

Teoria de Controle Moderno II

Teoria de Controlo Moderno II

Anna Giuglia Menechelli Moraco

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Marley Fagundes Tavares

Maurício José Bordon

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Moraco, Anna Giuglia Menechelli
M827t Teoria de controle moderno II / Anna Giuglia Menechelli
Moraco. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A.,
2018.
296 p.

ISBN 978-85-522-0801-3

1. Engenharia. 2. Controle. I. Moraco, Anna Giuglia
Menechelli. II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Introdução e análise de sistemas em espaço de estados	7
Seção 1.1 - Introdução a sistemas em espaço de estados	9
Seção 1.2 - Análise de sistemas em espaço de estados	28
Seção 1.3 - Análise em espaço de estados com uso de software	46
Unidade 2 Projeto de sistemas de controle em espaço de estados	67
Seção 2.1 - Projeto de controlador por alocação de polos em espaço de estados	69
Seção 2.2 - Projeto de observador de estados	89
Seção 2.3 - Projeto em espaço de estados com uso de software	108
Unidade 3 Introdução a sistemas de controle digital	135
Seção 3.1 - Introdução a sistemas dinâmicos discretos	137
Seção 3.2 - Análise de sistemas discretos	158
Seção 3.3 - Análise de sistemas discretos com uso de software	176
Unidade 4 Análise e projeto de sistemas de controle digital	205
Seção 4.1 - Estabilidade de sistemas digitais	208
Seção 4.2 - Projetos de controle digital	235
Seção 4.3 - Estabilidade e projeto de controlador digital com uso de software	260

Palavras do autor

Os sistemas dinâmicos atuais estão cada vez mais complexos, podendo ter múltiplas entradas e múltiplas saídas. Tais características levaram à necessidade de métodos de análise e projeto de controle mais modernos do que aqueles que a técnica de controle clássica oferece. Enquanto para sistemas de única entrada e única saída (SISO) a técnica clássica apresenta métodos relacionados à análise e ao projeto com base no domínio da frequência, ou seja, na função de transferência do sistema, para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), a teoria de controle moderno oferece métodos relacionados à modelagem no domínio do tempo por meio de espaço de estados.

Além do aumento da complexidade dos sistemas, a aceleração tecnológica relacionada ao desenvolvimento de computadores e microcontroladores permite o monitoramento e controle desses sistemas por meios digitais, resultando em menores custos, maior sensibilidade de medição, redução de ruídos e flexibilidade para posteriores alterações no projeto. Nesses casos, a interação entre sistemas físicos a serem controlados e sistemas digitais controladores deve ser realizada por meio de conversores digitais-analógicos e vice-versa, e os modelos dinâmicos devem ser discretizados, para que as análises e os projetos sejam feitos.

Como base nisso, foi elaborada a disciplina Teoria de Controle Moderno II. Na primeira unidade, serão estudadas as definições, os conceitos e as análises relacionadas à modelagem de sistemas no espaço de estados. Ao final da segunda unidade, você será capaz de realizar projetos de controle por alocação de polos e observadores de estados, ambas metodologias baseadas na controlabilidade e observabilidade de sistemas em espaço de estados.

A partir da terceira unidade, será dado início aos estudos de sistemas de controle digitais. Primeiramente, serão vistos os principais conceitos de sistemas discretos, amostragem de sinais e análise. Por fim, na quarta unidade, você será capaz de verificar a estabilidade desses sistemas e realizar projetos de controladores digitais, entre eles, o PID digital.

Ao final da disciplina, você verá que, embora a análise e o controle de sistemas seja de natureza teórica complexa, com o auxílio computacional disponível hoje em dia, como o uso do software Matlab e de seu pacote *Control Systems Toolbox*, a prática pode ser mais fácil do que se imagina. Como? Isso é o que você descobrirá ao longo da disciplina.

Bons estudos!

Introdução e análise de sistemas em espaço de estados

Convite ao estudo

Em Teoria de Controle Moderno, você aprendeu a analisar e projetar sistemas de controle por meio de abordagens denominadas técnicas de controle clássico, cujas análise e projeto são realizados no domínio da frequência, ou seja, baseada em função de transferência. A função de transferência, como você viu, relaciona algebricamente uma única entrada e uma única saída do sistema e são aplicáveis apenas em sistemas lineares invariantes no tempo (ou seja, aqueles cujos parâmetros são fixos).

No entanto, atualmente, os sistemas de controle consistem em modelos complexos que podem ter múltiplas entradas e múltiplas saídas (por exemplo, o motor elétrico cujas entradas são o torque da carga e a tensão da armadura), além de parâmetros variáveis (por exemplo, a massa de um avião consumindo combustível ao longo do voo). Para esses casos, é mais adequado utilizar técnicas de controle moderno, que consistem basicamente na representação, na análise e no projeto no domínio do tempo, por meio do espaço de estados.

O espaço de estados trata-se da descrição de um sistema que apresenta diversas equações diferenciais de primeira ordem, representadas por uma notação vetor-matricial, a qual pode ser utilizada até mesmo para sistemas modelados por meio da técnica clássica.

Nesta unidade, você será introduzido à modelagem em espaço de estados: como é feita sua representação para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, sistemas SISO e MIMO e linearização de sistemas não lineares.

Serão introduzidos conceitos de análise de sistemas em espaço de estados: relação entre espaço de estados e função de transferência, cálculo de polos e zeros, solução da equação de estados e diagrama de blocos. E, por fim, todos os conceitos estudados serão aplicados com o uso do software computacional Matlab.

Como você pode imaginar, o mundo moderno está cada vez mais complexo. As pessoas apresentam uma necessidade constante, intimamente relacionada às tecnologias que as mantêm conectadas umas às outras e ao resto do mundo.

Os principais meios de comunicação que as conectam são: televisão, rádio, telefonia celular e internet. Todos eles utilizam a tecnologia incorporada aos satélites artificiais para criar um canal de comunicação entre uma fonte transmissora e outra receptora em diferentes locais do planeta Terra. Tais satélites artificiais consistem em espaçonaves construídas pelo homem e que são enviadas ao espaço para orbitar ao redor de um corpo celeste (Terra, Lua, Sol etc.), coletar informações com auxílio de câmeras, sensores, atuadores e transmiti-las para a Terra.

Com base nisso, suponha que você seja o responsável técnico de uma empresa de telecomunicações e se depara com um problema relacionado ao desempenho de um possível controlador de órbita de um dos satélites em atuação e precisa verificar o seu funcionamento. Como você deverá proceder?

Nesta primeira unidade, veremos como preparar o sistema para que ele seja analisado, partindo de um modelo não linear disponível, até chegarmos a um modelo linear em espaço de estados, e, por fim, a uma representação em forma de função de transferência, tudo isso com e sem auxílio de software.

Está curioso? Então mãos à obra!

Seção 1.1

Introdução a sistemas em espaço de estados

Diálogo aberto

Olá! Nesta primeira seção, você conhecerá os fundamentos da representação de modelos lineares em espaço de estados, o que permitirá alavancar conceitos e diferenças entre sistemas SISO (única entrada – única saída) e MIMO (múltiplas entradas – múltiplas saídas).

Veremos também que, para os casos em que o sistema possua uma dinâmica com característica não linear, é possível realizar sua linearização em torno de um ponto de equilíbrio, para que técnicas de análise e projeto, baseadas em controle linear, sejam aplicadas.

Para entender a aplicação desses conceitos, suponha que você seja o responsável técnico de uma empresa de telecomunicações e se depara com um problema técnico que demanda a análise da dinâmica da órbita de um dos satélites artificiais em atuação e precisa verificar sua estabilidade e seu desempenho.

Primeiramente, você precisa dispor do modelo linear desse sistema a fim de aplicar técnicas lineares de análise. No entanto, entre os manuais disponibilizados, é dado apenas o modelo não linear MIMO do sistema.

Como você deverá proceder nesse caso? Descobriremos a seguir!

Não pode faltar

À medida que os sistemas modernos tornam-se mais complexos, as exigências relacionadas ao seu desempenho ficam cada vez mais rigorosas. A teoria de controle moderno surge como uma solução para análise e projeto de sistemas variantes ou invariantes no tempo e com única ou múltiplas entradas e saídas. Essa teoria tem como base o conceito de estado.

O estado de um sistema é um conjunto de informações suficientes (denominadas variáveis de estado) para caracterizar esse sistema de forma completa. Uma vez que se tenha conhecimento dessas variáveis

em $t = t_0$ (valor inicial das variáveis) e da(s) entrada(s) em $t \geq t_0$, a partir dessas informações o comportamento do sistema pode ser determinado para qualquer instante $t \geq t_0$.

As variáveis de estado não precisam ser fisicamente mensuráveis, e essa liberdade de escolha consiste em uma vantagem dos métodos com base em espaço de estados. Dependendo da ordem do sistema, por exemplo, para um sistema de n -ésima ordem, é necessário que haja n variáveis de estados, as quais compõem um vetor $x(t)$ denominado vetor de estado.

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x(t) \rightarrow \text{vetor de estados} \\ x_i(t) \rightarrow \text{variável de estado} \end{array} \right.$$

A modelagem em espaço de estados envolve três tipos de variáveis presentes em sistemas dinâmicos lineares ou não lineares: variáveis de entrada $u(t)$, variáveis de saída $y(t)$ e variáveis de estado $x(t)$, e dois tipos de equações: equação de estados e equação de saída.

A equação de estados é composta por n equações diferenciais de primeira ordem simultâneas, com n variáveis que são denominadas variáveis de estados. As equações algébricas que contêm combinações das variáveis de estados e das entradas representam as variáveis de saída do sistema e compõem sua equação de saída.

$$u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u(t) \rightarrow \text{vetor de entrada} \\ u_i(t) \rightarrow \text{variável de entrada} \end{array} \right. , \quad y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} y(t) \rightarrow \text{vetor de saída} \\ y_i(t) \rightarrow \text{variável de saída} \end{array} \right.$$

$$\text{Eq. de estados} \rightarrow \dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{Eq. de saída} \rightarrow y = g(x, u), \quad y \in \mathbb{R}^q$$

Sendo n a ordem do sistema e também o número de variáveis de estado, p o número de entradas e q seu número de saídas.

Se a equação dinâmica de um sistema consistir em uma equação diferencial de ordem n , sua representação em espaço de estados será dada por um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem.

Generalizando para sistemas lineares e invariantes no tempo, as equações de estado e saída podem ser reescritas de forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2)$$

Onde:

$\mathbf{x}(t) \rightarrow$ vetor de estado, $\dot{\mathbf{x}}(t) \rightarrow$ derivada do vetor de estado em relação ao tempo;

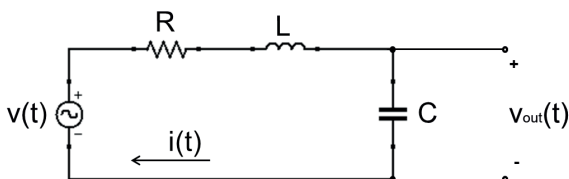
$\mathbf{y}(t) \rightarrow$ vetor de saída, $\mathbf{u}(t) \rightarrow$ vetor de entrada ou de controle;

$\mathbf{A} \rightarrow$ matriz de estado com dimensão $n \times n$, $\mathbf{B} \rightarrow$ matriz de entrada com dimensão $n \times p$;

$\mathbf{C} \rightarrow$ matriz de saída com dimensão $q \times n$, $\mathbf{D} \rightarrow$ matriz de transmissão direta com dimensão $q \times p$.

Para entendermos melhor o conceito apresentado, considere o circuito elétrico RLC série da Figura 1.1.

Figura 1.1 | Circuito RLC série



Fonte: elaborada pela autora.

Escrevendo a equação da malha, obtemos:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1.3)$$

A entrada $u(t)$ referida nas equações (1.1) e (1.2), neste exemplo, é dada pela tensão de entrada do circuito, ou seja, $v(t)$. A saída do sistema é a tensão $v_{out}(t)$, isto é, a tensão no capacitor: $v_{out}(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$.

Como há liberdade de escolha nas variáveis de estado, o sistema pode ter mais de uma representação matricial. De maneira geral, devem-se escolher variáveis diferenciáveis do sistema.

Por exemplo, vamos adotar $x_1(t) = \int i(t) dt$ e $x_2(t) = i(t)$.

Escrevendo as equações diferenciais das variáveis de estado, temos:

$$\dot{x}_1(t) = i(t) = x_2(t) \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{di(t)}{dt} \quad (1.5)$$

Da equação da malha (1.3), substituímos as variáveis de acordo com (1.4) e (1.5) e obtemos: $u(t) = L\dot{x}_2(t) + R x_2(t) + \frac{1}{C} x_1(t)$. A partir desta nova equação, temos as seguintes equações de estados:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) .$$

E a equação da saída: $y(t) = \frac{1}{C} x_1(t)$.

Escrevendo na forma matricial, temos a representação do circuito RLC série no espaço de estados seguinte, conforme equações (1.6) e (1.7):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u \quad (1.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (1.7)$$

Vale salientar que o mesmo sistema pode ser descrito por mais de um espaço de estados distintos. Isso ocorre porque diferentes variáveis de estado podem ser escolhidas, sendo, dessa forma, possível que ele tenha diversas representações.



Refleta

Para o mesmo circuito elétrico RLC série apresentado anteriormente, refaça a modelagem em espaço de estados considerando variáveis de estados diferentes. Como sugestão, você pode utilizar as seguintes variáveis de estado:

$$x_1(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = v_{out}(t) \text{ e } x_2(t) = i(t)$$

Veja o que acontece com o conjunto de matrizes que compõe o espaço de estados e compare com aquele definido anteriormente. Por que isso ocorreu?

Existe apenas uma restrição para a escolha da variável de estado: ela não pode ser escrita como uma combinação linear das outras variáveis de estado. Por exemplo, em um sistema elétrico, se for escolhida a tensão no resistor $v_R(t)$ como variável de estado, então a corrente que passa por ele $i(t)$ não pode ser escolhida, pois $v_R(t) = Ri(t)$.



O mesmo sistema dinâmico pode ser representado por diversos espaços de estados distintos de acordo com as variáveis de estados escolhidas. Essa liberdade de escolha deve ser cautelosa, de maneira que elas não sejam linearmente dependentes entre si, ou seja, as variáveis de estados devem ser linearmente independentes.

Observe que até agora tratamos apenas de sistemas com uma única entrada e uma única saída. Esses sistemas são denominados SISO, como você já deve ter visto na disciplina de Teoria de Controle Moderno. Esse nome vem do inglês *Single Input – Single Output*. Veja o diagrama de blocos de um sistema SISO e sua função de transferência, dada pela equação 1.8:

Figura 1.2 | Sistema SISO



Fonte: elaborada pela autora.

$$\text{Função de transferência: } H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.8)$$

No entanto, os sistemas atuais, por serem muito complexos, podem ter mais de uma variável a ser controlada e, portanto, mais de uma entrada. Além disso, por meio de sensores instalados na planta, mais de uma variável de saída pode ser obtida e servir como sinal de realimentação de controle. Esses sistemas são denominados MIMO, do inglês *Multiple Input – Multiple Output*, ou multivariáveis. Veja o diagrama de blocos de um sistema MIMO com p entradas e q saídas:

Figura 1.3 | Sistema MIMO



Fonte: elaborada pela autora.

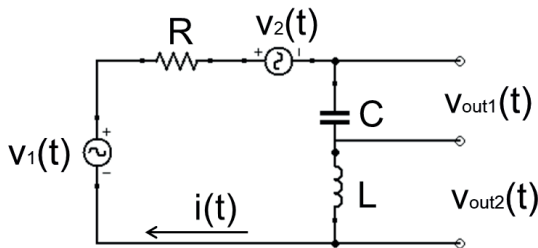
O diagrama de bloco da Figura 1.3 tem uma representação em função de transferência com estrutura matricial, denominada matriz de função de transferência, dada pela eq. (1.9):

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1p}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \dots & H_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q1}(s) & H_{q2}(s) & \dots & H_{qp}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} & \dots & \frac{Y_1(s)}{U_p(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} & \dots & \frac{Y_2(s)}{U_p(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Y_q(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_q(s)}{U_2(s)} & \dots & \frac{Y_q(s)}{U_p(s)} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

No caso de sistemas MIMO, a representação por espaço de estados permitirá análise e controle mais simplificados devido à notação vetor-matricial.

Veja um exemplo de um sistema elétrico multivariável:

Figura 1.4 | Exemplo de sistema RLC série multivariável



Fonte: elaborada pela autora.

