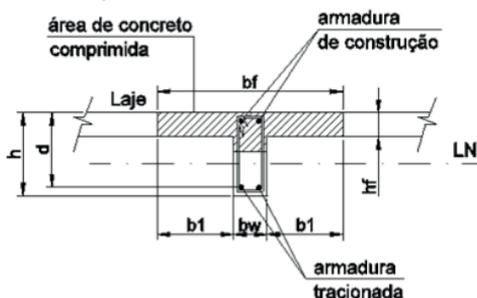
## Não pode faltar

As vigas com seção T e armadura simples não são mais novidade para você, no entanto, ainda existe uma opção de cálculo que exige uma área maior de concreto comprimido. Estamos falando da viga com seção T e compressão total da mesa.

### Seção T com armadura simples para compressão total da mesa

A viga com seção T e compressão total da mesa, é aquela onde a LN está cortando a alma da viga, conforme representado na Figura 3.31, ou seja, existe uma parcela maior de compressão do concreto na deformação, e apenas a área composta pela espessura da laje multiplicada pela largura colaborante, não é suficiente para satisfazer o equilíbrio da seção adotada.

Figura 3.31 | Viga com compressão total da mesa.



Fonte: elaborada pela autora



O engenheiro é quem define se as vigas do projeto serão dimensionadas para seção retangular ou seção T.

As vigas com seção T e LN na alma, são chamadas de viga T com mesa totalmente comprimida.

A opção de mesa totalmente comprimida é mais comum em casos de lajes com pouca espessura, como por exemplo, as lajes pré-fabricadas, onde a largura colaborante corresponde a capa de concreto, que normalmente é de 5 cm.

Para você começar a se familiarizar com os diferentes tipos de lajes, a Figura 3.32, mostra um exemplo de laje pré-fabricada treliçada com preenchimento em isopor (EPS) e outra com blocos cerâmicos. Na próxima unidade, onde estudaremos as lajes, teremos outros exemplos.

Figura 3.32 | Laje pré-fabricada, preenchida com EPS



Fonte: <<https://bit.ly/2KGnFLn>>. Acesso em: 18 jun. 2018

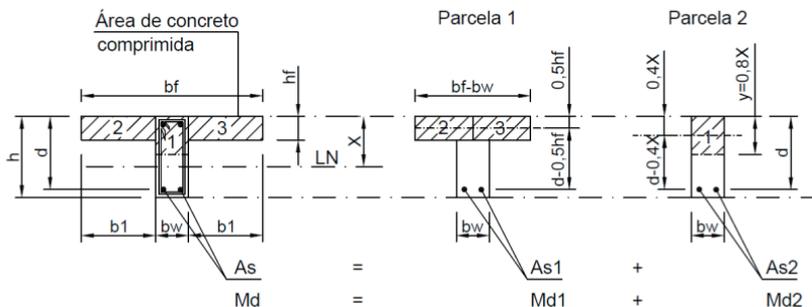
### Critério para dimensionamento com compressão total da mesa

Para facilitar os cálculos, vamos dividir a seção T em duas seções já conhecidas, conforme a Figura 3.33.

A área comprimida de concreto da viga com seção T e compressão total da mesa resulta da soma das áreas distintas (1,2 e 3), representadas na Figura 3.33. A parcela 1 resulta da soma das áreas comprimidas 2 e 3 :  $A'_1 = (b_f - b_w) \times h_f$  e a parcela 2, resulta da área comprimida 1:  $A'_2 = b_w \times y$ .

Definimos como seção T com mesa total comprimida se atender a condição:  $y = 0,8 \times X > h_f$ .

Figura 3.33 | Decomposição da seção T em duas parcelas

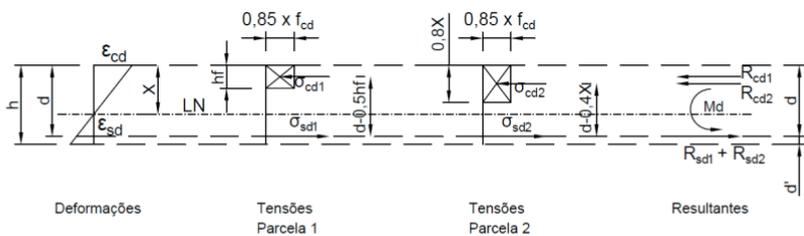


Fonte: elaborada pela autora.

### Cálculo da armadura de flexão simples para compressão total da mesa

Como visto na seção anterior, os esforços internos resistentes das vigas com seção T, são formulados por meio das equações de equilíbrio das forças normais  $\Sigma N = 0$  e dos momentos fletores  $\Sigma M = 0$ , conforme representado na Figura 3.34.

Figura 3.34 | Viga com compressão total da mesa - Diagramas de deformação, tensão e resultantes



Fonte: elaborada pela autora.

#### Equilíbrio de forças normais - parcela 1:

$$R_{cd1} = R_{sd1}$$

$$R_{cd1} = \sigma_{cd1} \times A'_{c1}$$

$$A'_{c1} = (b_f - b_w) \times h_f$$

$$\sigma_{cd1} = \sigma_{cd2} = 0,85 \times f_{cd}$$

Equilíbrio de forças normais - parcela 2:

$$R_{cd2} = R_{sd2}$$

$$R_{cd2} = \sigma_{cd2} \times A'_{c2}$$

$$A'_{c2} = (0,8 \times X) \times b_w$$

Portanto, as resultantes de cálculo do concreto à compressão,

$$\text{serão: } R_{cd1} = \sigma_{cd1} \times A'_{c1} \Rightarrow R_{cd1} = (0,85 \times f_{cd}) \times (b_f - b_w) \times h_f$$

$$R_{cd2} = \sigma_{cd2} \times A'_{c2} \Rightarrow R_{cd2} = (0,85 \times f_{cd}) \times (0,8 \times X) \times b_w$$

As resultantes de cálculo do aço à tração, serão:

$$R_{sd1} = \sigma_{sd1} \times A_{s1} \Rightarrow f_{yd} \times A_{s1}$$

$$R_{sd2} = \sigma_{sd2} \times A_{s2} \Rightarrow f_{yd} \times A_{s2}$$

Equilíbrio dos momentos fletores

As resultantes do concreto e do aço, Figura 3.34, formam dois binários, que constituem os momentos resistentes ou momentos de cálculo ( $M_{d1}$  e  $M_{d2}$ ). A soma do momento atuante com os momentos resistentes, resulta em zero,  $\Sigma M = 0$ .

Sabemos que:

$$M_d = M_{d1} + M_{d2}$$

$$M_{d1} = R_{cd1} \times z_1 \text{ e } M_{d1} = R_{sd1} \times z_1$$

$$z_1 = (d - 0,5 \times h_f)$$

$$M_{d2} = R_{cd2} \times z_2 \text{ e } M_{d2} = R_{sd2} \times z_2$$

$$z_2 = (d - 0,4 \times X), \text{ teremos:}$$

Equação 1:

$$M_{d1} = \{(0,85 \times f_{cd}) \times [(b_f - b_w) \times h_f] \times (d - 0,5 \times h_f)\}$$

Equação 2:

$$M_d = M_{d1} + M_{d2} \Rightarrow M_{d2} = M_d - M_{d1}$$

Equação 3:

$$M_{d2} = \{(0,85 \times f_{cd}) \times [(0,8 \times X) \times b_w] \times (d - 0,4 \times X)\} \Rightarrow$$

$$M_{d2} = 0,68 \times b_w \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

equação já conhecida da seção retangular

**Equação 4:**

$$M_{d2} = f_{yd} \times A_{s2} \times (d - 0,4 \times X)$$

**Equação 5:**

$$M_{d1} = f_{yd} \times A_{s1} \times (d - 0,5 \times h_f)$$

**Cálculo da área de armadura simples**

O primeiro passo para calcular a armadura longitudinal tracionada de uma viga com seção T, é verificar se ela tem a mesa colaborante parcialmente ou totalmente comprimida.

Nessa seção, estamos estudando vigas com seção T, com mesa totalmente comprimida, ou seja:  $y = 0,8 \times X > h_f \Rightarrow$  sendo  $h_f$  a espessura da laje.

Determina-se o valor da posição da LN (X) e verifica-se o domínio por onde passa.

**Determinação de X:**

$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$  - observe que iniciamos adotando a largura =  $b_f$ .

**Verificação dos domínios:**

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \quad \text{- domínio 2}$$

$$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d \quad \text{- domínio 3}$$

Verificamos também a relação entre a posição da linha neutra (X) e a altura útil (d), conforme a NBR-6118, item 14.6.4.3 (ABNT, 2014):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{MPa}.$$

Com o valor de X determinado, os domínios checados e atendendo ao limite da norma, o próximo passo é checar se a espessura comprimida de concreto (y) está cortando a mesa ou a alma da viga. Essa verificação se faz comparando a espessura da mesa comprimida (y) com a espessura da laje  $h_f$ .

**Checagem da posição da LN da seção T:**

Se  $y = 0,8 \times X > h_f$ , significa que a viga T, tem a mesa colaborante totalmente comprimida.

Da equação 5, calcula-se a área de armadura tracionada ( $A_{s1}$ ) da primeira parcela de concreto comprimido e da equação 4, calcula-se a área de armadura tracionada ( $A_{s2}$ ) da segunda parcela.

Cálculo dos momentos: parcelas 1 e 2:

$$M_{d1} = \{(0,85 \times f_{cd}) \times [(b_f - b_w) \times h_f] \times (d - 0,5 \times h_f)\} \text{ (equação 1)}$$

$$M_{d2} = M_d - M_{d1} \text{ (equação 2)}$$

Determinação da posição correta da LN, X:

$$M_{d2} = 0,68 \times b_w \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \text{ (equação 3)}$$

Cálculo da área de armadura longitudinal tracionada:

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{f_{yd} \times (d - 0,5 \times h_f)} \text{ (equação 4)}$$

$$\text{e } A_{s2} = \frac{M_{d2}}{f_{yd} \times (d - 0,4 \times X)} \text{ (equação 5)}$$

A área total de armadura tracionada será :  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$  - (Figura 3.33).

A área de armadura mínima também deve ser comparada com a armadura tracionada total ( $A_s$ ):  $A_s \geq A_{s,min}$  , sendo:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c .$$

### ! Atenção

Fique atento! Da mesma forma que nas seções anteriores, as unidades de medida utilizadas nas equações são em kN e cm.

### Exemplificando

Dada uma viga de seção (18x30 cm), que conta com a contribuição da laje,  $b_f = 40 \text{ cm}$  e espessura,  $h_f = 7 \text{ cm}$  , classe do concreto C30, cobrimento das armaduras 4 cm, altura útil adotada de 25 cm, que é solicitada por um momento fletor  $M_k = 8500 \text{ kN} \times \text{cm}$  . Qual o valor da armadura longitudinal tracionada,  $A_s$  , considerando a mesa colaborante?

1. Definição do momento de cálculo:

$$M_d = 1,4 \times M_k \Rightarrow M_d = 1,4 \times 8500 = 11900 \text{ kN} \times \text{cm}$$

## 2. Determinação de X:

$$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$11900 = 0,68 \times 40 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (25 - 0,4 \times X)$$

$$11900 = 1457,14 \times X - 23,31 \times X^2 \Rightarrow \Delta = 1013700,98$$

$$\frac{-(-1457,14) \mp \sqrt{1013700,98}}{2 \times 23,31} \Rightarrow X_1 = 9,66 \text{ cm} - \text{ok!}$$

## 3. Verificação dos domínios:

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \Rightarrow 0,259 \times 25 = 6,48 \text{ cm} - \text{não é domínio 2}$$

$$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d \Rightarrow 0,628 \times 25 = 15,70 \text{ cm} > 9,66 \text{ cm} - \text{ok! domínio 3}$$

## 4. Verificação da posição da linha neutra (X) com a altura útil (d):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \Rightarrow \beta_x = \frac{9,66}{25} = 0,39 < 0,45 - \text{ok!}$$

## 5. Checagem da posição da LN da seção T:

$$y = 0,8 \times X > h_f \Rightarrow y = 0,8 \times 9,66 = 7,73 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}$$

Situação de mesa colaborante totalmente comprimida.

## 6. Cálculo dos momentos:

$$M_{d1} = \{(0,85 \times f_{cd}) \times [(b_f - b_w) \times h_f] \times (d - 0,5 \times h_f)\}$$

$$M_{d1} = \{(0,85 \times \frac{3,0}{1,4}) \times [(40 - 18) \times 7] \times (25 - 0,5 \times 7)\} = 6030,75 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M_{d2} = M_d - M_{d1} \Rightarrow$$

$$M_{d2} = 11900 - 6030,75 = 5869,25 \text{ kN} \times \text{cm}$$

## 7. Cálculo da posição correta da LN(X):

$$M_{d2} = 0,68 \times b_w \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \Rightarrow$$

$$5869,25 = 0,68 \times 18 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (25 - 0,4 \times X)$$

$$5869,25 = 655,71 \times X - 10,49 \times X^2 \Rightarrow \Delta = 183671,38$$

$$X_1 = \frac{-(-655,71) - \sqrt{183671,38}}{2 \times 10,49} = 10,83 \text{ cm} - \text{domínio 3!}$$

8. Verificação da posição da linha neutra (X) com a altura útil (d):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \Rightarrow \beta_x = \frac{10,83}{25} = 0,43 < 0,45 - \text{ok!}$$

9. Cálculo da área de armadura longitudinal tracionada:

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{f_{yd} \times (d - 0,5 \times h_f)} \Rightarrow$$

$$A_{s1} = \frac{6030,75}{\frac{50}{1,15} \times (25 - 0,5 \times 7)} = 6,45 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{M_{d2}}{f_{yd} \times (d - 0,4 \times X)} \Rightarrow$$

$$A_{s2} = \frac{5869,25}{\frac{50}{1,15} \times (25 - 0,4 \times 10,83)} = 6,53 \text{ cm}^2$$

A área total de armadura longitudinal tracionada será:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \Rightarrow 6,45 + 6,53 = 12,98 \text{ cm}^2 \sim 4\phi 20 \text{ mm}$$

$A_s \geq A_{s,\min}$ , assim temos que a armadura mínima será:

$$A_{s,\min} = \rho_{\min} \times A_c \Rightarrow 0,15\% \times 18 \times 30 = 0,81 \text{ cm}^2 < A_s$$



**Pesquise mais**

Para reforçar seu aprendizado, veja a animação "Concreto - Modelo resistente na flexão - Seção T - Armadura simples" em <<https://bit.ly/2OC4U4X>>. Acesso em: 01 ago. 2018.

### Detalhamento da armadura para compressão total da mesa

O detalhamento da seção transversal deverá ser feito de acordo com as premissas estudadas na Seção 1 da Unidade 2, respeitando

os espaçamentos verticais ( $a_v$ ) e horizontais ( $a_h$ ) de acordo com a NBR-6118 e incluindo armadura de pele para vigas com seção transversal maior que 60 cm.



Reflita

Você saberia dizer por que o detalhamento da armadura simples, na seção transversal de uma viga T, é o mesmo detalhamento de uma viga com seção retangular?



Pesquise mais

Você poderá aprimorar seus conhecimentos, utilizando o aplicativo (APP) de cálculo de vigas da empresa TQS. Basta baixar no seu celular!

## Sem medo de errar

Finalmente vamos concluir o estudo das vigas de concreto armado. Agora, quando você iniciar um projeto e optar por dimensionar as vigas com seção T, você vai notar que a maioria dos casos recai sobre a viga com mesa parcialmente comprimida.

Depois de toda essa bagagem adquirida, você pode retomar seu último desafio de vigas, que é a verificação do pré-dimensionamento e detalhamento da seção transversal das vigas da escada, VEs e a representação da seção transversal com o posicionamento da LN.

Lembrando que essas vigas permitem o acesso ao primeiro pavimento da lavanderia, conforme a Figura 3.29. As dimensões adotadas no pré-dimensionamento feito pela arquitetura foram: seção transversal de 18x30 cm e espessura de laje de 8 cm.

Do relatório de cálculo, você obteve o momento fletor (Figura 3.30),  $M_k = 1719 \text{ kN} \times \text{cm}$  para cada VE.

Lembre-se que, para o dimensionamento, é importante considerar os parâmetros de cálculo da região com ambiente mais desfavorável para a estrutura, no seu caso, o projeto de Cascavel.

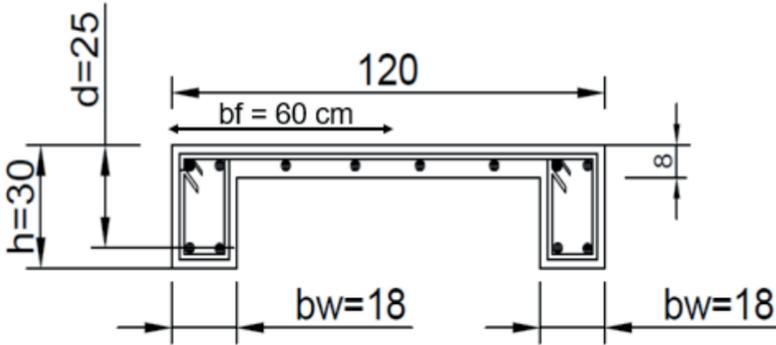
Dados da região: cobertura das armaduras: 4 cm,  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$  aço CA-50, estribos  $\phi 6,3 \text{ mm}$  (adotado), brita de 19 mm.

## Resolução:

### 1. Determinação da largura colaborante:

A largura total da escada é de 120 cm, portanto, cada viga poderá contar com 60 cm de mesa, conforme Figura 3.35.

Figura 3.35 | Corte transversal da VE - largura colaborante adotada



Fonte: elaborada pela autora.

### 2. Determinação do momento de cálculo:

$$M_k = 1719 \text{ kN} \times \text{cm} - \text{fornecido}$$

$$M_d = M_k \times 1,4 = 2406,60 \text{ kN} \times \text{cm}$$

### 3. Determinação da posição da LN (X):

$$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$2406,60 = 0,68 \times 60 \times X \times \frac{3,0}{1,4} \times (25 - 0,4 \times X)$$

$$2406,60 = 2185,71 \times X - 34,97 \times X^2 \Rightarrow X_1 = 1,12 \text{ cm}$$

### 4. Verificação dos domínios:

$$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \Rightarrow 0,259 \times 25 = 6,48 \text{ cm} > 1,12 \text{ cm} -$$

é domínio 2

### 5. Verificação da posição da linha neutra (X) com a altura útil (d):

$$y = 0,8 \times X > h_f \Rightarrow y = 0,8 \times 1,12 = 0,90 \text{ cm} \ll h_f = 8 \text{ cm} -$$

mesa colaborante parcialmente comprimida, conforme Figura 3.37.

\*\*\* Verificamos que devido ao baixo valor do momento fletor e a grande espessura da laje, recaímos em mesa parcialmente comprimida, visto na Seção 2 dessa unidade, portanto, basta calcular a área de aço.

6. Cálculo da área de armadura longitudinal e detalhamento -  
Figura 3.36:

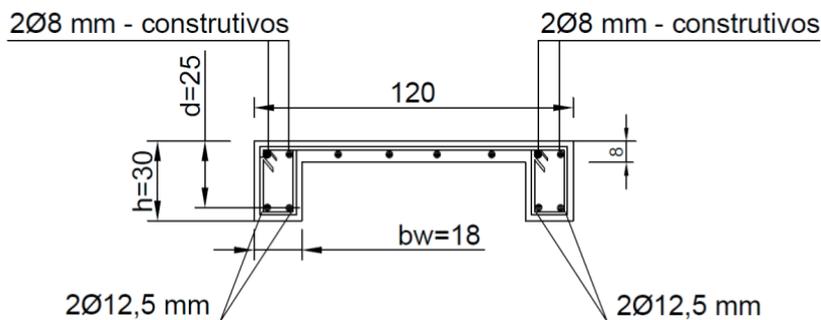
$$A_s = \frac{M_d}{f_{yd} \times (d - 0,4 \times X)} \Rightarrow$$

$$A_s = \frac{2406,60}{\frac{50}{1,15} \times (25 - 0,4 \times 1,12)} = 2,25 \text{ cm}^2 - \text{ adotado}$$

$2\phi 12,5 \text{ mm}$  em cada VE.

