

# Circuitos Eléctricos II



# Circuitos Eléctricos II

Anna Giuglia Menechelli Moraco  
Ricardo Augusto de Araujo  
Tiago Ramos Fernandes

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Hugo Tanzarella Teixeira

Marley Fagundes Tavares

Rafael Schincariol Da Silva

**Editorial**

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Moraco, Anna Giulia

M827c Circuitos elétricos II / Anna Giuglia Menechelli Moraco,

Ricardo Augusto de Araujo, Thiago Ramos Fernandes. –

Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.

264 p.

ISBN 978-85-522-1097-9

1. Impedância. 2. Reatância. 3. Análise de circuitos.

I. Moraco, Anna Giulia. II. Araujo, Ricardo Augusto de.

III. Fernandes, Thiago Ramos. IV. Título.

CDD 621.31

---

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 – Londrina – PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Introdução e análise de circuitos elétricos em corrente alternada</b>	<b>7</b>
Seção 1.1 - Tensão e corrente alternadas	9
Seção 1.2 - Fasores e impedância	28
Seção 1.3 - Análise de circuitos em regime permanente senoidal	48
<b>Unidade 2   Circuitos trifásicos e análise de potência em corrente alternada</b>	<b>73</b>
Seção 2.1 - Componentes da potência instantânea	75
Seção 2.2 - Circuitos trifásicos equilibrados	89
Seção 2.3 - Potência Trifásica	108
<b>Unidade 3   Circuitos elétricos de duas portas: quadripolos</b>	<b>131</b>
Seção 3.1 - Introdução aos quadripolos	133
Seção 3.2 - Parâmetros híbridos e de transmissão	151
Seção 3.3 - Redes e circuitos equivalentes	171
<b>Unidade 4   Circuitos magneticamente acoplados</b>	<b>191</b>
Seção 4.1 - Conceitos básicos de circuitos acoplados	193
Seção 4.2 - Energia em um circuito acoplado	212
Seção 4.3 - Acoplamento magnético em um transformador	230



## Palavras do autor

Na disciplina Circuitos Elétricos I você conheceu e aprendeu a analisar circuitos elétricos de corrente contínua, denominados de circuitos CC ou DC (do inglês *direct current*). Circuitos CC são aqueles nos quais as tensões e correntes assumem valores constantes, ou seja, não variam com o tempo. Até 1882 o sistema padrão de geração, transmissão e distribuição de energia nos Estados Unidos era baseado em corrente contínua, o qual foi desenvolvido e defendido por Thomas Edison. Tal sistema era vantajoso na época para o suprimento de lâmpadas e motores de corrente contínua, no entanto, para longas distâncias, a perda energética era muito elevada, devido à resistência dos fios condutores, uma vez que o nível de tensão fornecida era baixo (+110 V ou -110 V), implicando em uma elevada corrente para transmitir uma determinada potência.

Ao final do século XIX Nikola Tesla em parceria com George Westinghouse estabeleceram o uso da corrente alternada (CA) como a forma mais eficiente e econômica para geração, transmissão e distribuição de energia. Dentre as maiores vantagens desse sistema tem-se o uso de transformadores, que possibilitaram a transmissão em altas tensões. Para uma determinada quantidade de energia transmitida, a corrente é inversamente proporcional à tensão utilizada, e com isso são necessários condutores de menor espessura. Além disso, o comprimento máximo de uma linha de transmissão tornou-se maior, permitindo que grandes usinas geradoras instaladas distantes dos centros consumidores pudessem auxiliar no suprimento da demanda energética.

Esta disputa entre o uso de corrente contínua e corrente alternada ficou denominada na história como Guerra das Correntes e caracterizou-se como uma rivalidade entre Edison e Tesla.

Devido às vantagens da corrente alternada, a vitória foi de Tesla, e o sistema de geração, transmissão e distribuição de energia CA se tornou predominante padrão no mundo todo.

Diante deste contexto histórico, nesta disciplina de Circuitos Elétricos II vamos conhecer e analisar circuitos CA, nos quais a fonte de tensão ou corrente varia com o tempo. Estudaremos, em particular, os sistemas com fonte de excitação senoidal, devido ao

fato de este ter sido adotado como forma padrão de geração e transmissão de energia elétrica e por ser de fácil análise matemática. Assim, quando nos referirmos à expressão corrente alternada (CA), estamos denominando as fontes de excitação de tensão ou correntes especificamente senoidais.

Iniciaremos a disciplina com as principais características desta forma de onda, seus parâmetros, a representação por fasores, a resposta de resistores, indutores e capacitores a sistemas CA, o conceito de impedância e análise de circuitos, na primeira unidade.

Na segunda unidade serão vistos os circuitos trifásicos equilibrados e potência elétrica CA. Na terceira unidade veremos o conceito de quadripolos, os quais são muito utilizados para representação de linhas de transmissão e circuitos transistorizados. Por final, na quarta unidade, veremos os fundamentos de circuitos magneticamente acoplados, que se constituem como base para o entendimento dos transformadores elétricos utilizados em sistemas de potência.

Vamos iniciar juntos esta jornada de novos conhecimentos?!

Então bons estudos e mãos à obra!

# Introdução e análise de circuitos elétricos em corrente alternada

## **Convite ao estudo**

Em Circuitos Elétricos I você conheceu o conceito de sistemas de corrente contínua e aprendeu a analisar tais sistemas. Já conhece, então, o que é resistor, indutor, capacitor, circuitos série e paralelo e os métodos de análise: malhas, superposição, Thevenin e Norton.

Nesta primeira unidade da disciplina Circuitos Elétricos II veremos o que são sistemas de corrente alternada e como todos os conceitos e análises citados no parágrafo anterior serão utilizados para análise de circuitos CA.

Na primeira seção você vai ver com detalhes o que caracteriza uma forma de onda de corrente alternada, comumente referida a formas de onda senoidais, quais seus principais parâmetros, as relações de fase que envolvem a comparação de dois sinais senoidais de mesma frequência e o que representam os valores médio e eficaz de um sinal.

Na segunda seção veremos uma forma de representação para sinais alternados senoidais que facilita muito as análises matemáticas, sendo ela denominada representação fasorial. Veremos em seguida a resposta de elementos básicos resistor (R), indutor (L) e capacitor (C) a correntes e tensões senoidais e, a partir deles, o conceito de impedância e admitância (análogos à resistência e condutância em circuitos CC) e, por final, a aplicação das Leis de Kirchhoff e associação de elementos em série e paralelo aplicados a circuitos CA.

Na terceira seção partiremos para as análises de circuitos. Todos os métodos discutidos na disciplina Circuitos Elétricos

serão agora aplicados para circuitos CA, sendo eles: análise de malha, análise nodal, teorema da superposição, transformação de fonte e circuitos equivalentes de Thévenin e Norton.

Ao mesmo tempo em que ocorria a Guerra das Correntes na década no final do século XIX, Nikola Tesla inventou o motor de indução elétrica, o qual é baseado em corrente alternada. Tal equipamento provocou uma revolução elétrica mundial e é muito utilizado nos dias atuais por ser de fácil manuseio e baixo custo.

Atualmente as máquinas elétricas são amplamente utilizadas, tais como: nas indústrias (esteiras, moedores, elevação de cargas, extrusoras, laminadoras, bobinadeiras, etc.), no transporte (alternador para veículos a combustão, carros elétricos), nos ambientes domésticos (máquinas de lavar roupa, geladeiras), entre outros.

Com base nisso, para pôr os conhecimentos desta unidade em prática, suponha que uma indústria precisava ampliar seu maquinário e instalou um novo motor elétrico sem consultar o engenheiro. Após a instalação desta máquina, toda vez em que ela é acionada, o fusível de proteção se queima. Para corrigir este problema, a empresa contratou você como técnico responsável para fornecer uma consultoria a fim de identificar, analisar e corrigir o problema.

Utilizando alguns procedimentos de medições e cálculos, como você poderia fazer para identificar a origem das falhas e resolvê-las?

Vamos descobrir ao longo da unidade!

Bons estudos.

# Seção 1.1

## Tensão e corrente alternadas

### Diálogo aberto

Olá! Nesta seção veremos o que é e como se caracteriza um sinal de corrente alternada senoidal. Veremos alguns parâmetros importantes que caracterizam sinais senoidais, entre eles: frequência, velocidade angular, valor de pico, valor pico a pico e período. Em seguida veremos as relações de fase em circuitos CA, as quais podem ser observadas quando uma onda não inicia como valor nulo no instante de tempo igual a zero, ou seja, existe uma defasagem angular neste sinal, e saberemos reconhecer que esta característica é de grande importância em sistemas elétricos pois permite quantificar a qualidade de energia e o tipo de carga que está sendo empregada (resistiva, capacitiva ou indutiva). Por final, veremos dois conceitos importantes, que são o valor médio e o valor eficaz. O valor médio em uma tensão ou corrente CA deve ser zero. Quando isto não ocorre, indica uma componente CC no sinal CA, o que por vezes é indesejado. Já o valor eficaz é utilizado para representar os sinais CA na forma fasorial, representando um valor de tensão contínua que fornece a mesma potência que o sinal alternado. É também esta medida fornecida por equipamentos de medição quando medimos uma corrente ou tensão CA.

Para aplicar estes conceitos, suponha que você é o engenheiro responsável pela consultoria de uma indústria. Uma nova máquina foi instalada, e toda vez em que ela é acionada, o fusível de proteção queima, indicando que está havendo uma sobrecorrente no circuito.

Observou-se que o fusível possui valor nominal de 22 A eficazes e foram obtidas, com auxílio de um osciloscópio, as formas de onda da corrente e tensão no motor para avaliar se a corrente se encontra dentro da especificação. Ambos os sinais, de tensão e corrente, foram captados com um osciloscópio analógico e disponibilizados pela equipe técnica da empresa.

Dadas as especificações técnicas da tensão CA fornecida pela concessionária de distribuição de energia elétrica e os sinais medidos

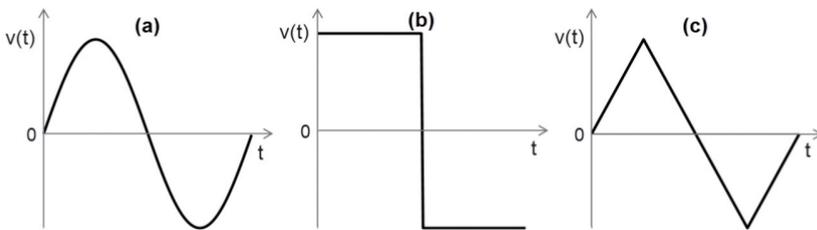
no terminal da máquina, como você poderia obter os parâmetros destes sinais?

Vamos descobrir a seguir! Mãos à obra!

## Não pode faltar

Um sinal alternado é usualmente caracterizado como um sinal variante no tempo que se alterna entre valores positivos e negativos em intervalos regulares de tempo. Trata-se de uma forma de onda cíclica, ou seja, que se repete a cada ciclo completo, e que pode ser senoidal, triangular ou quadrada, como pode ser visto na Figura 1.1.

Figura 1.1 | Formas de onda alternadas (a) senoidal; (b) quadrada; (c) triangular

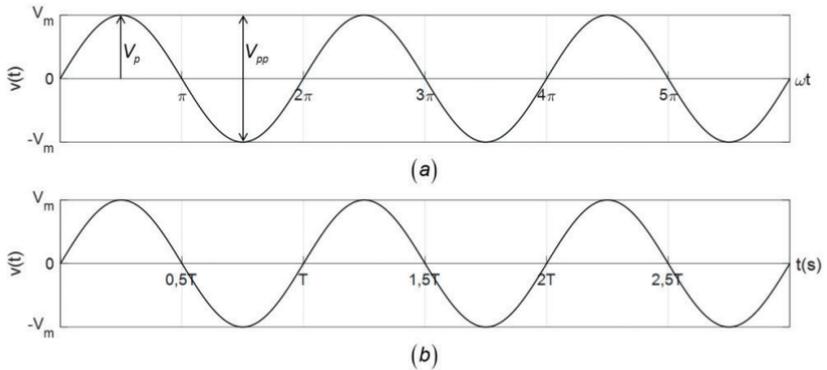


Fonte: elaborada pela autora.

Particularmente, a forma de onda senoidal é de grande importância no estudo de sistemas elétricos, uma vez que este tipo de sinal é predominantemente gerado nas usinas de energia elétrica por todo o mundo e é utilizado como forma de alimentação de diversos equipamentos eletrônicos, industriais e de comunicação.

Por este motivo, referimo-nos a uma tensão ou corrente senoidal como tensão ou corrente alternada (CA), bem como os circuitos alimentados por fontes CA são referidos como circuitos CA. Uma tensão CA instantânea, conforme exemplo representado na Figura 1.2, é expressa matematicamente pela seguinte Equação 1.1:

Figura 1.2 | Forma de onda senoidal (a) em função de  $\omega t$ ; (b) em função de  $t$



Fonte: elaborada pela autora.

$$v(t) = V_m \text{sen} \omega t \quad (1.1)$$

Onde:

$v(t)$ : valor instantâneo da tensão, que corresponde a uma amplitude da forma de onda em um instante de tempo qualquer.

$V_m$ : valor da tensão máxima ou amplitude da senoide, denominada valor de pico  $V_p$ .

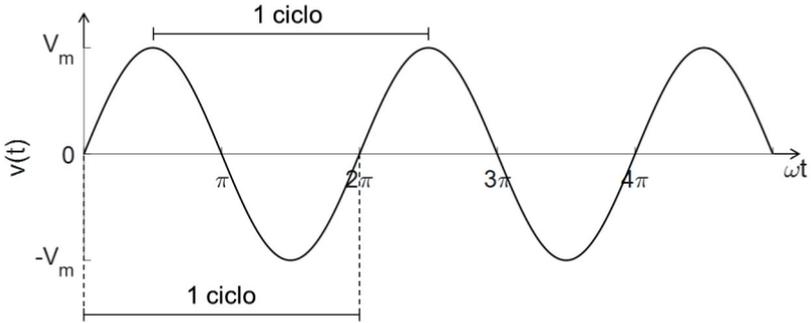
$\omega$ : frequência angular do sinal em radianos por segundo ( $\text{rad/s}$ ).

Para entender o que representa a frequência angular do sinal, observe na Figura 1.2(b) que a onda se repete periodicamente a cada  $T$  segundos, sendo  $T$  denominado de período do sinal dado pela Equação 1.2.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.2)$$

Este período  $T$  corresponde ao tempo em segundos necessário para que o sinal complete um ciclo, ou seja, para que o sinal complete uma volta (de  $0$  a  $2\pi$ ) e comece a repetir o padrão de oscilação, como mostra a Figura 1.3.

Figura 1.3 | Demonstração da medida de 1 ciclo de onda senoidal



Fonte: elaborada pela autora.

Em outras palavras, o período  $T$  é o número de segundos por ciclo do sinal, e o inverso deste valor corresponde ao número de ciclos por segundo, ou frequência da onda dada em Hertz (Hz), conforme a Equação 1.3.

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

Substituindo a Equação 1.2 na Equação 1.3, obtemos uma expressão da frequência angular (também denominada velocidade angular)  $\omega$  (rad/s) em função da frequência  $f$  (Hz) vista na Equação 1.4.

$$\omega = 2\pi f \quad (1.4)$$

Além do valor de pico  $V_p$  e do valor instantâneo  $v(t)$ , podemos observar na Figura 1.2(a) o valor pico a pico da onda, representado por  $V_{pp}$ . Este valor corresponde à diferença entre os valores do pico positivo e pico negativo, ou seja, é a soma do módulo das amplitudes de pico positiva e negativa. Se o sinal se tratar de uma senoide pura, como na Equação 1.1, temos a seguinte equação para o valor pico a pico:

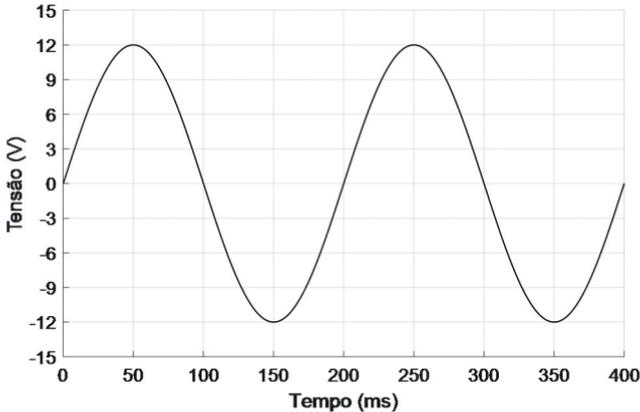
$$V_{pp} = V_p + |-V_p| = 2V_p \quad (1.5)$$

O conhecimento desses parâmetros que compõem a forma de onda senoidal, sendo eles valor de pico, valor pico a pico, frequência, frequência angular e período, é de grande importância. Em sistemas elétricos, por exemplo, são utilizados para avaliar a qualidade de energia gerada e entregue aos consumidores; já nas indústrias e em eletrônica, são utilizadas como especificações técnicas dos equipamentos.



Para a curva senoidal da Figura 1. 4, obtenha os valores de pico, pico a pico, frequência, frequência angular e período.

Figura 1.4 | Exemplo de tensão senoidal



Fonte: elaborada pela autora.

### Resolução:

Observando o gráfico, temos que o valor de pico, que corresponde ao maior valor que o sinal  $v(t)$  pode assumir, ou seja, o valor máximo da onda, é 12 V, portanto:

$$V_p = 12 \text{ V}$$

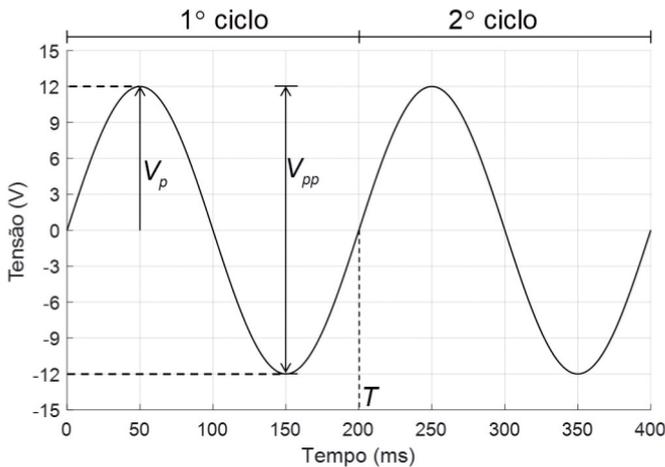
Este corresponde ao valor do pico positivo, que é também igual ao valor de pico negativo, ou seja,  $V_p = \pm 12 \text{ V}$ . A partir deste valor, podemos obter o valor pico a pico:

$$V_{pp} = 12 + 12 = 24 \text{ V}$$

Para obter o valor do período, vamos analisar a curva em função do tempo. Observe na Figura 1.5 que há dois ciclos da onda representados, e um ciclo demora 200 ms (ou 0,2 s) para ser concluído (lembrando que  $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ). Este valor corresponde ao período T, portanto:

$$T = 0,20 \text{ s}$$

Figura 1.5 | Exemplo de tensão senoidal com representação dos parâmetros



Fonte: elaborada pela autora.

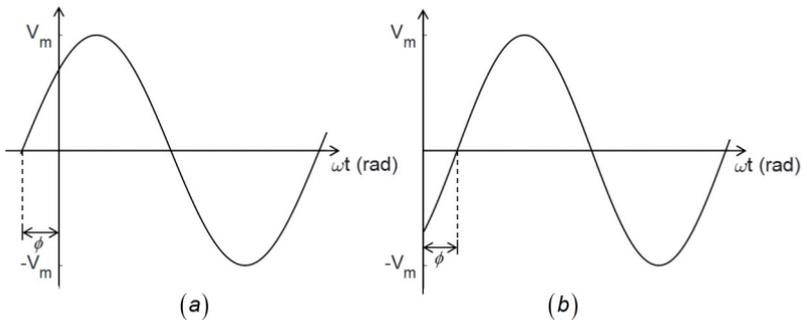
A partir do período podemos calcular a frequência e a velocidade angular utilizando as Equações 1.3 e 1.4, respectivamente:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 5 \approx 31,42 \text{ rad/s}$$

Em alguns casos, o sinal senoidal pode não ser zero em  $t = 0 \text{ s}$ . Neste caso, dizemos que a onda possui um deslocamento de fase ou defasagem em relação ao eixo vertical, que pode ser à esquerda (Figura 1.6(a)) ou à direita (Figura 1.6(b)).

Figura 1.6 | Deslocamento de fase de sinais senoidais (a) à esquerda; (b) à direita



Fonte: adaptada de Sadiku (2014, p. 291).

Como você pôde ver na Figura 1.6, este deslocamento de fase, ou simplesmente fase, corresponde a um ângulo  $\phi$  em radianos ou graus. Matematicamente, a representação da onda senoidal da Figura 1.6 é feita pela Equação 1.6:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t \pm \phi) \quad (1.6)$$

Onde o sinal é positivo quando a curva está deslocada para a esquerda, ou seja, na Figura 1.6(a), e negativo quando a curva está deslocada para a direita, ou seja, na Figura 1.6(b). Além disso, a expressão da Equação 1.6 corresponde à forma mais genérica que representa uma senoide.

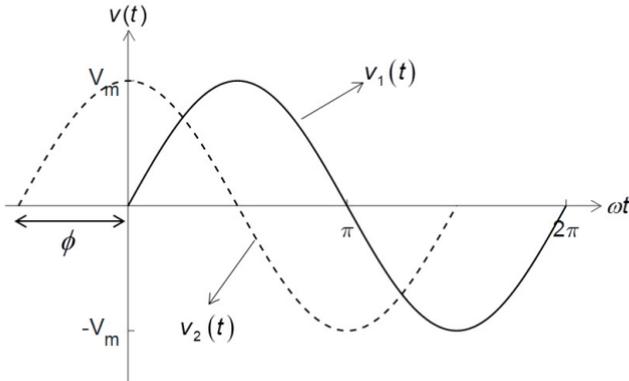
Na Figura 1.7 podemos observar duas senoides com fases distintas, as quais podem ser expressas pelas Equações 1.7 e 1.8.

$$v_1(t) = V_m \text{sen} \omega t \quad (1.7)$$

$$v_2(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (1.8)$$

Onde  $\phi$  corresponde à defasagem entre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ .

Figura 1.7 | Defasagem entre duas ondas



Fonte: adaptado de Sadiku (2013, p. 333).

Podemos dizer que  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  estão defasadas entre si. Mais especificamente, observe que a curva  $v_2(t)$  se inicia antes no tempo em relação a  $v_1(t)$ , ou seja,  $v_2(t) = 0$  em  $t < 0$  s, enquanto  $v_1(t) = 0$  em  $t = 0$  s. Por este motivo podemos concluir que  $v_2(t)$  encontra-se *adiantada* em relação a  $v_1(t)$  ou que  $v_1(t)$  encontra-se *atrasada* em relação a  $v_2(t)$ . Neste caso temos que  $\phi \neq 0$ , e portanto os sinais estão *fora de fase*.

Nos casos em que  $\phi = 0$ , os sinais estão *em fase*, pois atingem seus mínimos e máximos ao mesmo tempo.

A diferença de fase entre duas curvas pode ser medida entre dois pontos do eixo horizontal, onde o valor da amplitude das curvas é igual, porém com mesma inclinação ao interceptar o eixo horizontal, como pode ser observado na Figura 1.7.

É importante notar que essa comparação entre as senoides  $v_1$  e  $v_2$  é possível pois elas possuem a mesma frequência (não precisam ter a mesma amplitude). Além disso, a defasagem entre elas pode assumir um valor máximo de  $\phi_{\text{máx}} = 180^\circ$  (ou  $\phi_{\text{máx}} = \pi$  radianos) em avanço ou atraso de fase.

Além da representação das senoides como funções seno, podemos expressá-las como funções cosseno, e, para comparar duas senoides, ambas devem estar representadas como seno ou cosseno com amplitudes  $V_m$  positivas, ou seja,  $V_{m1} \text{sen}(\omega t + \phi_1)$  ou  $V_{m2} \text{cos}(\omega t + \phi_2)$ .



Verifique a especificação de algum equipamento doméstico em sua casa. Observe as características descritas e compare com os parâmetros apresentados até agora. Quais destes parâmetros estão especificados? Esses valores são parecidos com aqueles que você conhece e ouve falar sobre a nossa rede elétrica?

Definimos o valor médio da onda  $v(t)$  como sendo  $V_{\text{médio}}$ . Em termos práticos, este valor está relacionado a uma componente contínua no sinal alternado e graficamente é representado pela área sob a curva no intervalo de tempo  $T$ , dividido pelo período  $T$ , conforme a Equação 1.9 e Figura 1.8.

O valor médio do sinal senoidal (válido para qualquer grandeza com esta forma de onda, ou seja, corrente, tensão, entre outras) corresponde ao valor do sinal se mantivermos a sua amplitude constante no intervalo de tempo correspondente ao período  $T$  do sinal alternado original.

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (1.9)$$

Observe na Figura 1.8(a) que se trata de uma senoide simétrica, e por este motivo as áreas positiva e negativa se anulam, fazendo com que o valor médio seja zero.

Para o sinal da Figura 1.8(b) temos a seguinte representação matemática genérica:

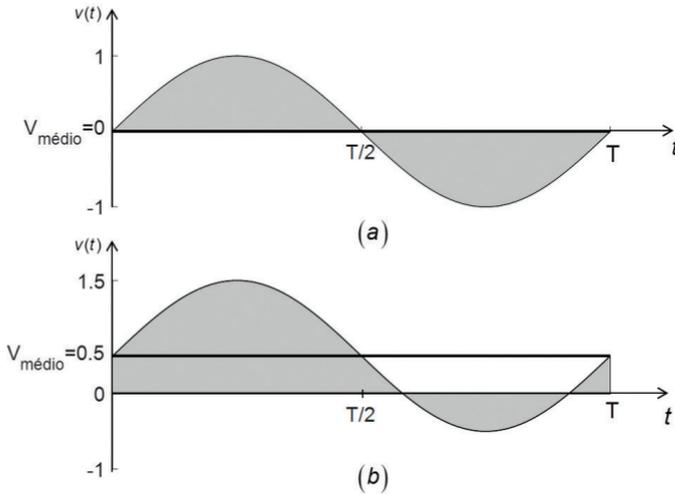
$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t) + \beta \quad (1.10)$$

Onde  $\beta = 0,5$  e corresponde ao valor da componente CC do sinal (se  $\beta = 0$ , temos o caso da Figura 1.8(a)).

Substituindo a Equação 1.10 na Equação 1.9 obtemos:

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{T} \int_0^T [V_m \text{sen}(\omega t) + \beta] dt$$

Figura 1.8 | Valor médio de sinais contínuos (a) senoide simétrica; (b) senoide com componente contínua



Fonte: elaborada pela autora.

Como não conhecemos  $\omega$ , uma forma alternativa para calcular a integral e obter o valor médio do sinal é calcularmos a derivada em função de  $\omega t$ , pois sabemos que a senoide pura completa um período  $T$  em  $\omega t = 2\pi$ , portanto temos:

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [V_m \text{sen}(\omega t) + \beta] d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} V_m \text{sen}(\omega t) \cdot d\omega t + \int_0^{2\pi} \beta \cdot d\omega t \right]$$

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{2\pi} \left[ V_m \cos(\omega t) \Big|_0^{2\pi} + \beta \cdot \omega t \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ V_m (\cos(2\pi) - \cos(0)) + \beta (2\pi - 0) \right]$$

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{2\pi} \left[ V_m \overbrace{(\cos(2\pi) - \cos(0))}^0 + \beta (2\pi - 0) \right]$$

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{2\pi} \beta \cdot 2\pi = \beta$$

$$\therefore V_{\text{médio}} = \beta$$

Portanto podemos concluir que, para sinais senoidais com componente CC, cuja expressão matemática é dada pela Equação 1.10, o valor médio é o valor da própria componente CC, que pode ser vista no gráfico do sinal através do deslocamento da curva no eixo vertical, para cima ou para baixo de zero.

Quando precisamos medir um sinal senoidal utilizando instrumentos de medição, tais como o multímetro, o resultado é

um valor constante como se fosse um sinal cc. O que na verdade estamos medindo é o valor eficaz deste sinal, que representa uma medida estatística do sinal variável.

Em termos práticos, o valor eficaz representa o valor de uma tensão ou corrente contínua que fornece a mesma potência que o sinal periódico que está sendo medido, ou seja, representa a capacidade de trabalho efetivo da tensão ou corrente alternada.

Também chamado de valor RMS (do inglês *root mean square* – valor quadrático médio), o valor eficaz de um sinal alternado pode ser obtido pela expressão:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \quad (1.11)$$

Considerando um sinal senoidal puro, tal como a Equação 1.6, substituindo na Equação 1.11 e desenvolvendo a integral obtemos:

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [V_m \text{sen}(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [V_m \text{sen}(\omega t)]^2 d\omega t} \\ V_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_m^2 \text{sen}^2(\omega t) \cdot d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} V_m^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\omega t) \cdot d\omega t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Lembrando-se das integrais trigonométricas, temos que:

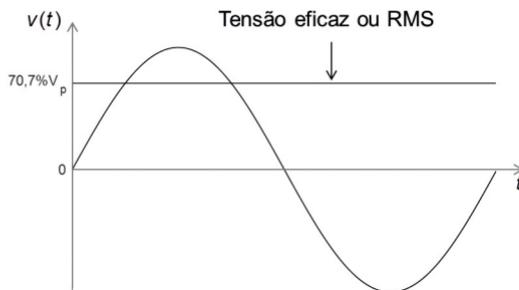
$$\int \text{sen}^2(\omega t) \cdot d\omega t = \frac{1}{2} \left( \omega t - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right) \quad (1.13)$$

Substituindo a Equação 1.13 na Equação 1.12:

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} V_m^2 \left( \frac{\omega t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} V_m^2 \left[ \frac{2\pi}{2} - \underbrace{\left( \frac{\text{sen}(4\pi)}{4} - \frac{\text{sen}(4\pi)}{4} \right)}_0 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\pi} V_m^2} \\ \therefore V_{ef} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707V_m \end{aligned} \quad (1.14)$$

Portanto, o valor eficaz de um sinal senoidal é aproximadamente igual a 70,7% do seu valor de pico, como mostra a Figura 1.9, e corresponde à tensão contínua equivalente que fornece a mesma potência a um resistor.

Figura 1.9 | Representação da tensão eficaz de uma tensão alternada



Fonte: elaborada pela autora.



### Assimile

Alguns parâmetros importantes em sinais senoidais são: valor de pico  $V_p$ , que corresponde ao valor máximo do sinal; a frequência, que pode ser em radianos por segundo ou Hz; e o período  $T$ , que corresponde ao tempo que a onda leva para completar um ciclo, ou seja, de  $0$  a  $2\pi$ .

Outro parâmetro muito importante é o valor eficaz  $V_{ef}$ , pois corresponde ao valor medido pelos equipamentos de instrumentação. Este número representa um sinal em corrente contínua que forneceria a mesma potência que o sinal periódico a um resistor.



### Pesquise mais

O multímetro digital, instrumento de medição muito utilizado para medir tensão e corrente elétrica, realiza medições dos valores eficazes dos sinais senoidais. Os aparelhos capazes de medir o valor eficaz de qualquer forma de onda são denominados de medidores *True RMS*. Leia mais sobre os medidores de corrente alternada em:

BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à análise de circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012. Item 13.9. p. 479-481.

## Sem medo de errar

Você é o técnico responsável pela consultoria de uma indústria onde uma nova máquina foi instalada. Toda vez em que esta máquina é acionada, o fusível de proteção queima, indicando que está havendo uma sobrecorrente no circuito.

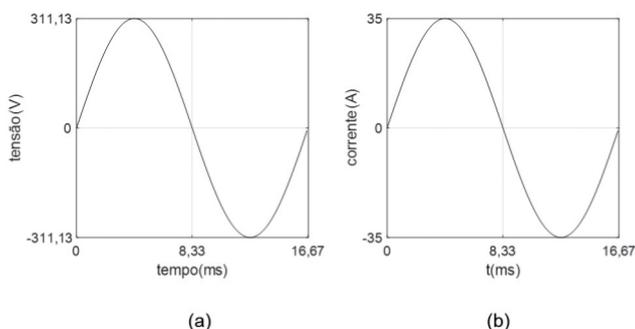
Observou-se que o fusível possui valor nominal de 22 A eficazes e foram obtidas, com auxílio de um osciloscópio, as formas de onda da corrente e tensão no motor, as quais podem ser vistas na Figura 1.10, para avaliar se elas se encontram dentro da especificação.

Ambos os sinais de tensão e corrente foram captados com um osciloscópio e disponibilizados pela equipe técnica da empresa, bem como as especificações técnicas da tensão CA fornecida pela concessionária de distribuição de energia elétrica.

Com base nos dados fornecidos, como você poderia obter os parâmetros destes sinais?

A partir desses parâmetros, o que se pode afirmar a respeito da origem do problema?

Figura 1.10 | Sinais medidos com o osciloscópio no terminal do motor (a) tensão; (b) correnteMedidores True RMS



Fonte: elaborada pela autora.

**Especificações técnicas da tensão fornecida:**

**Amplitude (valor eficaz): 220 V**

**Frequência: 60Hz**

**Valor médio:  $V_{méd} = 0 V$**

## Resolução:

A partir das ondas de tensão e corrente obtidas com o osciloscópio, vistas na Figura 1.10, vamos calcular os valores eficaz, médio e a frequência da tensão e o valor eficaz da corrente para verificar se coincidem com as especificações técnicas.

- Para a tensão:

Como observado na Figura 1.10(a), a tensão de pico equivale a  $V_p = 311,13 \text{ V}$ . Utilizando a Equação 1.13, obtemos o valor eficaz deste sinal:

$$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{311,13}{\sqrt{2}} \approx 220 \text{ V}$$

Ainda pelo gráfico da Figura 1.10(a) observamos que o período do sinal, ou seja, o tempo que o mesmo leva para completar um ciclo (ou uma volta) é  $T = 16,67 \text{ ms}$ . Utilizando a Equação 1.3 para obter a frequência em Hz, temos que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{16,67 \cdot 10^{-3}} \approx 60 \text{ Hz}$$

Por inspeção da Figura 1.10(a), observamos que as áreas positiva e negativa abaixo da curva de tensão são iguais. Temos portanto  $V_{méd} = 0 \text{ V}$ . Portanto concluímos que o sinal de tensão fornecido no terminal da máquina está de acordo com as especificações e não é a causa do problema.

- Para a corrente:

Como observado na Figura 1.10(b), a corrente de pico equivale a  $I_p = 35 \text{ A}$ . Com este valor podemos calcular o valor eficaz da corrente por meio da Equação 1.13:

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{35}{\sqrt{2}} \approx 24,75 \text{ A}$$

Observamos então que a corrente eficaz do equipamento está acima do valor suportado pelo fusível de proteção.

Uma das ações que poderiam ser tomadas a partir dessas conclusões é verificar o projeto e redimensionar o fusível de proteção ou reduzir o consumo de corrente.

### Medidores True RMS

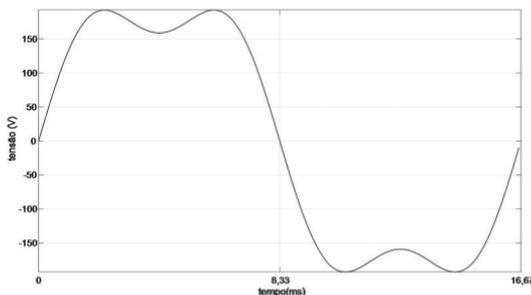
#### Descrição da situação-problema

Quando precisamos medir um sinal senoidal utilizando um multímetro, o resultado é um valor constante como se fosse um sinal cc. Este valor medido é na verdade o valor eficaz (ou RMS) deste sinal. No entanto, multímetros convencionais são capazes de medir o valor eficaz apenas de sinais senoidais puros, ou seja, aqueles com valor de pico definido, valor médio nulo, e que contenha componente de apenas uma frequência, como descrito pela Equação 1.6. Para que seja possível medir o valor RMS de qualquer sinal, são necessários medidores True RMS. Tais equipamentos medem o valor eficaz de qualquer forma de onda.

Com base nisso, suponha que você seja o técnico de manutenção de instrumentos de uma concessionária distribuidora de energia e necessita verificar o funcionamento de dois equipamentos medidores de grandezas elétricas. Sabe-se que um deles está com defeito, pois apresentaram discrepâncias nas medidas, e que a forma de onda no ponto de medição é dada pela equipe de campo pela seguinte expressão normalizada, ou seja, dividida por 54 V:

$$v(t) = 4\text{sen}(2\pi 60t) + 1\text{sen}(2\pi \cdot 3 \cdot 60t) \quad (\text{V}) \quad (1.15)$$

Figura 1.11 | Forma de onda da tensão distorcida



Fonte: elaborada pela autora.

Os valores eficazes medidos pelos multímetros foram:

M1: **152,7 V**

M2: **118,5 V**

Com base nesses dados, como você poderia identificar o equipamento defeituoso?

Qual deles está apresentando defeitos?

### Resolução da situação-problema

Para verificar qual equipamento está com defeito, precisamos calcular a tensão eficaz do sinal distorcido.

Utilizamos a Equação 1.11:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{16,67 \cdot 10^{-3}} \int_0^{16,67 \cdot 10^{-3}} (4\text{sen}(2\pi 60t) + 1\text{sen}(6\pi 60t))^2 dt}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{16,67 \cdot 10^{-3}} \int_0^{16,67 \cdot 10^{-3}} [16\text{sen}^2(2\pi 60t) + 8\text{sen}(2\pi 60t)\text{sen}(6\pi 60t) + 1\text{sen}^2(6\pi 60t)] dt}$$

$V_{ef} =$

$$\sqrt{\frac{1}{16,67 \cdot 10^{-3}} \left[ \int_0^{16,67 \cdot 10^{-3}} 16\text{sen}^2(2\pi 60t) dt + \int_0^{16,67 \cdot 10^{-3}} 8\text{sen}(2\pi 60t)\text{sen}(6\pi 60t) dt + \int_0^{16,67 \cdot 10^{-3}} 1\text{sen}^2(6\pi 60t) dt \right]}$$

Lembrando que:

$$\int \text{sen}(at)\text{sen}(bt) dt = \frac{\text{sen}(at - bt)}{2a - 2b} - \frac{\text{sen}(at + bt)}{2a + 2b}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{16,67 \cdot 10^{-3}} (0,13333 + 8,33 \cdot 10^{-3} + 4,21 \cdot 10^{-11})}$$

$$V_{ef} = 2,195 V$$

Devido à normalização, temos na verdade:  $V_{ef} = 2,195 \cdot 54 = 118,53 V$ .

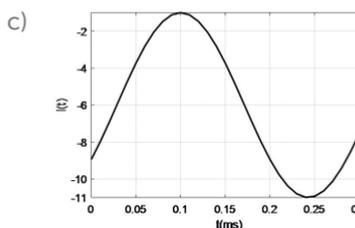
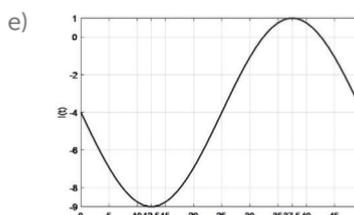
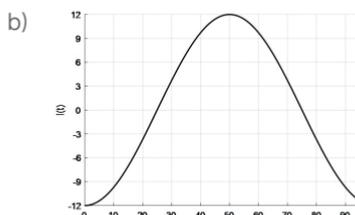
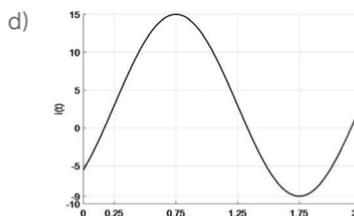
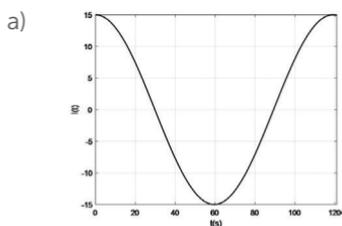
Portanto, podemos concluir que o multímetro M2 está apresentando a medida correta e o multímetro M1 está com defeitos e necessita de reparos.

## Faça valer a pena

**1.** Os sistemas de geração e transmissão de energia no mundo todo são baseados em tensões e correntes alternadas. Uma das vantagens deste tipo de sinal é que a corrente alternada permite o uso de transformadores, viabilizando a transmissão de energia em alta tensão. Assim, para transmitir a mesma potência, ao elevar a tensão, a corrente diminui, pois são grandezas inversamente proporcionais. Como consequência, correntes menores geram menos perdas e menos custos, pois permitem condutores de menores diâmetros.

Escolha a alternativa que corresponde ao gráfico da expressão de um sinal senoidal dada a seguir.

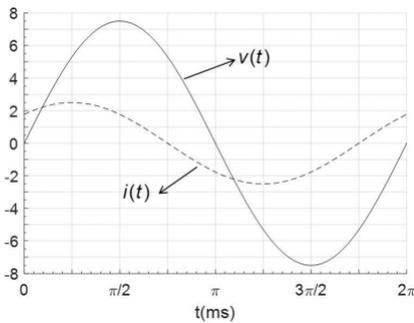
$$i(t) = 12 \operatorname{sen}\left(1000\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$



**2.** Em sistemas de CC a potência é o produto da tensão pela corrente, e sua medição é simples, uma vez que as grandezas são constantes. Já em circuitos CA, pelo fato de os sinais variarem continuamente, os valores efetivos de corrente e tensão são menores que os valores máximos, que podem ser medidos por multímetros comuns apenas para os sinais senoidais puros. As demais formas de onda necessitam de medidores True RMS, que utilizam circuitos integrados para computar o valor RMS de um sinal complexo como uma forma de onda quadrada, ou uma onda CA retificada.

Dadas as formas de onda de tensão  $v(t)$  e corrente  $i(t)$  na figura a seguir, calcule o valor efetivo de ambas, o ângulo de defasagem (em radianos) da corrente em relação à tensão e se a corrente encontra-se adiantada ou atrasada.

Figura | Sinal de corrente e tensão

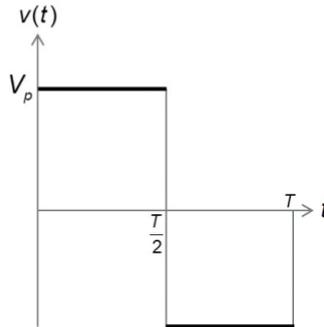


Fonte: elaborada pela autora.

- $V_{rms} = 5,30 \text{ V}$ ,  $I_{rms} = 1,77 \text{ A}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ , adiantada.
- $V_{rms} = 5,30 \text{ V}$ ,  $I_{rms} = 1,77 \text{ A}$ ,  $\phi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ , atrasada.
- $V_{rms} = 1,77 \text{ V}$ ,  $I_{rms} = 5,30 \text{ A}$ ,  $\phi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ , adiantada.
- $V_{rms} = 7,5 \text{ V}$ ,  $I_{rms} = 2,5 \text{ A}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ , atrasada.
- $V_{rms} = 8,0 \text{ V}$ ,  $I_{rms} = 3,0 \text{ A}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ , adiantada.

**3.** A técnica PWM (*Pulse Width Modulation*) é amplamente empregada em eletrônica na utilização de fontes chaveadas e controle de velocidade de motores. PWM significa em português modulação por largura de pulso, ou seja, é a modulação de um sinal realizada por meio da largura do pulso de uma onda quadrada para controlar velocidade ou potência em um circuito. Obtenha os valores médio e eficaz da forma de onda quadrada a seguir.

Figura | Sinal de tensão de onda quadrada



Fonte: elaborada pela autora.

- a)  $V_{\text{médio}} = \frac{V_p}{2}$  e  $V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$ .
- b)  $V_{\text{médio}} = 0$  e  $V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$ .
- c)  $V_{\text{médio}} = 2V_p$  e  $V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$ .
- d)  $V_{\text{médio}} = 0$  e  $V_{\text{ef}} = 2V_p$ .
- e)  $V_{\text{médio}} = 0$  e  $V_{\text{ef}} = V_p$ .

## Seção 1.2

### Fasores e impedância

#### Diálogo aberto

Praticamente todos os equipamentos elétricos e eletrônicos são projetados utilizando elementos básicos de circuitos elétricos ou podem ser modelados utilizando componentes passivos, como resistores, indutores e capacitores. Temos como exemplo os condutores elétricos que possuem uma resistência interna, as máquinas elétricas que se baseiam no campo magnético existente nas bobinas (indutores) e os capacitores utilizados para retificar sinais alternados.

Por serem variantes no tempo, circuitos elétricos CA são difíceis de ser analisados no domínio do tempo, levando à necessidade de modelamento em equações diferenciais. Para contornar este problema, utiliza-se o conceito de fasor, uma forma de representação vetorial de sinais senoidais no plano complexo, o qual veremos nesta seção. Esta representação permite a análise matemática de circuitos elétricos CA em regime permanente de forma simplificada.

Veremos em seguida a resposta de elementos básicos, tais como o resistor (R), o indutor (L) e o capacitor (C), às correntes e tensões senoidais. Estudaremos sua representação em forma vetorial no plano complexo e os conceitos de reatância indutiva e reatância capacitiva.

Por final, veremos os conceitos de impedância e admitância, que são análogos à resistência e à condutância na análise CC. Na análise CA, o comportamento de elementos indutores e capacitores devem ser levados em conta, utilizando estes novos conceitos, e não apenas ser considerados um curto-circuito ou circuito aberto como na análise CC. A partir disso, a lei de Ohm pode ser aplicada de forma semelhante à análise CC, bem como as associações de impedâncias em série, paralelo ou mista, e a aplicação das leis de Kirchhoff.

Com base no exposto, vamos retomar o problema da instalação de uma nova máquina em uma indústria, o que provoca a queima do fusível de proteção toda vez que ela é acionada.

As máquinas elétricas e os transformadores são equipamentos cujo princípio de funcionamento se baseia no fenômeno da indução eletromagnética. Por se tratarem de sistemas indutivos, naturalmente provocam uma defasagem entre a tensão de alimentação e a corrente elétrica consumida.

Em instalações elétricas, este comportamento é indesejado, pois pode provocar aumento das perdas em forma de calor, quedas de tensão, aumento do custo, devido ao elevado consumo de energia, e, conseqüentemente, o aumento na corrente elétrica do circuito, entre outros.

Para minimizar estes problemas na instalação da fábrica, a defasagem de corrente provocada pelo novo equipamento deve ser conhecida para que o problema de queima do fusível seja corrigido, pois tudo indica que está havendo um aumento da corrente no circuito.

A empresa forneceu alguns dados a respeito do circuito elétrico e da máquina que foi instalada, sendo eles: a carga, o condutor e a tensão de alimentação do circuito, que podem ser vistas no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 | Dados disponibilizados pela empresa

Tensão de alimentação	$v(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cos(2\pi 60t) \text{ (V)}$
Condutor	$R_c = 0,5 \Omega$
Carga (máquina elétrica)	$R = 6,04 \Omega$
	$L = 17,3 \text{ mH}$

Fonte: elaborado pela autora.

Suponha que você seja o técnico responsável por solucionar este problema. Como você poderia obter a defasagem entre a corrente e a tensão provocada pelo equipamento? Se esta defasagem fosse corrigida, o que aconteceria com a corrente do circuito?

Veremos os conhecimentos necessários para realizar esta tarefa ao longo da seção!

## Não pode faltar

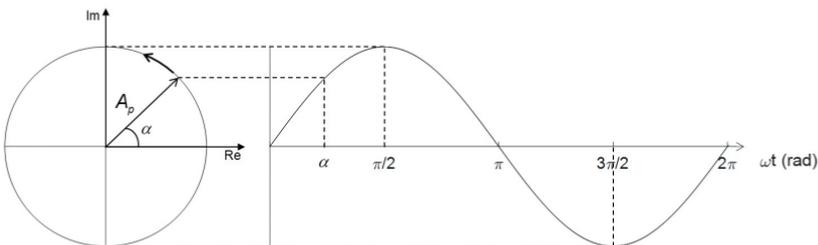
Quando um circuito elétrico é excitado por uma fonte de corrente alternada, os instantes iniciais correspondem à resposta transitória regida pelas equações diferenciais que compõem o modelo completo do sistema. Quando este período transitório termina, as tensões e as correntes deste circuito podem ser representadas puramente por funções senoidais iniciando o regime permanente. Para facilitar a análise matemática de circuitos elétricos de corrente alternada (CA) em regime permanente, utilizamos a representação da função senoidal por meio de um fasor.

Uma função senoidal é representada por uma amplitude de pico  $A_p$ , uma frequência angular  $\omega$  e uma fase  $\theta$ , parâmetros que não variam com o tempo, conforme a equação (1.15). Tal equação consiste em uma generalização das equações senoidais para tensão e corrente vistas na seção 1.1.

$$a(t) = A_p \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (1.16)$$

Considere agora um vetor girante no plano complexo, com velocidade de rotação  $\omega$  e amplitude  $A_p$  constantes (representados no interior da circunferência da Figura 1.12). Ao longo do tempo, a extremidade deste vetor dá origem à senoide da Equação 1.16. Em um determinado instante  $t = \tau$ , o vetor pode assumir uma magnitude igual à  $A_p \angle \alpha$  e a amplitude da função  $a(t)$  neste instante corresponde à projeção deste vetor no eixo imaginário, ou seja,  $a(t = \tau) = A_p \text{sen}(\alpha)$ , como está indicado na Figura 1.12.

Figura 1.12 | Vetor girante que dá origem à senoide



Fonte: elaborada pela autora.

À medida que o tempo cresce, o vetor gira no sentido anti-horário, como pode ser observado na Figura 1.12, assumindo outros valores para o ângulo de inclinação. Por exemplo, no instante de pico positivo, o vetor assume  $A_p \angle 90^\circ$ , sendo  $90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$ , e no instante de pico negativo, o vetor corresponde a  $A_p \angle 270^\circ$ , sendo  $270^\circ = 3\pi/2 \text{ rad}$ . Assim, essa representação vetorial pode ser utilizada para representar de forma simplificada um sinal senoidal, dando origem à notação fasorial em circuitos CA. Tal notação consiste na representação da senoide por meio de um vetor estático cujo módulo (ou intensidade) é o **valor eficaz** da grandeza elétrica  $A_p/\sqrt{2}$  (que pode ser tensão, corrente, potência, etc.) e o ângulo de fase corresponde ao ângulo que o vetor forma com o eixo real em  $t = 0\text{s}$ . Este ângulo corresponde ao ângulo de defasagem do sinal (ou fase)  $\theta$ , conforme Equação 1.17.

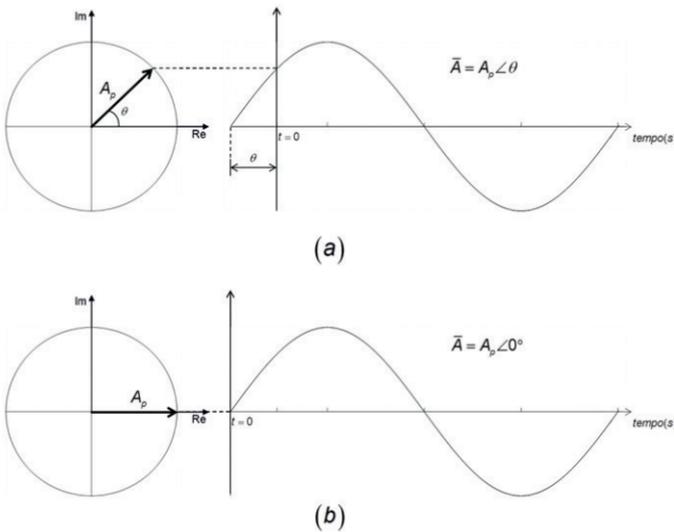
O valor eficaz é utilizado, pois corresponde ao valor medido por instrumentos tais como o multímetro e também o mais utilizado na análise de circuitos CA. A representação do sinal senoidal da equação em  $t = 0\text{s}$  está ilustrada na Figura 1.13 para diferentes sinais senoidais.

$$\bar{A} = \frac{A_p}{\sqrt{2}} \angle \theta \quad (1.17)$$

Note que a frequência angular não é representada, pois em regime permanente a frequência do sinal resultante não se altera, tornando este valor comum a todos os componentes do sistema. Assim, a transformação de uma tensão senoidal (ou cossenoidal) do domínio do tempo para o domínio da frequência resulta:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V_{ef} \text{sen}(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \bar{V} = V_{ef} \angle \phi \quad (1.18)$$

Figura 1.13 | Representação do fasor para diferentes sinais senoidais (a) com defasagem  $\theta$ ; (b) com defasagem nula



Fonte: elaborada pela autora.

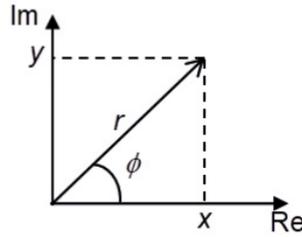
Esta associação é válida para as demais grandezas elétricas: corrente, potência, etc. Outra representação possível é utilizar o valor de pico ao invés do valor eficaz, porém o valor eficaz associado às grandezas elétricas são mais úteis devido à calibração dos equipamentos de medida, por exemplo, voltímetros e amperímetros, que fornecem as medidas dos respectivos valores eficazes.

Observe que o fasor da Equação 1.18, representado por uma amplitude e um ângulo, trata-se de um número complexo, correspondendo à sua forma polar. No entanto, ele pode ser representado também na forma retangular. Considere um número complexo genérico na forma polar:  $\mathbf{z} = r \angle \phi$ , em que  $r$  é o raio (ou amplitude) e  $\phi$  é o ângulo de inclinação. Sua forma retangular pode ser representada por uma parte real e uma parte imaginária:  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$ , em que  $x$  é a parte real e  $y$  é a parte imaginária. A relação entre as formas polar e retangular pode ser vista na Figura 1.14. As relações entre  $r$ ,  $\phi$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são dadas nas Equações 1.19 e 1.20.

Figura 1.14 | Representação do vetor no plano complexo na forma polar e retangular

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{y} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$



Fonte: elaborada pela autora.

Para realizar operações de adição e subtração, são utilizadas as propriedades conforme as Equações 1.21 a 1.24.

$$\text{Adição: } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (1.21)$$

$$\text{Subtração: } z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (1.22)$$

$$\text{Multiplicação: } z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle (\phi_1 + \phi_2) \quad (1.23)$$

$$\text{Divisão: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\phi_1 - \phi_2) \quad (1.24)$$



Pesquise mais

Pesquise as demais propriedades básicas dos números complexos e operações matemáticas na referência a seguir:

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5.ed. Porto Alegre: AMGH, 2013. p. 828-832.

Visto o conceito de notação fasorial, é possível iniciar a análise de circuitos elétricos CA em regime permanente por meio de fasores. Primeiro precisamos entender a resposta de elementos básicos, sendo eles o resistor, o capacitor e o indutor, às tensões e correntes senoidais. Em seguida, aplicando a lei de Ohm nos três circuitos, podemos obter a corrente que percorre cada um dos elementos e/ou a queda de tensão provocada por ela.

Na Figura 1.15(a) observamos um circuito puramente resistivo cuja corrente de entrada CA é dada por:  $i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cos \omega t$  (A). Então a tensão sobre ele será:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t) = R \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cos \omega t = v_R(t) = \sqrt{2} \cdot V_{ef} \cos \omega t \quad (\text{V}) \quad \text{e,}$$

portanto,  $V_{ef} = R \cdot I_{ef}$  (V).

Na Figura 1.15(b) observamos um circuito indutivo cuja corrente é dada por  $i_L(t) = \sqrt{2} \cdot I_{ef} \text{sen}(\omega t) = i_L(t) = \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cos(\omega t - 90^\circ)$  (A). Dessa forma o fasor pode ser representado por  $\bar{I}_L = I_{ef} \angle -90^\circ$  A. A oposição à corrente alternada provocada pelo indutor é diretamente proporcional à frequência do sinal aplicado e ao valor da indutância. Esta oposição é denominada **reatância indutiva**  $X_L$ , e, sendo  $\omega = 2\pi f$ , o valor desta reatância é dado pela Equação 1.25.

$$X_L = 2\pi fL \text{ } (\Omega) \quad \text{ou} \quad X_L = \omega L \text{ } (\Omega) \quad (1.25)$$

O fasor da reatância indutiva é igual à  $j\omega L$ , e calculando a tensão sobre o resistor temos:

$$\bar{V}_L = \underbrace{(I_{ef} \angle -90^\circ)}_{\bar{I}_L} \underbrace{(\omega L \angle 90^\circ)}_{j\omega L} \text{ V} = j\omega L \bar{I}_L \text{ V}$$

Já a Figura 1.15(c) mostra um circuito capacitivo, cuja tensão é  $v_c(t) = V_m \cos(\omega t)$  (V). A oposição à corrente alternada provocada pelo capacitor é denominada **reatância capacitiva**  $X_C$ , e este valor é inversamente proporcional à frequência do sinal aplicado e ao valor da capacitância, conforme Equação 1.26.

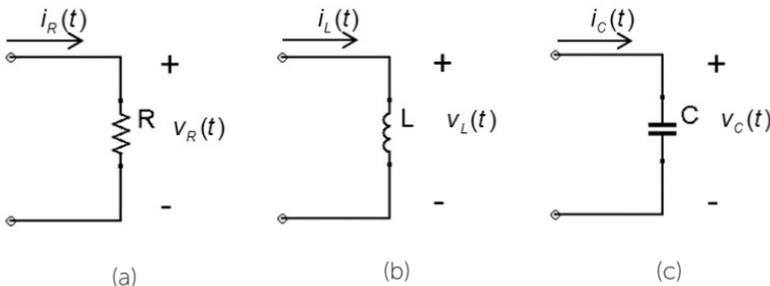
$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \text{ } (\Omega) \quad \text{ou} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ } (\Omega) \quad (1.26)$$

Aplicando a derivada da tensão sobre o capacitor, chegamos à corrente que o percorre:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{\omega C V_m \text{sen}(\omega t)}{I_m} = -I_m \text{sen}(\omega t) \text{ (A)}$$

$$\text{Portanto: } I_m = \frac{V_m}{X_C} \text{ (A)}.$$

Figura 1.15 | Circuitos em corrente alternada (a) resistivo; (b) indutivo; (c) capacitivo



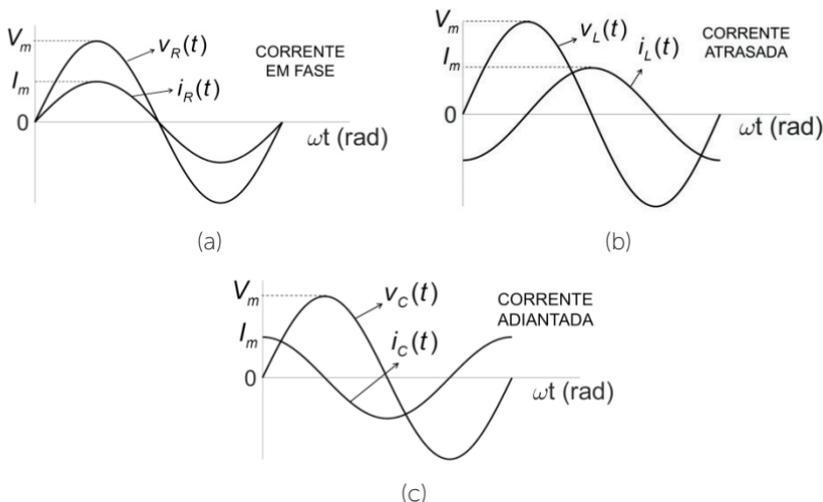
Fonte: elaborada pela autora.