Nesse sistema as entradas são as tensões nas fontes $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e as saídas são as tensões no resistor e capacitor ($v_{out1}(t)$ e $v_{out2}(t)$). Uma das possíveis representações em espaço de estados pode ser vista a seguir, em que as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são, respectivamente, a tensão no capacitor e a corrente do circuito, conforme equações (1.10) e (1.11):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Além de sistemas lineares multivariáveis e variantes no tempo, é possível também representar sistemas não lineares em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \rightarrow \text{Vetor de funções da dinâmica não linear dos estados de saída} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \rightarrow \text{Vetor de equações de saídas} \quad (1.13)$$

Onde:

$\mathbf{x}(t)$ → vetor de estado, $\mathbf{y}(t)$ → vetor de saída, $\mathbf{u}(t)$ → vetor de entrada ou de controle;

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ → vetor de funções não lineares que descreve a dinâmica do sistema;

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ → vetor de funções não lineares que descreve a saída do sistema.

De forma mais detalhada, o sistema é descrito pelas equações (1.14) e (1.15):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ y_2(t) = g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ y_q(t) = g_q(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (1.15)$$

No entanto, as técnicas de análise e projeto de sistemas não lineares são complexas e não garantem o desempenho do sistema, apenas sua estabilidade.

Diante das inúmeras técnicas de controle desenvolvidas para sistemas lineares, é possível linearizar o sistema não linear em torno de um ponto de equilíbrio, a fim de que tais métodos sejam aplicados.

Aprenderemos aqui o método de linearização por expansão em série de Taylor.



Pesquise mais

A série de Taylor é amplamente utilizada em estudos que envolvem métodos numéricos, pois permite que uma função seja aproximada por um polinômio.

Antes de prosseguir, revise série de Taylor na seguinte referência: CHAPRA, Steven C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para**

A condição de linearização de um sistema não linear é o ponto de equilíbrio em torno do qual ele será linearizado. Após o procedimento, o sistema linear resultante é válido apenas para variações em torno desse ponto. O ponto de equilíbrio é o valor em regime permanente do sistema, quando ele não varia com o tempo. Portanto, a condição de equilíbrio é definida por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) \rightarrow \text{Vetor de estado na condição de equilíbrio} \\ \mathbf{u}_0(t) \rightarrow \text{Vetor de entrada na condição de equilíbrio} \\ \mathbf{y}_0(t) \rightarrow \text{Vetor de saída na condição de equilíbrio} \end{cases}$$

Como no ponto de equilíbrio o sistema não varia com o tempo, as derivadas são nulas, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) = 0 \quad (1.16)$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \quad (1.17)$$

Definimos pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

O novo estado do sistema deve satisfazer a equação (1.16), assim:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \quad (1.19) \end{aligned}$$

Expandindo a equação (1.19) em série de Taylor, temos (o termo referente ao tempo será omitido de agora em diante):

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta\mathbf{u} \quad (1.20)$$

Como $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) = \mathbf{0}$ (eq. 1.16), os termos $\dot{\mathbf{x}}_0$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ se anulam, resultando na equação (1.21), que corresponde à forma linearizada da equação (1.12):

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{u} \quad (1.21)$$

O mesmo procedimento é feito para a equação (1.13), resultando no conjunto de equações a seguir:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} & (1.22) \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} & (1.23) \end{aligned}$$

Sendo que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_q}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_q}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \dots & \left. \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$



Exemplificando

Considere um sistema de suspensão de 1/4 de automóvel, representado por um sistema mecânico simples, composto por massa (m), mola (k_1) e amortecedor (k_2), cuja equação não linear é dada por:

$$m\ddot{r}(t) = -k_1 r(t) - k_2 \dot{r}(t) + F(t)$$

Sendo: $r(t)$ o deslocamento, $\ddot{r}(t)$ a aceleração e $F(t)$ a força aplicada.

Escolhendo as variáveis de estado: $\mathbf{x}_1(t) = r(t)$ (deslocamento) e $\mathbf{x}_2(t) = \dot{r}(t)$ (velocidade) e tomando a entrada $\mathbf{u}(t) = F(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t) = r(t) = \mathbf{x}_1(t)$, o sistema pode ser escrito na forma de espaço de estados:

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \quad (1.28)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = -\frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 + \frac{1}{m}u = f_2(x_1, x_2, u) \quad (1.29)$$

Aplicando as equações matriciais (1.24) a (1.27) para (x_{1_0}, x_{2_0}, u_0) , temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1 - 3k_2x_{1_0}^2}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1 - 3k_2x_{1_0}^2}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta u \quad (1.30)$$

$$\Delta y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Para calcular o ponto de equilíbrio do sistema (x_0, u_0) , a condição da equação (1.16) deve ser atendida.

Assumindo que em regime permanente a entrada é nula:

$$u_0 = 0 \quad (1.32)$$

$$\text{De (1.28) temos: } \dot{x}_1 = x_{2_0} = 0 \quad \therefore x_{2_0} = 0 \quad (1.33)$$

$$\text{De (1.29) temos: } \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{m}x_{1_0} - \frac{k_2}{m}x_{1_0}^3 + \frac{1}{m}u_0 = 0 \quad (1.34)$$

Substituindo (1.32) em (1.34), temos as condições iniciais na eq. (1.35):

$$-\frac{k_1}{m}x_{1_0} - \frac{k_2}{m}x_{1_0}^3 = 0$$

$$-\frac{k_2}{m}x_{1_0}^3 = \frac{k_1}{m}x_{1_0} \Rightarrow -k_2x_{1_0}^2 = k_1 \Rightarrow x_{1_0}^2 = -\frac{k_1}{k_2} \Rightarrow x_{1_0} = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{1_0} = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} \\ x_{2_0} = 0 \\ u_0 = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Para existir x_{1_0} , esta deve ser um número real. Portanto, k_1 e k_2 devem ter sinais opostos de maneira que o interior da raiz seja de sinal positivo.

Para finalizar, substituindo a condição de equilíbrio (1.35) no espaço de

estados (1.30)-(1.31), temos o sistema de suspensão veicular linearizado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k_1}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta u \quad (1.36)$$

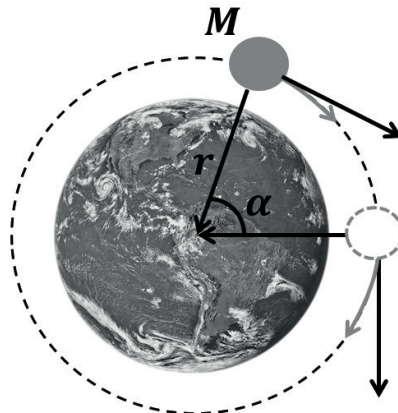
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Sem medo de errar

Os principais meios de comunicação atuais (televisão, rádio, telefonia celular e internet) utilizam a tecnologia incorporada aos satélites artificiais para criar um canal de comunicação entre a fonte transmissora e a receptora em diferentes locais do planeta.

Uma empresa de telecomunicações apresenta um satélite artificial em órbita cuja dinâmica precisa ser avaliada devido a um problema técnico nele. Para isso, o manual disponibilizado ao projetista responsável da empresa apresenta apenas o modelo não linear MIMO do sistema da Figura 1.5, que consiste na órbita de um satélite com massa M , descrita pelas equações não lineares (1.38)-(1.39).

Figura 1.5 | Satélite de massa M em órbita



Fonte: adaptada de Vargas e Paglione (2015).

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\alpha}^2(t) - \frac{k}{r^2(t)} + \frac{F_r(t)}{M} \quad (1.38)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -\frac{2\dot{r}(t)\dot{\alpha}(t)}{r(t)} + \frac{F_t(t)}{Mr^2(t)} \quad (1.39)$$

Sendo $r(t)$ a distância entre o satélite e a Terra, $\alpha(t)$ o deslocamento seu angular e k uma constante gravitacional.

O sistema apresenta duas entradas de controle: $u_1 = F_r(t)$ e $u_2 = F_t(t)$, forças de tração radial e tangencial, respectivamente, e duas saídas: $r(t)$ e $\alpha(t)$, sendo, portanto, um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO).

As variáveis de dinâmicas de estado desse sistema são:

$$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4]^T = [r(t) \ \dot{r}(t) \ \alpha(t) \ \dot{\alpha}(t)]^T.$$

Você é o projetista responsável por essa análise, como deverá proceder?

Resolução do problema:

Para iniciar as análises desse sistema, é necessário obter uma representação linear em espaço de estados para que técnicas de controle linear possam ser aplicadas.

Para resolução desse problema, devemos, inicialmente, escrever as equações de estados a partir das equações (1.38) e (1.39):

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{r}(t) = \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{f}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{r}(t) = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4^2 - \frac{k}{\mathbf{x}_1^2} + \frac{u_1}{M} \Rightarrow \mathbf{f}_2 = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4^2 - \frac{k}{\mathbf{x}_1^2} + \frac{u_1}{M}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \dot{\alpha}(t) = \mathbf{x}_4 \Rightarrow \mathbf{f}_3 = \mathbf{x}_4$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \ddot{\alpha}(t) = -\frac{2\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_1} + \frac{u_2}{M \mathbf{x}_1^2} \Rightarrow \mathbf{f}_4 = -\frac{2\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_1} + \frac{u_2}{M \mathbf{x}_1^2}$$

As saídas desse sistema são:

$$\mathbf{y}_1 = r(t) = \mathbf{x}_1 \Rightarrow \mathbf{g}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{y}_2 = \alpha(t) = \mathbf{x}_3 \Rightarrow \mathbf{g}_2 = \mathbf{x}_3.$$

O ponto de equilíbrio desse sistema é dado por $u_0 = [u_1 \ u_2]^T = [F_{t_0}(t) \ F_{r_0}(t)]^T$ e $x_0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^0]^T = [r_0(t) \ \dot{r}_0(t) \ \alpha_0(t) \ \dot{\alpha}_0(t)]^T$, dessa forma, a equação (1.10) deve ser satisfeita.

Aplicando as equações matriciais (1.18) a (1.21) para o ponto de equilíbrio, temos:

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_4} \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right) \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial x_4}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_4}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_4}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_4}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial x_4} \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right) \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left. \left(x_4^2 + 2\frac{k}{x_1^3} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & 0 & 0 & 2x_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left. \left(\frac{2x_2 x_4}{x_1^2} - 2\frac{u_2}{Mx_1^3} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \left(-\frac{2x_4}{x_1} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & 0 & \left. \left(-\frac{2x_2}{x_1} \right) \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4^2 + 2\frac{k}{x_1^3} & 0 & 0 & 2x_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2x_2 x_4}{x_1^2} - 2\frac{u_2}{Mx_1^3} & -\frac{2x_4}{x_1} & 0 & -\frac{2x_2}{x_1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right)}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \left(x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_1}{M} \right)}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right)}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{Mx_1^2} \right)}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \therefore B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Mx_1^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_1}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_3}{\partial x_4} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \therefore D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular os pontos de equilíbrio, observe que se igualar a zero as equações de estado, $\mathbf{r}(t)$ seria zero. No entanto, $\mathbf{r}(t)$ é a distância radial do satélite à Terra e deve ser diferente de zero, ou seja, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, sendo d um valor constante. Além disso, como o satélite gira em velocidade angular constante ω , a posição angular é dada por $\alpha = \omega t$. Assim, o ponto de equilíbrio em torno do qual o sistema será linearizado é:

$$\text{Estados} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{d}, \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 = \omega t, \mathbf{x}_4 = \omega$$

$$\text{Entradas} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

Substituindo as condições iniciais nas matrizes A, B, C e D obtidas, temos o seguinte sistema linear, o qual representa a dinâmica da órbita do satélite artificial no espaço:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 + 2\frac{k}{d^3} & 0 & 0 & 2d\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Md^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

A partir desse modelo, podem ser aplicadas técnicas de análise de sistemas lineares e de projeto de controle de sistemas em espaço de estados.

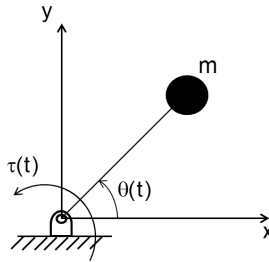
Avançando na prática

Dinâmica de foguetes de lançamento de satélites: o pêndulo invertido

Descrição da situação-problema

A dinâmica de foguetes de lançamento de satélites artificiais ao espaço pode ser aproximada pela dinâmica do pêndulo invertido. A figura a seguir mostra o sistema de um pêndulo invertido simples:

Figura 1.6 | Pêndulo invertido



Fonte: elaborada pela autora.

Em que: m é a massa do pêndulo, l é o comprimento da haste, $\tau(t)$ é um torque variável aplicado a ele e $\theta(t)$ é o ângulo da haste com o eixo x . A partir desse modelo é possível projetar o controle do ângulo de ataque do foguete variando o ângulo de saída de seus propulsores.

Foi solicitado a você, pela empresa de telecomunicações, que seja feito o controle de lançamento de um novo satélite artificial ao espaço, a partir da equação (1.42) do modelo não linear do pêndulo invertido, disponibilizada pela empresa.

Equação dinâmica não linear do pêndulo:
$$m l^2 \ddot{\theta}(t) + mg l \cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (1.42)$$

Onde: g é a aceleração da gravidade.

O projeto deverá ser realizado a partir do modelo linear do sistema, utilizando técnicas de controle linear. Assim, para iniciar essa tarefa, um sistema equivalente linear no espaço de estados com o ponto de equilíbrio em $\theta_0 = 45^\circ$ deve ser obtido. Como isso pode ser feito?

Resolução da situação-problema

Para solucionar essa situação-problema, devemos definir as variáveis de estados $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \theta(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \dot{\theta}(t) \end{cases} \Rightarrow \text{Equações de estado: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\theta}(t) = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{\theta}(t) = -\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_1) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u} \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_1) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u}$$

Sendo a entrada do sistema o torque, temos: $\mathbf{u} = \tau(t)$.

A saída do sistema deve ser o ângulo $\theta(t)$, pois é a variável que se deseja controlar. Assim, a equação da saída resulta: $\begin{cases} \mathbf{y} = \theta(t) = \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{g}_1 = \mathbf{x}_1 \end{cases}$

Aplicando as equações matriciais (1.24) a (1.27) para o ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}_{1_0}, \mathbf{x}_{2_0}, \mathbf{u}_0)$, obtemos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left(-\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_1) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u} \right) \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \left(-\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_1) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u} \right) \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left. \frac{\mathbf{g} \operatorname{sen}(x_1)}{\ell} \right|_{(x_0, u_0)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\mathbf{g}}{\ell} \operatorname{sen}(x_{1_0}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_1} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{u}_1} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_1} \left(-\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_1) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u} \right) \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \therefore \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \left. \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

Para obter o ponto de equilíbrio do sistema, a equação (1.16) deve ser satisfeita. Como o objetivo é que o foguete voe em uma linha inclinada a 45 graus, temos:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) = 0, \mathbf{u}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{1_0} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, & \mathbf{x}_{2_0} = \dot{\mathbf{x}}_{1_0} = 0, \\ -\frac{\mathbf{g}}{\ell} \cos(x_{1_0}) + \frac{1}{m\ell^2} \mathbf{u}_0 = 0 \therefore \mathbf{u}_0 = mg\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Substituindo (x_1, x_2, u_0) nas matrizes A, B, C e D, resulta no modelo em espaço de estados a seguir:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\sqrt{2}}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta u \quad (1.43)$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

E, assim, temos nas equações (1.43) e (1.44) um modelo linear em espaço de estados para o pêndulo invertido, o qual permite a aplicação de técnicas de controle linear para análise e projeto do lançamento do novo satélite ao espaço.

Faça valer a pena

1. Os sistemas de controle modernos consistem em modelos complexos, que podem ter múltiplas entradas e saídas, e parâmetros variáveis. Para esses casos, a utilização da representação por função de transferência não é trivial, sendo mais adequado utilizar técnicas de controle moderno, que consistem basicamente na representação, na análise e no projeto no domínio do tempo, por meio do espaço de estados.

Sobre a representação de sistemas no espaço de estados, quais das afirmativas a seguir estão corretas?

I. Um modelo matemático descrito por uma equação diferencial de ordem n pode ser representado em espaço de estados por um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

II. Apenas sistemas lineares podem ser representados por espaço de estados.

III. A matriz A no espaço de estados é denominada matriz de estados e é sempre quadrada, ou seja, de dimensão $(n \times n)$, sendo n a ordem do sistema.

IV. Um sistema com $p > 1$ entradas e $q > 1$ saídas é um sistema multivariável, ou seja, SISO.

Fonte: adaptada de Concurso CESPE, 2013. TRT – 17a Região (ES) – Analista Judiciário – Engenharia Elétrica.

a) I, II e III.

b) I, III e IV.

c) I e III.

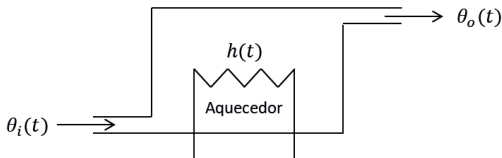
d) III e IV.

e) Apenas III.