7. Detalhamento

Figura 3.36 | Corte transversal da VE - largura colaborante adotada



Fonte: elaborada pela autora.

7. Representação da posição da LN

Figura 3.37 | Posição (X) da LN encontrada



Nota: medidas em centímetros

Fonte: elaborada pela autora.

Aluno, faça o treinamento gratuito da TQS no link <<https://bit.ly/2vdUd06>> e modele a estrutura com os dados fornecidos desde a Unidade 2.



Você poderá utilizar a planta arquitetônica do problema proposto por meio do link <[https://cm-cls-content.s3.amazonaws.com/ebook/embed/qr-code/2018-2/estruturas-de-concreto-armado-l/u3/s3/planta\\_en\\_civil.dwg](https://cm-cls-content.s3.amazonaws.com/ebook/embed/qr-code/2018-2/estruturas-de-concreto-armado-l/u3/s3/planta_en_civil.dwg)> ou QR Code.

## Avançando na prática

### Cálculo da nervura de uma laje pré-fabricada treliçada

#### Descrição da situação-problema

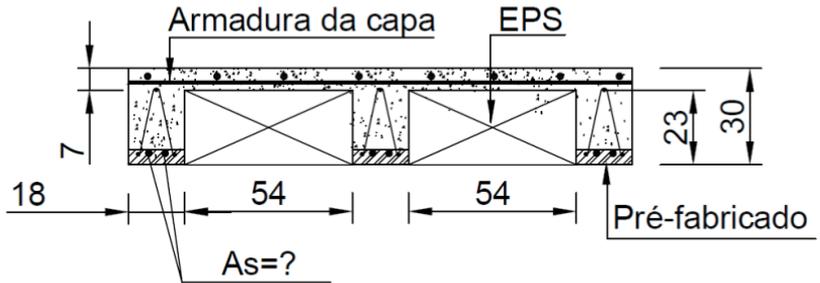
Em muitas obras o construtor opta por utilizar lajes pré-fabricadas no lugar das formas e escoramentos necessários para execução das lajes maciças de concreto armado.

Uma opção são as lajes treliçadas (Figura 3.38), que são pré-fabricadas com determinada armadura e, caso seja necessário, recebem um complemento de armadura sobre as vigotas, antes da concretagem da laje.

Suponha que você possua um escritório de projetos e precise dimensionar uma vigota de laje pré-fabricada treliçada. Essa laje pré-fabricada treliçada é bi apoiada, com preenchimento em EPS (isopor), em que sua altura total é de  $h=30$  cm e a capa de concreto de 7 cm. As vigotas dessa laje são pré-fabricadas com resistência característica do concreto à compressão de 25 MPa, aço CA-50 e cobrimento das armaduras de 2,50 cm.

A primeira vigota, representada na Figura 3.38, recebe um carregamento que resulta em um momento característico de 8100 kNxc. Qual deverá ser a armadura dessa vigota para que ela resista a esse esforço atuante e atenda ao ELU? Adotar  $d=25$  cm e vão efetivo de 4 m.

Figura 3.38 | Detalhe da laje pré-fabricada treliçada



Fonte: elaborada pela autora.

Observação: medidas em centímetros.

Resolução da situação-problema

1. Definição da largura colaborante:

Da Tabela 3.1 (Seção 2), obtemos valores de  $b_1$ :

$b_1 \leq$	$0,1 \times a = 0,1 \times 500 = 50 \text{ cm}$
$b_1 \leq$	$0,5 \times b_2 = 0,5 \times 54 = 27 \text{ cm}$

$$b_f = b_w + b_1 = 18 + 27 = 45 \text{ cm}$$

2. Definição do momento de cálculo:

$$M_d = 1,4 \times M_k \Rightarrow M_d = 1,4 \times 8100 = 11340 \text{ kN} \times \text{cm}$$

2. Determinação da posição da LN (X):

$$M_d = 0,68 \times b_f \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X)$$

$$11340 = 0,68 \times 45 \times X \times \frac{2,5}{1,4} \times (25 - 0,4 \times X)$$

$$11340 = 1366,07 \times X - 21,86 \times X^2 \Rightarrow \Delta = 874577,64$$

$$\frac{-(-1366,07) \mp \sqrt{874577,64}}{2 \times 21,86} \Rightarrow X_1 = 9,86 \text{ cm} - \text{ok!}$$

3. Verificação dos domínios:

$X \leq X_{2,3} = 0,259 \times d \Rightarrow 0,259 \times 25 = 6,475 \text{ cm}$  não é domínio 2.

$X \leq X_{3,4} = 0,628 \times d \Rightarrow 0,628 \times 25 = 15,70 \text{ cm} > 9,86 \text{ cm}$  - ok! domínio 3.

4. Verificação da posição da linha neutra (X) e a altura útil (d):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \Rightarrow \frac{9,86}{25} = 0,39 < 0,45 \text{ - ok!}$$

5. Checagem da posição da LN da seção T:

$y = 0,8 \times X > h_f \Rightarrow y = 0,8 \times 9,86 = 7,89 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}$  - (capa) - mesa colaborante totalmente comprimida.

6. Cálculo dos momentos:

$$M_{d1} = \{(0,85 \times f_{cd}) \times [(b_f - b_w) \times h_f] \times (d - 0,5 \times h_f)\}$$

$$M_{d1} = \{(0,85 \times \frac{2,5}{1,4}) \times [(45 - 18) \times 7] \times (25 - 0,5 \times 7)\} = 6167,81 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M_{d2} = M_d - M_{d1} \Rightarrow M_{d2} = 11340 - 6167,81 = 5172,19 \text{ kN} \times \text{cm}$$

7. Cálculo da posição correta de X (LN):

$$M_{d2} = 0,68 \times b_w \times X \times f_{cd} \times (d - 0,4 \times X) \Rightarrow$$

$$5172,19 = 0,68 \times 18 \times X \times \frac{2,5}{1,4} \times (25 - 0,4 \times X)$$

$$5172,19 = 546,43 \times X - 8,74 \times X^2 \Rightarrow \Delta = 117765,98$$

$$X_1 = \frac{-(-546,43) - \sqrt{117765,98}}{2 \times 8,74} = 11,63 \text{ cm} \text{ - domínio 3!}$$

8. Verificação da posição da linha neutra corta (X) e a altura útil (d):

$$\beta_x = \frac{X}{d} \leq 0,45 \Rightarrow \frac{11,63}{25} = 0,47 < 0,45 \text{ - LN na alma da viga,}$$

mesa colaborante totalmente comprimida.

9. Cálculo da área de armadura longitudinal:

$$A_{s1} = \frac{M_{d1}}{f_{yd} \times (d - 0,5 \times h_f)} \Rightarrow A_{s1} = \frac{6167,81}{\frac{50}{1,15} \times (25 - 0,5 \times 7)} = 6,60 \text{ cm}^2$$

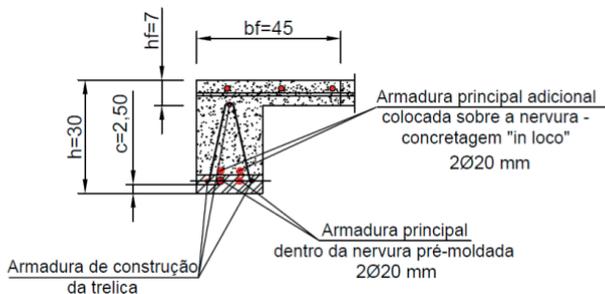
$$A_{s2} = \frac{M_{d2}}{f_{yd} \times (d - 0,4 \times X)} \Rightarrow A_{s2} = \frac{5172,19}{\frac{50}{1,15} \times (25 - 0,4 \times 11,22)} = 5,80 \text{ cm}^2$$

10. A área total de armadura longitudinal tracionada (Figura 3.39):

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \Rightarrow 6,60 + 5,80 = 12,40 \text{ cm}^2 \text{ --- } 4\phi 20 \text{ mm}$$

$$A_s \geq A_{s,\min} \Rightarrow A_{s,\min} = \rho_{\min} \times A_c \Rightarrow A_{s,\min} = 0,15\% \times 18 \times 30 = 0,81 \text{ cm}^2$$

Figura 3.39 | Detalhe da armadura da primeira vigota - laje pré-fabricada treliçada



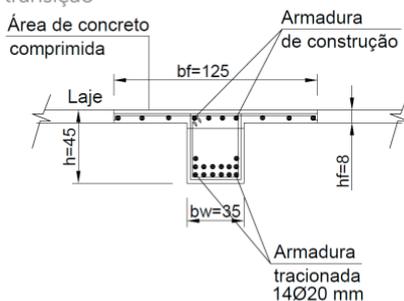
Fonte: elaborada pela autora.

## Faça valer a pena

**1.** Uma viga de transição é aquela normalmente situada no primeiro pavimento de um prédio de alvenaria estrutural sobre pilotis. Ela possui inércia elevada, pois tem a função de suportar o carregamento dos pilares locados sobre ela. Uma viga de transição, representada pela Figura 3.40, bi apoiada, com vão efetivo de 4 m e seção transversal de 25x45 cm e altura útil (d) de 41 cm, recebe 25 tf/m (2,5 kN/cm) de carga, relativos a 10 pisos superiores. Essa viga está nivelada pela face comprimida, em ambos os lados, com as lajes (hf=8 cm) do pavimento e conta com uma largura colaborante de 125 cm.

Para as condições da viga de transição descrita anteriormente, qual será o valor da área comprimida de concreto, quando solicitada? Considerar seção T.

Figura 3.40 | Viga de transição



Fonte: elaborada pela autora.

- a)  $A'_c = 0,05 m^2$ ;
- b)  $A'_c = 0,10 m^2$ ;
- c)  $A'_c = 0,15 m^2$ ;
- d)  $A'_c = 0,20 m^2$ ;
- e)  $A'_c = 0,30 m^2$ .

**2.** Você aprendeu na Unidade 3 que, além da seção retangular simples, é possível dimensionar uma viga considerando uma parcela de contribuição da laje no cálculo, ou seja, vigas com seção T.

Você aprendeu também que para essa condição, existem duas possibilidades de cálculo: uma possibilidade é quando a linha neutra está posicionada na mesa (na laje); e a outra possibilidade é quando a linha neutra está posicionada na alma da viga.

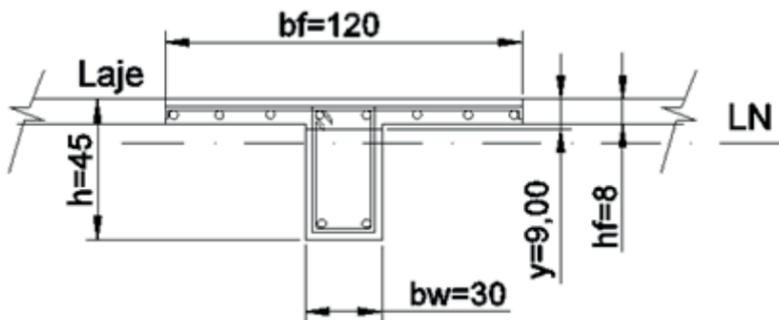
Para uma viga de seção T, em que a LN está posicionada na alma, dizemos que:

- a) A Viga T tem a mesa parcialmente comprimida e a deformação do concreto em que passa a LN é  $3,5\%$ .
- b) A Viga T tem a mesa parcialmente comprimida e a deformação do concreto em que passa a LN é zero.
- c) A Viga T tem a mesa totalmente comprimida e a deformação do concreto em que passa a LN é zero.
- d) A Viga T tem a mesa totalmente comprimida e a deformação do concreto em que passa a LN é  $3,5\%$ .
- e) A Viga T tem a mesa parcialmente comprimida e a deformação do concreto em que passa a LN é  $10\%$ .

**3.** Assim como no caso de vigas com seção retangular ou com seção T, e compressão parcial da mesa, as vigas com seção T e compressão total da mesa tem sua formulação para dimensionamento da armadura tracionada desenvolvida a partir das equações de equilíbrio dos momentos fletores atuantes e resistentes.

Para a viga, concreto C30, representada na Figura 3.41, qual o valor da resultante final do concreto à compressão?

Figura 3.41 | Seção transversal



Fonte: elaborada pela autora.

- a) Aproximadamente 5850 kN
- b) Aproximadamente 4850 kN
- c) Aproximadamente 3850 kN
- d) Aproximadamente 2850 kN
- e) Aproximadamente 1850 kN.

# Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, 221p, 2004.

CAMACHO, S. J. **Estudo das vigas**: flexão normal simples. Faculdade de Engenharia Ilha Solteira, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2LVOLVW>>. Acesso em: 11 jun. 2018.

NETO, E. **Cardeno de Receitas de Concreto Armado, Volume 1 Vigas**. LTC, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <<https://bit.ly/2LV5VDn>>. Acesso em: 08 jun. 2018.

SISNIEGAS, M. G. **Dimensionamento de Seções T**. Universidade Federal de Santa Maria. [s.d.]. Disponível em: <<https://bit.ly/2uUcBeg>>. Acesso em: 08 jun. 2018.

SOUZA, E. Tipos de lajes de concreto: vantagens e desvantagens. In: **ArchDaily**, 2018. Disponível em: <<https://bit.ly/2KGnfLn>>. Acesso em: 18 jun. 2018.

TQS. **TQS Treinamento**. Disponível em: <<https://bit.ly/2vdUd06>>. Acesso em: 01 ago. 2018.

Verton J. M. Alcantara: Engenheiro Civil. **Concreto - Modelo resistente na flexão - Seção T - Armadura simples**. Disponível em: <<https://bit.ly/2OC4U4X>>. Acesso em: 01 ago. 2018.

# Lajes de concreto armado

## Convite ao estudo

Estamos chegando ao final de nosso livro de Estruturas de Concreto Armado I e vamos iniciar o estudo de um novo elemento estrutural, a laje.

Você já consegue discutir de igual para igual com outros engenheiros sobre os conceitos e parâmetros do concreto armado, o dimensionamento e detalhamento das seções transversais das vigas de seção retangular e seção T.

Nessa nossa última etapa sobre lajes, você aprenderá o que são as lajes maciças, como elas podem ser armadas em função das suas dimensões, os tipos de vinculação possíveis nas bordas, as ações, espessuras e recobrimentos mínimos.

Além disso, como são calculadas as reações de apoio das lajes nas vigas, o cálculo, dimensionamento e detalhamento das lajes, o cálculo da armadura longitudinal mínima, diâmetros e espaçamentos mínimos e máximos das armaduras de flexão. Ufa! muito conhecimento nessa última unidade.

Para alcançar todo esse aprendizado, novos desafios serão lançados e seu trabalho e dedicação serão fundamentais nesse percurso. Relembrando que seu grande desafio final é o projeto de uma lavanderia com estrutura em concreto armado para um conjunto de prédios inteligentes a serem implantados em Belo Horizonte, Recife e Cascavel.

Você já finalizou o projeto de vigas e uma nova reunião foi realizada para discutir o projeto das lajes para todo empreendimento. Na reunião, você foi bem sucedido, pois

as lajes serão maciças em concreto armado e você havia previsto esse tipo de laje no projeto básico, inclusive utilizou as mesas colaborantes para o cálculo de uma viga no primeiro pavimento, a V4.

Para fechar nossos estudos, três novos desafios deverão ser vencidos, sendo que o primeiro e mais fácil de todos, será determinar quais as lajes do primeiro pavimento, serão armadas em uma ou em duas direções e explicar se é possível, por meio do enunciado, saber se existe continuidade entre as lajes.

Seguindo o cronograma, o passo seguinte será a determinação das ações que serão aplicadas nas lajes. As ações aplicadas foram discutidas na reunião e os dados fornecidos pelo arquiteto tornarão possível a obtenção final das ações e o sucesso desse desafio.

Com o cálculo final das ações você também deverá verificar se as deformações sofridas pelas lajes estão dentro dos limites da norma NBR-6118 e quais as parcelas de carga (rações de apoio) irão para cada viga.

Seu último desafio desta etapa será fazer manualmente o cálculo, dimensionamento das armaduras positivas e negativas e o detalhamento das lajes L1 e L2 do primeiro pavimento para a implantação do projeto em Belo Horizonte.

Vamos em frente, trabalho e dedicação, mãos à obra e bons estudos!

# Seção 4.1

## Conceito de lajes

### Diálogo aberto

Hoje é um dia especial, vamos iniciar nossa última unidade sobre a disciplina de Estruturas de Concreto Armado I.

Você deve comemorar por todo aprendizado adquirido nas unidades anteriores e que certamente contribuíram para o seu desenvolvimento profissional.

Nesse momento, você já está apto a discutir sobre os conceitos do concreto armado e sobre o cálculo, dimensionamento e detalhamento de vigas.

É hora de retomar o seu projeto da lavanderia que fará parte de um conjunto residencial de prédios inteligentes e que serão implantados em três cidades brasileiras com características ambientais distintas: Belo Horizonte, em Minas Gerais; Recife, em Pernambuco; e Cascavel, no Ceará.

Relembrando que o prédio da lavanderia é composto pelo pavimento térreo, primeiro pavimento e cobertura. O acesso ao primeiro pavimento é feito por uma escada externa que parte da viga de fundação VB6 e chega na viga V2, do primeiro pavimento.

Para os cálculos, você está utilizando um renomado software de cálculo de estruturas de concreto armado e alvenaria estrutural, no entanto, ao longo de sua trajetória do projeto, alguns desafios são propostos visando reforçar seu aprendizado.

Após a emissão final das vigas ao cliente, houve a primeira reunião do projeto para a fase de estudo das lajes, juntamente com as demais disciplinas envolvidas (arquitetura, instalações prediais, paisagismo etc.).

Sua função nessa reunião foi coletar o máximo de informações pertinentes ao seu projeto e reforçar o uso de lajes maciças. Após inúmeras discussões, ficou definido que as lajes serão mesmo maciças

em concreto armado, o que deixou você bastante satisfeito, afinal, essa tinha sido sua proposta no projeto básico, inclusive no dimensionamento de algumas vigas, você utilizou as lajes como mesa colaborante.

Além da definição do tipo de laje, ficaram definidas na reunião, as ações que deverão ser utilizadas no cálculo em função dos acabamentos e da utilização do prédio.

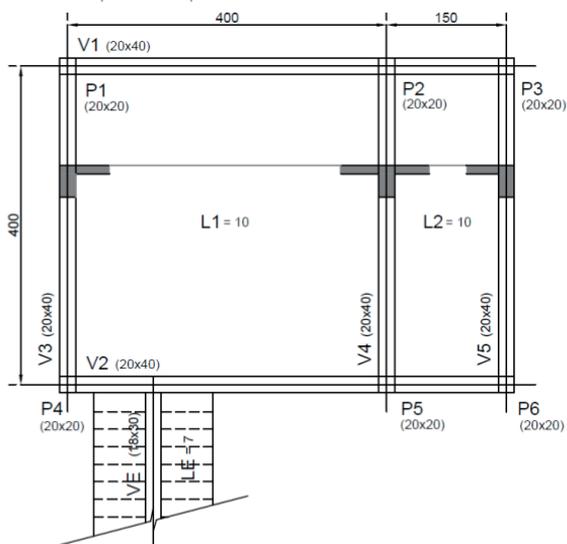
De volta ao escritório e de posse das informações necessárias, você iniciará a verificação da entrada de dados no software para o cálculo das lajes.

O projeto da lavanderia tem apenas duas lajes no primeiro pavimento, conforme a planta de formas (Figura 4.1). A laje L1 é formada por um painel de 4,00x4,00 metros de vão efetivo e a laje L2 tem um painel de 1,50x4,00 metros, ambas com 10 cm de espessura.

Seu primeiro desafio será determinar as condições de apoio de cada laje (apoiada, engastada, livre) e quais lajes desse pavimento serão armadas em uma ou em duas direções.

Para resolver o desafio, serão apresentadas as definições de lajes, como se determina as condições de apoio e a direção da armadura principal.