Para um dispositivo resistivo, a corrente que o atravessa e a queda de tensão que ela provoca estão **em fase**, como pode ser visto na Figura 1.16(a). Neste caso, os valores de pico de tensão e correntes são relacionados pela lei de Ohm. Além disso, o valor da resistência não é influenciado pela frequência do sinal de alimentação aplicado.

Para o circuito indutivo, observe que o comportamento do indutor é caracterizado por uma oposição à variação de corrente, por isso ele sempre provoca um **atraso** de  $90^\circ$  da corrente em relação à tensão, como pode ser visto na Figura 1.16(b).

Por final, para o circuito capacitivo, usamos a relação trigonométrica  $-\text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t + 90^\circ)$  e obtemos:  $i_c(t) = I_m \cos(\omega t + 90^\circ)$  V. Verifique que, ao contrário do indutor, o capacitor se comporta em oposição à variação de **tensão**, portanto dizemos que a tensão no capacitor está sempre atrasada de  $90^\circ$  em relação à corrente. Ou seja, no circuito capacitivo, a **corrente** está sempre **adiantada** de  $90^\circ$  em relação à tensão, como mostra a Figura 1.16(c).

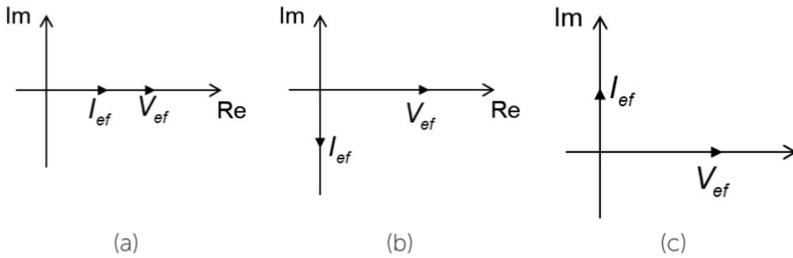
Figura 1.16 | Formas de onda de um circuito CA (a) resistivo; (b) indutivo; (c) capacitivo



Fonte: elaborada pela autora.

Representando a corrente e a tensão nos elementos resistor, indutor e capacitor na forma fasorial, podemos esboçá-las por meio de um gráfico, denominado diagrama fasorial, segundo a Figura 1.17.

Figura 1.17 | Diagrama fasorial de um circuito CA (a) resistivo; (b) indutivo; (c) capacitivo



Fonte: elaborada pela autora.



### Assimile

O indutor em um circuito CA se comporta como oposição à variação da corrente elétrica, portanto ele provoca um atraso de  $90^\circ$  da corrente em relação à tensão. Já o capacitor, em um circuito CA, se opõe à variação de tensão, e neste caso a corrente fica adiantada de  $90^\circ$  em relação à tensão.

Por final, o resistor em um circuito CA provoca uma queda de tensão em fase com a corrente que o percorre.

Com isso, são dadas as relações entre os fasores de tensão e corrente obtidas para os elementos resistor, indutor e capacitor respectivamente:  $\bar{V} = R\bar{I}$ ,  $\bar{V} = j\omega L\bar{I}$  e  $\bar{V} = \bar{I}/j\omega C$ . Escrevendo as relações como função da razão entre a tensão e a corrente ( $\bar{V}/\bar{I}$ ), podemos relacionar as expressões resultantes com a lei de Ohm:

$$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \text{ ou } \bar{V} = Z\bar{I} \quad (1.27)$$

Onde  $Z$  é denominada impedância do circuito em Ohm ( $\Omega$ ). Temos, assim, as impedâncias para resistores, indutores e capacitores respectivamente:  $Z_R = R$ ,  $Z_L = j\omega L = jX_L = X_L \angle 90^\circ$ ,  $Z_C = 1/j\omega C = -jX_C = X_C \angle -90^\circ$ .

A combinação entre elementos resistivos, indutivos e capacitivos resulta em uma impedância na forma da equação  $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$  ( $\Omega$ ), onde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \frac{X}{R} \quad (1.28)$$

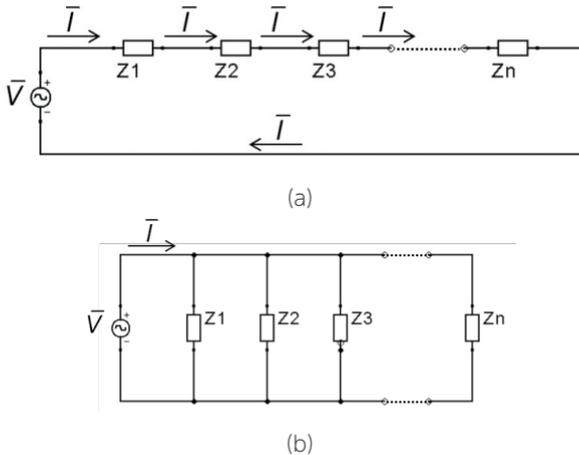
$$R = |Z|\cos\theta \quad X = |Z|\sen\theta \quad (1.29)$$

Assim como a impedância  $Z$  representa uma oposição ao fluxo de corrente alternada (CA), a habilidade que um condutor tem de conduzir corrente CA é chamada de admitância  $Y$ , cuja unidade é Siemens (S). A admitância é dada por:  $Y = \frac{1}{Z} = G + jB$ , onde  $G$  é a condutância e  $B$  é a susceptância do circuito, ambas com unidade Siemens (S).

Dado o conceito de impedância e a sua representação fasorial, os circuitos CA podem ser analisados de forma análoga aos circuitos CC, trocando-se a resistência  $R$  pela impedância  $Z$ , como veremos a seguir.

Considerando  $N$  impedâncias conectadas em série, conforme Figura 1.18 (a), a impedância total equivalente do circuito é dada pela soma das impedâncias.

Figura 1.18 | Circuito CA (a) em série; (b) em paralelo



Fonte: elaborada pela autora.

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_N \quad (1.30)$$

Como a corrente é a mesma em todos os elementos, para um circuito com associação em série, ela pode ser determinada pela lei de Ohm:  $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_T}$ . E as tensões nas impedâncias podem ser

calculadas:  $\bar{V}_k = Z_k \bar{I}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . A lei de Kirchhoff das tensões (LKT) pode ser aplicada ao longo do laço, logo  $\Sigma \bar{V} = 0$ , e então:

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \dots + \bar{V}_N - \bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \dots + \bar{V}_N = \bar{V} \quad (1.31)$$

De forma análoga, quando temos  $N$  impedâncias conectadas em paralelo, conforme a Figura 1.18(b), a impedância total do circuito é obtida somando-se as admitâncias em paralelo, conforme a Equação 1.32, onde  $Y_T$  é definido na Equação 1.33.

$$Z_T = \frac{1}{Y_T} \quad (1.32)$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_N = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_N} \quad (1.33)$$

Nos circuitos em paralelo, a tensão é a mesma em todos os elementos. Assim, pela lei de Ohm, temos  $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_T}$ . E as correntes

nas impedâncias podem ser calculadas:  $\bar{I}_k = \frac{\bar{V}}{Z_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . A lei de

Kirchhoff das correntes (LKC) pode ser aplicada no circuito  $\Sigma \bar{I} = 0$ , ou seja:

$$\bar{I} - \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 - \dots - \bar{I}_N = 0 \Rightarrow \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \dots + \bar{I}_N \quad (1.34)$$

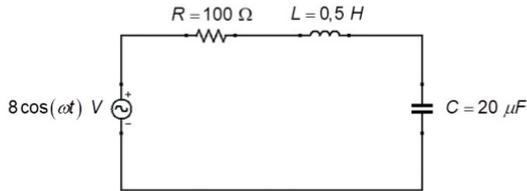


### Exemplificando

Para o circuito apresentado pela Figura 1.19:

- Obtenha a tensão na fonte em forma de fasor.
- Calcule as reatâncias  $X_L$  e  $X_C$ , se  $\omega = 1000$  rad/s.
- Obtenha as impedâncias relacionadas aos elementos resistor, capacitor e indutor.
- Calcule a impedância total ( $Z_T$ ) do circuito e desenhe o diagrama de impedâncias.
- Calcule a corrente na fonte em forma de fasor e desenhe o diagrama fasorial de tensão e corrente do circuito.
- A partir da corrente em forma de fasor, obtenha a expressão da corrente na forma temporal.

Figura 1.19 | Circuito RLC série



Fonte: elaborado pela autora.

**Resolução:**

- Para calcular o fasor de tensão:  $\bar{V} = \frac{8}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \cong 5,66 \angle 0^\circ \text{ V}$ .
- Calculando as reatâncias segundo as equações (1.25) e (1.27), obtemos:

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 0,5 = 500 \Omega \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 50 \Omega$$

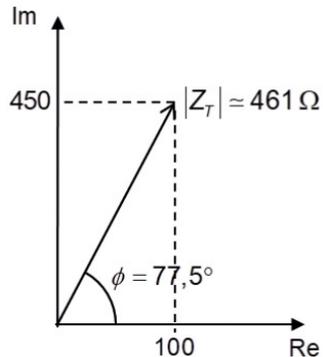
- As impedâncias são dadas por:  $Z_R = R = 100 \Omega$ ,  $Z_L = jX_L = j500 \Omega$  e  $Z_C = -jX_C = -j50 \Omega$
- A impedância total consiste na soma das impedâncias resistiva, capacitiva e indutiva, pois os elementos estão em série.

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= 100 + j500 - j50 \\ &= 100 + j450 \Omega \end{aligned}$$

Na forma polar, temos:

$$Z_T = 461 \angle 77,47^\circ \Omega$$

Figura 1.20 | Diagrama de impedância do circuito RLC série

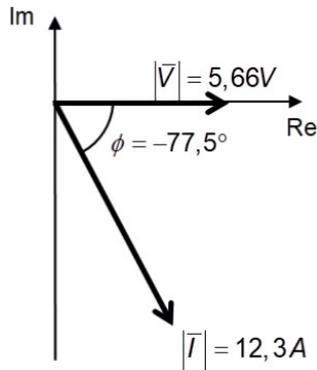


Fonte: elaborada pela autora.

e. Para calcular a corrente, aplicamos a lei de Ohm:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= Z_T \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_T} \\ \bar{I} &= \frac{5,66 \angle 0^\circ}{461 \angle 77,47^\circ} \\ &= 0,0123 \angle -77,47^\circ \\ \therefore \bar{I} &= 12,3 \angle -77,47^\circ \text{ mA}\end{aligned}$$

Figura 1.21 | Diagrama fasorial do circuito RLC série



Fonte: elaborada pela autora.

f. Transformando o fasor de corrente para sua função no tempo, temos:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 12,3 \cos(\omega t - 77,47^\circ) \Rightarrow i(t) = 17,35 \cos(\omega t - 77,47^\circ) \text{ mA}$$

Para finalizar, vamos observar um caso especial que ocorre quando as reatâncias capacitiva e indutiva se anulam. Na Figura 1.22, vemos o comportamento da reatância do capacitor e indutor em função da frequência. Em um determinado ponto, as reatâncias se cruzam, ou seja, para uma determinada frequência  $f_0$ ,  $X_c = X_L$ , anulando a reatância equivalente do circuito. Esta frequência é denominada frequência de ressonância do circuito, dada pela Equação 1.35.

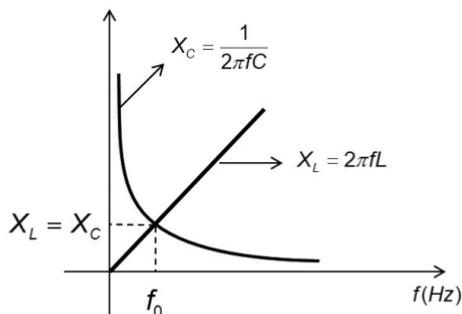
$$X_L = X_C$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (1.35)$$

Ou em Hz:

$$\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{Hz}) \quad (1.36)$$

Figura 1.22 | Representação das reatâncias capacitiva e indutiva e frequência de ressonância



Fonte: elaborada pela autora.



**Refleta**

Alguns equipamentos possuem características construtivas que provocam defasagem na corrente elétrica do circuito. Por exemplo, as máquinas elétricas que se baseiam no campo magnético provocado pelas bobinas (indutores) e os capacitores utilizados para retificar sinais alternados. Esta defasagem é indesejada e deve ser corrigida, anulando-se a sua parte imaginária, pois provoca perdas, aumento no consumo de energia, queda de tensão, entre outros.

Como seria possível corrigir uma corrente atrasada ou adiantada em um circuito elétrico? O que isso implicaria no valor final da corrente no circuito?

## Sem medo de errar

Suponha que você seja o responsável técnico pela análise de um problema ocasionado em uma indústria devido à instalação de uma nova carga no circuito. O problema ocorre quando o circuito é acionado, provocando a queima do fusível de proteção. Já foi constatado que a corrente consumida pelo circuito está acima da corrente suportada por ele.

Como sabemos que a carga consiste em uma nova máquina elétrica, esta apresenta um comportamento indutivo que está

provocando uma defasagem na corrente elétrica, a qual é indesejada, pois provoca perdas, quedas de tensão, aumento do consumo de energia, etc.

Devido a estes problemas, esta defasagem deve ser corrigida, mas, antes disso, a corrente deve ser conhecida e estudada. A empresa disponibilizou os dados da carga, do condutor e da tensão de alimentação do circuito:

$$\text{Tensão de alimentação: } v(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cos(2\pi 60t) \text{ (V)}$$

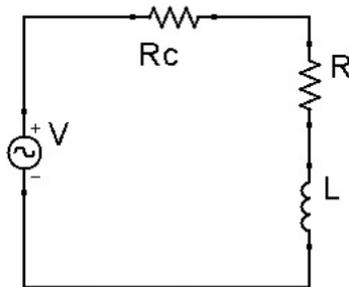
$$\text{Condutor: } R_c = 0,5\Omega$$

$$\text{Carga: } \begin{cases} R = 6,04\Omega \\ L = 17,3\text{mH} \end{cases}$$

Como você faria para analisar este circuito, obter a reatância, impedância e principalmente a defasagem da corrente que deve ser corrigida? Se esta defasagem fosse corrigida, a corrente estaria dentro das especificações do fusível?

Com base nos dados especificados, vamos montar o circuito elétrico em questão:

Figura 1.23 | Circuito RLC série correspondente à alimentação da nova carga na indústria



Fonte: elaborada pela autora.

A reatância indutiva da carga pode ser calculada pela Equação 1.25, e em seguida é obtida a impedância do indutor:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 60 \cdot 17,3 \cdot 10^{-3}$$

$$X_L \simeq 6,52(\Omega)$$

$$Z_L \simeq j6,52(\Omega)$$

Portanto a impedância da carga é dada por:

$$Z_{\text{carga}} = Z_R + Z_L$$

$$Z_{\text{carga}} = 6,04 + j6,52 = 8,89 \angle 47,19^\circ (\Omega)$$

Obtemos então a impedância do circuito cujos elementos estão em série. Basta somar as impedâncias individuais dos elementos:

$$Z_T = Z_{R_c} + Z_{\text{carga}}$$

$$Z_T = 0,5 + 6,04 + j6,52$$

$$Z_T = 6,54 + j6,52 (\Omega)$$

Utilizando a Equação 1.28, obtemos a impedância total na forma polar:

$$Z_T = 9,24 \angle 44,92^\circ (\Omega)$$

Na forma fasorial, temos a tensão de alimentação:  $\vec{V} = 220 \angle 0^\circ (V)$ .

Por meio da lei de Ohm, calculamos a corrente no circuito:

$$\vec{I} = \frac{220 \angle 0^\circ}{9,24 \angle 44,92^\circ} = 23,82 \angle -44,92^\circ (A)$$

Na forma retangular, temos:  $\vec{I} = 16,87 - j16,82 (A)$ .

Observe que a corrente está atrasada em relação à tensão, comportamento característico de circuitos indutivos.

Para analisar os efeitos da correção desta defasagem na corrente, vamos fazer da forma mais simples possível, colocando uma carga capacitiva em paralelo com a carga que representa a máquina, a que consome a componente imaginária da corrente produzida por ela. A corrente resultante ficaria aproximadamente igual a  $\vec{I} = 16,87 \angle 0^\circ (A)$ . Observe como a amplitude da corrente cai. Deste modo as perdas no condutor são menores, a queda de tensão é menor e o fusível deixará de queimar. Esta técnica de correção é denominada correção de fator de potência e será vista com detalhes na Unidade 2 desta disciplina.

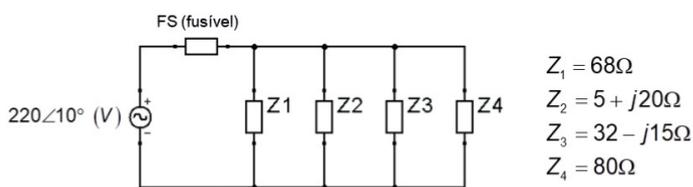
### Determinação da corrente nominal para especificação de um fusível em uma fábrica

#### Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico pelo projeto e manutenção de um circuito interno de uma fábrica. O projeto apresenta quatro equipamentos elétricos e um fusível de proteção contra sobrecorrentes que ainda deve ser dimensionado. Uma das características necessárias para o dimensionamento do fusível é a corrente nominal do circuito, ou seja, o valor de corrente que ele deve suportar continuamente sem romper. Esta corrente nominal corresponde à corrente do circuito quando todos os equipamentos estiverem em operação.

As características das cargas foram disponibilizadas pela fábrica e constam no circuito desenhado a seguir. Como você faria para obter a corrente nominal do fusível?

Figura 1.24 | Circuito de alimentação e cargas protegidas por um fusível em uma fábrica



Fonte: elaborada pela autora.

#### Resolução da situação-problema

Há dois caminhos a seguir que poderão levar ao mesmo resultado para este problema. O primeiro é obter a admitância total do circuito e aplicar a lei de Ohm para obter a corrente da fonte. O segundo é obter as correntes individuais das cargas aplicando a lei de Ohm em cada uma delas e em seguida utilizar a lei de Kirchhoff dos nós para obter a corrente total do circuito.

Vamos utilizar o primeiro método, e você, aluno, está convidado a testar o segundo. Primeiro vamos escrever as cargas na forma polar.

Para obter as admitâncias, basta fazer:  $Y_i = 1/Z_i$ .

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= 14,7 \angle 0^\circ = 14,7 \text{ mS} \\ Y_2 &= 48,5 \angle -75,96^\circ = 11,76 - j47,06 \text{ mS} \\ Y_3 &= 28,3 \angle 25,11^\circ = 25,62 + j12 \text{ mS} \\ Y_4 &= 12,5 \angle 0^\circ = 12,5 \text{ mS} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y_T &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ Y_T &= 64,6 - j35,05 = 73,49 \angle -28,48^\circ \text{ mS} \end{aligned}$$

Aplicando a lei de Ohm:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_T} = \bar{V} \cdot Y_T$$

$$\bar{I} = (220 \angle 30^\circ) \cdot (73,49 \cdot 10^{-3} \angle -28,48^\circ)$$

$$\bar{I} = (220 \angle 10^\circ) \cdot (73,49 \cdot 10^{-3} \angle -28,48^\circ)$$

$$\bar{I} = 16,17 \angle -18,48^\circ \text{ A}$$

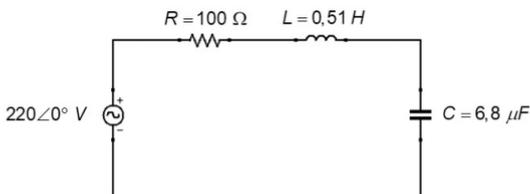
Portanto, para este circuito interno da fábrica, a corrente nominal que deve ser levada em consideração para dimensionamento do fusível é  $I_N = 16,17 \text{ A}$ .

## Faça valer a pena

**1.** Na frequência de ressonância, um circuito RLC apresenta resposta com valor igual ou próximo do valor máximo. Esta frequência é particularmente importante em telecomunicações, por exemplo, para a sintonia de uma determinada emissora de televisão. Estações que transmitem em frequências distantes daquela sintonizada não são recebidas com intensidade suficiente para afetar o programa de interesse (BOYLESTAD, 2015, p. 712).

Calcule a frequência de ressonância em rad/s e o valor das reatâncias para esta frequência no circuito configurado em série a seguir.

Figura | Circuito RLC série em ressonância



- a)  $f_0 = 85,46$  Hz,  $X_L = X_C = 273,86 \Omega$ .  
 b)  $f_0 = 854,6$  Hz,  $X_L = X_C = 2,74$  k $\Omega$ .  
 c)  $f_0 = 536,98$  Hz,  $X_L = X_C = 273,86 \Omega$ .  
 d)  $f_0 = 536,98$  Hz,  $X_L = X_C = 43,58 \Omega$ .  
 e)  $f_0 = 85,46$  Hz,  $X_L = X_C = 2,74$  k $\Omega$ .

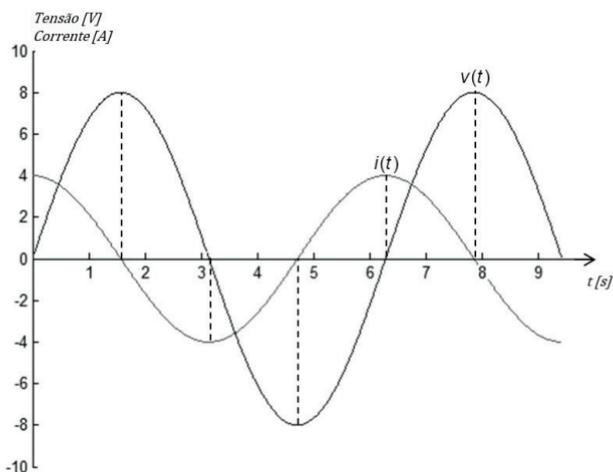
**2.** Ao contrário dos resistores, os capacitores e indutores são elementos cuja reatância varia com a frequência do sinal de alimentação ao qual são submetidos.

Em frequências altas, o capacitor se comporta como um curto-circuito e o indutor como um circuito aberto.

Ao contrário, em baixas frequências, o capacitor se comporta como circuito aberto, enquanto o indutor se comporta como curto-circuito. Este é o comportamento característico destes elementos em circuitos elétricos em corrente contínua CC.

A figura a seguir mostra o gráfico do sinal de tensão e corrente em um circuito elétrico.

Figura | Gráfico da tensão e corrente senoidais



Fonte: adaptada do Concurso IFSP, 2015. Edital 233/2015, Controle e automação II, Questão 15.

Com base no sinal de tensão e de corrente apresentados, pode-se afirmar que:

- a) Trata-se de um circuito com reatância predominantemente capacitiva, pois a corrente encontra-se adiantada em relação à tensão, com uma defasagem menor que 90 graus.
- b) Trata-se de um circuito puramente capacitivo, pois a corrente encontra-se adiantada de 90 graus em relação à tensão.
- c) Trata-se de um circuito com reatância predominantemente indutiva, pois a corrente encontra-se atrasada em relação à tensão, com uma defasagem menor que 90 graus.
- d) Trata-se de um circuito puramente indutivo, pois a tensão encontra-se atrasada de 90 graus em relação à tensão.
- e) Trata-se de um circuito puramente resistivo, pois a tensão e a corrente estão em fase.

**3.** Os elementos indutor e capacitor são armazenadores de energia e, portanto, provocam uma defasagem entre a corrente e a tensão no circuito. Esta defasagem provoca um aumento na corrente elétrica do circuito, levando a perdas e quedas de tensão, bem como aumentando o consumo de energia. Por estes motivos, quanto mais resistiva for a carga do circuito, menos perdas ele provoca, logo é considerado mais eficiente.

Uma carga é alimentada por uma fonte de tensão senoidal (CA), cujas expressões para tensão e corrente nos terminais da fonte são dadas a seguir:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 127 \cos(120\pi t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 \text{sen}(120\pi t + 108^\circ) \text{ A}$$

Quais seriam os elementos que compõem o circuito, que satisfaz a tensão e a corrente da fonte?

- a)  $R = 12,7 \Omega$  e  $L = 15,3 \text{ mH}$ .
- b)  $R = 12,7 \Omega$ .
- c)  $R = 11,31 \Omega$  e  $C = 15,3 \text{ mF}$ .
- d)  $R = 11,31 \Omega$  e  $C = 0,46 \text{ mF}$ .
- e)  $R = 11,31 \Omega$  e  $L = 15,3 \text{ mH}$ .

## Seção 1.3

### Análise de circuitos em regime permanente senoidal

#### Diálogo aberto

Até agora estudamos as características de um sinal senoidal e sua representação por meio de fasores. Vimos também que, assim como em circuitos CC, em circuitos CA as leis de Ohm e Kirchhoff são válidas e aplicáveis, assim como pode haver combinações de impedâncias em série, paralelo ou mista, e para analisar um circuito de uma única fonte nesses casos, basta obter a impedância equivalente do circuito, de forma similar àquela feita em circuitos CC.

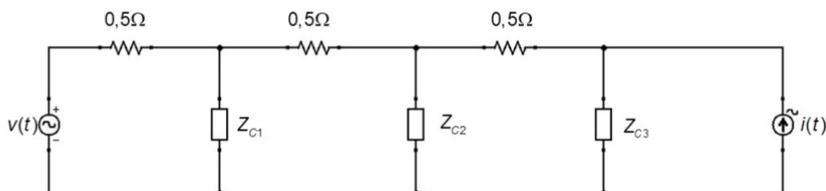
No entanto, em circuitos com mais de uma fonte de tensão ou corrente que não estejam em série ou paralelo, devemos empregar os métodos de análise que veremos nesta seção. São eles: análise de malha, a qual é baseada na lei de Kirchhoff das tensões; análise nodal, baseada na lei de Kirchhoff das correntes; teorema da superposição, que se baseia na análise individual de cada fonte do circuito para obter a tensão e a corrente entre dois terminais e posterior soma das respectivas contribuições, transformações entre fontes de corrente e tensão; e por final a representação por circuitos equivalentes de Thévenin e Norton, que permite representar um circuito linear qualquer por meio de uma tensão e impedância ou corrente e impedância, respectivamente.

Para aplicar esses conceitos, vamos retomar a situação em que uma fábrica instalou uma nova carga em sua planta, e, como consequência, toda vez que o circuito era acionado, o fusível de proteção da máquina queimava.

Já verificamos que o problema pode ser corrigido redimensionando o fusível. Porém, segundo as normas brasileiras de instalações industriais, além do dispositivo de proteção individual da máquina, o circuito de distribuição que alimenta as máquinas desde o quadro geral até o centro de comando deve ser protegido por disjuntores ou fusíveis, e com isso, ao inserir uma nova carga, estes dispositivos também devem ser verificados.

Uma análise mais detalhada a respeito da instalação elétrica onde se encontra a nova carga  $Z_{c3}$  foi então solicitada com a finalidade de verificar a corrente do terminal proveniente do quadro geral de força para este circuito. Para verificar a corrente nominal, o diagrama do circuito correspondente ao centro de comandos de máquinas da planta industrial foi disponibilizado.

Figura 1.25 | Diagrama do circuito disponibilizado pela fábrica



Fonte: elaborada pela autora.

Onde:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cos(377t) \text{ V}, \quad i(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \cos(377t + 30^\circ) \text{ A},$$

$$Z_{c1} = Z_{c2} = 6,04 + j6,52 \text{ } \Omega \text{ e } Z_{c3} = 3,02 + j3,26 \text{ } \Omega$$

Cabe a você como responsável técnico realizar a análise do sistema. Como você poderia proceder para obter a corrente fornecida pela fonte de tensão?

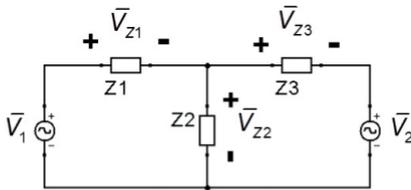
Vamos descobrir a seguir. Bons estudos!

## Não pode faltar

Normalmente, quando dispomos de um circuito elétrico ou desejamos realizar um projeto, devemos conhecer todas as tensões e correntes nas malhas, ramos e nós deste circuito para saber se os limites não estão sendo violados ou estão acima das especificações. Por exemplo, em um sistema elétrico de potência, o qual dispõe de inúmeras fontes de geração, a análise torna-se mais complexa, pois não é possível obter uma impedância equivalente alimentada por uma única fonte. Para estes casos, é necessário aplicar um método de análise mais específico como: análise de malha, análise nodal, teoremas da superposição ou equivalentes de Thévenin e Norton, que serão vistos nesta seção.

Da mesma forma que as leis de Ohm e Kirchhoff, esses teoremas são aplicados de forma similar à análise CC que você já viu anteriormente, com a diferença de que em circuitos CA os cálculos realizados envolvem números complexos. Se o circuito CA for especificado com as fontes no domínio do tempo, primeiro é necessário transformar para domínio de fasores ou da frequência. Em seguida são feitos os cálculos utilizando uma das técnicas de análise e, por último, caso necessário, deve-se transformar o fasor resultante de volta para o domínio do tempo. Para entender melhor este processo de análise de circuitos CA, considere o circuito elétrico genérico da Figura 1.26.

Figura 1.26 | Circuito CA genérico para análise de malha

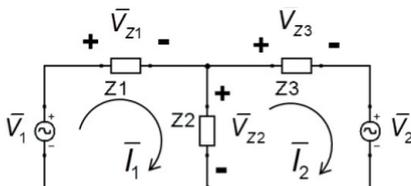


Fonte: elaborada pela autora.

Para determinação dos valores de tensão e corrente em todos os elementos do circuito da Figura 1.26, podemos aplicar a análise de malhas, cuja base é constituída pela lei de Kirchhoff das tensões (LKT). Para isso, as seguintes etapas podem ser realizadas para a análise de malhas:

1. Atribuir uma corrente no sentido horário para cada malha, como visto na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Representação das correntes de malha



Fonte: elaborada pela autora.

2. Para cada malha, escrevemos uma equação, em termos fasoriais, somando todas as impedâncias percorridas pela corrente nesta malha e multiplicando pela corrente da malha em questão.

$$\text{Malha 1: } (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\bar{I}_1 >$$

$$\text{Malha 2: } (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\bar{I}_2$$

3. Em cada equação agora, devemos subtrair a impedância percorrida por corrente de outra malha, multiplicada pela respectiva corrente.

$$\text{Malha 1: } (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\bar{I}_1 - \mathbf{Z}_2\bar{I}_2$$

$$\text{Malha 2: } (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\bar{I}_2 - \mathbf{Z}_2\bar{I}_1$$

4. Por fim, somamos as fontes de tensão da malha, respeitando a polaridade e, de acordo com o sentido percorrido pela corrente, igualamos à cada equação de malha. O sinal aqui segue o seguinte padrão para análise: quando a corrente adotada sai do terminal negativo da fonte, o valor da tensão é subtraído. Quando a corrente adotada sai do terminal positivo da fonte, o valor da tensão é somado.

$$\text{Malha 1: } (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\bar{I}_1 - \mathbf{Z}_2\bar{I}_2 = \bar{V}_1$$

$$\text{Malha 2: } (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\bar{I}_2 - \mathbf{Z}_2\bar{I}_1 = -\bar{V}_2$$

Em seguida, basta resolver o sistema de equações resultante. A resolução deste sistema linear pode ser feita por substituição, escalonamento ou pelo método matricial por determinantes, lembrando que em circuitos CA as operações matemáticas envolvem números complexos.



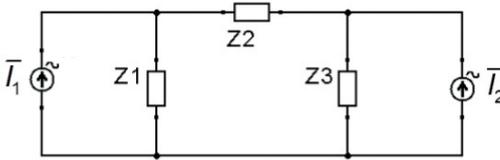
**Pesquise mais**

Quando não dispomos de uma ferramenta computacional ou calculadora, a resolução de sistemas de equações lineares de ordem superior a 2 torna-se complexa matematicamente. Uma forma de simplificar este cálculo é a aplicação do método de escalonamento. Para saber um pouco mais sobre este método, consulte a referência a seguir:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. p. 60-61 e 64-66.

De forma análoga, a lei de Kirchhoff das correntes (LKC) constitui a base da análise nodal em circuitos elétricos. Considere o circuito genérico da Figura 1.28.

Figura 1.28 | Circuito genérica CA para análise nodal

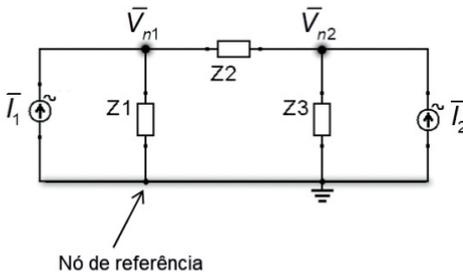


Fonte: elaborada pela autora.

As seguintes etapas podem ser tomadas para a análise nodal de circuitos elétricos:

1. Escolher um nó de referência e atribuir uma tensão para cada nó restante do circuito, como pode ser visto na Figura 1.29 para o circuito exemplo.

Figura 1.29 | Representação das tensões nodais



Fonte: elaborada pela autora.

2. Para cada nó, escrevemos uma equação em termos fasoriais. Para a equação de um nó específico, somar todas as admitâncias conectadas a este nó e multiplicar pela tensão do nó em questão:

$$\text{Nó 1: } (Y_1 + Y_2)\bar{V}_{n1}$$

$$\text{Nó 2: } (Y_2 + Y_3)\bar{V}_{n2}$$

Onde  $Y_1 = 1/Z_1$ ,  $Y_2 = 1/Z_2$  e  $Y_3 = 1/Z_3$ .

3. Subtrair a admitância conectada aos outros nós, multiplicando-as pelas respectivas tensões conectadas a estas admitâncias.

$$\text{Nó 1: } (Y_1 + Y_2)\bar{V}_{n1} - Y_2 \cdot \bar{V}_{n2}$$

$$\text{Nó 2: } (Y_2 + Y_3)\bar{V}_{n2} - Y_2 \cdot \bar{V}_{n1}$$

À direita do sinal de igualdade é a soma algébrica das fontes de corrente conectadas ao nó de interesse, com sinal positivo se a corrente entra no nó e sinal negativo se sai do nó.

$$\text{Nó 1: } (Y_1 + Y_2)\bar{V}_{n1} - Y_2 \cdot \bar{V}_{n2} = \bar{I}_1$$

$$\text{Nó 2: } (Y_2 + Y_3)\bar{V}_{n2} - Y_2 \cdot \bar{V}_{n1} = \bar{I}_2$$

Da mesma forma que na análise de malhas, a resolução do sistema de equações resultantes pode ser feita por substituição, escalonamento ou pelo método matricial por determinantes, lembrando que em circuitos CA as operações matemáticas envolvem números complexos.



Refleta

Com base nas etapas apresentadas anteriormente, como deveríamos proceder se nos depararmos com uma fonte de corrente em um circuito onde iríamos aplicar a análise de malhas ou com uma fonte de tensão em um circuito no qual iríamos aplicar análise nodal?

Para eliminar a necessidade de resolver um sistema de equações lineares, visto que sistemas de ordem superior a 3 tornam-se mais complexos de serem resolvidos, podemos utilizar o teorema da superposição. Sua aplicação é análoga aos circuitos CC, com a diferença de que os cálculos agora envolvem fasores e impedâncias.

No teorema da superposição, consideramos separadamente o efeito de cada uma das fontes do circuito para calcular a corrente ou a tensão entre dois terminais específicos. Este teorema é muito importante na análise de circuitos eletrônicos, tal como na análise de amplificadores em que a fonte CC é necessária para polarização do transistor e a fonte CA é a que deve ser amplificada. A análise é realizada separadamente, e a solução total é a soma algébrica das contribuições das duas fontes.

Para aplicar o teorema da superposição, analisam-se os efeitos de uma fonte de cada vez, podendo ser de tensão ou corrente. Se houver apenas fontes independentes no circuito, ao analisar uma fonte específica, as fontes restantes são eliminadas seguindo o seguinte critério:

- Fontes de tensão independentes são curto-circuitadas.
- Fontes de corrente independentes são convertidas em circuitos abertos.

Após eliminar as demais fontes, segundo o critério acima, a tensão entre os terminais desejados é calculada. Ao final devem-se somar algebricamente as tensões, respeitando a polaridade delas, devido a cada uma das fontes.

Caso existam fontes dependentes ou controladas, cuja variável de controle não seja determinada pelo circuito ao qual o teorema é aplicado, elas podem ser analisadas como se fossem fontes independentes, com a diferença de que a solução será em função da variável de controle. Caso a variável de controle seja determinada pelo circuito ao qual o teorema será aplicado, ela não pode ser eliminada do circuito.

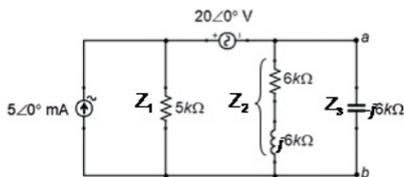
Caso existam fontes com frequências distintas presentes no circuito, as respostas individuais devem ser somadas no domínio do tempo (não se pode somar fasores de frequências diferentes).



### Exemplificando

Calcule a tensão e a corrente entre os terminais  $a$  e  $b$  do circuito a seguir, sabendo que  $Z_1 = 5k\Omega$ ,  $Z_2 = 6 + 6j k\Omega$  e  $Z_3 = -6j k\Omega$ .

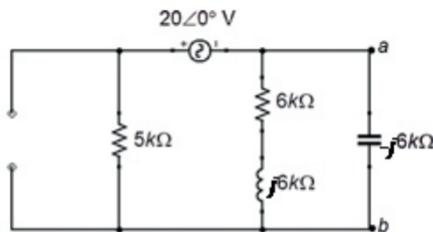
Figura 1.30 | Circuito para aplicação do teorema da superposição



Fonte: elaborada pela autora.

**Resolução:** vamos aplicar o teorema da superposição. Para análise da fonte de tensão, abrimos a fonte de corrente obtendo o seguinte circuito:

Figura 1.31 | Análise devido à fonte de tensão



Fonte: elaborada pela autora.

Sabendo o valor das impedâncias, podemos obter a impedância equivalente:

$$Z_{T1} = Z_1 + \underbrace{Z_2 \parallel Z_3}_{\text{paralelo}}$$

Resolvendo a parte do paralelo:  $(Z_2 \parallel Z_3)$

- $(Z_2 \parallel Z_3) = \frac{(6.000 + 6.000j) \times (-6.000j)}{(6.000 + 6.000j) + (-6.000j)} = \frac{(6.000 + 6.000j) \times (-6.000j)}{6.000 + 6.000j - 6.000j} = \frac{-6.000j(6.000 + 6.000j)}{6.000}$
- $(Z_2 \parallel Z_3) = \frac{-6.000j(6.000 + 6.000j)}{6.000} = \left[ \text{sabendo que: } \frac{-6.000j}{6.000} = -j \right], \dots$
- $(Z_2 \parallel Z_3) = -j(6.000 + 6.000j)$

Aplicando-se a regra aritmética complexa em 3.:  $(a \cdot j)(b + cj) = -ac + abj$   
 onde:  $a = 1$ ,  $b = 6.000$ ,  $c = 6.000$ , teremos:

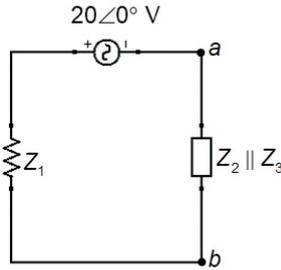
$$\begin{aligned} (Z_2 \parallel Z_3) &= -(-1 \times 6.000 + 1 \times 6.000j) = \\ (Z_2 \parallel Z_3) &= -(-6.000 + 6.000j) = \\ (Z_2 \parallel Z_3) &= 6.000 - 6.000j \text{ ou } (6k - j6k)\Omega \end{aligned}$$

Agora somamos a parte real do resistor de  $5k\Omega$ :

$$\begin{aligned} Z_{T1} &= Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3) \\ Z_{T1} &= 5.000 + (6.000 - 6.000j) = 11.000 - 6.000j \\ Z_{T1} &= (11.000 - 6.000j)\Omega \text{ ou } (11k - 6kj)\Omega \end{aligned}$$

Observe que a tensão  $\bar{V}_{ab1}$ , devido à fonte de tensão, corresponde à tensão na impedância paralelo  $Z_2 \parallel Z_3$ , conforme Figura 1.32:

Figura 1.32 | Circuito equivalente para análise da fonte de tensão



Fonte: elaborada pela autora.

Portanto:

$$\vec{V}_{ab1} = \frac{V\angle 0^\circ}{Z_t} \times (Z_2 // Z_3)$$

Onde:

$$\vec{I}_{r1} = \frac{V\angle 0^\circ}{Z_{r1}} = \frac{20 + j0}{(11.000 - j6.000)}$$

Aplicando a regra da aritmética complexa:

$$\frac{a + bi}{c - di} = \frac{(c - di) \times (a + bi)}{(c - di) \times (c + di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + a^2}$$

Onde:  $a = 20$ ;  $b = 0$ ;  $c = 11.000$ ;  $d = -6.000$ , teremos:

$$\vec{I}_{r1} = \frac{[20 \times 11.000 + 0 \times (-6.000)] + [0 \times 11.000 - 20 \times (-6.000)]j}{11.000^2 + (-6.000)^2} =$$

$$\vec{I}_{r1} = \frac{[220.000 - 0] + [0 - 20 \times (-6.000)]j}{157 \times 10^6} = \frac{[220 \times 10^3] + [120 \times 10^3]j}{157 \times 10^6}$$

$$\vec{I}_{r1} = \frac{11 + 6j}{7.850} = \frac{11}{7.850} + \frac{3}{3.925}j \quad \text{OU}$$

$$\vec{I}_{r1} = 1,4 \times 10^{-3} + 0,8 \times 10^{-3} j \quad [\text{A}]$$

Agora multiplicando-se  $\vec{I}_{r1}$  pela impedância associada ( $Z_2 // Z_3$ ), encontraremos a tensão  $\vec{V}_{ab1}$ :

$$\vec{V}_{ab1} = \frac{V\angle 0^\circ}{Z_t} \times (Z_2 // Z_3) = I_{r1} \times (Z_2 // Z_3) \therefore$$

$$\vec{V}_{ab1} = (1,4 \times 10^{-3} + 0,8 \times 10^{-3} j) [\text{A}] \times (6 \times 10^3 - 6 \times 10^3 j) [\Omega]$$

Aplicando a regra aritmética complexa:

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ onde:}$$

$$a = 1,4 \times 10^{-3}; b = 0,8 \times 10^{-3}; c = 6.000; d = 6.000$$

Portanto:

$$\bar{V}_{ab1} = \frac{V \angle 0^\circ}{Z_T} \times (Z_2 // Z_3) = I_{T1} \times (Z_2 // Z_3) \therefore$$

$$\bar{V}_{ab1} = (1,4 \times 10^{-3} + 0,8 \times 10^{-3} j) [A] \times (6 \times 10^3 - 6 \times 10^3 j) [\Omega]$$

$$\bar{V}_{ab1} = (0,0014 \times 6.000 - 0,0008 \times 6.000) + (0,0014 \times 6.000 + 0,0008 \times 6.000) j$$

$$\bar{V}_{ab1} = 3,6 + 13,2j [V]$$

Finalmente para se obter a  $\bar{I}_{ab1} = \frac{V_{ab1}}{Z_3} = \frac{\bar{V}_{ab1} = 3,6 + 13,2j [V]}{0 - 6.000j [\Omega]} =$  sabemos

$$\text{que } 0 - 6.000j = -6.000j \text{ e } \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\bar{I}_{ab1} = \frac{V_{ab1}}{Z_3} = \frac{3,6 + 13,2j [V]}{0 - 6.000j [\Omega]} = -\frac{3,6 + 13,2j}{6.000j} \times \frac{(-j)}{(-j)} = \text{(multiplicando-se pelo conjugado)}$$

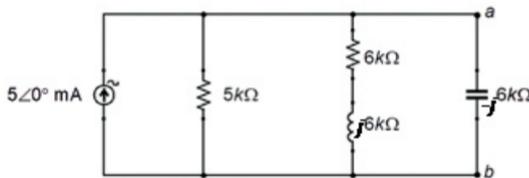
$$\bar{I}_{ab1} = \frac{V_{ab1}}{Z_3} = -\frac{13,2 - 3,6j}{6.000}$$

Aplicando-se a forma Complexa Padrão:  $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

$$\bar{I}_{ab1} = \frac{13,2 - 3,6j}{6.000} = -\left(\frac{13,2}{6.000}\right) - \left(-\frac{3,6j}{6.000}\right)$$

$$\bar{I}_{ab1} = -0,0022 + 0,0006j [A]$$

Figura 1.33 | Análise devido à fonte de corrente



Fonte: elaborada pela autora.

As impedâncias  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  estão em paralelo, então somamos as admitâncias e depois invertemos:

$$Y_T = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \cong 0,283 - 0,083j \text{ mS}$$

$$Z_{T2} = \frac{1}{Y_T} = 3,24 - 0,95j \text{ k}\Omega$$

A tensão e a corrente entre os terminais a e b, devido à fonte de corrente, podem ser calculadas:

$$\bar{V}_{ab2} = 5 \cdot 10^{-3} \angle 0^\circ \cdot Z_{T2} = 16,93 \angle -16,39^\circ \text{ V}$$

$$\bar{I}_{ab2} = \frac{\bar{V}_{ab2}}{Z_3} = 2,82 \angle 73,61 \text{ mA}$$

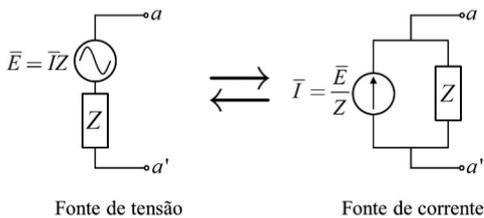
Calculamos finalmente a tensão e a corrente entre os terminais a e b por meio da superposição:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_{ab1} + \bar{V}_{ab2} = 44,25 \angle -0,5^\circ \text{ V}$$

$$\bar{I}_{ab} = \bar{I}_{ab1} + \bar{I}_{ab2} = 7,37 \angle 1,07^\circ \text{ mA}$$

Algumas vezes, converter o tipo de fonte pode facilitar os cálculos. De forma geral, a conversão entre fontes independentes de tensão e corrente pode ser vista na Figura 1.34.

Figura 1.34 | Transformação de fontes independentes



Fonte: adaptada de Boylestad (2012, p. 617).

Para os casos em que temos um circuito elétrico linear CA de grande porte e desejamos simplificá-los para um circuito equivalente com apenas dois elementos, uma fonte e uma impedância, em um determinado ponto, podemos aplicar os teoremas de Thévenin e Norton.

Os teoremas partem do princípio de que um circuito linear qualquer, conectado a dois terminais, pode ser representado por uma fonte de tensão e uma impedância em série (equivalente de Thévenin) ou por uma fonte de corrente e uma impedância em paralelo (equivalente de Norton), conforme mostram as Figuras

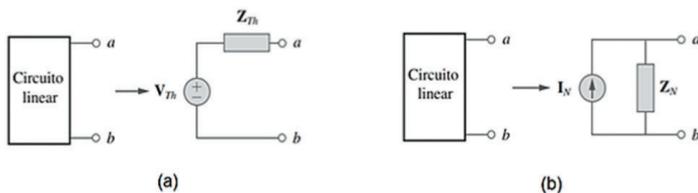
1.35(a) e 1.35(b) respectivamente. Os dois circuitos equivalentes estão relacionados pelas seguintes equações:

$$\bar{V}_{th} = Z_N \bar{I}_N \quad (1.37)$$

$$Z_{th} = Z_N \quad (1.38)$$

Onde  $\bar{V}_{th}$  e  $Z_{th}$  são a tensão e a impedância de Thévenin respectivamente e  $\bar{I}_N$  e  $Z_N$  são a corrente e a impedância de Norton respectivamente.

Figura 1.35 | Representação de um sistema pelo seu circuito equivalente (a) de Thévenin; (b) de Norton



Fonte: adaptada de Sadiku (2014, p. 348).



### Assimile

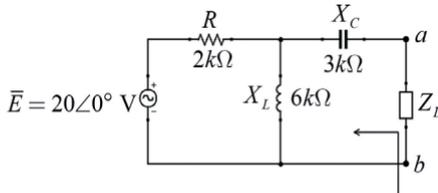
O circuito equivalente de Thévenin para um circuito CA pode ser obtido de forma análoga a circuitos CC, apenas trocando-se R por Z. Para obter o circuito equivalente de Thévenin, as etapas a seguir devem ser seguidas:

1. Remova todos os elementos, ou parte do circuito, que não deverão ser incluídos no circuito equivalente de Thévenin.
2. Destaque os dois terminais do circuito resultante, para os quais o circuito equivalente deverá ser obtido.
3. Calcule a impedância equivalente de Thévenin  $Z_{th}$ , eliminando todas as fontes independentes: as fontes de tensão são substituídas por curto-circuitos, e as fontes de corrente por circuitos abertos. Em seguida determina-se a impedância resultante entre os dois terminais destacados.
4. Recoloque as fontes de tensão e de corrente e utilize o teorema da superposição, caso necessário, para calcular a tensão entre os terminais destacados. Esta tensão corresponde à tensão de Thévenin  $\bar{V}_{th}$ .



Obtenha o circuito equivalente de Thévenin entre os terminais  $a$  e  $b$  do circuito da Figura 1.36.

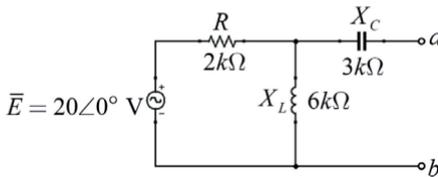
Figura 1.36 | Circuito elétrico RLC



Fonte: elaborada pela autora.

**Resolução:** para obter o circuito equivalente de Thévenin deste circuito, vamos primeiramente eliminar a carga  $Z_L$  e destacar os terminais para os quais o circuito equivalente deverá ser obtido, como mostra a Figura 1.37.

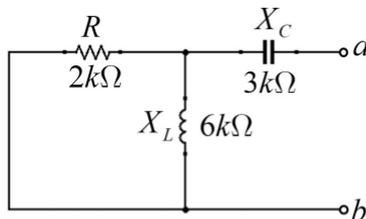
Figura 1.37 | Circuito elétrico RLC sem a carga  $Z_L$



Fonte: elaborada pela autora.

Para calcular a resistência de Thévenin, é necessário eliminar as fontes do circuito. Como há apenas uma fonte de tensão, ela é substituída por um curto-circuito, conforme a Figura 1.38.

Figura 1.38 | Circuito elétrico RLC sem fonte



Fonte: elaborada pela autora.

Neste circuito temos a resistência  $R$  em paralelo com a impedância indutiva  $X_L$ . A impedância equivalente de  $R$  e  $X_L$  se encontra em série com a impedância capacitiva  $X_C$ . Somente os valores absolutos destas impedâncias estão representados na figura, portanto:

$$R_{th} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} + (-jX_C)$$

$$R_{th} = \frac{j12 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3 + j6 \cdot 10^3} - j3 \cdot 10^3$$

$$R_{th} = 1,8 + j2,4 \text{ k}\Omega$$

Retornando ao circuito da Figura 1.36, calcula-se a tensão de Thévenin entre os terminais  $a$  e  $b$ . Como os terminais encontram-se em aberto, não há passagem de corrente pelo capacitor, sendo assim a tensão de Thévenin corresponde à tensão sobre o indutor:

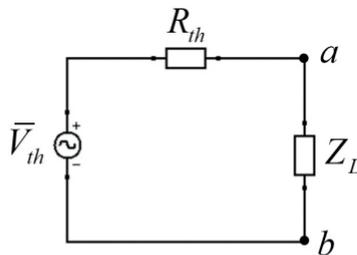
$$\bar{I} = \frac{20 \angle 0^\circ}{(2 + j6) \cdot 10^3} = 1 - j3 \text{ mA}$$

$$\bar{V}_{th} = I \cdot jX_L = (1 - j3) \cdot 10^{-3} \cdot j6 \cdot 10^3 \rightarrow \bar{V}_{th} = 18 + j6 \text{ V}$$

$$\therefore \bar{V}_{th} \cong 18,97 \angle 18,43^\circ \text{ V}$$

Temos a representação final na Figura 1.39.

Figura 1.39 | Representação do circuito equivalente de Thévenin



Fonte: elaborada pela autora.

## Sem medo de errar

Agora, vamos voltar para a situação em que você é o responsável técnico designado para analisar o circuito elétrico de uma instalação industrial que apresentava queima de fusível após a instalação de uma nova carga no sistema.

Foi solicitada uma análise mais detalhada a respeito da instalação elétrica onde se encontra a máquina, com a finalidade de verificar a corrente do terminal proveniente do quadro geral de força e, conforme vimos na Figura 1.25, foram disponibilizados pela fábrica contratante o diagrama do circuito correspondente ao centro de comandos de máquinas e os dados do sistema no qual a nova máquina foi instalada.

Sabendo que a instalação possui tensão nominal eficaz no valor de 220 V, como você poderia reduzir o sistema (de forma a obter um circuito equivalente) a fim de conseguir os parâmetros do sinal da corrente nominal eficaz do dispositivo de proteção, após inserção da nova carga  $Z_{C3}$ , sabendo que esse dispositivo de proteção se encontra instalado em série com a fonte de tensão?

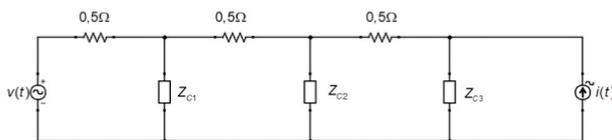
A corrente nominal deste circuito, para a qual deve ser dimensionado o dispositivo de proteção, corresponde à corrente fornecida pela fonte de tensão.

Para obter esta corrente, podemos aplicar quaisquer métodos de análise estudados nesta seção. Podemos também transformar as fontes de forma que o sistema tenha apenas fontes de corrente ou apenas fontes de tensão, ou analisar com as duas fontes distintas da forma como foi apresentado.

Se utilizarmos a análise de malhas, teremos quatro equações para o sistema linear resultante, pois há quatro malhas. Já se utilizarmos análise nodal, teremos três equações no sistema linear, pois há três nós no circuito. Portanto, vamos utilizar a análise nodal para obter a corrente nominal do circuito.

Como as fontes estão em função do tempo, vamos transformá-las em fasores, conforme a Figura 1.40.

Figura 1.40 | Diagrama do circuito disponibilizado com as fontes na forma fasorial



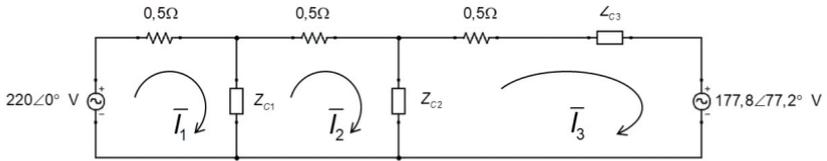
Fonte: elaborada pela autora.

Para facilitar a análise de malha, utilizando o teorema de Norton, vamos substituir também a fonte de corrente por uma fonte de tensão equivalente e em seguida destacar as correntes das malhas do circuito.

$$\bar{V}_2 = Z_{c3} \cdot 20 \angle 30^\circ$$

$$\bar{V}_2 = 177,8 \angle 77,2^\circ \text{ V}$$

Figura 1.41 | Diagrama do circuito disponibilizado com a representação das correntes de malha



Fonte: elaborada pela autora.

A partir do circuito da Figura 1.41, podemos escrever as seguintes equações de malha:

$$\text{Malha 1: } (0,5 + Z_{c1})\bar{I}_1 - Z_{c1}\bar{I}_2 = 220 \angle 0^\circ$$

$$\text{Malha 2: } -Z_{c1}\bar{I}_1 + (Z_{c1} + 0,5 + Z_{c2})\bar{I}_2 - Z_{c2}\bar{I}_3 = 0$$

$$\text{Malha 3: } -Z_{c2}\bar{I}_2 + (Z_{c2} + 0,5 + Z_{c3})\bar{I}_3 = -177,8 \angle 77,2^\circ$$

Substituindo as impedâncias e colocando em formato matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 6,54 + j6,52 & -(6,04 + j6,52) & 0 \\ -(6,04 + j6,52) & 12,6 + j13 & -(6,04 + j6,52) \\ 0 & -(6,04 + j6,52) & 9,56 + j9,78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \angle 0^\circ \\ 0 \\ 177,8 \angle -102,8^\circ \end{bmatrix}$$

Usando uma ferramenta computacional ou calculadora, resolvemos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,54 + j6,52 & -(6,04 + j6,52) & 0 \\ -(6,04 + j6,52) & 12,6 + j13 & -(6,04 + j6,52) \\ 0 & -(6,04 + j6,52) & 9,56 + j9,78 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 220 \angle 0^\circ \\ 0 \\ 177,8 \angle -102,8^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76,6 \angle -56,2^\circ \\ 55,5 \angle -63,4^\circ \\ 39,1 \angle -81,3^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

Como a proteção do quadro geral de força se localiza logo após a fonte, a corrente total do circuito, dada por  $\bar{I}_1 = 76,6 \angle -56,2^\circ$  (A), corresponde à corrente de interesse. Este valor calculado corresponde ao valor que a proteção deve suportar, já com a inclusão da nova máquina, e trata-se portanto da corrente nominal a ser utilizada para dimensionamento da proteção do quadro geral.