2. Diversos processos industriais utilizam fornos de aquecimento de ar ou fluidos em seus processos. Um exemplo é a indústria siderúrgica, que utiliza fornos para aquecimento de placas de aço. É de grande importância nesses processos que o controle dinâmico da temperatura no interior do forno seja satisfatório para não comprometer os resultados.

Considere o sistema de aquecimento de ar da Figura 1.7.

Figura 1.7 | Sistema de aquecimento



Fonte: adaptada de Ogata (2010).

A dinâmica linear do sistema é descrita pela seguinte equação:

$$C \frac{d\theta_o(t)}{dt} = h(t) + \frac{1}{R} (\theta_i(t) - \theta_o(t))$$

Sendo:

$\theta_i(t)$ → temperatura na entrada de ar (°C)

$\theta_o(t)$ → temperatura na saída de ar (°C)

$h(t)$ → fluxo térmico de entrada (kcal/s)

R → resistência térmica (°Cs/kcal)

C → capacitância térmica do ar contido na câmara de aquecimento (kcal/°C)

Obtenha uma representação desse sistema em espaço de estados considerando como variável de estado a temperatura na saída de ar, como entradas: a temperatura na entrada de ar e o fluxo térmico, e como saída a temperatura na saída de ar.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$; $C = [1 \ 0]$; $D = 0$.

b) $A = -\frac{1}{R^2C}$; $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$; $C = 1$; $D = 0$

c) $A = -\frac{1}{RC}$; $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$; $C = 1$; $D = 0$.

d) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R^2C} & 1 \\ 0 & \frac{1}{R^2C} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$; $C = [1 \ 0]$; $D = 0$.

e) $A = -\frac{1}{RC}$; $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{R^2C} \end{bmatrix}$; $C = 1$; $D = 0$.

3. A equação de Van der Pol é muito utilizada no estudo de sistemas osciladores, pois representa um oscilador com dinâmica não linear. Seu surgimento ocorreu devido ao estudo de oscilações elétricas em tubos de vácuo (válvulas eletrônicas). Por se tratar de um sistema não linear, a depender da sua condição inicial, pode implicar oscilações amortecidas, cujas amplitudes decaem exponencialmente, ou oscilações amplificadas, cujas amplitudes crescem até atingirem um valor limite.

Considere a equação de Van der Pol a seguir: $\frac{d^2r(t)}{dt^2} - \mu[1 - r^2(t)]\frac{dr(t)}{dt} + r(t) = u(t)$

Onde: $r(t)$ é uma coordenada de posição, μ é uma constante que representa o amortecimento do sistema e $u(t)$ é sua entrada.

Obtenha uma equação de estados linear para esse sistema em forma matricial.

Considere a condição de linearização como o ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $\dot{x}_0 = f(x_0, u_0) = 0$.

$$a) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$b) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$c) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$d) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$e) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Seção 1.2

Análise de sistemas em espaço de estados

Diálogo aberto

Na primeira seção, você conheceu os fundamentos da representação de sistemas dinâmicos em espaço de estados, o que são sistemas SISO e MIMO, e como realizar a linearização de sistemas não lineares em torno de um ponto de equilíbrio para que técnicas de análise e projeto baseadas em controle linear sejam aplicadas, conforme o exemplo aplicado a um sistema de suspensão de $\frac{1}{4}$ de automóvel.

Nesta segunda seção da primeira unidade, você verá a relação entre função de transferência e espaço de estados, e como é possível transformar uma representação em outra. Aprenderá o que representam e como obter os polos e zeros na forma de espaço de estados, e obter a solução da equação de estados, ou seja, sua resposta temporal. Por fim, deverá ser capaz de representar o modelo em espaço de estados por meio de diagrama de blocos.

Para consolidar os novos conhecimentos, retomaremos o sistema da órbita de um satélite da seção anterior. Uma empresa de telecomunicações necessita que a dinâmica desse satélite seja analisada para verificar as causas de um problema técnico. Você, como responsável técnico de telecomunicações da empresa, tem a tarefa de realizar essa análise e precisa obter uma representação adequada do sistema para analisar seu comportamento e verificar se está de acordo com o desejado. A partir do modelo não linear disponibilizado pelo manual da empresa, o sistema foi linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, resultando em um sistema dinâmico linearizado em espaço de estados.

No entanto, foi solicitado pelo supervisor que técnicas clássicas sejam utilizadas para análise, ou seja, técnicas com base na função de transferência do sistema. Como você deverá proceder nesse caso?

Descobriremos ao longo desta seção! Bons estudos!

Não pode faltar

Agora que você já sabe como representar sistemas dinâmicos SISO ou MIMO através de espaço de estados, sejam eles lineares ou de característica não linear por meio da linearização em torno de um ponto de equilíbrio, iniciaremos os estudos sobre a análise dos sistemas nessa forma de representação matricial.

A primeira análise a ser realizada é a conversão de sistemas em espaço de estados para função de transferência e vice-versa.

Lembrando que o sistema em espaço de estados é dado pelas equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace supondo condições iniciais nulas:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.46)$$

Isolando $\mathbf{X}(s)$ na equação (1.45), fica:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.47)$$

Sendo \mathbf{I} a matriz identidade de mesma ordem da matriz \mathbf{A} , ou seja, $n \times n$.

Agora, substituindo a equação (1.47) em (1.46):

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

Como a função de transferência é uma representação matemática da relação entre a entrada e a saída de um sistema, temos:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.48)$$

Retome o circuito RLC série da seção anterior (Figura 1.1) com espaço de estados descrito pelas equações (1.6) e (1.7), vamos aplicar a equação (1.48) para obter sua função transferência:

Neste ponto é necessária a revisão de inversão de matrizes. Para o caso de matrizes 2x2, sua matriz inversa é obtida trocando os elementos da diagonal principal entre si, depois trocando o sinal dos elementos da diagonal secundária e dividindo todos os elementos determinantes.

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(M) = ad - cb$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - cb} & -\frac{b}{ad - cb} \\ -\frac{c}{ad - cb} & \frac{a}{ad - cb} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

Para conferir, basta aplicarmos a definição de matriz inversa: $M^{-1}M = I$.

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1/L & s + R/L \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \quad (1.49) \end{aligned}$$

Aplicando então (1.50) em (1.49):

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s + R/L}{s(s + R/L) + 1/LC} & \frac{1}{s(s + R/L) + 1/LC} \\ -\frac{1/LC}{s(s + R/L) + 1/LC} & \frac{s}{s(s + R/L) + 1/LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C(R + Ls)}{CLs^2 + CRs + 1} & \frac{CL}{CLs^2 + CRs + 1} \\ -\frac{1}{CLs^2 + CRs + 1} & \frac{CLs}{CLs^2 + CRs + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + Ls & L \\ CLs^2 + CRs + 1 & CLs^2 + CRs + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$\therefore T(s) = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1} \quad (1.51)$$

Observe que, caso o sistema seja SISO, a expressão $(c(sI - A)^{-1}B + D)$ da equação (1.48) resulta em uma única equação, conforme equação (1.51) do exemplo. Caso o sistema seja MIMO, a expressão resulta em uma matriz de funções de transferência com dimensão $q \times p$ tal que q seja o número de saídas e p o número de entradas, como pode ser visto na equação (1.52).

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) & \cdots & T_{1p}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) & \cdots & T_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{q1}(s) & T_{q2}(s) & \cdots & T_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_1(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} \quad (1.52)$$



É muito importante que você faça uma revisão sobre a inversão de matrizes de forma geral, mas mais especificamente será necessário que você saiba como realizar a inversão de uma matriz 4×4 . Portanto, antes de prosseguir, você deve consultar o livro indicado a seguir, que ensina a utilizar o método de escalonamento para cálculo de matriz inversa. Os conceitos aprendidos serão aplicados para a resolução da situação-problema.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 88-90. (Exemplos 5 e 6).

Agora, realizaremos a conversão de função de transferência para espaço de estados. Existem diversas maneiras de executar essa operação, cada uma delas podendo resultar em um conjunto diferente de matrizes, uma vez que o vetor de estados não é único, como foi discutido para o sistema da Figura 1.1, na Seção 1.1.



Como o vetor de estados não é único, existem inúmeras possibilidades de representar um sistema dinâmico em forma de espaço de estados.

Seguindo essa ideia, é possível obter funções de transferência distintas para representar um mesmo sistema dinâmico a partir de diferentes composições matriciais em espaço de estados?

Dada uma função de transferência com a estrutura a seguir:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} .$$

Onde $N(s)$ e $D(s)$ são o numerador e denominador da função de transferência, $Y(s)$ é a saída e $U(s)$ é a entrada.

Utilizando uma forma particular para $N(s)$: $N(s) = b_0$ e um polinômio genérico para $D(s)$: $D(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$, temos:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Multiplicando cruzado, obtemos:

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) = b_0U(s)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, o resultado é uma equação diferencial (1.53):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}[b_0 U(s)] \\ \mathcal{L}^{-1}\left[s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}[b_0 U(s)] \\ \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) &= b_0 u(t) \quad (1.53) \end{aligned}$$

Agora a próxima etapa é definir as variáveis de estado. De forma prática, as (n-1) derivadas de y(t) da equação (1.53) serão definidas como variáveis de estado:

$$x_1 = y(t), \quad x_2 = \frac{dy(t)}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \quad (1.54)$$

Derivando todos os termos, temos:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = \frac{d^n y(t)}{dt} \quad (1.55)$$

Substituindo a equação (1.55) em (1.53) para obter a expressão de \dot{x}_n

$$\begin{aligned} \dot{x}_n + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1 &= b_0 u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \dots - a_1 x_n + b_0 u \quad (1.56) \end{aligned}$$

Agora é só escrever o espaço de estados utilizando as equações (1.55) e (1.56):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (1.57)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Polos e zeros em espaço de estados

Como visto na disciplina TCM, os polos de um sistema fornecem informações importantes a respeito do comportamento dinâmico do sistema, tais como: amortecimento, frequência de oscilação, tempo de acomodação etc. Para sistemas representados por meio de função de transferência, os polos são as raízes do denominador desta.

Para o caso de sistemas representados em forma de espaço de estados, os polos são obtidos diretamente a partir da matriz A , utilizando conceitos de álgebra linear.

Observe no processo de obtenção da equação (1.48) que o determinante de $(sI - A)$ aparece no denominador de todos os elementos de $(sI - A)^{-1}$, logo, por correspondência, os polos de $T(s)$ são obtidos a partir das raízes da equação característica do sistema, fazendo-se $\det(sI - A) = 0$, equação semelhante àquela usada para cálculo dos autovalores (λ) de uma matriz:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (1.59).$$

Portanto, para sistemas representados em espaço de estados, seus polos são os autovalores da matriz A (matriz de estado).

Além da informação dos polos do sistema, a representação em função de transferência fornece seus zeros, que, para sistemas SISO, são as raízes do seu numerador.

No caso de sistemas MIMO, cuja representação envolve diversas funções de transferência com numeradores diferentes, o cálculo do(s) zero(s) é feito de forma diferente e é(são) chamado(s) de zero(s) de transmissão.

Assim, para sistemas MIMO, o(s) zero(s) de transmissão é(são) calculado(s) a partir das matrizes que compõem seu espaço de estados:

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = 0 \quad (1.60).$$

Essa expressão constitui uma forma geral de cálculo de zeros do sistema e pode ser utilizada para sistemas SISO ou MIMO que apresentem o mesmo número de entradas e saídas.



Exemplificando

Dado um sistema em espaço de estados, obtenha os polos e zeros.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1] x$$

Resolução: Cálculo dos polos:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Cálculo dos zeros de transmissão:

$$\det \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 2 & z+3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z+3=0 \therefore z = -3$$



Assimile

Os polos de um sistema em espaço de estados, seja ele SISO ou MIMO, são obtidos a partir do cálculo dos autovalores da matriz A (matriz de estado): $\det(\lambda I - A) = 0$.

Já os zeros do sistema, que são denominados zeros de transmissão em sistemas MIMO com o mesmo número de entradas e saídas, são obtidos a partir da seguinte expressão: $\det \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$, a qual é válida também para sistemas SISO.

Solução da equação de estados

Outra etapa importante na análise de sistemas em espaço de estados é obter a solução da equação de estados, ou seja, a resposta temporal, tornando possível a análise do comportamento dinâmico do sistema no domínio do tempo.

A resposta geral da equação de estados (1.1) é composta por dois termos:

- Solução homogênea: resposta do sistema à entrada nula e condição inicial diferente de zero.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) \neq 0 \text{ e } u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax$$

- Solução forçada: resposta do sistema a uma entrada diferente de zero e condições iniciais nulas.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0 \text{ e } u(t) \neq 0$$

Assim, a resposta geral da equação de estados (1.1) é dada por:

$$x(t) = \overbrace{e^{At}x(0)}^{\text{solução homogênea}} + \overbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}^{\text{solução forçada}} \quad (1.61)$$

E a equação da saída é dada por:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.62)$$



Pesquise mais

Veja a demonstração passo a passo da resolução geral da equação de estados (equação 1.83) no livro Engenharia de controle moderno, capítulo 9, Seção 9.4.

OGATA, Katsuhiko **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Observe que aparece nas equações (1.61) e (1.62) o termo e^{At} que consiste em uma exponencial matricial.

O resultado da exponencial da matriz A é uma matriz com a mesma dimensão de A e é denominada matriz de transição de estados. Para obter uma solução algébrica para o sistema, utilizaremos a transformada de Laplace, conforme os passos a seguir:

1. Aplicar a transformada de Laplace a seguir: $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \quad (1.63)$.
2. Aplicar a transformada inversa de Laplace, usando o artifício de frações parciais, caso necessário, e tabela: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (1.64)$.



Exemplificando

Calcule a exponencial da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Primeira Etapa: aplicar a transformada de Laplace conforme equação (1.63)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{At}] &= (sI - A)^{-1} = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

A inversa da matriz é obtida através da equação (1.50):

$$\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ -\frac{2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}$$

Segunda etapa: aplicar a transformada inversa de Laplace na matriz.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ -\frac{2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{pmatrix} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{4}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix} \right]$$

Aplicando frações parciais e tabela:

$$\begin{aligned}&= \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{2}{(s+2)} - \frac{2}{(s+1)} & \frac{2}{(s+2)} - \frac{1}{(s+1)} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \\ \therefore e^{At} &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \quad (1.65)\end{aligned}$$

Agora que você já sabe como calcular a exponencial de uma matriz, escreveremos a solução geral do sistema SISO a seguir para uma entrada degrau unitário, ou seja, $u(t) = 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 1] x(t)\end{aligned}$$

Substituindo e^{At} obtido na equação (1.65), a matriz $B = [0 \quad 1]^T$ e $u(t) = 1$ na equação (1.61), temos:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-(2t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-(2t-\tau)} \\ 2e^{-(2t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-(2t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
 &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-(2t-\tau)} \\ 2e^{-(2t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau.
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral termo a termo, obtemos:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Como $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ e $x(0) = [x_1(0) \ x_2(0)]^T$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Como resultado, temos que a solução geral desse sistema para entrada unitária é dada pelas equações a seguir:

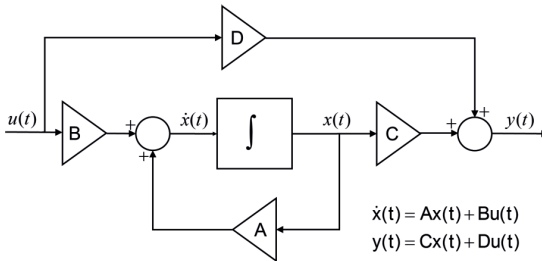
$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= (2e^{-t} - e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\
 x_2(t) &= (2e^{-2t} - 2e^{-t})x_1(0) + (2e^{-2t} - e^{-t})x_2(0) + e^{-t} - e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Caso a condição inicial do sistema seja nula, a resposta fica:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} \\
 x_2(t) &= e^{-t} - e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Observe o caráter exponencial da resposta temporal do sistema, cujos expoentes se referem aos seus polos (autovalores). Essa característica é própria dos sistemas lineares invariantes no tempo. E, para finalizar esta sessão, utilizaremos seu conhecimento sobre o diagrama de blocos para representar o sistema dinâmico em espaço de estados segundo a Figura 1.8.

Figura 1.8 | Diagrama de blocos do espaço de estados no domínio do tempo



Fonte: elaborada pela autora.

Sem medo de erro

Um satélite artificial de uma empresa de telecomunicações apresentou problemas técnicos e você, como integrante da equipe responsável, precisa analisar a dinâmica da sua órbita. A partir da representação não linear disponibilizada pelo manual, um conjunto vetor-matricial que o representa foi obtido e a partir desse modelo a análise da dinâmica de órbita deve ser verificada.