Figura 4.1 | Formas do primeiro pavimento da lavanderia



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora é arregaçar as mangas e bom trabalho!

## Não pode faltar

### Introdução

Antes de iniciarmos esta seção, vamos relembrar, observando a Figura 4.2, quais são os principais elementos estruturais de uma obra predial: vigas, lajes e pilares.

Figura 4.2 | Principais elementos estruturais - obra predial



Fonte: iStock.

Após o estudo das vigas de concreto armado na unidade anterior, vamos iniciar o estudo de um novo elemento estrutural: a laje.

Existem inúmeros tipos de lajes, cada um com suas vantagens e desvantagens, sendo que em alguns casos, a escolha do tipo de laje está vinculada ao projeto arquitetônico.

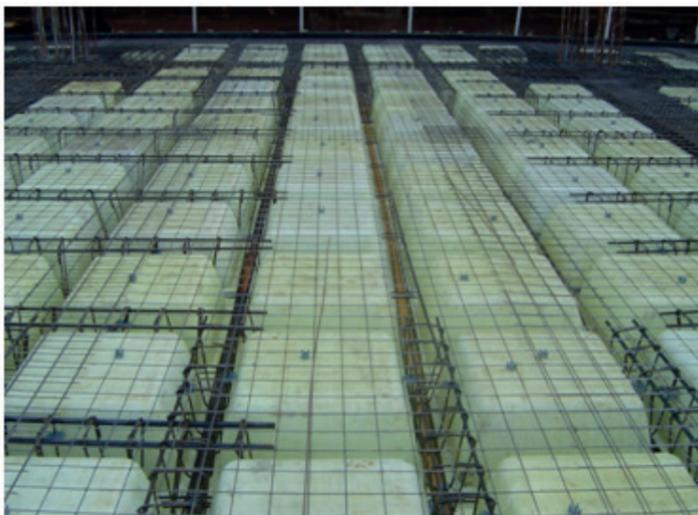
Podemos citar como exemplo real executado, o prédio anexo da Assembléia Legislativa do Estado de São Paulo, que foi projetado e executado internamente com lajes nervuradas (figura 4.3 e 4.4) apoiadas em vigas.

Figura 4.3 | Laje nervurada - Projeto do prédio anexo da Assembleia Legislativa de SP



Fonte: acervo do autor.

Figura 4.4 | Armação da laje nervurada - Projeto do prédio anexo da Assembleia Legislativa de SP



Fonte: acervo do autor.

Em outros casos, o engenheiro deve orientar o arquiteto quanto a escolha do melhor tipo de laje a ser utilizada em função das necessidades estruturais de dimensionamento e de deformação.

No caso do prédio anexo da Assembleia Legislativa de São Paulo, a laje externa de cobertura do acesso ao piso monumental (Figura 4.5) foi concebida pela arquitetura também em laje nervurada, no entanto, foi projetada e executada com estrutura mista (concreto armado + concreto protendido) proposta pelo engenheiro responsável para vencer o vão livre. Houve também a utilização da laje maciça na passarela de acesso ao prédio.

Figura 4.5 | Laje nervurada - Projeto do prédio anexo da Assembleia Legislativa de SP



Fonte: acervo do autor.

## Definição de lajes

As lajes são elementos estruturais normalmente apoiadas em vigas e responsáveis por receber a maior parte dos carregamentos de uma edificação. Elas são consideradas elementos bidimensionais em função de sua espessura ser muitas vezes menor que as outras duas dimensões (largura e comprimento).

O fato das lajes receberem ações verticais, normais à superfície, conferem a ela o comportamento de placa que por definição é uma estrutura de superfície (área) e altura, sujeita a esforços perpendiculares à superfície.

As lajes também atuam como diafragmas horizontais rígidos, contribuindo para a estabilidade da estrutura, distribuindo as ações horizontais entre os pilares.

Nesta unidade, trabalharemos com as lajes maciças, mas, para que você se familiarize, vamos apresentar de maneira resumida, os tipos mais comuns de lajes utilizadas no Brasil.



## Assimile

Estruturalmente, as lajes funcionam como elementos de placas, com as cargas principais perpendiculares a sua superfície. Ainda, as lajes têm a função de contribuir para a estabilidade estrutural, distribuindo as ações horizontais (por exemplo, a ação do vento) para os pilares. Essa função é comumente conhecida na engenharia civil como comportamento de diafragma horizontal.

### Lajes pré-moldadas treliçadas

As lajes pré-moldadas treliçadas (Figura 4.6) são consideradas umas das mais econômicas, pois dispensam os gastos com formas e escoramento na obra. Elas podem ser preenchidas com isopor (EPS), blocos cerâmicos ou de concreto, ou até mesmo sem preenchimento (apenas com treliças pré-moldadas locadas lado a lado). Todas elas recebem uma capa de concreto que varia a espessura, dependendo do carregamento e da altura final da laje.

Figura 4.6 | Lajes pré-moldadas treliçadas preenchidas com blocos cerâmicos, blocos de concreto ou sem preenchimento



Fonte: <<https://www.archdaily.com.br/br/889035/tipos-de-lajes-de-concreto-vantagens-e-desvantagens>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

## Lajes alveolares

As lajes alveolares (Figura 4.7) também são pré-moldadas, formadas por painéis de concreto normalmente protendidos e são utilizadas para vencer grandes vãos. Também dispensam escoramento e formas.

Figura 4.7 | Lajes alveolares



Fonte: <<https://www.archdaily.com.br/br/889035/tipos-de-lajes-de-concreto-vantagens-e-desvantagens>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

## Lajes nervuradas

As lajes nervuradas (Figura 4.8) são utilizadas normalmente com propósito arquitetônico, mas podem ser utilizadas em qualquer tipo de obra, são ágeis e econômicas, podem vencer vãos consideráveis e as nervuras são em concreto armado moldado *in loco*. Os espaços vazios podem ser em isopor, tijolos ou formas de cubetas plásticas.

Figura 4.8 | Lajes nervuradas



Fonte: <<https://www.flickr.com/photos/atex/>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

## Lajes Maciças

As lajes maciças (Figura 4.9) em concreto armado simples são o objeto do nosso estudo na Unidade 4, normalmente apoiadas em vigas, também existem as chamadas lajes planas ou lisas, apoiadas somente nos pilares.

As lajes maciças, em sua grande maioria, têm espessura constante, são armadas e concretadas *in loco*. O concreto fresco é lançado sobre as armaduras dimensionadas para o esforço de flexão, assim como as vigas. Suas armaduras principais podem ser em uma ou em duas direções.

As lajes maciças são bastante comuns em obras prediais e industriais, utilizadas como cobertura, pisos, muros de arrimo, caixas de água, escadas, rampas. Sua principal desvantagem é a utilização de formas (madeira ou metálica) e escoramentos durante a execução. Tornam-se mais viáveis, quando há repetição de piso com a reutilização dos materiais.

As dimensões econômicas para obras prediais, giram em torno de 4 a 7 metros de vão, sendo que, em obras prediais de pequeno porte ou obras populares, elas não são vantajosas economicamente, perdendo lugar para as lajes pré-fabricadas/moldadas.

Figura 4.9 | Lajes maciças



Fonte: iStock.



Saiba mais sobre as lajes maciças no vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=BSyouznFw6w&t=81s>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

Aprofunde seus conhecimentos, consultando o livro em nossa biblioteca digital: NETO, E. **Caderno de Receitas de Concreto Armado, Volume 3 Lajes**. LTC, Rio de Janeiro, 2018. No capítulo 4, assunto 4.3 - tipos de lajes. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521634652/cfi/6/34!/4/30/6/2@0:80.2>>. Acesso em: 24 jun. 2018.

Mas lembre-se de acessar a Biblioteca Virtual: clicar em *Minha Biblioteca* antes de utilizar o link.

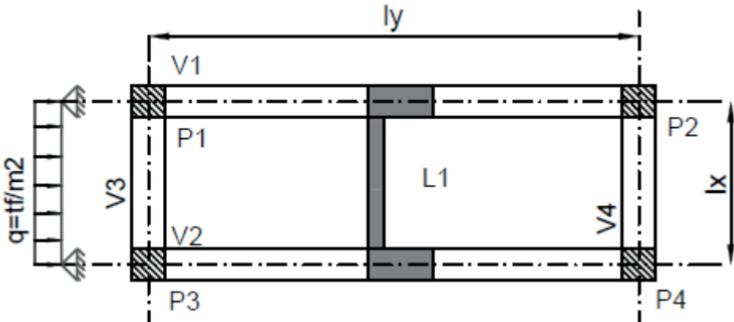
### Lajes maciças armadas em uma direção e momentos solicitantes

As lajes maciças são classificadas principalmente quanto a direção da disposição da armadura principal, podendo ser armadas em uma ou em duas direções.

A definição das direções que as armaduras serão dispostas, é determinada em função da relação entre as dimensões da laje.

Considera-se armada em uma direção (Figura 4.10) a laje que tem a relação entre o maior lado ( $l_y$ ) e o menor lado ( $l_x$ ), maior que 2, ou seja:  $\lambda = \frac{l_y}{l_x} > 2$ .

Figura 4.10 | Laje armada em uma direção

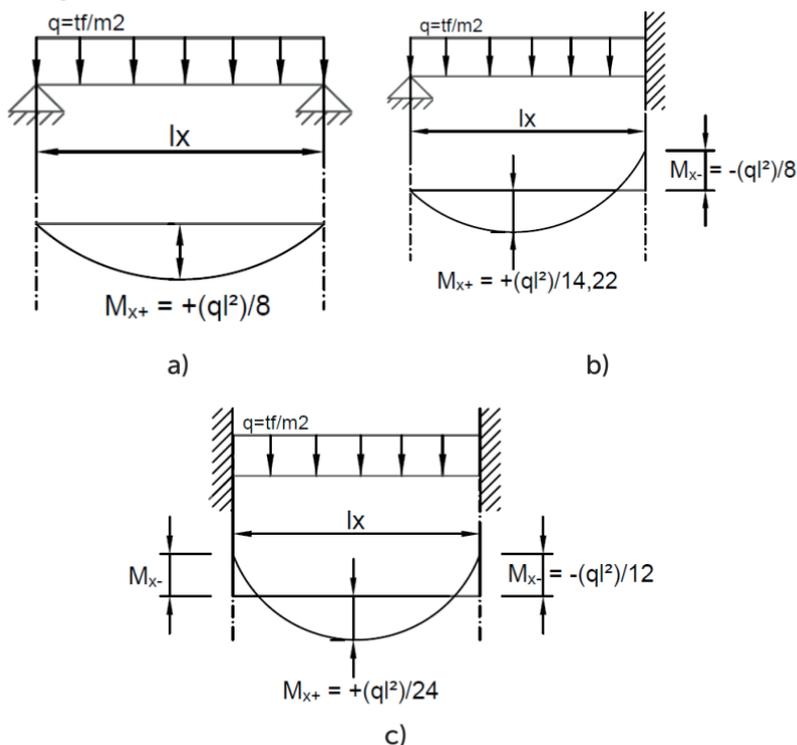


Fonte: elaborada pelo autor.

Quando temos uma laje armada em uma direção (Figura 4.10), consideramos a laje fletida no lado de menor vão ( $l_x$ ), denominado direção principal. Dessa forma, o cálculo da armadura é feito como se a laje fosse uma viga com largura de 1 m (100 cm).

As possibilidades de vinculação e momentos fletores para as lajes armadas em uma direção são conforme a Figura 4.11:

Figura 4.11 | Laje armada em uma direção - a) bi apoiada, b) apoiada e engastada, c) bi engastada



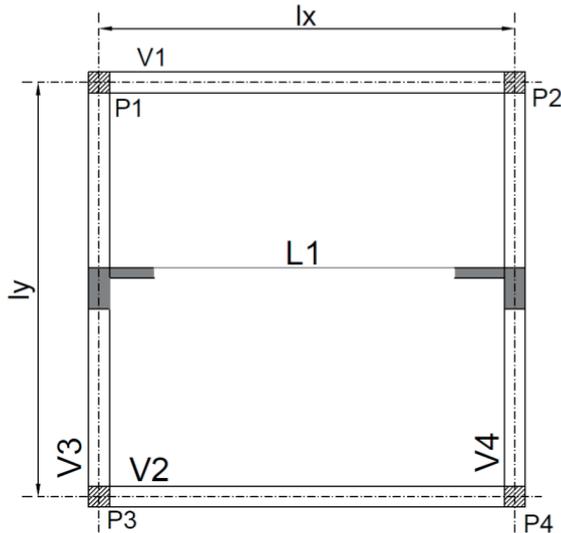
Fonte: elaborada pelo autor.

### Lajes maciças armadas em duas direções (ou em cruz), momentos solicitantes e compatibilização dos momentos

Considera-se armada em duas direções ou em cruz (Figura 4.12) a

laje que tem a relação entre o maior lado ( $l_y$ ) e o menor lado ( $l_x$ ), menor ou iguala 2, ou seja:  $\lambda = \frac{l_y}{l_x} \leq 2$ .

Figura 4.12 | Laje armada em duas direções



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Dada a laje L1 com as seguintes dimensões: menor lado:

$l_x = 3\text{ m}$ , maior lado  $l_y = 7\text{ m}$ . Essa laje deverá ser armada em

uma ou duas direções?

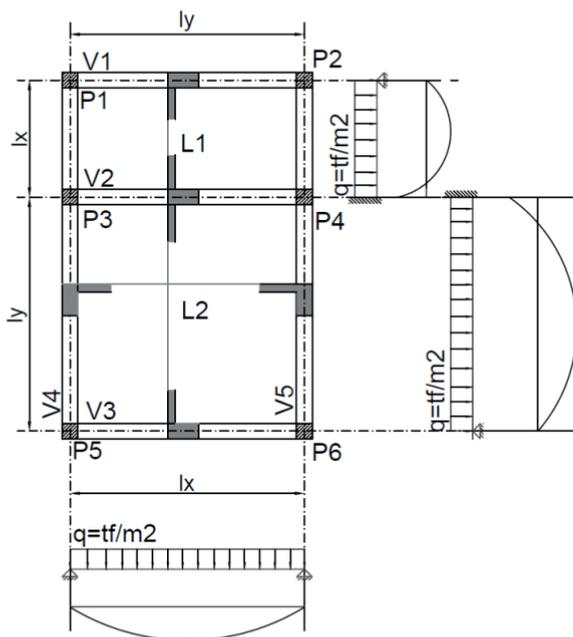
Resolução:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 2,33 > 2: \text{ a laje será armada em uma direção.}$$

Quando temos uma laje armada em duas direções, consideramos a flexão principal tanto na direção X como direção Y.

Existem diversas possibilidades de vínculos e de momentos fletores na direção X e na direção Y. A determinação dos momentos vai depender do tipo de vínculo em cada borda da laje, sendo que, teremos engastamento sempre que houver continuidade entre duas lajes (Figura 4.13). Caso não exista viga em uma das bordas, a vinculação é chamada de borda livre.

Figura 4.13 | Laje armada em duas direções - continuidade L1 com L2



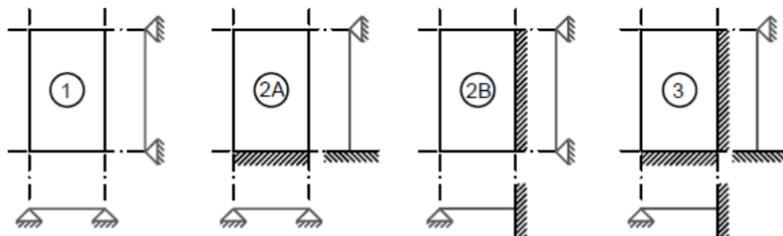
Fonte: elaborada pelo autor.

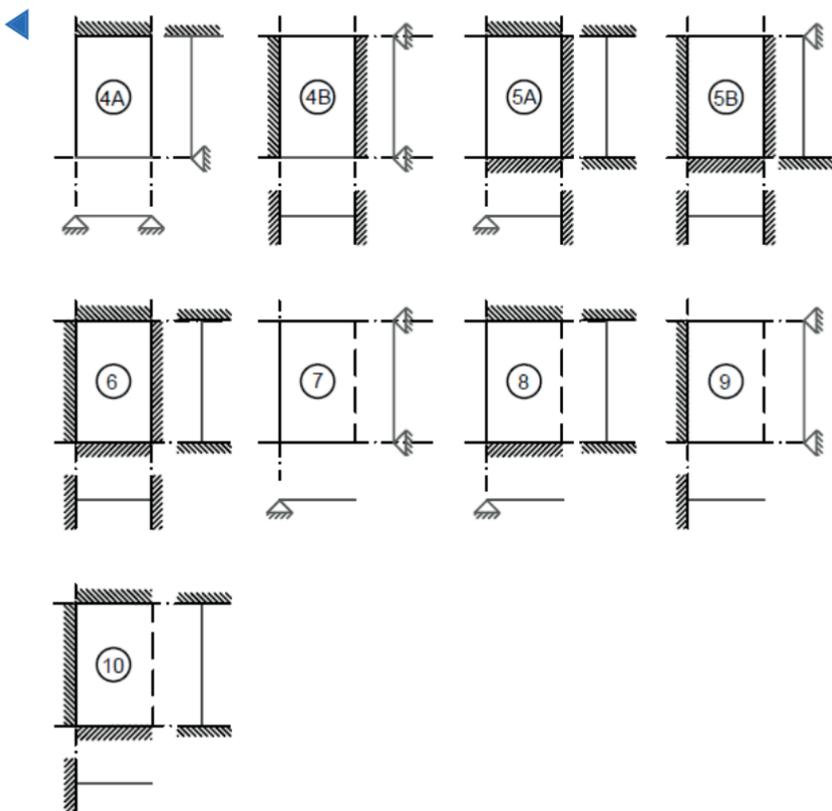
### Vinculação nas bordas

A Figura 4.14 apresenta as principais possibilidades de vínculos nas lajes armadas em duas direções.

A numeração das lajes em função dos vínculos nas bordas, pode variar para cada autor. Estamos utilizando como referência as numerações adotadas no livro *Concreto Armado: tabelas ábacos* (PINHEIRO, 1994).

Figura 4.14 | Laje armada em duas direções - vinculações (carga uniformemente distribuída)





Fonte: Pinheiro (1994).

## Compatibilização dos momentos fletores

Como sabemos, os momentos de engastamento são os momentos negativos, ou seja, são os responsáveis pelo dimensionamento das armaduras negativas.

As armaduras negativas são comuns entre duas lajes quando há continuidade entre elas e também são as armaduras principais de lajes em balanço.

O cálculo de uma laje é feito isoladamente, no entanto, quando há continuidade entre duas lajes temos dois valores de momentos negativos. A NBR-6118, item 14.7.6.2, permite que seja utilizado o maior valor de momento negativo no caso de predominância de cargas permanentes, adota-se o maior valor entre os momentos, em vez de equilibrá-los.

Outra opção da norma e também boa prática da engenharia é a compatibilização dos momentos negativos  $M'_x$  (ou  $M'_y$ ), conforme o seguinte critério:

Considerando:  $M'_{x1} \geq M'_{x2}$ , o momento negativo final ( $M'_x$ ), será o maior entre os dois valores da Tabela 4.1 e Figura 4.15:

Tabela 4.1 | compatibilização dos momentos fletores

$M'_x \geq$	$0,8 \times M'_{x1}$
$M'_x \geq$	$\frac{M'_{x1} + M'_{x2}}{2}$

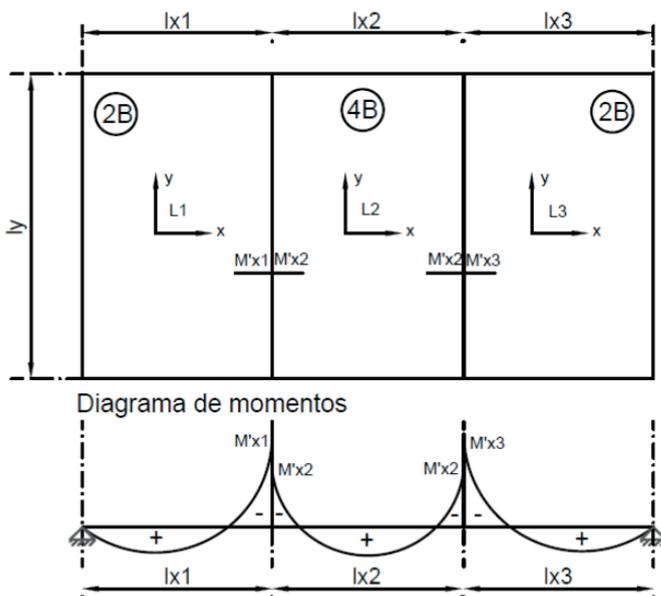
Fonte: elaborada pelo autor.