### Análise de um sistema de geração e transmissão de energia elétrica

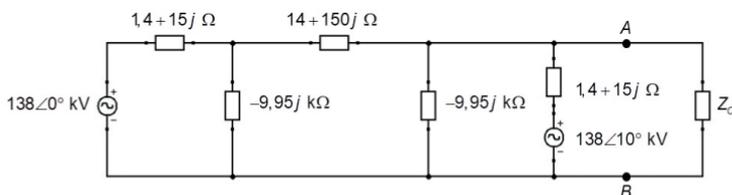
#### Descrição da situação-problema

Sistemas de geração e transmissão costumam ser de grande porte. Para fins de análise de estabilidade, muitas vezes é utilizado o circuito equivalente de Thévenin em dois terminais para analisar os efeitos de inserção de uma nova carga, ou nos terminais da máquina, por exemplo, para analisar sua estabilidade dinâmica.

Suponha que você seja técnico responsável de uma concessionária de transmissão de energia. A empresa precisa analisar o efeito da inserção de uma nova carga (subestação) entre os pontos A e B do sistema de geração e transmissão simplificado da Figura 1.42.

Como você faria para obter o equivalente de Thévenin de forma que viabilize a análise da tensão e corrente em regime permanente nos terminais destes pontos?

Figura 1.44 | Circuito de geração e transmissão para análise



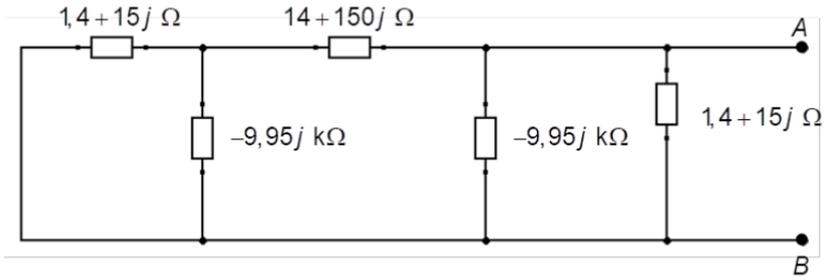
Fonte: elaborada pela autora.

#### Resolução da situação-problema

Para verificar os efeitos da inserção de uma nova carga entre os pontos A e B, é necessário obter o equivalente de Thévenin do circuito de geração e transmissão.

Primeiramente é necessário calcular a impedância equivalente de Thévenin e, para isto, curto-circuitamos as fontes de tensão (não há fontes de corrente no circuito), como mostra a Figura 1.43.

Figura 1.43 | Circuito de geração e transmissão com as fontes eliminadas



Fonte: elaborada pela autora.

Utilizando as seguintes notações, + para impedâncias em série e  $\square$  para impedâncias em paralelo, temos da esquerda para direita:

$$Z_{th} = [(1,4 + 15j) \square (-9,95j \cdot 10^3) + (14 + 150j)] \square (-9,95j \cdot 10^3) \square (1,4 + 15j) \ \Omega$$

$$Z_{th} = \left[ \frac{(1,4 + 15j)(-9,95j \cdot 10^3)}{(1,4 + 15j) + (-9,95j \cdot 10^3)} + (14 + 150j) \right] \square \left[ \frac{(-9,95j \cdot 10^3)(1,4 + 15j)}{(-9,95j \cdot 10^3) + (1,4 + 15j)} \right]$$

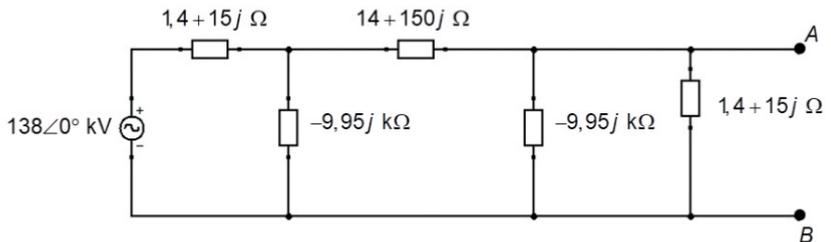
$$Z_{th} = (15,4 + 165,9j) \square (1,4 + 15,0j)$$

$$Z_{th} = 1,28 + 13,77j \ \Omega$$

Para calcular a tensão de Thévenin, vamos aplicar o teorema da superposição, calculando a tensão entre os terminais A e B devido às fontes de tensão dos geradores individualmente.

Devido à fonte da esquerda, temos o circuito representado pela Figura 1.44.

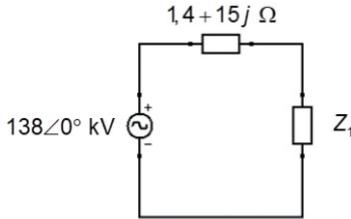
Figura 1.44 | Circuito de geração e transmissão devido a fonte de  $138\angle 0^\circ$  kV



Fonte: elaborada pela autora.

Vamos utilizar o método de redução e retorno, visto na disciplina Circuitos Elétricos, aplicado da mesma forma para circuitos CA.

Figura 1.45 | Circuito de geração e transmissão reduzido



Fonte: elaborada pela autora.

Sendo  $Z_1$  dada por:

$$Z_1 = (-9,95j \cdot 10^3) \parallel [(14 + 150j) + (-9,95j \cdot 10^3) \parallel (1,4 + 15j)]$$

$$Z_1 = (-9,95j \cdot 10^3) \parallel \left[ (14 + 150j) + \frac{(1,4 + 15j)(-9,95j \cdot 10^3)}{(1,4 + 15j) + (-9,95j \cdot 10^3)} \right]$$

$$Z_1 = (-9,95j \cdot 10^3) \parallel [(14 + 150j) + (1,4 + 15,02j)]$$

$$Z_1 = (-9,95j \cdot 10^3) \parallel (15,4 + 165,02j)$$

$$Z_1 = 15,93 + 167,78j \quad \Omega$$

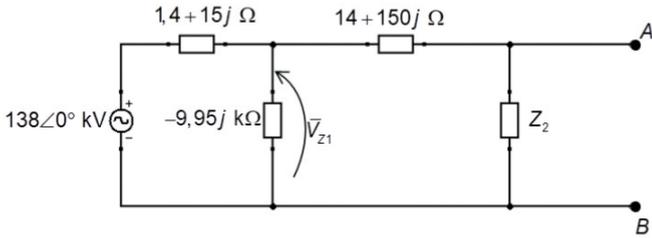
$$\bar{V}_{Z_1} = \frac{138 \cdot 10^3 \angle 0^\circ}{Z_1 + 1,4 + 15j} \cdot Z_1$$

$$\bar{V}_{Z_1} = 126,68 \angle 0^\circ \quad \text{kV}$$

A partir do cálculo da tensão em  $Z_1$ , inicia-se o retorno ao circuito da Figura 1.44 para cálculo das demais correntes e tensões necessárias, como pode ser visto na Figura 1.46.

Observe que  $\bar{V}_{AB}$ , devido à fonte de  $138 \angle 0^\circ \text{ kV}$ , corresponde à tensão na impedância  $Z_2$ , assim, após calcular a tensão na impedância  $Z_2$ , não é necessário continuar o retorno do circuito.

Figura 1.46 | Início do retorno ao circuito original



Fonte: elaborada pela autora.

Sendo  $Z_2$  dada por:

$$Z_2 = (-9,95j) \parallel (1,4 + 15j)$$

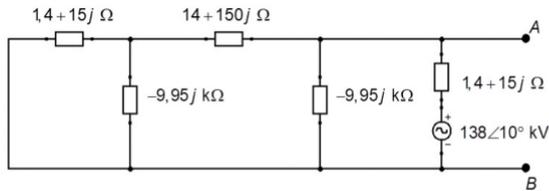
$$Z_2 = 1,4 + 15,02j \quad \Omega$$

$$\bar{V}_{AB1} = \frac{V_{Z1}}{14 + 150j + Z_2} \cdot Z_2$$

$$\bar{V}_{AB1} \cong 11,53 \angle 0^\circ \text{ kV}$$

Após obter a tensão  $\bar{V}_{AB}$ , devido à fonte de  $138 \angle 0^\circ \text{ kV}$ , vamos obter a tensão  $\bar{V}_{AB}$  devido à fonte de  $138 \angle 10^\circ \text{ kV}$ . A Figura 1.47 representa o circuito devido à fonte de tensão à direita.

Figura 1.47 | Circuito de geração e transmissão devido à fonte de  $138 \angle 10^\circ \text{ kV}$



Fonte: elaborada pela autora.

Vamos simplificar este circuito, conforme a Figura 1.48. Calculando a impedância equivalente  $Z_2$ , podemos obter a tensão  $\bar{V}_{AB}$  devido à fonte de  $138 \angle 10^\circ \text{ kV}$ , que corresponde à tensão na própria impedância  $Z_2$ .

Sendo  $Z_2$  dada por:

$$Z_2 = [(1,4 + 15j) \parallel (-9,95j \cdot 10^3) + (14 + 150j)] \parallel (-9,95j \cdot 10^3)$$

$$Z_2 = \left[ \frac{(1,4 + 15j)(-9,95j \cdot 10^3)}{(1,4 + 15j) + (-9,95j \cdot 10^3)} + (14 + 150j) \right] \parallel (-9,95j \cdot 10^3)$$

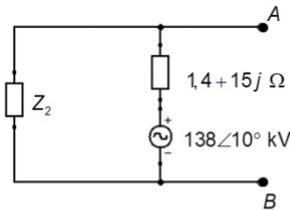
$$Z_2 = (15,4 + 165,02j) \parallel (-9,95j \cdot 10^3)$$

$$Z_2 = 15,93 + 167,78j \quad \Omega$$

$$\bar{V}_{AB2} = \frac{138 \cdot 10^3 \angle 10^\circ}{Z_2 + 1,4 + 15j} \cdot Z_2$$

$$\bar{V}_{AB2} \cong 126,68 \angle 10^\circ \text{ kV}$$

Figura 1.48 | Circuito devido à fonte de  $138 \angle 10^\circ$  kV simplificado



Fonte: elaborada pela autora

Para finalizar, basta somar as tensões devidos às fontes calculadas:

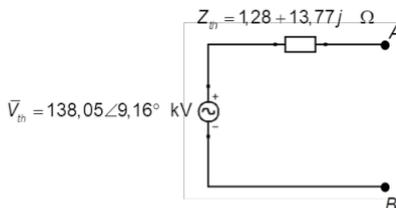
$$\bar{V}_{th} = \bar{V}_{AB1} + \bar{V}_{AB2}$$

$$\bar{V}_{th} = (11,53 \angle 0^\circ + 126,68 \angle 10^\circ) \cdot 10^3$$

$$\bar{V}_{th} = 138,05 \angle 9,16^\circ \text{ kV}$$

Portanto o circuito equivalente de Thévenin resulta na Figura 1.49.

Figura 1.49 | Circuito equivalente de Thévenin do sistema de geração e transmissão



Fonte: elaborada pela autora.

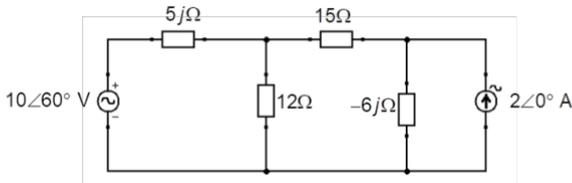
A partir deste circuito equivalente para o circuito de geração e transmissão, os efeitos da inserção de diversas cargas e fontes podem ser analisados.

## Faça valer a pena

**1.** A principal dificuldade na aplicação da análise de malhas e análise nodal é o elevado número de equações resultantes, devido à complexidade dos sistemas elétricos analisados. Uma alternativa é utilizar ferramentas computacionais, como o software SPICE, desenvolvido na Universidade da Califórnia, o qual utiliza a análise nodal para resolução de circuitos, pois trata-se de um método de fácil automatização.

Assinale a alternativa que contenha as equações nodais para o circuito ilustrado na figura a seguir:

Figura | Circuito elétrico para aplicação de análise nodal



Fonte: elaborada pela autora.

a) Nó 1:  $\left(\frac{1}{5j} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)\vec{V}_1 - \frac{1}{15}\vec{V}_2 = 2\angle -30^\circ$ ; Nó 2:  $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{-6j}\right)\vec{V}_2 - \frac{1}{15}\vec{V}_1 = 2\angle 0^\circ$ .

b) Nó 1:  $(5j + 12 + 15)\vec{V}_1 - 15\vec{V}_2 = 2\angle -30^\circ$ ; Nó 2:  $(12 + 15 - 6j)\vec{V}_2 - 15\vec{V}_1 = 2\angle 0^\circ$

c) Nó 1:  $\frac{1}{5j}\vec{V}_1 - \frac{1}{5j}\vec{V}_2 = 10\angle 60^\circ$ ; Nó 2:  $\left(\frac{1}{5j} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)\vec{V}_2 - \frac{1}{5j}\vec{V}_1 - \frac{1}{15}\vec{V}_3 = 0$ ;

Nó 3:  $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{-6j}\right)\vec{V}_3 - \frac{1}{15}\vec{V}_2 = 2\angle 0^\circ$

d) Nó 1:  $\left(\frac{1}{5j} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)\vec{V}_1 - \frac{1}{15}\vec{V}_2 = 10\angle 60^\circ$ ; Nó 2:  $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{-6j}\right)\vec{V}_2 - \frac{1}{15}\vec{V}_1 = 2\angle 0^\circ$

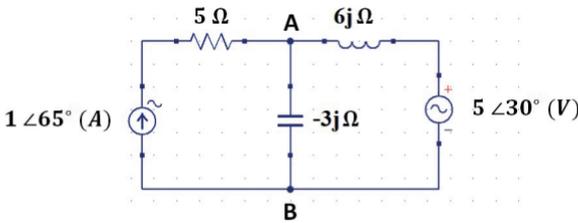
e) Nó 1:  $(5j + 12 + 15)\vec{V}_1 - 15\vec{V}_2 = 10\angle 60^\circ$ ; Nó 2:  $(12 + 15 - 6j)\vec{V}_2 - 15\vec{V}_1 = 2\angle 0^\circ$

**2.** A linearidade é uma característica muito importante presente em componentes eletrônicos. De forma geral, circuitos lineares preservam na saída a forma de onda da entrada, ou seja, se na entrada houver um sinal senoidal de frequência  $f$ , a saída também será uma onda senoidal de frequência  $f$ . Além dos elementos passivos em sistemas elétricos (R,L e C), alguns circuitos amplificadores também são lineares. Nestes circuitos, o teorema da superposição pode ser aplicado, de forma a simplificar sua análise e projeto.

Considere o circuito ilustrado na figura a seguir e escolha a alternativa que contenha os resultados para os cálculos dos seguintes itens:

- i) A tensão entre os terminais A e B utilizando o teorema da superposição.
- ii) A tensão entre os terminais A e B devido à fonte de corrente apenas.
- iii) A tensão entre os terminais A e B devido à fonte de tensão apenas.

Figura | Circuito elétrico CA com duas fontes



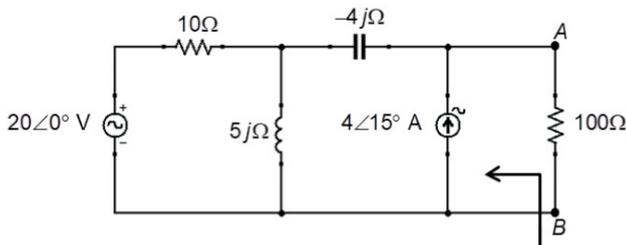
Fonte: elaborada pela autora.

- a) i)  $\vec{V}_{AB} = 5,2\angle -77,6^\circ \text{ V}$  ; ii)  $\vec{V}_{AB1} = 5\angle 210^\circ \text{ V}$  ; iii).  $\vec{V}_{AB2} = 6\angle -25^\circ \text{ V}$  .
- b) i)  $\vec{V}_{AB} = 1,1\angle -1,85^\circ \text{ V}$  ; ii)  $\vec{V}_{AB1} = 6\angle 25^\circ \text{ V}$  ; iii)  $\vec{V}_{AB2} = 5\angle 210^\circ \text{ V}$  .
- c) i)  $\vec{V}_{AB} = 1,1\angle -1,85^\circ \text{ V}$  ; ii)  $\vec{V}_{AB1} = 6\angle -25^\circ \text{ V}$  ; iii)  $\vec{V}_{AB2} = 5\angle 150^\circ \text{ V}$  .
- d) i)  $\vec{V}_{AB} = 5,2\angle 77,6^\circ \text{ V}$  ; ii)  $\vec{V}_{AB1} = 6\angle 25^\circ \text{ V}$  ; iii)  $\vec{V}_{AB2} = 5\angle 150^\circ \text{ V}$  .
- e) i)  $\vec{V}_{AB} = 5,2\angle -77,6^\circ \text{ V}$  ; ii)  $\vec{V}_{AB1} = 6\angle -25^\circ \text{ V}$  ; iii)  $\vec{V}_{AB2} = 5\angle 210^\circ \text{ V}$  .

**3.** Em sistemas elétricos de potência, é muito importante que o sistema de segurança e proteção seja devidamente projetado. Dentre as especificações tem-se que os componentes da rede, quando percorridos por correntes de curto-circuito, consigam suportar seu efeito e que os dispositivos de proteção sejam ativados para eliminar a parte do circuito defeituosa. Para esses estudos, utiliza-se o circuito equivalente de Thévenin para calcular a corrente de curto-circuito em um determinado local onde poderia ocorrer uma falha.

Com base na figura a seguir, assinale a alternativa que contenha os parâmetros do circuito equivalente de Thévenin e Norton nos terminais A e B.

Figura | Circuito elétrico para cálculo do equivalente de Thévenin e Norton



Fonte: adaptada de Sadiku (2014, p. 361).

- a)  $\bar{V}_{th} = 13,14 \angle 26,82^\circ \text{ V}$  ;  $Z_N = Z_{th} = 2\Omega$  ;  $\bar{I}_N = 6,57 \angle 26,82^\circ \text{ A}$  .
- b)  $\bar{V}_{th} = 13,14 \angle -26,82^\circ \text{ V}$  ;  $Z_N = Z_{th} = 4\Omega$  ;  $\bar{I}_N = 6,57 \angle -26,82^\circ \text{ A}$  .
- c)  $\bar{V}_{th} = 15,45 \angle 40,65^\circ \text{ V}$  ;  $Z_N = Z_{th} = 2\Omega$  ;  $\bar{I}_N = 7,73 \angle 40,65^\circ \text{ A}$  .
- d)  $\bar{V}_{th} = 15,45 \angle -40,65^\circ \text{ V}$  ;  $Z_N = Z_{th} = 4\Omega$  ;  $\bar{I}_N = 7,73 \angle -40,65^\circ \text{ A}$  .
- e)  $\bar{V}_{th} = 15,45 \angle -40,65^\circ \text{ V}$  ;  $Z_N = Z_{th} = 4\Omega$  ;  $\bar{I}_N = 3,86 \angle -40,65^\circ \text{ A}$  .

# Referências

BOLEYSTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. 12.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5.ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

\_\_\_\_\_; MUSA, S. **Análise de circuitos elétricos com aplicações**. Porto Alegre: AMGH, 2014.





# Circuitos trifásicos e análise de potência em corrente alternada

## Convite ao estudo

Olá, caro aluno!

Na unidade anterior, abordamos os conceitos básicos relacionados à sistemas de corrente alternada (CA), como impedância, frequência, valor médio, valor de pico, etc. Agora, iniciaremos os estudos sobre potência elétrica em circuitos alternados, conheceremos e compreenderemos os circuitos trifásicos e seus parâmetros.

Sabemos que em um circuito de corrente contínua a potência é igual à tensão vezes a corrente, ou  $P = U \cdot I$ . Por exemplo, se uma tensão de 100 V aplicada a um circuito produz uma corrente de 10 A, então a potência será de 1000 W. Isso também é verdade em um circuito CA quando a corrente e a tensão estão em fase, ou seja, quando o circuito é puramente resistivo. Mas, se o circuito CA contiver reatância (um elemento indutivo ou capacitivo), a corrente adiantará ou atrasará a tensão em um certo valor, conhecido como ângulo de fase. Quando a corrente está fora de fase com a tensão, a potência indicada pelo produto da tensão aplicada juntamente com a corrente total fornece o que é conhecido como Potência Aparente. A potência real ou ativa, que já conhecemos através da unidade Watts (W), depende do ângulo de fase entre a corrente e a tensão. O símbolo para o ângulo de fase é  $\theta$ . Quando uma tensão alternada é empregada em um circuito contendo um capacitor, a energia é retirada da fonte e armazenada no capacitor por meio de seu campo elétrico à medida que a tensão aumenta de zero para seu valor máximo. Então, conforme a tensão diminui

de seu valor máximo para zero, o capacitor descarrega e retorna a energia para a fonte. Da mesma forma, à medida que a corrente através de um indutor aumenta de zero para seu valor máximo, o campo magnético ao redor do indutor se eleva ao máximo e, quando a corrente diminui de máximo para zero, o campo entra em colapso retornando a energia à fonte. Podemos perceber, portanto, que nenhum consumo de energia ocorre em qualquer dos casos, já que a energia flui alternadamente do elemento passivo para a fonte. Essa energia que é retornada à fonte pelos componentes reativos no circuito é chamada de Potência Reativa.

Assim, na primeira seção abordaremos tipos de potência elétrica em um circuito CA e como a relação entre elas contribui para a qualidade da energia fornecida. Na Seção 2.2, iniciaremos os estudos sobre circuitos trifásicos, englobando tipos de conexão e cargas equilibradas. Por fim, na Seção 3.3, expandiremos o conhecimento adquirido na primeira seção sobre potência CA em circuitos trifásicos, usualmente empregados na indústria. Verificaremos assim, como medir a potência em um circuito trifásico e como é possível melhorar a qualidade de energia em uma instalação com três fases.

# Seção 2.1

## Componentes da potência instantânea

### Diálogo aberto

Olá, caro aluno. Vimos na unidade anterior a conceituação de um circuito em corrente alternada e seus parâmetros. Agora, estudaremos os tipos de potência elétrica nesse circuito frente aos elementos passivos a ele inseridos. Em um circuito puramente resistivo, toda a energia é consumida e nenhuma é retornada à fonte. Já em um circuito puramente reativo, nenhuma energia é consumida, retornando totalmente à fonte (circuito ideal). Em um circuito que contém resistência e reatância, deve haver alguma potência dissipada na resistência, assim como parte da energia que retorna à fonte pela reatância.

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, responsável pela equipe de manutenção de uma indústria, recebeu um comunicado da sua diretoria informando que a concessionária de energia elétrica passaria aplicar uma cobrança extra se as instalações industriais estivessem com um fator de potência inferior a 0,92. Para evitar o pagamento da multa, foi solicitado a você um parecer sobre o fator de potência da instalação. Então, você solicitou a um técnico que realizasse o levantamento das cargas instaladas. Como resultado, o técnico apresentou a seguinte tabela:

Tabela 2.1 | Cargas instaladas

Carga número	Potência
1	$P_1 = 500 \text{ W}$ $Q_1 = 254 \text{ VAr}$
2	$P_2 = 500 \text{ W}$ $Q_2 = 309 \text{ VAr}$
3	$P_3 = 1000 \text{ W}$ $Q_3 = 0 \text{ VAr}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo da importância do fator de potência para uma instalação elétrica e que seu baixo valor poderia ocasionar em multa, o técnico, antecipadamente, realizou o cálculo do fator de potência global como sendo uma média simples dos fatores de potência de cada carga instalada. Contudo, antes de emitir o parecer final, você como o responsável, precisa verificar se os cálculos efetuados estão corretos e, caso não estejam, deve efetuar as devidas correções.

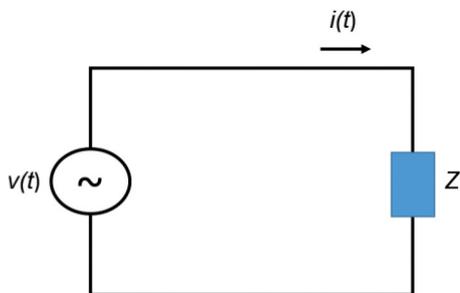
Como você realizaria essa tarefa? Quais os conceitos necessários para garantir a correta interpretação do fator de potência?

Para auxiliá-lo a responder essas questões, você estudará ao longo desta seção as diferentes formas de potência e como elas se relacionam.

## Não pode faltar

Um circuito elétrico linear, quando excitado por uma fonte senoidal, todas as tensões e correntes no circuito também são senoidais, apresentando a mesma frequência da fonte de excitação. A Figura 2.1 representa a forma geral de um circuito CA linear.

Figura 2.1 | Circuito CA



Fonte: elaborada pelo autor.

As expressões mais gerais, do circuito da Figura 2.1, para a tensão e corrente fornecidas para uma carga arbitrária são as seguintes:

$$v(t) = V \cdot \cos(\omega t - \theta_v) \quad (2.1)$$

$$i(t) = I \cdot \cos(\omega t - \theta_i) \quad (2.2)$$

$V$  e  $I$  são as amplitudes máximas (valor de pico) da tensão e de corrente senoidais, respectivamente, e  $\theta_v$  e  $\theta_i$  são os ângulos de fase. A diferença de fase entre a fonte e a carga é dada por  $\theta = \theta_v - \theta_i$ . Será mais fácil, para o propósito desta seção, assumir que  $\theta_v = 0$ , sem qualquer perda de generalidade, uma vez que todos os ângulos de fase serão referenciados à fase da tensão da fonte.

Como a potência instantânea dissipada por um elemento de circuito é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas, é possível obter uma expressão geral para a potência dissipada por um elemento do circuito CA:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (2.3)$$

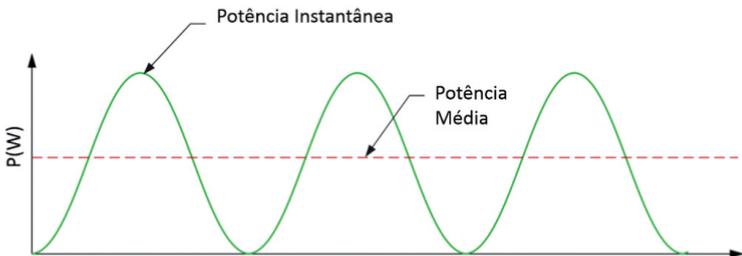
A Equação 2.3 pode ser ainda simplificada com o auxílio de identidades trigonométricas:

$$p(t) = \frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(\theta) + \frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \theta) \quad (2.4)$$

Onde  $\theta$  é a diferença entre a fase da tensão e da corrente. A Equação 2.4 ilustra como a potência instantânea dissipada por um elemento do circuito CA é igual à soma de um componente médio (potência média)  $\frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(\theta)$  e uma componente senoidal  $\frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(2\omega t - \theta)$ , oscilando a uma frequência o dobro da frequência da fonte original.

A Figura 2.2 ilustra as potências instantânea e média.

Figura 2.2 | Potência instantânea e média



Fonte: elaborada pelo autor.

A potência média correspondente aos sinais de tensão e corrente das Equações 2.1 e 2.2, que pode ser obtida integrando a potência instantânea ao longo de um ciclo do sinal senoidal. Vamos considerar que  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$  representa um ciclo do sinal senoidal.

Então, a potência média ativa  $P_m$  é dada pela integral da potência instantânea ao longo de um ciclo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt$$

$$P_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(\theta) \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{VI}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \theta) \cdot dt$$

Como a segunda integral é igual a zero e  $\cos(\theta)$  é constante, obtêm-se:

$$P_m = \frac{V \cdot I}{2} \cdot \cos(\theta) \tag{2.5}$$

Assim, a potência média absorvida por um circuito é a soma da energia armazenada e a energia retornada ao longo de um ciclo completo. Portanto, um consumo médio de energia dos circuitos será a média da potência instantânea ao longo de um ciclo completo.

A expressão para a potência instantânea dada pela Equação 2.4 pode ser expandida para fornecer mais informações sobre a potência CA. Usando identidades trigonométricas, obtemos:

$$p(t) = \frac{V^2}{|Z|} \cdot [\cos(\theta) + \cos(\theta) \cdot \cos(2\omega t) + \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(2\omega t)]$$

$$p(t) = I^2 \cdot |Z| \cdot \cos(\theta) \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + I^2 \cdot |Z| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(2\omega t) \tag{2.6}$$

Lembrando a interpretação geométrica da impedância Z, discutida na Unidade 1, você pode reconhecer que:

$$\begin{aligned} |Z| \cos(\theta) &= R \\ |Z| \text{sen}(\theta) &= X \end{aligned} \tag{2.7}$$

Os dois elementos da Equação 2.7 são as componentes resistiva e reativa da impedância da carga, respectivamente. Reescrevendo a equação 2.6, obtemos:

$$p(t) = I^2 \cdot R \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + I^2 \cdot X \cdot \text{sen}(2\omega t) \tag{2.8}$$

Como a Equação 2.8 sugere, a potência instantânea dissipada por uma carga complexa consiste nas seguintes componentes:

1. Uma componente média, que é constante:  $P_m = I^2 R$
2. Uma componente que varia no tempo (senoidal) com valor médio zero, que é contribuída pelas flutuações de potência na componente resistiva da carga:

$$p_R(t) = I^2 \cdot R \cdot \cos(2\omega t)$$

$$p_R(t) = P_m \cdot \cos(2\omega t)$$

3. Uma componente variando no tempo (senoidal) com valor médio zero devido a flutuação de potência na componente

reativa da carga:  $p_X(t) = I^2 \cdot X \cdot \text{sen}(2\omega t)$

$$p_X(t) = Q \cdot \text{sen}(2\omega t)$$

Onde  $X = \text{Im}(Z)$  e  $Q$  é chamado de potência reativa (medida em VAR).



### Assimile

Para a componente reativa, note que devido ao fato de os elementos reativos só poderem armazenar energia e não dissipá-la, não há potência média líquida absorvida pela reatância  $X$ .

Uma maneira de simplificar o cálculo da potência é definir uma quantidade fictícia, mas útil, denominada potência complexa.

$$S = \bar{V} \cdot \bar{I}^* \quad (2.9)$$

O asterisco denota um conjugado complexo. Podemos verificar facilmente que essa definição leva à expressão conveniente:

$$S = V \cdot I \cdot \cos(\theta) + j \cdot V \cdot I \cdot \text{sen}(\theta) \quad (2.10)$$

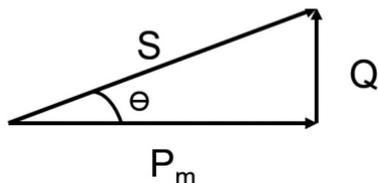
$$S = I^2 \cdot R + j \cdot I^2 \cdot X = I^2 \cdot Z \quad (2.11)$$

Ou

$$S = P_m + j \cdot Q \quad (2.12)$$

A potência complexa  $S$  pode ser interpretada graficamente como um vetor no plano complexo, conforme mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 | Triângulo de potência complexa



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da Figura 2.3 é possível obter as relações:

$$|S| = \sqrt{P_m^2 + Q^2} = V \cdot I \quad (2.13)$$

$$P_m = V \cdot I \cdot \cos(\theta) \quad (2.14)$$

$$Q = V \cdot I \cdot \sin(\theta) \quad (2.15)$$

A magnitude de  $S$ , denotada por  $|S|$ , é mensurada na unidade de Volt-Ampère (VA) e é chamada de Potência Aparente, porque esta é a quantidade que seria computada medindo a tensão e a corrente de carga *rms* (valor quadrático médio ou valor eficaz) sem considerar o ângulo de fase da carga.

A potência complexa também pode ser expressa pelo produto do quadrado da corrente *rms* através da carga e da impedância de carga complexa:  $S = I^2 \cdot Z$ .



### Refleta

Em geral, deseja-se minimizar a potência reativa na carga. Quais os efeitos da potência reativa em uma instalação elétrica?



### Assimile

A potência instantânea em um circuito é igual ao produto da tensão e corrente aplicadas através do circuito. Quando a tensão e a corrente são da mesma polaridade, elas estão atuando juntas e recebendo energia da fonte. Quando as polaridades são diferentes, elas estão agindo em oposição e a energia está sendo devolvida à fonte. Resumidamente então, em um circuito CA que contém tanto reatância quanto resistência, a potência aparente é reduzida pela energia retornada à fonte,

de modo que em tal circuito a potência líquida, ou potência ativa, é sempre menor que a potência aparente.

Vimos assim, que os circuitos CA que contêm resistência e capacitância, resistência e indutância, ou ambos, também contêm potência ativa e potência reativa. Então, para calcularmos a potência total consumida, precisamos conhecer a diferença de fase entre as formas de onda senoidais da tensão e da corrente, uma vez que suas amplitudes mudam constantemente com o tempo. Como a potência é a tensão vezes a corrente, a potência máxima ocorrerá quando as duas formas de onda, de tensão e corrente estiverem alinhadas entre si, ou seja, seus picos e pontos de cruzamento zero ocorrem ao mesmo tempo. Quando isso acontece, as duas formas de onda são consideradas "em fase" e a potência ativa consumida é a mesma que a potência aparente. No entanto, quando há uma diferença entre as formas de onda da corrente e da tensão, a potência ativa será menor do que a potência aparente. Essa diferença de fase, ou ângulo de fase define o que é conhecido por fator de potência.

Esse ângulo de fase desempenha um papel muito importante na absorção de potência. Conforme mostrado na Equação 2.14, a potência média dissipada por uma carga CA depende do cosseno do ângulo da impedância. Para reconhecer a importância desse fator nos cálculos de energia CA, o termo  $\cos(\theta)$  é chamado de fator de potência ( $fp$ ). Observe que o fator de potência é igual a 0 para uma carga puramente indutiva ou capacitiva e igual a 1 para uma carga puramente resistiva, para todos os outros casos,  $0 < fp < 1$ .

Dois expressões equivalentes para o fator de potência são dadas a seguir:

$$fp = \cos(\theta) = \frac{P_m}{V \cdot I} \quad (2.16)$$

Note que o fator de potência é uma relação entre a potência média e a potência aparente. Por meio do triângulo de potências (Figura 2.3), o fator de potência pode ser obtido facilmente.

Geralmente, o fator de potência é expresso como uma porcentagem.

Um fator de potência ruim, valor zero, consome energia, reduzindo a eficiência do circuito, enquanto um circuito ou carga

com um fator de potência mais próximo de um ou unidade (100%) será mais eficiente. Isso ocorre porque um circuito ou carga com um baixo fator de potência requer maior quantidade de corrente do que o mesmo circuito ou carga com um fator de potência mais próximo de 1 (unidade).

Sobre o fator de potência, é importante estabelecer que:

1.  $\text{Q} = 0$  para cargas resistivas, então fator de potência unitário.
2.  $\text{Q} < 0$  para cargas capacitivas, então fator de potência adiantado.
3.  $\text{Q} > 0$  para cargas indutivas, então fator de potência atrasado.



### Exemplificando

Uma carga industrial consome 100 kW a  $\text{fp}=0,707$ . A tensão de linha (60 Hz) na carga é de 480 V (referência). A resistência da linha de transmissão entre o transformador da empresa de energia e a carga é de  $0,1 \Omega$ . Se o fator de potência fosse alterado para 0,94 atrasado, seria possível obter uma economia de energia.

Com fator de potência 0,707:

$$P_{0,707} = VI \cos(\theta)$$

$$I = \frac{P_{0,707}}{V \cos(\theta)}$$

$$I = \frac{100\text{k}}{480 \cdot 0,707} = 295 \text{ A}$$

Assim, as perdas na linha podem ser calculadas como:

$$P_{\text{perdas}_{0,707}} = R \cdot I^2 = 0,1 \cdot 295^2 = 8702 \text{ W}$$

Com fator de potência 0,94:

$$P_{0,94} = VI \cos(\theta)$$

$$I = \frac{100\text{k}}{480 \cdot 0,94} = 221 \text{ A}$$

Assim, as perdas na linha podem ser calculadas como:

$$P_{\text{perdas}_{0,94}} = R \cdot I^2 = 0,1 \cdot 221^2 = 4884 \text{ W}$$

Portanto ocorreu uma redução de  $P_{\text{redução}} = 8702 - 4884 = 3818 \text{ W}$



Para saber mais sobre potência em circuitos CA, faça uma leitura do Capítulo 11 do livro indicado na referência a seguir.

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O., **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

Relembrando que você, responsável pela equipe de manutenção de uma indústria, recebeu um importante comunicado da sua diretoria quanto a necessidade de averiguar o fator de potência da instalação, uma vez que a concessionária de energia elétrica aplicaria multa para os casos em que o fator estivesse abaixo do valor 0,92. Para evitar o pagamento da multa, foi solicitado a você um parecer sobre o fator de potência, no qual deveria constar se a instalação atende ou não o valor do fator de potência de 0,92.

Dessa forma, você solicitou a um técnico que realizasse o levantamento das cargas instaladas. Como resultado, o técnico apresentou a seguinte tabela:

Tabela 2.1 | Cargas instaladas

Carga número	Potência
1	$P_1 = 500 \text{ W}$ $Q_1 = 254 \text{ VAR}$
2	$P_2 = 500 \text{ W}$ $Q_2 = 309 \text{ VAR}$
3	$P_3 = 1000 \text{ W}$ $Q_3 = 0 \text{ VAR}$

Além disso, o técnico calculou o fator de potência como sendo a média simples dos fatores de potência de cada carga, obtendo então:

Fator de potência para a carga 1:

$$fp_1 = \frac{500}{\sqrt{500^2 + 254^2}} \approx 0,89$$

Fator de potência para a carga 2:

$$fp_2 = \frac{500}{\sqrt{500^2 + 309^2}} \approx 0,85$$

Fator de potência para a carga 3:

$$fp_3 = \frac{1000}{\sqrt{1000^2 + 0^2}} = 1,0$$

Fator de potência global:

$$fp_g = \frac{fp_1 + fp_2 + fp_3}{3} = \frac{0,89 + 0,85 + 1}{3} \approx 0,91$$

Portanto, de acordo com o técnico, a instalação apresenta um fator de potência abaixo do exigido, o que implicaria a necessidade de realização de uma adequação na instalação de modo a elevar o fator de potência.

No entanto, a forma como o fator de potência foi calculada, apresenta problemas quando analisamos o fator de potência global, pois, o fator de potência ao estar atrelado diretamente a relação "potência ativa e potência aparente", exige primeiramente somar cada tipo de potência para depois estabelecer o fator de potência global, ou seja:

$$P_{total} = P_1 + P_2 + P_3 = 2000 \text{ W}$$

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 563 \text{ VAR}$$

Utilizando o triângulo de potência da Figura 2.3 obtemos o valor da potência aparente total:

$$|S_{total}| = \sqrt{P_{total}^2 + Q_{total}^2} = \sqrt{2000^2 + 563^2} \approx 2078 \text{ VA}$$

$$fp_g = \frac{P_{total}}{|S_{total}|} = \frac{2000}{2078} \approx 0,96$$

Portanto, observa-se que o sistema está operando em acordo com as exigências referentes ao fator de potência. Nenhuma correção é necessária para a carga atual, estando o fator de potência da instalação acima do valor exigido de 0,92, então, essa informação deve constar no parecer que lhe foi solicitado. É importante destacar que um cálculo incorreto do fator de potência pode levar a:

- Gastos desnecessários com equipamentos.
- Tornar o fator de potência capacitivo e abaixo do valor permitido.

### Qualidade de energia

#### Descrição da situação-problema

Para ampliarmos a aplicação do conhecimento adquirido nesta seção, considere a seguinte situação: você, um recém contratado de uma concessionária de energia, foi designado a realizar o levantamento do fator de potência de uma indústria. Esse levantamento é de fundamental importância para a empresa, pois um baixo fator de potência mostra que suas linhas de distribuição de energia elétrica estão transportando potência reativa ao invés de potência ativa tarifada. Além disso, o baixo fator de potência pode vir a provocar sobrecarga em cabos e transformadores da empresa, além de aumentar as perdas, reduzir a tensão e ainda danificar dispositivos de proteção.

Ao realizar a vistoria, você identificou que o fator de potência atual da indústria em questão é de 0,75. Imediatamente, você comunicou a indústria da necessidade de melhorias para que muitas não fossem aplicadas. A indústria então requisitou um relatório no qual deve comprovar o valor do fator de potência identificado e que levou a conclusão de que o fator de potência baixo prejudica a concessionária.

Assim, para que atender à solicitação da indústria e mostrar que o fator de potência em suas instalações onera a concessionária, quais os cálculos são necessários incluir no relatório solicitado? Sabendo-se que a carga industrial consome 88 kW, a tensão é de 480 V (referência) e que a resistência da linha de transmissão do transformador da empresa de energia para a planta é de  $0,08 \Omega$ .

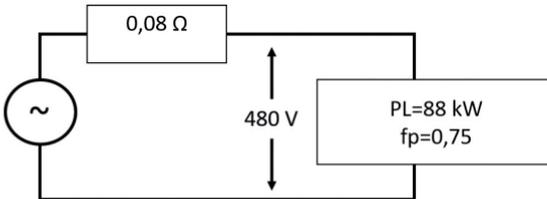
#### Resolução da situação-problema

Lembre-se de que você precisa solucionar o problema apresentando corretamente os cálculos que levam a conclusão de que o baixo fator de potência prejudica a concessionária. Para isso, vamos dividir o problema em dois: i) fator de potência atual e ii) fator de potência desejado.

i) Fator de potência atual:

O circuito equivalente para essas condições é mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 | Circuito equivalente



Fonte: elaborada pelo autor.

Inicialmente, precisamos obter a corrente que a instalação da indústria demanda da concessionária:

$$I = \frac{88000}{480 \cdot 0,75} = 244,4 \text{ A}$$

A potência que a concessionária precisa fornecer para a indústria apresenta duas componentes, uma é a carga da indústria propriamente dita e a outra as perdas ôhmicas nas linhas. Assim, a potência total fornecida é:

$$P_{\text{empresa energia}} = P_{\text{carga}} + RI^2 = 88000 + 0,08 \cdot 244,4^2 = 92778,5 \text{ W}$$

ii) Fator de potência adequado (mínimo de 0,92 por lei)

$$I = \frac{88000}{480 \cdot 0,92} = 199,28 \text{ A}$$

A potência que deve ser fornecida pela empresa de energia (potência da carga somada as perdas ôhmicas) é:

$$P_{\text{empresa energia}} = P_{\text{carga}} + RI^2 = 88000 + 0,08 \cdot 199,28^2 = 91177 \text{ W}$$

Observe que, no primeiro caso, a empresa de energia deve fornecer aproximadamente 93 kW para atender a carga 88 kW da indústria. No entanto, no segundo caso, a empresa de energia precisa gerar cerca de 91,17 kW para fornecer à indústria a mesma potência de 88 kW. Essa diferença indica então, que a concessionária perde energia ao atender a indústria. Portanto, há a necessidade de melhorias na planta industrial ou a concessionária pode aplicar sobretaxas pela energia perdida.

## Faça valer a pena

**1.** Nos circuitos CA, o fator de potência é a razão entre a potência ativa usada para realizar o trabalho e a potência aparente que é fornecida ao circuito. O fator de potência pode obter valores no intervalo de 0 a 1. Quando toda a potência é reativa, sem potência ativa (geralmente carga indutiva), o fator é 0. Quando toda a potência é energia real, sem potência reativa (carga resistiva), o fator é 1.

Assinale a alternativa que tenha o valor da potência ativa de um motor monofásico de indução que apresenta em sua placa os seguintes dados:  $|S|=3$  kVA,  $\text{fp}=0,85$ .

- a) 1750 W.
- b) 2550 W.
- c) 2770 W.
- d) 3452 W.
- e) 3529.

**2.** A potência dissipada por uma carga é referida como potência ativa, enquanto a potência absorvida e depois devolvida ao circuito devido às suas propriedades reativas é denominada potência reativa. Por fim, a potência total em um circuito CA é chamada de potência aparente.

Sobre as unidades desses três tipos de potência, marque V para verdadeiro ou F para falso:

- ( ) A unidade de potência ativa é o Volt-Ampère (W)
- ( ) A unidade de potência reativa é o Volt-Ampère reativo (VAr)
- ( ) A unidade de potência reativa é o Watt (W)

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V – V – F.
- b) V – F – F.
- c) F – V – V.
- d) F – V – F.
- e) V – F – V.

**3.** A Potência Reativa pode ser melhor descrita como a quantidade de energia “não utilizada”, que é desenvolvida por componentes reativos em um circuito ou sistema CA. Essa potência não é realmente energia, mas representa o produto de tensão e corrente que estão fora de fase

um com o outro. A potência reativa é a parte da eletricidade que ajuda a estabelecer e sustentar os campos elétricos e magnéticos exigidos pelos equipamentos de corrente alternada.

Sobre equipamentos que necessitam de potência reativa, podem ser citados:

I. Motores elétricos.

II. Transformadores.

III. Aquecedores resistivos.

É correto o que se afirma em.

a) I.

b) II.

c) I e II.

d) I e III.

e) II e III.

## Seção 2.2

### Circuitos trifásicos equilibrados

#### Diálogo aberto

Olá, caro aluno.

Nesta seção adicionamos uma nova dimensão ao nosso estudo de circuitos elétricos CA em regime permanente. Até este ponto, lidamos com o que nos referimos como circuitos monofásicos. Agora estenderemos nossas técnicas de análise para circuitos trifásicos (isto é, circuitos contendo três fontes de tensão separadas entre si de  $120^\circ$ ). Tais sistemas são mais eficientes e econômicos do que os sistemas monofásicos ou bifásicos, pois utilizam menor quantidade de material no condutor para transmitir energia elétrica. Esse tipo de circuito é o mais usado para alimentar motores grandes e cargas de alta potência. Como benefícios, podemos citar:

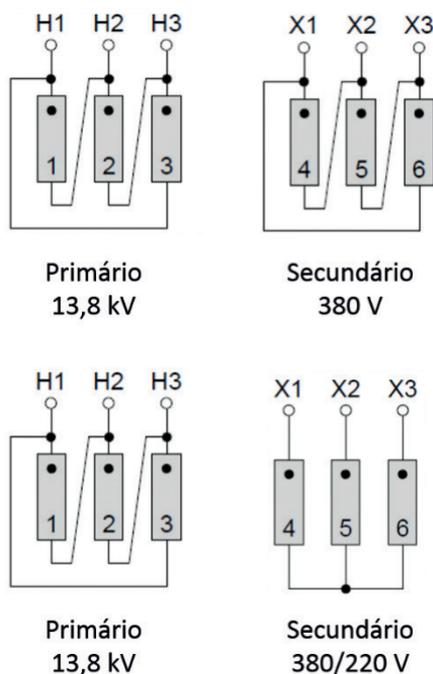
- As correntes de fase se cancelam mutuamente, somando-se a zero no caso de uma carga linear balanceada. Isso permite que o condutor neutro apresente um tamanho menor.
- As vibrações do gerador e do motor são reduzidas porque a transferência de energia é constante.
- Os sistemas de circuito trifásico podem produzir um campo magnético rotativo com uma direção especificada e magnitude constante, e isso permite um projeto simplificado de motores elétricos.

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, responsável pela equipe de manutenção de uma indústria, precisa definir como os enrolamentos do novo transformador trifásico, recém adquirido, serão ligados de modo a ser possível sua conexão com a rede, além de permitir o correto funcionamento das cargas.

Uma conexão errada pode danificar o próprio transformador ou então as cargas a ele conectadas. Assim, uma decisão incorreta pode gerar um prejuízo duplo para indústria: perda de equipamentos e paralização das atividades produtivas.

Para decidir quais as ligações dos lados primário e secundário do transformador, as informações disponíveis na placa de identificação são as mostradas na Figura 2.5:

Figura 2.5 | Ligações possíveis do transformador



Fonte: elaborada pelo autor

Além das informações contidas na placa do transformador, foram levantadas por sua equipe outras informações que devem ser consideradas na decisão da conexão dos enrolamentos do transformador, conforme a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 | Dados da instalação industrial

Descrição	Tensão / Frequência
Rede elétrica	13,8 kV / 60 Hz
Carga 1 – Motor elétrico trifásico com bobinas em Y-4fios:	15 HP / 380 V

Descrição	Tensão / Frequência
Carga 2 – Estufa resistiva em $\Delta$ :	2,5 kW / 220 V
Carga 3 – Equipamento indutivo em $\Delta$ :	5 kVA / 220 V

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo da importância da correta ligação dos enrolamentos do transformador e dos equipamentos a ele conectados, como você ligaria o transformador e as cargas?

Para auxiliá-lo a responder esta questão, você estudará ao longo desta seção os circuitos trifásicos e suas características. Bons estudos!

## Não pode faltar

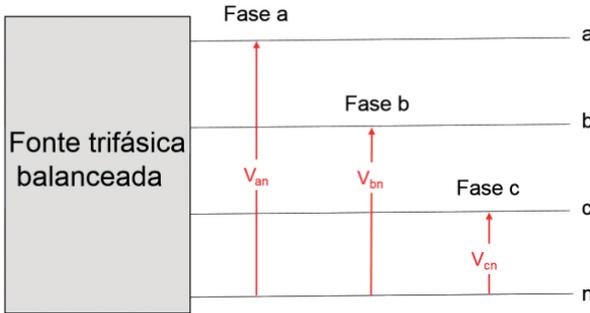
Estudamos circuitos trifásicos por vários motivos importantes. É mais vantajoso e econômico gerar e transmitir energia elétrica no modo polifásico do que com sistemas monofásicos. Em um sistema trifásico, o peso dos condutores e outros componentes é menor do que em um sistema monofásico que fornece a mesma quantidade de energia. Como resultado, a maior parte da energia elétrica é transmitida em circuitos polifásicos. No Brasil, a frequência do sistema de potência é 60 Hz, enquanto em outras partes do mundo é comum o uso de 50 Hz.

A fonte de tensão polifásica mais importante é a fonte trifásica balanceada, sendo utilizada em larga escala em indústrias e para a transmissão de energia em longas distâncias, por exemplo.

Como o nome indica, os circuitos trifásicos são aqueles em função de um sistema trifásico de tensões. Se as três tensões senoidais tiverem a mesma magnitude e frequência e cada tensão estiver  $120^\circ$  fora de fase uma com as outras duas, as tensões serão balanceadas. Se as cargas são tais que as correntes produzidas pelas tensões também são balanceadas, todo o circuito é referido como um circuito trifásico balanceado. Essa fonte, como ilustrado pela Figura 2.6, possui as seguintes tensões de fase, isto é, tensões de linha em relação ao neutro, dadas por:

$$\begin{aligned}
 V_{an} &= V_f \angle 0^\circ \text{ [V]} \\
 V_{bn} &= V_f \angle 120^\circ \text{ [V]} \\
 V_{cn} &= V_f \angle 240^\circ \text{ ou } V_{cn} = V_f \angle -120^\circ \text{ [V]}
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

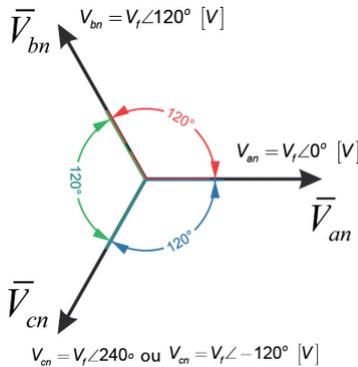
Figura 2.6 | Tensões trifásicas balanceadas



Fonte: elaborada pelo autor.

O diagrama fasorial dessas tensões é mostrado na Figura 2.7.

Figura 2.7 | Diagrama fasorial para um sistema trifásico balanceado



Fonte: elaborada pelo autor.

A sequência de fase desse conjunto é abc ou sequência de fase positiva, significando que  $\vec{V}_{bn}$  está defasado de  $120^\circ$  de  $\vec{V}_{an}$ . Padronizaremos nossa notação e aqui sempre abordaremos as

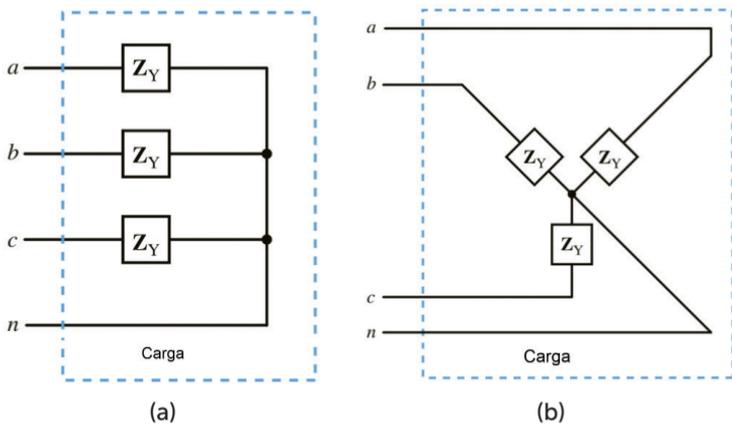
tensões  $\bar{V}_{an}$ ,  $\bar{V}_{bn}$  e  $\bar{V}_{cn}$  como obedecendo a sequência abc. Além disso, normalmente assumimos sem perda de generalidade que  $\angle \bar{V}_{an} = 0^\circ$ . Uma importante propriedade de um sistema de tensões equilibradas é:

$$\bar{V}_{an} + \bar{V}_{bn} + \bar{V}_{cn} = 0 \quad (2.18)$$

Essa propriedade pode ser facilmente verificada resolvendo-se os fasores de tensão em componentes ao longo dos eixos real e imaginário.

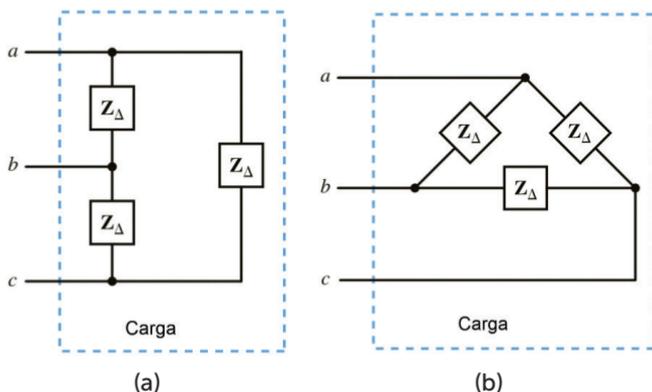
Do ponto de vista do usuário que conecta uma carga à fonte de tensão trifásica balanceada, não é importante como as tensões são geradas. É relevante notar, no entanto, que se as correntes de carga geradas pela conexão de uma carga à fonte de energia, mostrada na Figura 2.6, também estiverem balanceadas, há duas configurações equivalentes possíveis para a carga: i) configuração em estrela (ou Y) ou ii) delta ( $\Delta$  ou triângulo). A configuração balanceada em estrela é mostrada na Figura 2.8 (a) e a equivalente na Figura 2.8 (b). A configuração balanceada delta é mostrada na Figura 2.9 (a) e seu equivalente na Figura 2.9 (b).

Figura 2.8 | Carga conectada em estrela (Y) (a) configuração balanceada (b) conexão alternativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2.9 | Carga conectada em delta (a) configuração balanceada (b) conexão alternativa



Fonte: elaborada pelo autor.



### Refleta

Observe que, no caso da conexão delta, não há linha para o neutro, o que acontece na conexão estrela. No entanto, em um circuito balanceado ela pode ser omitida para fins de análise. Por que a linha do neutro pode ser omitida em um sistema balanceado?

As conexões em estrela e delta têm suas vantagens. No caso da ligação em estrela, temos acesso a duas tensões, linha a linha e linha a neutro, e fornece um local conveniente para se conectar ao aterramento para proteção do sistema. Isto é, limita a magnitude das tensões de surto. No caso delta, esta configuração fica melhor balanceada ao servir cargas desequilibradas, e é capaz de capturar a terceira harmônica. A presença de harmônicos em sistemas elétricos significa que a corrente e a tensão estão distorcidas e se desviam das formas de onda senoidais.

As correntes harmônicas são causadas por cargas não lineares conectadas ao sistema de distribuição. Diz-se que uma carga não é linear quando a corrente que ela desenha não tem a mesma forma de onda que a tensão de alimentação. O fluxo de correntes harmônicas através das impedâncias do sistema, por sua vez, cria harmônicos de tensão, que distorcem a tensão de alimentação. Como a fonte e a carga podem ser conectadas em Y ou em Delta,

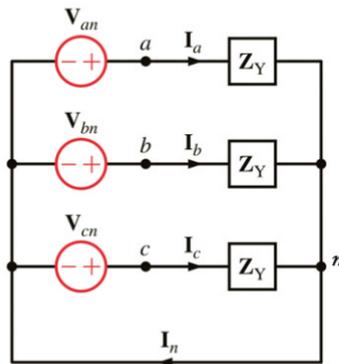
circuitos balanceados trifásicos podem ser conectados em Y-Y, Y-Delta, Delta-Y ou Delta-Delta.

Vamos analisar duas dessas conexões, a conexão Y-Y e a conexão Y-Delta.

### Conexão Y-Y

Suponha agora que tanto a fonte quanto a carga estejam conectadas em estrela, como mostrado na Figura 2.10.

Figura 2.10 | Conexão Y-Y balanceada



Fonte: elaborada pelo autor.

As tensões de fase com sequência de fase positiva são:

$$\bar{V}_{an} = V_f \angle 0^\circ$$

$$\bar{V}_{bn} = V_f \angle -120^\circ$$

$$\bar{V}_{cn} = V_f \angle +120^\circ$$

(2.19)



### Assimile

Embora tenhamos um sistema trifásico composto de três fontes e três cargas, podemos analisar uma fase única e usar a sequência de fases para obter as tensões e correntes nas outras fases. Este é, naturalmente, um resultado direto da condição equilibrada. Podemos até ter impedâncias presentes nas linhas, no entanto, enquanto o sistema permanecer equilibrado, precisamos analisar apenas uma fase. Se as impedâncias das linhas a, b e c forem iguais, o sistema será balanceado.

Na Equação 2.19,  $V_f$  é a magnitude da tensão de fase. A tensão linha-linha, ou simplesmente tensão de linha, pode ser calculada utilizando o LKT, por exemplo:

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn}$$

$$\vec{V}_{ab} = V_f \angle 0^\circ - V_f \angle -120^\circ$$

$$\vec{V}_{ab} = V_f - V_f \cdot \left[ -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\vec{V}_{ab} = V_f - V_f \cdot \left[ -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

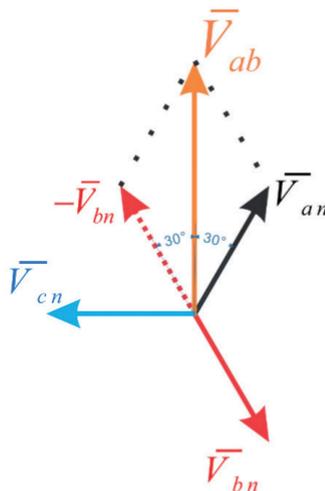
$$\vec{V}_{ab} = V_f \cdot \left[ \frac{3}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\vec{V}_{ab} = V_f \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right] \angle \left( \tan^{-1} \left( \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right) \right) = \sqrt{3} \cdot V_f \angle 30^\circ$$

(2.20)

Essa soma fasorial é ilustrada na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Soma fasorial – Tensão de linha  $\vec{V}_{ab}$



Fonte: elaborada pelo autor.