No entanto, o supervisor solicitou a aplicação de técnicas de controle clássico, as quais se baseiam na função de transferência do sistema. Como você poderia proceder utilizando os conhecimentos adquiridos nesta seção?

Lembrando que o modelo linear obtido é dado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 + 2\frac{k}{d^3} & 0 & 0 & 2d\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Md^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}$$

Considere que os parâmetros do modelo do satélite são os seguintes: $M = k = \omega = d = 1$

Resolução da situação-problema:

Por ser tratar de um sistema MIMO, o resultado será uma matriz de funções de transferência conforme mostrado a seguir.

$$T(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(s)}{F_r(s)} & \frac{R(s)}{F_i(s)} \\ \frac{A(s)}{F_r(s)} & \frac{A(s)}{F_i(s)} \end{bmatrix}$$

Primeiramente, precisamos substituir os parâmetros no conjunto matricial linear obtido na seção anterior que consiste nas equações (1.40)-(1.41) e, em seguida, aplicar os conceitos aprendidos nesta seção. Substituindo os parâmetros do sistema, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}$$

Para obter a função de transferência, utilizaremos a equação (1.48) e obteremos, primeiramente, o termo $(sI - A)^{-1}$. Aqui você precisará ter estudado o método de inversão de matriz por escalonamento.

$$(sI - A)^{-1} = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -3 & s & 0 & -2 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

Iniciaremos o método do escalonamento incluindo uma matriz identidade à direita e escalonando até obter uma matriz identidade à esquerda:

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & s & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Após as seguintes operações chegamos ao resultado:} \\ 1. L_1 = \frac{L_1}{e_{11}} \quad 2. L_2 = L_2 + 3L_1 \quad 3. L_2 = \frac{L_2}{e_{22}} \\ 4. L_4 = L_4 - 2L_2 \quad 5. L_3 = \frac{L_3}{e_{33}} \quad 6. L_4 = \frac{L_4}{e_{44}} \\ 7. L_1 = L_1 - L_2 e_{12} \quad 8. L_1 = L_1 - L_4 e_{14} \quad 9. L_2 = L_2 - L_4 e_{24} \\ 10. L_3 = L_3 - L_4 e_{34} \quad L \rightarrow \text{linha} \quad e \rightarrow \text{elemento} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{s^3+4s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s}{s^2(s^2+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3s^2}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^3}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s(s^2+1)}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2-3}{s^2(s^2+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6s}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{s^3-3s}{s^2(s^2+1)} \end{pmatrix} \\
\therefore (sI-A)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{s^3+4s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s}{s^2(s^2+1)} \\ \frac{3s^2}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^3}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} \\ -\frac{6}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s(s^2+1)}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2-3}{s^2(s^2+1)} \\ -\frac{6s}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{s^3-3s}{s^2(s^2+1)} \end{pmatrix} \quad (1.66)
\end{aligned}$$

Agora, com (1.66) substituiremos em (1.48):

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s^3+4s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s}{s^2(s^2+1)} \\ \frac{3s^2}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^3}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} \\ -\frac{6}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s(s^2+1)}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2-3}{s^2(s^2+1)} \\ -\frac{6s}{s^2(s^2+1)} & -\frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} & 0 & \frac{s^3-3s}{s^2(s^2+1)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{s^2(s^2+1)} & \frac{2s}{s^2(s^2+1)} \\ -\frac{2s}{s^2(s^2+1)} & \frac{s^2-3}{s^2(s^2+1)} \end{bmatrix} \quad (1.67).$$

Como resultado, temos $T(s)$, a matriz de funções de transferência do sistema, a partir da qual técnicas de controle clássico podem ser aplicadas, tais como: diagrama de bode, lugar das raízes, entre outras.

A partir dessas análises, o problema técnico ao qual o supervisor relata, por exemplo, uma instabilidade, pode ser identificado.

Avançando na prática

Sistema de controle de posição de uma antena

Descrição da situação-problema

Em telecomunicações, as antenas apresentam função primordial, atuam como responsáveis pela captação e emissão dos sinais enviados pelos satélites artificiais para a Terra. Para isso, a antena deve estar devidamente posicionada para que não haja ruídos ou falhas no sinal de TV, telefone, internet etc.

A empresa de telecomunicações onde você trabalha necessita que um controlador de posição seja projetado para uma antena receptora de satélite, cujo modelo em espaço de estados disponibilizado encontra-se a seguir. Esse sistema é composto basicamente por um motor elétrico que atua sobre a antena para ajustar sua posição e um amplificador de potência.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,71 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0,1 \quad 0] x$$

Sendo a entrada $u = e_a(t)$, ou seja, a tensão de entrada na armadura do motor e as variáveis de estado $x = [\theta_m(t) \quad \dot{\theta}_m(t)]^T$, a posição e velocidade angular da antena respectivamente.

Você, como integrante da equipe de projetos, ficou responsável por esse projeto que deverá ser realizado por meio de técnicas clássicas de controle, portanto, por meio da função de transferência do sistema.

Como você faria para preparar esse sistema para receber o projeto do controlador?

Resolução da situação-problema

As técnicas clássicas de controle envolvem a utilização da função de transferência de sistemas lineares. Assim, a partir do conjunto vetorial que representa o sistema de posição da antena em espaço de estados, utilizaremos a equação (1.48) para obter sua função de transferência.

$$\begin{aligned} T(s) &= [0,1 \ 0] \left[sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,71 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = [0,1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,71 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = \\ &= [0,1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1,71 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = [0,1 \ 0] \frac{1}{s(s+1,71)} \begin{bmatrix} s+1,71 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = \\ &= [0,1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{s+1,71}{s(s+1,71)} & \frac{1}{s(s+1,71)} \\ 0 & \frac{s}{s(s+1,71)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ s & s(s+1,71) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} = \frac{0,2083}{s(s+1,71)} \\ \therefore T(s) &= \frac{0,2083}{s(s+1,71)}. \end{aligned}$$

Para obter a saída a uma entrada degrau unitário com condições iniciais nulas, substituiremos os dados na equação (1.62).

$$y(t) = [0,1 \ 0] \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} 1 d\tau$$

Para obter o termo $e^{A(t-\tau)}$, basta calcularmos a transformada inversa de Laplace do termo $(sI - A)^{-1}$, já calculado utilizando expansão em frações parciais e tabela.

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1,71)} \\ 0 & \frac{1}{s+1,71} \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1,71} - \frac{1}{1,71(s+1,71)} \\ 0 & \frac{1}{s+1,71} \end{bmatrix} \right) \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{e^{-1,71t} - 1}{1,71} \\ 0 & e^{-1,71t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = [0,1 \quad 0] \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & -\frac{e^{-1,71(t-\tau)} - 1}{1,71} \\ 0 & e^{-1,71(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2,083 \end{bmatrix} d\tau = [0,1 \quad 0] \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{2,083(e^{-1,71(t-\tau)} - 1)}{1,71} \\ 2,083e^{-1,71(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

Como C é uma constante, a passaremos para dentro da integral e faremos a multiplicação matricial:

$$y(t) = \int_0^t [0,1 \quad 0] \begin{bmatrix} -\frac{2,083(e^{-1,71(t-\tau)} - 1)}{1,71} \\ 2,083e^{-1,71(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t -\frac{0,2083(e^{-1,71(t-\tau)} - 1)}{1,71} d\tau$$

$$= -\frac{0,2083}{1,71} \int_0^t (e^{-1,71(t-\tau)} - 1) d\tau = 0,1218t + 0,0712e^{-1,71t} - 0,0712$$

$$\therefore y(t) = 0,1218t + 0,0712e^{-1,71t} - 0,0712$$

Assim, obtemos a função de transferência do sistema, o que permite a aplicação de técnicas clássicas para projeto de controladores, conforme abordado na disciplina Teoria de Controle Moderno. A resposta do sistema $y(t)$ permite a simulação e análise em qualquer software de simulação matemática, até mesmo aquele que não apresenta ferramentas de sistemas de controle como o Matlab.

Faça valer a pena

1. A representação de sistemas por espaço de estados consiste em escrever n equações diferenciais de primeira ordem formando um conjunto vetorial para representar sua dinâmica.

Sobre sistemas em espaço de estados, quais afirmativas estão corretas?

I. A partir de um sistema representado por uma função de transferência, a obtenção da representação por espaço de estados pode ter inúmeros resultados.

II. Diferentes composições matriciais de um mesmo sistema em espaço de estados podem resultar em funções de transferência distintas.

III. Em sistemas MIMO, os zeros de transmissão são os zeros das funções de transferência.

IV. Os autovalores da matriz de estados (matriz A) correspondem aos polos do sistema dinâmico.

V. A equação geral de resposta do sistema é composta por uma solução homogênea (entrada diferente de zero e condições iniciais nulas) e uma solução forçada (entrada nula e condições iniciais diferentes de zero).

- a) I, III, IV e V estão corretas.
- b) I, III e V estão corretas.
- c) II, III e IV estão corretas.
- d) I e IV estão corretas.
- e) I e V estão corretas.

2. Uma das possíveis maneiras de avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos é olhar a localização de seus polos no plano complexo. Para que ele seja estável, basta que a parte real do polo seja negativa, ou seja, esteja localizada no semiplano esquerdo. No caso de sistemas em espaço de estados, os polos correspondem aos autovalores da matriz de estado.

A equação de estado de um sistema de suspensão veicular de uma roda está descrita a seguir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -20 & -500 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

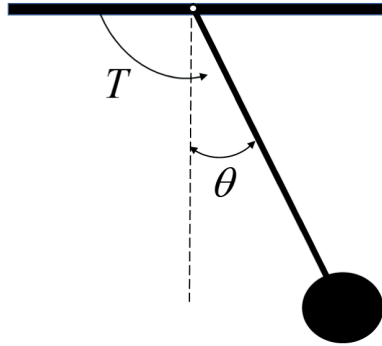
Qual das alternativas seguintes corresponde aos polos desse sistema?

- a) $s_{1,2} = -10 \pm 20i$.
- b) $s_{1,2} = -20 \pm 10i$.
- c) $s_1 = -10$ e $s_2 = 20$.
- d) $s_1 = -10$ e $s_2 = 20i$.
- e) $s_{1,2} = -50$.

3. Um pêndulo simples consiste em um corpo de massa m fixa por um braço a uma treliça móvel e sujeito a um torque T , como mostra a Figura 1.9. Esse modelo pode descrever, por exemplo, o sistema de controle de braço de um robô em movimento, amplamente utilizado em linhas de produção industriais.

O modelo em espaço de estados do pêndulo simples pode ser visto a seguir.

Figura 1.9 | Pêndulo simples



Fonte: elaborada pela autora.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -40 & -2.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0] x$$

Sendo as variáveis de estado $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, o ângulo e a velocidade angular, respectivamente, e a entrada $u(t)$ correspondente ao torque T aplicado, qual afirmativa contém a função de transferência $G(s)$ desse sistema?

a) $G(s) = \frac{160}{s^2 + 2.5s + 40}$.

b) $G(s) = \frac{80s}{s^2 + 2.5s + 40}$.

c) $G(s) = \frac{80(s + 2.5)}{s^2 + 2.5s + 40}$.

d) $G(s) = \frac{80}{s^2 + 2.5s + 40}$.

e) $G(s) = \frac{80}{2s^2 + 5s + 80}$.

Seção 1.3

Análise em espaço de estados com uso de software

Diálogo aberto

Olá! Nesta última seção da Unidade 1, veremos como aplicar os conceitos aprendidos nas Seções 1 e 2, utilizando um software de simulação matemática. Primeiramente, você aprenderá como é possível obter a transformação de modelos em espaço de estados para função de transferência, e vice-versa, de maneira rápida e fácil, com o uso do software Matlab, que você já conheceu na disciplina de Teoria de Controle Moderno. Em seguida, veremos como é feito para resolver a equação de estado de forma computacional e como podemos fazer a análise modal do sistema, que consiste basicamente na análise da resposta por meio de seus autovalores. Por fim, será feita uma introdução ao uso de Simulink, uma ferramenta poderosa para representação de sistemas por meio de diagrama de blocos no Matlab.

Com base nos comandos do software Matlab que serão introduzidos, você deverá retomar o sistema linear que representa a órbita do satélite de telecomunicações.

Você, como técnico de telecomunicações, pode (e deve) lançar mão de ferramentas computacionais que facilitem a análise dinâmica do sistema. Esse caminho lhe permitirá economizar tempo, principalmente com equacionamentos massivos de sistemas de grande porte.

Previamente à etapa de projeto, que será realizada na unidade subsequente, você deverá ser capaz de manipular um sistema com auxílio do software.

Assim, de posse da função de transferência obtida na seção anterior e com auxílio do software, como você deverá proceder para obter um modelo em espaço de estados, verificar sua estabilidade e observar a resposta no tempo? Vamos descobrir!

Não pode faltar

Nas seções anteriores você aprendeu a modelar e manipular sistemas em espaço de estados, transformar modelos em espaço de estados para

função de transferência, e vice-versa, obter os polos do sistema para análise de estabilidade e calcular a resposta dinâmica da saída em função do tempo. Todas essas tarefas foram realizadas manualmente por meio de cálculos, muitas vezes, exaustivos. Nesta seção, aplicaremos todos esses conceitos utilizando comandos simples no software Matlab, conforme podemos observar na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Comandos utilizados para análise em espaço de estados

Comando	Descrição
<code>sys = ss(A,B,C,D)</code>	Declara o modelo em espaço de estados.
<code>[num,den] = tfdata(sys)</code>	Obtém os dados da função de transferência de um sistema em espaço de estados.
<code>[A,B,C,D] = ssdata(sys)</code>	Obtém os dados do espaço de estados de um sistema em função de transferência.
<code>[Y,T,X] = lsim (sys,u,t,x0)</code>	Simula a resposta dinâmica do sistema a uma determinada entrada e condição inicial.
<code>aut = eig (A)</code>	Calcula os autovalores da matriz A.
<code>[Wn,Z,P] = damp (A)</code>	Calcula os polos, frequência natural e amortecimento de sistemas.
Simulink	Abre o simulink.

Fonte: elaborada pela autora.

Observe que a Tabela 1.1 apresenta na coluna da esquerda os comandos que utilizaremos nesta seção e sua respectiva estrutura, ou seja, quais são suas entradas e saídas, e a forma que pode ser utilizada no software. No entanto, um determinado comando pode ter diversas estruturas diferentes. Para todo e qualquer comando que você desejar saber outras formas de utilização, você pode digitar no *Command Window*: `help <nome da função>` e teclar *enter*. A função será detalhadamente descrita, assim como todas as formas de utilizá-la.

Transformação de modelos com uso do Matlab

Para obter a função de transferência de um sistema SISO ou MIMO a partir do modelo em espaço de estados, utilizaremos os dois primeiros comandos da Tabela 1.1, ou seja:

`sys = ss(A,B,C,D)` %declara o Sistema em espaço de estados

`[num, den] = tfdata(sys)` %obtem os dados da FT desse sistema

Nessa sequência de comandos, as entradas de `ss` são as matrizes do espaço de estados `A, B, C, D`. Para o comando `tfdata`, a entrada é o sistema em espaço de estados e as saídas são: `num` e `den`, o numerador e denominador da função de transferência, respectivamente. Depois disso, você pode declarar a função de transferência a partir de `num` e `den` utilizando um comando já estudado na disciplina Teoria de Controle Moderno: `sys = tf(num, den)`.



Exemplificando

Para o circuito RLC série MIMO da Figura 1.4, Seção 1.1, utilize o Matlab para transformar o modelo de espaço de estados para função de transferência.

Resposta: Os comandos inseridos são os seguintes:

```
clear all %apaga as variáveis no Workspace
clc %limpa a tela do Command Window
R=1; L=1; C=1;
A=[0 1/C; -1/L -R/L]; B=[0 0; 1/L -1/L];
C=[1 0; -1 -R]; D=[0 0; 1 -1];
sys_ss = ss(A,B,C,D); %declara o sistema
[num,den] = tfdata(sys_ss); %transforma para FT
sys_tf = tf(num, den) %declara e exibe a FT
```

O resultado mostrado na tela será:

Figura 1.10 | Resultado da função de transferência MIMO na tela do Matlab

```
Command Window

sys_tf =

From input 1 to output...
      1
1:  -----
    s^2 + s + 1

      s^2
2:  -----
    s^2 + s + 1

From input 2 to output...
     -1
1:  -----
    s^2 + s + 1

     -s^2
2:  -----
    s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.

fx >>
```

Fonte: elaborada pela autora.

Agora, para fazer o caminho inverso, ou seja, obter as matrizes do espaço de estados a partir da função de transferência, utilizaremos o terceiro comando da Tabela 1.1: $[A,B,C,D] = \text{ssdata}(\text{sys})$.