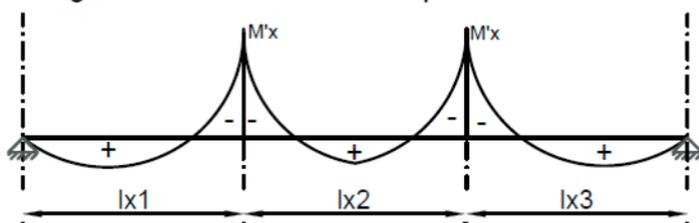
Refleta

Você saberia dizer qual o valor do momento negativo para o caso de duas lajes que não são contínuas entre si?

Figura 4.15 | Compatibilização dos momentos negativos



## Diagrama de momentos - compatibilizados



Fonte: elaborada pelo autor.

### Atenção

Fique atento as unidades. As lajes recebem cargas por metro quadrado (área) e o momento final é por metro (para cada metro de laje).



### Exemplificando

Duas lajes contínuas (engastadas) apresentam os momentos negativos: Laje 1:  $M'_{y1} = 1500 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m}$  e Laje 2:  $M'_{y2} = 1700 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m}$ . Qual o valor do momento compatibilizado  $M'_y$ ?

Resolução:

$$M'_y \geq 0,8 \times 1700 = 1360 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m} \quad \text{ou}$$

$$M'_y \geq \frac{1500 + 1700}{2} = 1600 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m} \Rightarrow \text{o valor do}$$

momento será o maior entre os dois valores:

Resposta:  $M'_y = 1600 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m}$ .

## Sem medo de errar

Agora está fácil resolver o seu primeiro desafio sobre o assunto lajes! Você já sabe como determinar se uma laje será armada em

uma ou duas direções e também as possibilidades de vínculos (apoios) das bordas.

Relembrando: o projeto da lavanderia tem apenas duas lajes no primeiro pavimento, conforme a planta de formas (Figura 4.1). A laje L1 é formada por um painel de 4,00x4,00 metros de vão efetivo e a laje L2 tem um painel de 1,50x4,00 metros, ambas com 10 cm de espessura.

Seu primeiro desafio será determinar as condições de apoio de cada laje (apoiada, engastada, livre) e quais lajes desse pavimento serão armadas em uma ou em duas direções.

### Resolução:

#### Questão 1:

Devido à continuidade entre as lajes, teremos:

Laje L1: apoiada em três lados e engastada em um lado.

Laje L2: apoiada em três lados e engastada em um lado.

#### Questão 1:

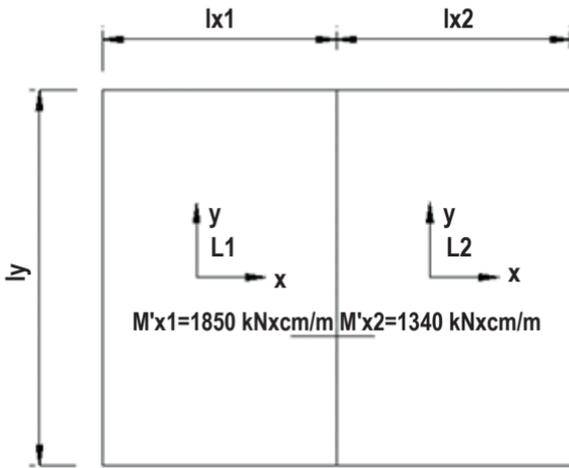
Laje L1: 4,00x4,00 m.:  $\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{4,00}{4,00} = 1,00 < 2$  ∴ a laje L1 será armada em duas direções.

Laje L2: 1,50x4,00 m.:  $\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{4,00}{1,50} = 2,67 > 2$  ∴ a laje L2 será armada uma direção.

## Avançando na prática

Você está trabalhando em um projeto de um piso com duas lajes (L1 e L2) que será utilizado por escritórios. Foram fornecidos pelo cliente: esquema das lajes do local e os valores dos momentos de engastamento de cada laje (Figura 4.16). Sabe-se que as ações permanentes são predominantes.

Figura 4.16 | Esquema e momentos das lajes L1 e L2



### Descrição da situação-problema

Sabendo que as lajes L1 e L2 estão niveladas pela face superior, quais os valores de momento fletor negativo que você poderá utilizar para realizar o dimensionamento das lajes? Sabe-se que há predominância dos carregamentos permanentes (NBR-6118, item 4.7.6.2).

### Resolução da situação-problema

São conhecidos os momentos negativos isolados de cada laje. A norma permite que se utilize o maior dos dois valores de momento para o cálculo da armadura negativa, caso haja predominância da carga permanente.

Poderá ser utilizado no dimensionamento: momento fletor de 1850 kNxm/m ou o maior dos dois momentos fletores, compatibilizados:

$$M'_x = 0,8 \times 1850 = 1480 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m} \quad \text{ou}$$
$$M'_x = \frac{1850 + 1340}{2} = 1595 \text{ kN} \times \text{cm} / \text{m} .$$

Resposta: poderá ser utilizado: 1850 kNxm/m ou 1595 kNxm/m.

## Faça valer a pena

**1.** As lajes são elementos estruturais considerados bidirecionais em função da espessura ser muito menor que a largura e o comprimento. Você aprendeu que existem inúmeros tipos de lajes e que a definição do melhor tipo pode depender de uma exigência do projeto arquitetônico e da viabilidade estrutural e econômica. Seja qual for o motivo, ele deverá ser discutido entre as disciplinas interessadas para a escolha final.

Das lajes citadas nesta seção, qual seria a melhor opção estrutural x econômica a ser implementada em um conjunto residencial popular com prédios de quatro pavimentos e vãos não maiores que 4,00 m?

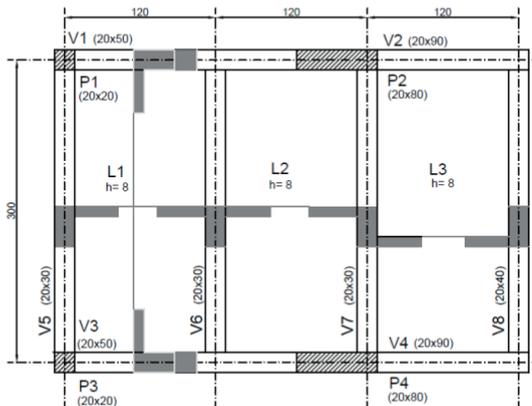
- a) Laje tipo alveolar protendida.
- b) Laje maciça em concreto armado simples, armada em uma direção.
- c) Laje pré-moldada treliçada com preenchimento em bloco cerâmico.
- d) Laje nervurada com preenchimento em isopor.
- e) laje maciça em concreto armado simples, armada em duas direções.

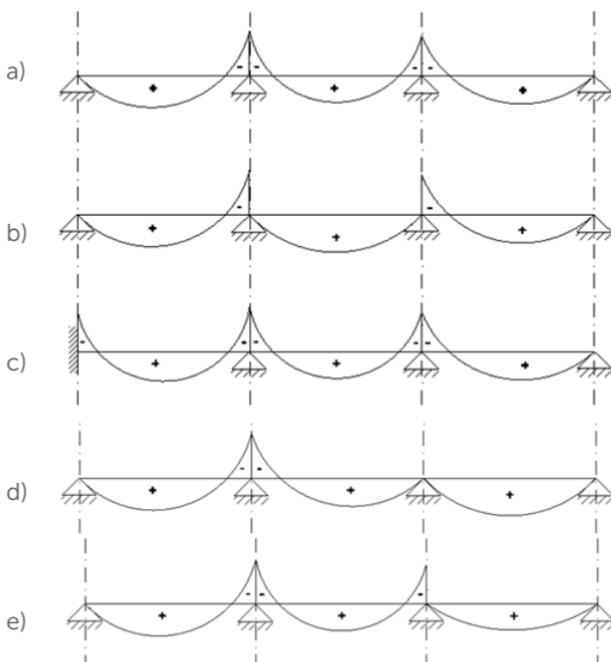
**2.** As lajes maciças são dimensionadas para resistir os esforços de flexão, assim como as vigas. O primeiro passo para se dimensionar uma laje é definir se essas lajes serão armadas em uma ou duas direções e quais suas condições de apoio.

Com o projeto de formas em mãos, você já poderá realizar esse estudo.

Dada a planta de formas da Figura 4.17, qual o diagrama de momentos fletores, representa o esquema estático das lajes armadas em uma direção: L1, L2 L3?

Figura 4.17 | Planta de formas hipotética

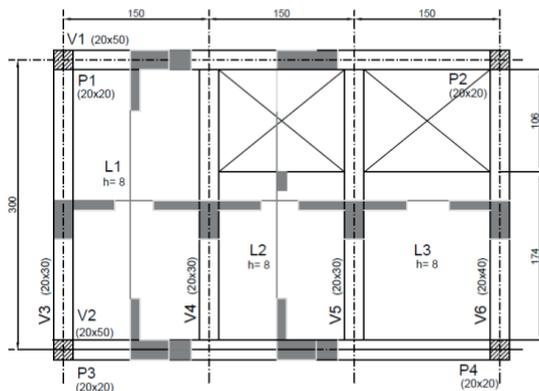


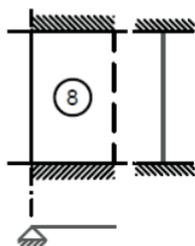


**3.** As lajes armadas em duas direções são aquelas que a relação entre o maior lado e o menor lado resulta, menor ou igual a 2. Quando as lajes são armadas em duas direções, a análise de sua vinculação deve ser feita para as quatro bordas (para laje retangular).

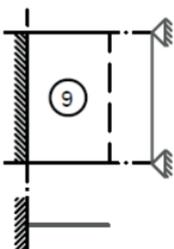
Dada a planta de formas da Figura 4.18, qual esquema estático que representa a laje L2?

Figura 4.18 | Planta de formas hipotética 2

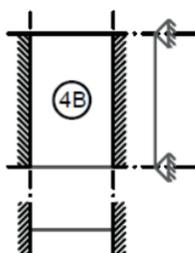




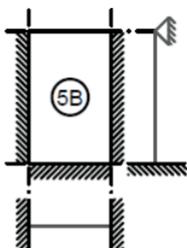
a)



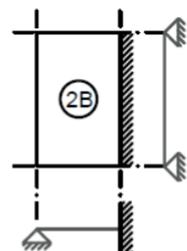
b)



c)



d)



e)

## Seção 4.2

### Comportamento das lajes maciças

#### Diálogo aberto

Definidos os tipos de lajes (armadas em uma direção ou armadas em duas direções) e as suas vinculações (apoiada, engastada ou livre) nos quatro lados, você já começa a visualizar quais serão as vigas que receberão mais cargas.

Para proceder com a definição das cargas que irão para as vigas, primeiramente, você deve levantar quais serão as ações atuantes nas lajes, além do seu peso próprio.

Você anotou durante a reunião de seu projeto que as lajes de piso do primeiro pavimento serão inicialmente com espessura de 10 cm, destinadas ao uso da lavanderia e haverá um contra piso de 3 cm de espessura com peso específico da argamassa de  $21 \text{ KN/m}^3$ . Os pesos específicos dos materiais utilizados podem ser obtidos na norma NBR-6120 (ABNT, 1980).

Também ficou definido que haverá um revestimento cerâmico sobre a laje de  $0,15 \text{ KN/m}^2$  e que não haverá alvenaria sobre as lajes.

Não houve definição se haverá revestimento na face inferior da laje ou apenas pintura, então você adotou uma carga adicional de  $0,20 \text{ KN/m}^2$ .

Com essas informações, você deverá determinar as cargas totais atuantes nas lajes L1e L2 do primeiro pavimento (Figura 4.1), que deverão ser lançadas posteriormente no software para o dimensionamento.

Após as definições das cargas e conhecendo os vãos de cada laje, você está pronto para completar o desafio desta seção, que é definir o lançamento das cargas nas vigas (reações de apoio).

O cálculo das reações de apoio das lajes é automaticamente efetuada pelos softwares de cálculo, mas como essas serão suas

primeiras lajes, você deverá fazer as distribuições de cargas nas vigas do primeiro pavimento manualmente, com o auxílio das tabelas que fazem parte dessa seção.

Para obter sucesso, você deverá aumentar ainda mais sua dedicação e atenção, pois esta seção trará muitas informações, incluindo assuntos já estudados nas unidades anteriores.

Não deixe de praticar os exercícios e boa sorte!

## **Não pode faltar**

### **Introdução:**

Iniciamos na seção anterior o estudo de um novo elemento estrutural: a laje!

Você já conhece os tipos mais comuns de lajes utilizadas no Brasil e conhece também um tipo específico de laje em concreto armado, denominado laje maciça, escopo da nossa Unidade 4.

Agora vamos nos aprofundar no estudo das lajes maciças, objetivando o cálculo e dimensionamento dessas lajes.

Nesta seção, vamos abordar as principais ações atuantes nas lajes, as espessuras mínimas de norma e os cobrimentos mínimos. Vamos entender como as cargas são distribuídas nos apoios (vigas), como são calculadas as deformações (flechas) e quais os limites dessas deformações.

### **Ações nas lajes, espessuras mínimas e cobrimentos mínimos**

Os principais carregamentos ou ações que atuam sobre uma laje de projeto predial são: as cargas permanentes, normalmente definidas no projeto de arquitetura nos quais são determinados o tipo de piso e contrapiso, o tipo de revestimento na face inferior e se haverá alvenaria sobre a laje ou não.

Todas essas informações são convertidas em cargas em função das dimensões (espessura, altura, comprimento) e do

peso específico de cada material que pode ser obtido na norma NBR-6120.

Caso a laje seja armada em duas direções e haja alvenaria sobre ela, todo o peso dessa alvenaria deverá ser distribuído pela área total

da laje, teremos:  $p_{alv.} = \frac{e \times h \times l \times \gamma_{alv.}}{\text{Área da laje}}$ , na qual:  $e$ : espessura da

alvenaria,  $h$ : altura da alvenaria,  $l$ : comprimento da alvenaria e  $\gamma_{alv.}$ : peso específico da alvenaria (NBR-6120).

Quando a laje é armada em uma direção e a alvenaria sobre ela é perpendicular a direção principal, considera-se a carga dessa alvenaria como uma carga concentrada:  $p_{alv.} = e \times h \times \gamma_{alv.} \times 1m$ .

Para o caso das lajes armadas em uma direção, mas com a alvenaria paralela a direção principal, calcula-se a região com alvenaria e a região sem alvenaria, obtendo uma áreas de aço para cada região. Na região onde está a alvenaria, a carga é distribuída

por uma área de influência:  $A_{infl.} = \left(\frac{2}{3} \times l_x\right) \times l_x$ , na qual  $l_x$  é o

menor lado da laje, portanto a carga será:  $p_{alv.} = \frac{e \times h \times l \times \gamma_{alv.}}{A_{infl.}}$ .

Além das cargas permanentes, teremos também as cargas variáveis (ou acidentais), que são as sobrecargas de utilização (cozinha, sala etc.) também definidas pela norma NRB-6120.

O engenheiro civil é o responsável pelo lançamento das cargas sobre as lajes, sendo assim, ele deve se certificar com a arquitetura, se, além das cargas mencionadas e do peso próprio da laje, haverá alguma carga extra, proveniente de um móvel específico ou qualquer elemento que possa gerar algum carregamento não previsto inicialmente.

Em projetos industriais, além da arquitetura, as demais disciplinas envolvidas no projeto devem ser analisadas sob o ponto de vista de cargas sobre as lajes, por exemplo, equipamentos mecânicos (estáticos e dinâmicos), bandejas de fiação elétrica penduradas sob as lajes, tubulações industriais, painéis elétricos e de instrumentação etc



Considere uma laje maciça de vãos efetivos, 4x4 m e espessura de 8 cm, apoiada nas quatro bordas. Essa laje receberá um contrapiso de 4 cm e peso específico de  $21\text{kN}/\text{m}^3$ , piso cerâmico sobre o contrapiso de  $0,21\text{kN}/\text{m}^2$ . A laje será utilizada como sala de visitas e terá um revestimento inferior em argamassa de cal, cimento e areia de 2 cm (peso específico, conforme NBR-6120 de  $19\text{kN}/\text{m}^3$ ).

Sobre a laje, haverá uma parede de alvenaria com espessura de 14 cm, altura de 2,80 m e 3,00 m de comprimento, sendo que o peso específico do bloco cerâmico é de  $18\text{kN}/\text{m}^3$  (NBR-6120). Qual será o valor total do carregamento sobre essa laje?

**Resolução:**

**Cargas permanentes:**

- peso próprio da laje:  $p.p. = h \times \gamma_{conc.} \Rightarrow p.p. = 0,08 \times 25 = 2\text{kN}/\text{m}^2$ .
- peso do contra piso:  $= h \times \gamma_{cont.} \Rightarrow 0,04 \times 21 = 0,84\text{kN}/\text{m}^2$ .
- peso do piso cerâmico  $= 0,21\text{kN}/\text{m}^2$ .
- revestimento inferior  $= h \times \gamma_{rev.} \Rightarrow 0,02 \times 19 = 0,38\text{kN}/\text{m}^2$ .
- peso da alvenaria sobre a laje  
 $= \frac{0,14 \times 2,80 \times 3,00 \times 18}{4,00 \times 4,00} = 1,32\text{kN}/\text{m}^2$ .

**Obs.:** A carga da alvenaria se distribui sobre toda área da laje, por ser armada em 2 direções:  $\lambda = \frac{4}{4} = 1 < 2 \Rightarrow$  duas direções!

**Carga acidental:**

- carga acidental (sobrecarga)  $= 1,5\text{kN}/\text{m}^2$  (sala de estar - NBR-6120, (ABNT, 1980).

#### Total do carregamento:

$q$  = carga permanente + carga acidental

$$q = 4,75 + 1,50 = 6,25 \text{ kN} / \text{m}^2 .$$

**Espessuras mínimas das lajes:** segundo a NBR-6118, item 13.2.4.1 (ABNT, 2014):

7 cm: lajes de cobertura não em balanço.

8 cm: lajes de piso não em balanço.

10 cm: lajes em balanço.

10 cm: lajes que suportam veículos até 30 kN.

12 cm lajes que suportam veículos com mais que 30 kN.

15 cm: lajes com protensão apoiada em vigas.

16 cm: lajes lisas.

14 cm: lajes cogumelo, fora do capitel.

#### Cobrimentos mínimos.

Os cobrimentos mínimos são obtidos em função da classe de agressividade ambiental, tabelas 1.1 e 1.2 (Unidade 1, Seção 2).

#### Reações de apoio nas vigas

As lajes são elementos estruturais que normalmente se apoiam sobre as vigas. A determinação da parcela de carga que vai para cada viga é chamada de reação de apoio.

Se a laje for armada em uma direção, as cargas sobre ela serão distribuídas na direção principal, conforme a Figura 4.19, resultando a reação de apoio em cada viga:

Lajes armadas em uma direção (x):

Laje bi apoiada:  $v_x = \frac{q \times l_x}{2}$ .

Laje engastada e apoiada:  $v'_x = \frac{5 \times q \times l_x}{8}$  e  $v_x = \frac{3 \times q \times l_x}{8}$  respectivamente.

Laje engastada e engastada:  $v'_x = \frac{q \times l_x}{2}$ .