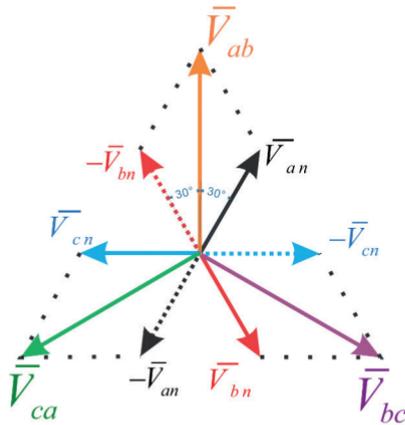
De maneira similar, nós obtemos o conjunto de tensões de linha como:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle 30^\circ \\ \bar{V}_{bc} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle -90^\circ \\ \bar{V}_{ca} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle -210^\circ\end{aligned}\quad (2.21)$$

Todas as tensões de linha, juntamente com as tensões de fase, são mostradas na Figura 2.12. Vamos denotar a magnitude das tensões de linha como  $V_L$  e, portanto, para um sistema balanceado:  $V_L = \sqrt{3} \cdot V_f$ .

Assim, em um sistema conectado em estrela, a tensão da linha é igual a  $\sqrt{3}$  vezes a tensão de fase. Além disso, a tensão de fase está atrasada de  $30^\circ$  em relação a tensão de linha.

Figura 2.12 | Representação fasorial de tensões de fase e de linha em um sistema equilibrado estrela-estrela



Fonte: elaborada pelo autor.

Como visto na Figura 2.10, a corrente de linha para a fase "a" é:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{an}}{Z_Y} = \frac{V_f \angle 0^\circ}{Z_Y} \quad (2.22)$$

As correntes nas demais fases  $\bar{I}_b$  e  $\bar{I}_c$ , apresentam a mesma magnitude de  $\bar{I}_a$ , mas defasadas de  $120^\circ$  e  $240^\circ$ , respectivamente. A corrente de neutro  $\bar{I}_n$  é então:

$$\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0 \quad (2.23)$$

Como não há corrente no neutro, este condutor pode conter qualquer impedância ou pode ser um circuito aberto ou curto, sem alterar os resultados encontrados anteriormente.

Outro importante resultado obtido da Figura 2.10 é que a corrente na linha que conecta a fonte à carga é a mesma corrente de fase que flui através da impedância  $Z_Y$ . Portanto, em uma conexão em estrela  $I_L = I_Y$ , onde  $I_L$  é a magnitude da corrente de linha e  $I_Y$  é a magnitude da corrente na carga conectada em estrela (Y).



### Exemplificando

Uma fonte de tensão trifásica de sequência *abc* conectada em estrela balanceada possui uma tensão de linha de  $\bar{V}_{ab} = 208\angle -30^\circ \text{ V}$ . Deseja-se obter as magnitudes das tensões de fase.

#### Resolução:

A magnitude da tensão de fase é dada por:

$$V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

Também sabemos que a tensão de fase está atrasada de  $30^\circ$  em relação a tensão de linha, logo:

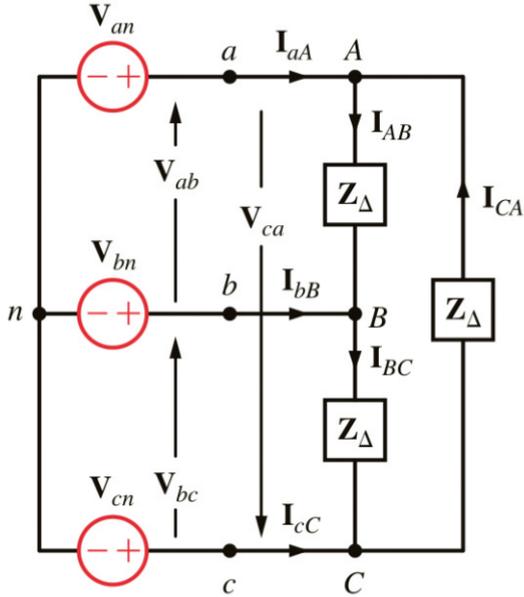
$$\bar{V}_{an} = 120\angle -60^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_{bn} = 120\angle -180^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_{cn} = 120\angle +60^\circ \text{ V}$$

## Conexão Y-Delta

Considere agora a carga conectada como mostrada na Figura 2.13.



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que, nessa conexão, a tensão linha a linha é a tensão em cada impedância de carga. Se as tensões de fase da fonte forem como mostradas na Equação 2.19, então as tensões de linha são:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ab} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ = \bar{V}_{AB} \\ \bar{V}_{bc} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle -90^\circ = V_L \angle -90^\circ = \bar{V}_{BC} \\ \bar{V}_{ca} &= \sqrt{3} \cdot V_f \angle -210^\circ = V_L \angle -210^\circ = \bar{V}_{CA} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Onde  $V_L$  é a magnitude da tensão de linha na carga conectada em delta e na fonte, uma vez que não há impedância de linha presente na rede.

Ainda analisando a Figura 2.13, notamos que a corrente na carga é:

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{ab}}{Z_\Delta} \quad (2.25)$$

Sendo que  $\bar{I}_{BC}$  e  $\bar{I}_{CA}$  apresentam a mesma magnitude de  $\bar{I}_{AB}$ , porém atrasadas  $120^\circ$  e  $240^\circ$  respectivamente. Ao aplicar a lei de Kirchhoff para corrente, obtemos:

$$\bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_{AC} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} \quad (2.26)$$

Finalmente, usando a mesma abordagem empregada anteriormente para determinar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase em uma conexão Y-Y, podemos mostrar que a relação entre as magnitudes das correntes de fase na carga conectada em Delta e a corrente de linha correntes é:  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_f$ .

Então, dizemos que a corrente de linha é  $\sqrt{3}$  vezes maior que a corrente de fase e está atrasada  $30^\circ$ .



### Pesquise mais

Para saber mais sobre potência em circuitos CA, leia o Capítulo 12, seção 12.2 até seção 12.5, do livro Fundamentos de Circuitos Elétricos.

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

## Sem medo de errar

Relembrando que você, responsável pela equipe de manutenção de uma indústria, precisa definir como os enrolamentos do novo transformador trifásico, recém adquirido, serão ligados de modo a ser possível sua conexão com a rede, além de permitir o correto funcionamento das cargas. Sob sua responsabilidade, está a integridade do transformador, bem como de todas as cargas que a ele serão instaladas. Assim, uma decisão incorreta pode gerar um prejuízo duplo para indústria: perda de equipamentos e paralização das atividades produtivas.

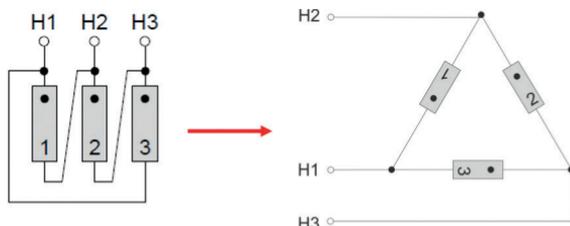
Para decidir quais as ligações dos lados primário e secundário do transformador, as informações disponíveis na placa de identificação são as mostradas na Figura 2.5.

Além das informações contidas na placa do transformador, foram levantadas por sua equipe outros dados que devem ser considerados na decisão da conexão dos enrolamentos do transformador, conforme mostrado na Tabela 2.2.

Ao analisar a placa de identificação do transformador, nota-se que os enrolamentos do lado primário devem obrigatoriamente ser

conectados em Delta (triângulo), como pode ser identificado na Figura 2.14.

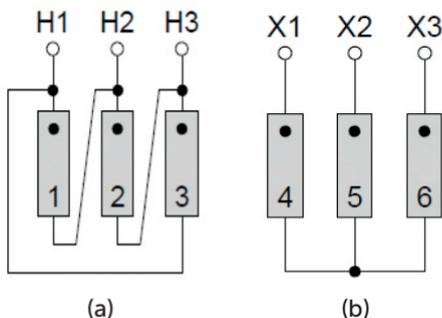
Figura 2.14 | Conexão do primário do transformador



Fonte: elaborada pelo autor.

Já os enrolamentos do secundário permitem tanto uma conexão delta (Figura 2.15 (a)), quanto uma ligação Y. A conexão Y pode ser facilmente identificada pelo ponto comum 4-5-6, de acordo com a Figura 2.15 (b).

Figura 2.15 | Conexão possível para o secundário (a) Conexão Delta e (b) Conexão Y.



Fonte: elaborada pelo autor.

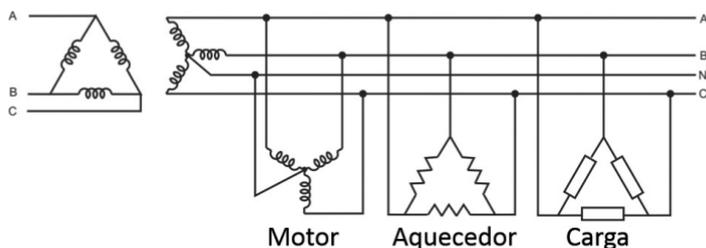
Então, a correta ligação do secundário do transformador depende das cargas que serão conectadas.

A carga 1, necessita ser ligada de forma que sua tensão de linha seja 380 V, além de possuir suas bobinas conectadas em Y. Por outro lado, as cargas 2 e 3 devem ser atendidas por uma tensão

de 220 V (ambas configuradas em delta). Sabemos que a ligação delta apenas possibilita um valor para a tensão, a tensão de linha, enquanto a conexão em Y permite dois valores para a tensão, isto é, uma tensão de linha e outra de fase, sendo a tensão de linha  $\sqrt{3}$  vezes maior que a tensão de fase.

Portanto, o secundário do transformador deve ser ligado em Y, garantindo assim a segurança e a integridade de todos os equipamentos. A Figura 2.16 ilustra a conexão do transformador com as cargas.

Figura 2.16 | Ligação do transformador com as cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

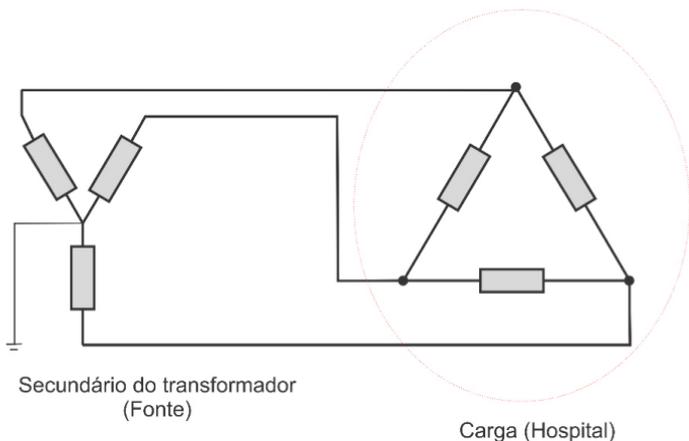
## Avançando na prática

### Identificação trifásica

#### Descrição da situação-problema

Para ampliarmos a aplicação do conhecimento adquirido nesta seção, considere a seguinte situação: após vários desligamentos de energia em áreas de alta complexidade e extrema importância hospitalar, como UTIs (Unidade de Tratamento Intensivo) e centro cirúrgico, um hospital o contratou para que fosse identificado o motivo pelo qual o sistema de proteção da instalação elétrica atua constantemente, desligando áreas críticas. Além disso, o hospital deseja que uma solução eficaz seja fornecida, de maneira a garantir que óbitos não venham a ocorrer devido aos desligamentos indevidos em equipamentos. Para contribuir com a investigação da causa do problema, a equipe de manutenção do hospital forneceu os esquemas elétricos da instalação e, resumidamente, foi apresentada a conexão do secundário do transformador trifásico e a carga, conforme Figura 2.17.

Figura 2.17 | Representação da instalação (secundário do transformador e carga)



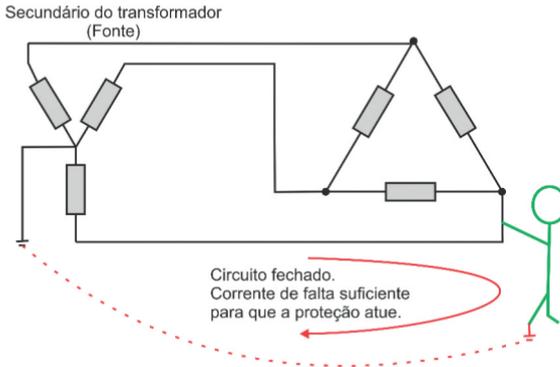
Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, para atender à solicitação do hospital e garantir que desligamentos não ocorram, como você solucionaria esse problema crítico? Quais procedimentos devem ser adotados de modo a evitar que o sistema de proteção atue sempre que ocorrer uma falta para terra, por menor que seja?

### Resolução da situação-problema

Lembre-se que você precisa encontrar uma solução para os constantes desligamentos das áreas críticas do hospital. Para isso, precisamos entender qual o tipo de ligação elétrica do hospital. A Figura 2.17 indica que é uma instalação com uma conexão terra. Nesse tipo de instalação, qualquer falta que vier a ocorrer, ou se alguma pessoa acidentalmente tocar alguma das três fases, o sistema de proteção atuará, isolando a falta e, conseqüentemente, desligando possivelmente áreas críticas do hospital. A atuação da proteção ocorre, pois há um caminho fechado para a corrente de falta fluir e retornar para a fonte. A Figura 2.18 ilustra essa situação.

Figura 2.18 | Circuito para a corrente de falta



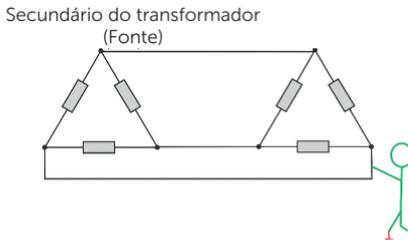
Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, conclui-se que circuitos de alimentação aterrados só devem ser utilizados para alimentação de equipamentos que não estão associados à sustentação da vida, uma vez que a proteção desses circuitos atuará eficientemente desligando o circuito.

Para contornar essa situação, é necessário que o hospital realize a troca do sistema aterrado por um sistema não aterrado, ou seja, um sistema flutuante, o qual evita que desligamentos repentinos venham a ocorrer, sendo ideal para o caso hospitalar.

O hospital pode, por exemplo, atualizar seu circuito para uma ligação Delta-Delta. Nessa ligação, a magnitude da corrente de falta em um primeiro curto circuito fase-terra é muito pequena, dependendo da tensão do sistema, da resistência do componente causador e das capacitâncias do sistema. Vamos considerar o circuito Delta-Delta da Figura 2.19.

Figura 2.19 | Circuito Delta-Delta



Fonte: elaborada pelo autor.

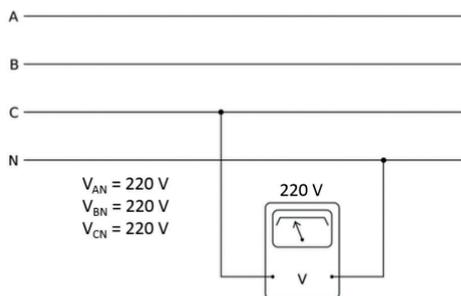
Se um objeto aterrado com baixa resistência tocar um condutor energizado, o fluxo de corrente resultante será insignificante. O laço de falha de aterramento ficará incompleto porque o caminho de retorno para a fonte está ausente. O aterramento só pode ocorrer através da capacitância de fuga do sistema para terra. A corrente resultante possível também é conhecida como corrente de carga.

Assim, em uma única falta fase-terra, os sistemas não aterrados não produzirão a quantidade de corrente de falta necessária para desarmar uma proteção comum. No entanto, se uma segunda falta acontecer simultaneamente, o sistema de proteção atuará, pois, um caminho de retorno passará a existir. Dessa forma, é necessário que, além de um sistema flutuante, o hospital também instale um dispositivo para detectar falhas de aterramento em sistemas não aterrados, para que essa falta seja rapidamente sanada antes que outra possa ocorrer.

## Faça valer a pena

**1.** Em um estabelecimento trifásico, um eletricista foi chamado para realizar uma manutenção preventiva. No entanto, não havia informações adequadas sobre a tensão fornecida ao local. Assim, o eletricista com o auxílio de um voltímetro realizou o procedimento mostrado na figura a seguir para identificar os corretos valores das tensões.

Figura 2.20 | Medição da tensão



Fonte: elaborada pelo autor.

Sobre o procedimento realizado pelo electricista e o valor obtido, assinale a alternativa correta.

- a) A tensão de linha é igual a  $220 \text{ V}$ .
- b) A tensão de linha é igual a  $\frac{220}{\sqrt{3}} \text{ V}$ .
- c) A tensão de fase é igual a  $220 \text{ V}$ .
- d) A tensão de fase é igual a  $220 \cdot \sqrt{3} \text{ V}$ .
- e) A tensão de fase é igual a  $\frac{220}{\sqrt{3}} \text{ V}$ .

**2.** Ao ser contratado para realizar uma instalação trifásica em uma pequena fábrica, um técnico recebeu as seguintes informações sobre as cargas:

1. Um motor de indução trifásico de  $5 \text{ kW}$  e fator de potência  $0,85$ .
2. Dois equipamentos monofásicos puramente resistivos de  $6,25 \text{ kW}$  cada.
3. Uma carga monofásica de  $5 \text{ kW}$  e fator de potência  $0,8$ .

Além disso, foi informado que as cargas devem ser instaladas de modo a garantir um sistema balanceado.

Sobre a distribuição das cargas entre as fases "abc", analise as afirmações a seguir:

- I. Considerando que as bobinas do motor são exatamente iguais, então ele não ocasionará um desbalanceamento entre as fases.
- II. Os dois equipamentos de  $6,25 \text{ kW}$  devem ser ligados entre o neutro e uma mesma fase.
- III. A carga de  $5 \text{ kW}$  deve ser ligada entre o neutro e uma fase diferente daquela conectada aos equipamentos de  $6,25 \text{ kW}$ .

É correto o que se afirma em:

- a) I.
- b) II.
- c) I e II.
- d) I e III.
- e) II e III.

**3.** A corrente elétrica alternada que abastece a maioria das casas pode ser fornecida por meio de diferentes tipos de conexão:

- i. 2 fios: conexão monofásica (Fase-Neutro)
- ii. 3 ou 4 fios: conexão bifásica (Fase-Fase-Neutro) e conexão trifásica (Fase- Fase-Fase ou Fase-Fase-Fase-Neutro)

Cada tipo de conexão tem suas vantagens. Um sistema monofásico, por exemplo, apresenta vantagem em instalações de pequena potência, nas quais a corrente também é pequena, permitindo que uma menor quantidade de material condutor seja utilizada. Por outro lado, uma conexão trifásica é mais adequada ao consumo de um edifício que inclui máquinas potentes ou um elevador para o qual é necessário um sistema de três fases.

Sobre a conexão trifásica analise as afirmativas e marque V para verdadeiro ou F para falso:

- ( ) A conexão delta apresenta as três fases conectadas como um triângulo, possuindo um ponto comum denominado de neutro.
- ( ) A corrente de linha em uma conexão delta equilibrada é  $\sqrt{3}$  vezes maior que a corrente de fase.
- ( ) A tensão de linha em uma conexão Y equilibrada é  $\sqrt{3}$  vezes maior que a tensão de fase.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta:

- a) F – F – V.
- b) F – V – V.
- c) V – F – F.
- d) V – F – V.
- e) F – V – F.

## Seção 2.3

### Potência Trifásica

#### Diálogo aberto

Olá, caro aluno!

Vimos na primeira seção dessa unidade que um circuito CA pode conter outros tipos de potência elétrica, além da potência ativa (medida em Watts), denominados de potência reativa (medida em VAR) e potência aparente (medida em VA). A quantidade de cada uma dependerá dos elementos passivos existentes no circuito a ser analisado. Assim, em um circuito que contenha resistores e capacitores, por exemplo, a potência elétrica presente será uma composição da potência ativa sobre o resistor e a potência reativa no capacitor. Estudamos ainda que a relação entre potência ativa e reativa estabelecem um fator de qualidade de energia, denominado fator de potência. Já na segunda seção desta unidade introduzimos os conceitos de circuitos trifásicos, como tensões e correntes de fase e de linha. Além disso, abordamos os tipos possíveis de conexões em circuitos trifásicos (Delta e Y). Nessa terceira seção, daremos continuidade às análises de circuitos trifásicos, mais especificamente ao estudo da potência elétrica trifásica. Como veremos, para um valor fixo de tensão e corrente rms, a potência entregue através de um sistema trifásico é constante, resultando, por exemplo, na operação suave e livre de vibração de um motor elétrico, diferentemente da potência monofásica pulsante. Ao fazer medições em uma instalação de energia trifásica, a potência em todas as três fases deve ser medida simultaneamente para se obter a potência total. Para isso, existem três métodos comumente usados, sendo um deles estudado no decorrer desta seção: o método dos dois wattímetros.

Para que o conhecimento adquirido seja colocado em prática, lembre a situação na qual você é o responsável técnico pela equipe de manutenção de uma indústria.

Após a instalação dos novos motores de indução, o fator de potência global reduziu drasticamente, ficando muito abaixo do

mínimo exigido pela concessionária de energia e por lei, ou seja, 0,92. Para evitar o pagamento de sobretaxas na conta de energia, uma correção do fator de potência deve ser realizada através da conexão de bancos de capacitores. Assim, você foi incumbido de determinar os parâmetros de modo a indicar um banco de capacitores adequado para a instalação. Dessa forma, seu supervisor requer que você descreva com detalhes os procedimentos adequados e elabore um parecer sobre as propostas indicando qual seria a mais indicada.

Para determinar exatamente esses parâmetros, você obteve as informações da instalação, descritas na Tabela 2.3

Tabela 2.3 | Dados da instalação elétrica

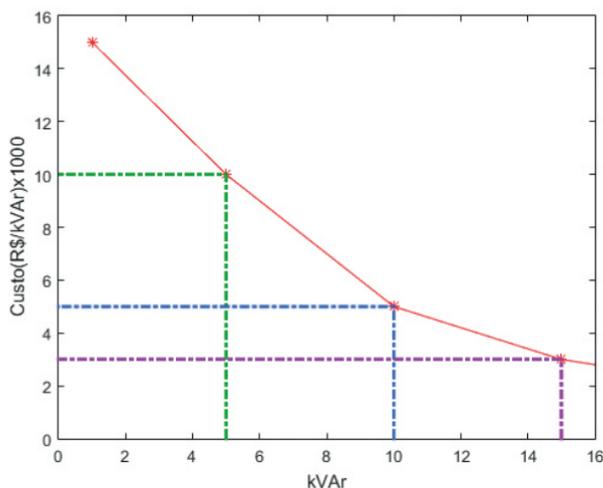
<b>Rede Elétrica:</b>	<b>220 V / 60 Hz</b>
5 motores com bobinas em Delta:	2 HP / 220 V, eficiência 85% e fator de potência 0,7 atrasado. (1 HP = 746 W)
3 aquecedores resistivos em Y-4 fios:	0,5 kW / 220 V
5 equipamentos trifásicos em Delta:	1 kVA / 220 V e fator de potência 0,85 atrasado.

Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, devido a uma mudança da política da fábrica, os motores e os equipamentos trifásicos operam continuamente durante 18 horas do dia (05:59 até 23:59), enquanto os aquecedores funcionam as 24 horas.

Após uma análise preliminar da equipe técnica, foi-lhe apresentado três propostas baseadas nos preços dos bancos de capacitores. A Figura 2.21 e a Tabela 2.4 mostram essas propostas.

Figura 2.21 | Propostas



Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 2.4 | Tipos de banco de capacitores das propostas

Proposta 1:	Banco de capacitores fixo com 5 kVar.
Proposta 2:	Banco de capacitores semi-automático com 10 kVar.
Proposta 3:	Banco de capacitores fixo com 15 kVar.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como você determinaria os parâmetros de modo a indicar um banco de capacitores adequado para a instalação? Quais os procedimentos adotados? Dentre as propostas fornecidas qual é a mais indicada? Estudaremos ao longo dessa seção a potência trifásica e seus desdobramentos para ajudá-lo a solucionar esse problema.

Bons estudos!

## Não pode faltar

Quando uma carga é conectada a uma fonte trifásica, ela retira energia dessa fonte. O valor da potência da carga é importante para determinar a capacidade da fonte necessária para atender a carga, o tamanho dos cabos que conectam a fonte à carga e o tipo da proteção usada.

Nesta seção, examinaremos alguns dos conceitos relacionados à potência trifásica, os métodos usados para minimizar a potência reativa na fonte, os meios de medir a potência trifásica ativa e como determinar e corrigir o fator de potência de uma carga trifásica.

A potência em um circuito trifásico é calculada da mesma maneira que a potência monofásica. A principal diferença é que a trifásica se refere à potência total de uma carga trifásica, enquanto a potência monofásica se refere a apenas uma parte de uma carga trifásica ou à carga total se for fornecida a partir de uma fonte monofásica.

Vamos agora considerar a potência em um sistema trifásico equilibrado, iniciando pela potência instantânea absorvida pela carga. Se considerarmos uma carga conectada em Y, as tensões de fase, estudadas na seção anterior (Equação 2.24), podem ser reescritas então no domínio do tempo como:

$$\begin{aligned}V_{an} &= \sqrt{2} \cdot V_f \cdot \cos(\omega t) \\V_{bn} &= \sqrt{2} \cdot V_f \cdot \cos(\omega t - 120^\circ) \\V_{cn} &= \sqrt{2} \cdot V_f \cdot \cos(\omega t + 120^\circ)\end{aligned}\tag{2.27}$$

O valor rms da tensão de fase introduz o fator  $\sqrt{2}$ . Se a impedância  $Z_Y = Z \angle \theta$ , as correntes de fase ficam atrasadas em relação às suas respectivas tensões de fase de  $\theta$ . Então:

$$\begin{aligned}i_a &= \sqrt{2} \cdot I_f \cdot \cos(\omega t - \theta) \\i_b &= \sqrt{2} \cdot I_f \cdot \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\i_c &= \sqrt{2} \cdot I_f \cdot \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)\end{aligned}\tag{2.28}$$

Onde  $I_f$  é o valor rms da corrente de fase. A potência instantânea total na carga é a soma das potências instantâneas nas três fases, isto é:

$$\begin{aligned}
 P &= P_a + P_b + P_c = V_{an} \cdot i_a + V_{bn} \cdot i_b + V_{cn} \cdot i_c \\
 P &= 2 \cdot V_f \cdot I_f \cdot [\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \\
 &+ \cos(\omega t - 120^\circ) \cdot \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\
 &+ \cos(\omega t + 120^\circ) \cdot \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Aplicando a identidade trigonométrica:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \tag{2.30}$$

Obtemos, então:

$$P = V_f \cdot I_f \cdot [3 \cdot \cos(\theta) + \cos(2 \cdot \omega t - \theta) + \cos(2 \cdot \omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2 \cdot \omega t - \theta + 240^\circ)]$$

Considerando  $\alpha = 2\omega t - \theta$ , temos:

$$\begin{aligned}
 P &= V_f \cdot I_f \cdot [3 \cdot \cos(\theta) + \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \cos(240^\circ) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(240^\circ) \\
 &+ \cos(\alpha) \cdot \cos(240^\circ) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(240^\circ)]
 \end{aligned}$$

$$P = V_f \cdot I_f \cdot [3 \cdot \cos(\theta) + \cos(\alpha) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)] \tag{2.31}$$

$$P = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta)$$

Assim, a potência instantânea em qualquer ponto de um circuito trifásico balanceado é invariante no tempo, diferentemente do que ocorre com a potência em uma fase.

O fato de que em sistemas trifásicos a potência ativa trifásica é invariante no tempo e torna esses sistemas preferíveis em relação aos sistemas monofásicos, nos quais a potência ativa possui um valor médio diferente de zero, mas está alternando ao longo do tempo. A potência ativa variando no tempo resulta em vibrações e problemas mecânicos a longo prazo, enquanto a potência ativa invariante no tempo não. Esta é de fato uma das principais razões para usar sistemas trifásicos em vez de sistemas monofásicos.

Portanto, se a carga for balanceada, as potências de fase são iguais e a maneira mais simples de determinar a potência total é por calcular uma potência de fase e multiplicá-la por três. Essa potência é a potência média por fase.

Podemos estender esse resultado para os demais tipos de potência reativa, aparente e complexa.

Assim, as potências médias por fase são:

$$P_f = V_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) \text{ (Ativa)} \tag{2.32}$$

$$Q_f = V_f \cdot I_f \cdot \text{sen}(\theta) \text{ (Reativa)} \tag{2.33}$$

$$|S_f| = V_f \cdot I_f \text{ (Aparente)} \quad (2.34)$$

$$S_f = P_f + j \cdot Q_f = V_f \cdot I_f^* \text{ (Complexa)} \quad (2.35)$$

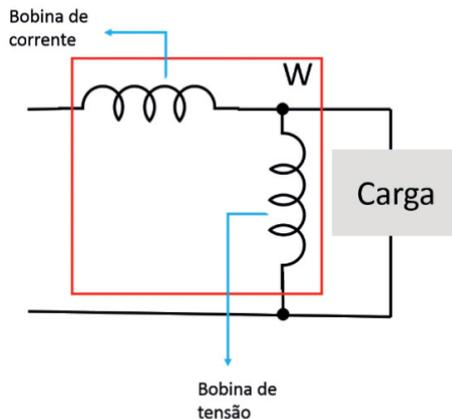


### Assimile

A potência instantânea total trifásica em um circuito balanceado é constante e esse resultado independe se a carga está conectada em Y ou em Delta, como mostrado na Equação 2.32. Isso significa que em qualquer instante de tempo, o sistema recebe sempre a mesma potência. Essa propriedade é muito importante e explica a superioridade do sistema trifásico em muitas aplicações.

Existem vários métodos para medir a potência em uma carga, sendo que as formas mais precisas envolvem um medidor chamado wattímetro. O wattímetro é um instrumento para medir a potência elétrica em watts de qualquer circuito dado, ou seja, é construído para fornecer uma leitura da potência ativa absorvida pela carga. A construção interna de um wattímetro consiste em duas bobinas, uma delas está em série e a outra está conectada em paralelo. A bobina que é conectada em série com o circuito é conhecida como bobina de corrente, a conectada em paralelo com o circuito é conhecida como bobina de tensão. A Figura 2.22 representa simplificada um wattímetro.

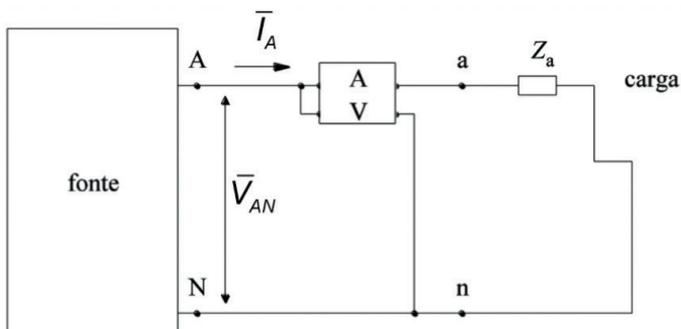
Figura 2.22 | Wattímetro – construção básica



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere o circuito da Figura 2.23 que contempla apenas uma fase de um circuito trifásico.

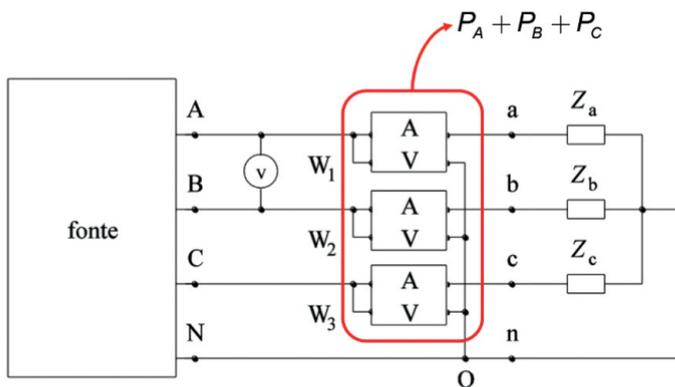
Figura 2.23 | Wattímetro em uma fase



Fonte: elaborada pelo autor.

A conexão do wattímetro na fase A fornece a potência ativa consumida pela carga conectada a essa fase. Assim, se outros dois wattímetros forem conectados às outras duas fases de uma carga trifásica, a potência ativa total será exatamente a soma das leituras obtidas por esses três wattímetros, como ilustra a Figura 2.24.

Figura 2.24 | Três Wattímetros

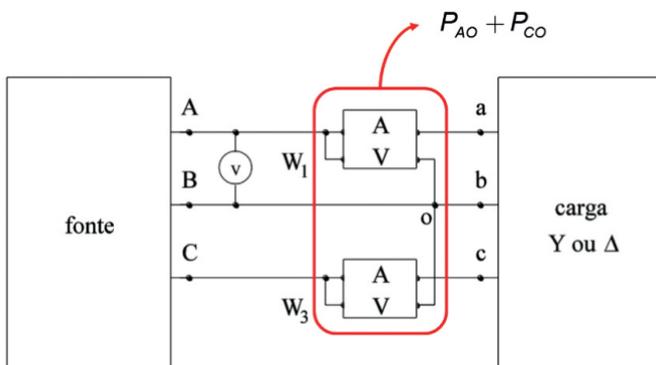


Fonte: elaborada pelo autor.

Particularmente, caso a carga seja equilibrada e esteja conectada em Y, é necessário apenas um único wattímetro, o qual medirá um terço da potência total, logo, para obter a potência ativa trifásica consumida, basta multiplicar o valor da leitura por três.

Se o terminal neutro não estiver disponível e a carga estiver conectada às três fases, então o neutro não poderá ser usado para medir a tensão da linha. Nesses casos, as fases podem cumprir a tarefa como referência "nula", e somente a potência deve ser medida das duas fases restantes. Portanto, apenas dois wattímetros são necessários e a potência total é a soma das duas leituras, conforme ilustra a Figura 2.25.

Figura 2.25 | Dois Wattímetros



Fonte: elaborada pelo autor.

É importante salientar que o ponto "o" poderia ser escolhido em qualquer uma das fases, assim, os dois wattímetros devem ser conectados nas duas outras fases restantes. Esse método é denominado Métodos dos Dois Wattímetros.

Podemos generalizar esse método utilizando o teorema de Blondel, que formaliza o método dos (n-1) wattímetros:

Se a energia é fornecida a uma carga polifásica através de "n" fios, a potência total na carga é dada pela soma algébrica das leituras de "n" wattímetros, ligados de tal maneira que cada um dos "n" fios contenha uma bobina de corrente



de um wattímetro, estando a correspondente bobina de potencial ligada entre este fio e um ponto comum a todas as bobinas de potencial, o ponto "O". Se este ponto estiver sobre um dos "n" fios, bastam (n-1) wattímetros. (BARRETO, 2012, p. 160, grifo nosso)



Refleta

Por que o termo "soma algébrica" está destacado no texto do teorema?

Uma vantagem do método de dois wattímetros para medir a potência trifásica é que ele permite que o fator de potência da carga seja determinado. Considere o circuito da Figura 2.25, a equação para determinar o ângulo do fator de potência ou ângulo de fase da carga (Equação 2.37) e  $\cos(\varphi)$  corresponderão ao fator de potência.

$$\tan\varphi = \sqrt{3} \left( \frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1} \right) \Rightarrow \varphi = \arctan \left( \sqrt{3} \left( \frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1} \right) \right) \quad (2.36)$$

Uma vez conhecido o fator de potência da carga ou da instalação elétrica, é possível determinar se essa instalação necessita de uma correção do fator de potência.

O fator de potência é um parâmetro significativo em uma rede de sistema de potência, bem como em todos os equipamentos elétricos que decide a eficiência da transmissão ou utilização de energia. Um fator de potência baixo aumenta a corrente, resultando em perdas adicionais nos componentes do sistema de energia, desde a geração das estações até as instalações do consumidor final. Deve ser mantido próximo à unidade para a distribuição econômica e eficiente de energia elétrica.

Como vimos na Seção 2.1, o fator de potência é definido como o cosseno do ângulo entre tensão e corrente em um circuito de corrente alternada (CA). Ao contrário dos circuitos CC, existe uma diferença de ângulo de fase entre a tensão e as correntes em um circuito CA. Se o circuito é composto por elementos indutivos ou se comporta como um circuito indutivo (onde a corrente se mantém atrás da tensão), então o fator de potência naquele circuito é referido

como um fator de potência atrasado. Esse é um circuito típico industrial devido a predominância de motores elétricos. Por outro lado, se o circuito é de natureza capacitiva cuja corrente conduz a tensão, então o fator de potência é referido como o principal fator de potência. Se não houver diferença de ângulo de fase entre a tensão e a corrente, então é um fator de potência unitário.

As causas do baixo fator de potência incluem várias cargas indutivas, como motores de indução, transformadores de potência, fornos de indução, transformadores de solda, equipamentos de iluminação, etc.

A corrente que flui através dos condutores ou cabos durante o baixo fator de potência é maior que a corrente em um fator de potência alto. Como as correntes que fluem no sistema com baixo fator de potência são maiores, mais perdas de cobre ( $R \cdot I^2$ ) ocorrem, portanto, levam a uma baixa eficiência.

As vantagens da melhoria do fator de potência incluem redução do consumo de energia, maior eficiência energética, redução das contas de eletricidade, disponibilidade extra de potência aparente, redução da queda de tensão nas linhas, maior vida útil do equipamento e redução das perdas de energia.

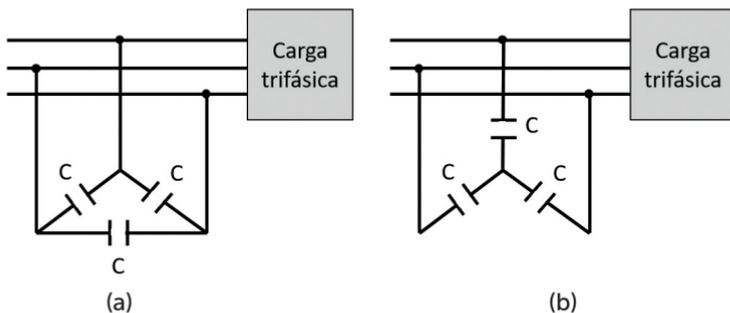
O fator de potência é melhorado através da conexão de alguns dispositivos (como capacitores) em paralelo com a carga. Os capacitores se opõem ao efeito indutivo das cargas ou motores. Estes são conectados em paralelo com a carga a ser corrigida, para que o componente de potência reativa atrasada da corrente de carga seja completamente ou parcialmente neutralizado.

Neste método, capacitores estáticos podem ser conectados através de cargas de motores individuais, ou em um banco em subestações de transmissão ou distribuição.

O sistema individual de capacitores oferece uma correção mais precisa do fator de potência, pois o capacitor opera quando o motor está em uso.

No caso de cargas trifásicas, os bancos de capacitores são conectados em modos estrela ou delta, como mostrado na Figura 2.26, esse método é amplamente utilizado em indústrias e subestações.

Figura 2.26 | Conexão dos capacitores (a) ligação delta (b) ligação Y

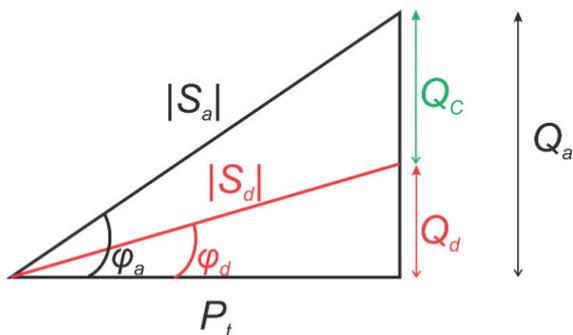


Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar a potência reativa de compensação, ou seja, a potência reativa fornecida pelos capacitores, vamos utilizar o triângulo de potências estudados em seções anteriores.

A Figura 2.27 mostra as potências antes e depois da compensação reativa.

Figura 2.27 | Triângulo de potências com compensação reativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Onde:  $P_t$  é a potência ativa total,  $Q_a$  é a potência reativa total requerida pela instalação e fornecida integralmente pela fonte,  $Q_c$  é a potência reativa de compensação ou potência do banco de capacitor,  $Q_d$  é a potência reativa que a fonte precisa fornecer após a instalação do banco de capacitor,  $|S_a|$  e  $|S_d|$  são a potência aparente antes e depois da compensação reativa, respectivamente.

Através das relações trigonométricas temos então que:

$$Q_a = |S_a| \cdot \text{sen}(\varphi_a) = P_t \cdot \text{tg}(\varphi_a) \quad (2.37)$$

$$Q_d = |S_d| \cdot \text{sen}(\varphi_d) = P_t \cdot \text{tg}(\varphi_d) \quad (2.38)$$

$$Q_c = Q_a - Q_d = P_t \cdot [\text{tg}(\varphi_a) - \text{tg}(\varphi_d)] \quad (2.39)$$

Para calcular o valor do banco de capacitores, ou a capacitância de cada capacitor, vamos considerar:

$V_L$  = tensão de linha

$V_f$  = tensão de fase

$C_\Delta$  = capacitor por fase quando os capacitores são conectados em Delta

$C_Y$  = capacitor por fase quando os capacitores são conectados em Y

$Q_c$  = potência reativa por fase

Para a conexão Delta, temos que  $V_L = V_f$ , então a capacitância por fase é dada por:

$$Q_c = X \cdot I^2$$

$$Q_c = \frac{1}{\omega \cdot C_\Delta} \cdot I^2$$

$$Q_c = \frac{1}{\omega \cdot C_\Delta} \cdot \left(\frac{V_f}{X}\right)^2$$

$$Q_c = \frac{1}{\omega \cdot C_\Delta} \cdot \left(\frac{V_f}{\frac{1}{\omega \cdot C_\Delta}}\right)^2 \quad (2.40)$$

$$C_\Delta = \frac{Q_c}{\omega \cdot V_f^2} = \frac{Q_c}{\omega \cdot V_L^2}$$

Para a conexão Y, temos que  $V_L = \sqrt{3} \cdot V_f$ , então, a capacitância por fase é dada por:

$$C_Y = \frac{Q_c}{\omega \cdot V_f^2} = \frac{Q_c}{\omega \cdot \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3 \cdot Q_c}{\omega \cdot V_L^2} \quad (2.41)$$

Das Equações 2.38 e 2.39 temos então que:

$$C_Y = 3 \cdot C_\Delta \quad (2.42)$$

A Equação 2.43 mostra que a capacitância requerida na conexão em Y é igual a três vezes a capacitância requerida por fase quando os capacitores estão conectados em Delta.



Uma carga balanceada trifásica requer 180 kW de potência quando operando com um fator de potência de 0,6 e conectada a uma alimentação trifásica de 415 V e 60 Hz. Determinar a potência reativa em kVAr de um banco de capacitores que melhoraria o fator de potência, elevando para 0,9 em atraso.

Como primeiro passo, é necessário determinar o ângulo de fase inicial:

$$fp = \cos(\varphi)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(fp)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0,6) = 53,13^\circ$$

Em seguida, encontramos as potências aparente, ativa e reativa para o fator de potência original.

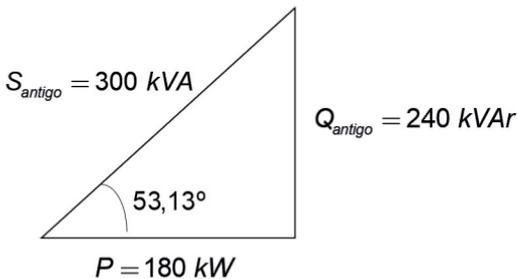
$$P = 180 \text{ kW}$$

$$|S| = \frac{180 \cdot 10^3}{0,6} = 300 \text{ kVA}$$

$$Q = 300 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(53,13^\circ) = 240 \text{ kVAr}$$

Agora, podemos desenhar o triângulo de potências, como feito na Figura 2.28

Figura 2.28 | Triângulo de potência antes da correção

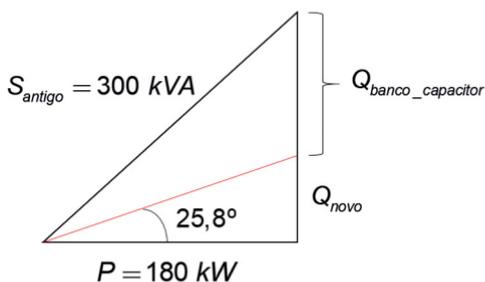


Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, calculamos o novo ângulo de fase e desenhamos uma linha no triângulo original, como pode ser visto na Figura 2.29

$$\varphi = \cos^{-1}(0,9) = 25,8^\circ$$

Figura 2.29 | Triângulo de potência após a correção



Fonte: elaborada pelo autor.

$$Q_{\text{banco\_capacitor}} = Q_{\text{antigo}} - Q_{\text{novo}}$$

$$Q_{\text{banco\_capacitor}} = Q_{\text{antigo}} - P \cdot \tan(25,8)$$

$$Q_{\text{banco\_capacitor}} = 240 - 180 \cdot \tan(25,8) = 153 \text{ kVAr}$$

Assim, para que o fator de potência seja elevado a um valor igual à 0,9, é necessário que o banco de capacitor forneça 153 kVAr de potência reativa.



**Lembre-se**

Para saber mais sobre potência em circuitos CA, leia o Capítulo 12, seção 7 do livro Fundamentos de Circuitos Elétricos.

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

## Sem medo de errar

Você é o responsável pela equipe de manutenção de uma indústria e após a instalação de novos motores de indução, é preciso determinar corretamente o banco de capacitores a ser instalado para elevar o fator de potência para 0,92 e assim evitar o pagamento de multas para a concessionária de energia. Além disso, é preciso decidir dentre três propostas qual é a mais indicada para a instalação. Com o objetivo de determinar exatamente esses parâmetros, você obteve as seguintes informações:

Para encontrar o banco de capacitores adequado para essa instalação, vamos utilizar uma planilha de cálculos com base nas informações da Tabela 2.3, que nada mais é do que uma sequência de passos a serem seguidos.

1. Determinar o fator de potência global

a) Motores:

$$P_{\text{motores}} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 746}{0,85} = 8,78 \text{ kW}$$

$$Q_{\text{motores}} = P_{\text{motores}} \cdot \tan(\varphi) = 8,78 \cdot 10^3 \cdot \tan(\cos^{-1}(0,7)) = 8,95 \text{ kVAr}$$

b) Aquecedores:

$$P_{\text{aquecedores}} = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ kW}$$

$$Q_{\text{aquecedores}} = 0$$

c) Equipamentos:

$$P_{\text{equipamentos}} = 5 \cdot 1 \cdot 0,85 = 4,25 \text{ kW}$$

$$Q_{\text{equipamentos}} = 5 \cdot 1 \cdot \text{sen}(\cos^{-1}(0,85)) = 2,63 \text{ kVAr}$$

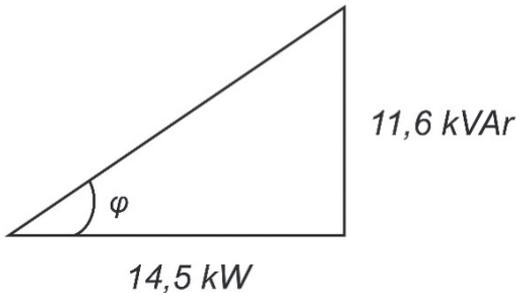
d) Potências totais:

$$P_{\text{total}} = 8,78 + 1,5 + 4,25 = 14,5 \text{ kW}$$

$$Q_{\text{total}} = 8,95 + 0 + 2,63 = 11,6 \text{ kVAr}$$

Assim, temos o triângulo de potências da Figura 2.30.

Figura 2.30 | Triângulo de potência da carga total



Fonte: elaborada pelo autor.

O fator de potência global é então:

$$\tan(\varphi) = \frac{11,6}{14,5} = 0,8$$

$$\tan^{-1}(0,8) = 38,7^\circ$$

$$\cos(31,4^\circ) = 0,78$$

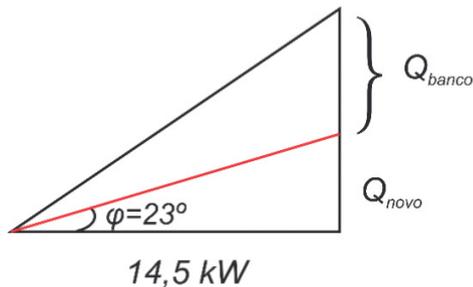
$$fp = \cos(\varphi) = 0,78$$

Valor abaixo do mínimo exigido.

2. Calcular os capacitores a serem instalados para elevar o fator de potência a 0,92 ou ângulo de fase igual a  $23^\circ$ .

O novo triângulo de potência pode ser visto na Figura 2.31:

Figura 2.31 | Triângulo de potência para o fator de potência desejado



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, a potência reativa dos capacitores será:

$$Q_{\text{banco}} = 11,6 - 14,5 \cdot \tan(23^\circ) = 5,5 \text{ kVAr}$$

Uma vez determinada a potência do banco, podemos decidir dentre as três propostas apresentadas qual a mais adequada para a instalação. Conforme calculamos, o banco de capacitor precisa de pelo menos 5,5 kVAr para elevar o fator de potência a no mínimo 0,92. Então, a primeira proposta apresentada pela equipe técnica deve ser descartada.

Embora a terceira proposta seja a mais econômica, por ser um banco de capacitores fixo, ou seja, não possui nenhum controle, além de permanecem ligados ao sistema indefinidamente e independente das condições da carga, essa não é uma proposta tecnicamente viável. Somente quando os aquecedores ficam ligados (durante 6 horas), o fator de potência sem nenhum outro equipamento é unitário. Então, o ideal é que o banco de capacitores seja desligado do circuito, caso contrário, o fator de potência pode ser inferior a 0,92, mas ao invés de indutivo passa a ser capacitivo,

o que também gera multas. Podemos calcular o fator de potência caso esse banco de capacitor fique ligado no período de 6 horas.

- i) Potência ativa: será a própria potência dos aquecedores, totalizando 1,5 kW.
- ii) Potência reativa: será a própria potência do banco de capacitores, totalizando 15 kVAR.
- iii) Fator de potência:

$$\tan(\varphi) = \frac{15}{1,5} = 10$$

$$\varphi = \tan^{-1}(10) = 84,3^\circ$$

$$\cos(84,3^\circ) = 0,1$$

Ou seja, o fator de potência ficou basicamente capacitivo, não sendo permitido também. Assim, a segunda proposta é a indicada para a instalação, uma vez que o semi-automático é controlado por programador cíclico ou pelo valor da demanda de corrente do sistema. Isso permite, por exemplo, que ele seja programado para ficar ativo em um determinado período e desligado em outro. Portanto, no período em que somente os aquecedores ficam ligados, o controlador cíclico pode atuar desligando o banco de capacitor. O valor de 10 kVAR desse banco ainda contribui para que o fator de potência fique o mais próximo de 1 durante o tempo em que todos os equipamentos estão ligados. Como calculado, quando isso ocorre, a potência reativa total é de 11,6 kVAR, assim, o fator de potência será:

$$Q_{\text{novo}} = Q_{\text{total}} - Q_{\text{banco}} = 11,6 - 10 = 1,6 \text{ kVAR}$$

$$Q_{\text{novo}} = P \cdot \tan(\varphi_{\text{novo}})$$

$$\tan(\varphi_{\text{novo}}) = \frac{Q_{\text{novo}}}{P} = \frac{1,6}{14,5} = 0,11$$

$$\varphi = \tan^{-1}(0,11) = 6,3^\circ$$

$$\cos(6,3^\circ) = 0,99$$

Durante o período em que todos os equipamentos estão ligados, o banco de capacitor elevou o fator de potência a um valor superior ao mínimo exigido.

Adotando o banco de capacitor de 10 kVAR, podemos calcular seus parâmetros da seguinte forma:

Como o banco é formado por três capacitores iguais, a potência reativa em cada capacitor é um terço do valor total, ou seja,  $\frac{Q_{\text{banco}}}{3}$ .

A capacitância desses capacitores será dada de acordo com o tipo de conexão. Assim, para uma conexão Delta temos:

$$Q_C = \frac{Q_{\text{banco}}}{3} = C_{\Delta} \cdot \omega \cdot V_L^2$$

$$\frac{Q_{\text{banco}}}{3 \cdot \omega \cdot V_L^2} = C_{\Delta}$$

$$C_{\Delta} = \frac{10 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 220^2} = 182 \mu F$$

Já para uma possível conexão em Y, a capacitância de cada capacitor será:

$$\frac{Q_{\text{banco}}}{3 \cdot \omega \cdot \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right)^2} = C_Y$$

$$C_Y = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 220^2} = 546 \mu F$$

Dessa forma, conseguimos definir o melhor banco de capacitores a ser instalado, bem como seu principal parâmetro, a capacitância.

## Avançando na prática

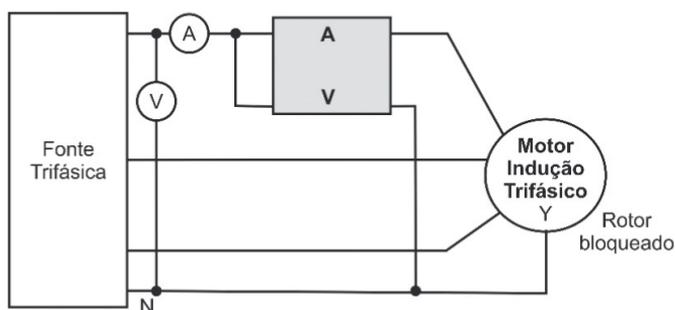
### Parâmetros de um motor de indução

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa especializada em equipamentos educacionais para laboratório vendeu a um de seus clientes um motor trifásico de indução que será utilizado em aulas práticas no laboratório de máquinas elétricas. Juntamente com o motor, foi enviado o descritivo técnico com todas as especificações da máquina, o que inclui os parâmetros do circuito equivalente. O cliente, ao realizar os ensaios de rotor bloqueado e ensaio a vazio, chegou à conclusão de que os parâmetros do circuito equivalente eram diferentes daqueles mostrados na ficha técnica. O cliente por sua vez, procurou a empresa fornecedora para que a ficha técnica fosse revisada, visto que um circuito equivalente incorreto, acarreta análises e aplicações também incorretas. O fornecedor do motor insistiu que

os parâmetros apresentados estão corretos e foram calculados pela fabricante do motor. No entanto, para esclarecer definitivamente essa dúvida, a empresa contratou seus serviços para que você avaliasse os procedimentos realizados pelo comprador e identificasse se os valores obtidos por ele estão de fato coerentes. Antes de iniciar os testes, você verificou as equações e os cálculos realizados pelo comprador e não identificou nenhum erro. Então, você solicitou ao comprador o esquema de ligações que ele realizou para determinar os parâmetros da máquina, o qual é apresentado na Figura 2.32.

Figura 2.32 | Esquema de ligação realizado pelo comprador



Fonte: elaborada pelo autor.

O comprador também informou que para o cálculo da potência total de entrada realiza-se a multiplicação do valor mostrado pelo wattímetro por 3, ou seja,  $P_t = 3 \cdot P_{\text{wattímetro}}$ , uma vez que os enrolamentos do motor deveriam ser iguais.

Os procedimentos realizados pelo comprador estão corretos? Em caso negativo, o que deve ser feito?

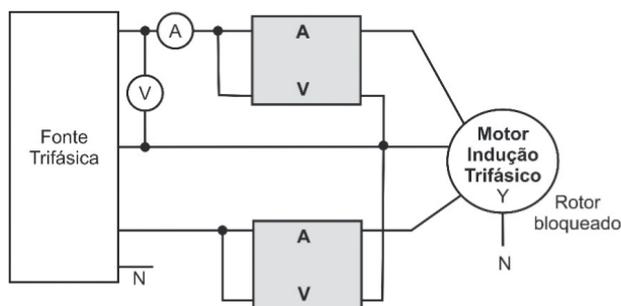
### Resolução da situação-problema

Lembre-se que você precisa dar um parecer final sobre os valores dos parâmetros do motor de indução. Para isso, precisamos entender corretamente a ligação e o procedimento realizado pelo comprador da máquina. O esquema apresentado pelo cliente indica que somente um wattímetro foi utilizado para se obter a potência total de entrada, para isso, considera-se que a carga (o motor) é

totalmente balanceada. Em um circuito de carga trifásico e **trifásico balanceado**, a potência em cada fase é igual e, portanto, a potência total do circuito pode ser determinada pela multiplicação da potência medida em qualquer fase. Assim, a medição de potência em três circuitos trifásicos pode ser realizada usando apenas o wattímetro. Mas este método tem a desvantagem de que mesmo um pequeno grau de desequilíbrio na carga produz um grande erro na medição. A medição de todas as tensões poderia ter sido realizada pelo comprador para comprovar se são exatamente idênticas, porém, como indica a Figura 2.32, somente a leitura da tensão de uma fase foi realizada. Dessa forma, como não é possível garantir o perfeito equilíbrio entre as fases, o método de um wattímetro não é aconselhável para esse caso.

Para a determinação da potência trifásica total, necessária para o cálculo dos parâmetros do motor de indução, a medição através de mais um wattímetro se faz necessária. Esse método de dois wattímetros permite que a potência total seja calculada com o mínimo de erros. A Figura 2.33 mostra o circuito que o comprador deveria ter montado para a realização do procedimento.

Figura 2.33 | Procedimento correto com wattímetros



Fonte: elaborada pelo autor.

O método dos dois wattímetros de medição de potência em circuitos trifásicos é adequado para circuito trifásico, seja ele balanceado ou não, conectado em Y ou em Delta. Portanto, o procedimento realizado pelo comprador está incorreto, ocasionando desse modo a divergência entre os valores dos parâmetros da máquina.

## Faça valer a pena

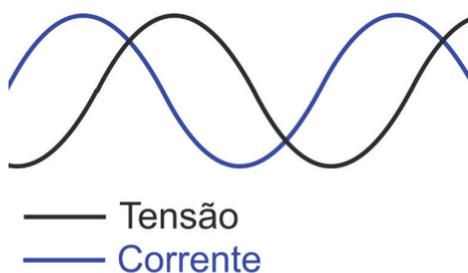
**1.** O wattímetro é um instrumento para medir a potência elétrica ativa em watts de qualquer circuito dado. O método de dois wattímetros pode ser empregado para medir a potência trifásica, em Y ou em Delta, com carga equilibrada ou desequilibrada. O cálculo do fator de potência é facilmente obtido por meio desse método também.