A utilização é de forma semelhante à que foi feita na transformação anterior, com a diferença de que, para declarar a matriz de funções de transferência (sys) do sistema, você deve utilizar o comando $s = \text{tf}('s')$ e o comando $\text{msys} = \text{minreal}(\text{sys})$, que servem para eliminar variáveis de estados redundantes, resultantes da conversão entre os modelos, uma vez que sistemas dinâmicos podem ser descritos por diversos conjuntos de variáveis de estados, inclusive por um número de variáveis além do necessário, ou seja, alguma variável é linearmente dependente de outra e pode ser cancelada. A eliminação dessas variáveis fornece uma representação mínima do sistema. Adicionalmente, dois conjuntos com o mínimo de estados podem proporcionar matrizes de estados diferentes, porém com a mesma função de transferência.



Exemplificando

Para o circuito RLC série MIMO da Figura 1.4, com representação em função de transferência, obtenha a representação em espaço de estados.

Resposta: Os seguintes comandos foram inseridos no software:

```
clear all  
clc  
s = tf('s'); %declara s como FT  
H = [1/(s^2+s+1) -1/(s^2+s+1); %declara a matriz de FT  
      s^2/(s^2+s+1) -s^2/(s^2+s+1)];  
[A,B,C,D] = ssdata(H); %transf. a FT em esp. de estados  
sys = ss(A,B,C,D); %declara o sist. em esp. de estados  
msys = minreal(sys) %elimina Var. de Estado redundantes
```

O resultado exibido na tela será:

Figura 1.11 | Resultado para conversão de função de transferência para espaço de estados no Matlab

```
Command Window
msys =
A =
      x1      x2
x1 -0.9448 -0.7717
x2  1.228  -0.05519
B =
      u1      u2
x1 -1.375  1.375
x2  0.3322 -0.3322
C =
      x1      x2
y1 -0.1661 -0.6873
y2  0.8534  0.5212
D =
      u1 u2
y1  0  0
y2  1 -1
Continuous-time state-space model.
fx >>
```

Fonte: elaborada pela autora.

Observe como o uso do software facilita a manipulação de sistemas. Para casos complexos e de ordem elevada, o Matlab torna-se uma ferramenta essencial para análise.



Refleta

Compare as matrizes A, B, C e D dadas na Seção 1.1 para o sistema MIMO da Figura 1.4 (circuito RLC série) e as matrizes obtidas com a transformação do Matlab do exemplo anterior, lembrando que $R=1$, $L=1$ e $C=1$. Com exceção da matriz D, que sempre é idêntica, as matrizes A, B, e C divergem, por que isso ocorre?



Pesquise mais

Outros dois comandos que podem ser utilizados para transformação de modelos no Matlab são o `ss2tf`, que transforma de espaço de estados para função de transferência, e o `tf2ss`, que faz o caminho inverso.

Ambas as funções podem ser facilmente aplicadas a sistemas SISO, no entanto, tornam-se mais complicadas para sistemas MIMO.

Escreva no *Command Window* do Matlab: `help ss2tf` e `help tf2ss` para saber mais e experimente aplicá-las para o circuito elétrico SISO da Figura 1.1, considerando $R=1$, $L=1$ e $C=1$. Observe e compare as matrizes obtidas na Seção 1.1 com o resultado do comando `tf2ss`.

Solução da equação de estados

Uma vez obtida a modelagem desejada, seja ela em espaço de estados ou função de transferência, a solução da equação de estados pode ser observada por meio da resposta gráfica de uma solução particular a determinada entrada e/ou condição inicial, a depender se o objetivo é observar a solução homogênea, a solução forçada ou a solução completa do sistema.

Para isso, o comando do Matlab que pode ser utilizado é o `lsim`, (de linear simulation ou simulação linear), segundo a Tabela 1.1, com a seguinte estrutura: $[Y,T,X] = \text{lsim}(\text{sys},u,t,x0)$.

O comando `lsim` tem como entrada, além do sistema (`sys`), a entrada (`u`) e a condição inicial (`x0`), permitindo observar a resposta no tempo para quaisquer soluções desejadas. Basta fazer $x0 \neq 0$ e $u = 0$ para obter a solução homogênea, $x0 = 0$ e $u \neq 0$ para obter a solução forçada ou $x0 \neq 0$ e $u \neq 0$ para obter a resposta completa.

Na estrutura do comando todas as entradas e saídas são vetores, sendo `t` o tempo que se deseja simular a resposta, `u` um vetor que representa um sinal no tempo com a mesma ordem de `t` e `x0` um vetor coluna com o número de elementos igual ao número de estados do sistema.



Exemplificando

Considere o circuito RLC série SISO da Figura 1.1. Obtenha sua resposta no tempo para uma entrada $u(t) = 2V_{cc}$ e condição inicial $x_{10} = 1$ e $x_{20} = 0$.

Resposta: O seguinte código foi inserido no software:

```
clear all
clc
R=1; L=1; c=1;
A = [ 0 1; -1/(L*c) -R/L]; B = [0; 1/L];
C = [1/c 0]; D = 0; SYS = ss(A,B,C,D);
T = 0:0.01:30; %tempo de 0 a 30s espaçado de 0.01 seg.
U = 2*ones(size(T)); %vetor de amplitude 2 com mesmo tamanho
de T
X0 = [ 1; 0]; %condição inicial
[Y,T,X] = lsim(SYS,U,T,X0); %simula a resposta geral
% Para desenhar o gráfico:
```

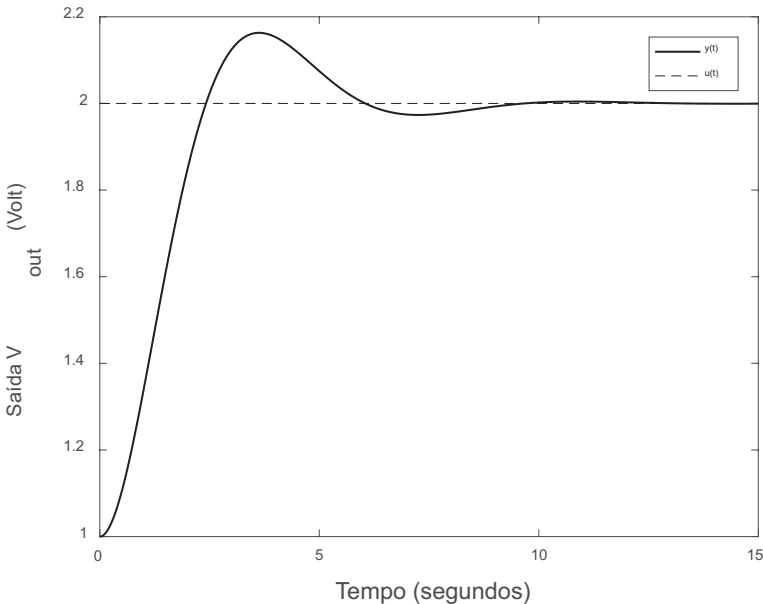
```

plot(T,Y,'k',T,U,'--k','LineWidth',1)
legend('y(t)', 'u(t)')
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Saída V_{out}(Volt)')

```

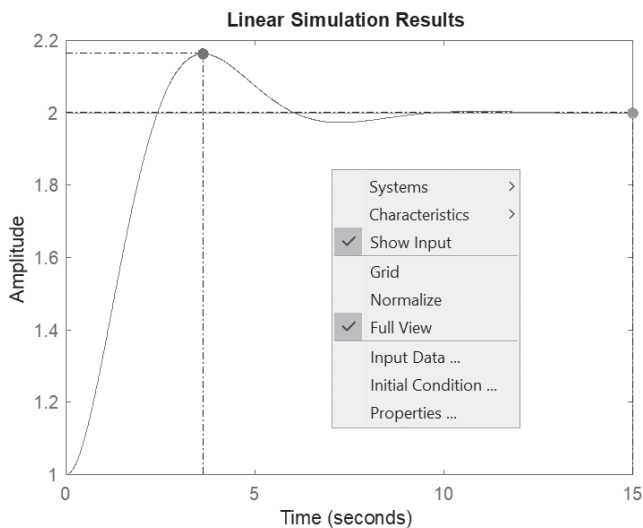
O resultado pode ser visto na Figura 1.12, a seguir:

Figura 1.12 | Resposta temporal completa do circuito RLC série SISO



Se você utilizar o comando `lsim` sem definir as saídas (apenas `lsim(SYS,U,T,X0)`), a Figura 1.13 abre automaticamente exibindo a resposta no tempo. Utilizando a função dessa maneira, você pode obter as características da resposta (tempo de acomodação, overshoot etc.) clicando com o botão direito do mouse e, em seguida, em *Characteristics*, conforme Figura 1.12.

Figura 1.13 | Gráfico aberto automaticamente a partir do comando *lsim*



Fonte: elaborada pela autora.

Análise modal

A resposta de sistemas lineares pode ser caracterizada com base na análise modal, ou seja, nos valores dos autovetores e autovalores (também denominado modos) da matriz de estados. Um autovalor real fornece a resposta como forma de uma exponencial decrescente caracterizando estabilidade, caso seja de sinal negativo; ou uma exponencial crescente caracterizando instabilidade, caso seja de sinal positivo. Já autovalores complexos fornecem uma resposta oscilatória de amplitude decrescente caracterizando o sistema como estável, quando a parte real é negativa, ou oscilatória de amplitude crescente, caracterizando o sistema como instável, quando a parte real é positiva.

Agora que você já sabe transformar sistemas e simular a resposta no tempo, estudaremos dois comandos que facilmente apresentam informações a respeito da estabilidade e das características de resposta do sistema, são eles: `eig` e `damp`. O primeiro é utilizado para calcular os autovalores do sistema, que são também seus polos: $\text{aut} = \text{eig}(A)$, sendo A a matriz de estados. Com a informação dos autovalores é possível prever se o sistema é estável ou não sem a necessidade de obter a resposta no tempo (lembrando que o sistema será estável se a parte real dos autovalores for negativa).

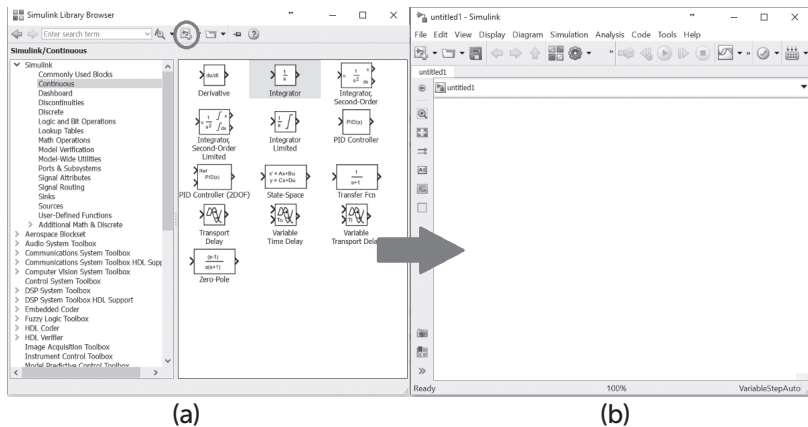
Já o segundo comando tem a seguinte estrutura: $[W_n, Z, P] = \text{damp}(A)$ e fornece como saída a frequência natural de oscilação (W_n), os fatores de amortecimento (Z) e os polos do sistema (P). Essa função também pode ser utilizada com a entrada sendo o sistema em espaço de estados ou função de transferência ($\text{damp}(\text{sys})$).

Simulink

Para finalizar esta seção, utilizaremos o simulink para montar o diagrama de blocos do espaço de estados da Figura 1.8, presente na Seção 1.2.

Para abrir o Simulink, basta digitar no *Command Window*: *Simulink* e clicar *enter*. Na versão 2015 do Matlab, a janela da Figura 1.14a se abrirá. Você deve clicar no botão em destaque pelo círculo para abrir um documento em branco, conforme mostra a Figura 1.14b. A partir disso, basta arrastar os blocos desejados para a janela em branco.

Figura 1.14 | (a) Janela com a biblioteca do Simulink; (b) Janela para montagem do diagrama de blocos



(a)

(b)

Fonte: extraída de Matlab R2015a.

Para montar o diagrama da Figura 1.8, utilizaremos os seguintes blocos:

1. *Continuous* → *Integrator* (integrador).
2. *Math Operations* → *Sum x2* (somador).
3. *Math Operations* → *Gain x4* (ganho – matriz).

4. *Sinks* → *Scope* (osciloscópio).
5. *Sources* → *Step* (degrau).

Alternativamente, o Simulink apresenta uma estrutura simplificada para inserção do espaço de estados. O bloco se encontra em *Continuous* → *State-Space*. O resultado da montagem dos blocos pode ser visto na Figura 1.15a.

Para mudar os nomes dos blocos, basta clicar em cima do nome atual, o cursor aparecerá, e depois digite o novo nome. Para alterar os parâmetros dos blocos, basta clicar duas vezes em cima dele. Caso o sistema esteja no *Workspace*, basta preencher com os nomes das variáveis, conforme a Figura 1.15b, do contrário, você deve preencher com a matriz no mesmo formato em que é declarada no *Command Window*, por exemplo, [0 1; -1 -1].

Você também deve alterar o item *Multiplication* dos ganhos para *Matrix(K*u)(u vector)* no caso de B, C e para *Matrix(K*u)* no caso de A, D, conforme Figura 1.12b. Após realizar esse procedimento para o bloco *state-space* e para os blocos de ganho (matrizes A,B,C,D), no bloco *step*, clique duas vezes em cima dele e defina *Final Value*: 2 ($u = 2V$, degrau de amplitude 2).



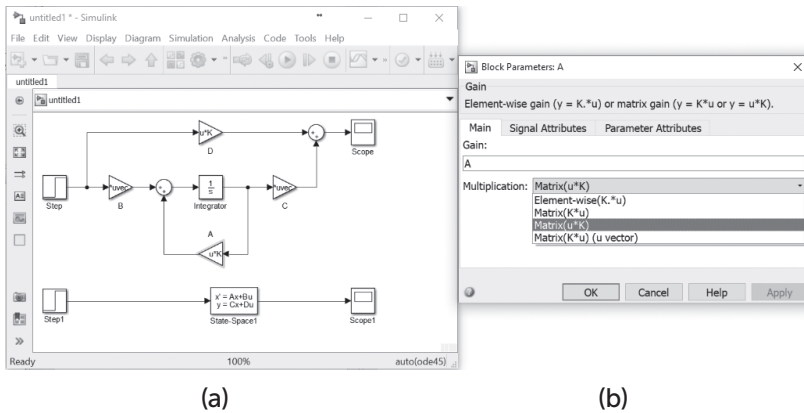
Pesquise mais

Para recordar os conceitos básicos de programação em Simulink, acesse a bibliografia a seguir.

TAVARES, Marley Fagundes. **Modelagem de sistemas dinâmicos**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S. A., 2017. p. 50-55. Disponível em nossa biblioteca virtual: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>>. Acesso em: 11 nov. 2017.

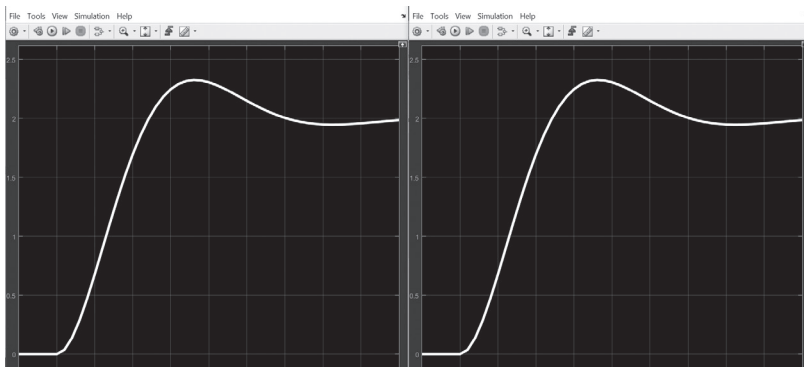
Agora, basta rodar o Simulink e observar os blocos *scope* (dois cliques para abri-los). O resultado é mostrado conforme a Figura 1.16, a seguir.

Figura 1.15 | (a) Diagrama final montado; (b) Caixa do bloco para alterar os parâmetros



Fonte: extraída de Matlab R2015a.

Figura 1.16 | Resultado da simulação utilizando duas abordagens: sistema montado com blocos de ganhos, integrador e somatório versus sistema com bloco pronto state-space



Fonte: extraída de Matlab R2015a.

Observe que os resultados se equivalem, ou seja, o bloco *state-space* compacta e simplifica a análise do sistema em espaço de estados ao utilizar o *Simulink* de forma eficiente.