Na direção secundária ( $l_y$ ), adota-se uma parcela de carga de 15%, portanto a reação na direção y, será:  $v_y = 0,15 \times q \times l_x$ .

Figura 4.19 | Distribuição de cargas - exemplo de laje armada em uma direção (biapoiada)

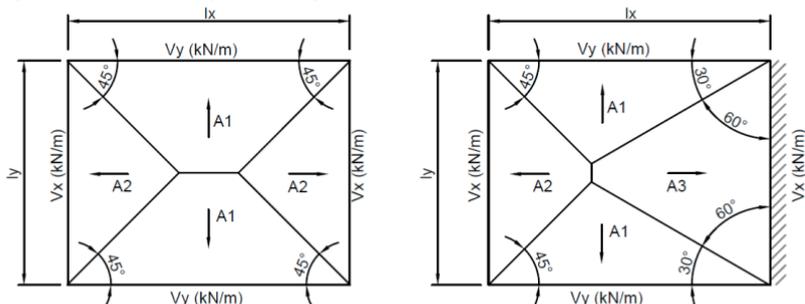


Fonte: elaborada pelo autor.

Caso a laje seja armada em duas direções, as cargas serão distribuídas para todas as bordas, sendo que, a NBR-6118, item 14.7.6.1 (ABNT, 2014) permite aproximações de cálculo, conforme representado na Figura 4.20.

## Lajes armadas em duas direções

Figura 4.20 | Distribuição de cargas - áreas de influência



Fonte: elaborada pelo autor.

a) As reações em cada apoio, correspondem a área do triângulo ou trapézio, multiplicada pela carga distribuída sobre a laje, dividido

peelo comprimento do apoio:  $v_y = \frac{A_1 \times q}{l_x}$ ,  $v_x = \frac{A_2 \times q}{l_y}$  ou

$v_x = \frac{A_3 \times q}{l_y}$ , na qual: área em  $m^2$ , carga em  $kN/m^2$ , comprimento do apoio (viga) em  $m$ .

b) As áreas (A1, A2, A3) para a distribuição da carga da laje são definidas (Figura 4.20):

- $45^\circ$  entre dois apoios do mesmo tipo.
- $60^\circ$  a partir do apoio engastado, se o outro for simplesmente apoiado.
- $90^\circ$  a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Além das considerações aproximadas fornecidas pela norma, dispomos de tabelas (Figura 4.21), com coeficientes que permitem o cálculo das reações para diferentes condições de apoio.

As tabelas são para as lajes armadas em duas direções e fornece

a equação geral:  $V = v \times \frac{q \times l_x}{10}$ , na qual:  $V$  = reação de apoio;

$v$  = coeficiente tabelado em função do  $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$  (Figura 4.21)  $q$  = carga

uniformemente distribuída ( $kN/m^2$ );  $l_x$  = menor vão da laje.

Figura 4.21 | Trecho da tabela para determinação das reações de apoio das lajes maciças com carga uniformemente distribuída

Tabela 2.2a									
REAÇÕES DE APOIO EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	Tipo								$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
	1		2A			2B			
	$v_x$	$v_y$	$v_x$	$v_y$	$v'_y$	$v_x$	$v'_x$	$v_y$	
1,00	2,50	2,50	1,83	2,75	4,02	2,75	4,02	1,83	1,00
1,05	2,62	2,50	1,92	2,80	4,10	2,82	4,13	1,83	1,05
1,10	2,73	2,50	2,01	2,85	4,17	2,89	4,23	1,83	1,10
1,15	2,83	2,50	2,10	2,88	4,22	2,95	4,32	1,83	1,15
1,20	2,92	2,50	2,20	2,91	4,27	3,01	4,41	1,83	1,20

Fonte: <<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/EstruturasConcretoII/21%20Tabelas%20de%20lajes.pdf>>. Acesso em: 2 ago. 2018.

Para utilizar as tabelas, primeiramente, você deverá definir o tipo de laje e o valor da relação entre os lados  $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$ . Com isso, você obtém os coeficientes  $v$ , que deverão ser inseridos na equação geral, obtendo assim, as reações em cada apoio (vigas). Observe que, na equação geral, sempre é utilizado  $l_x$ .

### Atenção

Para o dimensionamento de lajes, muitas tabelas são utilizadas. As tabelas de Pinheiro contidas no link (<<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/EstruturasConcretoII/21%20Tabelas%20de%20lajes.pdf>>. Acesso em: 29 ago. 2018.) e também nos anexos da apostila do professor Paulo Bastos (<<http://www.pfeb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>>. Acesso em: 29 ago. 2018.) são bons exemplos. Os QR Codes no seu livro é uma outra forma de acessá-las. Guarde-as em seus arquivos pessoais pois são muito úteis!



Acessando o link <https://cm-kl-content.s3.amazonaws.com/ebook/embed/qr-code/2018-2/estruturas-de-concreto-armado-l/u4/s2/tabelas-de-lajes.pdf> ou por meio do QR Code.

## Flechas nas lajes

Os deslocamentos verticais sofridos pelas lajes são denominados flechas e devem atender aos limites máximos recomendados pela NBR-6118, item 13.3 (ABNT, 2014) e representados na Tabela 4.3.

De maneira geral, a verificação dos valores limites das flechas deve levar em consideração a armadura do elemento analisado (laje), a existência de fissuras ao longo dessa armadura e as deformações sofridas ao longo do tempo (ABNT, 2014).

A flecha total sofrida por uma laje é composta por duas parcelas, sendo que uma delas refere-se as flechas imediatas, que ocorrem quando aplicado o primeiro carregamento no elemento estrutural e a segunda parcela, refere-se ao acréscimo de deformação que o elemento estrutural sofre ao longo do tempo, nesse caso, chamamos de flecha diferida no tempo.

### Flechas imediatas para lajes armadas em duas direções

As flechas imediatas podem ser calculadas admitindo-se o comportamento elástico e podem ser obtidas por meio de tabelas em função das condições de apoio e do tipo de carregamento. Vamos considerar, em nossos estudos, o carregamento uniformemente distribuído e a tabela de Pinheiro (2007) (Figura 4.22).

Equação geral da flecha imediata para lajes armadas em duas

direções:  $a_i = \frac{\alpha \times b}{100 \times 12} \times \frac{q \times l_x^4}{EI}$ , (Tabela 4.22), na qual:

$a_i$  = flecha imediata (cm).

$q$  = carregamento da laje (  $kN / cm^2$  ) para combinações quase permanentes de serviço, item 11.8.3.2, NBR-6118 (ABNT, 2014):

$$q = F_d = \sum F_g + \sum \psi_2 \times F_q ,$$

considerando  $\psi_2 = 0,3 \Rightarrow$  local sem predominância de pesos de equipamentos fixos (coeficiente foi extraído da tabela 11.2 da NBR-6118).

$I_x$  = menor vão da laje (cm);  $I_y$  = maior vão da laje (cm).

$\alpha$  = coeficiente tabelado em função do tipo de laje e da relação entre lados,  $\lambda = \frac{I_y}{I_x}$  - (tabela da Figura 4.22).

$b$  = largura da laje: 100 cm.

$EI$  = rigidez da laje à flexão (  $kN / cm^2$  ), sendo:

$E$  = módulo de elasticidade secante do concreto e  $I$  = momento de inércia da seção.

O módulo de elasticidade secante do concreto pode ser obtido no item 8.2.8 da NBR-6118 (ABNT, 2014), (revisite a Unidade 1, Seção 1):

O cálculo das flechas deve garantir o ELS (estado limite de serviço). Lembramos que no ELS as estruturas trabalham parcialmente no estágio I (concreto resiste à tração e a peça não está fissurada) e parcialmente no estágio II (concreto não resiste a tração e a peça está fissurada) (revisite a Unidade 1, Seção 3) e a separação entre esses estádios se dá pelo momento fletor de fissuração ( $M_r$ ), que pode ser calculado pela equação fornecida no item 17.3.1 da NBR-6118 (ABNT, 2014):

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \text{ (} kN \times cm \text{ )}, \text{ na qual:}$$

-  $\alpha \Rightarrow$  é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta. Os valores de  $\alpha$  são dados em função do tipo de seção da peça, conforme item 17.3.1 da NBR-6118 (ABNT, 2014). Para as lajes (seção retangular):  $\alpha = 1,5$ .

- Para a verificação da abertura de fissuras, o cálculo do momento de fissuração será 70% da resistência média à tração do concreto (revisite a Unidade 1, Seção 1):  $f_{ctk,inf} = 0,70 \times f_{ctm}$ , na qual:

$f_{ct,m} = 0,30 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \Rightarrow$  resistência média do concreto à tração (revisite a Unidade 1, Seção 1) com  $f_{ck}$  em MPa.

- Para a verificação da flecha (deslocamentos) calculamos o momento de fissuração utilizando a resistência média do concreto à tração ( $f_{ct,m}$ ).

-  $y_t = \frac{h}{2} \Rightarrow$  distância do centro de gravidade (c.g.) da seção até a fibra mais tracionada da laje:  $h =$  espessura da laje.

-  $I_c = \frac{b \times h^3}{12} \Rightarrow$  momento de inércia: ( $cm^4$ ),  $b = 100\text{ cm}$  (1

metro de laje ou 100 cm).

Para uma avaliação aproximada da flecha imediata a NBR-6118, item 17.3.2.1.1, fornece a equação para o cálculo da rigidez ( $EI$ ), neste caso, denominada rigidez equivalente ( $EI_{eq}$ ).

Portanto, quando o momento máximo atuante ( $M_a$ ) na seção for maior que o momento fletor de fissuração ( $M_r$ ) a rigidez será:

$$EI = EI_{eq}.$$

### ! Atenção

Os carregamentos utilizados para determinar o momento atuante na verificação das flechas, devem obedecer às combinações quase permanentes de serviço.

NBR-6118, item 11.8.3.2 - Tabela 1.4 (ABNT, 2014).

Se  $M_a > M_r \Rightarrow EI = EI_{eq}$

$$EI_{eq} = E_{cs} \times \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \times I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \times I_{II} \right\} \leq E_{cs} \times I_c, \text{ sendo:}$$

-  $I_{II} =$  Momento de inércia para linha neutra ( $X_{II}$ ), no estágio II:

$$I_{II} = \frac{b \times X_{II}^3}{12} + b \times X_{II} \left( \frac{X_{II}}{2} \right)^2 + \alpha_e \times A_s \times (d - X_{II})^2 \text{ (BASTOS, 2015).}$$

- Posição da linha neutra no estágio II (  $X_{II}$  ):

$$X_{II}^2 + \left( \frac{2 \times A_s \times \alpha_e}{b} \right) \times X_{II} - \left( \frac{2 \times A_s \times d \times \alpha_e}{b} \right) = 0 \Rightarrow \text{encontra-se}$$

se  $X_{II}$  (BASTOS, 2015).

$A_s$  = armadura tracionada (  $\text{cm}^2$  ).

$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \Rightarrow$  A relação entre os materiais (aço e concreto). O

coeficiente equivale a contribuição do aço no cálculo do momento de inércia da seção no estágio II.

Lembramos que o módulo de elasticidade do aço utilizado é de:

$$E_s = 21000 \text{ kN / cm}^2.$$

### ! Atenção

Observe que o  $\alpha_e$  usado no cálculo do momento de inércia para linha neutra no estágio II (  $X_{II}$  ), difere do  $\alpha_e$  usado no módulo de elasticidade inicial do concreto (  $E_{ci}$  ) que leva em consideração a brita utilizada.

Quando o momento positivo atuante na laje (  $M_a$  ) é menor que o momento de fissuração (  $M_r$  ) (Estádio I), a rigidez da peça (  $EI$  ) é calculada com módulo de elasticidade (  $E$  ) de acordo com a NBR-6118, item 8.2.8 (ABNT, 2014) e pode ser revisto na Unidade 1, Seção 1 deste livro.

O momento de inércia (  $I$  ) é parte do estudo de resistência dos materiais.

$$M_a < M_r \Rightarrow EI = E_{cs} \times I_c$$

- Módulo de elasticidade secante do concreto:  $E_{cs} = \alpha_i \times E_{ci}$  (  $\text{kN / cm}^2$  ), sendo:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80}.$$

$E_{ci} = \alpha_e \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \Rightarrow f_{ck}$  em MPa - para  $f_{ck}$  de 20 a 50 MPa.

$\alpha_e$  = coeficiente em função do tipo de brita (visto na Unidade 1, Seção 1):

**Flechas imediatas para lajes armadas em uma direção:** são calculadas pelas equações (resistência dos materiais):

- laje biapoiada:  $a_i = \frac{5 \times q \times l^4}{384 \times E_{cs} \times I_c}$ .

- laje engastada e apoiada:  $a_i = \frac{1 \times q \times l^4}{185 \times E_{cs} \times I_c}$ .

- laje engastada e engastada:  $a_i = \frac{1 \times q \times l^4}{384 \times E_{cs} \times I_c}$ .

### Flechas diferida no tempo (deformação lenta)

A NBR-6118, item 17.3.2.1.2, especifica para a flecha adicional decorrente de cargas de longa duração em função da fluência, a equação para verificação aproximada (ABNT, 2014):

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \times \rho'} \Rightarrow \rho' = \frac{A'_s}{b \times d}, \text{ sendo:}$$

- área de armadura comprimida (caso exista):  $A'_s$ .
- largura da seção transversal:  $b$  (100 cm).
- altura útil:  $d$ .
- coeficiente em função do tempo:  $\xi \Rightarrow$  obtido na Tabela 4.2.
- $\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0) \Rightarrow \xi_t = 0,68 \times (0,996^t) \times t^{0,32} \Rightarrow$  para tempo ( $t \leq 70$  meses).

Para o tempo  $t > 70$  meses:  $\xi_t = 2$ .

Tabela 4.2 | Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	$\geq 70$
Coeficiente $\xi$ (t)	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: NBR-6118 (ABNT, 2014).

- sendo  $t_0$  = a idade que se aplicou a carga, obtemos o  $\xi(t_0)$ , na Tabela 4.2.

### Flecha total

A flecha total é o resultado da soma da flecha imediata mais uma parcela adicional ( $\alpha_f$ ) dessa flecha (imediate) que leva em conta o efeito do tempo, portanto:

$$a_t = a_i \times (1 + \alpha_f).$$



**Assimile**

Além do dimensionamento das lajes no ELU, obrigatoriamente deve-se verificar a deformação total (da ordem de aproximadamente 3x a deformação imediata) e compará-la com os limites da norma brasileira.

Figura 4.22 | Trecho da tabelas para valores de  $\alpha$  - cálculo de flecha imediata

Tabela 2.5a									
FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME – VALORES DE $\alpha$									
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo de Laje								
	1	2A	2B	3	4A	4B	5A	5B	6
1,00	4,76	3,26	3,26	2,46	2,25	2,25	1,84	1,84	1,49
1,05	5,26	3,68	3,48	2,72	2,60	2,35	2,08	1,96	1,63
1,10	5,74	4,11	3,70	2,96	2,97	2,45	2,31	2,08	1,77
1,15	6,20	4,55	3,89	3,18	3,35	2,53	2,54	2,18	1,90

Fonte: <<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/EstruturasConcretoll/21%20Tabelas%20de%20lajes.pdf>>. Acesso em: 2 ago. 2018.



Calcular a flecha imediata e verificar se haverá formação de fissuras para a laje armada em duas direções com os seguintes dados:

- Laje apoiada nos quatro lados com  $I_x = 400 \text{ cm}$  e  $I_y = 420 \text{ cm}$ .
- Momento atuante na direção x:  $M_a = 890 \text{ kN} \times \text{cm}$  (adotar o valor do momento para verificação de fissuração e flecha); carga  $q = 12 \text{ kN} / \text{m}^2$ .
- Concreto classe: C30; área de aço tracionada:  $7,00 \text{ cm}^2$ .
- Altura da laje 10 cm (adotar a altura útil:  $d = 7 \text{ cm}$ ).
- Módulo de elasticidade do aço:  $E_s = 210000 \text{ MPa}$ .
- Coeficiente  $\alpha$  para o cálculo do momento de fissuração (seção retangular):  $\alpha = 1,5$ .
- Utilizar a fórmula geral para cálculo da flecha inicial e determinação de  $\alpha$  constante na tabela da Figura 4.22.
- As unidades finais devem estar em kN e cm.

### Resolução:

#### 1. Cálculo do momento fletor de fissuração da laje para verificação da formação de fissuras:

1. Resistência média do concreto à tração:

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,30 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \Rightarrow$$

$$f_{ct,m} = 0,30 \times \sqrt[3]{30^2} = 2,90 \text{ MPa} = 0,29 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

2. Resistência do concreto à tração inferior:

$$f_{ct} = 0,7 \times f_{ct,m} \Rightarrow f_{ct} = 0,7 \times 0,29 = 0,20 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

3. Distância do centro de gravidade da seção da laje até a fibra mais tracionada:

Para a laje de 10 cm (dado):  $y_t = \frac{h}{2} \Rightarrow y_t = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$

4. Momento de inércia da laje (para a faixa de 1 metro de largura):

$$I_c = \frac{b \times h^3}{12} \Rightarrow I_c = \frac{100 \times 10^3}{12} = 8333 \text{ cm}^4$$

5. Coeficiente  $\alpha$  para o cálculo do momento de fissuração: para seção retangular:  $\alpha = 1,5$  (dado).

5. Momento de fissuração:

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \Rightarrow M_r = \frac{1,50 \times 0,20 \times 8333}{5} = 500 \text{ kN} \times \text{cm}$$

2. Verificação quanto a fissuração:

O momento atuante na direção x :  $M_a = 890 \text{ kN} \times \text{cm}$  (dado)

$$M_a > M_r \Rightarrow 890 \text{ kN} \times \text{cm} > 500 \text{ kN} \times \text{cm}$$

como o momento atuante é maior que o momento de fissuração, haverá fissura em serviço (ELS).

3. Cálculo do momento fletor de fissuração da laje para verificação da flecha (deslocamento):

1. Usa-se a resistência média do concreto à tração (já calculado):

$$f_{ct,m} = 0,29 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \Rightarrow M_r = \frac{1,50 \times 0,29 \times 8333}{5} = 725 \text{ kN} \times \text{cm}$$

4. Momento atuante:  $M_a = 890 \text{ kN} \times \text{cm}$  (dado)

$$M_a > M_r \Rightarrow 890 \text{ kN} \times \text{cm} > 725 \text{ kN} \times \text{cm} \text{ (devemos calcular } EI_{eq} \text{)}.$$

- Módulo de elasticidade do aço:

$$E_s = 210000 \text{ MPa} = 21000 \text{ kN} \times \text{cm}^2$$

- Módulo de elasticidade secante do concreto:

$$E_{cs} = 0,85 \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \Rightarrow f_{ck} = 30 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 0,85 \times 5600 \times \sqrt{30} = 26072 \text{ MPa} = 2607,20 \text{ kN} \times \text{cm}^2$$

- Área de aço da laje:  $7,00 \text{ cm}^2 / \text{m}$  (dado)

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \Rightarrow \alpha_e = \frac{210000}{26072} = 8,05$$

- Cálculo da linha neutra no estádio II - (determinação de:  $X_{II}$ )

$$X_{II}^2 + \left( \frac{2 \times A_s \times \alpha_e}{b} \right) \times X_{II} - \left( \frac{2 \times A_s \times d \times \alpha_e}{b} \right) = 0$$

$$X_{II}^2 + \left( \frac{2 \times 7,00 \times 8,05}{100} \right) \times X_{II} - \left( \frac{2 \times 7,00 \times 7 \times 8,05}{100} \right) = 0$$

$$X_{II}^2 + 1,13 \times X_{II} - 7,89 = 0 \Rightarrow \text{equação de } 2^{\circ} \text{ grau.}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2,30$$

7-2,3- Cálculo do momento de inércia no estádio II ( $I_{II}$ ):

$$I_{II} = \frac{b \times X_{II}^3}{12} + b \times X_{II} \times \left( \frac{X_{II}}{2} \right)^2 + \alpha_e \times A_s \times (d - X_{II})^2$$

$$I_{II} = \frac{100 \times 2,30^3}{12} + 100 \times 2,30 \times \left( \frac{2,30}{2} \right)^2 + 8,05 \times 7,0 \times (7 - 2,30)^2 = 1650,34 \text{ cm}^4$$

- Cálculo do momento de inércia equivalente:  $EI = EI_{eq}$

$$EI_{eq} = E_{cs} \times \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \times I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \times I_{II} \right\} \leq E_{cs} \times I_c$$

$$EI_{eq} = 2607,2 \times \left\{ \left( \frac{725}{890} \right)^3 \times 8333 + \left[ 1 - \left( \frac{725}{890} \right)^3 \right] \times 1650,34 \right\} \leq 2607,2 \times 8333$$

$$EI_{eq} = 2607,2 \times \{ 0,54 \times 8333 + [1 - 0,54] \times 1650,34 \} \leq 21725798$$

$$EI_{eq} = 2607,2 \times \{ 4500 + [0,46] \times 1650,34 \} \leq 21725798$$

$$EI_{eq} = 13711673 \text{ kN} \times \text{cm}^2 \leq 21725798 \text{ kN} \times \text{cm}^2 - \text{ok}$$

- Cálculo da flecha imediata:

$\alpha$  : obtido na tabela da Figura 4.22, para laje apoiada nas quatro bordas:

$$\alpha = 5,26 ; \quad \lambda = \frac{I_y}{I_x} \Rightarrow \lambda = \frac{420}{400} = 1,05 ; \quad q = 12 \text{ kN} / \text{m}^2 \Rightarrow$$

$$q = 0,0012 \text{ kN} / \text{cm}^2 \text{ (dado)}$$

$$a_i = \frac{\alpha \times b}{100 \times 12} \times \frac{q \times I_x^4}{EI}$$

$$a_i = \frac{5,26 \times 100}{100 \times 12} \times \frac{0,0012 \times 400^4}{13711673} = 0,98 \text{ cm} .$$

Resposta: Flecha imediata = 0,98 cm.