Ao realizar o cálculo do fator de potência, um técnico obteve um valor igual a 0,5. Assim, assinale a alternativa que contenha corretamente o valor indicado por um dos wattímetros:

- a) 500 W.
- b) 50 W.
- c) 5 W.
- d) 0,5 W.
- e) 0 W.

**2.** A correção do fator de potência visa melhorar a qualidade da energia, utilizando capacitores para compensar cargas geralmente indutivas, por exemplo, motores. A Figura 2.34 a seguir mostra as formas de onda da tensão e corrente antes e depois da correção do fator de potência.

Figura 2.34 | Formas de onda



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir das informações apresentadas, analise as asserções a seguir e a relação proposta entre elas:

I. A correção do fator de potência aumenta a defasagem entre as ondas de corrente e tensão.

PORQUE

II. Quanto maior o ângulo de fase, isto é, mais próximo à  $90^\circ$ , menor o valor do cosseno dessa defasagem e, assim, melhor o fator de potência.

Assinale a alternativa correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
- c) As asserções I e II são proposições falsas.
- d) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é falsa.
- e) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é verdadeira.

**3.** Um wattímetro consiste em um par de bobinas de corrente e uma bobina de potencial móvel. As bobinas de corrente são conectadas em série com o circuito, enquanto a bobina de potencial é conectada em paralelo. O método de dois wattímetros para a medição da potência total é usado para medir a potência consumida por uma carga trifásica desequilibrada ou equilibrada.

Considere que dois wattímetros apresentam as seguintes leituras:

$$W_1 = 5 \text{ kW e } W_2 = 7 \text{ kW} .$$

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o fator de potência da carga:

- a) 0,29.
- b) 0,71.
- c) 0,81.
- d) 0,90.
- e) 0,96.

# Referências

BARRETO, G.; CASTRO JUNIOR, C. A., FAVARIN MURARI, C. A. **Circuitos de corrente alternada** - fundamentos e práticas. São Paulo: Oficina de textos, 2012.

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O., **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

# Circuitos elétricos de duas portas: quadripolos

## Convite ao estudo

Bem-vindo à terceira unidade de circuitos elétricos II. Nesta unidade veremos o conceito de quadripolos, os quais constituem circuitos elétricos de duas portas.

A maioria dos circuitos elétricos dispõem de duas portas de acesso com um par de terminais (ou porta) de entrada e outro par de terminais de saída. O interesse no estudo é obter apenas as tensões e correntes de entrada e saída, sem haver interesse em obter as correntes e tensões internas, ou seja, a estrutura interna não é levada em conta. Por exemplo, circuitos integrados cuja utilização está limitada apenas ao uso adequado dos terminais disponibilizados.

Nestes dispositivos, não é possível acessar os elementos internos, no entanto, suas folhas de dados (*data sheets*) fornecem muitas informações sobre sua estrutura interna caso necessário. Outro exemplo é uma linha de transmissão que leva energia de Curitiba a São Paulo possuindo duas portas, uma em cada cidade. Dada uma corrente e tensão de entrada em uma das portas, o interesse são os sinais de saída na porta adjacente.

Representando estes circuitos de duas portas por meio de parâmetros, é possível obter uma descrição completa do comportamento deles, especialmente após conectá-los a um sistema de maior porte.

Outros dispositivos ou circuitos elétricos e eletrônicos que podem ser modelados como quadripolos são: transformadores, transistores, amplificadores operacionais, filtros, circuitos para casamento de impedância em redes de distribuição e sistemas de telecomunicação, entre outros.

Para modelar um circuito de duas portas, é necessário estabelecer uma relação entre as tensões e as correntes de

entrada e saída, sendo dois destes sinais de caráter independente e os demais de caráter dependente. A relação entre os sinais dependentes e independentes são denominados parâmetros, tornando possível obter seis conjuntos de representações distintas para estes circuitos dependendo da escolha das variáveis independentes.

Com base neste contexto, veremos na unidade como obter os possíveis conjuntos de parâmetros que podem ser utilizados para modelar os circuitos de duas portas e a conversão entre eles, além da aplicação e interconexão em série, paralelo ou em cascata.

Para pôr os conhecimentos desta unidade em prática, você será inserido em três situações-problema distintas. Na primeira delas, você é o responsável técnico na área de planejamento e controle de sistemas elétricos de potência. Uma das etapas de análise do sistema elétrico consiste em obter uma representação para uma linha de transmissão (LT), a qual constitui um quadripolo. Você, como responsável técnico, ficou encarregado de realizar esta etapa e obter a matriz de admitância para a análise da LT.

Na segunda situação, considere que você seja o técnico eletrônico de uma empresa que fabrica amplificadores de áudio. Em um novo projeto a ser desenvolvido, é necessário representar o modelo de um transistor bipolar de junção (TBJ), responsável pela amplificação do sinal de áudio, por meio de um quadripolo de parâmetros híbridos.

Por fim, você, como técnico responsável pela qualidade de produto em uma fábrica de transformadores, deverá realizar uma análise do modelo de um transformador com carga para verificar se as especificações de projeto estão sendo atendidas.

Ao decorrer da unidade, veremos a melhor forma de resolver estas situações.

Bom trabalho!

# Seção 3.1

## Introdução aos quadripolos

### Diálogo aberto

Olá! Nesta seção veremos uma introdução ao conceito de quadripolos elétricos que constituem circuitos elétricos de duas portas (ou quatro terminais). A maioria dos circuitos elétricos podem ser representados na forma de quadripolos, pois muitas vezes o interesse se encontra na análise dos sinais de entrada e saída de um determinado dispositivo, sem levar em conta sua estrutura interna.

Tais circuitos de duas portas podem ser representados por seis conjuntos de parâmetros distintos a depender dos sinais de tensão e corrente de entrada e saída determinados como sinais independentes, sendo eles: parâmetros de impedância, parâmetros de admitância, parâmetros híbridos, parâmetros híbridos inversos, parâmetros de transmissão e parâmetros de transmissão inverso.

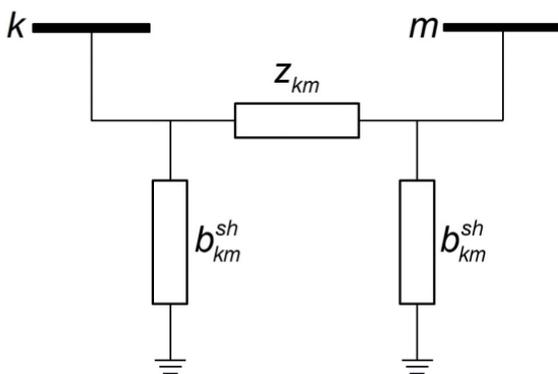
Cada uma das representações possíveis apresenta determinadas características que as tornam mais adequadas para análise de dispositivos específicos, por exemplo, as linhas de transmissão são representadas por parâmetros de impedância, enquanto os transistores são modelados por parâmetros híbridos. Veremos todos estes detalhes ao longo da unidade, porém, nesta primeira seção daremos mais ênfase à representação por parâmetros de impedância e admitância e os detalhes de sua obtenção.

Para aplicar os conceitos aqui introduzidos, suponha que você seja o responsável técnico na área de planejamento e controle de sistemas elétricos de potência. Para planejar a geração e, possivelmente, a expansão de sistemas elétricos, é necessário conhecer a situação do sistema atual, ou seja, fazer uma análise do fluxo de potência, que consiste em obter as tensões e potências em todos pontos do sistema elétrico.

Uma das etapas desse processo é obter uma representação para as linhas de transmissão, as quais constituem quadripolos. Você ficou encarregado de realizar esta etapa e obter a matriz de admitância

para o projeto da operação, para isso, a empresa disponibilizou o modelo da linha de transmissão entre os terminais  $k$  e  $m$  a seguir:

Figura 3.1 | Modelo de uma linha de transmissão



Fonte: elaborada pela autora.

Em que  $z_{km} = r_{km} + jx_{km}$  ( $\Omega$ ) é denominada impedância série e  $b_{km}^{sh}$  (S) é denominada admitância em paralelo (ou *shunt*) da linha de transmissão (LT) entre os pontos  $k$  e  $m$ .

Como você faria para obter representação desta linha como quadripolo? Quais passos poderiam ser tomados para atingir este objetivo?

Descobriremos ao longo desta seção!

Bons estudos!

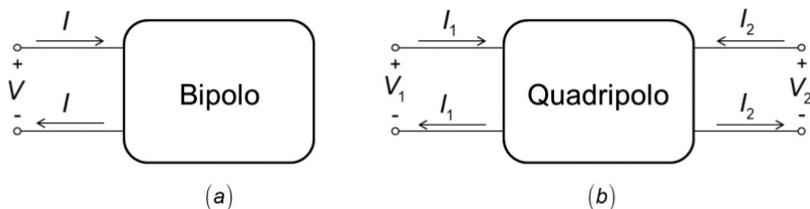
## Não pode faltar

Quadripolos constituem dispositivos elétricos que possuem quatro terminais. Cada par de terminais dos quadripolos corresponde a uma porta e por este motivo também são chamados de circuitos de duas portas.

Diferentemente do bipolo representado pela Figura 3.2(a), o qual possui apenas dois terminais dos quais uma corrente (contínua ou alternada) pode entrar ou sair, (exemplo: resistores, indutores e capacitores), o quadripolo apresenta duas correntes e duas tensões (contínuas ou alternadas) distintas relacionadas em seus terminais de forma independente, como mostra a Figura 3.2(b).

Se for estabelecida uma relação entre as tensões e correntes (CC ou CA)  $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$  e  $I_2$  por meio de parâmetros, o quadripolo pode ser visto como uma caixa preta quando inserido em um circuito de grande porte facilitando a análise e projeto.

Figura 3.2 | Circuitos lineares (a) Uma porta – Bipolo (b) Duas portas - Quadripolo



Fonte: elaborada pela autora.

Para ser considerado um quadripolo, o circuito da Figura 3.2(b) deve atender alguns requisitos, sendo eles:

- i) Não pode conter fontes independentes em seu interior.
- ii) Não pode haver energia inicial armazenada em seu interior, ou seja, as condições iniciais devem ser nulas se houver indutores ou capacitores.
- iii) Não pode haver ligações externas entre as portas de entrada e saída.

Supondo a linearidade dos quadripolos e que os requisitos anteriores sejam atendidos, eles podem ser representados por meio de duas equações independentes que devem ser compostas por duas variáveis independentes (VI) e duas variáveis dependentes (VD), conforme a Equação 3.1.

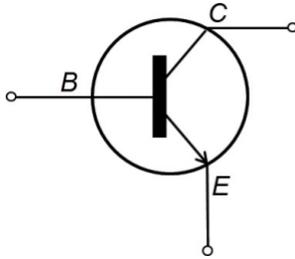
$$\begin{aligned} VD_1 &= k_{11}VI_1 + k_{12}VI_2 \\ VD_2 &= k_{21}VI_1 + k_{22}VI_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} VD_1 \\ VD_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} VI_1 \\ VI_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Os elementos da matriz,  $k_{ij}$  correspondem aos parâmetros do quadripolo.



Alguns filtros e transistores constituem dispositivos elétricos de 3 terminais, como mostra a Figura 3.3. Definindo-se os acessos corretamente, seria possível serem representados como quadripolos?

Figura 3.3 | Transistor tipo emissor comum



Fonte: elaborada pela autora.

A partir da Equação 3.1 descrevem-se modelos matriciais, que contêm os parâmetros do quadripolo, sendo eles denominados:

- a) Matriz de impedâncias de circuito aberto.
- b) Matriz de admitâncias em curto-circuito.
- c) Matriz de parâmetros híbridos.
- d) Matriz de parâmetros de transmissão.

Acadaum desses modelos, são definidas as variáveis independentes, variáveis dependentes e os parâmetros que representam o sistema, como mostra a Tabela 3.1 a seguir.

Tabela 3.1 | Resumo dos modelos que representam quadripolos e suas características

Modelo	Parâmetros	Variáveis independentes	Variáveis dependentes
Impedância	$z$	$I_1$ e $I_2$	$V_1$ e $V_2$
Admitância	$y$	$V_1$ e $V_2$	$I_1$ e $I_2$
Híbrido	$h$	$I_1$ e $V_2$	$V_1$ e $I_2$

Modelo	Parâmetros	Variáveis independentes	Variáveis dependentes
Híbrido inverso	$g$	$V_1$ e $I_2$	$I_1$ e $V_2$
Transmissão	$t$	$V_2$ e $I_2$	$V_1$ e $I_1$
Transmissão inversa	$s$	$V_1$ e $I_1$	$V_2$ e $I_2$

Fonte: elaborada pela autora.

Veremos ao longo da unidade cada uma destas representações com mais detalhes, mas é importante mencionar que nem todo quadripolo pode ser descrito por todas as matrizes de parâmetros, o que vai depender das configurações do circuito. Nesta seção daremos ênfase aos modelos de impedância e admitância, bem como a conversão entre eles.



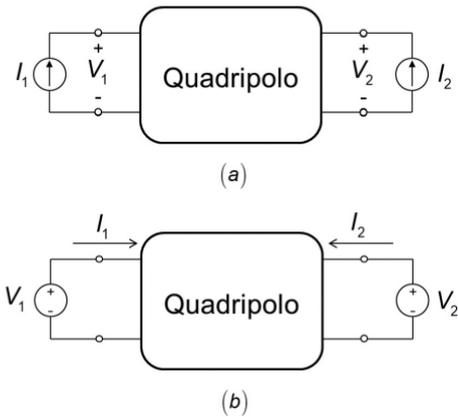
### Assimile

Neste ponto é importante destacar que a análise e a representação de circuitos quadripolos podem ser realizadas nos mais diversos circuitos elétricos de duas portas, sendo eles em corrente contínua (CC) ou em corrente alternada (CA).

Para o caso dos circuitos CA, as análises podem ser realizadas em regime permanente (ou análise fasorial:  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{I}_1, \bar{I}_2$ ), em função do tempo ( $v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t)$ ) ou em função da frequência ( $V_1(j\omega), V_2(j\omega), I_1(j\omega), I_2(j\omega)$ ). Para o caso de análise CC, a notação utilizada, a partir daqui, será  $(v_1, v_2, i_1, i_2)$  e em casos genéricos, serão utilizadas:  $V_1, V_2, I_1, I_2$ .

Um quadripolo pode ser representado com duas fontes de corrente, como na Figura 3.4(a) ou com duas fontes de tensão, como na Figura 3.4(b).

Figura 3.4 | Quadripolos (a) excitado por fontes de corrente (b) excitado por fontes de tensão



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando primeiramente o quadripolo da Figura 3.4(a), observe que há duas fontes de correntes conectadas em suas portas fornecendo  $I_1$  e  $I_2$ . Tais correntes correspondem às variáveis independentes deste circuito, enquanto as tensões  $V_1$  e  $V_2$  correspondem às variáveis dependentes. Escrevendo o modelo deste quadripolo no formato da Equação 3.1, obtemos o Modelo de Impedância:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Em que:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

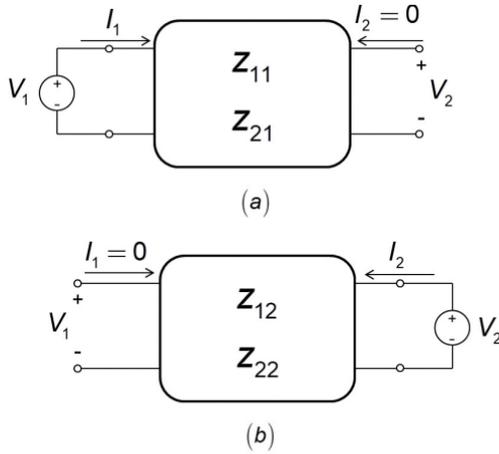
é a matriz de impedâncias de circuito aberto e os elementos  $z_{ij}$  são os parâmetros de impedância, os quais dependem apenas da estrutura do quadripolo e podem ser obtidos medindo ou calculando-se as tensões quando imposta uma das correntes nulas, ou seja, um par de terminais fica em aberto (daí o nome: impedância de circuito aberto), como mostra a Figura 3.5, conforme as Equações 3.4 a 3.7:

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (3.4)$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (3.5)$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.6) \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.7)$$

Figura 3.5 | Determinação dos parâmetros de impedância (a) parâmetros  $z_{11}$  e  $z_{21}$  (b) parâmetros  $z_{12}$  e  $z_{22}$



Fonte: adaptada de Sadiku (2013, p. 771).

Aos parâmetros  $z$  são denominados que:  $z_{11}$  e  $z_{22}$  são impedâncias de entrada e saída de circuito aberto respectivamente,  $z_{12}$  e  $z_{21}$  são impedâncias de transferência de circuito aberto.

Considere agora o circuito da Figura 3.4(b) alimentado com duas fontes de tensão  $V_1$  e  $V_2$ . Observe que neste caso as tensões correspondem às variáveis independentes enquanto as correntes  $I_1$  e  $I_2$  correspondem às variáveis dependentes. Escrevendo o modelo deste quadripolo no formato da Equação (3.1), obtemos o Modelo de Admitância:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Em que:

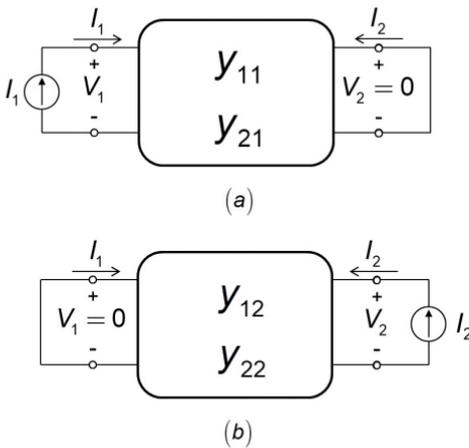
$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

é a matriz de admitância de curto-circuito e os elementos  $y_{ij}$  são os parâmetros de admitância, os quais dependem apenas da estrutura do quadripolo e podem ser obtidos medindo ou calculando-se as correntes quando imposta uma das tensões nula, ou seja, um par de terminais fica em curto-circuito (daí o nome: admitâncias de curto-circuito), como mostra a Figura 3.6 e as Equações 3.10 a 3.13:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (3.10) \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (3.11)$$

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (3.12) \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (3.13)$$

Figura 3.6 | Determinação dos parâmetros de admitância (a) parâmetros  $y_{11}$  e  $y_{21}$  (b) parâmetros  $y_{12}$  e  $y_{22}$



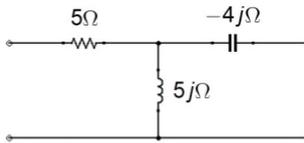
Fonte: adaptada de Sadiku (2013, p. 774).

De forma análoga, os parâmetros  $y$  são denominados:  $y_{11}$  e  $y_{22}$ , são admitâncias de entrada e saída de curto-circuito respectivamente,  $y_{12}$  e  $y_{21}$  são admitâncias de transferência de curto-circuito.



Determine os parâmetros  $z$  e  $y$  para o quadripolo da Figura 3.7.

Figura 3.7 | Quadripolo exemplo



Fonte: elaborada pela autora.

Resolução: Vamos iniciar pelos parâmetros  $z$ , ou seja, os parâmetros de impedância.

Para obter  $\mathbf{z}_{11}$  e  $\mathbf{z}_{21}$ , aplicamos uma tensão CA  $\bar{V}_1$  na porta de entrada e deixamos a porta de saída aberta, conforme a Figura 3.8(a). Utilizando as Equações 3.4 e 3.5 calculamos os parâmetros.

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{(5 + 5j)\bar{I}_1}{\bar{I}_1} = 5 + 5j \Omega \quad \mathbf{z}_{21} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} = \frac{(5j)\bar{I}_1}{\bar{I}_1} = 5j \Omega$$

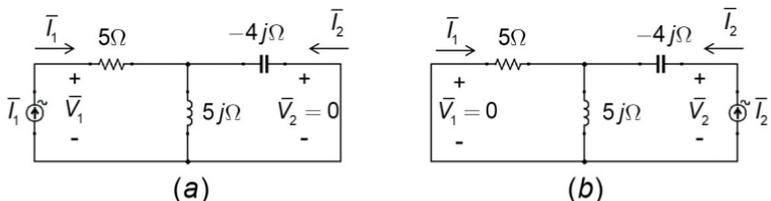
Para obter  $\mathbf{z}_{22}$  e  $\mathbf{z}_{12}$ , aplicamos uma tensão  $V_2$  na porta de saída e deixamos a porta de entrada aberta, como mostra a Figura 3.8(b). Utilizando as Equações 3.6 e 3.7 calculamos os parâmetros.

$$\mathbf{z}_{12} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} = \frac{(5j)\bar{I}_2}{\bar{I}_2} = 5j \Omega \quad \mathbf{z}_{22} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = \frac{(5j - 4j)\bar{I}_2}{\bar{I}_2} = 1j \Omega$$

Logo, montamos a matriz de impedância do quadripolo:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 5 + 5j & 5j \\ 5j & j \end{bmatrix} \Omega$$

Figura 3.8 | Quadripolo com fonte de tensão (a) determinando  $\mathbf{z}_{11}$  e  $\mathbf{z}_{21}$  (b) determinando  $\mathbf{z}_{22}$  e  $\mathbf{z}_{12}$ .



Fonte: elaborada pela autora.

De forma análoga vamos obter os parâmetros  $y$ , ou parâmetros de admitância. Para obter  $y_{11}$  e  $y_{21}$ , aplicamos uma corrente  $I_1$  na porta de entrada e deixamos a porta de saída em curto-circuito, como ilustrado a Figura 3.9(a). Utilizando as Equações 3.10 e 3.11 calculamos os parâmetros.

$$y_{11} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1} \right|_{\bar{V}_2=0} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_1 [5 + (5j) \parallel (-4j)]} = 0,0118 + 0,0471j \text{ S}$$

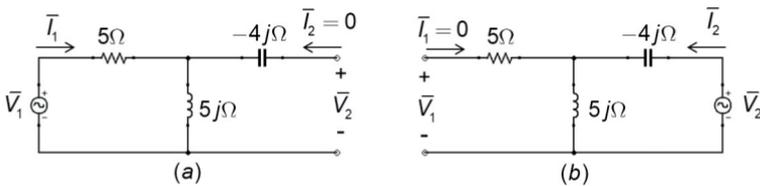
$$y_{21} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\bar{V}_2=0} = \frac{-5\bar{I}_1}{\bar{I}_1 [5 + (5j) \parallel (-4j)]} = -0,0588 - 0,2353j \text{ S}$$

Para obter  $y_{22}$  e  $y_{12}$ , aplicamos uma corrente  $I_2$  na porta de saída e deixamos a porta de entrada em curto-circuito, como apresentado na Figura 3.9(b). Utilizando as Equações 3.12 e 3.13 calculamos os parâmetros.

$$y_{12} = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{V}_1=0} = \frac{-5\bar{I}_2}{(5 + 5j)(5 \parallel 5j - 4j)\bar{I}_2} = -0,0588 - 0,2353j \text{ S}$$

$$y_{22} = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{V}_1=0} = \frac{\bar{I}_2}{(5 \parallel 5j - 4j)\bar{I}_2} = 0,2941 + 0,1765j \text{ S}$$

Figura 3.9 | Quadripolo com fonte de corrente (a) determinando  $y_{11}$  e  $y_{21}$  (b) determinando  $y_{22}$  e  $y_{12}$ .



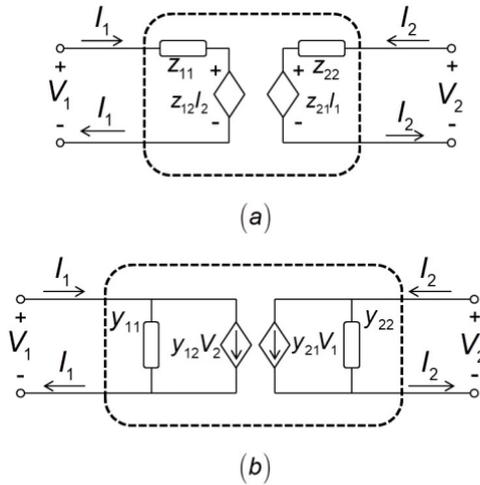
Fonte: elaborada pela autora.

Logo, montamos a matriz de admitância do quadripolo:

$$\therefore Y = \begin{bmatrix} 0,0118 + 0,0471j & -0,0588 - 0,2353j \\ -0,0588 - 0,2353j & 0,2941 + 0,1765j \end{bmatrix} \text{ S}$$

A partir das Equações 3.2, 3.3, 3.8 e 3.9 pode-se obter um circuito equivalente geral para os modelos de impedância e admitância, como mostram as Figuras 3.10(a) e 3.10(b) respectivamente.

Figura 3.10 | Circuitos equivalentes gerais (a) Modelo de Impedâncias (b) Modelo de Admitâncias



Fonte: elaborada pela autora.

Observe que os modelos de impedância e admitâncias são duais, ou seja, antagônicos ou inversos. Se manipularmos a expressão (3.2) é possível obter uma conversão direta entre os modelos. Multiplicando à esquerda, ambos os lados, por  $\mathbf{Z}^{-1}$  obtém-se a Equação 3.14 que se assemelha à expressão (3.8).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos concluir então que  $\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y}$ , ou seja, a conversão entre os modelos  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  é feita invertendo-se a matriz de impedâncias (ou admitâncias).



## Assimile

Os parâmetros de impedância de um quadripolo são obtidos fazendo-se as tensões variáveis independentes e as correntes variáveis dependentes, ou seja, o circuito é alimentado por fontes de tensão nas portas de entrada e saída.

Já os parâmetros de admitância são obtidos fazendo-se as correntes variáveis independentes e as tensões variáveis dependentes, ou seja, o circuito é alimentado por fontes de corrente nas portas de entrada e saída.



## Pesquise mais

Neste ponto é muito importante que você faça uma pesquisa rápida sobre inversão de matrizes de 2ª ordem. Neste caso, a matriz inversa é obtida trocando os elementos da diagonal principal entre si, depois trocando o sinal dos elementos da diagonal secundária e dividindo todos os elementos pelo determinante. Para conferir e relembrar estes conceitos, veja o exemplo 5 da página 38 da referência a seguir.

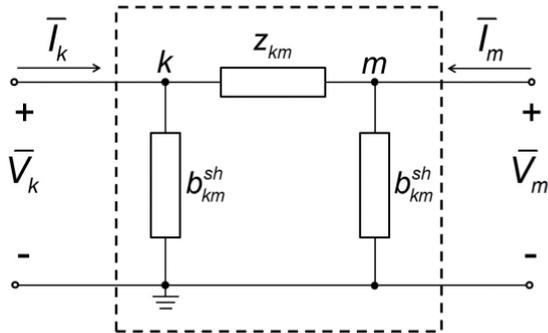
NICHOLSON, W. K. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: AMGH, 2006.

## Sem medo de errar

Agora vamos retomar a situação-problema em que você é o responsável técnico na área de planejamento e controle de sistemas elétricos de potência. Você ficou encarregado de obter a matriz de admitância que representa o modelo da linha de transmissão entre os terminais  $k$  e  $m$  da Figura 3.1.

Redesenhando o circuito da Figura 3.1, podemos visualizar a semelhança do modelo da linha com quadripolo:

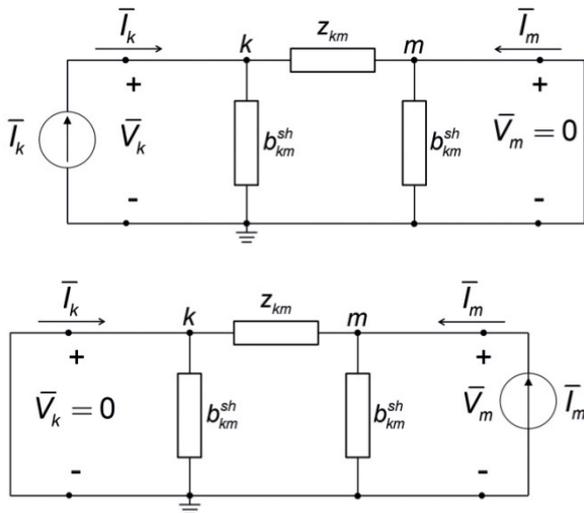
Figura 3.11 | Linha de transmissão por quadripolo



Fonte: elaborada pela autora.

Os parâmetros  $y$ , ou parâmetros de admitância, são obtidos aplicando-se uma corrente  $I_1$  na porta de entrada e deixando a porta de saída em curto-circuito, como mostra a Figura 3.12(a), e com isso obtêm-se  $y_{11}$  e  $y_{21}$ . De forma análoga, aplicando-se uma corrente  $I_2$  na porta de saída e deixando a porta de entrada em curto-circuito, como mostra a Figura 3.12(b), obtêm-se  $y_{12}$  e  $y_{22}$ .

Figura 3.12 | Obtenção dos parâmetros da LT (a)  $y_{kk}$  e  $y_{mk}$  (b)  $y_{km}$  e  $y_{mm}$



Fonte: elaborada pela autora.

Para obter os parâmetros, aplicamos as Equações 3.10 a 3.23:

Aplicando a LKC no nó k da Figura 3.12(a), temos:  $\bar{I}_k = \bar{V}_k b_{km}^{sh} + \bar{V}_k \frac{1}{Z_{km}}$ ,  
denominando  $\frac{1}{Z_{km}} = y_{km}$  resulta:  $\bar{I}_k = \bar{V}_k (b_{km}^{sh} + y_{km})$ .

$$y_{kk} = \left. \frac{\bar{I}_k}{\bar{V}_k} \right|_{V_m=0} = \frac{\bar{V}_k (b_{km}^{sh} + y_{km})}{\bar{V}_k} = b_{km}^{sh} + y_{km}$$

Aplicando LKC no nó m da Figura 3.12(a), obtemos:

$$\bar{I}_m = -\bar{V}_k \frac{1}{Z_{km}} = -\bar{V}_k y_{km}$$

$$y_{mk} = \left. \frac{\bar{I}_m}{\bar{V}_k} \right|_{V_m=0} = \frac{-\bar{V}_k y_{km}}{\bar{V}_k} = -y_{km}$$

De forma análoga para a figura 3.12(b) obtemos:

$$y_{km} = \left. \frac{\bar{I}_k}{\bar{V}_m} \right|_{V_k=0} = \frac{-\bar{V}_m y_{km}}{\bar{V}_m} = -y_{km}$$

$$y_{mm} = \left. \frac{\bar{I}_m}{\bar{V}_m} \right|_{V_k=0} = \frac{\bar{V}_m (b_{km}^{sh} + y_{km})}{\bar{V}_m} = b_{km}^{sh} + y_{km}$$

Portanto, a matriz de admitâncias que representa a linha de transmissão no modelo da Figura 3.1 é dada por:

$$Y_{km} = \begin{bmatrix} b_{km}^{sh} + y_{km} & -y_{km} \\ -y_{km} & b_{km}^{sh} + y_{km} \end{bmatrix} S$$

A partir deste resultado a equipe é capaz de seguir para o cálculo do fluxo de potência e análise do sistema elétrico.

## Avançando na prática

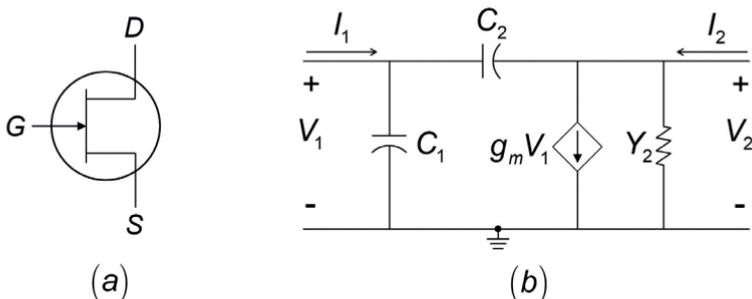
### Análise de um transistor de efeito de campo (FET) como quadripolo

#### Descrição da situação-problema

Você trabalha em uma indústria de dispositivos semicondutores, entre eles há o transistor de efeito de campo (FET), utilizado como amplificador, chave ou controlador de corrente sobre uma carga. O FET pode ser subdividido em duas categorias: JFET e MOSFET e

apresenta três terminais: porta (*gate*), fonte (*source*) e dreno (*drain*), cujo símbolo é dado na Figura 3.13(a). Uma das suas atividades consiste na análise e no desenvolvimento desse dispositivo, cujo modelo de duas portas simplificado é dado pela Figura 3.13(b) disponibilizado pelos manuais.

Figura 3.13 | Transistor de efeito de campo (FET) (a) Símbolo (b) Modelo simplificado de duas portas



Fonte: elaborada pela autora.

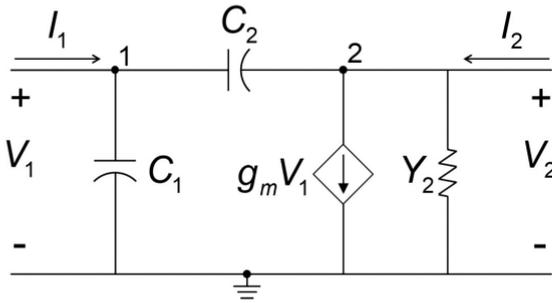
Para um primeiro projeto e análise de um amplificador, sua equipe deverá desenvolver o modelo por parâmetros  $y$  deste dispositivo, conforme solicitado por seu supervisor. Como você poderia proceder para cumprir essa tarefa, sabendo que o amplificador deverá operar sobre uma ampla faixa de frequências?

### Resolução da situação-problema

Para obter modelo do transistor de efeito de campo por parâmetros  $y$ , vamos aplicar análise nodal, vista na Seção 1.3, no circuito da Figura 3.13(b). Como o dispositivo deverá operar sob uma ampla faixa de frequências, representaremos as reatâncias e susceptâncias, em função da frequência  $j\omega$ .

Destacando os nós do circuito, observamos a presença de duas unidades conforme, a Figura 3.14.

Figura 3.14 | Modelo do FET com destaque dos nós



Fonte: elaborada pela autora.

Escrevendo as equações dos nós temos:

Nó 1:

$$I_1 = \frac{V_1(j\omega)}{1/j\omega C_1} + \frac{(V_1 - V_2)}{1/j\omega C_2} = V_1 j\omega C_1 + (V_1 - V_2) j\omega C_2 \therefore I_1 = V_1 [j\omega(C_1 + C_2)] - V_2 (j\omega C_2)$$

Nó 2:

$$I_2 = V_2 Y_2 + g_m V_1 + \frac{(V_2 - V_1)}{1/j\omega C_2} = V_2 Y_2 + g_m V_1 + (V_2 - V_1) j\omega C_2 \therefore I_2 = V_1 (g_m - j\omega C_2) + V_2 (Y_2 + j\omega C_2)$$

Comparando as duas equações dos nós com as Equações 3.8 e 3.9 do modelo de admitâncias, temos que os parâmetros  $y$  são:

$$Y = \begin{bmatrix} j\omega(C_1 + C_2) & j\omega C_2 \\ g_m - j\omega C_2 & Y_2 + j\omega C_2 \end{bmatrix} S$$

A partir deste modelo de admitâncias genérico, diversos FETs podem ser analisados pela equipe de projetos. Para isso, basta substituir os valores nominais das capacitâncias  $C_1$  e  $C_2$ , da admitância  $Y_2$  e da transcondutância  $g_m$  de acordo com as especificações desejadas para o projeto.

## Faça valer a pena

**1.** Ao representar um circuito elétrico de duas portas por meio de um conjunto de parâmetros que relaciona as correntes e a tensão na entrada, passamos a ver este circuito como uma caixa preta e sua estrutura interna não precisa ser especificada. Em dispositivos físicos, tais parâmetros podem ser obtidos por meio de ensaios e medidas realizadas diretamente sobre os mesmos.

Dado o modelo de impedâncias de um quadripolo, assinale a alternativa que contém os parâmetros de admitâncias corretos.

$$V_1 = 3I_1 + 2I_2$$

$$V_2 = 2I_1 + 4I_2$$

a)  $Y = \begin{bmatrix} 0,375 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ S}$

b)  $Y = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,125 \\ -0,125 & 0,1875 \end{bmatrix} \text{ S}$

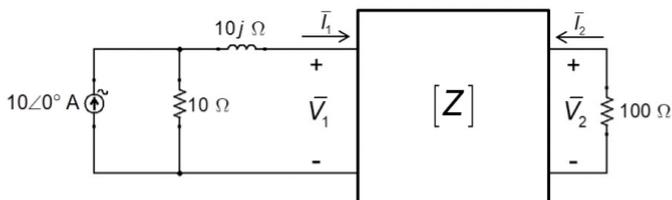
c)  $Y = \begin{bmatrix} -0,1875 & 0,125 \\ 0,125 & -0,25 \end{bmatrix} \text{ S}$

d)  $Y = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,375 \end{bmatrix} \text{ S}$

e)  $Y = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,167 \\ -0,167 & 0,33 \end{bmatrix} \text{ S}$

**2.** Para efeito de cálculos em análise e projeto de circuitos muitos complexos podem ter sua descrição detalhada por meio de um pequeno conjunto de parâmetros sendo eles: impedância, admitância, híbrido, híbrido inverso, transmissão e transmissão inverso. Assim, um circuito físico complexo, tal como uma linha de transmissão, pode ser caracterizado por um conjunto de parâmetros, de forma a simplificar sua análise.

Figura 3.15 | Quadripolo com carga



Fonte: elaborada pela autora.

$$Z = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \Omega$$

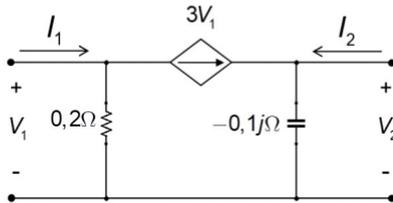
Assinale a alternativa que apresenta os valores corretos de  $I_1$  e  $I_2$ .

- a)  $\bar{I}_1 = 6,0 \angle -37^\circ \text{ A}$ ,  $\bar{I}_2 = 0,6 \angle 143^\circ \text{ A}$ .
- b)  $\bar{I}_1 = 0,6 \angle -37^\circ \text{ A}$ ,  $\bar{I}_2 = 6 \angle 143^\circ \text{ A}$ .
- c)  $\bar{I}_1 = 60 \angle -37^\circ \text{ A}$ ,  $\bar{I}_2 = 6,0 \angle 143^\circ \text{ A}$ .
- d)  $\bar{I}_1 = 6,0 \angle 143^\circ \text{ A}$ ,  $\bar{I}_2 = 0,6 \angle -37^\circ \text{ A}$ .
- e)  $\bar{I}_1 = 0,6 \angle 143^\circ \text{ A}$ ,  $\bar{I}_2 = 6,0 \angle -37^\circ \text{ A}$ .

**3.** De forma geral, quando não se conhece a estrutura interna de um quadripolo ou não se pode, por algum motivo, calcular o conjunto de parâmetros de impedância que o representam, os mesmos podem ser obtidos por meio de ensaios adequados de curto-circuito e circuito aberto nos terminais de entrada e saída, conforme as Equações 3.4 a 3.7.

Considere o circuito elétrico de duas portas da Figura 3.16.

Figura 3.16 | Quadripolo com fonte de corrente dependente de tensão



Fonte: elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente os parâmetros de admitância do circuito.

- a)  $Y = \begin{bmatrix} 0,2 & 3 \\ 0 & -0,1j \end{bmatrix} \text{ S}$
- b)  $Y = \begin{bmatrix} 0,2 & 3 \\ 3 & -0,1j \end{bmatrix} \text{ S}$
- c)  $Y = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 10j \end{bmatrix} \text{ S}$
- d)  $Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 10j \end{bmatrix} \text{ S}$
- e)  $Y = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 10j \end{bmatrix} \text{ S}$

## Seção 3.2

### Parâmetros híbridos e de transmissão

#### Diálogo aberto

Olá! Na seção anterior desta unidade foram apresentadas as características gerais de circuitos de duas portas, uma introdução geral aos possíveis parâmetros que podem ser utilizados para representá-los, conforme mostrado na Tabela 3.1. Por fim, vimos também os detalhes da obtenção dos parâmetros de impedância e admitância. No entanto, nem sempre é possível representar um circuito por meio dos parâmetros  $z$  e  $y$ , como é o exemplo de um transformador ideal.

Para contornar esse problema, veremos outros conjuntos de parâmetros que podem ser obtidos, denominados **parâmetros híbridos** e **parâmetros de transmissão** e seus modelos inversos.

O modelo de transmissão (também denominado de parâmetros ABCD) utiliza  $V_1$  e  $I_1$  como variáveis dependentes, enquanto  $V_2$  e  $-I_2$  são as variáveis independentes. Esse modelo é amplamente utilizado em sistemas de telecomunicações para representar o sinal entre um transmissor e um receptor de sinal. Já o modelo híbrido (também denominado de parâmetros  $h$ ), o qual se baseia em definir  $V_1$  e  $I_2$  como variáveis dependentes e  $V_2$  e  $I_1$  como variáveis independentes, é muito utilizado para representar circuitos com transistores, que compõem amplificadores de sinais.

Transistores são componentes eletrônicos semicondutores que podem operar como amplificadores de corrente ou tensão (por exemplo em sistemas de áudio) e como chaves liga-desliga (por exemplo em computadores digitais). Há dois tipos de transistores, o transistor bipolar de junção (TBJ) e o transistor de efeito de campo (FET).

O transistor bipolar de junção (TBJ) apresenta três terminais: base ( $B$ ), emissor ( $E$ ) e coletor ( $C$ ), conforme vimos na Figura 3.3 da Seção 3.1, sendo a corrente na base, resumidamente, a responsável pela polarização direta (modo de operação com alto ganho) ou em corte (circuito-aberto) do componente. O TBJ é composto por três entradas, possui três configurações de operação distintas, sendo um

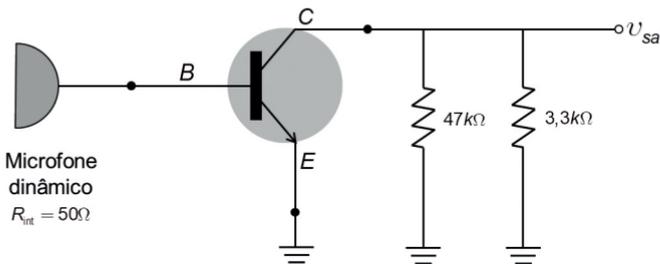
dos terminais a entrada do circuito, outro terminal a saída, e o terceiro terminal comum à entrada e saída. Com isso, as três configurações possíveis são: base comum (BC), coletor comum (CC) e emissor comum (EC), sendo esta última a mais utilizada.

Neste contexto, suponha que você seja o técnico eletrônico responsável pela área de projetos em uma empresa que fabrica amplificadores de áudio. Em um novo projeto desenvolvido, é necessário caracterizar o ganho de tensão total do circuito, que corresponde à relação entre a tensão de saída e a tensão da fonte, que no caso seria do microfone ( $A_{vT} = v_2/V_{mic}$ ) e o ganho de corrente, que corresponde à relação entre a corrente na saída e a corrente na entrada do quadripolo ( $A_i = i_2/i_1$ ). Essas informações são necessárias para verificar se o circuito amplificador composto por um transistor bipolar de junção (TBJ) em configuração EC, responsável pela pré-amplificação do sinal de áudio de um microfone, representado na Figura 3.17, atende aos valores mínimos de 200 V/V para  $A_v$  e 100 I/I para  $A_i$ .

Os dados do modelo de parâmetros híbridos do circuito de duas portas que representa o componente TBJ disponibilizados pelo fabricante para análise de pequenos sinais são:

- Impedância de entrada de base  $h_{11} = h_{ie} = 1,6k\Omega$
- Razão de realimentação de tensão inversa  $h_{12} = h_{re} = 2 \times 10^{-4}$
- Ganho de corrente coletor-base  $h_{21} = h_{\beta} = 110$
- Admitância de saída  $h_{22} = h_{oe} = 20 \mu S$

Figura 3.17 | Pré amplificador do sinal de áudio de um microfone dinâmico



Fonte: adaptada de Boylestad (2004, p. 304).

Com base nos dados fornecidos, como você faria para obter os ganhos desejados?

Veremos todos os passos necessários para realizar esta tarefa ao longo desta seção.

Então bons estudos e mãos à obra!

## Não pode faltar

Na Seção 3.1 foram apresentadas as características gerais de circuitos de duas portas, uma introdução geral aos possíveis parâmetros que podem ser utilizados para representá-los, como mostra a Tabela 3.1 e os detalhes da obtenção dos parâmetros de impedância e admitância. No entanto, nem sempre é possível representar um circuito por meio dos parâmetros  $z$  e  $y$ , como é o exemplo de um transformador ideal.

Para contornar este problema, outros conjuntos de parâmetros podem ser obtidos, denominados parâmetros híbridos e parâmetros de transmissão.

O modelo híbrido se baseia em definir  $V_1$  e  $I_2$  como variáveis dependentes e  $V_2$  e  $I_1$  como variáveis independentes. Escrevendo o modelo deste quadripolo no formato da Equação 3.1, obtemos o Modelo Híbrido:

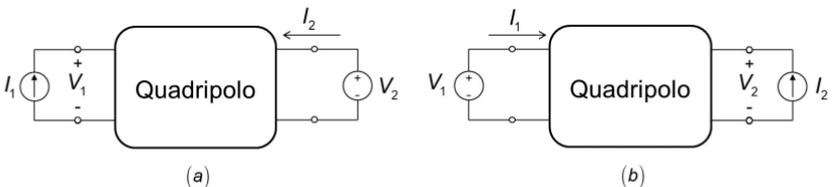
$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Onde

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

é a matriz híbrida e os elementos  $h_j$  são parâmetros híbridos, ou simplesmente parâmetros  $h$ , pois formam uma combinação híbrida de variáveis dependentes e independentes, conforme mostrado na Figura 3.18(a).

Figura 3.18 | Quadripolos com excitação híbrida (a) Parâmetros  $h$  (b) Parâmetros  $g$



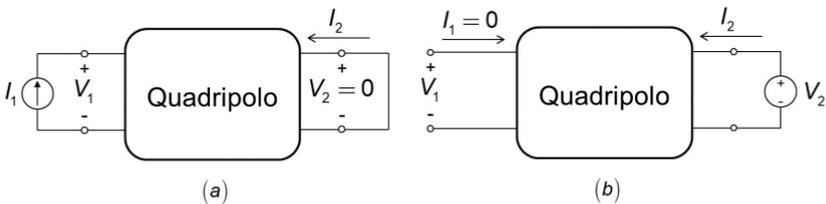
Fonte: elaborada pela autora.

Tais parâmetros podem ser obtidos curto-circuitando ou deixando em aberto a entrada ou a saída do quadripolo, como mostra a Figura 3.19, segundo as Equações 3.17 a 3.20:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad (3.17) \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad (3.18)$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.19) \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.20)$$

Figura 3.19 | Obtenção dos parâmetros híbridos (a) parâmetros  $h_{11}$  e  $h_{21}$  (b) parâmetros  $h_{12}$  e  $h_{22}$

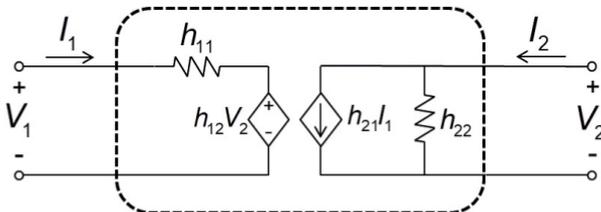


Fonte: elaborada pela autora.

Note que os parâmetros  $h$  possuem unidades distintas entre si, sendo  $h_{11}$  em  $\Omega$ ,  $h_{22}$  em  $S$ ,  $h_{12}$  e  $h_{21}$  são adimensionais representando ganhos, como pode ser observado nas Equações 3.18 e 3.19.

Este modelo é muito utilizado na representação de transistores devido à facilidade em se medir experimentalmente tais parâmetros. O circuito equivalente ao modelo híbrido da Equação 3.15 pode ser visto na Figura 3.20.

Figura 3.20 | Circuito equivalente ao modelo híbrido de duas portas



Fonte: elaborada pela autora.

De forma análoga, agora definindo  $V_2$  e  $I_1$  como variáveis dependentes, e  $V_1$  e  $I_2$  como variáveis independentes, obtemos o modelo Híbrido Inverso, como mostra a Figura 3.18(b), cuja representação é dada pela Equação 3.21:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

é a matriz híbrida inversa e os elementos  $g_j$  são parâmetros híbridos inversos, ou simplesmente parâmetros  $g$ .

A matriz  $G$  também pode ser obtida a partir da matriz híbrida, por meio da Equação 3.23.

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1} \quad (3.23)$$

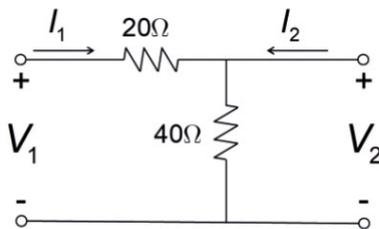
Pelo fato deste modelo ser pouco utilizado em relação aos demais, seus detalhes de obtenção serão suprimidos.



### Exemplificando

Obtenha os parâmetros  $h$  para o circuito da Figura 3.21.

Figura 3.21 | Circuito elétrico para obtenção dos parâmetros  $h$

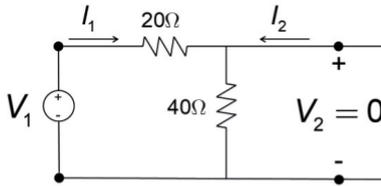


Fonte: adaptada de Sadiku (2013, p. 811).

Para obter os parâmetros híbridos do circuito da Figura 3.21, aplicamos as Equações 3.17 a 3.20.

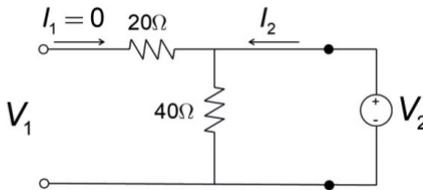
Figura 3.22 | Circuito para cálculo dos parâmetros  $h_{11}$  e  $h_{21}$  do exemplo

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{20I_1}{I_1} = 20\Omega \quad \text{exemplo} \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = -1$$



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.23 | Circuito para cálculo dos parâmetros  $h_{22}$  e  $h_{12}$  do exemplo  $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = 1$   
 exemplo  $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{40I_2} = 250mS$



Fonte: elaborada pela autora.

Finalmente temos os parâmetros de transmissão, cuja representação é dada pela relação entre as variáveis na porta de entrada e as variáveis na porta de saída. Este modelo, diferentemente dos demais, considera a corrente na porta de saída saindo do circuito, ou seja, é utilizada  $-I_2$  ao invés de  $I_2$ , como mostra a Figura 3.24.

Figura 3.24 | Representação do circuito de duas portas definido pelos parâmetros de transmissão



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, para representar este modelo,  $V_1$  e  $I_1$  são definidas como variáveis dependentes enquanto  $V_2$  e  $-I_2$  são definidas como variáveis independentes conforme o modelo da Equação 3.24.

$$\begin{matrix} V_1 = AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 = CV_2 + D(-I_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Onde

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

é a matriz de transmissão e os elementos A, B, C e D são os parâmetros de transmissão, ou simplesmente parâmetros ABCD.

O nome transmissão é utilizado, pois este modelo fornece uma medida de quanto o circuito transmite a tensão e a corrente de uma fonte na entrada para uma carga, sendo esta representação muito utilizada em sistemas de sinais de telecomunicações em que o lado transmissor é representado por  $V_1$  e  $I_1$  e o lado receptor é representado por  $V_2$  e  $-I_2$ . Além disso, a convenção da corrente de saída negativa auxilia na análise de circuitos em cascata (onde a saída de um quadripolo se conecta com a entrada de outro).

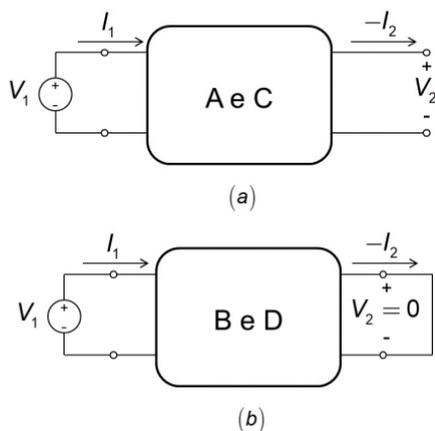
Os parâmetros de transmissão podem ser definidos de acordo com a Figura 3.25 e conforme as Equações 3.26 a 3.29 a seguir:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (3.26) \quad B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad (3.27)$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (3.28) \quad D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad (3.29)$$

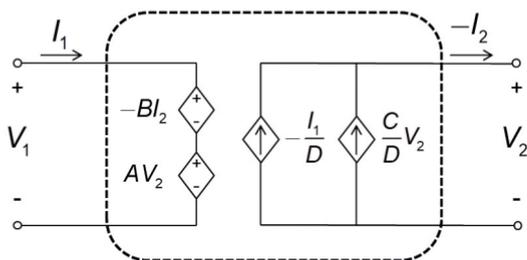
A e D são adimensionais, B é medido em Ohms ( $\Omega$ ) e C é medido em Siemens (**S**). O circuito equivalente ao modelo de transmissão da Equação 3.24 pode ser visto na Figura 3.26.

Figura 3.25 | Determinação dos parâmetros de transmissão (a) A e C (b) B e D



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.26 | Circuito equivalente do modelo de transmissão do circuito de duas portas



Fonte: elaborada pela autora.

Se de forma análoga  $V_2$  e  $-I_2$  forem definidas como variáveis dependentes e  $V_1$  e  $I_1$  como variáveis independentes, temos o modelo de transmissão inverso conforme mostra a Equação 3.30.

$$\begin{aligned} V_2 &= aV_1 + bI_1 \\ -I_2 &= cV_1 + dI_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Onde

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

é a matriz de transmissão inversa e os elementos a, b, c e d são os parâmetros de transmissão inversos. A matriz S também pode ser

obtida a partir da matriz T por meio da Equação 3.32.

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} \quad (3.32)$$



Pesquise mais

Uma vez que as variáveis envolvidas na representação dos modelos de um quadripolo são as mesmas ( $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ ), é possível relacionar um conjunto de parâmetros que os representam com os demais conjuntos a partir de manipulações algébricas das equações do modelo.

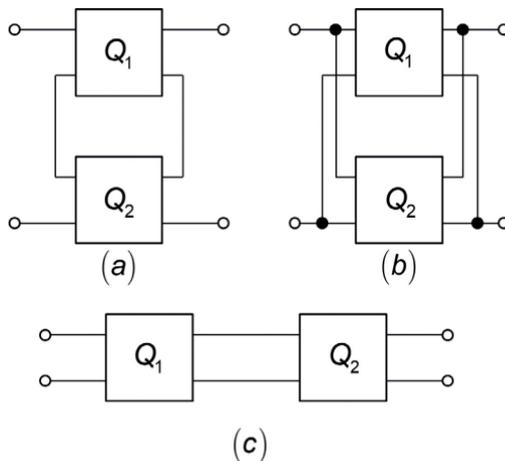
Este procedimento, juntamente com a tabela de conversões resultantes pode ser vista na referência abaixo.

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew O. **Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações**. 5. ed. São Paulo: AMGH, 2013. p. 787-789.

A análise e síntese de um sistema complexo podem ser simplificadas dividindo-o em subsistemas menores. Modelando esses subsistemas como quadripolos, o sistema completo será composto pela interconexão dos quadripolos.

As formas básicas de se interligar quadripolos são: série, paralelo e cascata, como mostra a Figura 3.27.

Figura 3.27 | Quadripolos interconectados (a) em série (b) em paralelo (c) em cascata



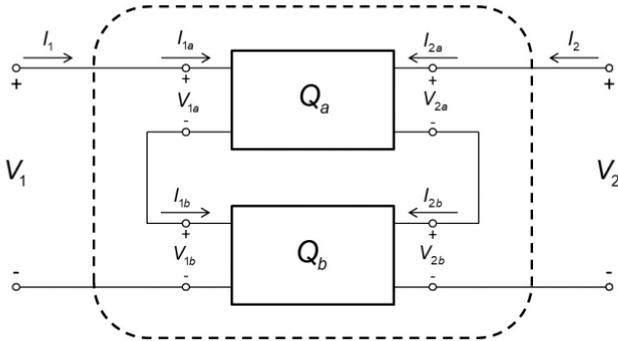
Fonte: elaborada pela autora.

Nos circuitos com quadripolos interconectados em série, as correntes de entrada são idênticas e as tensões são somadas, como mostra a Figura 3.28, ou seja:

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \quad (3.33) \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b} \quad (3.34)$$

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} \quad (3.35) \quad V_2 = V_{2a} + V_{2b} \quad (3.36)$$

Figura 3.28 | Quadripolos associados em série



Fonte: elaborada pela autora.

Escrevendo os quadripolos pelo modelo de impedâncias temos:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} & z_{12a} \\ z_{21a} & z_{22a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} \quad (3.37) \quad \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11b} & z_{12b} \\ z_{21b} & z_{22b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Substituindo as Equações 3.37 e 3.38 nas Equações 3.35 e 3.36, levando em conta as Equações 3.33 e 3.34, obtemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ou seja,

$$Z = Z_a + Z_b \quad (3.40)$$

Portanto, concluímos que a matriz de impedâncias do quadripolo equivalente em série é dada pela soma das matrizes de impedâncias individuais dos quadripolos interconectados e esta relação vale para  $\eta$  quadripolos associados em série.

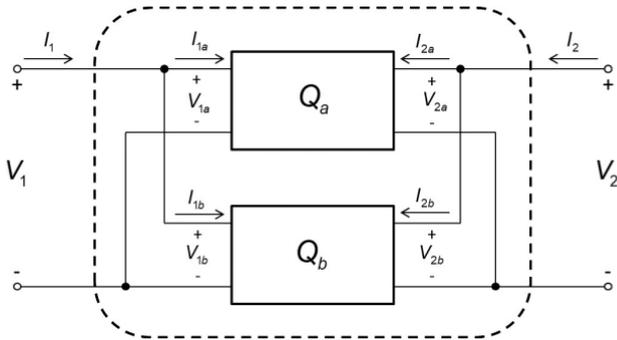
Nos circuitos com quadripolos interconectados em paralelo, as correntes nas portas do circuito equivalente correspondem à soma

das correntes dos quadripolos associados enquanto as tensões em suas portas são iguais, como mostra a Figura 3.29, ou seja:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \quad (3.41) \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b} \quad (3.42)$$

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \quad (3.43) \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b} \quad (3.44)$$

Figura 3.29 | Quadripolos associados em paralelo



Fonte: elaborada pela autora.