Assimile

Para transformar sistemas SISO ou MIMO em espaço de estados para função de transferência, e vice-versa, os comandos que devemos utilizar são: `tfdata(sys_ss)` e `ssdata(sys_tf)`, respectivamente. Os polos do sistema e suas características podem ser obtidos a partir dos comandos `eig` e `damp`.

Já as soluções homogênea, forçada e geral podem ser obtidas a partir do comando lsim. No Simulink, o bloco denominado state-space permite a montagem de um sistema em espaço de estados.

Sem medo de errar

Uma empresa de telecomunicações precisa que o sistema de órbita de um satélite artificial seja analisado em razão de problemas técnicos. Você é o técnico responsável e ficou encarregado dessa tarefa.

O conjunto vetor-matricial que representa o sistema em espaço de estados, resultante da linearização do modelo disponibilizado pelo manual, encontra-se a seguir.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}$$

Uma vez que o satélite esteja apresentando comportamentos inadequados, deseja-se avaliar a estabilidade desse sistema e suas características de resposta através dos polos, dos fatores de amortecimento e frequência de oscilação, e observar sua resposta quando submetido a uma força tangencial correspondente a um degrau de amplitude 0,1, com duração de 500ms e condição inicial $x_0 = [0,05 \ 0 \ 0,01 \ 0]^T$

Lembrando que: $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r(t) \ \dot{r}(t) \ \alpha(t) \ \dot{\alpha}(t)]^T$ e $u = [F_r(t) \ F_t(t)]^T$

Solução da situação-problema:

Para iniciar as análises, selecionaremos os comandos do Matlab que serão necessários:

- damp: esta função será necessária para se obter os polos do sistema, o fator de amortecimento e a frequência de oscilação, e assim avaliar a estabilidade e ter uma ideia de como será a resposta do sistema.

- `lsim`: esta função será utilizada para se obter a resposta do sistema à entrada e condição inicial especificada.

Um degrau de amplitude 0,1 em $F_i(t)$ significa que durante a perturbação essa entrada permanece em 0,1, enquanto $F_r(t)$ é zero.

O código em Matlab que implementa essa análise fica da seguinte maneira:

```
clear all
clc
```

```
A = [0 1 0 0; 3 0 0 2; 0 0 0 1; 0 -2 0 0];
```

```
B = [0 0 ; 1 0 ; 0 0 ; 0 1];
```

```
C = [1 0 0 0 ; 0 0 1 0];
```

```
D = [0 0; 0 0];
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

```
damp(sys)
```

```
tf = 0:0.01:0.5; %tempo em perturbação de 0 a 0.5s
```

```
tp = 0.51:0.01:30; %tempo pós perturbação de 0.51s até 30s
```

```
t = [tf tp]; %concatena os vetores do tempo
```

`u = [zeros(2,numel(t)); %cria um vetor de entrada nula com 2 linhas e coluna com o mesmo número de elementos que o vetor do tempo`

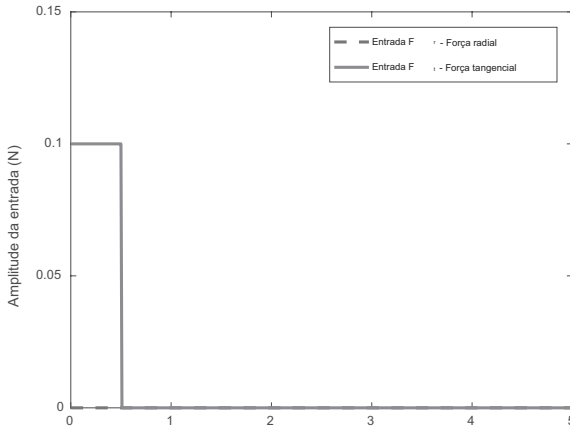
`u(2,1:numel(tf)) = 0.1; %a segunda entrada Ft com amplitude 0.1 com a duração da falta tf`

```
x0 = [0.05 ; 0 ; 0.01 ; 0]; %declara as condições iniciais
```

```
lsim(sys,u,t,x0) %simulação linear do sistema
```

Para ilustrar o vetor de entrada `u`, temos o gráfico a seguir, obtido com o comando `plot` e no qual em linha contínua temos a entrada força tangencial com um degrau temporário e em tracejado, a entrada força radial com valor nulo.

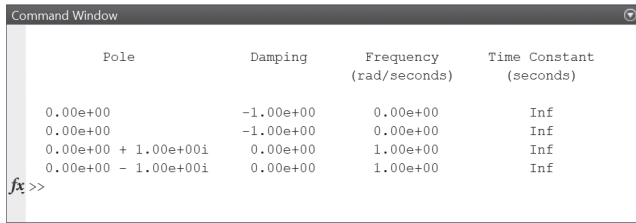
Figura 1.17 | Gráfico dos sinais de entrada de perturbação



Fonte: elaborada pela autora.

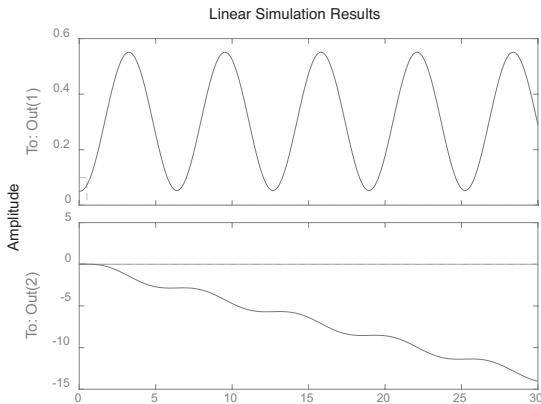
O resultado exibido é o seguinte:

Figura 1.18 | Resultado do comando *damp* na tela do Matlab



Fonte: extraída de Matlab R2015a.

Figura 1.19 | Janela aberta automaticamente com o resultado da simulação do comando *lsim*



Fonte: elaborada pela autora.

Observe na Figura 1.18 que o sistema tem quatro polos, sendo dois na origem e dois complexos conjugados com a parte real nula, caracterizando um sistema oscilatório com amortecimento nulo, ou seja, uma vez estimulado, ele oscilará até que outra força interrompa a trajetória.

O gráfico da Figura 1.19 representa a saída 1: $r(t)$ e a saída 2: $\alpha(t)$, ou seja, a distância do satélite em relação à Terra e a posição angular, respectivamente. Observe o comportamento oscilatório em ambas as variáveis. Tal comportamento é indesejado, uma vez que o satélite deveria permanecer a uma distância constante em relação à Terra e a posição angular deveria crescer linearmente (sem oscilações), pois o satélite deveria girar em torno da Terra com velocidade constante.

Por se tratar de um sistema linearizado, a análise de estabilidade é válida localmente, ou seja, em torno do ponto de equilíbrio em que foi linearizado.

Avançando na prática

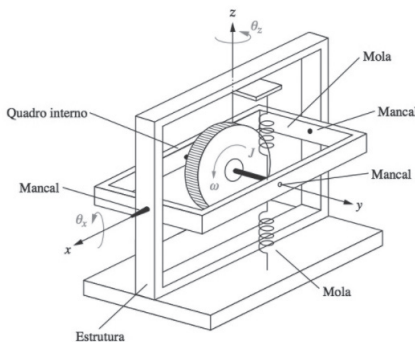
Sistema de navegação inercial de veículos espaciais – o giroscópio

Descrição da situação-problema

Os giroscópios são sensores que monitoram a rotação de um corpo, sendo que, em voos espaciais, eles são responsáveis pela navegação inercial da espaçonave, ou seja, pela sua orientação no espaço.

A representação do sistema em espaço de estados do giroscópio da Figura 1.20 é dada a seguir.

Figura 1.20 | Sistema de navegação inercial – giroscópio



Fonte: Nise (2009, p. 122).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_x}{J_x} & -\frac{D_x}{J_x} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ J\omega \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

Sendo: $\mathbf{x} = [\theta_x \ \dot{\theta}_x]^T$, a posição e velocidade angular no eixo x , K_x é a rigidez da mola, D_x é o coeficiente de amortecimento e J_x é o momento de inércia ao redor do eixo x , $u = \omega_z$, a velocidade no eixo z , J e ω é o momento de inércia e velocidade angular do rotor.

Você, como integrante da equipe de manutenção do satélite artificial, ficou encarregado de verificar a integridade do giroscópio do satélite e elaborar um relatório técnico a partir da obtenção da sua função de transferência, análise de autovalores e simulação linear para uma entrada nula e condição inicial $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]$. Quais são as conclusões que você deverá mencionar no relatório do equipamento?

Considere: $J_x = J = 0,5$, $D_x = \omega = 1$ e $K_x = 0,1$.

Resolução da situação-problema

Para resolver esse problema, os principais comandos utilizados no Matlab são: `tf(ss(A,B,C,D))`, `damp` e `lsim`.

Antes de utilizar esses comandos, é necessário declarar os valores das constantes e, em seguida, as matrizes do espaço de estados.

A seguinte sequência de comandos pode ser implementada:

```
clear all
clc
```

```
Kx = 0.1; Jx = 0.5;
Dx = 1; J = 0.5; w = 1;
```

```
A = [0 1 ; -Kx/Jx -Dx/Jx]; B = [ 0 ; J*w ]; C = [ 1 0 ]; D = 0;
```

```
t = 0:0.01:25; %tempo de simulação
u = zeros(size(t)); %cria um vetor de entrada nula
x0 = [ 1 ; 0 ]; %condição inicial
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

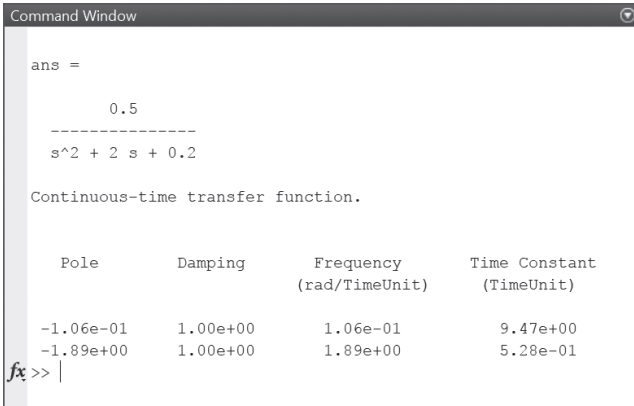
tf(sys)

damp(A)

lsim(sys,u,t,x0)

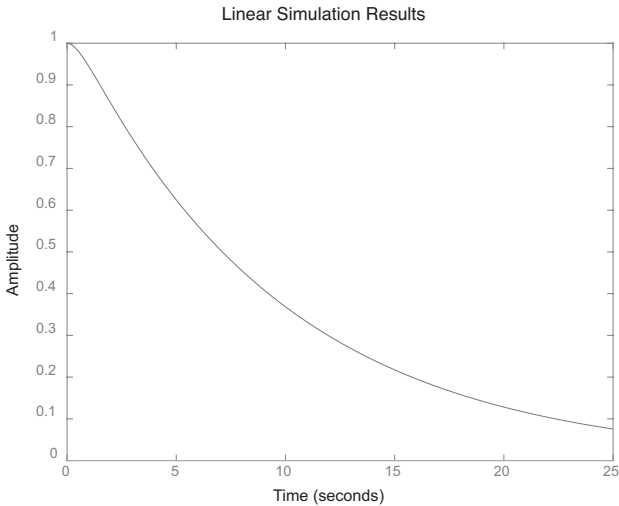
O resultado na tela será:

Figura 1.21 | Resultado do script mostrado na tela do Matlab



Fonte: extraída de Matlab R2015a.

Figura 1.22 | Resultado do comando lsim do Matlab aberto automaticamente



Fonte: extraída de Matlab R2015a.

O relatório deverá conter:

O modelo do giroscópio que apresenta função de transferência de segunda ordem $H(s) = \frac{0,5}{s^2 + 2s + 0,2}$ tem dois polos reais em $s_1 = -0.106$ e $s_2 = -1.89$ com localização no semiplano esquerdo, caracterizando o sistema como estável e resposta constituída por uma exponencial decrescente sem oscilação, com constantes de tempo iguais a 9,47s e 0,53s, respectivamente, conforme pode ser visto na figura, que apresenta a posição angular da rotação no eixo x e cuja simulação envolve condição inicial $x_0 = [1 \ 0]$ e entrada nula.

Faça valer a pena

1. A conversão de modelos em espaço de estados para função de transferência é dada pela seguinte equação: $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Para sistemas de ordem maior que dois, a componente inversa da equação - $(sI - A)^{-1}$ - torna o cálculo muito trabalhoso e sujeito a erros. Nesses casos, o uso do software Matlab torna-se fundamental para o projetista de controle, uma vez que um simples comando pode ser aplicado para a realização dessa tarefa.

Dado um sistema dinâmico na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Como podemos obter sua representação em função de transferência por meio do Matlab?

- ss(A,B,C,D).
- eig(A).
- lsim(sys,u,t,x0).
- tf(ss(A,B,C,D)).
- tf(A,B,C,D).

2. O uso do software Matlab facilita a manipulação de sistemas. Para casos complexos e de ordem elevada, ele se torna uma ferramenta essencial para análise, pois elimina a necessidade de se realizar cálculos exaustivos e diminui as chances de erro.


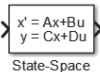
Sobre a análise de sistemas em espaço de estados no software Matlab, relacione os comandos a seguir com suas respectivas definições:

- | | |
|----------------------------------|--|
| A. <code>ss(A,B,C,D)</code> | I. Simula a resposta dinâmica do sistema a uma determinada entrada e condição inicial. |
| B. <code>tfdata(sys)</code> | II. Obtém os dados da função de transferência de um sistema em espaço de estados. |
| C. <code>ssdata(sys)</code> | III. Calcula os polos, a frequência natural e o amortecimento de sistemas. |
| D. <code>lsim(sys,u,t,x0)</code> | IV. Obtém os dados do espaço de estados de um sistema em função de transferência. |
| E. <code>damp(A)</code> | V. Declara o modelo em espaço de estados. |

- a) A-I, B-III, C-V, D-II, E-IV.
 b) A-V, B-II, C-IV, D-I, E-III.
 c) A-IV, B-I, C-III, D-V, E-II.
 d) A-V, B-III, C-I, D-IV, E-II.
 e) A-V, B-IV, C-II, D-I, E-III.

3. Simulink® é uma ferramenta de diagramação gráfica por blocos e bibliotecas de blocos personalizáveis. Apresenta integração com o software Matlab® permitindo que você incorpore algoritmos Matlab® em modelos e exporte resultados de simulação para o Workspace para análise posterior. Nos dias atuais, é amplamente utilizado em teoria de controle e processamento digital de sinais para projeto e simulação.

Sobre o uso de Simulink para simulação de sistemas dinâmicos:

- I. Só é possível simular sistemas na forma de função de transferência.
- II. O bloco  consiste em um osciloscópio no qual é possível ver o gráfico da simulação.
- III. O Simulink® apresenta interação com as variáveis do Workspace declaradas via script ou linhas de comando no Command Window.
- IV. Os blocos que compõem o diagrama em Simulink® não podem ser personalizados.
- V. Para simular o sistema em espaço de estados podemos utilizar apenas o bloco .

Em relação aos itens apresentados, analise se eles são verdadeiros (V) ou falsos (F) e assinale a alternativa correta.

- a) F - V - V - F - V.
- b) V - F - F - V - V.
- c) V - V - V - F - F.
- d) F - F - V - F - V.
- e) F - V - V - F - F.

Referências

EMAMI-NAEINI, A.; VAN DOOREN, P. **Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems, Automatica**, 1982, p. 415-430.

MATHWORKS. **Matlab**: Control System Toolbox User's Guide. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/control/usingcontrol.pdf>. Acesso em: 29 set. 2017.

MATHWORKS. **Matlab**: Simulink User's Guide. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/simulink/sl_using.pdf>. Acesso em: 29 set. 2017.

MATLAB.EXE: Matrix Laboratory. Versão R2015a. [s.l.]: MathWorks, 2015. Software. Configuração mínima: Processador Intel ou AMD x86 com suporte a instruções SSE2, 1GB de espaço no HD, 2GB de memória RAM.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

VARGAS, F. J. T.; PAGLIONE, P. **Ferramentas de Álgebra Computacional: Aplicações em Modelagem, Simulação e Controle para Engenharia**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

Projeto de sistemas de controle em espaço de estados

Convite ao estudo

Na Unidade 1 foram apresentados os conceitos de modelagem e análise de sistemas em espaço de estados como parte da teoria moderna de controle. Você pôde ver que, diferentemente da técnica clássica, que tem como base a análise e o projeto no domínio da frequência, por meio da função de transferência, a técnica moderna (espaço de estados) é mais ampla, permitindo aplicação em sistemas não lineares e com entradas e saídas múltiplas de forma muito mais direta e simplificada.