Obs.: a fórmula final do cálculo da flecha imediata, utilizada aqui, é encontrada no final da Tabela 2.2a (Figura 4.22 desta seção com acesso pelo link/QRCode).



Acessando o link <https://cm-kls-content.s3.amazonaws.com/ebook/embed/qr-code/2018-2/estruturas-de-concreto-armado-l/u4/s2/tabelas-de-lajes.pdf> ou por meio do QR Code.



Pesquise mais

Para entender o que é contra flecha, acesse o vídeo pelo link: <<https://www.youtube.com/watch?v=W745mJVJlmc>>. Acesso em? 29 ago. 2018.

### Deformações (flechas) limites de norma:

A norma brasileira NBR-6118 estabelece alguns limites de deslocamentos que são valores práticos utilizados para verificar o ELS, conforme Tabela 4.3.

Esses valores são classificados em quatro grupos, segundo o item 13.3 da NBR-6118 (ABNT, 2014):

**a) aceitabilidade sensorial:** a limitação visa prevenir vibrações indesejáveis ou efeito visual indesejável.

**b) efeitos específicos:** deslocamentos que podem impedir a utilização adequada da **construção**.

**c) efeitos em elementos não estruturais:** deslocamentos estruturais que podem afetar o funcionamento de elementos não estruturais por estar ligados a eles.

**d) efeitos em elementos estruturais:** deslocamentos que podem afetar o comportamento estrutural.

Tabela 4.3 | Tabela para determinar os limites de deslocamentos (flechas finais)

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$l/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$l/350$

Fonte: ABNT (2014, p. 146).

Para elementos de superfície (lajes) adota-se o menor vão ( $l = l_x$ ).

Os demais valores de  $l$  e os demais tipos efeitos podem ser obtidos na tabela 13.3 da NBR-6118 (ABNT, 2014).



**Refleta**

Que tipos de desconfortos e problemas uma laje mal dimensionada com uma flecha excessiva pode causar ao usuário?

## Sem medo de errar

Você adquiriu muitas informações novas nessa seção: ações atuantes, espessuras mínimas, cobrimentos mínimos, flechas! Com muito treino e atenção você dominará os assuntos abordados e poderá prosseguir para nossa última seção do livro, mas, antes disso, vamos colocar a mão na massa e resolver o desafio dessa seção.

Relembrando: você participou da reunião do projeto para definição das lajes e retornou com as seguintes informações:

Espessura das lajes está confirmada e será de 10 cm, haverá um contra piso de 3 cm de espessura com peso específico da argamassa de  $21 \text{ KN/m}^3$  e revestimento cerâmico de  $0,15 \text{ KN/m}^2$ , não houve especificação de revestimento da face inferior e você adotou uma carga de  $0,2 \text{ KN/m}^2$ . Ficou definido que não existirão alvenarias sobre as lajes.

Seu desafio é determinar as caras totais atuantes e as reações de apoio das lajes L1 e L2 do primeiro pavimento, conforme a planta de formas (Figura 4.1).

### Resolução:

#### 1. Cálculos da ações atuantes nas lajes: L1 e L2 do primeiro pavimento

##### Cargas permanentes:

- peso próprio:  $p.p. = h \times \gamma_{conc.} \Rightarrow$   
 $p.p. = 0,10 \times 25 = 2,5 \text{ kN/m}^2$ .

- peso do contra piso =  $h \times \gamma_{cont.} \Rightarrow 0,03 \times 21 = 0,63 \text{ kN/m}^2$ .

- peso do piso cerâmico =  $0,15 \text{ kN/m}^2$ .

- revestimento inferior adotado =  $0,20 \text{ kN/m}^2$ .

- peso da alvenaria sobre a laje = não há alvenaria sobre as lajes.

Total de cargas permanentes:  $3,48 \text{ kN/m}^2$

Carga acidental (sobrecarga) =  $3,0 \text{ kN/m}^2$  (lavanderia) (NBR-6120, 1980).

##### Total de carregamentos:

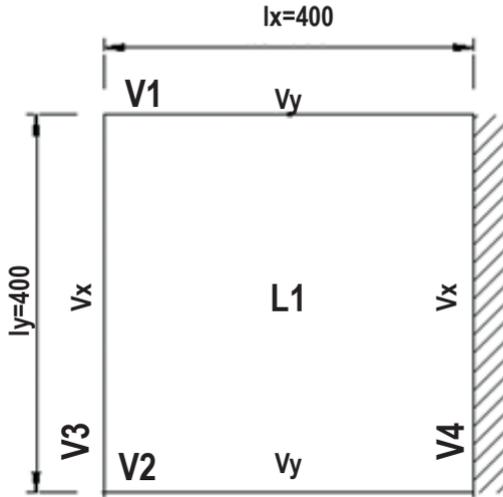
$q$  = carga permanente + carga acidental

$$q = 3,48 + 3,00 = 6,48 \text{ kN/m}^2$$

#### 2. Cálculo das reações de apoio nas vigas:

Laje L1: 4,00 x 4,00 m - Figura 4.23

Figura 4.23 | Esquema estático da L1



Fonte: elaborada pelo autor.

Determinar o  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{4,00}{4,00} = 1 < 2 \Rightarrow \text{armada em duas direções}$$

Obter os coeficientes  $v$  em função de  $\lambda = 1$  (tabela da Figura 4.21):

Laje tipo 2B:  $v_x = 2,75$  ;  $v'_x = 4,02$  ;  $v_y = 1,83$

$$V = v \times \frac{q \times l_x}{10} \Rightarrow \text{equação geral}$$

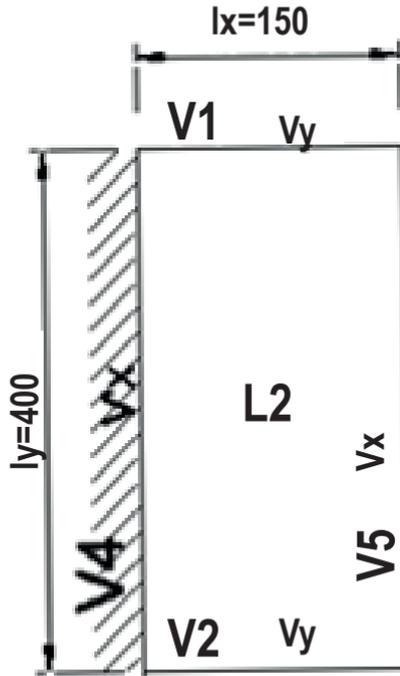
$$\text{Reação na viga V3: } V_x = 2,75 \times \frac{6,48 \times 4,00}{10} = 7,13 \text{ kN/m}$$

$$\text{Reação na viga V4: } V'_x = 4,02 \times \frac{6,48 \times 4,00}{10} = 10,42 \text{ kN/m}$$

$$\text{Reação na viga V1 e V2: } V_y = 1,83 \times \frac{6,48 \times 4,00}{10} = 4,74 \text{ kN/m}$$

**Laje L2:** 1,50 x 4,00 m - Figura 4.24

Figura 4.24 | Esquema estático da L2



Fonte: elaborada pelo autor.

Determinar o  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{4,00}{1,50} = 2,67 > 2 \Rightarrow \text{armada em uma direção}$$

Laje engastada e apoiada:

$$v'_x = \frac{5 \times q \times l}{8}, v_x = \frac{3 \times q \times l}{8} \text{ e } v_y = 0,15 \times q \times l_x$$

$$\text{Reação na viga V4: } v'_x = \frac{5 \times 6,48 \times 1,50}{8} = 6,08 \text{ kN/m}$$

$$\text{Reação na viga V5: } v_x = \frac{3 \times 6,48 \times 1,50}{8} = 3,65 \text{ kN/m}$$

$$\text{Reação na viga V1 e V2: } v_y = 0,15 \times 6,48 \times 1,50 = 1,46 \text{ kN/m}$$

### Cálculo de flecha

#### Descrição da situação-problema

Em um trabalho de verificação das lajes de um edifício de 16 andares, você notou que no primeiro andar uma das lajes está com uma deformação superior as demais, por esse motivo, você decidiu verificar qual a flecha provocada pelos carregamentos atuais, considerando a deformação lenta para 10 anos e início do carregamento de longa duração após 1 mês. Foram fornecidos: condição de apoio da laje: apoiada em 4 lados; vãos:  $5,88 \times 6,10$  m; altura da laje: 12 cm, carga permanente:  $3,69 \text{ kN} / \text{m}^2$ , carga acidental:  $2,0 \text{ kN} / \text{m}^2$ ; concreto C25. A laje não tem armadura dupla e o momento positivo atuante é de  $9,10 \text{ kN} \times \text{m}$ .

Utilizar brita em granito:  $\alpha_e = 1,0$ .

#### Resolução da situação-problema

1. Determinação de  $\lambda = \frac{l_y}{l_x} \Rightarrow \frac{610}{588} = 1,04 < 2 \Rightarrow$  laje armada

em 2 direções

2. Cálculo do momento de fissuração:  $M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t}$

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,30 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \Rightarrow$$

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,30 \times \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa} = 0,256 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$y_t = \frac{h}{2} \Rightarrow y_t = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$I_c = \frac{b \times h^3}{12} \Rightarrow I_c = \frac{100 \times 12^3}{12} = 14400 \text{ cm}^4 \therefore$$

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \Rightarrow$$

$$M_r = \frac{1,50 \times 0,256 \times 14400}{6} = 921,6 \text{ kN} \times \text{cm} - \alpha = 1,5 \Rightarrow \text{ para}$$

seção retangular.

Dado  $M_a = 9,10 \text{ kN} \times \text{m} = 910 \text{ kN} \times \text{cm}$ , teremos:  $M_a < M_r \Rightarrow$   
 $9,10 \text{ kN} \times \text{m} < 9,21 \text{ kN} \times \text{m}$

### 3. Cálculo da rigidez da laje a flexão (EI)

Para :  $M_a < M_r \Rightarrow EI = E_{cs} \times I_c$

$$E_{cs} = \alpha_j \times E_{ci}$$

$$\alpha_j = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \Rightarrow \alpha_j = 0,8 + 0,2 \times \frac{25}{80} = 0,86$$

$$E_{ci} = \alpha_e \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \Rightarrow$$

$$E_{ci} = 1 \times 5600 \times \sqrt{25} = 28000 \text{ MPa} = 2800 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$E_{cs} = 0,86 \times 28000 = 24080 \text{ MPa} = 2408 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$EI = E_{cs} \times I_c \Rightarrow EI = 2408 \times 14400 = 34675200 \text{ kN} \times \text{cm}^2$$

### 4. Cálculo da flecha imediata:

$$a_i = \frac{\alpha}{12} \times \frac{q \times l^4}{EI}$$

$\alpha = 5,26$  (Figura 4.22). - laje tipo 1 e  $\lambda = 1,03$ )

$q = F_d = \sum F_g + \sum \psi_2 \times F_q$ ; considerando  $\psi_2 = 0,3$

temos que:

$$q = 3,69 + 0,3 \times 2,0 = 4,29 \text{ kN} / \text{m}^2 = 0,000429 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$a_i = \frac{\alpha}{12} \times \frac{q \times l_x^4}{EI} \Rightarrow a_i = \frac{5,26}{12} \times \frac{0,000429 \times 588^4}{34675200} = 0,65 \text{ cm}$$

## 5. Cálculo da flecha diferida no tempo

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \times \rho'} , \text{ sendo } \rho' = \frac{A'_s}{b \times d} \Rightarrow 0 - \text{não temos armadura}$$

comprimida na laje (dupla):

$$\alpha_f = \Delta\xi$$

$$\text{para } t = 10 \text{ anos} = 120 \text{ meses} \Rightarrow \xi(t) = 2 \text{ ( tabela 4.2).}$$

$$\text{para } t = 1 \text{ mês} \Rightarrow \xi(t_0) = 0,68 \text{ ( tabela 4.2).}$$

$$\alpha_f = \Delta\xi \Rightarrow \Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \Rightarrow \Delta\xi = 2 - 0,68 = 1,32$$

$$\alpha_f = 1,32 \text{ cm}$$

## 6. Cálculo da flecha total:

$$a_t = a_i \times (1 + \alpha_f) \Rightarrow a_t = 0,65 \times (1 + 1,32) = 1,50 \text{ cm}$$

## 7. Verificação da flecha calculada com a flecha máxima permitida pela norma (Tabela 4.3).

Da Tabela 4.3, tipo de efeito: aceitabilidade sensorial, teremos:

Para deslocamentos visíveis o limite de flecha é:

$$a = \frac{l}{250} \Rightarrow a = \frac{588}{250} = 2,35 \text{ cm} > 1,50 \text{ cm.}: \text{ok!}$$

Para vibração devido as cargas acidentais:

$$a = \frac{l}{350} \Rightarrow a = \frac{588}{350} = 1,68 \text{ cm} > 1,50 \text{ cm.}: \text{ok!}$$

## Faça valer a pena

**1.** Quando iniciamos um projeto estrutural em concreto armado, todas as dimensões dos elementos estruturais devem ser pré-dimensionadas, ou seja, o engenheiro adota as dimensões e verifica.

Um engenheiro experiente muitas vezes já sabe qual espessura de laje adotar, principalmente se forem projetos prediais que seguem um padrão.

Quando não se sabe qual valor adotar, uma boa ideia é iniciar pela a espessura mínima da norma.

Qual espessura mínima você adotaria para o subsolo de um prédio residencial?

- a) 7 cm.
- b) 8 cm.
- c) 12 cm.
- d) 14 cm.
- e) 15 cm.

**2.** A verificação da flecha de uma laje é tão importante quanto o seu dimensionamento. A flecha total deve levar em consideração a deformação imediata e a deformação lenta da laje. Para o cálculo da deformação inicial você deve verificar se o momento atuante na laje é maior ou menor que o momento de fissuração dela.

Se o momento atuante for maior que o momento de fissuração, a rigidez da laje deve ser calculada considerando:

- a) O momento de inércia da seção cheia.
- b) O momento de inércia da seção no estágio III.
- c) Não considera o momento de inércia.
- d) O momento de inércia da seção fissurada.
- e) O momento de inércia da seção transversal.

**3.** Os deslocamentos provocados pelas ações atuantes devem ser verificados em atendimento ao estado limite de serviço (ELS), ou seja, aqueles relacionados ao conforto, durabilidade e aparência do elemento estrutural. No caso das flechas, o que geralmente causa grande impacto ao usuário é o deslocamento excessivo.

Para evitar impacto visuais e outros fatores, a norma estabelece valores limites para os deslocamentos. Em um edifício residencial, qual a flecha máxima admitida para as lajes dos pavimentos?

- a)  $l/250$ .
- b)  $l/350$ .
- c)  $l/400$ .
- d)  $l/500$ .
- e)  $l/600$ .

## Seção 4.3

### Dimensionamento das lajes maciças

#### Diálogo aberto

Chegamos à etapa final do nosso objetivo!

Perceba sua evolução nessas quatro unidades: você conhece as propriedades dos materiais e os conceitos fundamentais do concreto armado, é capaz de analisar os possíveis domínios de um elemento estrutural, tem propriedade e conhecimento para determinar a armadura longitudinal e o detalhamento da seção transversal de uma viga de seção retangular e seção T e, no final desta seção, você será capaz de elaborar o dimensionamento completo de uma laje maciça, detalhando as armadura positivas e negativas.

Nesta seção, está seu último desafio para a finalização do projeto de lajes da lavanderia, além disso, você completa seus estudos sobre os elementos estruturais de concreto armado sujeitos à flexão.

Relembrando que o projeto da lavanderia é parte de um projeto maior, composto por um conjunto de prédios inteligentes que será implantado em três localidades brasileiras distintas.

Desta vez, você começará o processamento do cálculo das lajes, com a utilização do software de cálculo, para implantação nas regiões litorâneas, por terem maior cobertura em função da agressividade ambiental, o que diminui a altura útil ( $d$ ) da peça e pode resultar em inconsistências no dimensionamento.

Enquanto o software efetua o processamento para as regiões litorâneas, você deverá exercitar o que aprendeu nesta seção, cumprindo seu último desafio que será efetuar manualmente o cálculo, dimensionamento e detalhamento das lajes L1 e L2 do projeto de formas do primeiro pavimento da lavanderia (Figura 4.1), para a implantação em Belo Horizonte.

Lembrando que as ações totais atuantes nas lajes foram obtidas no desafio anterior e resultaram em  $6,48 \text{ KN/m}^2$  incluindo o peso próprio.

Dados obtido na planta de formas da Figura 4.1: L1 = 4x4 metros, apoiada em 3 lados e engastada em um lado (Figura 4.23) e L2 = 1,5x4 metros, apoiada em 3 lados e engastada no menor lado (Figura 4.24), espessura da laje 10 cm (adotar  $d = 7 \text{ cm}$ ).

Da Unidade 2, Seção 1, foram obtidos os seguintes parâmetros em função da agressividade ambiental: concreto: C25, cobrimento das lajes 2,5 cm.

## Não pode faltar

### Introdução

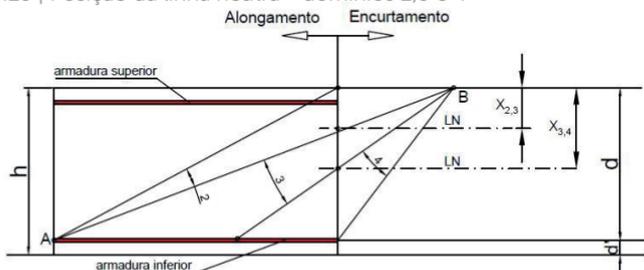
Vamos iniciar o aprendizado sobre o cálculo e dimensionamento das armaduras das lajes maciças em concreto armado. Nos cálculos das armaduras, assim como nas flechas e reações de apoio, usaremos as tabelas de BARES, adaptada por PINHEIRO (1994).



### Assimile

As lajes maciças de concreto armado, seguem as mesmas orientações normativas das vigas quanto ao Estado limite último (ELU), obedecendo os domínios de dimensionamento (Figura 4.25), incluindo os limites para redistribuição de momentos e condição de utilidade:  $x/d = 0,45$  (concreto com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ) (revisitar a Unidade 1, Seção 3)

Figura 4.25 | Posição da linha neutra - domínios 2,3 e 4



Fonte: elaborada pelo autor.