Modelando os circuitos por meio dos parâmetros  $y$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} & y_{12a} \\ y_{21a} & y_{22a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} \quad (3.45) \quad \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11b} & y_{12b} \\ y_{21b} & y_{22b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

De forma análoga à análise de quadripolos em série, substituímos as Equações 3.45 e 3.46 nas Equações 3.41 e 3.42, levando em conta as Equações 3.43 e 3.44 que resulta:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Logo,

$$Y = Y_a + Y_b \quad (3.48)$$

Portanto, concluímos que o modelo equivalente da associação de quadripolos em paralelo representado pelo modelo de admitâncias corresponde à soma dos parâmetros  $y$  de cada um dos quadripolos, e esta relação vale para  $n$  quadripolos associados em paralelo.



**Refleta**

Quando há interconexão de circuitos em série ou paralelo, o sistema equivalente resultante deve ser obtido por meio de um conjunto de

parâmetros específico, no caso em série utilizam-se os parâmetros  $z$  e em paralelo os parâmetros  $y$ .

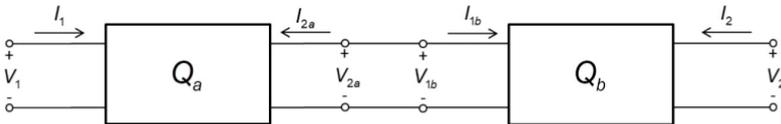
Se os circuitos estivessem representados pelos demais parâmetros, quais procedimentos poderão ser realizados para obter o modelo resultante?

Nos circuitos com quadripolos interconectados em cascata, os terminais de saída de um quadripolo são conectados aos terminais de entrada do quadripolo seguinte, como mostra a Figura 3.30. Neste caso, temos as seguintes relações:

$$I_{1b} = -I_{2a} \quad (3.49)$$

$$V_{1b} = V_{2a} \quad (3.50)$$

Figura 3.30 | Quadripolos associados em cascata



Fonte: elaborada pela autora.

Neste caso, modelando os circuitos por meio dos parâmetros ABCD (modelo de transmissão), obtemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Substituindo as Equações 3.49, 3.50 e 3.52 na Equação 3.51 obtemos o modelo equivalente da associação em cascata:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Ou seja,

$$T = T_a \cdot T_b \quad (3.54)$$

Portanto, concluímos que os parâmetros ABCD (ou de transmissão) do quadripolo resultante da interconexão em cascata corresponde ao produto matricial das matrizes de transmissão dos quadripolos envolvidos na ordem que os mesmos se encontram conectados, esta relação vale para  $\eta$  quadripolos associados em cascata.



Quando os quadripolos encontram-se associados em série, utiliza-se a representação por meio dos parâmetros  $z$  e o modelo equivalente consiste na soma das matrizes de impedâncias individuais dos quadripolos envolvidos  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \dots + \mathbf{Z}_n$ .

Caso os quadripolos estejam associados em paralelo, utiliza-se a representação por meio dos parâmetros  $y$  e o modelo equivalente é dado pela soma das matrizes de admitâncias dos quadripolos interconectados  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b + \dots + \mathbf{Y}_n$ .

Por fim, se os quadripolos estiverem em cascata, utiliza-se a representação por meio dos parâmetros ABCD e o modelo equivalente é dado pela multiplicação das matrizes de transmissão dos quadripolos na ordem em que se encontram interconectados.  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n$ .

## Sem medo de erro

Agora vamos retomar a situação-problema em que você é o projetista responsável em uma empresa que fabrica amplificadores de áudio.

Você ficou encarregado da análise de um pré-amplificador do sinal de áudio de um microfone dinâmico, cujo circuito está representado na Figura 3.17. Foi solicitada uma análise dos ganhos de tensão ( $\mathbf{A}_v$ ) e corrente ( $\mathbf{A}_i$ ) deste circuito para garantir um valor mínimo de 200 V/V e 100 I/I, respectivamente.

Os dados do modelo de parâmetros híbridos do circuito de duas portas que representa o componente TBJ disponibilizados pelo fabricante para análise de pequenos sinais são:

- Impedância de entrada de base  $h_{11} = h_{re} = 1,6k\Omega$
- Razão de realimentação de tensão inversa  $h_{12} = h_{re} = 2 \times 10^{-4}$
- Ganho de corrente coletor-base  $h_{21} = h_{fe} = 110$
- Admitância de saída  $h_{22} = h_{oe} = 20\mu S$

A partir dos parâmetros híbridos do transistor bipolar de junção, podemos escrever as equações do modelo equivalente por meio de quadripolo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \text{ onde } H = \begin{bmatrix} 1,6 \times 10^3 & 2 \times 10^{-4} \\ 110 & 20 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

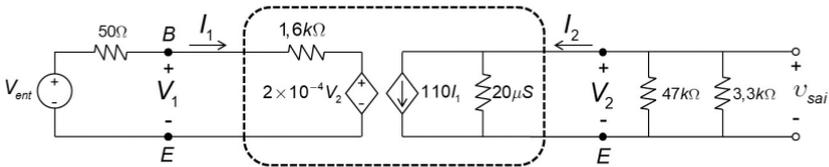
Portanto:

$$V_1 = 1,6 \times 10^3 I_1 + 2 \times 10^{-4} V_2 \quad (3.55)$$

$$I_2 = 110 I_1 + 20 \times 10^{-6} V_2 \quad (3.56)$$

Utilizando o circuito equivalente do modelo híbrido de duas portas da Figura 3.20, esboçamos o circuito amplificador, resultando no circuito da Figura 3.31.

Figura 3.31 | Circuito equivalente do pré-amplificador com fonte e carga



Fonte: elaborada pela autora.

Analisando este circuito temos:

$$V_2 = v_{sai} = -(47k\Omega \parallel 3,3k\Omega) I_2 \therefore V_2 = -3083 I_2 \quad (3.57)$$

$$I_2 = -324,3 \times 10^{-6} V_2 \quad (3.58)$$

Deseja-se obter os ganhos de tensão ( $A_v = V_2/V_1$ ) e corrente ( $A_i = I_2/I_1$ ) do circuito. Para obter  $A_v$ , primeiro isolamos  $I_1$  na Equação 3.56 e em seguida substituímos na Equação 3.55:

$$I_1 = \frac{I_2 - 20 \times 10^{-6} V_2}{110}$$

$$V_1 = 1,6 \times 10^3 \left( \frac{I_2 - 20 \times 10^{-6} V_2}{110} \right) + 2 \times 10^{-4} V_2 \Rightarrow V_1 = 14,55 I_2 - 90,91 \times 10^{-6} V_2 \quad (3.59)$$

Substituindo a Equação 3.58 na 3.59 resulta:

$$V_1 = 14,5 (-324,3 \times 10^{-6} V_2) - 90,91 \times 10^{-6} V_2 \Rightarrow V_1 = -4,81 \times 10^{-3} V_2$$

Calculamos, dessa forma, o ganho de tensão:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{1}{4,81 \times 10^{-3}} \cong -208 \text{ V/V}$$

Para calcular o ganho de corrente, substituímos a Equação 3.57 na Equação 3.56:

$$I_2 = 110I_1 + 20 \times 10^{-6} (-3083I_2) = \frac{110}{1 + 20 \times 10^{-6} \cdot 3083} I_1 \Rightarrow I_2 = 103,61I_1$$

Calculamos, portanto o ganho de corrente:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} \cong 104 \quad I/I$$

A partir dos valores de ganho de tensão e corrente obtém-se uma boa estimativa da amplitude do sinal de saída para um dado sinal de entrada. Além disso, verifica-se que os valores atendem os requisitos de ganho mínimo, e sendo ambos os ganhos de tensão e corrente elevados, garante-se uma amplificação de potência, característica muito importante em sistemas amplificadores de áudio.

## Avançando na prática

### Síntese de filtro em cascata

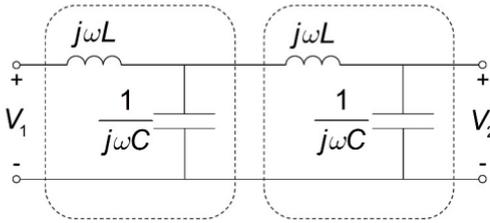
#### Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o responsável técnico numa empresa de telecomunicações. Foi solicitada a síntese de um filtro passa-baixa em cascata. Este filtro é necessário para a filtragem de ruídos em um sistema de recepção de sinal telefônico da companhia.

A equipe de projetos disponibilizou a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada em função da frequência ( $j\omega$ ):  $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ . A partir desta relação, sua tarefa é sintetizar este filtro em cascata, ou seja, obter corretamente o conjunto de valores para os capacitores e indutores correspondentes à Figura 3.32 considerando uma carga  $Z_c = 1\Omega$  conectada aos terminais de saída do filtro.

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{1}{0,36(j\omega)^4 + 1,8(j\omega)^3 + 1,8(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 1} \quad (3.60)$$

Figura 3.32 | Filtro passa-baixa em cascata



Fonte: elaborada pela autora.

### Resolução da situação-problema

Para obter o conjunto de componentes adequados para a síntese do filtro solicitado, vamos primeiramente obter os parâmetros de transmissão, uma vez que estes parâmetros são mais adequados para análise de quadripolos em cascata.

Como os dois filtros são idênticos, basta obter o modelo do primeiro filtro. Temos, portanto:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{V_1}{V_1 \left( \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + j\omega L} \right)} = \frac{1/j\omega C + j\omega L}{1/j\omega C} = 1 + (j\omega)^2 LC$$

$$B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = - \frac{(j\omega L)I_2}{I_2} = (j\omega)L, \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{I_1(1/j\omega C)} = (j\omega)C,$$

$$D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = 1$$

Temos, portanto, a matriz de transmissão de um filtro:

$$T = \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^2 LC & (j\omega)L \\ (j\omega)C & 1 \end{bmatrix}$$

A interconexão em cascata de dois filtros idênticos resulta na multiplicação das matrizes de transmissão:

$$T_{eq} = T \cdot T = T^2 = \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^2 LC & (j\omega)L \\ (j\omega)C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^2 LC & (j\omega)L \\ (j\omega)C & 1 \end{bmatrix}$$

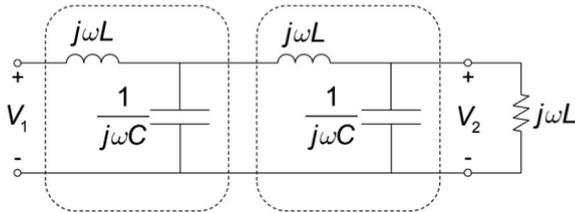
$$T_{eq} = \begin{bmatrix} C^2 L^2 (j\omega)^4 + 3CL(j\omega)^2 + 1 & CL^2 (j\omega)^3 + 2L(j\omega) \\ C^2 L(j\omega^3) - 2C(j\omega) & 1 + CL(j\omega)^2 \end{bmatrix}$$

Escrevendo a primeira equação do modelo de transmissão, conforme a Equação 3.24 obtemos:

$$V_1 = (C^2L^2(j\omega)^4 + 3CL(j\omega)^2 + 1)V_2 + (CL^2(j\omega)^3 + 2L(j\omega))(-I_2) \quad (3.61)$$

Conectando a carga  $Z_c = 1\Omega$  na saída do filtro, obtemos uma expressão da corrente ( $-I_2$ ):

Figura 3.33 | Filtro passa-baixa em cascata com carga conectada nos terminais de saída



Fonte: elaborada pela autora.

$$V_2 = Z_c(-I_2) \Rightarrow V_2 = 1 \cdot (-I_2) \therefore (-I_2) = V_2 \quad (3.62)$$

Substituindo a equação (3.62) em (3.61) e isolando  $V_2/V_1$ :

$$V_1 = (C^2L^2(j\omega)^4 + 3CL(j\omega)^2 + 1)V_2 + (CL^2(j\omega)^3 + 2L(j\omega))V_2$$

$$V_1 = (C^2L^2(j\omega)^4 + 3CL(j\omega)^2 + 1 + CL^2(j\omega)^3 + 2L(j\omega))V_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{C^2L^2(j\omega)^4 + CL^2(j\omega)^3 + 3CL(j\omega)^2 + 2L(j\omega) + 1} \quad (3.63)$$

Comparando as Equações 3.60 e 3.63 obtemos os seguintes valores para os capacitores e indutores:

$$2L = 6 \Rightarrow L = 3H$$

$$CL^2 = 1,8 \Rightarrow C = \frac{1,8}{3^2} = 200mF$$

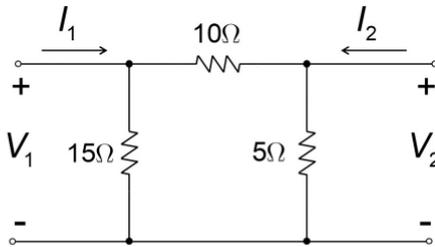
Com esses valores de L e C, o filtro da Figura 3.32 pode ser implementado e como resultado, a relação  $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$  será atendida, conforme os requisitos da equipe de projeto.

## Faça valer a pena

**1.** Em um circuito amplificador, algumas expressões são de grande importância, sendo elas: ganho de tensão e corrente e impedância de entrada e saída. Para obter estes valores, quaisquer dos seis conjuntos de parâmetros para quadripolos podem ser utilizados para representar o circuito, no entanto, os parâmetros híbridos são mais úteis, pois normalmente são fornecidos pelos manuais dos transistores, os quais compõem a maioria dos amplificadores.

Considere o circuito de duas portas a seguir e assinale a alternativa que apresenta a matriz de parâmetros híbridos correta.

Figura 3.34 | Circuito para representação híbrida



Fonte: elaborada pela autora.

a)  $H = \begin{bmatrix} 6 & 0,6 \\ 0,6 & 0,24 \end{bmatrix}$ .

b)  $H = \begin{bmatrix} 6 & 0,6 \\ -0,6 & 0,24 \end{bmatrix}$ .

c)  $H = \begin{bmatrix} 6 & 0,6 \\ 0,6 & 4,16 \end{bmatrix}$ .

d)  $H = \begin{bmatrix} 10 & 0,6 \\ -0,6 & 0,24 \end{bmatrix}$ .

e)  $H = \begin{bmatrix} 10 & 0,1 \\ -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$ .

**2.** Como o próprio nome já diz, os parâmetros de transmissão são bastante utilizados para representar e analisar linhas de transmissão (LT). Um exemplo é a análise da LT em vazio, ou seja, com circuito aberto na recepção ( $I_2 = 0$ ), a qual fornece o ganho de tensão da mesma, indicando um aumento da tensão ao longo da linha conhecido como efeito Ferranti.

A impedância de entrada de um circuito de duas portas  $Z_{ent}$  é dada pela relação entre a tensão e a corrente de entrada, ou seja  $Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1}$ .

Com base nisso, dados os parâmetros de um quadripolo representado pelo modelo de transmissão, assinale a alternativa que apresenta corretamente a impedância de entrada quando:

(i) Os terminais de saída são curto-circuitados.

(ii) A porta de saída é um circuito aberto.

(iii) Há uma carga de  $Z_c = 15 \Omega$  na porta de saída.

Dados do quadripolo:  $A = 15$ ,  $B = 20 \Omega$ ,  $C = 0,1 S$ ,  $D = 2$ .

a) (i)  $Z_{ent} = 150\Omega$ ; (ii)  $Z_{ent} = 70\Omega$ ; (iii)  $Z_{ent} = 10\Omega$ .

b) (i)  $Z_{ent} = 10\Omega$ ; (ii)  $Z_{ent} = 75\Omega$ ; (iii)  $Z_{ent} = 170\Omega$ .

c) (i)  $Z_{ent} = 15\Omega$ ; (ii)  $Z_{ent} = 100\Omega$ ; (iii)  $Z_{ent} = 50\Omega$ .

d) (i)  $Z_{ent} = 10\Omega$ ; (ii)  $Z_{ent} = 150\Omega$ ; (iii)  $Z_{ent} = 70\Omega$ .

e) (i)  $Z_{ent} = 20\Omega$ ; (ii)  $Z_{ent} = 70\Omega$ ; (iii)  $Z_{ent} = 100\Omega$ .

**3.** Quando há necessidade de amplificar um sinal milhares de vezes, utilizam-se dois ou mais estágios de amplificadores interconectados em cascata. Um exemplo desta aplicação são sistemas de telecomunicação como rádio e internet, cujos sinais captados pelos receptores são muito pequenos, da ordem de  $\mu V$ , e necessitam ser amplificados para correta reprodução.

O modelo híbrido de um transistor emissor-comum é dado por:

$$H = \begin{bmatrix} 6k\Omega & 1,5 \times 10^{-4} \\ 200 & 8\mu S \end{bmatrix}$$

Para compor um amplificador de áudio necessário em um projeto, dois estágios foram necessários de amplificação, sendo os transistores conectados em cascata.

Para uma carga  $Z_c = 10k\Omega$  conectada nos terminais de saída, assinale a alternativa que contenha o ganho de tensão  $A_v$  proporcionado pelo amplificador resultante, sabendo que o ganho de tensão do amplificador consiste na relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

Fonte: Adaptado de Sadiku (2013, p. 803, 817).



- a)  $A_v = 5 \times 10^4$ .
- b)  $A_v = -2 \times 10^4$ .
- c)  $A_v = 2 \times 10^4$ .
- d)  $A_v = -6 \times 10^4$ .
- e)  $A_v = 6 \times 10^4$ .

## Seção 3.3

### Redes e circuitos equivalentes

#### Diálogo aberto

Olá! Nesta seção de encerramento da terceira unidade estudaremos alguns casos especiais de quadripolos. O primeiro deles é o quadripolo recíproco, denominado quando não há fontes dependentes presentes. Neste caso, o circuito de duas portas recíproco pode ser representado pelo seu circuito equivalente T ou pi. Um caso ainda mais específico é o quadripolo recíproco e simétrico, o qual também será estudado. Nele, o circuito pode ser subdividido em dois sub-circuitos idênticos. Veremos também como é possível obter os circuitos T ou pi e realizar uma transformação entre eles.

Por fim, estudaremos as características de quadripolos com cargas, tais características representam o comportamento do circuito em uma aplicação específica e, geralmente, constituem requisitos de projeto, entre elas: impedância de entrada, ganho de tensão, ganho de corrente e parâmetros de Thévenin.

Para aplicar estes conceitos, suponha que você seja o responsável técnico em uma empresa de manutenção de transformadores. Um cliente contratou a empresa para a realização de ensaios sobre um antigo equipamento, pois deseja utilizá-lo para alimentar uma carga de  $100 \Omega$  e precisa saber se o equipamento encontra-se adequado. A equipe de laboratório realizou ensaios para obter os parâmetros e forneceu a você o modelo de impedâncias do transformador.

Sua tarefa é realizar uma análise matemática para obter os dados do equipamento sob carga sabendo que o cliente pretende aplicar o equipamento com uma fonte de alimentação de 220V, 60Hz com resistência interna  $Z_{\text{fonte}} = 5 \Omega$  e a carga no valor mencionado.

$$Z = \begin{bmatrix} 20j\omega + 4 & 2j\omega \\ 2j\omega & 4j\omega + 1 \end{bmatrix} \Omega$$

Como você faria para obter os valores de impedância de entrada, ganho de tensão e corrente e parâmetros equivalentes de Thévenin?

Descobriremos ao longo desta seção

Bons estudos!

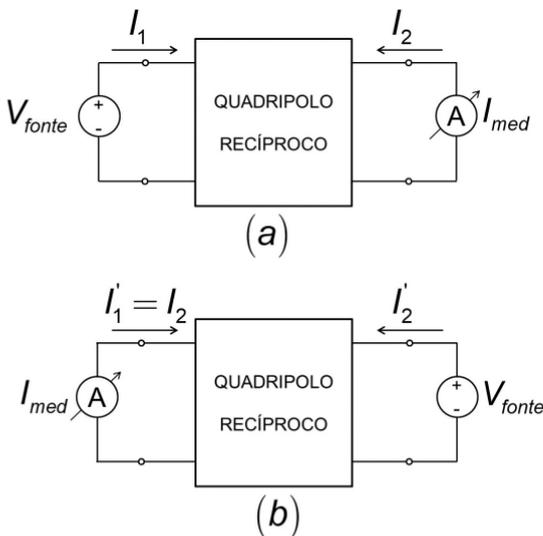
## Não pode faltar

Nas seções anteriores foram apresentadas as principais características dos circuitos de duas portas e os seis parâmetros que podem ser utilizados para representar um quadripolo bem como os circuitos equivalentes gerais. Nesta seção, veremos casos especiais de quadripolos, sendo eles: quadripolos recíprocos, circuitos equivalentes T e pi e quadripolos com cargas nos terminais.

Quando um quadripolo for constituído por um circuito linear e não apresentar fontes dependentes em sua estrutura interna, ou seja, serem constituídos apenas por componentes passivos: resistor (R), indutor (L) e capacitor (C), as impedâncias de transferências serão iguais, ou seja,  $z_{12} = z_{21}$ . Este circuito é denominado quadripolo recíproco.

Em termos práticos, isto implica que se trocarmos entre si a fonte ideal de tensão de uma porta ( $V_{fonte}$ ) e um amperímetro ideal da porta adjacente, como mostra a Figura 3.35, a corrente medida pelo amperímetro ( $I_{med}$ ) será a mesma em ambos os casos. De forma análoga, se utilizarmos uma fonte de corrente e um voltímetro, a reciprocidade também é válida.

Figura 3.35 | Quadripolo com fonte e amperímetros permutados (a) Fonte na porta 1 (b) Fonte na porta 2



Fonte: adaptada de Sadiku (2009, p. 772).

Portanto, aos seis modelos de quadripolos estudados, temos as seguintes relações para quadripolos recíprocos deduzidas a partir da conversão dos parâmetros:

$$\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21} \rightarrow \text{Modelo de impedâncias (3.64)}$$

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} \rightarrow \text{Modelo de admitâncias (3.65)}$$

$$\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21} \rightarrow \text{Modelo híbrido (3.66)}$$

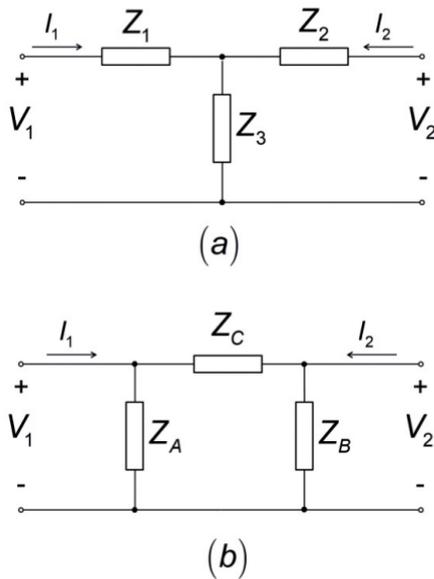
$$\mathbf{g}_{12} = -\mathbf{g}_{21} \rightarrow \text{Modelo híbrido inverso (3.67)}$$

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1 \rightarrow \text{Modelo de transmissão ou ABCD (3.68)}$$

$$\mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1 \rightarrow \text{Modelo de transmissão inverso (3.69)}$$

Quando as relações das Equações 3.64 a 3.69 forem atendidas, os circuitos equivalentes gerais da Figura 3.10 na primeira seção desta unidade podem ser representados pelo seu respectivo circuito equivalente T, ilustrado na Figura 3.36(a), ou circuito equivalente pi, ilustrado na Figura 3.36(b).

Figura 3.36 | Circuitos equivalentes de quadripolos recíprocos (a) Equivalente T (b) Equivalente pi



Fonte: elaborada pela autora.

Os circuitos T e pi são equivalentes entre si se a conversão entre eles for realizada a partir das seguintes equações:

- Conversão do circuito pi para o circuito T

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (3.70)$$

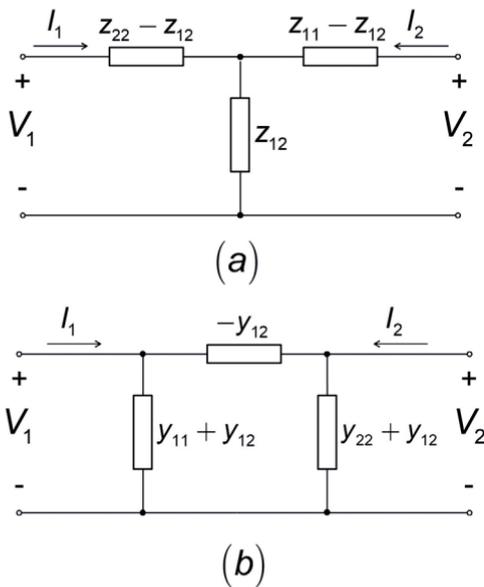
- Conversão do circuito T para o circuito pi

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \quad Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \quad (3.71)$$

Assim, qualquer quadripolo cuja estrutura seja composta apenas por elementos passivos (R, L, C), por serem recíprocos, podem ser substituídos pelo circuito equivalente T para o modelo de impedância e pelo circuito equivalente pi para o modelo de admitância, como mostram as Figuras 3.37(a) e 3.37(b) respectivamente.

Figura 3.37 | Circuitos equivalentes (a) T para modelo de impedância (b) pi para modelo de admitância



Fonte: elaborada pela autora.

Um caso ainda mais específico pode ocorrer quando um quadripolo recíproco permite que a sua entrada seja trocada com a saída, mantendo os mesmos valores de tensões e correntes em seus terminais. Neste caso, tem-se que para o circuito equivalente T da Figura 3.36(a)  $Z_1 = Z_2$  e para o circuito equivalente pi da Figura 3.36(b)  $Z_A = Z_B$ .

A partir dessas relações deduzimos que:

$$z_{11} = z_{22} \rightarrow \text{Modelo de impedâncias (3.72)}$$

$$y_{11} = y_{22} \rightarrow \text{Modelo de admitâncias (3.73)}$$

Quando um quadripolo satisfaz as relações de reciprocidade e as relações (3.72) ou (3.73), ele é denominado simétrico.

A partir das Equações 3.72 e 3.73, as relações de simetria para os demais modelos podem ser obtidas, resultando:

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1 \rightarrow \text{Modelo híbrido (3.74)}$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1 \rightarrow \text{Modelo híbrido inverso (3.75)}$$

$$A = D \rightarrow \text{Modelo de transmissão ou ABCD (3.76)}$$

$$a = d \rightarrow \text{Modelo de transmissão inverso (3.77)}$$

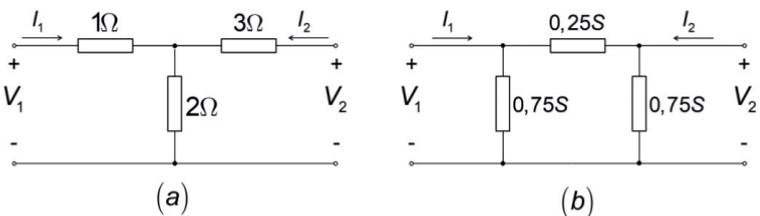
Portanto, temos que um quadripolo genérico pode ser representado por um conjunto de quatro parâmetros, já um quadripolo recíproco pode ser representado por apenas 3 parâmetros e um quadripolo recíproco simétrico pode ser representado por apenas dois parâmetros distintos.



### Exemplificando

Obtenha os parâmetros de impedância e admitância dos circuitos da Figura 3.38(a) e 3.38(b), respectivamente, e verifique se são recíprocos e simétricos.

Figura 3.38 | Circuitos equivalentes T e pi para cálculo dos parâmetros



Fonte: elaborada pela autora.

Ambos os circuitos da Figura 3.38 são recíprocos, pois como vimos, circuitos recíprocos podem ser representados pelo seu equivalente T ou pi. Logo,  $z_{12} = z_{21}$  e  $y_{12} = y_{21}$ .

Para verificar a simetria, vamos calcular os parâmetros  $z$  e  $y$  e verificar se  $z_{11} = z_{22}$  e  $y_{11} = y_{22}$ .

Comparando o circuito da Figura 3.38(a) com o circuito da figura 3.37(a) temos as seguintes relações:

$$z_{12} = 2\Omega$$

$$z_{22} - z_{12} = 1 \Rightarrow z_{22} = 1 + 2 = 3\Omega$$

$$z_{11} - z_{12} = 3 \Rightarrow z_{11} = 3 + 2 = 5\Omega$$

Dessa forma, a matriz de impedâncias do circuito resulta:

$$Z = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Omega$$

Como  $z_{11} \neq z_{22}$ , o circuito recíproco da Figura 3.38(a) é um quadripolo recíproco não simétrico.

De forma análoga, analisamos o circuito da Figura 3.38(b). Comparando-o com o circuito da Figura 3.37(b), obtemos:

$$-y_{12} = 0,25S \Rightarrow y_{12} = -0,25S$$

$$y_{11} + y_{12} = 0,75 \Rightarrow y_{11} = 0,75 - (-0,25) = 1S$$

$$y_{22} + y_{12} = 0,75 \Rightarrow y_{22} = 0,75 - (-0,25) = 1S$$

Assim, a matriz de admitâncias do circuito resulta:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix} S$$

Como  $y_{11} = y_{22}$ , o circuito recíproco da Figura 3.38(b) é um quadripolo recíproco simétrico.



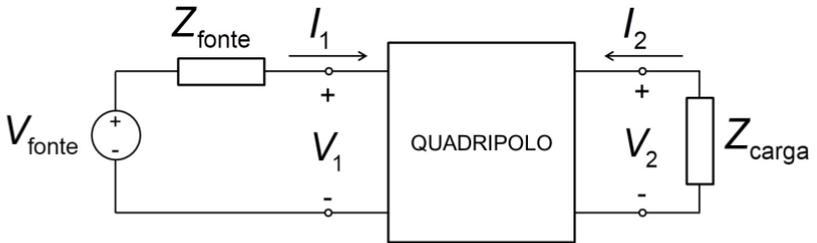
Refleta

Circuitos recíprocos podem ser representados por circuitos equivalentes T ou pi. Observe que as duas estruturas podem ser divididas ao meio, resultando em duas partes iguais. Esta é uma forma rápida de identificar um circuito recíproco visualmente. Com base nisso, como poderíamos identificar visualmente circuitos recíprocos simétricos?

O modelo dos quadripolos que estudamos ao longo da unidade fornece informações da estrutura interna de circuitos vistos a partir de seus terminais e suas variáveis de entrada e saída  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ . Tais modelos correspondem aos quadripolos sem elementos conectados aos seus terminais.

No entanto, as aplicações típicas apresentam fontes de alimentação e cargas conectadas à sua entrada e saída, como mostra a Figura 3.39. Este circuito já foi visto ao longo da unidade, mas algumas características que o envolvem são importantes e serão estudadas com mais detalhes.

Figura 3.39 | Quadripolo com fonte de alimentação e carga conectadas em seus terminais



Fonte: elaborada pela autora.

As características mais importantes definidas para quadripolos com carga são:

- Ganho de tensão do quadripolo:  $A_v = \frac{V_2}{V_1}$  (3.78)
- Ganho de tensão total do circuito:  $A_{v,T} = \frac{V_2}{V_{\text{fonte}}}$  (3.79)
- Ganho de corrente do quadripolo:  $A_i = \frac{I_2}{I_1}$  (3.80)
- Impedância de entrada:  $Z_{\text{ent}} = \frac{V_1}{I_1}$  (3.81)
- Tensão e impedância de Thévenin vistas dos terminais de saída:  $V_{th}$  e  $I_{th}$

Analisemos tais características para um quadripolo modelado por parâmetros de impedância:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (3.82)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (3.83)$$

Analisando a Figura 3.39 pela porta de entrada obtemos:

$$V_1 = V_{\text{fonte}} - Z_{\text{fonte}}I_1 \quad (3.84)$$

Logo,  $I_1 = \frac{V_{\text{fonte}} - V_1}{Z_{\text{fonte}}}$  (3.85), que podemos reescrever como:

$$V_{\text{fonte}} = V_1 + Z_{\text{fonte}}I_1 \quad (3.86)$$

Analisando a Figura 3.39 pela porta de saída obtemos:

$$V_2 = -Z_{\text{carga}}I_2 \quad (3.87), \text{ ou ainda: } I_2 = -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \quad (3.88)$$

- Cálculo do ganho de tensão do quadripolo  $A_v$ : isolamos  $I_1$  na Equação 3.83 e substituímos na Equação 3.82. Em seguida, substituímos  $I_2$  da Equação 3.88 no resultado.

$$I_1 = \frac{V_2 - z_{22}I_2}{z_{21}} \quad (3.89),$$

$$V_1 = z_{11} \left( \frac{V_2 - z_{22}I_2}{z_{21}} \right) + z_{12}I_2$$

$$V_1 = z_{11} \left[ \frac{V_2 - z_{22} \left( -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \right)}{z_{21}} \right] + z_{12} \left( -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \right) \Rightarrow V_1 = V_2 \left[ \frac{1}{z_{21}Z_{\text{carga}}} (z_{11}Z_{\text{carga}} + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) \right]$$

$$\therefore A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_{\text{carga}}}{z_{11}Z_{\text{carga}} + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \quad (3.90)$$

- Cálculo do ganho de tensão total do circuito  $A_{vT}$ : primeiro substituímos as Equações 3.84 na Equação 3.82, em seguida, substituímos  $I_1$  pela Equação 3.89 e  $I_2$  pela Equação 3.88. Temos como resultado:

$$V_{\text{fonte}} - Z_{\text{fonte}}I_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \Rightarrow V_{\text{fonte}} = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + Z_{\text{fonte}}I_1$$

$$\begin{aligned} V_{\text{fonte}} &= z_{11} \left( \frac{V_2 - z_{22}I_2}{z_{21}} \right) + z_{12}I_2 + Z_{\text{fonte}} \left( \frac{V_2 - z_{22}I_2}{z_{21}} \right) \\ &= \frac{z_{11}V_2}{z_{21}} - \frac{z_{11}z_{22}I_2}{z_{21}} + z_{12}I_2 + \frac{Z_{\text{fonte}}V_2}{z_{21}} - \frac{Z_{\text{fonte}}z_{22}I_2}{z_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{fonte}} &= \frac{z_{11}V_2}{z_{21}} - \frac{z_{11}z_{22}}{z_{21}} \left( -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \right) + z_{12} \left( -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \right) + \frac{z_{\text{fonte}}V_2}{z_{21}} - \frac{z_{\text{fonte}}z_{22}}{z_{21}} \left( -\frac{V_2}{Z_{\text{carga}}} \right) \\
 V_{\text{fonte}} &= \frac{z_{11}V_2}{z_{21}} + \frac{z_{11}z_{22}V_2}{z_{21}Z_{\text{carga}}} - \frac{z_{12}V_2}{Z_{\text{carga}}} + \frac{z_{\text{fonte}}V_2}{z_{21}} + \frac{z_{\text{fonte}}z_{22}V_2}{z_{21}Z_{\text{carga}}} \\
 &= V_2 \left( \frac{z_{11}Z_{\text{carga}} + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + z_{\text{fonte}}Z_{\text{carga}} + z_{\text{fonte}}z_{22}}{z_{21}Z_{\text{carga}}} \right) = V_2 \left( \frac{(z_{11} + z_{\text{fonte}})(z_{22} + Z_{\text{carga}}) - z_{12}z_{21}}{z_{21}Z_{\text{carga}}} \right) \\
 \therefore A_{vT} &= \frac{V_2}{V_{\text{fonte}}} = \frac{z_{21}Z_{\text{carga}}}{(z_{11} + z_{\text{fonte}})(z_{22} + Z_{\text{carga}}) - z_{12}z_{21}} \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

- Ganho de corrente do quadripolo  $A_i$ : substituindo  $V_2$  da Equação 3.87 na Equação 3.83 e isolando  $I_2$  obtemos:

$$\begin{aligned}
 -Z_{\text{carga}}I_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{z_{21}I_1}{Z_{\text{carga}} + z_{22}} \\
 \therefore A_i &= \frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{Z_{\text{carga}} + z_{22}} \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

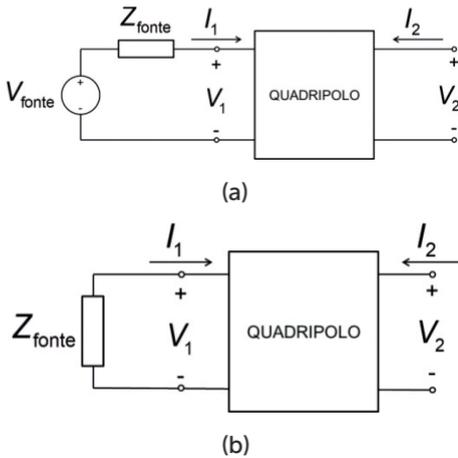
- Impedância de entrada  $Z_{\text{ent}}$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{ent}} &= \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11}I_1 + z_{12}I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12}A_i = z_{11} - z_{12} \left( \frac{z_{21}}{Z_{\text{carga}} + z_{22}} \right) \\
 \therefore Z_{\text{ent}} &= z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_{\text{carga}} + z_{22}} \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

- Tensão e impedância de Thévenin vistas dos terminais de saída:  $V_{th}$  e  $I_{th}$

Para calcularmos a impedância equivalente de Thevenin, primeiro removemos a carga a partir da qual o circuito será calculado, como mostra a Figura 3.40(a), e, em seguida, curto circuitamos as fontes de tensão ou deixamos circuito aberto para fontes de corrente, conforme a Figura 3.40(b).

Figura 3.40 | Cálculo do circuito equivalente de Thévenin



Fonte: elaborada pela autora.

$$Z_{th} = -\frac{V_2}{I_2}, \quad V_1 = -Z_{\text{fonte}} I_1$$

$$-Z_{\text{fonte}} I_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{-z_{12}}{Z_{\text{fonte}} + z_{11}} I_2$$

$$V_2 = z_{21} \left( \frac{-z_{12}}{Z_{\text{fonte}} + z_{11}} I_2 \right) + z_{22} I_2 \quad \therefore Z_{th} = \frac{V_2}{I_2} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{Z_{\text{fonte}} + z_{11}} \quad (3.94)$$

Para calcular a tensão de Thévenin analisamos a Figura 3.40(a):  
Substituindo a Equação 3.84 na Equação 3.82, obtemos:

$$V_{\text{fonte}} - Z_{\text{fonte}} I_1 = z_{11} I_1 + \frac{z_{12} I_2}{0} \Rightarrow I_1 = \frac{V_{\text{fonte}}}{Z_{\text{fonte}} + z_{11}}$$

A tensão de Thévenin corresponde à tensão nos terminais da carga. Neste caso,  $V_{th} = V_2$  portanto:

$$V_{th} = V_2 = z_{21} I_1 + \frac{z_{22} I_2}{0} \Rightarrow V_{th} = z_{21} I_1$$

$$\therefore V_{th} = \frac{z_{21}}{Z_{\text{fonte}} + z_{11}} V_{\text{fonte}} \quad (3.95)$$



**Assimile**

Quando um circuito quadripolo não possui internamente fontes de tensão e corrente dependentes, ele é considerado um circuito

recíproco. Neste caso, o mesmo pode ser representado por seu circuito equivalente T ou PI que caracteriza um circuito simplificado facilitando cálculos e análises. Quando um circuito é classificado como recíproco, as relações (3.64) a (3.69) são atendidas.



### Pesquise mais

De forma análoga ao que foi feito para obter  $A_v$ ,  $A_{vT}$ ,  $A_i$ ,  $Z_{ent}$ ,  $Z_{th}$  e  $V_{th}$  em função dos parâmetros  $z$ , os cálculos podem ser feitos para os demais modelos de quadripolos. Na referência a seguir, você encontra uma tabela a página 503 que mostra todas as expressões de quadripolos com cargas nos terminais a partir dos parâmetros  $z$ ,  $y$ ,  $h$ ,  $g$ , ABCD e abcd.

NILSSON, James William; RIEDEL, Susan A. **Circuitos elétricos**. Pearson eBooks, 2009.

## Sem medo de errar

Vamos retomar a situação-problema em que você é o responsável técnico de uma empresa de manutenção de transformadores.

Um cliente solicitou ensaios sobre um antigo equipamento para que os parâmetros fossem obtidos. A equipe de laboratório forneceu o modelo de impedâncias do transformador após os ensaios realizados e foi solicitado que você obtivesse os dados do equipamento sob carga, sabendo que o cliente pretende aplicar o equipamento com uma fonte de alimentação de 220V, 60Hz com resistência interna  $Z_{fonte} = 5 \Omega$  e uma carga de  $100 \Omega$  que deve ser alimentada com 2V.

$$Z = \begin{bmatrix} 20j\omega + 4 & 2,6j\omega \\ 2,6j\omega & 4j\omega + 1 \end{bmatrix} \Omega$$

Sob carga, temos os seguintes parâmetros a serem obtidos: ganho de tensão do quadripolo  $A_v$ , ganho de tensão total do circuito  $A_{vT}$ , ganho de corrente do quadripolo  $A_i$ , impedância de entrada  $Z_{ent}$ , tensão e impedância de Thévenin,  $V_{th}$  e  $I_{th}$ , vistas dos terminais de saída. Para isso utilizaremos as Equações 3.91 a 3.96.

Dada a matriz de impedâncias do quadripolo, sabendo que a frequência da fonte é 60Hz, ou seja, 377 rad/s, obtemos os parâmetros aproximadamente iguais a:  $z_{11} = 4 + 7540j \Omega$   $z_{21} = z_{12} = 754j \Omega$  e  $z_{22} = 1 + 1508j \Omega$ .

Sabendo que  $Z_{carga} = 100 \Omega$ , calculamos:

- Ganho de tensão do quadripolo a partir da Equação 3.91:

$$A_v = \frac{z_{21} Z_{carga}}{z_{11} Z_{carga} + z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{980j \cdot 100}{(4 + 7500j)100 + (4 + 7500j)(1 + 1508j) - (980j)^2}$$

$$A_v = 9,4 \angle -86^\circ mV$$

- Ganho de tensão total do circuito a partir da Equação 3.92:

$$A_{v,T} = \frac{z_{21} Z_{carga}}{(z_{11} + Z_{fonte})(z_{22} + Z_{carga}) - z_{12} z_{21}} = \frac{980j \cdot 100}{(4 + 7500j + 5)(1 + 1508j + 100) - (980j)^2}$$

$$A_{v,T} = 9,4 \angle -86^\circ mV$$

Como a impedância da fonte é muito pequena relacionada as demais, o ganho do quadripolo e do circuito são aproximadamente iguais.

- Ganho de corrente do quadripolo a partir da Equação 3.93:

$$\therefore A_i = -\frac{z_{21}}{Z_{carga} + z_{22}} = \frac{980j}{100 + 1 + 1508j}$$

$$A_i = 649 \angle -176^\circ mA$$

- Impedância de entrada a partir da Equação 3.94:

$$Z_{ent} = (4 + 7500j) - \frac{(980j)^2}{100 + 1 + 1508j}$$

$$Z_{ent} = 46,5 + 6905j \Omega$$

- Impedância e tensão de Thévenin vistas dos terminais de saída a partir das Equações 3.95 e 3.96, respectivamente:

$$Z_{th} = (1 + 1508j) - \frac{(980j)^2}{5 + 4 + 7500j} \quad e \quad V_{th} = \frac{980j}{5 + 4 + 7500j} 220$$

$$Z_{th} = 1,15 + 1380j \Omega \quad V_{th} = 28,6 \angle 0^\circ V$$

A partir do circuito equivalente de Thevenin, o cliente pode analisar a aplicação do transformador a outros valores de cargas para o mesmo valor de tensão na fonte.

Além disso, o ganho total do circuito permite obter a tensão na carga para qualquer valor de tensão, por exemplo, para o caso da fonte de 220V obtemos:

$$A_{vT} = \frac{V_2}{V_{\text{fonte}}} \Rightarrow V_2 = A_{vT} \cdot V_{\text{fonte}} = (9,4 \angle -86^\circ) \cdot 10^{-3} \cdot 220 \therefore V_2 \cong 2 \angle -86^\circ \text{ V}$$

A partir deste cálculo pode-se avaliar que o transformador encontra-se adequado para utilização com esta carga específica, uma vez que a tensão de 2V foi atingida para alimentar a carga desejada de 100  $\Omega$ .

Além disso, as características de ganho, impedância de entrada e circuito equivalente de Thevenin, possibilitam que se verifique no futuro a adequação deste equipamento para aplicação a cargas distintas, como alimentação de equipamentos eletrônicos, por tais como celulares, notebooks, etc.

## Avançando na prática

### Aplicação de filtros em cascata para diferentes cargas

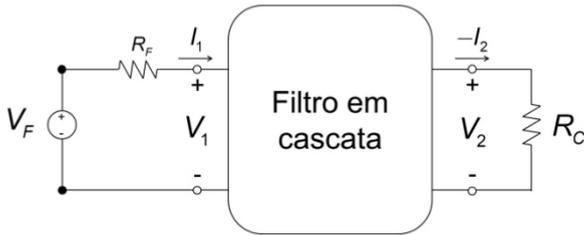
#### Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o responsável técnico numa empresa de telecomunicações. Foi solicitada a análise de um filtro passa-baixa em cascata, sintetizado para a filtragem de ruídos em um sistema de recepção de sinal telefônico da companhia. Segundo o supervisor, o mesmo modelo de filtro mostrado na Figura 3.41 deverá ser aplicado a diversas cargas e fontes distintas. Portanto, é necessário obter as características de operação de ganho de tensão total e do quadripolo, o ganho de corrente e a impedância de entrada em função da carga, uma vez disponibilizado o modelo equivalente de transmissão. De posse das equações de operação em função da carga, para cada carga distinta ao qual o filtro possa vir a ser aplicado, o responsável técnico pode analisar o seu comportamento para aquela carga específica e verificar se está adequado à aplicação.

$$T = \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^2 LC & (j\omega)L \\ (j\omega)C & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo  $L = 3H$  e  $C = 200mF$

Figura 3.41 | Filtro passa-baixa em cascata



Fonte: elaborada pela autora.

### Resolução da situação-problema

Para obter as características deste sistema sob carga, vamos escrever as equações do modelo e obter as expressões genéricas em função dos parâmetros de transmissão, ou ABCD.

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2) \quad (3.97)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2) \quad (3.98)$$

Analisando a Figura 3.41 sabemos que  $(-I_2) = \frac{V_2}{R_C}$  (3.99) e  $V_1 = V_F - R_F I_1$  (3.100). Substituindo a Equação 3.99 na Equação 3.97 do modelo obtemos o ganho de tensão do quadripolo:

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2) = AV_2 + B \frac{V_2}{R_C} = V_2 \left( A + \frac{B}{R_C} \right) = V_2 \left( \frac{AR_C + B}{R_C} \right)$$

$$\therefore A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_C}{AR_C + B} \quad (3.101)$$

Substituindo a Equação 3.100 na Equação 3.101:

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_F - R_F I_1} = \frac{R_C}{AR_C + B}$$

Substituindo (3.99) em (3.98) e em seguida na expressão anterior:

$$I_1 = CV_2 + D \frac{V_2}{R_C} = V_2 \left( C + \frac{D}{R_C} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_F - R_F V_2 \left( C + \frac{D}{R_C} \right)} = \frac{V_2}{V_F - R_F V_2 \left( \frac{R_C C + D}{R_C} \right)} = \frac{R_C}{AR_C + B}$$

Isolando  $V_2/V_F$ :

$$\frac{V_2}{V_F - R_F V_2 \left( \frac{R_C C + D_2}{R_C} \right)} = \frac{R_C}{AR_C + B} \Rightarrow V_2 (AR_C + B) = R_C V_F - V_2 R_C R_F \left( \frac{R_C C + D}{R_C} \right)$$

$$V_2 (AR_C + B) + V_2 R_F (R_C C + D) = R_C V_F \Rightarrow V_2 [AR_C + B + R_F (R_C C + D)] = R_C V_F$$

$$\frac{V_2}{V_F} = \frac{R_C}{AR_C + B + R_F (R_C C + D)} = \frac{R_C}{AR_C + B + R_F R_C C + R_F D} = \frac{R_C}{R_C (A + R_F C) + B + R_F D}$$

$$\therefore A_{vT} = \frac{V_2}{V_F} = \frac{R_C}{R_C (A + R_F C) + B + R_F D} \quad (3.102)$$

Isolando  $V_2$  na Equação 3.99 e substituindo em 3.98 obtemos o ganho de corrente:

$$I_1 = C(-I_2)R_C + D(-I_2) = (-I_2)(R_C C + D) \therefore A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{R_C C + D} \quad (3.103)$$

Para calcular a impedância de entrada dividimos a Equação 3.97 pela Equação 3.98 e substituímos a Equação 3.99:

$$Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + B \frac{V_2}{R_C}}{CV_2 + D \frac{V_2}{R_C}} = \frac{R_C AV_2 + BV_2}{R_C CV_2 + DV_2} = \frac{V_2 (R_C A + B)}{V_2 (R_C C + D)}$$

$$\therefore Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_C A + B}{R_C C + D} \quad (3.104)$$

Temos a matriz de transmissão:

$$T = \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^2 0,6 & (j\omega)3 \\ (j\omega)0,2 & 1 \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} A = 1 + (j\omega)^2 0,6 & B = 3j\omega \\ C = 0,2j\omega & D = 1 \end{cases}$$

Agora, basta substituir os parâmetros fornecidos nas Equações 3.101 a 3.104 para obtermos os dados solicitados para o filtro em cascata em função da frequência do sinal  $\omega$ :

$$A_v = \frac{R_c}{3\omega j - R_c(0,6\omega^2 - 1)}; \quad A_{vT} = \frac{R_c}{R_f + 3\omega j + R_c(-0,6\omega^2 + 0,2R_f\omega j + 1)}$$

$$Z_{ent} = \frac{3\omega j - R_c(0,6\omega^2 - 1)}{1 + 0,2R_c\omega j}; \quad A_i = \frac{-1}{1 + 0,2R_c\omega j}$$

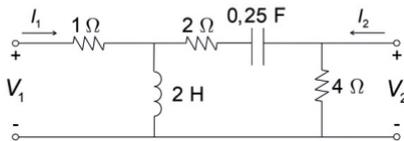
De posse destas equações, é possível analisar o efeito do filtro quando aplicado a diversas cargas distintas, podendo-se avaliar se ele encontra-se adequado para determinadas aplicações na empresa.

## Faça valer a pena

1. Se um circuito elétrico não apresentar fontes de tensão dependentes, o circuito é recíproco e as impedâncias de transferências são iguais. Na prática, isto significa que, se forem alternadas entre si, em uma fonte de tensão de uma porta e um amperímetro da outra, a corrente lida será a mesma nos dois casos.

Analise os circuitos a seguir e classifique-os como não recíproco, recíproco ou recíproco simétrico.

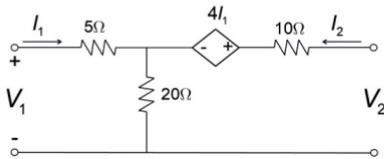
Figura 3.42 | Circuitos quadripolos distintos para análise



(I)

$$H = \begin{bmatrix} 4,67 \angle -136,74^\circ & 1,41 \angle 45^\circ \\ 1,41 \angle -135^\circ & 558,97 \angle 153,4^\circ \end{bmatrix}$$

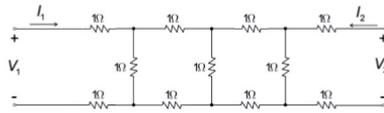
(II)



(III)

$$H = \begin{bmatrix} 53,34 & 0,33 \\ 6,33 & 0,090 \end{bmatrix}$$

(III)



(II)

$$T = \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

(II)

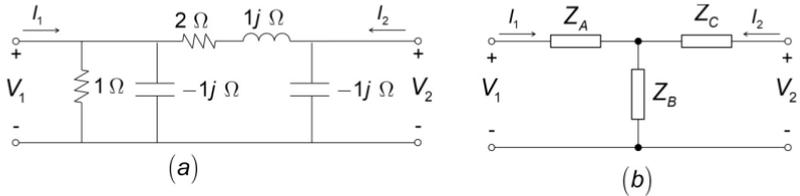
Fonte: adaptada de Sadiku (2009).

- (I) Recíproco, (II) Recíproco simétrico, (III) Não recíproco.
- (I) Não recíproco, (II) Recíproco, (III) Recíproco simétrico.
- (I) Recíproco simétrico, (II) Recíproco, (III) Não recíproco.
- (I) Não recíproco, (II) Recíproco simétrico, (III) Recíproco.
- (I) Recíproco simétrico, (II) Não recíproco, (III) Não recíproco.

**2.** Circuitos recíprocos podem ter sua representação simplificada por meio do seu circuito equivalente T ou PI, facilitando análises e cálculos em projetos de circuitos elétricos. Uma das formas de identificar se o circuito é recíproco, é verificar se algumas relações matemáticas entre os parâmetros do quadripolo são atendidas.

Obtenha as impedâncias do circuito equivalente T do quadripolo recíproco a seguir e assinale a alternativa correta.

Figura 3.43 | Circuitos de duas portas recíproco (a) Quadripolo elétrico (b) Equivalente T



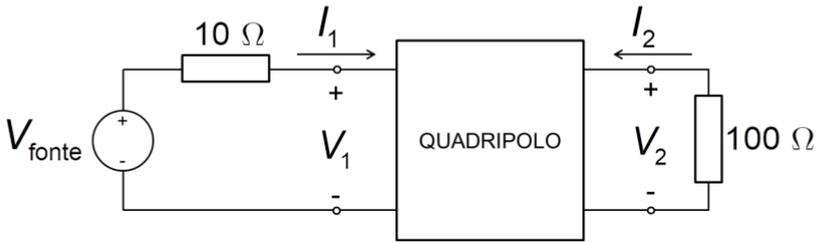
Fonte: adaptada de Sadiku (2009, p. 808).

- a)  $Z_A = 0,2 - 0,6j\ \Omega$ ,  $Z_B = 0,2 + 0,4j\ \Omega$ ,  $Z_C = 0,4 - 1,2j\ \Omega$ .
- b)  $Z_A = 0,2 + 0,2j\ \Omega$ ,  $Z_B = 0,2 + 0,4j\ \Omega$ ,  $Z_C = 0,4 - 0,4j\ \Omega$ .
- c)  $Z_A = 0,8 - 0,6j\ \Omega$ ,  $Z_B = 0,4 + 0,2j\ \Omega$ ,  $Z_C = 1,0 - 1,0j\ \Omega$ .
- d)  $Z_A = 0,4 - 1,2j\ \Omega$ ,  $Z_B = 0,2 + 0,4j\ \Omega$ ,  $Z_C = 0,2 - 0,6j\ \Omega$ .
- e)  $Z_A = 0,4 - 1,2j\ \Omega$ ,  $Z_B = 0,2 - 0,6j\ \Omega$ ,  $Z_C = 0,2 + 0,4j\ \Omega$ .

**3.** As aplicações reais de quadripolos elétricos envolvem a conexão de uma fonte nos terminais de entrada e uma ou mais cargas em seus terminais de saída. São exemplos de aplicações: os transformadores de distribuição que alimentam as residências, os circuitos amplificadores de áudio com transistor, as linhas de transmissão de energia elétrica, filtros passa-baixa em telecomunicações, entre outros. Nestes casos pode-se calcular o desempenho do quadripolo, representado por meio dos ganhos de tensão e corrente, impedância de entrada e circuito equivalente de Thévenin.

Para o quadripolo com carga a seguir, assinale a alternativa que contenha a impedância de entrada e os ganhos de tensão e corrente.

Figura 3.44 | Circuito quadripolo com carga conectada em seus terminais



Fonte: adaptada de Nilsson (2008, p. 511).

Dados:

$$Z = \begin{bmatrix} 32 & -0,8 \\ -200 & -20 \end{bmatrix} \Omega$$

- a)  $A_v = -8,25$ ,  $A_{vT} = -6,33$ ,  $A_i = -2,5$ ,  $Z_{ent} = 34\Omega$ .
- b)  $A_v = -6,25$ ,  $A_{vT} = -8,33$ ,  $A_i = 2,5$ ,  $Z_{ent} = 30\Omega$ .
- c)  $A_v = -6,25$ ,  $A_{vT} = -8,33$ ,  $A_i = 2,5$ ,  $Z_{ent} = 34\Omega$ .
- d)  $A_v = -8,33$ ,  $A_{vT} = -6,25$ ,  $A_i = 2,5$ ,  $Z_{ent} = 34\Omega$ .
- e)  $A_v = -8,33$ ,  $A_{vT} = -6,25$ ,  $A_i = 2,5$ ,  $Z_{ent} = 30\Omega$ .

# Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. São Paulo: AMGH, 2013.

BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2004.

\_\_\_\_\_. **Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson 2011.

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 9. ed. São Paulo: LTC, 2016.

ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D. **Curso de circuitos elétricos**: volume 1. 2. ed. São Paulo: Blutcher. 2002.

\_\_\_\_\_. **Curso de circuitos elétricos**: volume 2. 2 ed. São Paulo: Blutcher. 2004.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Circuitos elétricos**. 8. ed. São Paulo: Pearson: 2008.



# Circuitos magneticamente acoplados

## Convite ao estudo

Até agora, os circuitos estudados são ditos condutivamente acoplados, pois um circuito afeta o circuito vizinho pela condução de eletricidade. Quando dois circuitos com ou sem contato entre si se afetam por meio do campo magnético gerado por um deles, diz-se que eles são magneticamente acoplados (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Os transformadores são máquinas elétricas estáticas, isto é, não possuem partes rotativas e são projetados tendo como base os conceitos de circuitos magneticamente acoplados. Essencialmente, estes dispositivos são constituídos de bobinas magneticamente acopladas e enroladas em um núcleo de material ferromagnético, para transferir energia de um circuito para o outro. Os transformadores são capazes de converter tensão elétrica CA de um nível em tensão elétrica CA de outro nível na mesma frequência, dessa forma, possibilitam que a tensão gerada nas usinas, tipicamente em níveis entre 12 a 25 kV, seja elevada até algumas centenas de kV para ser transmitida por longas distâncias com pequenas perdas de potência. Nos centros de consumo, os transformadores possibilitam a redução das tensões a níveis compatíveis com os equipamentos de seus consumidores.

Os temas relativos aos circuitos magneticamente acoplados e transformadores serão estudados nesta unidade. As três seções da unidade estão divididas da seguinte forma: na Seção 4.1 apresentam-se os conceitos básicos dos circuitos magneticamente acoplados, incluindo uma breve discussão sobre fluxo magnético,

autoindutância, indutância mútua e a regra do ponto. Na Seção 4.2 apresentam-se os conceitos acerca da energia em circuitos acoplados, incluindo a energia armazenada, o coeficiente de acoplamento, a associação de bobinas magneticamente acopladas e a análise de circuitos magneticamente acoplados. Finalmente, na Seção 4.3, apresentam-se os conceitos sobre o acoplamento magnético em um transformador, contemplando temas como transformadores lineares, transformadores ideais, transformadores trifásicos e o circuito equivalente dos transformadores.