Nesta unidade veremos uma introdução ao projeto em espaço de estados por meio de uma técnica aplicada a sistemas lineares. A principal vantagem é que a técnica moderna permite a especificação de todos os polos em malha fechada para sistemas de quaisquer dimensões, ao contrário do projeto no domínio da frequência, por exemplo lugar das raízes, que permite alocar apenas os polos dominantes.

O projeto do controlador em espaço de estados consiste em especificar as localizações dos polos desejados em malha fechada e realizar uma realimentação das variáveis de estados por meio do projeto de uma matriz de ganhos. Essa técnica é denominada controle por realimentação de estados ou alocação de polos e só é possível ser aplicada se o sistema for dito controlável, o que pode ser verificado pela sua matriz de controlabilidade, ou seja, as variáveis de estados devem estar disponíveis para controle por meio da entrada. Porém, na prática, é muito difícil o aro dispor de sensores para medir todas as variáveis de estado do sistema. Nesses casos, é feito o projeto de um observador que permite estimar as variáveis de estado antes de fazer a realimentação.

O projeto do observador consiste em obter um ganho de realimentação do erro entre a saída real e uma saída desejada

de forma que o estado estimado acompanhe o estado real desconhecido da planta e o erro de estimação tenda para zero. Assim, quanto mais rápido for o observador, mais rapidamente o estado estimado alcança o estado real e mais rapidamente o erro tenderá a zero, sendo esse comportamento considerado o mais adequado para o observador de estados.

A partir das variáveis de estado estimadas, o projeto do controlador por realimentação de estados pode ser desenvolvido e aplicado. No entanto, para o projeto do observador, é necessário que o sistema seja observável, ou seja, os estados devem poder ser deduzidos a partir da saída do sistema, o que pode ser analisado por meio da matriz de observabilidade.

Por fim, com o avanço computacional, estão disponíveis diversas ferramentas e softwares que permitem o suporte e uso da álgebra matricial necessária aos procedimentos de projeto em espaço de estados, como é o exemplo do software Matlab.

O avanço tecnológico que se observa nos dias atuais não teria sido o mesmo sem o processo de industrialização. Atualmente, o uso de sensores e atuadores permite controlar de forma automática o processamento de um produto melhorando sua qualidade, diminuindo o gasto energético e emissão de poluentes, entre outros.

No setor alimentício não é diferente. O controle de processo térmicos de alimentos envolve atingir e manter os valores predeterminados (de referência) dos alimentos, por meio da medição da temperatura por sensores e manipulação da fonte de calor por atuadores, sendo esse controle de grande importância, pois preserva a qualidade do alimento e diminui os seus efeitos perecíveis.

Com base nisso, suponha que você tenha sido contratado como parte integrante da equipe de pesquisa e desenvolvimento para implementar uma nova planta industrial alimentícia. Todos os aquecedores a gás dessa planta necessitam do projeto de um controlador, pois a resposta do sistema deve ser adequada às necessidades de fabricação dos alimentos e um observador, uma vez que nem todas as variáveis de estados podem ser medidas por meio de sensores, técnicas essas aplicadas em sistemas no espaço de estados. Quais seriam os passos a serem seguidos?

Bons estudos e mãos à obra!

Seção 2.1

Projeto de controlador por alocação de polos em espaço de estados

Diálogo aberto

Olá! Nesta seção veremos como é feito o controle por realimentação de estados e alocação de polos. Você verá que, a partir da definição da localização dos polos desejados de um sistema, se o mesmo for dito controlável, é possível projetar uma matriz de ganhos de realimentação de estados para esse sistema.

O projeto é realizado com base no conceito de equação característica ou polinômio característico do sistema, cujas raízes são os polos do sistema e permitem extrair informações a respeito de sua estabilidade e resposta no tempo.

A partir dos polos desejados em malha fechada, criamos a equação característica desejada e a partir dela é possível obter um controlador para o sistema.

Para entender essa aplicação, suponha que você seja contratado por uma empresa alimentícia para fazer parte de uma equipe que vai implementar uma nova planta industrial. Para atender as especificações de resposta, todos os aquecedores a gás dessa planta necessitam do projeto de um controlador por realimentação de estados. Como você faria esse projeto?

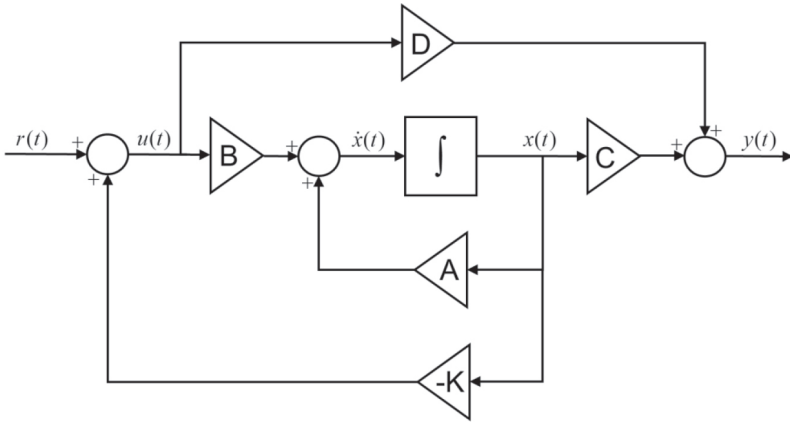
Bons estudos!

Não pode faltar

Diferentemente dos métodos de controle clássicos, que são realizados por meio de realimentação da saída, os métodos de controle moderno consistem em realizar a alocação de polos por realimentação de estados do sistema.

Esse método consiste em projetar uma matriz de ganho de realimentação de estados $-K$ que permite alocar todos os polos de malha fechada nas posições desejadas, conforme mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1 | Controle por alocação de polos com realimentação de estados



Fonte: elaborada pela autora.

Para que todos os polos de malha fechada possam ser alocados em quaisquer posições arbitrárias no plano complexo, é necessário que o sistema seja considerado de estado completamente controlável. Se esse requisito for atendido, podemos especificar o coeficiente de amortecimento ζ e a frequência natural não amortecida ω_n desejada para todos polos do sistema.

Considere o sistema em espaço de estados SISO a seguir:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

Em que:

$x \rightarrow$ vetor de estado ($n \times 1$)

$y \rightarrow$ sinal de saída (escalar)

$u \rightarrow$ entrada ou sinal de controle (escalar)

$A \rightarrow$ matriz de estado ($n \times n$)

$B \rightarrow$ matriz de entrada ($n \times 1$)

$C \rightarrow$ matriz de saída ($1 \times n$)

$D \rightarrow$ matriz de transmissão direta (escalar)

Definimos o sinal de controle conforme a Figura 2.1:

$$u = -Kx + r \quad (2.3)$$

Em que:

$K \rightarrow$ matriz de controle ($1 \times n$)

$r \rightarrow$ sinal de referência (escalar)

Substituindo a equação (2.3) na equação (2.1) obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(-Kx + r) = Ax - BKx + Br \\ \dot{x} &= (A - BK)x + Br\end{aligned}\tag{2.4}$$

Denominando uma matriz $\bar{A} = A - BK$, o resultado é um novo sistema no espaço de estados em malha fechada, cuja equação característica é dada por:

$$\det[sI - \bar{A}] = \det[sI - (A - BK)] = 0\tag{2.5}$$

E cujas raízes são os autovalores/polos do novo sistema e foram alocados os polos de acordo com os requisitos desejados.

Em sistemas no espaço de estados, algumas dinâmicas podem não ser vistas pelas saídas ou influenciadas pelas entradas do sistema. Um exemplo ocorre quando um polo é cancelado com um zero na função de transferência e, com isso, a dinâmica desse polo deixa de ser observada pela saída ou controlada pela entrada.

Assim, uma condição que deve ser atendida para que seja possível alocar todos os polos do sistema onde se deseja é que o sinal de controle u possa controlar todas as variáveis de estados, ou seja, que o sistema seja controlável.

Definição: "Se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um sistema de um valor inicial para um valor final desejado, o sistema é dito controlável; caso contrário, o sistema é não-controlável" (NISE, 2009, p. 554).

Para verificar a controlabilidade de um sistema de ordem n , montamos uma matriz denominada matriz de controlabilidade M_C , que é obtida a partir das matrizes de estado e de entrada do sistema, conforme equação (2.6).

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

Assim, o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável se a matriz M_c tiver posto n .



Pesquise mais

O posto de uma matriz M com dimensão $(l \times c)$ corresponde ao número de linhas ou colunas linearmente independentes de M .

Além disso: $\text{posto}(M) \leq \min(l, c)$, ou seja, o posto máximo de M é o valor mínimo entre o seu número de linhas e colunas.

Um método para cálculo do posto de M é o escalonamento por linhas ou colunas. Veja no livro sugerido a seguir um exemplo.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. p. 305. Exemplo 5.

Para entender melhor o conceito de controlabilidade, considere o sistema diagonal a seguir:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + u \end{cases} \quad (2.7)$$

Observe na equação (2.7) que a entrada de controle u afeta cada uma das variáveis de estado. Ou seja, por inspeção, podemos dizer que esse sistema é controlável.

Se substituirmos esse sistema por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Observamos na equação (2.8) que a variável de estado x_2 não mais pode ser controlada pela entrada u . Isso pode ser comprovado calculando-se a matriz de controlabilidade e seu posto.

No entanto, para sistemas mais complexos, com matriz de estados mais densa, essa análise por inspeção torna-se difícil, sendo, portanto, necessário recorrer à análise matemática por meio da equação (2.6).



Verifique a controlabilidade dos dois sistemas a seguir:

$$1 \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \ 0] x \quad (2.9)$$

$$2 \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \ 1] x \quad (2.10)$$

Resolução: vamos obter a matriz de controlabilidade de ambos os sistemas.

$$M_{C1} = [B \ AB] \Rightarrow M_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+3L_1} M_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{linhas/columnas} \\ \text{linearmente} \\ \text{independentes} \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(M_{C1}) = 2 = n \rightarrow$ Sistema 1 é controlável

Já para o sistema 2:

$$M_{C2} = [B \ AB] \Rightarrow M_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{linhas /columnas} \\ \text{linearmente dependentes} \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(M_{C2}) = 1 \neq n \rightarrow$ Sistema 2 é não-controlável

Se um dado sistema for controlável, ele poderá ser transformado em sua forma canônica controlável. Entre as vantagens na representação de sistemas nessa forma, temos que:

1. Permite a identificação rápida da controlabilidade de um sistema.
2. Permite o cálculo direto dos elementos de K na equação (2.4), o que veremos mais adiante.

Para obter a forma canônica controlável de um sistema, considere a função de transferência SISO a seguir:

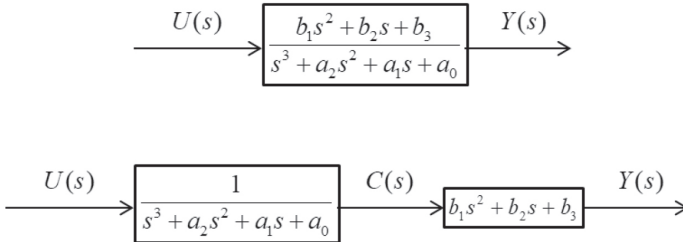
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.11)$$

Fazendo $Y(s) = (b_1 s^2 + b_2 s + b_3) C(s)$, temos:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.12).$$

O resultado é uma decomposição da função de transferência conforme a figura a seguir:

Figura 2.2 | Decomposição da função de transferência



Fonte: elaborada pela autora.

Agora faremos um processo semelhante àquele realizado na Seção 1.2 para obter o espaço de estados de uma função de transferência. A partir da equação (2.11) obteremos a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [C(s)(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)] &= \mathcal{L}^{-1} [U(s)] \\ \mathcal{L}^{-1} [s^3C(s) + a_2s^2C(s) + a_1sC(s) + a_0C(s)] &= \mathcal{L}^{-1} [U(s)] \\ \ddot{c}(t) + a_2\dot{c}(t) + a_1c(t) + a_0c(t) &= u(t) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Definindo as variáveis de estados como sucessivas derivadas, temos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c(t) \\ x_2(t) &= \dot{c}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{c}(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Derivando ambos os lados e utilizando a equação (2.14) para obter $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$, e a equação (2.13) para obter $\dot{x}_3(t) = \ddot{c}(t)$, as equações de estados resultam:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) + u(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Escrevendo a equação da saída a partir de $Y(s) = (b_1s^2 + b_2s + b_3)C(s)$, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(b_1s^2 + b_2s + b_3)C(s)] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[b_1s^2C(s) + b_2sC(s) + b_3C(s)]$$

$$y(t) = b_1\ddot{c}(t) + b_2\dot{c}(t) + b_3c(t)$$

Substituindo as variáveis de estado da equação (2.14), obtemos:

$$y(t) = b_1x_3(t) + b_2x_2(t) + b_3x_1(t) \quad (2.16)$$

$$\therefore y(t) = b_3x_1(t) + b_2x_2(t) + b_1x_3(t)$$

As equações (2.15) e (2.16) escritas na forma matricial a seguir representam a forma canônica controlável do sistema da equação (2.11):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.17)$$

$$y = [b_3 \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

A matriz de controlabilidade desse sistema será sempre da forma:

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z \\ 1 & w & y \end{bmatrix}$$

Cujo posto é igual a 3 para quaisquer valores de x, w, y

Generalizando para um sistema de n-ésima ordem da eq. (2.1):

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0} \quad (2.19)$$

A forma canônica controlável do sistema resulta no conjunto vetor matricial composto pelas equações (2.20) e (2.21) a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.20)$$

$$y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (2.21)$$



Assimile

Um sistema é dito controlável se for possível alcançar, por meio de uma entrada, um valor final desejado a partir de um valor inicial. Caso isso ocorra, é possível alocar os polos desse sistema em qualquer posição desejada no plano complexo por meio da realimentação de estados $u = -Kx$ tal que a nova matriz de estados se torne: $\bar{A} = A - BK$.

Retomemos o sistema em malha fechada da equação (2.4):
 $\dot{x} = (A - BK)x + Br$.

Como a lei de controle é dada por: $u = -Kx$ e estamos tratando de um sistema SISO, a entrada u é um escalar. Sendo x um vetor coluna com n elementos, para que o resultado da multiplicação Kx seja escalar, o controlador K deve ser uma matriz (ou vetor linha) com a seguinte estrutura:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \quad (2.22)$$

Veremos aqui duas abordagens para encontrar os elementos de K :

- Projeto do controlador igualando coeficientes da função característica.
- Projeto do controlador utilizando a forma canônica controlável.

Projeto do controlador igualando coeficientes da função característica

O primeiro método proposto para projeto do controlador consiste em igualar os coeficientes da equação característica de $\bar{A} = A - BK$, $\det[sI - (A - BK)] = 0$, com a equação característica desejada.

Em alguns casos, os polos desejados não serão dados, mas serão dadas as características do sinal de resposta, como o amortecimento, *overshoot*, tempo de subida, tempo de assentamento, entre outras métricas que já foram vistas na disciplina teoria de controle moderno.

A partir delas, os polos desejados podem ser obtidos e por consequência obtém-se a equação característica do sistema desejado, que é dada por:

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0 \quad (2.23)$$

Ou então a equação característica pode ser obtida utilizando-se a forma geral de funções de transferência de segunda ordem ($s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$), em casos mais específicos.

Assim, as seguintes etapas devem ser seguidas para projeto:

1. Verificar se o sistema é controlável, caso sim, poderá prosseguir com o projeto.
2. Obter a equação característica de $A - BK$, substituindo os valores numéricos de A e B, e os parâmetros de K conforme equação (2.22).
3. De acordo com as métricas desejadas, obter os polos do sistema em malha fechada e escrever a equação característica do novo sistema desejado.
4. Igualar os coeficientes das equações características obtidas nos itens 2 e 3.



Exemplificando

Considere um processo representado em espaço de estados a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0,75] x \end{aligned} \quad (2.24)$$

Projete uma realimentação de estados para esse processo, com sobressinal de 15% e tempo de assentamento na faixa de 2% de 0,5s.

Resolução:

Utilizemos o **método de projeto igualando coeficientes** no sistema (2.22):

Etapas 1: verificar se o sistema é controlável.

$$M_{C2} = [B \quad AB] \Rightarrow M_C = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{posto}(M_C) = 2 = n$$

Como o posto da matriz de controlabilidade é igual à ordem do sistema, ele é controlável e podemos aplicar a realimentação de estados.