Para análise linear das lajes, devem ser atendidas as condições gerais expressas nos itens 14.5.2 e 14.5.3 e as condições específicas nos itens 14.7.3.1 e 14.7.3.2, da NBR-6118 (ABNT, 2014).

Além dos itens citados, a NBR-6118, item 14.7.1, estabelece duas hipóteses específicas para os elementos de placa (laje):

- a) manutenção da seção plana após a deformação, em faixas suficientemente estreitas.
- b) representação dos elementos por seu plano médio.

### Armadura mínima

As armaduras longitudinais mínimas devem ser consideradas, de modo que, não haja a ruptura frágil do elemento estrutural e sejam atendidas as condições de abertura de fissuras da norma.

A NBR-6118, item 17.3.5.2.1 apresenta uma formulação para determinar a armadura mínima de tração na flexão das lajes.

Uma alternativa mais simples, inclusive abordada no cálculo das armaduras mínimas das vigas (Unidade 2, Seção 1) é o cálculo da armadura mínima de lajes em função da taxa de armadura e da resistência do concreto à compressão (Tabela 4.4).

Tabela 4.4 | Taxas mínimas de armadura de flexão para lajes

Forma da seção	Valores de $\rho_{min} = (A_{s,min}/A_c)$ em %									
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Retangular	0,15	0,15	0,15	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226

Fonte: ABNT (2014, p.130).

$$\rho_{min} = \frac{A_{s,min}}{A_c}, \text{ portanto, a armadura mínima equivale a:}$$

$A_{s,min} = \rho_{min} \times A_c$ , em que o  $\rho_{min}$ , pode ser obtido na Tabela 4.4 em função do valor do  $f_{ck}$ .

$A_c$  = equivale a área de concreto da seção transversal:  
 $A_c = bw \times h$

### Diâmetro máximo das armaduras, espaçamentos mínimo e máximo das armaduras principais

A NBR-6118, item 20.1, prescreve que a armadura de flexão tenha diâmetro de no máximo  $\frac{h}{8}$ , ( $h$  a espessura da laje) e o espaçamento máximo ( $s$ ) entre as barras deve ser o menor entre os dois valores da Tabela 4.5.

Tabela 4.5 | Espaçamento máximo entre barras longitudinais

s	$\leq 2 \times h$
	$\leq 20 \text{ cm}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Com relação ao espaçamento mínimo entre as barras sujeitas à flexão, não há especificação da NBR-6118, no entanto, não podemos esquecer que o espaçamento mínimo deve garantir que toda armadura esteja envolvida pelo concreto e que não tenha espaços vazios na concretagem do elemento estrutural, podendo acarretar patologias nas armaduras.



**Refleta**

Baseado no conteúdo abordado até o momento, você saberia dizer o que significa "bicheira" nos elementos de concreto armado e como evitá-la?

Na prática, em projetos prediais, é comum a utilização de espaçamentos mínimos de 10 cm entre as barras.

Em obras industriais, uma boa prática da engenharia é utilizar como espaçamento mínimo o mesmo recomendado para a armadura longitudinal das vigas, ou seja, o maior entre os valores da Tabela 4.6.

Tabela 4.6 | Espaçamentos mínimos entre barras longitudinais

<b>s</b>	$\geq 20 \text{ mm ou } 2 \text{ cm};$
	$\geq \text{diâmetro da barra } (\phi_l);$
	$\geq 1,2 \times \phi_{\text{agregado}} \text{ (brita)}$

Fonte: elaborada pelo autor.

O espaçamento entre as barras pode ser calculado pela equação:

$s = \frac{A_{l\phi}}{A_s}$  (resposta em metros. Para resposta em cm, basta multiplicar por 100).

A quantidade de barras para uma dada área de aço, será:

$Q = \frac{l_0}{s} + 1$  barra, sendo  $l_0$  a distância entre as faces dos apoios (vigas).

### Atenção

Os diâmetros usuais para armadura principal das lajes em estruturas prediais são:  $\phi 6,3 \text{ mm}; \phi 8 \text{ mm}; \phi 10 \text{ mm}; \phi 12,5 \text{ mm}; \phi 16 \text{ mm}; \phi 20 \text{ mm}$ .

Os espaçamentos usuais são: 10 cm; 12,5 cm; 15 cm; 17,5 cm; 20 cm.

## Dimensionamento das armaduras

Nos softwares de cálculo estrutural, você pode determinar qual o melhor método de dimensionamento das lajes para seu projeto, sendo que o método mais comum entre os projetistas e que mais se aproxima da realidade do funcionamento da estrutura é o método integrado e flexibilizado de pórtico espacial. Nesse método, os elementos estruturais não são independentes (como fazemos manualmente), há uma integração entre eles fazendo com que a estrutura trabalhe de forma conjunta.

No nosso curso, o dimensionamento das armaduras longitudinais principais (positivas e negativas) das lajes maciças

armadas em duas direções, será feito pelo método simplificado com a utilização de tabelas.

### Equação 1:

$$M = \mu \times \frac{p \times l_x^2}{100}, \text{ em que: } \mu = \text{coeficiente tabelado em função}$$

dos tipo de laje (vínculos) e da relação:  $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$ .



### Atenção

A tabela para obtenção dos momentos fletores em laje com carga uniforme é a mesma utilizada na seção anterior disponibilizada por meio de link e QR Code.

O cálculo das armaduras pode ser efetuado utilizando as equações de cálculo das armaduras das vigas de seção retangular, onde a largura  $b_w = 100 \text{ cm}$  (1 metro).

Uma outra opção, mais simples e que será utilizada em nossos cálculos, é a utilização de tabelas para obtenção dos coeficientes  $k_c$  e  $k_s$  (em algumas bibliografias os coeficientes são chamados de  $k_6$  e  $k_3$ ), que a partir das equações 2 e 3 nos permite facilmente calcular as armaduras.

### Equação 2:

$$k_c = \frac{b_w \times d^2}{M_d}, \text{ em que:}$$

$b_w = 100 \text{ cm}$ ;  $d$  = altura útil da laje e  $M_d$  = momento de cálculo.

### Equação 3:

$$A_s = \frac{K_s \times M_d}{d}, \text{ em que: } k_s = \text{obtido na tabela de obtenção do}$$

$k_c$  e  $k_s$ , em função do  $k_c$  calculado e do que  $f_{ck}$ . O resultado de  $A_s$  é dado em  $\text{cm}^2/\text{m}$ .

As equações que fornecem os valores de  $k_c$  e  $k_s$ , também são válidas para o cálculo das vigas. Sugerimos que você faça um teste de comparação dos resultados entre o dimensionamento com as equações e com o método dos  $k_c$  e  $k_s$ !



Você poderá acessar a tabela para obtenção de  $k_c$  e  $k_s$  nos anexos da apostila do professor Paulo Bastos pelo link: (<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>) (<https://cm-kl-content.s3.amazonaws.com/ebook/embed/qr-code/2018-2/estruturas-de-concreto-armado-l/u4/s3/tabela-kc.pdf>) ou QR Code.

Observe que a tabela apresenta na última coluna em qual domínio estamos trabalhando.

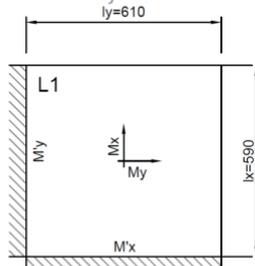
Lembramos que os domínios de cálculo são os domínios 2 e 3.

Caso o coeficiente esteja no domínio 4 ou tenha um valor não constante na tabela, deve-se aumentar a espessura da laje ou o  $f_{ck}$  (não é usual alterar a resistência do concreto adotada no projeto).

**Exemplificando**

Para uma laje L1 (Figura 4.26) com espessura  $h=11$  cm e altura útil  $d=7$  cm e que recebe um carregamento uniforme  $q = 6,60$  kN/m, qual a área de armadura necessária para garantir o ELU? Sabe-se que o  $f_{ck} = 30$  MPa e o aço CA-50.

Figura 4.26 | Esquema estático da laje L1



Fonte: elaborada pelo autor.

1- Verificação da laje quanto a direção das armaduras principais:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{610}{590} = 1,03 < 2.: \text{armada em duas direções}$$

2- Determinação do tipo de laje (tabela)

Laje tipo 3: dois lados engastados e 2 lados apoiados

3- Determinação dos momentos fletores (tabela)

Para  $\lambda = 1,03$ , obtemos :  $\mu_x = 2,94$ ,  $\mu'_x = 7,43$ ,  
 $\mu_y = 2,68$ ,  $\mu'_y = 7,18$

Equação 1:  $M = \mu \times \frac{p \times l_x^2}{100}$

$$M_x = \mu_x \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{2,94 \times 6,60 \times 5,90^2}{100} = 6,75 \text{ kN} \times \text{m} = 675 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M'_x = \mu'_x \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{7,43 \times 6,60 \times 5,90^2}{100} = 17,08 \text{ kN} \times \text{m} = 1707 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M_y = \mu_y \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{2,68 \times 6,60 \times 5,90^2}{100} = 6,15 \text{ kN} \times \text{m} = 615 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M'_y = \mu'_y \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{7,18 \times 6,60 \times 5,90^2}{100} = 16,50 \text{ kN} \times \text{m} = 1650 \text{ kN} \times \text{cm}$$

4- Cálculo das armaduras (positivas e negativas)

Equação 2:  $k_c = \frac{b_w \times d^2}{M_d}$

Para momento positivo em x:  $M_x \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{675 \times 1,4} = 5,19 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,024 \text{ kN}/\text{cm}^2$

Equação 3:  $A_s = \frac{K_s \times M_d}{d}$

$$A_s = \frac{0,024 \times 675 \times 1,4}{7} = 3,24 \text{ cm}^2/\text{m} >$$

$$A_{s_{\min}} = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 11 = 1,65 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Para momento negativo em x:  $M'_x \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{1707 \times 1,4} = 2,05 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,027 \text{ kN/cm}^2$

$$A_s = \frac{0,027 \times 1707 \times 1,4}{7} = 9,21 \text{ cm}^2/\text{m} > A_{s_{\min}}$$

Para momento positivo em y:  $M_y \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{615 \times 1,4} = 5,69 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,024 \text{ kN/cm}^2$

$$A_s = \frac{0,024 \times 615 \times 1,4}{7} = 2,95 \text{ cm}^2/\text{m} > A_{s_{\min}}$$

Para momento negativo em y:  $M'_y \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{1650 \times 1,4} = 2,12 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,027 \text{ kN/cm}^2$

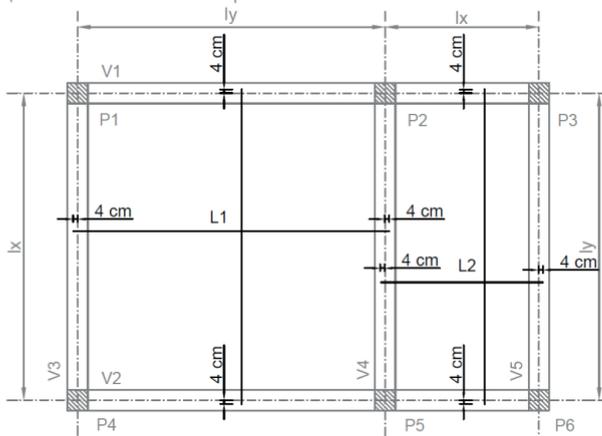
$$A_s = \frac{0,027 \times 1650}{7} = 6,36 \text{ cm}^2/\text{m} > A_{s_{\min}}$$

### Detalhamento das armaduras positivas

Para as lajes armadas em uma ou duas direções, a NBR-6118, item 20.1, prescreve que a armadura positiva deve ser prolongada até

no mínimo 4 cm além do eixo do apoio (Figura 4.27), caso não haja armadura transversal e acréscimo de armadura devido aos momentos volventes (ABNT, 2014).

Figura 4.27 | Detalhe da armadura positiva



Fonte: elaborada pelo autor.

### Detalhamento das armaduras negativas

A NBR-6118/2014 não apresenta um item específico para detalhamento de lajes maciças apoiadas em vigas, neste caso, vamos adotar os comprimentos e as disposições prescritas para lajes sem vigas, item 20.3 da NBR-6118.

Dessa forma, o comprimento da armadura negativa, representada na Figura 4.28 será  $a \geq 0,25 \times l$ . O valor de  $l$  será o maior dos dois menores vãos (entre duas lajes contínuas).

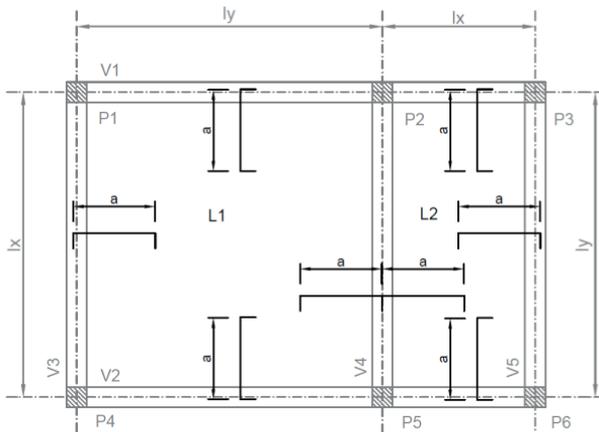
Observe a Figura 4.28, na qual temos  $l_{x1}$  e  $l_{x2}$  como os menores vãos de cada laje, neste caso, entre esses dois valores o  $l_{x1}$  é o maior, portanto, o comprimento da armadura negativa para cada laje será:  $a = 0,25 \times l_{x1}$  ( $l_{x1} > l_{x2}$ ) + as dobras.

Embora o item 20.3 da NBR-6118, não especifique dobras nas armaduras negativas, é uma prática comum sua utilização nos projetos. Vamos adotar o valor da dobra:  $h - (2 \times c)$ , sendo  $c$  é o cobrimento da armadura e  $h$  é a altura da laje.

Embora o momento fletor nas bordas das lajes seja nulo, é usual detalhar com armadura negativa de borda com barras de  $\phi 6,3 \text{ mm } c / 20 \text{ cm}$ .

Devido às diferenças de culturas regionais, é possível encontrar projetos que não contemplam a armadura de borda.

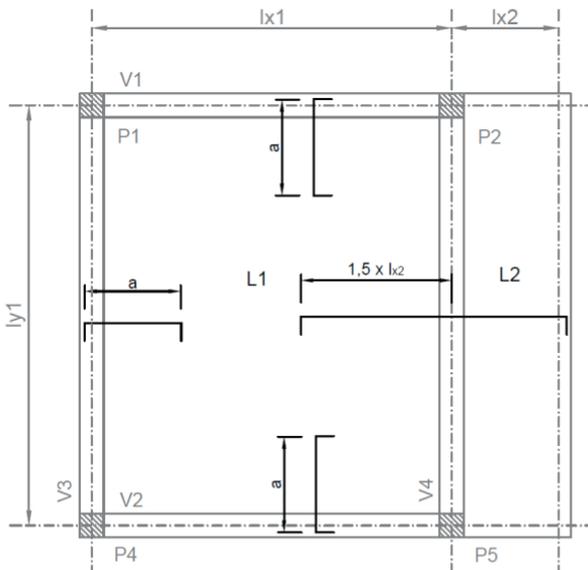
Figura 4.28 | Detalhe da armadura negativa (bordas e continuidade de laje)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para as lajes em balanço, como no caso da L2 da Figura 4.29, vamos adotar o comprimento de ancoragem de  $1,5 \times l_2$ .

Figura 4.29 | Detalhe da armadura negativa - laje em balanço



Fonte: elaborada pelo autor.

## Detalhamento final das armaduras positivas e negativas

O detalhamento final das armaduras positivas e negativas deve ser representado sobre uma cópia do projeto de formas (base do projeto). Normalmente, no detalhamento, a base do projeto contém apenas as informações básicas das formas (numeração de vigas e pilares) que são usadas como referência para locação correta das armaduras.

A base do projeto é representada no desenho por uma espessura de linha mais fina ou até mesmo em um tom mais claro, evidenciando as armaduras.

As barras representadas no desenho devem conter todas as informações necessárias para sua fabricação (corte e dobra) e locação na obra. Para isso, utiliza-se uma nomenclatura que deve conter no mínimo:

- A posição da armadura normalmente chamada de  $N$ . A posição deve ser numerada conforme os critérios adotados nos desenhos técnicos, ou seja, de cima para baixo e da esquerda para a direita.

- A quantidade de armadura ( $Q = \frac{l_0}{s} + 1$ ) para uma faixa de laje calculada.

- O diâmetro calculado representado por  $\phi$  (mm).

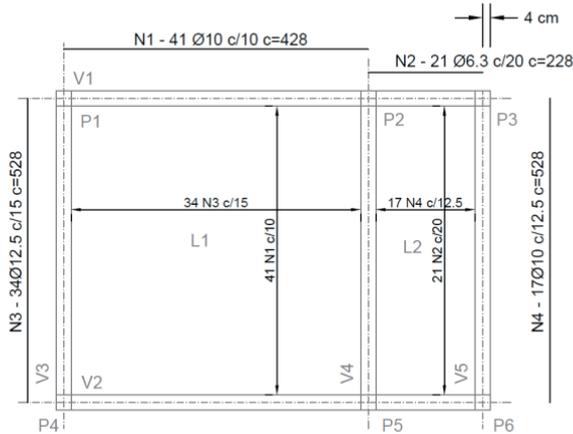
- O espaçamento entre as barra ( $s = \frac{A_{1\phi}}{A_s}$ ) representado por  $c/$ .

- O comprimento parcial (barras com dobras) e o comprimento total representado pela letra  $c =$ .

As Figuras 4.30 e 4.31 contêm exemplos de detalhamento final das armaduras das lajes.

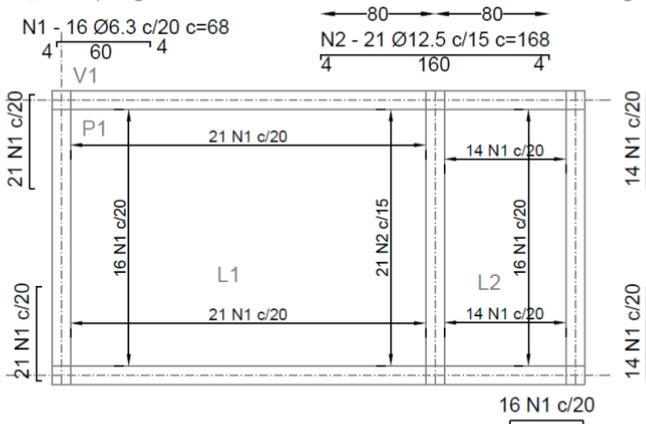
Para que o desenho não fique sobrecarregado, alguns projetistas preferem representar as barras fora da base do projeto (formas) e as distribuições das barras dentro da base do projeto (Figuras 4.30 e 4.31).

Figura 4.30 | Exemplo genérico de detalhamento final das armaduras positivas



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.31 | Exemplo genérico de detalhamento final das armaduras negativas

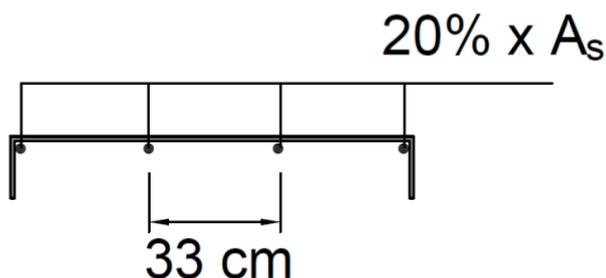


Fonte: elaborada pelo autor.

As armaduras secundárias (ou de distribuição) de flexão (positiva e negativa) são aquelas que permitem manter o posicionamento das armaduras principais durante a concretagem. A NBR 6118 prescreve que as armaduras secundárias (Figura 4.32) devem ser iguais ou maiores que 20% da área de aço da armadura principal e o espaçamento de no máximo 33 cm (ABNT,2014).