Ao término desta unidade, você terá os conhecimentos básicos sobre circuitos magneticamente acoplados e transformadores e ser capaz de resolver problemas que contemplem situações reais envolvendo estes temas em engenharia. Para atingir este objetivo, você deverá estudar com empenho os assuntos apresentados, resolver as questões propostas e pesquisar sempre que sugerido, a fim de complementar o seu estudo.

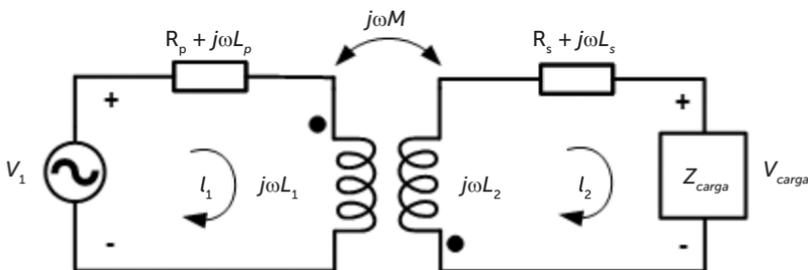
# Seção 4.1

## Conceitos básicos de circuitos acoplados

### Diálogo aberto

O transformador é um equipamento importantíssimo no sistema elétrico de potência, pois ele é responsável por elevar ou abaixar a tensão para que a energia possa ser transmitida por longas distâncias e com baixas perdas de potência. Geralmente, no estudo de sistemas de potência, um transformador é modelado de acordo com a Figura 4.1. Cada parâmetro do circuito da Figura 4.1, isto é,  $R_p$ ,  $R_s$ ,  $L_p$ ,  $L_s$ , representa alguma perda que ocorre durante o processo de transformação e as bobinas (ou enrolamentos), cujas indutâncias são  $L_1$  e  $L_2$ , representam efetivamente o processo de transformação. A indutância mútua entre as bobinas é representada por  $M$ . As resistências  $R_p$  e  $R_s$ , por exemplo, representam as perdas resistivas que ocorrem nas bobinas do transformador, enquanto as indutâncias  $L_p$  e  $L_s$  representam o fluxo magnético que se dispersa do núcleo do transformador.

Figura 4.1 | Modelo de transformador utilizado em estudos de sistemas de potência



Fonte: elaborada pelo autor.

Você trabalha para uma empresa fabricante de transformadores e foi o profissional selecionado para testar um transformador que deverá alimentar uma pequena carga  $Z_{carga} = 24 + j4 \Omega$ . Utilizando o circuito da Figura 4.1, para o qual, a partir de ensaios realizados no transformador, tem-se que  $R_p = R_s = 10 \Omega$ ;  $L_p = L_s = 83$  mH;  $L_1 = L_2 = 185$  mH e  $M = 138,75$  mH, obtenha: a) o circuito do

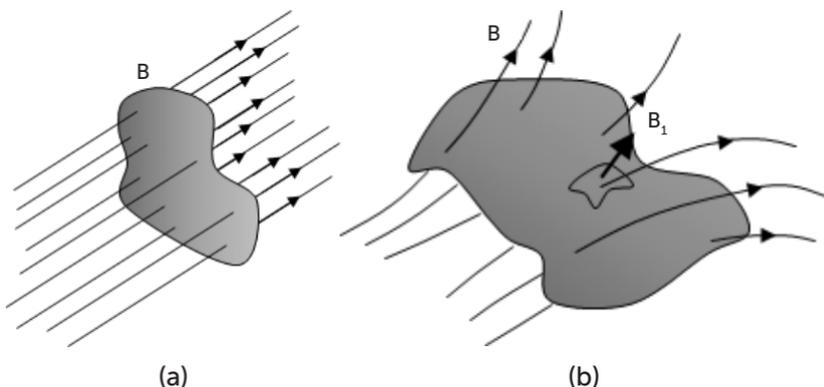
transformador no domínio da frequência e b) a tensão  $V_{\text{carga}}$  na carga para uma tensão de entrada  $V_1$  de 7.97 kV (60 Hz). A magnitude da tensão  $V_{\text{carga}}$  na saída do transformador deve estar dentro de uma margem de  $\pm 5\%$  de 1.33 kV, que corresponde à tensão que deve alimentar a carga. O valor encontrado para  $V_{\text{carga}}$  corresponde ao valor esperado? Apresente os resultados e os cálculos realizados na forma de relatório.

## Não pode faltar

### Fluxo Magnético

Em analogia ao fluxo elétrico, o fluxo magnético, usualmente representado pela letra grega  $\Phi$ , é uma medida do campo magnético total que atravessa uma área específica. Fisicamente, o fluxo magnético em uma superfície pode ser definido da seguinte forma. Considere a Figura 4.2a, a qual ilustra uma superfície qualquer atravessada por um campo magnético  $\mathbf{B}$ .

Figura 4.2 | (a) Superfície qualquer atravessada por um campo magnético  $\mathbf{B}$  e (b) superfície dividida em elementos infinitesimais de área  $d\mathbf{S}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Dividindo-se a superfície em elementos infinitesimais de área  $d\mathbf{S}$ , temos que a direção de um elemento de área  $d\mathbf{S}$  em um ponto na superfície é perpendicular à superfície naquele ponto, conforme ilustra a Figura 4.2b. Desta forma, o fluxo

magnético  $d\Phi$  para o elemento de área  $d\mathbf{S}$  é dado por:  $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . O fluxo magnético total para a superfície é obtido somando-se (integrando-se) as contribuições  $d\Phi$  para cada elemento de área  $d\mathbf{S}$ , ou seja:  $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  (KELLER et al., 1993).

Esta definição pode ainda ser interpretada em termos das linhas magnéticas que representam a distribuição espacial do campo magnético  $\mathbf{B}$  (refira-se à Figura 4.2). Assim, podemos entender que o fluxo magnético para uma superfície é proporcional ao número de linhas magnéticas atravessando aquela superfície. A unidade SI do fluxo magnético é o Weber (Wb), que corresponde ao Tesla metro-quadrado ( $\text{T} \cdot \text{m}^2$ ) (KELLER et al., 1993).

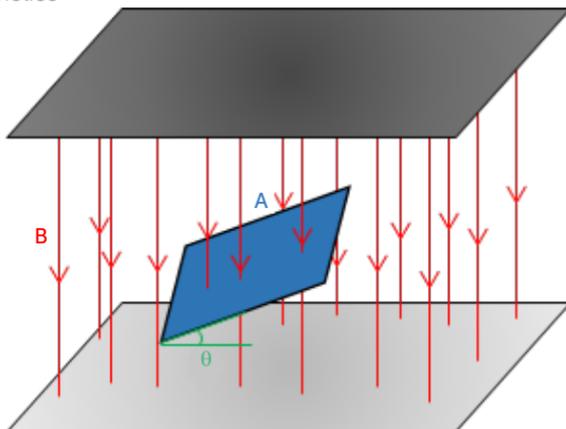


### Assimile

O fluxo magnético ( $\Phi$ ) para uma superfície qualquer é a integral do campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) sobre a superfície.

A Figura 4.3 ilustra o caso particular em que temos uma superfície plana de área  $A$  a um ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético, cuja magnitude é  $B$ . Neste caso, o fluxo magnético é dado por:  $\Phi = B \cdot A \cdot \cos\theta$ .

Figura 4.3 | Área plana  $A$  a um ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético  $\mathbf{B}$



Fonte: elaborada pelo autor.



Considere a Figura 4.3 em duas situações distintas. Em ambas situações, a superfície de área  $A$  é atravessada por um campo magnético de mesma intensidade com magnitude  $B$ , porém, na Situação 1, a superfície faz um ângulo de  $30^\circ$  entre a sua normal e o vetor do campo magnético. Já na Situação 2, a normal da superfície e o vetor do campo magnético são perpendiculares. Quão menor é o fluxo através da área na Situação 1 em relação à Situação 2?

Resposta:

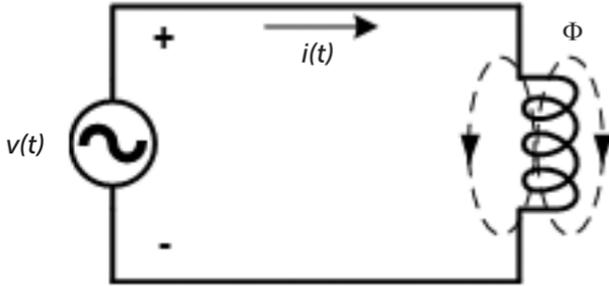
Sabemos que, para o caso em que temos uma superfície plana de área  $A$  a um ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético cuja magnitude é  $B$ , a equação do fluxo magnético é  $\Phi = B \cdot A \cdot \cos\theta$ . Além disso, como em ambas as situações a área da superfície e a magnitude do campo magnético são os mesmos, o que difere, então, é apenas o ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético em cada situação. Portanto, para a Situação 1 temos que  $\cos(30^\circ) \simeq 0,87$  e para a Situação 2, caso em que a normal da superfície e o vetor do campo magnético são perpendiculares,  $\cos(0^\circ) = 1$ . Portanto, o fluxo magnético através da superfície na Situação 1 é aproximadamente 13% menor do que o da Situação 2.

O fluxo magnético é uma ferramenta fundamental na descrição dos efeitos da força magnética sobre um corpo que ocupa uma determinada área e, portanto, o seu entendimento é indispensável para o estudo de transformadores, motores e geradores elétricos.

## Autoindutância

Considere o circuito ilustrado na Figura 4.4, na qual temos uma fonte de tensão CA e um indutor, que corresponde, na verdade, a uma bobina com  $N$  espiras. Quando a corrente  $i(t)$  flui através da bobina, um fluxo magnético  $\Phi$  é produzido em torno dela.

Figura 4.4 | Fluxo magnético produzido por uma bobina com  $N$  espiras



Fonte: elaborado pelo autor.

A Lei de Faraday nos diz que a tensão  $v(t)$  induzida na bobina é proporcional ao número de espiras  $N$  e à taxa de variação do fluxo magnético  $\Phi$  em relação ao tempo, ou seja:  $v(t) = N \frac{d\Phi}{dt}$  (KELLER et al., 1993). Como o fluxo  $\Phi$  é produzido pela corrente  $i(t)$ , de modo que qualquer variação provoca uma variação em  $\Phi$ , podemos escrever a equação anterior como  $v(t) = N \frac{d\Phi}{di} \frac{di(t)}{dt}$ , ou ainda  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , que é a relação entre a tensão nos terminais de um indutor e a corrente que flui através do mesmo. Portanto, a indutância  $L$  do indutor, cuja unidade é dada em henrys (H), é  $L = N \frac{d\Phi}{di}$ . Essa indutância é denominada de autoindutância, ou indutância própria, pois ela relaciona a tensão induzida em uma bobina e a corrente que flui nela (ALEXANDER; SADIKU, 2013).



Refleta

Conforme definido anteriormente, a Lei de Faraday relaciona a tensão induzida em uma bobina ao fluxo magnético variável que a enlaça. O que aconteceria se este fluxo fosse constante, isto é, invariável no tempo?

A descoberta da indução eletromagnética por Michael Faraday (1791–1867) o possibilitou a inventar o dínamo, que é o predecessor do gerador elétrico (KELLER et al., 1993).



A Lei de Indução de Faraday é definida matematicamente por:

$FEM = -N \frac{d\Phi}{dt}$ , em que FEM significa força eletromotriz. O que

quer dizer o sinal de menos na equação e qual é sua diferença em

relação à equação  $v(t) = N \frac{d\Phi}{dt}$  definida anteriormente? Para

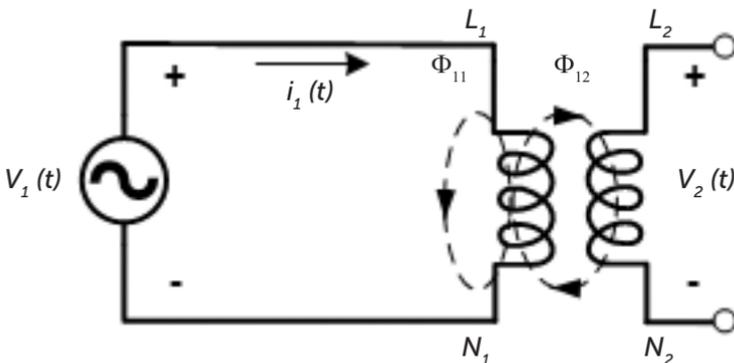
entender melhor o assunto, leia sobre a Lei de Lenz no capítulo 34 do livro indicado a seguir.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

## Indutância Mútua

Observe a Figura 4.5, na qual há agora duas bobinas com autoindutâncias  $L_1$  e  $L_2$  bem próximas uma da outra e que, embora fisicamente separadas, são ditas magneticamente acopladas (ALEXANDER; SADIKU, 2013). O enrolamento (ou bobina) ao qual conecta-se a fonte é comumente referido como enrolamento primário, enquanto o outro é chamado de enrolamento secundário.

Figura 4.5 | Indutância mútua  $M_{21}$  da bobina 2 em relação à bobina 1



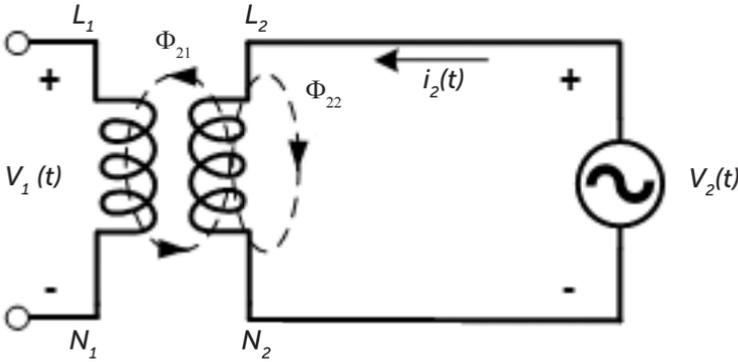
Fonte: elaborada pelo autor.

A bobina 1 possui  $N_1$  espiras, ao passo que a bobina 2 possui  $N_2$  espiras. Por questões de simplicidade, o circuito da bobina 2 encontra-se em vazio (circuito aberto) então, não flui corrente por ela. A corrente  $i_1(t)$  produz um fluxo magnético  $\Phi_1$ , dado por:  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$ , onde  $\Phi_{11}$  é o fluxo de  $i_1(t)$  que enlaça a bobina 1 e não a bobina 2, chamado de fluxo de dispersão, e  $\Phi_{12}$  é o fluxo de  $i_1(t)$  que enlaça as bobinas 1 e 2, chamado de fluxo mútuo (JOHNSON; HILBURN; JOHNSON, 1994).

Todo o fluxo  $\Phi_1$  atravessa a bobina 1, dessa forma, a tensão induzida na bobina 1 é:  $v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$ . Da mesma maneira, apenas o fluxo  $\Phi_{12}$  atravessa a bobina 2, então, a tensão induzida na bobina 2 é:  $v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$ . Já que os fluxos são produzidos pela corrente  $i_1(t)$  fluindo na bobina 1, a tensão induzida nesta bobina pode ser escrita como  $v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{di_1} \frac{di_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$ , onde  $L_1$  é a autoindutância da bobina 1. Analogamente, a tensão induzida na bobina 2 pode ser escrita como  $v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1} \frac{di_1(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$  em que  $M_{21} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1}$  é a indutância mútua da bobina 2 em relação à bobina 1. Assim, a tensão induzida (ou tensão mútua) no circuito aberto da bobina 2 é dada por:  $v_2(t) = M_{21} \frac{di_1}{dt}$  (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Considere a Figura 4.6 que ilustra o caso oposto ao anterior, ou seja, o enrolamento primário (bobina 1) está em aberto e uma corrente  $i_2(t)$  flui pelo secundário (bobina 2).

Figura 4.6 | Indutância mútua  $M_{12}$  da bobina 1 em relação à bobina 2



Fonte: elaborada pelo autor.

A corrente  $i_2(t)$  produz um fluxo magnético  $\Phi_2$  dado por:

$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$ , onde  $\Phi_{21}$  é o fluxo de  $i_2(t)$  que enlaça as bobinas 2 e 1 (fluxo mútuo), e  $\Phi_{22}$  é o fluxo de  $i_2$  que enlaça a bobina 2 e não a bobina 1 (fluxo de dispersão). Todo o fluxo  $\Phi_2$  atravessa a bobina 2, então a tensão induzida na bobina 2 é:

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_2}{di_2} \frac{di_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, \quad \text{onde } L_2$$

é a autoindutância da bobina 2. Como apenas o fluxo  $\Phi_{21}$  atravessa a bobina 1, então a tensão induzida na bobina 1 é:

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2} \frac{di_2(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \quad \text{onde } M_{12} = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2}$$

é a indutância mútua da bobina 1 em relação à bobina 2. Assim, a tensão induzida no enrolamento primário (bobina 1) é:

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}.$$

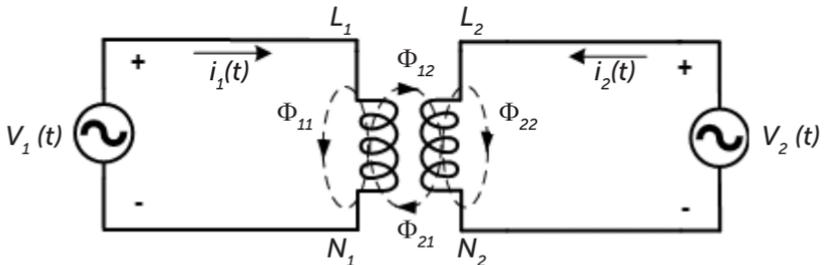
As indutâncias mútuas  $M_{21}$  e  $M_{12}$  são iguais e, portanto, podemos escrever:  $M_{21} = M_{12} = M$ , à qual damos o nome de indutância mútua entre as duas bobinas (JOHNSON; HILBURN; JOHNSON, 1994; ALEXANDER; SADIKU, 2013). Da mesma forma que a autoindutância  $L$ , a unidade da indutância mútua  $M$  é dada em henrys (H).



Em circuitos magneticamente acoplados, como os das Figuras 4.5 e 4.6, a autoindutância (ou indutância própria) relaciona a tensão induzida em uma bobina e a corrente que flui através dela já a indutância mútua relaciona a tensão induzida em uma bobina e a corrente que flui pela outra bobina.

Para o caso geral, ou seja, correntes fluindo em ambas as bobinas, considere a Figura 4.7.

Figura 4.7 | Indutância mútua para o caso em que fluem correntes em ambos os lados do circuito



Fonte: elaborada pelo autor.

Para obtermos os fluxos totais em cada bobina, teremos que considerar as contribuições do fluxo de dispersão (que é o fluxo que enlaça uma bobina, mas não a outra) e dos fluxos mútuos de

uma bobina para com a outra, isto é:  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12}$ , as quais  $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} + \Phi_{21}$

podem ser escritas como:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

Procedemos de forma similar ao que fizemos nos casos das Figuras 4.5 e 4.6 para deduzir que as tensões nas bobinas 1 e 2 do caso da Figura 4.7 (JOHNSON; HILBURN; JOHNSON, 1994):

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Dessa forma, fica evidente que as tensões induzidas  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  consistem de tensões induzidas próprias devidas às indutâncias próprias  $L_1$  e  $L_2$ , e de tensões mútuas devidas à indutância mútua  $M$ .

Tenha em mente que, apesar de as equações terem sido deduzidas no domíniodotempo, a nossa análise de circuitos magneticamente acoplados se dará no domínio da frequência (regime permanente). Neste domínio,

as equações para  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned}$$

e  $V_2 = 0$  para o caso em que a fonte conectada ao enrolamento secundário é substituída por uma carga.

### Regra do Ponto

A indutância mútua  $M$  sempre apresentará um valor positivo, no entanto, a tensão mútua  $M \frac{di(t)}{dt}$  pode ser positiva ou negativa, da mesma forma que a tensão induzida  $L \frac{di(t)}{dt}$ . A polaridade da tensão induzida  $L \frac{di(t)}{dt}$  é facilmente determinada pelo sentido de referência

da corrente e pela polaridade de referência da tensão. Porém, a polaridade da tensão mútua  $M \frac{di(t)}{dt}$  é um pouco mais complicada

de ser determinada, uma vez que estão envolvidos quatro terminais (dois do enrolamento primário e dois do secundário). Para facilitar tal determinação, aplicamos a regra do ponto (ou convenção dos pontos) na análise dos circuitos magneticamente acoplados, a qual é definida a seguir.

As polaridades das tensões mútuas são indicadas por pontos • (do inglês *dots*). Em resumo:

- Uma corrente  $i(t)$  que entra num terminal com ponto em um enrolamento induz uma tensão mútua  $M \frac{di(t)}{dt}$  com polaridade positiva no terminal com ponto do outro enrolamento.

- Da mesma forma, uma corrente  $i(t)$  que entra num terminal sem ponto em um enrolamento induz uma tensão mútua  $M \frac{di(t)}{dt}$  com polaridade positiva no terminal sem ponto do outro enrolamento (JOHNSON; HILBURN; JOHNSON, 1994).

Um método alternativo para a correta seleção do sinal das tensões mútuas pode ser entendido como:

Se as duas correntes ( $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ ) entram (ou saem) dos terminais com ponto das bobinas, os termos de indutância mútua e própria para cada par de terminais têm o mesmo sinal, caso contrário, eles têm sinais opostos (JOHNSON; HILBURN; JOHNSON 1994).

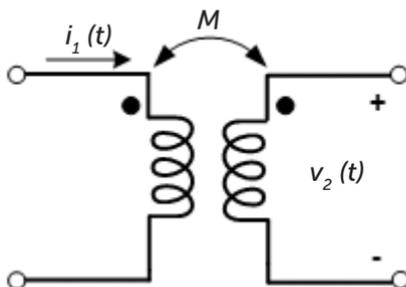
Os seguintes exemplos nos ajudarão a compreender facilmente a convenção dos pontos para determinarmos a polaridade da tensão mútua  $M \frac{di(t)}{dt}$  na análise de circuitos.



### Exemplificando

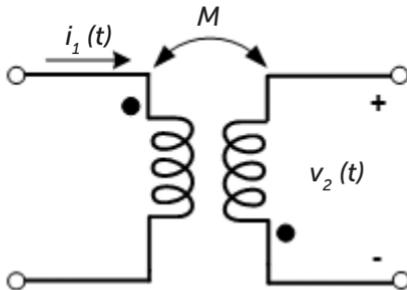
Aplique a convenção dos pontos nos seguintes circuitos magneticamente acoplados para determinar as tensões induzidas indicadas (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

a)  $v_2(t)$



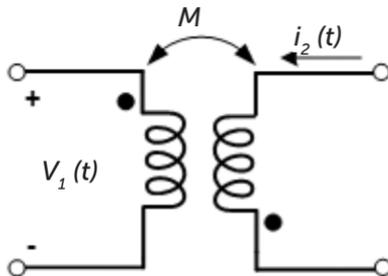
Fonte: elaborada pelo autor.

b)  $v_2(t)$



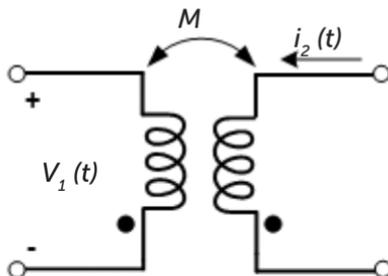
Fonte: elaborada pelo autor.

c)  $v_1(t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

d)  $v_1(t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme definimos anteriormente, a convenção dos pontos nos diz, resumidamente, que se uma corrente entra num terminal marcado com ponto em uma bobina (ou enrolamento), a tensão induzida na

outra bobina terá um sinal positivo no terminal com ponto da outra bobina. O mesmo ocorre se a corrente entrar num terminal sem ponto de uma bobina, isto é, a tensão induzida na outra bobina terá sinal positivo no terminal sem ponto. Com esta simples definição em mente e respeitando-se: *i*) o sentido de referência das correntes e *ii*) a polaridade de referência das tensões, podemos determinar as tensões induzidas indicadas.

- a) A corrente  $i_1$  entra num terminal com ponto do enrolamento, logo, a tensão  $v_2$  induzida possui polaridade positiva no terminal

com ponto da bobina 2 e é dada por 
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

- b) A corrente  $i_1$  entra num terminal com ponto do enrolamento, logo, a tensão  $v_2$  induzida possui polaridade positiva no terminal com

ponto da bobina 2 e é dada por 
$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$
. A diferença deste

caso para o anterior é que a polaridade da tensão  $v_2$  induzida é, na realidade, o oposto da polaridade de referência adotada para

$v_2$  e, por isso, aparece o sinal negativo em 
$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$
.

- c) Este caso é semelhante ao caso anterior. Perceba que a corrente  $i_2$  entra num terminal sem ponto da sua respectiva bobina e, dessa forma, a polaridade real da tensão  $v_1$  induzida tem sinal positivo no terminal sem ponto da bobina 1. Entretanto, como a polaridade de referência adotada para  $v_1$  possui o sinal trocado

em relação à polaridade da tensão induzida, 
$$v_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$
.

- d) A corrente  $i_2$  entra num terminal sem ponto do enrolamento, logo, a tensão  $v_1$  induzida possui polaridade positiva no terminal sem ponto

da bobina 1 e é dada por 
$$v_1 = M \frac{di_2}{dt}$$
. Note que, neste caso, assim

como no item a), a polaridade da tensão induzida coincide com a polaridade de referência adotada, por isso, o sinal de  $v_1$  é positivo

(
$$v_1 = M \frac{di_2}{dt}$$
).

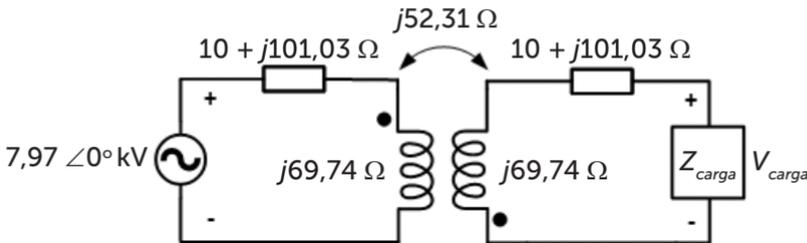
Com o domínio dos assuntos abordados até agora, você terá condições de resolver a situação-problema abordada no início da seção e muitas outras envolvendo circuitos magneticamente acoplados.

## Sem medo de errar

Você foi o profissional encarregado para testar um transformador que deverá alimentar uma pequena carga  $Z_{carga} = 24 + j4 \Omega$ . Utilizando o circuito da Figura 4.1, para o qual são dados:  $R_p = R_s = 10 \Omega$ ;  $L_p = L_s = 83 \text{ mH}$ ;  $L_1 = L_2 = 185 \text{ mH}$  e  $M = 138,75 \text{ mH}$ , deve-se obter: a) o circuito do transformador no domínio da frequência e b) a tensão  $V_{carga}$  na carga  $Z_{carga}$  para uma tensão de entrada  $V_1$  de 7.97 kV a 60 Hz.

- a) Aplicamos os nossos conhecimentos da análise de circuitos elétricos no domínio da frequência para obter o seguinte circuito:

Figura 4.8 | Modelo do transformador da situação-problema 1



Fonte: elaborada pelo autor.

- b) Para obtermos o valor da tensão de saída  $V_{carga}$ , devemos obter a corrente no enrolamento secundário do transformador e fazer  $V_{carga} = Z_{carga} \cdot I_2$ . Para tanto, utilizamos as equações apresentadas para o caso geral dos circuitos magneticamente acoplados, ou seja, caso em que temos correntes  $I_1$  e  $I_2$  fluindo em ambos enrolamentos do transformador:

$$V_1 = (R_p + jX_p + jX_1)I_1 + jX_M I_2$$

$$0 = jX_M I_1 + (R_s + jX_s + jX_2)I_2$$

$$(10 + j101,03)I_1 + j52,31I_2 = 7,97 \cdot 10^3$$

$$j52,31I_1 + (10 + j101,03)I_2 = 0$$

Resolvendo o sistema linear, temos que:

$$I_1 = 17,80 - j104,36 \text{ A}$$

$$I_2 = -14,42 + j52,61 \text{ A}$$

Portanto,

$$V_2 = (24 + j4) \cdot (-14,42 + j52,61) = -556,52 + j1204,84 \text{ V}$$

ou, em coordenadas polares:  $V_{carga} = 1327,16 \angle 114,79^\circ \text{ V}$ .

O valor encontrado para a tensão de saída está dentro da margem de  $\pm 5\%$  desejada, então, o transformador pode ser colocado em operação.

## Avançando na prática

### Estudo da tensão de saída em um transformador para diferentes valores de indutância mútua $M$

#### Descrição da situação-problema

A empresa fabricante de transformadores para a qual você trabalha deseja fazer um estudo da tensão de saída no transformador testado na primeira situação-problema para diferentes valores de indutância mútua  $M$ . Mais uma vez, você foi o profissional selecionado para realizar essa tarefa. Para realizá-la, considere o circuito do transformador testado na situação-problema anterior e obtenha os valores da tensão de saída  $V_{carga}$  para valores de  $M$  variando desde 130 mH a 150 mH com um passo de 15 mH. Apresente a) o gráfico  $M \times V_{carga}$ , explicando o comportamento de  $V_{carga}$  com o aumento de  $M$  e b) defina para quais valores de  $M$  a magnitude da tensão de saída  $V_{carga}$  é obtida dentro da margem de  $\pm 5\%$  desejada.

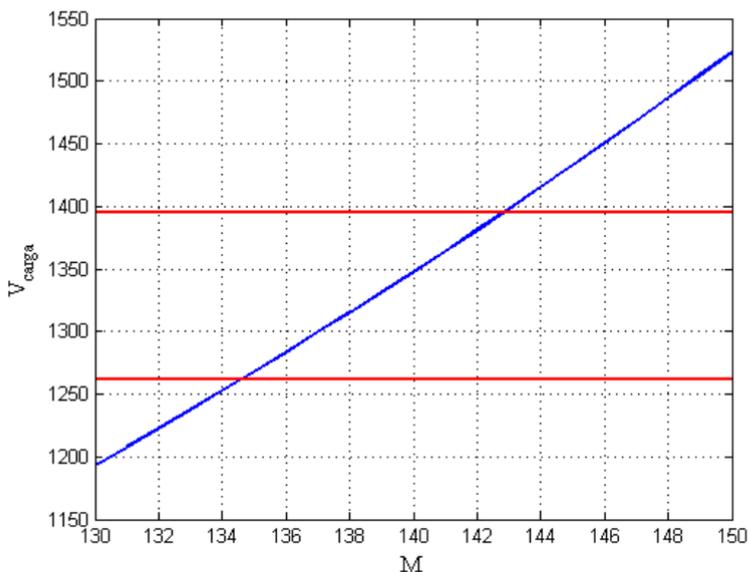
#### Resolução da situação-problema

O gráfico  $M \times V_{carga}$  obtido para  $M$  variando desde 130 a 150 mH é ilustrado na Figura 4.9. A curva em azul

representa  $M \times V_{\text{carga}}$  e as curvas em vermelho representam os limites inferior ( $0,95 \cdot 1,33 \times 10^3 = 1261,92$  V) e superior ( $1,05 \cdot 1,33 \times 10^3 = 1394,75$  V) da margem de tensão desejada na situação-problema 1. O aumento da indutância mútua  $M$  ocasiona o aumento da magnitude da tensão de saída  $V_{\text{carga}}$ . Analisando-se o gráfico, percebemos que  $V_{\text{carga}}$  é obtida na margem de  $\pm 5\%$  para valores de  $M$  variando entre, aproximadamente, 135 e 143 mH.

O valor da indutância mútua  $M$  depende das indutâncias próprias de cada bobina do transformador e do meio pelo qual o fluxo magnético se propaga para enlaçar as duas bobinas. Este valor não pode, entretanto, ser maior que a média geométrica das indutâncias próprias e, assim, para o presente exemplo, o máximo valor que  $M$  pode assumir é de 185 mH.

Figura 4.9 | Gráfico  $M \times V_{\text{carga}}$



Fonte: elaborada pelo autor.

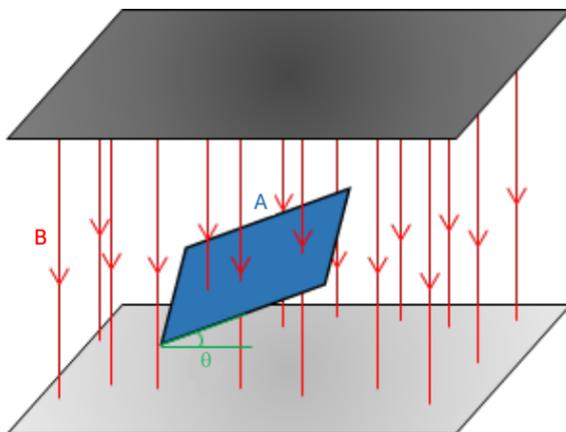
## Faça valer a pena

**1.** O fluxo magnético, comumente representado pela letra grega  $\Phi$ , é uma medida do campo magnético total que atravessa uma área específica.

Para o caso particular em que temos uma superfície plana de área  $A$  a um ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético, cuja magnitude é  $B$ , o fluxo magnético é dado por:  $\Phi = B \cdot A \cdot \cos \theta$ .

Considere a Figura 4.10 em duas situações diferentes. Em ambas, a superfície de área  $A$  é atravessada por um campo magnético de mesma intensidade com magnitude  $B$ , porém, na primeira situação, a superfície faz um ângulo de  $60^\circ$  entre a sua normal e o vetor do campo magnético, ao passo que na segunda situação, a normal da superfície e o vetor do campo magnético são perpendiculares. Quanto menor é o fluxo através da área na situação 1 em relação à situação 2?

Figura 4.10 | Área plana  $A$  a um ângulo  $\theta$  entre a normal da superfície e o vetor do campo magnético  $B$



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) O fluxo através da área na situação 1 é 50% menor que o da situação 2.
- b) O fluxo através da área na situação 1 é 33% menor que o da situação 2.
- c) O fluxo através da área na situação 1 é 23% menor que o da situação 2.
- d) O fluxo através da área na situação 1 é 13% menor que o da situação 2.
- e) O fluxo através da área na situação 1 é 9% menor que o da situação 2.

**2.** Durante o estudo de eletromagnetismo, o nome Michael Faraday aparece constantemente. As leis de eletricidade e magnetismo devem-se mais às descobertas experimentais de Faraday do que às de qualquer outra pessoa. Faraday originou o conceito de campo, descobriu a indução eletromagnética, o que o levou a inventar o dínamo, predecessor do

gerador elétrico, e explicou a eletrólise em termos de forças elétricas a nível molecular (KELLER et al., 1993).

Dentre as afirmativas a seguir, quais definem corretamente os conceitos de autoindutância (ou indutância própria) e de indutância mútua?

I - A autoindutância é a capacidade de um indutor induzir tensão em um indutor vizinho. Já a indutância mútua relaciona a tensão induzida em uma bobina e a corrente que flui através da mesma bobina. Os dois tipos de indutância são medidos em henrys (H).

II - A autoindutância relaciona a tensão induzida em uma bobina e a corrente que flui através da mesma bobina. Já a indutância mútua é a capacidade de um indutor induzir tensão em um indutor vizinho. Ambos os tipos de indutância são medidos em henrys (H).

III - Matematicamente, a autoindutância  $L$  do indutor é dada por

$$L = N \frac{d\Phi}{di}, \text{ em que } \Phi \text{ é o fluxo magnético que enlaça a bobina e } i$$

é a corrente que flui pela mesma bobina. Já a indutância mútua entre duas bobinas magneticamente acopladas (denominadas de bobinas 1 e 2) pode

ser obtida por  $M = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2}$ , em que  $N_1$  é o número de espiradas da

bobina 1,  $\Phi_{21}$  é o fluxo que enlaça as bobinas 2 e 1 e  $i_2$  é a corrente que flui pela bobina 2.

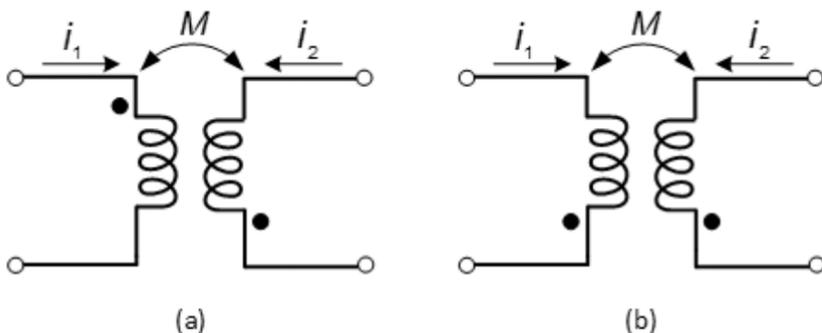
IV - Considerando duas bobinas (bobina 1 e bobina 2) magneticamente acopladas, o fluxo de  $i_1(t)$  que enlaça a bobina 1, e não a bobina 2, é chamado de fluxo mútuo, e  $\Phi_{12}$  é o fluxo de  $i_1(t)$  que enlaça as bobinas 1 e 2, chamado de fluxo dispersão.

- a) Apenas as afirmações I e IV estão corretas.
- b) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
- c) As afirmações I, III e IV estão corretas.
- d) Apenas as afirmações II, e III estão corretas.
- e) As afirmações II, III e IV estão corretas.

**3.** Considerando duas bobinas magneticamente acopladas, a regra do ponto (ou convenção dos pontos) nos diz que se as duas correntes ( $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ ) entram (ou saem) dos terminais com ponto das bobinas, os termos de indutância mútua e própria para cada par de terminais têm o mesmo sinal, caso contrário, eles têm sinais opostos.

Considere os circuitos magneticamente acoplados na Figura 4.11 (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Figura 4.11 | Circuitos magneticamente acoplados



Fonte: elaborada pelo autor.

A polaridade da tensão mútua em cada circuito é:

- a) (a) Positiva; (b) Positiva.
- b) (a) Positiva; (b) Negativa.
- c) (a) Negativa; (b) Positiva.
- d) (a) Negativa; (b) Negativa.
- e) Nada podemos afirmar, uma vez que as polaridades de referência da tensão dos terminais não foram definidas nos circuitos.

## Seção 4.2

### Energia em um circuito acoplado

#### Diálogo aberto

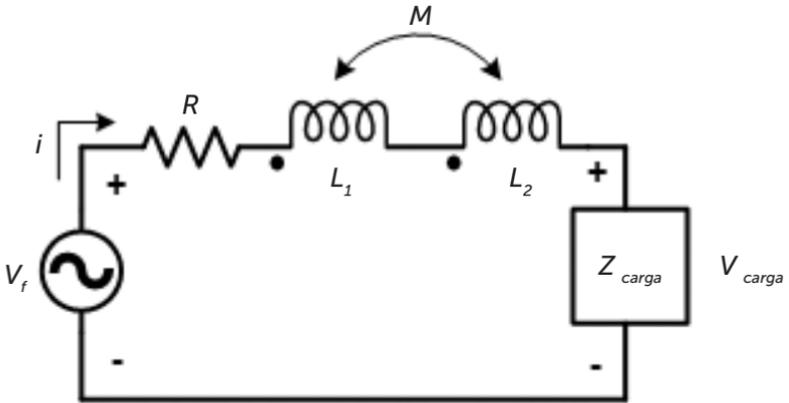
Nesta seção, continuamos com o estudo dos circuitos magneticamente acoplados. Aqui, os seguintes assuntos serão estudados: (i) a energia armazenada em um circuito acoplado, (ii) o coeficiente de acoplamento, (iii) a associação de bobinas magneticamente acopladas e, por fim, (iv) a análise de circuitos magneticamente acoplados. Ao final da seção, você deverá dominar bem a teoria apresentada e saber como analisar um circuito magneticamente acoplado, de modo a obter quaisquer grandezas de interesse num dado circuito desse tipo.

Conforme vemos mais adiante na seção, as bobinas em um circuito magneticamente acoplado podem ser associadas em série. De acordo com a regra do ponto (ou convenção dos pontos), podemos determinar se as bobinas em série estão conectadas segundo uma conexão aditiva ou subtrativa. Em resumo, se os sentidos das correntes nas duas bobinas forem positivos do ponto (•) para a outra extremidade (ou então da outra extremidade para o ponto), o acoplamento é dito aditivo. Por outro lado, se os sentidos das correntes forem contrários entre si, com relação à extremidade onde se localiza o ponto (•), o acoplamento entre as bobinas é subtrativo.

Neste contexto, você, profissional de destaque de uma fabricante de transformadores, foi o encarregado do projeto de um circuito magneticamente acoplado que alimentará uma pequena carga. O circuito é ilustrado na Figura 4.12, em que as bobinas estão conectadas segundo uma conexão série aditiva. Os valores dos parâmetros do circuito, exceto pela indutância mútua  $M$ , são disponibilizados da seguinte forma:  $R = 10 \Omega$ ,  $L_1 = 150 \text{ mH}$  e  $L_2 = 130 \text{ mH}$ . A tensão de entrada é de 7,97 kV (60 Hz), ao passo que a tensão de saída  $V_{\text{carga}}$  deve ser 480 V. A carga irá consumir 17,92 kW a um fator de potência de 0,95 indutivo. Você deverá

obter o valor exato de  $M$  que irá satisfazer a condição imposta para  $V_{\text{carga}}$  no projeto. Para os cálculos, utilize uma precisão de 4 casas decimais após a vírgula e apresente-os na forma de relatório.

Figura 4.12 | Circuito magneticamente acoplado com bobinas em série



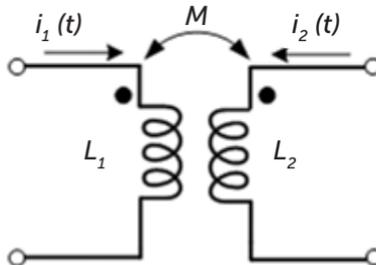
Fonte: elaborada pelo autor.

## Não pode faltar

### Energia Armazenada

Vejamos agora como determinar a energia armazenada em bobinas magneticamente acopladas (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Considere o circuito da Figura 4.13, para o qual considera-se inicialmente que as correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  são nulas e, portanto, a energia armazenada nas bobinas é nula.

Figura 4.13 | Circuito com bobinas magneticamente acopladas em que as correntes entram por terminais da bobina marcados com pontos



Fonte: elaborada pelo autor.

Aumentando-se  $i_1(t)$  de zero até um valor  $I_1$ , que permanece constante em regime permanente, mantendo-se  $i_2(t) = 0$ , a potência na bobina 1 será  $p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = i_1(t)L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$  e a energia

armazenada no circuito é:  $w_1 = \int p_1(t)dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1(t)di_1(t) = \frac{1}{2}L_1I_1^2$ .

Mantendo  $i_1(t) = I_1$  e aumentando  $i_2(t)$  de zero até um valor  $I_2$ , que permanece constante em regime permanente, a tensão induzida na bobina 1 será  $M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$ , ao passo que a tensão induzida na bobina

2 será zero, uma vez que  $i_1(t)$  é constante. A potência nas bobinas

é  $p_2(t) = i_1(t)M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)v_2(t) = I_1M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$

e a energia armazenada no circuito é:

$w_2 = \int p_2(t)dt = M_{12}I_1 \int_0^{I_2} di_2(t) + L_2 \int_0^{I_2} i_2(t)di_2(t) = M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$ .

A energia armazenada nas bobinas quando tanto  $i_1(t)$  como  $i_2(t)$  atingem valores constantes,  $I_1$  e  $I_2$ , é:

$w_{total} = w_1 + w_2 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2$ . Porém, sabemos que

$M_{12} = M_{21} = M$ , assim,  $w_{total} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$ .



Refleta

Por que podemos afirmar que as indutâncias mútuas  $M_{12}$  e  $M_{21}$  são iguais? (Dica: inverta a ordem na qual as correntes atingem seus valores de regime permanente, ou seja, faça  $i_2(t)$  de zero até  $I_2$  e em seguida faça  $i_1(t)$  de zero até  $I_1$  e compare a equação obtida por você com as equações apresentadas para  $w_{total}$ ).

A equação de  $w_{total}$  foi obtida para o circuito da Figura 4.13, em que ambas as correntes entram pelos terminais das bobinas

marcados com pontos. Teríamos a mesma equação para o caso em que as correntes entrassem em terminais sem pontos da bobina.

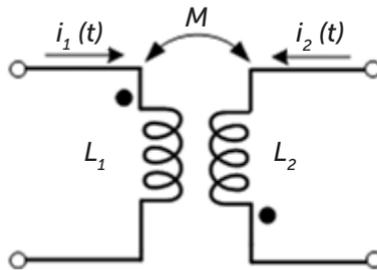
Para o caso em que uma corrente entra num terminal marcado com ponto em uma bobina e a outra corrente entra num terminal sem ponto, teríamos:  $w_{total} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 - MI_1I_2$ .

Dessa forma, a expressão geral para  $w_{total}$ , que nos fornece a energia armazenada em qualquer instante  $t$ , é dada por:

$$w_{total} = \frac{1}{2}L_1i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2i_2(t)^2 \pm Mi_1(t)i_2(t),$$

cujo sinal positivo é usado quando as correntes entram em terminais das bobinas marcados com (ou sem) pontos, e o sinal negativo é usado caso uma corrente entre um terminal da bobina com ponto e a outra corrente num terminal sem ponto, conforme ilustra a Figura 4.14. Lembre-se que a unidade da energia armazenada é o Joule (J).

Figura 4.14 | Circuito com bobinas magneticamente acopladas em que as correntes entram por terminais da bobina com marcações diferentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Os seguintes exemplos nos ajudarão a entender o procedimento para a determinação da energia armazenada em indutores acoplados num instante  $t$  qualquer.



### Exemplificando

Determine a energia armazenada no circuito da Figura 4.14 no instante  $t = 1,5$  s para  $L_1 = 2$  H,  $L_2 = 1$  H,  $M = 1$  H, e correntes  $i_1(t) = 3,922 \cos(2t + 11,31^\circ)$  A;  $i_2(t) = 2,774 \cos(2t + 56,31^\circ)$  A.

A energia total armazenada nos indutores para um circuito como o da Figura 4.14 é dada por:

$$w_{total} = \frac{1}{2}L_1i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2i_2(t)^2 - Mi_1(t)i_2(t)$$

Devemos calcular os valores das correntes no instante  $t = 1,5$  s e substituí-los na equação em conjunto com os demais parâmetros especificados:

$$i_1(1,5) = 3,922 \cos\left(2 \cdot 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} + 11,31^\circ\right) = -3,916 \text{ A}$$

$$i_2(1,5) = 2,774 \cos\left(2 \cdot 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} + 56,31^\circ\right) = -1,849 \text{ A}$$

Logo,

$$w_{total} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-3,916)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1,849)^2 - 1 \cdot (-3,916) \cdot (-1,849) = 9,804 \text{ J}$$

## Coeficiente de Acoplamento

Podemos estudar as equações de  $w_{total}$  para definir um limite superior para a indutância mútua  $M$ . Sabemos que a energia armazenada jamais pode ser negativa pois o circuito é passivo (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Tomando-se como referência, por

exemplo, a equação  $w_{total} = \frac{1}{2}L_1i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2i_2(t)^2 - Mi_1(t)i_2(t)$ ,

$w_{total}$  deve ser maior ou igual a zero ( $w_{total} \geq 0$ ). Completando-se o

quadrado em  $w_{total}$ , adicionando e subtraindo o termo  $i_1(t)i_2(t)\sqrt{L_1L_2}$ ,

tem-se:  $\frac{1}{2}(i_1(t)\sqrt{L_1} - i_2(t)\sqrt{L_2})^2 + i_1(t)i_2(t)(\sqrt{L_1L_2} - M) \geq 0$ . O

termo ao quadrado nunca é negativo, podendo ser, no mínimo, zero. Assim, a segunda parcela da equação deve ser maior que

zero, ou seja,  $(\sqrt{L_1L_2} - M) \geq 0$ , ou  $M \leq \sqrt{L_1L_2}$ , a qual nos diz

que a indutância mútua  $M$  não pode ser maior que a média geométrica das autoindutâncias das bobinas.

A proporção com que  $M$  se aproxima do limite superior é dada pelo coeficiente de acoplamento  $k$ , em que:  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  (grandeza adimensional). Note que  $0 \leq k \leq 1$  e, de forma equivalente,  $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ .



### Assimile

O coeficiente de acoplamento, geralmente representado pela letra  $k$ , é uma medida do acoplamento magnético entre duas bobinas. O seu valor é definido entre 0 e 1 ( $0 \leq k \leq 1$ ) e depende da proximidade entre as bobinas, do material do núcleo ao qual elas estão enroladas, das suas orientações, etc. O coeficiente de acoplamento é adimensional.

Fisicamente, o coeficiente de acoplamento pode ser entendido como a fração do fluxo magnético total que emana de uma bobina que enlaça outra. O seu valor depende da proximidade entre as duas bobinas, do material dos seus núcleos, das suas orientações e dos seus enrolamentos (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Se todo o fluxo produzido por uma bobina enlaça a outra bobina, então  $k = 1$  (caso ideal, não prático), temos um acoplamento de 100% e as bobinas são perfeitamente acopladas. Para  $0,5 < k < 1$ , dizemos que as bobinas são firmemente acopladas (por exemplo, transformadores de núcleo de material ferromagnético usados em sistemas de potência); para  $k < 0,5$  dizemos que as bobinas são livremente acopladas (por exemplo, transformadores com núcleo de ar usados com a função de transportar correntes de radiofrequência).



### Pesquise mais

Os materiais ferromagnéticos abrangem um grupo de elementos encontrados na natureza que, ao serem colocados na presença de um fluxo magnético, se imantam fortemente, de modo que o fluxo magnético neles é centenas de vezes maior que o fluxo que foi aplicado inicialmente. É devido a essa capacidade dos materiais ferromagnéticos que eles são utilizados na fabricação do núcleo de

transformadores e de outras máquinas elétricas. Você conhece algum material ferromagnético utilizado na fabricação de transformadores? Do ponto de vista microscópico, o que faz com que esses materiais apresentem vantagens sobre os materiais paramagnéticos?

As respostas para essas perguntas podem ser encontradas no Capítulo 20 da obra a seguir.

WILLIAM JR, D. Callister; RETHWISCH, David G. **Ciência e Engenharia de Materiais**: uma introdução. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

Vejamos a seguir os exemplos sobre a determinação do coeficiente de acoplamento e sobre a classificação das bobinas quanto aos seus acoplamentos, isto é, perfeitamente, firmemente ou livremente acopladas.



### Exemplificando

Determine o valor do coeficiente de acoplamento e classifique os indutores quanto aos seus acoplamentos:

- No circuito da Figura 4.13 para indutores  $L_1 = 5$  H,  $L_2 = 4$  H e  $M = 2,5$  H
- No circuito da Figura 4.14 para indutores  $L_1 = 2$  H,  $L_2 = 1$  H e  $M = 1$  H

O valor de  $k$  independe da polaridade da tensão mútua e tem seu valor dado por:  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ . Logo, para os parâmetros dados em a),

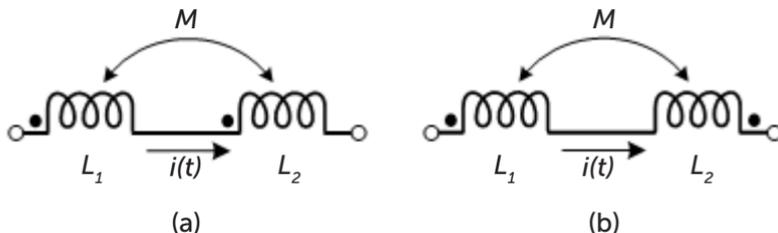
temos que:  $k = \frac{2,5}{\sqrt{5 \cdot 4}} = 0,559$ , indicando que os indutores estão firmemente acoplados.

Para os parâmetros dados em b), temos que:  $k = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} = 0,707$ , e os indutores estão firmemente acoplados.

## Associação de bobinas magneticamente acopladas

Considere as duas bobinas magneticamente acopladas ilustradas nas Figuras 4.15a e 4.15b e suponha: (i) que ambas são percorridas pela mesma corrente,  $i(t)$ , e (ii) que os sentidos dos enrolamentos são concordantes em (a) e discordantes em (b).

Figura 4.15 | Bobinas conectadas em série (a) aditiva; (b) subtrativa



Fonte: elaborada pelo autor.

A concordância ou discordância entre os sentidos dos enrolamentos representa-se de acordo com a regra do ponto. Se os sentidos das correntes nas duas bobinas forem positivos do ponto para a outra extremidade (ou então da outra extremidade para o ponto), os fluxos magnéticos gerados no núcleo comum serão concordantes e o acoplamento aditivo (ou positivo), conforme a Figura 4.15a. A indutância total das bobinas ilustradas na Figura 4.15a é dada por:  $L_{total} = L_1 + L_2 + 2M$  (conexão série aditiva) (ALEXANDER; SADIKU, 2013; POISL; WISBECK, [s.d]).

Por outro lado, se os sentidos das correntes forem contrários entre si, tendo sempre como referência a extremidade onde se localiza o ponto, então os fluxos magnéticos gerados são discordantes, subtraem-se no núcleo e o acoplamento entre as bobinas é dito subtrativo (ou negativo), conforme a Figura 4.15b. A indutância total das bobinas ilustradas na Figura 4.15b é dada por:  $L_{total} = L_1 + L_2 - 2M$  (conexão série subtrativa) (ALEXANDER; SADIKU, 2013; POISL; WISBECK, [s.d]).

## Análise de circuitos acoplados

Em estudos anteriores aprendemos a analisar circuitos CA condutivamente acoplados, também vimos temas como as Leis

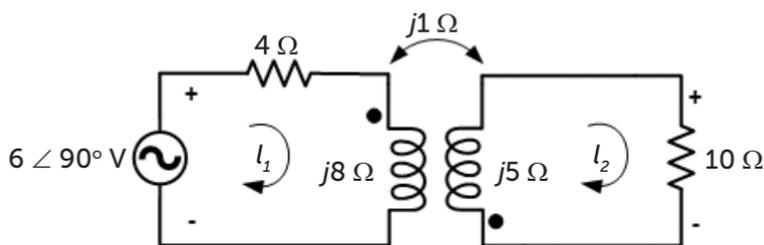
de Kirchhoff, associações de impedâncias, análises de malha e nodal aplicadas aos circuitos CA, etc. Na presente seção, estamos ampliando o nosso horizonte do conhecimento em circuitos elétricos com o estudo dos circuitos magneticamente acoplados. A esta altura, já sabemos determinar a polaridade da tensão induzida a partir da regra do ponto e associar bobinas em série. Agora, reunimos todos esses conhecimentos para analisar circuitos magneticamente acoplados. À primeira vista parece complicado, mas os seguintes exemplos nos mostrarão que a análise de um circuito desse tipo é basicamente tão simples quanto a de um circuito condutivamente acoplado.



### Exemplificando

1. Determine o coeficiente de acoplamento das bobinas e a tensão no resistor de  $10 \Omega$  no circuito da Figura 4.16 (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Figura 4.16 | Circuito do exemplo 1



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 562).

Antes de desenvolvermos as equações para um circuito como o da Figura 4.16, devemos fazer uma rápida análise para determinar a polaridade da tensão mútua. Note que ambas as correntes  $I_1$  e  $I_2$  entram em terminais marcados com ponto das suas respectivas bobinas, o que nos diz que a polaridade da tensão mútua é positiva. Agora prosseguiremos com o equacionamento, em que teremos duas equações, sendo uma para cada "lado" do circuito:

$$(4 + j8)I_1 + jI_2 = 6\angle 90^\circ$$

$$jI_1 + (10 + j5)I_2 = 0$$

Resolvendo o sistema linear, temos que:

$$I_1 = 0,671 \angle 27,14^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 0,060 \angle -89,43^\circ \text{ A}$$

Logo,  $V_{10\Omega} = 10 \cdot I_2 = 0,60 \angle -89,43^\circ \text{ V}$

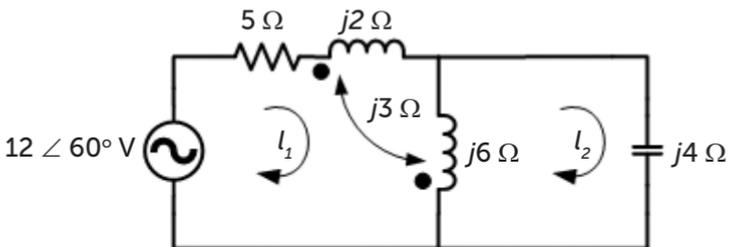
O coeficiente de acoplamento é dado por

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{j1}{j\omega}}{\sqrt{\frac{j8}{j\omega} \cdot \frac{j5}{j\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 5}} 0,158, \text{ o que indica que as}$$

bobinas estão livremente acopladas. Perceba que há necessidade de transformar as reatâncias de volta para os seus valores em henrys para a obtenção de  $k$ .

- Determine as correntes fasoriais  $I_1$  e  $I_2$  no circuito da Figura 4.17 (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Figura 4.17 | Circuito do exemplo 2



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 563).

Antes de desenvolvermos as equações para o circuito da Figura 4.17, façamos uma rápida análise para determinar a polaridade da tensão mútua e para constatar se as correntes "enxergam" as bobinas em série.