Essas armaduras são representadas conforme a Figura 4.32 e também devem receber nomenclatura específica (posição N).

Figura 4.32 | Armadura secundária - (negativa)



Fonte: elaborada pelo autor.

Medidas em centímetros.

## Sem medo de errar

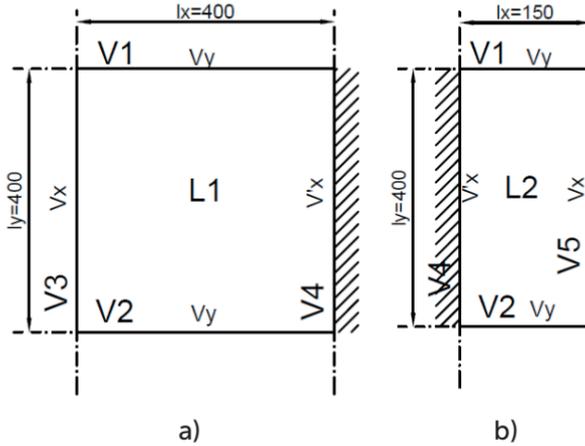
Finalizando nossa unidade, você aprendeu a calcular a armadura mínima das lajes, os espaçamentos mínimos e máximo entre as barras, a calcular a armadura principal, os espaçamentos e quantidade de barras e o detalhamento das armaduras positivas e negativas.

Com todo esse aprendizado está fácil para você cumprir seu último desafio: efetuar manualmente o cálculo, dimensionamento e detalhamento das lajes L1 e L2 do projeto da lavanderia (Figura 4.1) para a implantação em Belo Horizonte.

Você sabe que as ações totais atuantes foram obtidas no desafio anterior e resultaram em  $6,48 \text{ KN/m}^2$ , incluindo o peso próprio da laje. Os dados complementares para a região de Belo Horizonte são (Unidade 1, Seção 2):  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ , cobrimento das armaduras das lajes, de acordo com a agressividade ambiental classe II, será 2,5 cm. As espessuras das lajes são de 10 cm e a altura útil adotada:  $d = 7 \text{ cm}$ .

Do projeto de formas do primeiro pavimento da lavanderia (Figura 4.1), obtemos as características geométricas das lajes: L1 = 4,0 x 4,0 metros apoiada em 3 lados e engastada em um lado (Figura 4.33 a) e L2 = 1,5 x 4,0 metros, apoiada em 3 lados e engastada no menor lado (Figura 4.33 b)

Figura 4.33 | laje L1 (a); laje L2 (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

### Cálculo da laje L1:

#### 1- Verificação da laje quanto a direção das armaduras principais:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{400}{400} = 1,00 < 2 \therefore \text{armada em duas direções}$$

#### 2- Determinação do tipo de laje (tabela)

Laje tipo 2B: 1 lado engastado e 3 lados apoiados.

#### 3- Determinação dos momentos fletores (tabela)

Para  $\lambda = 1,00$ , obtemos:  $\mu_x = 3,54$ ,  $\mu'_x = 8,40$ ,  $\mu_y = 2,91$ .

O sinal negativo dos momentos significa que a armadura estará posicionada na face superior da laje. O sinal de negativo não é considerado nos cálculos

$$\text{Equação 1: } M = \mu \times \frac{p \times l_x^2}{100}$$

Momento positivo em x:

$$M_x = \mu_x \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{3,54 \times 6,48 \times 4,00^2}{100} = 3,67 \text{ kN} \times \text{m} = 367 \text{ kN} \times \text{cm}$$

Momento negativo em x:

$$M'_x = \mu'_x \times \frac{p \times l_x^2}{100} = \frac{8,40 \times 6,48 \times 4^2}{100} = -8,70 \text{ kN} \times \text{m} = -870 \text{ kN} \times \text{cm}$$

Momento positivo em y:

$$M_y = \mu_y \times \frac{\rho \times l_x^2}{100} = \frac{2,91 \times 6,48 \times 4^2}{100} = 3,02 \text{ kN} \times \text{m} = 302 \text{ kN} \times \text{cm}$$

4- Cálculo das armaduras (positivas e negativas)

$$\text{Equação 2: } k_c = \frac{b_w \times d^2}{M_d}$$

Para momento positivo em x:  $M_x \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{367 \times 1,4} = 9,54 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,024 \text{ kN}/\text{cm}^2$

$$\text{Equação 3: } A_s = \frac{K_s \times M_d}{d}$$

$$A_s = \frac{0,024 \times 367 \times 1,4}{7} = 1,76 \text{ cm}^2/\text{m} >$$

$$A_{s_{\min}} = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 10 = 1,50 \text{ cm}^2/\text{m} \therefore \text{ adotamos } A_s = 1,76 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Bitola adotada:  $\phi 6,3 \text{ mm}$ , espaçamento:  $s = \frac{A_{t\phi}}{A_s} \Rightarrow$

$$s = \frac{0,31}{1,76} = 0,176 \text{ m} = 17,5 \text{ cm}, \text{ dentro dos parâmetros de}$$

espaçamento máximo e mínimo (Tabelas 4.5 e 4.6).

Quantidade de barras de  $\phi 6,3 \text{ mm}$ :  $Q = \frac{l_0}{s} + 1 \Rightarrow$

$$Q = \frac{400}{17,5} + 1 \Rightarrow 24 \text{ barras.}$$

Resumo:  $24\phi 6,3 \text{ mm c} / 17,5 \text{ cm}$ .

**Para momento negativo em x:** devemos primeiramente calcular o momento da laje L2 e fazer a compatibilização dos momentos L1 com L2.

Para momento positivo em y:  $M_y \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{302 \times 1,4} = 11,59 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,024 \text{ kN/cm}^2$

$$A_s = \frac{0,024 \times 302 \times 1,4}{7} = 1,45 \text{ cm}^2/\text{m} < A_{s\text{min}} \quad \therefore \text{adotar}$$

armadura mínima.:  $\phi 6,3 \text{ c} / 20$ .

Quantidade de barras de 6.3 mm:  $Q = \frac{l_0}{s} + 1 \Rightarrow$

$$Q = \frac{400}{20} + 1 \Rightarrow 21 \text{ barras.}$$

Resumo:  $21\phi 6,3 \text{ mm c} / 20 \text{ cm}$ .

**Cálculo de L2:**

**1- Verificação da laje quanto a direção das armaduras principais:**

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{400}{150} = 2,66 > 2$$

**2- Determinação do tipo de laje**

∴ armada em uma direção (engastada e apoiada)

**3- Determinação dos momentos fletores** (ver seção 1- momentos fletores para lajes armadas em uma direção)

**Momento negativo:**

$$M_{x-} = -\frac{q \times l_x^2}{12} \Rightarrow M_x = \frac{6,48 \times 1,50^2}{12} = -1,22 \text{ kN} \times \text{cm} = -122 \text{ kN} \times \text{m}$$

(determinado o momento negativo da L2, fazemos a compatibilização com momento negativo de L1).

**Momento positivo:**

$$M_{x+} = +\frac{q \times l_x^2}{24} \Rightarrow M_{x+} = \frac{6,48 \times 1,5^2}{24} = 0,61 \text{ kN} \times \text{cm} = 61 \text{ kN} \times \text{m}$$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{61 \times 1,4} = 57 \text{ cm}^2/\text{kN} \quad \text{e}$$

$$A_s = \frac{0,023 \times 61 \times 1,4}{7} = 0,28 \text{ cm}^2/\text{m} < A_{smin} \therefore \text{ adotar armadura}$$

mínima de  $\phi 6,3 \text{ c} / 20$ .

Quantidade de barras de 6.3 mm:  $Q = \frac{l_0}{s} + 1 \Rightarrow$

$$Q = \frac{400}{20} + 1 \Rightarrow 21 \text{ barras.}$$

Resumo:  $21\phi 6,3 \text{ mm c} / 20 \text{ cm}$ .

4-Compatibilização os momentos negativos:

$$L1 \Rightarrow M'_x = -8,70 \text{ kN} \times \text{m} = -870 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$L2 \Rightarrow M'_x = -1,22 \text{ kN} \times \text{cm} = -122 \text{ kN} \times \text{m}$$

$$M'_x = 870 \times 0,8 = 696 \text{ kN} \times \text{cm} \text{ ou}$$

$$M'_x = \frac{870 + 122}{2} = 496 \text{ kN} \times \text{cm} \therefore$$

Na compatibilização adotamos o maior momento negativo entre os dois acima:  $M'_x \text{ final} = 696 \text{ kN} \times \text{cm}$

5- Cálculo da armadura negativa final:

Para momento negativo final em x (L1 e L2):  $M'_x \Rightarrow$

$$k_c = \frac{100 \times 7^2}{696 \times 1,4} = 5,03 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

da tabela  $\Rightarrow k_s = 0,025 \text{ kN}/\text{cm}^2$

$$A_s = \frac{0,025 \times 696 \times 1,4}{7} = 3,48 \text{ cm}^2/\text{m} > A_{smin} \therefore \text{ adotamos o}$$

maior valor de  $A_s = 3,48 \text{ cm}^2/\text{m}$

Adotamos barras de  $\phi 8 \text{ mm}$ .

Espaçamento entre as barras  $\phi 8 \text{ mm}$ :  $s = \frac{A_{t\phi}}{A_s} \Rightarrow$

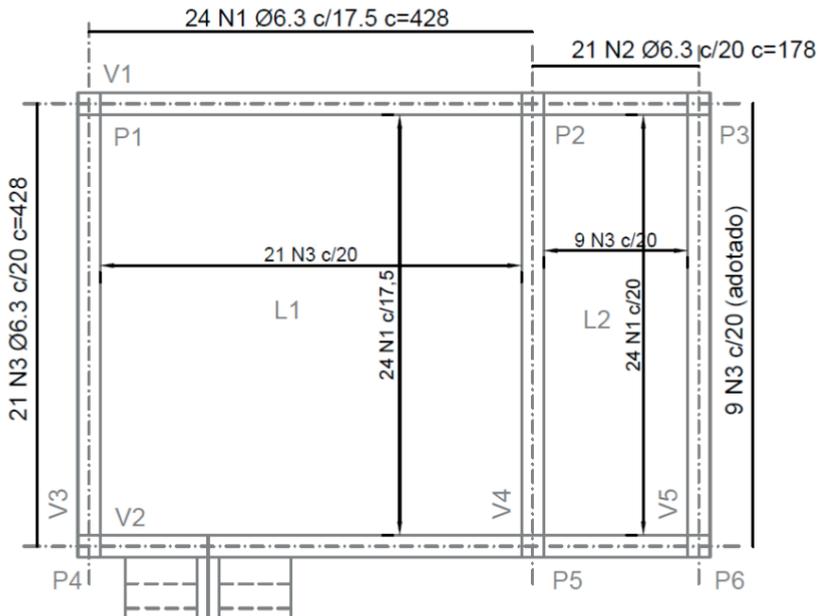
$s = \frac{0,50}{3,48} = 0,144 \text{ m} = 14 \text{ cm}$ , dentro dos parâmetros de espaçamento máximo e mínimo (Tabelas 4.5 e 4.6).

Quantidade de barras de 8mm:  $Q = \frac{l_0}{s} + 1 \Rightarrow$   
 $Q = \frac{400}{14} + 1 \Rightarrow 30$  barras.

Resumo:  $30\phi 8 \text{ mm c} / 14 \text{ cm}$ .

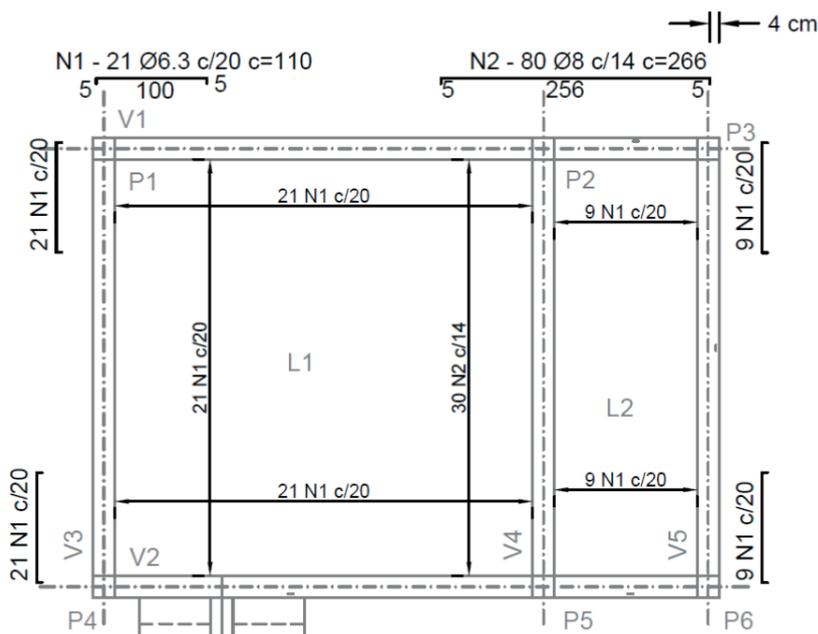
## 6- Detalhamento das armaduras: (figuras 4.34 e 4.35)

Figura 4.34 | Detalhamento das armaduras positivas



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.35 | Detalhamento das armaduras negativas



Medidas em cm.

Fonte: elaborada pelo autor.

Não foram detalhadas as armaduras secundárias.

## Avançando na prática

### Cálculo da armadura de laje armada em uma direção

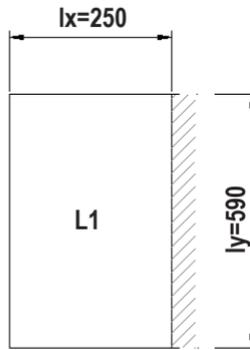
#### Descrição da situação-problema

Você recebeu o projeto de estruturas de uma laje de cobertura que está armada com armadura mínima positiva e negativa. A laje tem 8 cm de espessura (adotar  $d=5$  cm) e foi executada com concreto C30, aço CA-50 e cobrimento 2,5 cm. O esquema estático dessa laje está representado na Figura 4.36.

Sua função é verificar se essa laje poderá receber um carregamento adicional (equipamento de ar condicionado) sem que seja necessário reforçar a armadura existente.

O carregamento adicional resultará no carregamento final (incluindo o peso próprio da laje) de  $5 \text{ kN/m}^2$  distribuídos uniformemente.

Figura 4.36 | Esquema estático da laje



Fonte: elaborada pelo autor.

Medidas em centímetros

### Resolução da situação-problema

O primeiro passo é verificar se a laje é armada em uma ou duas direções:  $\lambda = \frac{590}{250} = 2,36 > 2$  : a laje será armada em uma direção.

Sendo uma laje armada em uma direção, apoiada e engastada, os momentos serão:

Momento

negativo:

$$M_{x-} = -\frac{5 \times 2,50^2}{8} = -3,90 \text{ kN} \times m = -390 \text{ kN} \times cm$$

Momento

positivo:

$$M_x = \frac{5 \times 2,50^2}{14,22} = 2,20 \text{ kN} \times m = 220 \text{ kN} \times cm$$

Cálculo das armaduras principais:

Armadura negativa:

$$k_c = \frac{100 \times 5^2}{390 \times 1,4} = 4,58 \text{ cm}^2/\text{kN} \Rightarrow \text{tabela, obtemos}$$

$$k_s = 0,025 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$A_s = \frac{0,025 \times 390 \times 1,4}{5} = 2,73 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (armadura necessária)}$$

$$> A_{s_{\min}} = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 1,20 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (armadura existente).: a}$$

armadura negativa existente não é suficiente para receber o carregamento adicional.

Armadura positiva:

$$k_c = \frac{100 \times 5^2}{220 \times 1,4} = 8,12 \text{ cm}^2/\text{kN} \Rightarrow \text{tabela, obtemos}$$

$$k_s = 0,024 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$A_s = \frac{0,024 \times 220 \times 1,4}{5} = 1,47 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (armadura necessária)}$$

$$> A_{s_{\min}} = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 1,20 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (armadura existente) } \therefore$$

a armadura positiva existente não é suficiente para receber o carregamento adicional.

## Faça valer a pena

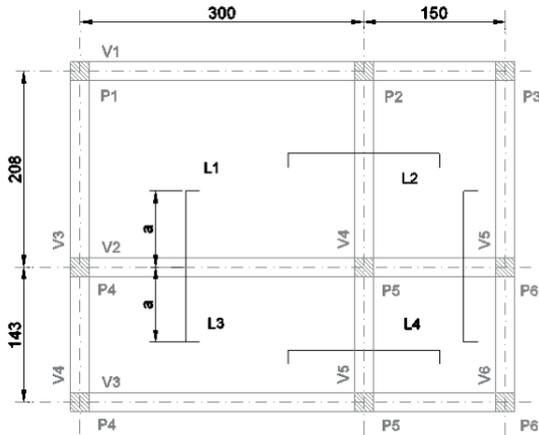
**1.** As lajes maciças são os elementos responsáveis por receber a maior parte dos carregamentos de uma edificação. Seu cálculo pode ser facilitado pela utilização de tabelas para a definição de flechas, reações e momentos fletores. Além disso, a partir das tabelas dos coeficientes  $k_c$  e  $k_s$ , podemos determinar a armadura necessária de uma laje atendendo ao ELU.

Caso o coeficiente  $k_c$  resulte em um valor fora da tabela, significa que a laje não atende ao ELU. Nesse caso, o que você deverá fazer?

- Aumentar a área de aço.
- Propor contra flecha para a laje.
- Aumentar a altura da laje.
- Aumentar o cobrimento das armaduras.
- Diminuir a altura da laje.

**2.** Você como engenheiro deve saber que o detalhamento das armaduras de um elemento estrutural é tão importante quanto o seu dimensionamento. Por esse motivo, você deve estar atento às recomendações da norma brasileira e às boas práticas da engenharia estrutural.

Figura 4.37 | Detalhe genérico de armadura negativa principal



Fonte: elaborada pelo autor.

Medidas em centímetros.

Para as lajes da Figura 4.37, qual deverá ser o valor de  $a$  e o comprimento total dessas armaduras negativas (L1 e L3)? Sabe-se que a altura das lajes é de 12 cm e o cobrimento é de 2,5 cm.

- a) 52 cm; 104 cm.
- b) 75 cm; 157 cm.
- c) 75 cm; 150 cm.
- d) 52 cm; 111 cm.
- e) 52 cm; 157 cm.

**3.** As lajes são elementos de superfície e por isso no cálculo das armaduras devemos sempre pensar que a quantidade de aço é determinada por metro ( $A_s = \text{cm}^2/\text{m}$ ).

Nos projetos de armaduras, os espaçamentos entre as barras são especificados em cm e o diâmetro em mm (exemplo:  $\phi 8 \text{ c } / 15 \text{ cm}$ ).

Para uma laje com vão entre vigas de 5m e armadura principal positiva  $A_s = 5,23 \text{ cm}^2/\text{m}$ . Quantas barras com diâmetro de 10 mm serão necessárias e qual a distância entre as barras?

- a)  $34 \phi 10 c / 15$  .
- b)  $24 \phi 10 c / 15$  .
- c)  $34 \phi 10 c / 20$  .
- d)  $24 \phi 10 c / 20$  .
- e)  $34 \phi 10 c / 12,5$  .

# Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. NBR 6120: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 1998.

BASTOS, P. **Lajes de Concreto**. Departamento de Engenharia Civil. UNESP, Bauru, 2015. Disponível em: <<http://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

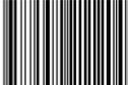
PINHEIRO, L. **Tabelas de Lajes**. Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2007. Disponível em: <<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/EstruturasConcretoII/21%20Tabelas%20de%20lajes.pdf>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

PINHEIRO, L. M. **Concreto armado: tabelas e ábacos**. São Carlos. EESC - USP, 1986.

Souza, E. **Tipos de lajes de concreto: vantagens e desvantagens**, ArchDaily Brasil 2018. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/889035/tipos-de-lajes-de-concreto-vantagens-e-desvantagens>>. Acesso em: 29 ago. 2018.



ISBN 978-85-522-1120-4



9 788552 211204 >