Note que ambas as correntes  $I_1$  e  $I_2$  entram em terminais marcados com ponto das suas respectivas bobinas, o que nos diz que a polaridade da tensão mútua é positiva. Além disso, a corrente  $I_1$  "enxerga" as duas bobinas em série segundo uma conexão subtrativa (atente para os pontos marcados nos terminais das bobinas: na bobina mais à esquerda,  $I_1$  entra num terminal com ponto, ao passo que na bobina mais à direita,  $I_1$  entra num terminal sem ponto). Portanto, as equações para cada "lado" do circuito apresentam a seguinte forma:

$$[5 + j(2 + 6 - 2 \cdot 3)]I_1 - j6I_2 + j3I_2 = 12\angle 60^\circ$$

$$j3I_1 - j6I_1 + j6I_2 - j4I_2 = 0$$

Perceba que as parcelas  $-j6I_2$  e  $-j6I_1$  na primeira e segunda equações, respectivamente, representam a bobina comum às duas malhas do circuito. Desenvolvendo as equações, tem-se:

$$(5 + j2)I_1 - j3I_2 = 12\angle 60^\circ$$

$$-j3I_1 + j2I_2 = 0$$

Após a resolução do sistema linear, tem-se:

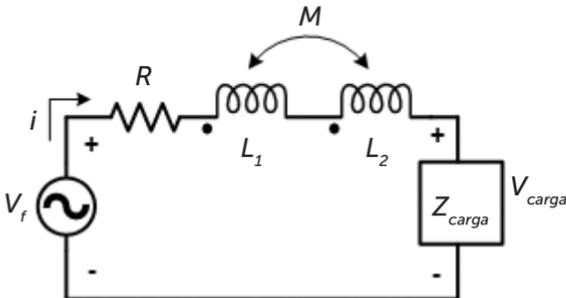
$$I_1 = 2,147\angle 86,56^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 3,220\angle 86,56^\circ \text{ A}$$

## Sem medo de errar

Você foi o profissional encarregado pela empresa para projetar um circuito magneticamente acoplado que alimentará uma pequena carga de 17,92 kW com fator de potência de 0,95 (indutivo) a uma tensão de  $V_{\text{carga}} = 480 \text{ V}$ . O modelo do circuito é ilustrado na Figura 4.12 e os valores dos parâmetros do circuito, exceto pela indutância mútua  $M$ , foram disponibilizados como sendo:  $R = 10 \Omega$ ,  $L_1 = 150 \text{ mH}$  e  $L_2 = 130 \text{ mH}$ . A tensão de entrada é de 7,97 kV (60 Hz). Deve-se obter o valor exato de  $M$  que irá satisfazer a condição imposta para  $V_{\text{carga}}$  no projeto.

Figura 4.12 | Circuito magneticamente acoplado com bobinas em série



Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro passo é obter a impedância da carga a partir dos valores disponibilizados para a sua tensão e potência consumida:

$$|S_{carga}| = \frac{P_{carga}}{fp} = \frac{17,92}{0,95} = 18,8632 \text{ kVA}$$

Logo, a potência complexa será:

$$\theta_{fp} = \cos^{-1} 0,95 = 18,1949^\circ = 0,3176 \text{ rad}$$

$$S_{carga} = 18,8632 \cdot e^{j0,3176} = 17,92 + j5,8907 \text{ kVA}$$

E a impedância da carga:

$$Z_{carga} = \frac{|V|^2}{S_{carga}^*} = \frac{480^2}{(17,92 - j5,8907) \cdot 10^3} = 11,6033 + j3,8143 \Omega$$

A impedância total do circuito é dada pela soma da impedância da carga mais a impedância dos parâmetros disponibilizados considerando a parcela **2M** devida à conexão série aditiva das bobinas:

$$Z_{total} = [10 + (j2\pi 60)(150 \cdot 10^{-3} + 130 \cdot 10^{-3} + 2M)] + 11,6033 + j3,8143$$

$$Z_{total} = (10 + 11,6033) + (j2\pi 60)(150 \cdot 10^{-3} + 130 \cdot 10^{-3} + 2M + 0,0101)$$

A qual pode ser representada por:  $Z_{total} = 21,6033 + jX_{total}$ .

A magnitude (ou módulo) de  $Z_{total}$ ,  $|Z_{total}|$  é dada por:

$$|Z_{total}| = \sqrt{R_{total}^2 + X_{total}^2} = \frac{|V_{fonte}|}{|I_{carga}|}, \text{ em que}$$

$$|I_{carga}| = \frac{|S_{carga}|}{|V_{carga}|} = \frac{18,8632 \cdot 10^3}{480} = 39,2983 \text{ A}$$

Agora, resolvemos  $\sqrt{R_{total}^2 + X_{total}^2} = \frac{|V_{fonte}|}{|I_{carga}|}$  para obter o valor de

$X_{total}$  e, finalmente,  $M$ :

$$\left( \sqrt{21,6033^2 + X_{total}^2} \right)^2 = \left( \frac{7970}{39,2983} \right)^2$$

$$21,6033^2 + X_{total}^2 = (202,8078)^2$$

$$X_{total} = \pm\sqrt{(202,8078)^2 - 21,6033^2} = \pm 201,6539 \Omega$$

Como o circuito é indutivo,  $X_{total}$  deve ser positivo:

$$X_{total} = 201,6539 \Omega.$$

Sabemos que

$$X_{total} = (2\pi 60)(150 \cdot 10^{-3} + 130 \cdot 10^{-3} + 2M + 0,0101) = 201,6539 \Omega,$$

ou seja,

$$X_{total} = (150 \cdot 10^{-3} + 130 \cdot 10^{-3} + 2M + 0,0101) = \frac{201,6539}{2\pi 60}$$

A qual, resolvida para  $M$ , resulta que  $M = 122,4018 \text{ mH}$ .

Podemos ainda obter o coeficiente de acoplamento para determinar se as bobinas estão livremente, firmemente ou perfeitamente acopladas:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{122,4018}{\sqrt{150 \cdot 130}} = 0,8765$$

Como  $k > 0,5$ , as bobinas estão firmemente acopladas.

## Avançando na prática

### Ampacidade

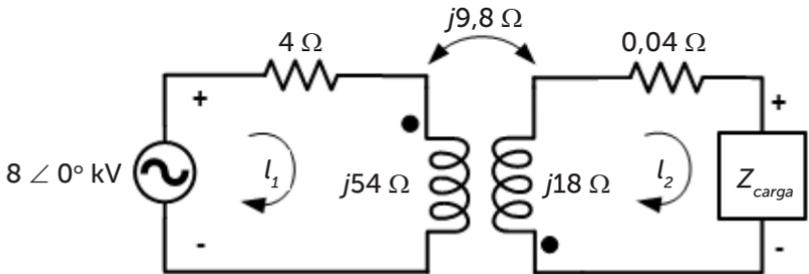
#### Descrição da situação-problema

A ampacidade é um termo que se refere à máxima magnitude de corrente que pode fluir por um condutor. A ampacidade pode variar muito de um condutor para outro e tal variação é baseada em fatores inerentes ao material do condutor, fatores externos (temperatura, umidade etc.), ou ambos. É desejável, por exemplo, que os enrolamentos de cobre das bobinas de um transformador drenem correntes de magnitudes menores que suas ampacidades.

Nesse contexto, você foi o profissional responsável pelo projeto de um transformador que alimentará uma carga de 20 kVA a um fator de potência de 0,95 indutivo. Por ser uma carga

mais sensível, os circuitos conectados ao primário e secundário do transformador devem ser isolados, conforme o diagrama do circuito do transformador ilustrado na Figura 4.18. A tensão de entrada é de 8 kV (60 Hz), ao passo que a tensão de saída deve ser 240 V. Obtenha: (a) as magnitudes das correntes  $I_1$  e  $I_2$  que fluirão pelas bobinas do transformador na condição de plena carga e (b) o coeficiente de acoplamento das bobinas, definindo-o como livremente, firmemente ou perfeitamente acoplado. Suponha que as ampacidades dos enrolamentos primário e secundário são, respectivamente, 170 A e 90 A. Os valores encontrados para as correntes  $I_1$  e  $I_2$  estão abaixo das suas ampacidades? Apresente os resultados na forma de relatório.

Figura 4.18 | Diagrama do transformador da situação-problema 2



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução da situação-problema

O primeiro passo é obter a impedância da carga a partir dos valores disponibilizados para a sua tensão e potência consumida:

$$\theta_{fp} = \cos^{-1} 0,95 = 18,1949^\circ = 0,3176 \text{ rad}$$

$$S_{carga} = 20 \cdot \exp(j0,3176) = 19 + j6,2450 \text{ kVA}$$

E também a impedância da carga:

$$Z_{carga} = \frac{|V|^2}{S_{carga}^*} = \frac{240^2}{(19 - j6,2450) \cdot 10^3} = 2,7360 + j0,8993 \Omega$$

Fazendo uma rápida análise na Figura 4.18 para determinar a polaridade da tensão mútua, notamos que as correntes  $I_1$  e  $I_2$  entram em terminais marcados com ponto das suas respectivas bobinas. Agora prosseguimos com o equacionamento com duas equações, sendo uma para cada "lado" do circuito:

$$(4 + j54)I_1 + j9,8I_2 = 8000\angle 0^\circ$$

$$j9,8I_1 + (0,040 + j18)I_2 + (2,7360 + j0,8993)I_2 = 0$$

Resolvendo-se o sistema linear, temos que:

$$I_1 = 162,4255\angle -84,4884^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 83,3297\angle 103,8677^\circ \text{ A}$$

O coeficiente de acoplamento das bobinas do transformador é dado por:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{9,8}{\sqrt{54 \cdot 18}} = 0,3143$$

Como  $k < 0,5$  as bobinas estão livremente acopladas.

As correntes  $I_1$  e  $I_2$  estão abaixo das suas respectivas ampacidades e, portanto, o transformador pode ser colocado em operação. Caso essas correntes estivessem acima das ampacidades dos seus respectivos condutores, as seguintes soluções, por exemplo, poderiam ser empregadas: 1) utilizar um transformador de melhor qualidade, isto é, usar um transformador cujo núcleo é feito de um material ferromagnético de maior permeabilidade magnética, e/ou 2) trocar os condutores dos enrolamentos por condutores de maior seção transversal.

## Faça valer a pena

**1.** A expressão geral para  $w_{total}$  que nos fornece a energia armazenada em qualquer instante  $t$  é dada por:

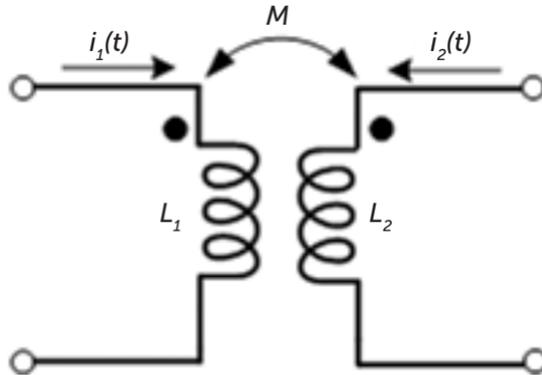
$$w_{total} = \frac{1}{2}L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2(t)^2 \pm M i_1(t) i_2(t), \text{ em que o sinal positivo é}$$

usado quando as correntes entram em terminais das bobinas marcados com (ou sem) pontos, e o sinal negativo é usado caso uma corrente entre num terminal da bobina com ponto e a outra corrente num terminal sem ponto. A unidade da energia armazenada é o Joule (J).

Determine a energia armazenada no circuito da Figura 4.19 no instante  $t = 1$  s para  $L_1 = 5$  H,  $L_2 = 4$  H,  $M = 2,5$

H, e correntes  $i_1(t) = 3,905 \cos(4t - 19,399^\circ)$  A;  
 $i_2(t) = 3,254 \cos(4t + 160,601^\circ)$  A.

Figura 4.19 | Circuitos magneticamente acoplados



Fonte: elaborada pelo autor.

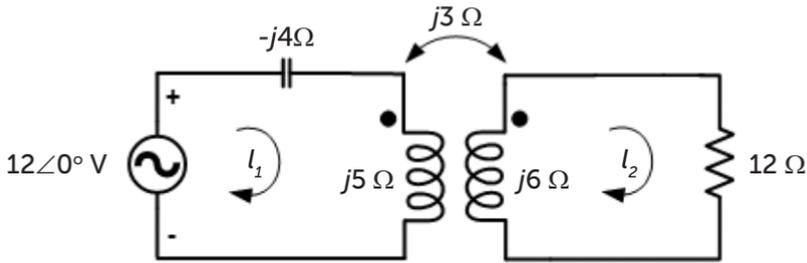
- a)  $w_{total} = 20,737$  J.
- b)  $w_{total} = 60,590$  J.
- c)  $w_{total} = 66,834$  J.
- d)  $w_{total} = 18,982$  J.
- e)  $w_{total} = 25,673$  J.

**2.** O coeficiente de acoplamento,  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ , é uma medida do

acoplamento magnético entre duas bobinas. O seu valor é definido como sendo  $0 \leq k \leq 1$  e depende da proximidade entre as bobinas, do material do núcleo ao qual elas estão enroladas, das suas orientações, etc. O coeficiente de acoplamento é adimensional.

Calcule o coeficiente de acoplamento e as correntes fasoriais do circuito da Figura 4.20.

Figura 4.20 | Circuito magneticamente acoplado



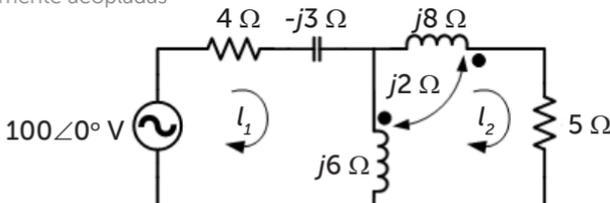
Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 561).

- a)  $I_1 = 2,910 \angle 14,036^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 13,016 \angle -49,399^\circ \text{ A}$ ;  $k = 0,548$  .
- b)  $I_1 = 13,016 \angle 130,601^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 2,910 \angle 194,036^\circ \text{ A}$ ;  $k = 0,548$  .
- c)  $I_1 = 2,910 \angle 194,036^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 13,016 \angle 130,601^\circ \text{ A}$ ;  $k = 0,548$  .
- d)  $I_1 = 13,016 \angle 49,399^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 2,910 \angle -14,036^\circ \text{ A}$ ;  $k = 0,548$  .
- e)  $I_1 = 13,016 \angle -49,399^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 2,910 \angle 14,036^\circ \text{ A}$ ;  $k = 0,548$  .

**3.** A análise de um circuito magneticamente acoplado é tão simples como a de um circuito condutivamente acoplado. Para realizá-la, unimos os conhecimentos adquiridos para os circuitos condutivamente acoplados com aqueles adquiridos para os circuitos magneticamente acoplados. Basicamente, esses conhecimentos são para os circuitos condutivamente acoplados: as Leis de Kirchhoff, associações de impedâncias, análise nodal e de malha aplicadas os circuitos CA; e para os circuitos magneticamente acoplados: a regra do ponto e associação de bobinas magneticamente acopladas em série.

Determine as correntes fasoriais  $I_1$  e  $I_2$  no circuito da Figura 4.21 (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Figura 4.21 | Circuito em que suas malhas são magneticamente e condutivamente acopladas



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 562).

a)  $I_1 = 8,693 \angle 19,026^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 20,300 \angle 3,501^\circ \text{ A}$  .

b)  $I_1 = 20,300 \angle 3,501^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 8,693 \angle 19,026^\circ \text{ A}$  .

c)  $I_1 = 8,693 \angle 199,026^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 20,300 \angle 183,501^\circ \text{ A}$  .

d)  $I_1 = 20,300 \angle 183,501^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 8,693 \angle 199,026^\circ \text{ A}$  .

e)  $I_1 = 20,300 \angle -3,501^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 = 8,693 \angle -19,026^\circ \text{ A}$  .

## Seção 4.3

### Acoplamento magnético em um transformador

#### Diálogo aberto

Nesta seção, finalizamos o estudo dos circuitos magneticamente acoplados com o estudo do transformador. Aqui, os seguintes assuntos serão estudados: (i) transformadores lineares, (ii) circuito equivalente dos transformadores lineares, (iii) transformadores ideais e, por fim, (iv) transformadores trifásicos. Ao final da seção, você entenderá bem a teoria apresentada e saberá como analisar um circuito contendo transformadores, de modo a obter quaisquer grandezas de interesse.

Para que um transformador possa ser incluso como um elemento de circuito, é necessário que ele possua um modelo equivalente que o represente. Podemos determinar experimentalmente os valores dos parâmetros (resistências e reatâncias) do modelo equivalente do transformador real. Para tanto, realizam-se dois ensaios (ou testes): o ensaio a vazio (ou de circuito aberto) e o ensaio de curto-circuito. No ensaio a vazio, um enrolamento do transformador (geralmente o lado de alta tensão) é deixado em aberto e o outro enrolamento (lado de baixa tensão) é conectado à tensão nominal plena. Medem-se a tensão, a corrente e a potência de entrada do transformador. A partir destas informações, podemos determinar a impedância do ramo de excitação do modelo do transformador equivalente.

No ensaio de curto-circuito, os terminais de baixa tensão do transformador são curto-circuitados e os terminais de alta tensão são ligados a uma fonte de tensão variável. Em seguida, a tensão de entrada é ajustada até que a corrente no enrolamento de curto-circuito seja igual ao seu valor nominal. Medem-se a tensão, a corrente e a potência de entrada do transformador. A partir dessas informações, podemos obter as impedâncias em série refletidas ao lado primário do transformador.

Você trabalha para uma fabricante de transformadores e foi o profissional encarregado de obter o modelo de um transformador de

15 kVA e 230/2300 V (60 Hz) que será utilizado em uma fábrica de automóveis. Os dados mostrados no Quadro 4.1 foram obtidos a partir dos ensaios realizados no transformador pelo técnico da empresa:

Quadro 4.1 | Dados obtidos durante os ensaios com o transformador

Ensaio a vazio (realizado no lado de baixa tensão do transformador)	Ensaio de curto-circuito (realizado no lado de alta tensão do transformador)
$V_{VZ} = 230 \text{ V}$	$V_{CC} = 47 \text{ V}$
$I_{VZ} = 7,133 \text{ A}$	$I_{CC} = 6 \text{ A}$
$P_{VZ} = 50 \text{ W}$	$P_{VZ} = 160 \text{ W}$

Fonte: adaptado de Chapman (2013, p. 103).

Encontre as impedâncias do circuito equivalente do transformador refletidas ao lado primário e apresente os resultados na forma de relatório.

## Não pode faltar

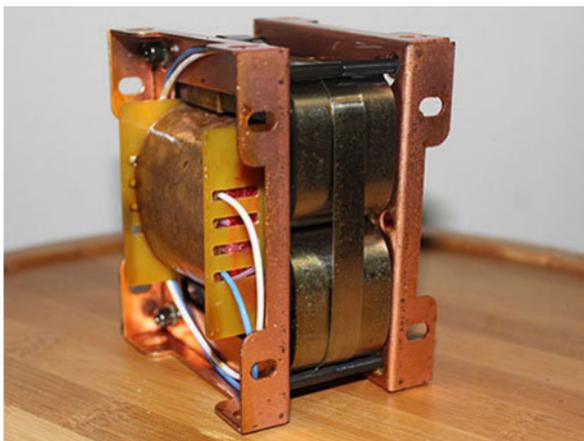
### Transformadores Lineares e Circuitos Equivalentes

Conforme estudamos nas seções anteriores desta unidade, o transformador é um equipamento cujo princípio de funcionamento baseia-se no fenômeno da indutância mútua. Além disso, sabemos que a bobina do transformador ligada à fonte de tensão (bobina de entrada) é denominada de enrolamento primário, ao passo que a bobina ligada à carga (bobina de saída) é denominada de enrolamento secundário. É comum também que cada enrolamento do transformador seja referido como lado ou circuito, por exemplo, "conectou-se a fonte ao lado primário e a carga ao lado secundário do transformador".

Dizemos que um transformador é linear se as suas bobinas forem enroladas em um material magneticamente linear, ou seja, um material para o qual a permeabilidade magnética é constante. Dentre esses materiais, temos ar, baquelite, madeira e plástico. Os transformadores lineares muitas vezes são

chamados de transformadores de ar, embora nem todos sejam necessariamente de núcleo de ar (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Veja um exemplo na figura a seguir.

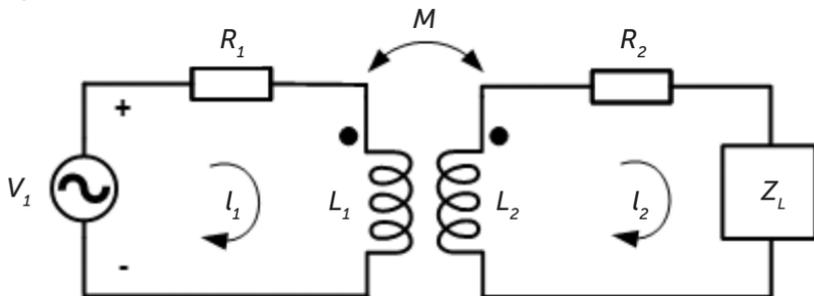
Figura 4.22 | Transformador de ar



Fonte: <<https://www.indiamart.com/industrialelectricalcorporation/other-products.html>>. Acesso em: 6 set. 2018.

Considere o circuito da Figura 4.23, para o qual devemos obter a impedância de entrada  $Z_{ent}$  vista pela fonte.

Figura 4.23 | Circuito contendo um transformador linear



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando-se a análise de malhas às duas malhas do circuito, obtêm-se:  $\mathbf{V}_f = (\mathbf{R}_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2$  e  $\mathbf{0} = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2$  para as malhas correspondentes ao enrolamento primário e ao enrolamento secundário, respectivamente. Expressando-se  $\mathbf{I}_2$  em termos de  $\mathbf{I}_1$  na

equação da malha referente ao enrolamento secundário e substituindo-se o resultado na equação da malha do primário, obtêm-se a impedância de entrada vista pela fonte:

$$Z_{ent} = \frac{V_f}{I_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$$

Perceba que esta impedância é formada por duas parcelas, na primeira,  $R_1 + j\omega L_1$  é a impedância primária e na segunda,

$\frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$  devida ao acoplamento entre os enrolamentos primário e secundário, é a impedância secundária refletida (ou referida) para o primário, denotada como  $Z_R$ . Note que  $Z_R$  não depende da posição dos pontos (*dots*) no transformador, uma vez que a indutância mútua  $M$  está elevada ao quadrado (ALEXANDER; SADIKU, 2013).



### Exemplificando

Considere o circuito da Figura 4.23, para o qual  $V_f = 220$  V (60 Hz),  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $L_1 = 110 \mu\text{H}$ ,  $L_2 = 55 \mu\text{H}$ ,  $M = 62 \mu\text{H}$  e  $Z_L = 100 + j20 \Omega$ . Obtenha a impedância de entrada,  $Z_{ent}$ , a impedância refletida,  $Z_R$ , e a corrente  $I_1$ .

Podemos primeiro calcular a impedância refletida, dada por:

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} = \frac{(2\pi 60)^2 \cdot (62 \cdot 10^{-3})^2}{100 + j(2\pi 60) \cdot (55 \cdot 10^{-3}) + (100 + j20)}$$

$$Z_R = 2,623 - j0,534 \Omega$$

E em seguida, a impedância de entrada:

$$Z_{ent} = R_1 + j\omega L_1 + Z_R$$

$$Z_{ent} = 10 + j(2\pi 60) \cdot (110 \cdot 10^{-3}) + 2,623 - j0,534 = 12,623 + j40,935 \Omega$$

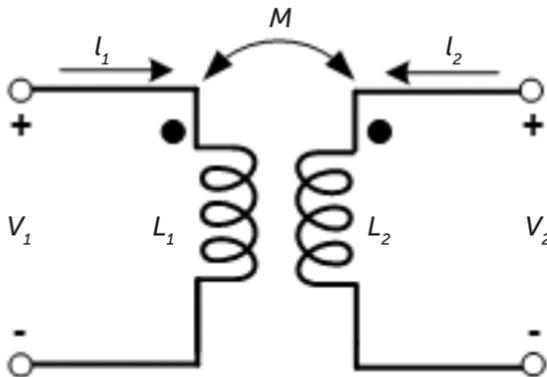
A corrente  $I_1$  é dada por:

$$I_1 = \frac{V_f}{Z_{ent}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{12,623 + j40,935} = 5,1357 \angle -72,862^\circ \text{ A}$$

### Circuitos equivalentes dos transformadores lineares

Muitas vezes, para facilitar a análise dos circuitos magneticamente acoplados, torna-se conveniente substituir o transformador linear ilustrado na Figura 4.24 por um circuito equivalente T (estrela) ou  $\Pi$  (triângulo), que levam implicitamente em conta os efeitos da indutância mútua  $M$ .

Figura 4.24 | Transformador linear



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos escrever as relações de tensão e corrente na forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , em que a matriz  $\mathbf{A}$  é denominada de matriz de coeficientes e os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$  podem representar correntes e tensões. Para o circuito da Figura 4.24, as relações de tensão e corrente na forma matricial para os enrolamentos primário e secundário são dadas por:

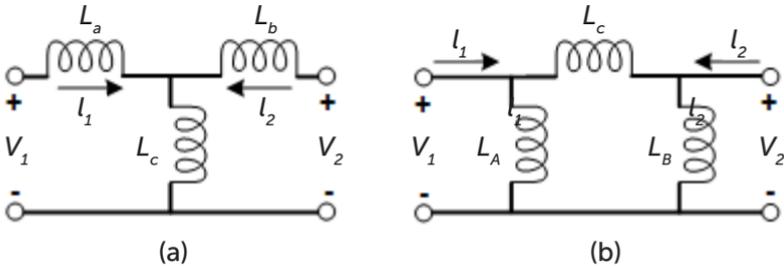
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Invertendo-se a matriz de coeficientes, podemos escrever as correntes em função das tensões:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Nosso objetivo agora é igualar as Equações 4.1 e 4.2 com as equações correspondentes para os circuitos T e  $\Pi$ , ilustrados, respectivamente, na Figura 4.25.

Figura 4.25 | (a) Circuito T equivalente; (b) Circuito  $\Pi$  equivalente



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o circuito T (Figura 4.25a), a análise de malhas nos fornece na forma matricial a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Se os circuitos das Figuras 4.24 e 4.25a são equivalentes, então os elementos correspondentes das suas respectivas matrizes de coeficientes nas Equações 4.1 e 4.3 devem ser iguais (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Logo, igualando-se as matrizes de coeficientes elemento a elemento, tem-se que:  $L_a = L_1 - M$ ,  $L_b = L_2 - M$  e  $L_c = M$ .

Para o circuito  $\Pi$  (Figura 4.25b), a análise nodal nos fornece, na forma matricial, a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{j\omega L_A} + \frac{1}{j\omega L_C} \right) & \frac{-1}{j\omega L_C} \\ \frac{-1}{j\omega L_C} & \left( \frac{1}{j\omega L_B} + \frac{1}{j\omega L_C} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Se os circuitos das Figuras 4.24 e 4.25b são equivalentes, então os elementos correspondentes das suas respectivas matrizes de coeficientes nas equações (4.2) e (4) devem ser iguais (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Logo, igualando-se as matrizes de

coeficientes elemento a elemento, tem-se que:  $L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}$ ,

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \text{ e } L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}.$$

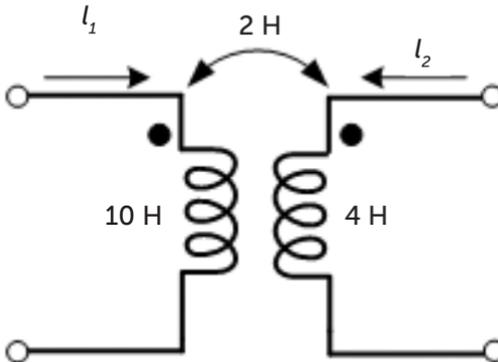
Note que os efeitos da indutância mútua nas Figuras 4.25a e 4.25b são implícitos. Agora, a modificação das posições dos pontos da Figura 4.24 pode fazer com que  $M$  se torne  $-M$ , o que é fisicamente impossível, mas matematicamente válido.



### Exemplificando

Determine os circuitos T e  $\Pi$  equivalentes do transformador linear da Figura 4.26.

Figura 4.26 | Transformador linear



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o circuito T, temos que:  $L_a = L_1 - M = 10 - 2 = 8\text{H}$ ,  $L_b = L_2 - M = 4 - 2 = 2\text{H}$  e  $L_c = M = 2\text{H}$ . O circuito T equivalente é ilustrado na Figura 4.27a.

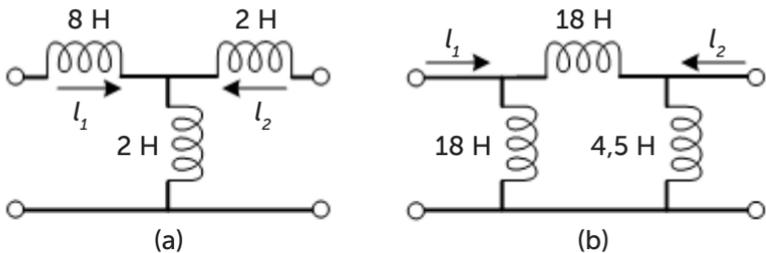
Para o circuito  $\Pi$ , temos que:  $L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{4 - 2} = 18\text{H}$ ,

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{10 - 2} = 4,5\text{H}$$
 e

$$L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{2} = 18\text{H}.$$

O circuito  $\Pi$  equivalente é ilustrado na Figura 4.27b.

Figura 4.27 | Circuitos equivalentes (a) T e (b)  $\Pi$



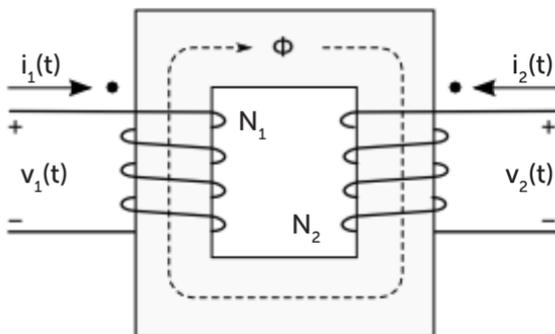
Fonte: elaborada pelo autor.

## Transformadores ideais

Transformador ideal é aquele que não apresenta perdas durante o processo de transformação. Ele é formado por um grande número de espiras cujas resistências são nulas e enroladas em um núcleo de material de altíssima permeabilidade magnética. Em decorrência dessa altíssima permeabilidade, o fluxo magnético fica totalmente confinado no núcleo do transformador, atravessando todas as espiras de ambos os enrolamentos, conseqüentemente, resultando em um acoplamento perfeito ( $k = 1$ ) (ALEXANDER; SADIKU, 2013; CHAPMAN, 2013).

A Figura 4.28 ilustra um transformador ideal, em que  $N_1$  é o número de espiras do enrolamento primário e  $N_2$  o número de espiras do enrolamento secundário.

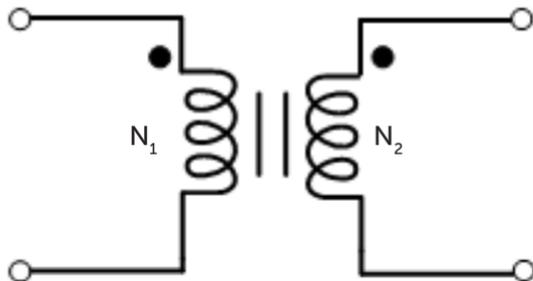
Figura 4.28 | Transformador ideal



Fonte: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAYLQAC/transformadores-eletricos>>. Acesso em: 6 set. 2018.

O símbolo do transformador ideal em circuitos elétricos é ilustrado na Figura 4.29, em que as linhas verticais entre as bobinas indicam um núcleo de ferro, em distinção ao núcleo de ar dos transformadores lineares.

Figura 4.29 | Símbolo usado em circuitos elétricos para transformadores ideais

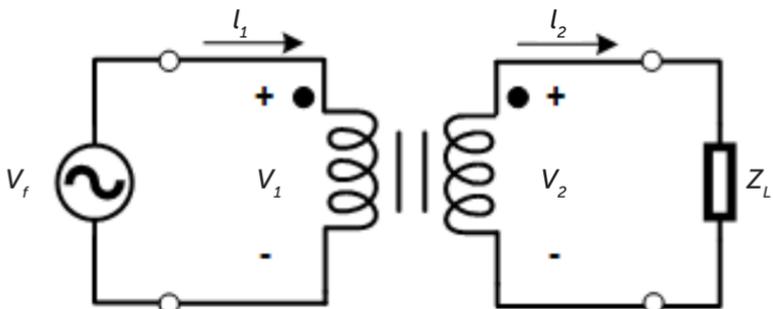


Fonte: elaborada pelo autor.

Agora define-se a relação de espiras  $n$ , calculada a partir das autoindutâncias dos enrolamentos. Ao aplicarmos uma tensão CA senoidal ao enrolamento primário, conforme mostrado na Figura 4.30, o fluxo magnético atravessa ambos os enrolamentos e, de

acordo com a lei de Faraday para a indução magnética, a tensão no enrolamento primário é  $v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$ , enquanto no enrolamento secundário é  $v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$ . Dividindo-se  $v_1$  por  $v_2$ , obtemos  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$ . Podemos ainda utilizar as tensões fasoriais no lugar das tensões instantâneas  $v_1$  e  $v_2$ , resultando em:  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$  (4.5).

Figura 4.30 | Relacionando os valores de tensão e corrente do enrolamento primário e secundário em um transformador ideal



Fonte: elaborada pelo autor.

A relação para as correntes nos enrolamentos primário e secundário pode ser obtida a partir da potência em cada enrolamento. Mas, se não há perdas num transformador ideal, então a potência no primário deve ser igual à do secundário:  $v_1 i_1 = v_2 i_2$ ,

ou ainda  $\frac{i_1}{i_2} = \frac{v_2}{v_1}$ , que é igual à relação de espiras  $n$ . Na forma

fasorial, temos:  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V_2}{V_1} = n$ , a qual é mais comumente escrita

como  $\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$  (4.6).



As tensões nos enrolamentos primário e secundário de um transformador ideal estão relacionadas com a relação de espiras  $n$

de acordo com  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$ . Por outro lado, as correntes nos

enrolamentos primário e secundário estão relacionadas com a relação de espiras  $n$  em uma razão inversa àquela das tensões, ou seja,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

Podemos classificar o tipo de transformador a partir do valor da relação de espiras  $n$ . Se  $n = 1$ , geralmente o transformador é chamado de transformador de isolamento, tendo como função apenas isolar os circuitos conectados aos lados primário e secundário. Se  $n > 1$ , o transformador é dito como elevador de tensão, uma vez que a tensão no secundário será maior que a do primário ( $V_2 > V_1$ ). Por outro lado, se  $n < 1$ , o transformador é dito abaixador de tensão, uma vez que a tensão no secundário será menor que a do primário ( $V_1 > V_2$ ) (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Devemos saber como determinar a polaridade apropriada das tensões e o sentido das correntes para o transformador da Figura 4.30. Para tanto, há duas regras básicas:

1. Se tanto  $V_1$  quanto  $V_2$  forem positivas ou ambas negativas nos terminais pontuados, use  $+n$  na Equação 4.5. Caso contrário, use  $-n$ ;
2. Se tanto  $I_1$  quanto  $I_2$  entrarem ou ambas saírem dos terminais pontuados, use  $-n$  na Equação 4.6. Caso contrário, use  $+n$ . (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

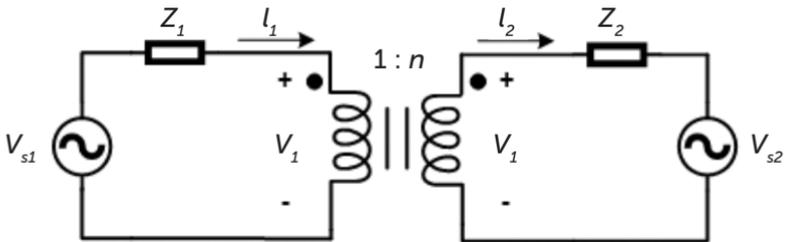
Ao analisarmos um circuito contendo um transformador ideal, é comum tornar o transformador implícito refletindo as impedâncias de um lado para o outro, de modo a simplificar a análise do circuito. Se desejarmos, por exemplo, encontrar a impedância do secundário refletida ao primário,  $Z_R$ , no circuito da Figura 4.31, podemos utilizar as Equações 4.5 e 4.6 da seguinte forma:

$$\frac{V_2}{V_1} = n \therefore V_1 = \frac{V_2}{n} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n} \therefore I_1 = n \cdot I_2$$

$$Z_R = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{V_2}{n}}{n \cdot I_2} = \frac{V_2}{n^2 \cdot I_2} = \frac{Z_2}{n^2}$$

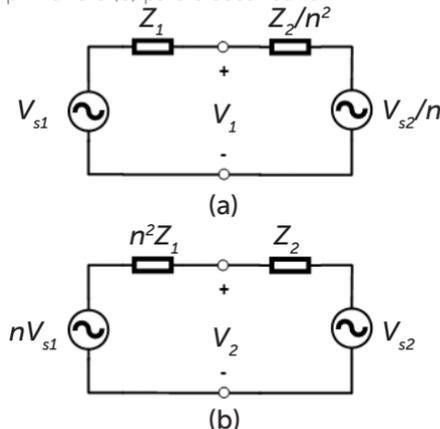
De forma análoga, também podemos refletir a impedância do primário para o secundário, em que a impedância refletida resultaria em:  $Z_R = n^2 \cdot Z_1$ . A Figura 4.32a ilustra o circuito equivalente da Figura 4.31 com o circuito do secundário refletido para o lado primário, ao passo que a Figura 4.32b ilustra o circuito equivalente da Figura 4.29 com o circuito do primário refletido para o lado secundário.

Figura 4.31 | Circuito contendo um transformador ideal cujas impedâncias devem ser refletidas de um lado para o outro



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.32 | Circuito contendo um transformador ideal cujas impedâncias foram refletidas (a) para o primário e (b) para o secundário



Fonte: elaborada pelo autor.

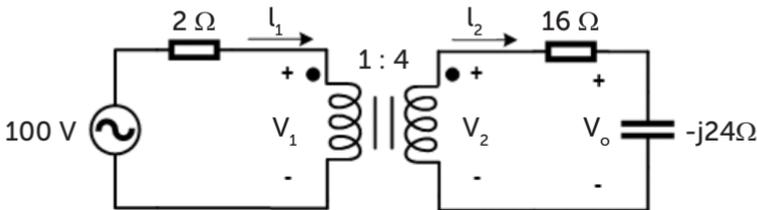
O seguinte exemplo nos ajudará a entender a análise de circuitos contendo transformadores ideais.



### Exemplificando

No circuito com transformador ideal da Figura 4.33, determine  $V_o$  e a potência complexa fornecida pela fonte.

Figura 4.33 | Exemplo



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos resolver este problema de várias maneiras. Uma delas seria refletindo-se a impedância do secundário para o primário e calculando as grandezas de interesse a partir daí. Para tanto, devemos obter primeiro a relação de transformação  $n$ , a qual é:  $n = N_2 / N_1 = 4$ . Logo:

$$Z_R = \frac{Z_2}{n^2} = \frac{16 - j24}{4^2} = 1 - j1,5 \Omega$$

A corrente  $I_1$  é:

$$I_1 = \frac{V_1}{2 + Z_R} = \frac{100 \angle 0^\circ}{3 - j1,5} = 29,814 \angle 26,565^\circ \text{ A}$$

Podemos calcular a potência complexa fornecida pela fonte:

$$S = V_1 \cdot I_1^* = 100 \angle 0^\circ \cdot 29,814 \angle -26,565^\circ = 2,981 \angle -26,565^\circ \text{ kVA}$$

Para calcularmos  $V_o$ , precisamos encontrar  $I_2$  a partir das relações das correntes  $I_1$  e  $I_2$  nos enrolamentos primário e secundário. Como  $I_1$  e  $I_2$  deixam os terminais sem pontos, então:

$$I_2 = -\frac{1}{n} I_1 = -0,25 \cdot 29,814 \angle 26,565^\circ = 7,454 \angle -153,435^\circ \text{ A}$$

Finalmente,  $\mathbf{V}_o$  é:

$$\mathbf{V}_o = -j24 \cdot 7,454 \angle -153,435^\circ = 178,885 \angle 116,565^\circ \text{ V}$$



### Refleta

Quais seriam as outras maneiras de resolvermos o problema do exemplo anterior? Tente resolvê-lo refletindo a impedância do primário para o secundário do transformador.

A essa altura, você já deve estar se perguntando sobre os transformadores reais. A seguinte sugestão de pesquisa será de fundamental importância para o entendimento desse assunto e também para a resolução da situação-problema do início desta seção.



### Pesquise mais

Os transformadores ideais partem do princípio de que não há perdas envolvidas durante o processo de transformação. Infelizmente, essa situação não representa o caso real e, portanto, qualquer modelo exato de um transformador deve levar em consideração as principais perdas envolvidas na sua operação. Estas são:

- Perdas nos enrolamentos ( $P_{\text{perdas}} = R \cdot I^2$ ). As perdas nos enrolamentos são as perdas devido ao aquecimento resistivo (Efeito Joule) nos enrolamentos primário e secundário do transformador.
- Fluxo de dispersão. Parte do fluxo magnético escapa do núcleo do transformador e não contribui para a indução de tensão no enrolamento secundário.
- Perdas por histerese. As perdas por histerese correspondem à energia necessária para a orientação dos chamados domínios magnéticos durante o processo de magnetização do núcleo do transformador.
- Perdas por correntes parasitas (ou correntes de Foucault). As perdas por correntes parasitas são perdas devidas ao aquecimento

resistivo no núcleo do transformador em razão do fluxo magnético variável que por ele circula (CHAPMAN, 2013).

Há um modelo de circuito que leva em consideração todas as perdas supracitadas. Essencialmente, este modelo corresponde a um transformador ideal conectado a parâmetros (resistências e reatâncias) que representam as perdas que ocorrem durante a operação do dispositivo. Para maiores detalhes sobre o modelo do transformador real, bem como sobre os ensaios de circuito aberto e de curto-circuito realizados para a obtenção dos parâmetros do modelo, pesquise no capítulo 2 do livro indicado.

CHAPMAN, Stephen J. **Fundamentos de máquinas elétricas**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013, p. 86-94.

## Transformadores trifásicos

Os transformadores trifásicos são necessários para atender à demanda da transmissão de energia trifásica. Podemos obter transformadores trifásicos de duas maneiras: ligando três transformadores monofásicos formando o chamado banco de transformadores, ou usando um transformador trifásico já fabricado desta forma. Há quatro ligações básicas de transformadores trifásicos, são elas:  $Y-Y$  (estrela-estrela),  $\Delta-\Delta$  (triângulo-triângulo),  $Y-\Delta$  (estrela-triângulo) e  $\Delta-Y$  (triângulo-estrela) (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Para qualquer uma das quatro ligações supracitadas, as seguintes relações são satisfeitas:

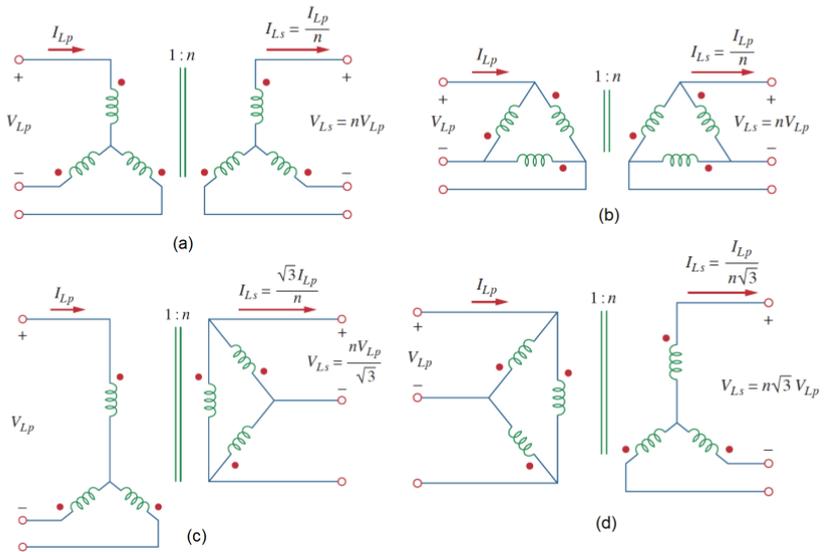
$$S_{total} = \sqrt{3} \cdot V_L I_L$$
$$P_{total} = S_{total} \cos \theta = \sqrt{3} \cdot V_L I_L \cos \theta$$
$$Q_{total} = S_{total} \sen \theta = \sqrt{3} \cdot V_L I_L \sen \theta$$

em que  $S_{total}$ ,  $P_{total}$  e  $Q_{total}$  são, respectivamente, potência aparente, potência ativa e potência reativa totais;  $V_L$  e  $I_L$  são os módulos da tensão de linha e da corrente de linha do primário ( $V_{LP}$  e  $I_{LP}$ ) ou secundário ( $V_{LS}$  e  $I_{LS}$ ); e  $\theta$  é a diferença angular entre os ângulos dos fasores de tensão e corrente ( $\theta = \theta_V - \theta_I$ ). Note também que

$V_{LP} \cdot I_{LP} = V_{LS} \cdot I_{LS}$ , uma vez que não há perdas de potência em um transformador ideal.

A Figura 4.34 ilustra como as tensões e as correntes dos enrolamentos primários e secundário se relacionam em cada uma das quatro ligações básicas do transformador trifásico.

Figura 4.34 | Transformadores trifásicos



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 584, 585).

Com o domínio dos conteúdos apresentados nesta seção, você está preparado para resolver as atividades propostas.

## Sem medo de erro

De acordo com a situação-problema, você deve obter o modelo de um transformador de 15 kVA e 230/2300 V (60 Hz) que será utilizado em uma fábrica de automóveis. Para tanto, é necessário utilizar os dados obtidos em cada ensaio realizado no transformador e obter os parâmetros (resistências e reatâncias) do circuito equivalente do transformador real.

No ensaio a vazio, um enrolamento do transformador é deixado em circuito aberto e o outro enrolamento é conectado à tensão nominal plena de linha. Nesta condição, toda corrente de entrada deve circular

pelo do ramo de excitação do transformador, de modo que toda tensão de entrada sofre queda no ramo de excitação. Assim, os parâmetros do ramo de excitação podem ser obtidos a partir da seguinte equação:

$$Z_{\phi} = \frac{V_{VZ}}{I_{VZ}} \angle \theta_{FP}$$

Com base nos valores da tabela para o ensaio a vazio, o fator de potência (FP) é:

$$FP = \frac{P_{VZ}}{V_{VZ} \cdot I_{VZ}} = \frac{50}{230 \cdot 2,1} = 0,1035 \quad \text{atrasado, pois os}$$

transformadores são elementos indutivos. Então,  $Z_{\phi}$  é:

$$Z_{\phi} = \frac{230}{2,1} \angle \cos^{-1}(0,1035) = 109,524 \angle 84,059^{\circ} \Omega$$

ou, na forma retangular,

$$Z_{\phi} = 11,336 + j108,936 \Omega$$

Portanto, os valores do ramo de excitação no lado de baixa tensão (primário) são  $R_{\phi} = 11,336 \Omega$  e  $X_{\phi} = 108,936 \Omega$ .

No ensaio de curto-circuito, os terminais de baixa tensão do transformador são colocados em curto-circuito e os terminais de alta tensão são ligados a uma fonte de tensão variável. A tensão de entrada é ajustada até que a corrente no enrolamento em curto-circuito seja igual ao seu valor nominal. Os parâmetros em série refletidos ao lado de alta tensão do transformador podem ser encontrados a partir deste ensaio:

$$Z_{SE} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}} \angle \theta_{FP}$$

Com base nos valores da tabela para o ensaio de curto-circuito, o fator de potência (FP) é:

$$FP = \frac{P_{CC}}{V_{CC} \cdot I_{CC}} = \frac{160}{47 \cdot 6} = 0,567 \quad \text{(atrasado). Assim, } Z_{SE}, \text{ é:}$$

$$Z_{SE} = \frac{47}{6} \angle \cos^{-1}(0,567) = 7,833 \angle 55,433^\circ \Omega$$

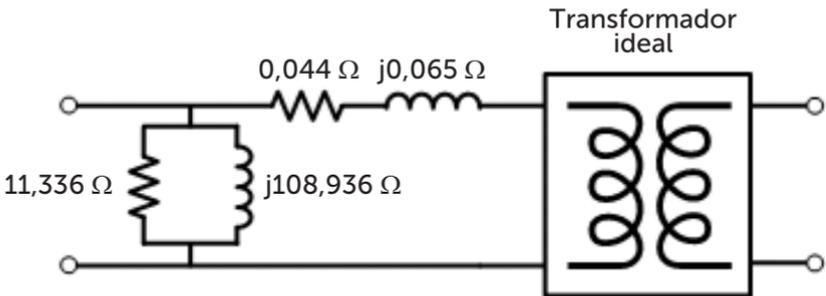
ou, na forma retangular:

$$Z_{SE} = 4,444 + j6,450 \Omega$$

Portanto, os valores dos parâmetros série totais, isto é, a impedância do lado de baixa tensão (primário) refletida ao lado de alta tensão (secundário) somada à impedância do lado de alta tensão, são  $R_{SE} = 4,444 \Omega$  e  $X_{SE} = 6,450 \Omega$ .

Sabendo que relação de espiras do transformador é  $n = 230 / 2300 = 0,1$ , podemos refletir os parâmetros série ao lado de baixa tensão (primário), resultando em  $R_{SE} = n^2 \cdot 4,444 = 0,044 \Omega$  e  $X_{SE} = 0,065 \Omega$ . O circuito equivalente do transformador é ilustrado na Figura 4.35.

Figura 4.35 | Circuito equivalente do transformador real da atividade proposta



Fonte: elaborada pelo autor.

## Avançando na prática

**Relação entre a tensão de transmissão de energia elétrica e as perdas nas linhas de transmissão**

### Descrição da situação-problema

Tipicamente, a energia elétrica é gerada em níveis de tensão que variam entre 12 a 25 kV e é elevada a partir dos transformadores para

algumas centenas de kV para serem transmitidas por longas distâncias com baixas perdas de potência (BARRETO et al, 2012). Nos centros de consumo, usam-se transformadores abaixadores para reduzir a tensão para níveis adequados, por exemplo, 110 V, 220 V, etc.

Você trabalha para uma empresa de engenharia elétrica que foi contratada para projetar uma linha de transmissão que alimentará uma carga de 50 MW com fator de potência 0,95 indutivo por meio de uma linha de transmissão trifásica, que se estenderá desde a usina geradora até um centro de consumo situado a 100 km de distância. Há um impasse na empresa sobre qual deve ser o nível de tensão de transmissão para que se tenha a menor perda de potência na linha. Alguns engenheiros da empresa afirmam que é melhor elevar a tensão de geração, que é 12,5 kV, para 138 kV na transmissão. Outros pensam que é melhor elevar a tensão de geração para 230 kV na transmissão. Você pegou o problema para si e vai provar, por meio de cálculos, qual será o melhor nível de tensão de transmissão. Considerando que o condutor possui resistência  $R = 2,064 \cdot 10^{-3} \Omega / \text{km}$ , calcule as perdas na linha para os dois níveis de tensão mencionados, desprezando a interferência da linha de transmissão no fator de potência da carga. Apresente um relatório detalhado dos cálculos, indicando ao final qual deve ser a tensão de transmissão.

### Resolução da situação-problema

Basicamente, para mostrar qual dos dois níveis de tensão resulta nas menores perdas, devemos calcular as correntes para cada nível de tensão e, em seguida, calcular as perdas.

Para a tensão de 138 kV (linha), a corrente de linha é dada por:

$$I = \frac{P_{1f}}{V_f \cdot FP} = \frac{50 \cdot 10^6}{\frac{138 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot 0,95} = 0,2202 \text{ kA}$$

e a perda de potência no condutor é de:

$$P = R \cdot I^2 = (100 \cdot 2,064 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,220 \cdot 10^3)^2 = 10 \text{ kW}$$

Para a tensão de 230 kV (linha), a corrente de linha será:

$$I = \frac{P_{1f}}{V_f \cdot FP} = \frac{50 \cdot 10^6}{\frac{230 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot 0,95} = 0,132 \text{ kA}$$

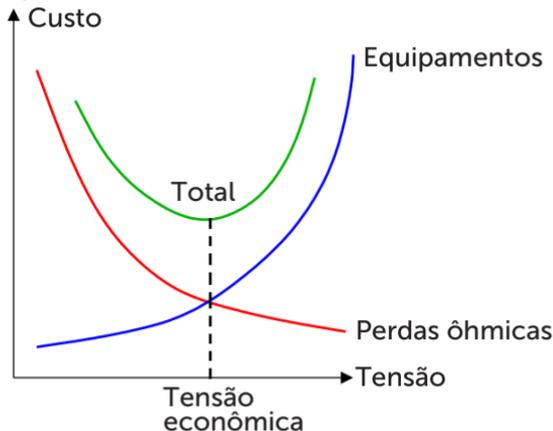
E a perda de potência no condutor é de:

$$P = R \cdot I^2 = (100 \cdot 2,064 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,220 \cdot 10^3)^2 = 10 \text{ kW}$$

A transmissão em 230 kV resulta em uma perda de potência quase três vezes menor que a perda obtida com a tensão em 138 kV. Dessa forma, certamente seria mais eficiente elevar a tensão de geração até 230 kV para transmitir a potência.

Como já esperado, maiores tensões de transmissão resultam em menores correntes de linha e, conseqüentemente, em menores perdas de potência nos condutores. Assim, poderíamos pensar, de forma bem simplista, que basta transmitirmos a potência nos maiores níveis de tensão possíveis para minimizar ao máximo as perdas de potência nos condutores. No entanto, deve-se equilibrar a relação entre o nível de tensão, a potência a transmitir e a extensão da linha para que ela possa ser projetada da maneira mais eficiente possível e ainda assim ser economicamente viável. A relação entre o custo e o nível de tensão de uma linha de transmissão pode ser vista no gráfico da Figura 4.36.

Figura 4.36 | Relação entre o custo de uma linha de transmissão e o seu nível de tensão



Fonte: adaptada de <<https://paginas.fe.up.pt/~mam/Linhas-01.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2018.

## Faça valer a pena

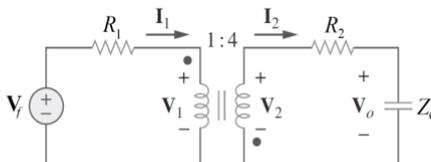
**1.** Os transformadores são equipamentos amplamente utilizados nos sistemas de potência. Basicamente, a energia é gerada nas usinas em níveis de 12 a 25 kV e utilizam-se transformadores elevadores para aumentar esta tensão para níveis de centenas de kV. Dessa forma, pode-se transmitir a energia em alta tensão e baixa corrente através das linhas de transmissão, resultando em economias significativas.

Considere um transformador ideal com os seguintes valores nominais: 1100/220 V, 7,7 kVA e 80 espiras no secundário. Calcule a relação de espiras, o número de espiras no primário e os valores nominais das correntes nos enrolamentos primário e secundário e, em seguida, marque a alternativa correta.

- a)  $n = 0,2$ ,  $N_1 = 400$ ,  $I_1 = 35$  A e  $I_2 = 7$  A.
- b)  $n = 5$ ,  $N_1 = 16$ ,  $I_1 = 7$  A e  $I_2 = 35$  A.
- c)  $n = 0,2$ ,  $N_1 = 400$ ,  $I_1 = 7$  A e  $I_2 = 35$  A.
- d)  $n = 0,2$ ,  $N_1 = 16$ ,  $I_1 = 7$  A e  $I_2 = 35$  A.
- e)  $n = 5$ ,  $N_1 = 16$ ,  $I_1 = 35$  A e  $I_2 = 7$  A.

**2.** Um transformador ideal é um transformador no qual não há perdas resistivas nos enrolamentos, não há dispersão do fluxo magnético gerado pela corrente que flui no enrolamento primário, não há perdas por correntes parasitas e nem por histerese no núcleo.

No circuito com o transformador ideal mostrado na figura a seguir, considere a tensão de entrada  $\mathbf{V}_f = 240\angle 0^\circ$  V, as resistências  $R_1 = 5 \Omega$  e  $R_2 = 16 \Omega$  e a impedância  $Z_c = -j48 \Omega$ . Calcule a potência complexa fornecida pela fonte e a tensão  $\mathbf{V}_o$ . Em seguida, assinale a alternativa correta.



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 579).

- a)  $s = 3,84\angle -53,13^\circ$  kVA e  $\mathbf{V}_o = 192\angle 143,13^\circ$  V .
- b)  $s = 11,52\angle 0^\circ$  kVA e  $\mathbf{V}_o = 576\angle 90^\circ$  V .
- c)  $s = 8,6\angle 26,565^\circ$  kVA e  $\mathbf{V}_o = 429,36\angle 116,565^\circ$  V .
- d)  $s = 8,6\angle -26,565^\circ$  kVA e  $\mathbf{V}_o = 429,36\angle 116,565^\circ$  V .
- e)  $s = 8,6\angle -26,565^\circ$  kVA e  $\mathbf{V}_o = 429,36\angle -116,565^\circ$  V .

**3.** Os transformadores ideais partem do princípio de que não há perdas envolvidas no processo de transformação de potência. Infelizmente, essa situação não representa o caso real, então, qualquer modelo exato de um transformador deve levar em consideração as principais perdas envolvidas na sua operação.

Analise as afirmações referentes às perdas em um transformador real e assinale a alternativa que contém apenas afirmações verdadeiras:

- I - As perdas nos enrolamentos são as perdas devido ao efeito Joule nos enrolamentos primário e secundário do transformador.
- II - O chamado fluxo disperso é o fluxo que contribui para a indução de tensão no enrolamento secundário.
- III - As perdas por histerese correspondem à energia necessária para a orientação dos domínios magnéticos durante o processo de magnetização do núcleo do transformador.
- IV - As perdas por correntes parasitas são as perdas devidas ao aquecimento gerado pelas correntes induzidas nos enrolamentos do transformador em razão do fluxo magnético que circula pelo núcleo.
- V - A potência fornecida ao primário é a mesma absorvida pelo secundário menos a potência perdida durante a operação do transformador.

- a) As afirmações I, II e III estão corretas.
- b) As afirmações I, II, IV e V estão corretas.
- c) As afirmações II, III, IV e V estão corretas.
- d) As afirmações I, III, IV e V estão corretas.
- e) As afirmações I, III e V estão corretas.

# Referências

- ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2013.
- BARRETO, Gilmar; et al. **Circuitos de corrente alternada: fundamentos e prática**. Oficina de Textos, 2012.
- CHAPMAN, Stephen J. **Fundamentos de máquinas elétricas**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- JOHNSON, David E.; HILBURN, John L.; JOHNSON, Johnny R. **Fundamentos de análise de circuitos elétricos**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.
- KELLER, Frederick J.; GETTYS, W. Edward; MALCOLM, J. Skove. **Physics**. 2. ed. McGraw Hill USA, 1993.
- POISL, Ramon C.; WISBECK, John, O. **Bobinas Acopladas**. Ufrgs.br. Disponível em: <[http://www.ufrgs.br/eng04030/Aulas/teoria/cap\\_13/bobiacop.htm](http://www.ufrgs.br/eng04030/Aulas/teoria/cap_13/bobiacop.htm)>. Acesso em: 28 jun. 3 set. 2018.
- WILLIAM JR, D. Callister; RETHWISCH, David G. **Ciência e Engenharia de Materiais: uma introdução**. LTC, Rio de Janeiro, 2016.



ISBN 978-85-522-1097-9



9 788552 210979 >