Etapa 2: obter a equação característica de $\bar{A} = A - BK$. Obteremos primeiramente \bar{A} :

$$\bar{A} = A - BK = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 - k_1 & -4 - k_2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \bar{A}) = \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - k_1 & -4 - k_2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - k_1 & -4 - k_2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s + 8 + k_1 & 4 + k_2 \\ -4 & s \end{bmatrix} \right) = (s + 8 + k_1)s - (4 + k_2)(-4) = s^2 + 8s + k_1s + 16 + 4k_2 =$$

$$= s^2 + s(8 + k_1) + (16 + 4k_2)$$

Etapa 3: o amortecimento ζ em função do *overshoot* (%SP) é dado por:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%SP / 100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%SP / 100)}} = \frac{-\ln(15 / 100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(15 / 100)}} = 0,5169$$

O tempo de assentamento T_s em função do amortecimento ζ e da frequência natural não amortecida ω_n do sistema é dado por:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0,5169 \cdot 0,5} = 15,476.$$

A equação característica desejada, que coincide com o denominador da função de transferência, é dada por:

$$p_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,5169 \cdot 15,476s + 15,476^2 =$$

$$p_c(s) = s^2 + 16s + 239,5053$$

Etapa 4: agora, basta igualar os coeficientes dos polinômios:

$$p_c(s) = s^2 + 16s + 239,5053 = s^2 + s(8 + k_1) + (16 + 4k_2)$$

$$\Rightarrow 8 + k_1 = 16 \therefore k_1 = 8$$

$$\Rightarrow 16 + 4k_2 = 239,5053 \therefore k_2 = \frac{239,5053 - 16}{4} = 55,8763$$

Desse modo, temos o controlador dado por:

$$K = [8 \quad 55,8763].$$

A outra abordagem para o projeto do controlador para realimentação de estados utiliza a forma canônica controlável do sistema das equações (2.20) e (2.21). A metodologia consiste em aplicar as mesmas etapas anteriores, mas nesse caso há uma particularidade que veremos a seguir.

Retomando o sistema na forma canônica controlável, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

A equação característica desse sistema é dada por:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0 = 0 \quad (2.25)$$

Aplicando a lei de controle $u = -Kx$ tal que $K = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$, a matriz de estados em malha fechada resulta em:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

Para obter a equação característica em malha fechada, fazemos:

$$\det(sI - [A - BK]) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \quad (2.26)$$

Observe a semelhança entre as equações (2.25) e (2.26).

Para sistemas na forma canônica controlável, em malha fechada, pode-se escrever a equação característica a partir da equação característica em malha aberta e adicionando o k_i apropriado a cada coeficiente. Isso facilita e evita cálculo complexos em casos de sistemas com ordem maior que 2.

Tomando agora a equação característica desejada como sendo:

$$s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \dots + d_1s + d_0 = 0 \quad (2.27)$$

Em que d_i são os coeficientes desejados em malha fechada, igualando-se as equações (2.26) e (2.27), obtemos:

$$d_i = a_i + k_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

E, portanto:

$$k_{i+1} = d_i - a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.28).$$



Exemplificando

Considere o mesmo processo do exemplo anterior da equação (2.24), cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+4)^2}$$

Projete uma realimentação de estados para esse processo, com as mesmas características anteriores, mas utilizando a forma canônica controlável.

Resolução:

Obteremos a forma canônica controlável do sistema:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+4)^2} = \frac{s+3}{s^2+8s+16} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

A equação característica de A-BK conforme equação (2.25) fica:

$$s^n + (8+k_2)s^1 + (16+k_1) = 0.$$

A equação característica desejada já foi obtida e é dada por:

$$s^2 + 16s + 239,5053 = 0.$$

Igualando-se as duas, temos:

$$\begin{array}{l} 8+k_2 = 16 \\ \therefore k_2 = 8 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} 16+k_1 = 239,5053 \\ \therefore k_1 = 223,5053 \end{array}$$

Desse modo, obtemos o controlador de forma mais simples e rápida, que é dado por:

$$K = [223,5053 \quad 8].$$

Ainda, com a prática, pode-se utilizar diretamente a equação (2.28), agilizando ainda mais o projeto.



Observe nos exemplos que as duas representações em espaço de estados possuem a mesma função de transferência. Ainda assim, os controladores obtidos são distintos para cada uma delas. Por que isso ocorreu?

Sem medo de erro

Suponha que você foi contratado para integrar uma equipe de projetos que deverá implementar uma nova planta industrial alimentícia. Como responsável técnico, você ficou designado para realizar o projeto do controlador por realimentação de estados para todos os aquecedores a gás que serão utilizados para produção e processamento de alimentos fornecidos.

Deseja-se que a resposta do sistema para um determinado aquecedor em malha fechada tenha um *overshoot* máximo de 5%, para que um sobressinal elevado não queime ou estrague o alimento, e tempo de acomodação de 10 minutos, para que não haja choque térmico nele. O polo não dominante do sistema deve responder 10 vezes mais rápido que os demais para não interferir na resposta.

Como obter essa resposta? Um controlador por realimentação de estados seria viável?

O modelo dinâmico do aquecedor disponibilizado pelo fabricante é dado a seguir:

Figura 2.3 | Diagrama de blocos de um aquecedor a gás



Fonte: adaptada de Nise (2009).

$$G_H(s) = \frac{1}{(s + 0,4)(s + 0,8)} \left(\frac{^{\circ}F}{ft^3/min} \right) \rightarrow \text{Função de transferência do aquecedor.}$$

$$G_V(s) = \frac{5}{s + 5} \left(\frac{ft^3/min}{psi} \right) \rightarrow \text{Função de transferência da válvula de gás.}$$

Resolução:

Para obter a resposta desejada, devemos alocar os polos para uma posição específica no plano complexo. Utilizaremos o projeto de um controlador por realimentação de estados.

Primeiramente, obteremos a forma canônica controlável do sistema. Em malha aberta a função de transferência resulta:

$$T(s) = G_V(s)G_H(s)$$
$$T(s) = \frac{5}{(s+0,4)(s+0,8)(s+5)} = \frac{5}{s^3 + 6,2s^2 + 6,32s + 1,6} = \frac{b_3}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

A forma canônica controlável desse sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1,6 & -6,32 & -6,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Não é necessário verificar a controlabilidade do sistema, pois sistemas na forma canônica controlável são sempre controláveis. Por esse motivo, vamos direto à etapa 2 de projeto.

Etapa 2: obteremos a equação característica de $\bar{A} = A - BK$ considerando $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$. Por meio da equação (2.25):

$$\det(sI - [A - BK]) = s^3 + (a_2 + k_3)s^2 + (a_1 + k_2)s^1 + (a_0 + k_1) = 0$$
$$= s^3 + (6,2 + k_3)s^2 + (6,32 + k_2)s^1 + (1,6 + k_1) = 0$$

Etapa 3: agora, obteremos a equação característica desejada para igualar os coeficientes. Foi dado que o *overshoot* máximo seja 5% e tempo de acomodação seja 10 minutos, ou seja, %SP=5 e $T_s = 10$, portanto:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%SP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%SP/100)}} = \frac{-\ln(5/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(5/100)}} = 0,6901, \quad \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0,6901 \cdot 10} = 0,5796$$

Como o sistema é de terceira ordem, consideraremos dois polos complexos conjugados que forneçam a resposta com as características solicitadas e um polo real 10 vezes mais rápido que os demais. Esse polo real é um polo não dominante e por apresentar resposta muito mais rápida que os demais, sua dinâmica não é observada na resposta do sistema.

A equação característica de segunda ordem desejada é dada por:

$$p_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,6901 \cdot 12s + 0,5796^2 = \\ p_c(s) = s^2 + 0,8s + 0,3360$$

Portanto, os polos complexos resultam em: $s_{1,2} = -0,4 \pm 0,4195j$. Logo, o polo real localiza-se com valor: $s_3 = -4$.

Assim, a equação característica que coincide com o denominador da função de transferência do sistema em malha fechada desejado resulta em:

$$(s + 4)(s^2 + 0,8s + 0,3360) = 0 \\ \therefore s^3 + 4,8s^2 + 3,536s + 1,344 = 0$$

Etapa 4: agora basta igualar os coeficientes das equações características obtidas nas etapas 2 e 3:

$$6,2 + k_3 = 4,8 \Rightarrow k_3 = -1,4$$

$$6,32 + k_2 = 3,536 \Rightarrow k_2 = -2,784$$

$$1,6 + k_1 = 1,344 \Rightarrow k_1 = -0,256$$

Portanto, o controlador resultante do projeto fica:

$$K = [-0,256 \quad -2,784 \quad -1,4].$$

Aplicando a realimentação de estados com o controlador resultante, o sistema obtido apresentará resposta com *overshoot* máximo de 5% e tempo de acomodação de 10 minutos.

Dessa forma, o sistema de aquecedor apresentará um tempo de resposta adequado e que não provocará um choque térmico no alimento nem um sobressinal que possa queimá-lo.

Controle do conversor CC-CC por alocação de polos para acionamento de motores CC

Descrição da situação-problema

Os conversores de tensão CC-CC são utilizados para converter uma fonte de alimentação disponível em corrente contínua de valor fixo em uma fonte de tensão CC variável de acordo com a necessidade da carga. São especialmente utilizados para o acionamento de motores CC em que uma tensão contínua de alimentação de valor variável é necessária para que a velocidade do rotor possa ser controlada, permitindo uma dinâmica eficiente da máquina.

Você foi contratado por uma fábrica para realizar, juntamente com uma equipe de projeto, o controle das máquinas de corrente contínua que são responsáveis pela movimentação das esteiras transportadoras. Entre as etapas de projeto, é necessário que seja realizado o controle do conversor CC-CC para acionamento das máquinas. As especificações de projeto são: *overshoot* máximo de 6% e tempo de acomodação na faixa de 2% com valor de 0,5 segundo, para que a saída responda rapidamente às alterações de entrada, que será responsável por alimentar o motor e controlar sua velocidade. Assim, o conversor CC-CC age rapidamente para reajustar a velocidade caso haja um aumento abrupto de carga, por exemplo, sem deixar que um sobressinal elevado cause uma oscilação na sua velocidade.

Os manuais do fabricante dispõem do modelo em espaço de estados do conversor, que é dado a seguir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 166,67 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Em que: $x = [i \quad v]^T$ são respectivamente a corrente interna e a tensão de saída, e $u = E$ é a tensão de entrada do conversor.

Resolução da situação-problema

Para a obtenção das características desejadas, é necessária a alocação de polos por realimentação de estados $u = -Kx$. A metodologia de projeto consiste em igualar os coeficientes da equação característica da matriz em malha fechada ($\bar{A} = A - BK$) com os coeficientes da

equação característica desejada.

1. A primeira etapa de projeto é verificar se o sistema é controlável:

$$M_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 166,7 & 0 \\ 0 & 83,35 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Duas linhas/colunas}$$

linearmente independentes.

$$\therefore \text{posto}(M_C) = n = 2 \rightarrow \text{Sistema controlável.}$$

2. Vamos obter a equação característica de $\bar{A} = A - BK$ considerando $K = [k_1 \quad k_2]$:

$$\bar{A} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 166,67 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]$$

$$\bar{A} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 166,67k_1 & 166,67k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = A - BK = \begin{bmatrix} -166,67k_1 & -83,33 - 166,67k_2 \\ 500 & -10 \end{bmatrix}$$

A equação característica de \bar{A} é obtida pela seguinte equação:
 $\det(sI - \bar{A}) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A}) &= \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -166,67k_1 & -83,33 - 166,67k_2 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s + 166,67k_1 & 83,33 + 166,67k_2 \\ -500 & s + 10 \end{bmatrix} \right) \\ &= (s + 166,67k_1)(s + 10) - (83,33 + 166,67k_2)(-500) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore s^2 + (10 + 166,7k_1)s + (41665 + 1667k_1 + 83350k_2) = 0$$

3. Agora vamos obter os polos desejados de acordo com os requisitos de projeto que foram especificados.

Foi dado que o *overshoot* máximo seja 6% e tempo de acomodação seja 0,5 segundo, ou seja, %SP=6 e $T_s = 0,5$.

$$\zeta = \frac{-\ln(\%SP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%SP/100)}} = \frac{-\ln(6/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(6/100)}} = 0,6671, \quad \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0,6671 \cdot 0,5} = 12$$

A equação característica desejada, que coincide com o denominador da função de transferência do sistema em malha fechada desejado, é dada por:

$$\begin{aligned} p_c(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,6671 \cdot 12s + 12^2 = \\ p_c(s) &= s^2 + 16s + 144 \end{aligned}$$

4. Agora basta igualar os coeficientes das equações características obtidas nos itens 2 e 3:

$$\begin{aligned} 10 + 166,7k_1 &= 16 \Rightarrow k_1 = 0,036 \\ 41665 + 1667k_1 + 83350k_2 &= 144 \Rightarrow k_2 = -0,499 \end{aligned}$$

Portanto, o controlador resultante para o conversor CC-CC é dado a seguir:

$$K = [0,036 \quad -0,499].$$

A realimentação de estados aplicada ao sistema com esse ganho fornecerá uma resposta com *overshoot* máximo de 6% e tempo de acomodação de 0,5 segundos.

Assim, o controle da tensão de entrada E aplicada ao conversor CC-CC proverá uma tensão de saída v que irá, por sua vez, controlar a velocidade do motor CC. A resposta será rápida e precisa, para que, ao sofrer um impacto de carga por exemplo, a velocidade do motor ajuste-se rapidamente com baixa oscilação, especificada pelo valor *overshoot*.

Faça valer a pena

1. O projeto em espaço de estados consiste em especificar os polos desejados para o sistema em malha fechada e projetar um controlador composto por ganhos de realimentação das variáveis de estados.

Sobre a alocação de polos por meio da realimentação de estados, quais afirmativas a seguir estão corretas?

I. Os ganhos do controlador podem ser obtidos igualando-se os coeficientes da equação característica do sistema aos coeficientes da equação característica desejada.

II. Quando o sinal de controle não pode afetar uma ou mais variáveis de estado, o sistema é denominado controlável.

III. Apenas é possível desenvolver o projeto por realimentação de estados se o sistema for controlável.

IV. Para verificar a controlabilidade do sistema, o projetista deve analisar a matriz de controlabilidade M_C . Se $\text{posto}(M_C) \neq n$, sendo n a ordem do sistema, então ele é controlável.

V. A matriz de controlabilidade é dada por: $M_C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$.

- a) I – II – V.
- b) I – III – V.
- c) I – VI – V.
- d) II – III – V.
- e) III – IV – V.

2. Uma das vantagens do projeto em espaço de estados em relação aos projetos por técnicas clássicas é que em espaço de estados é possível especificar as localizações desejadas de todos os polos em malha fechada no plano complexo. No entanto, para que isso seja possível, é necessário que o sistema seja controlável.

Analisar a controlabilidade dos sistemas a seguir e assinalar a alternativa correta.

Considere:

(S) – Controlável e (N) – Não controlável.

I. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

II. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

III. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$

- a) I-S, II-S, III-S.
- b) I-S, II-S, III-N.
- c) I-S, II-N, III-N.
- d) I-N, II-S, III-N.
- e) I-N, II-N, III-N.

3. Sistemas em espaço de estados não possuem uma única representação possível, dependendo das variáveis de estado que são escolhidas para montar o conjunto vetor-matricial que o representa. Uma das possíveis formas de representar um sistema em espaço de estados é a forma canônica controlável. Com o uso da forma canônica controlável, o cálculo dos elementos da matriz de ganhos de realimentação de estados K pode ser obtido diretamente.

Para o sistema a seguir, determine a matriz de ganho K de realimentação de estados, utilizando a forma canônica controlável, para os seguintes polos desejados: $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ e $s_{3,4} = -20$.

$$G(s) = \frac{0,5s^2 - 5}{s^4 - 12,5s^2}$$

a) $K = [4480 \quad 764,5 \quad 48 \quad 12800]$.

b) $K = [764,5 \quad 48 \quad 12800 \quad 4480]$.

c) $K = [12800 \quad 4480 \quad 739,5 \quad 48]$.

d) $K = [48 \quad 764,5 \quad 4480 \quad 12800]$.

e) $K = [12800 \quad 4480 \quad 764,5 \quad 48]$.

Seção 2.2

Projeto de observador de estados

Diálogo aberto

Na seção anterior vimos que o projeto de controle em espaço de estados consiste em obter uma matriz de ganhos de realimentação de forma a alocar os polos do sistema em malha fechada para uma posição desejada no plano complexo. Vimos também o conceito de sistemas controláveis, uma vez que a controlabilidade de um sistema é requisito para projeto do controlador.

No entanto, em processos industriais, nem sempre dispomos das variáveis de estados para fazer realimentação de estados, seja em razão da incapacidade física de medi-las ou do elevado custo dos sensores, lembrando que a maioria dos sistemas possui ordem elevada, ou seja, um grande número de variáveis de estados a serem medidas. Por exemplo, podemos observar dificuldades físicas em se medir determinada variável nos geradores síncronos, cuja velocidade de rotação deve ser medida e controlada. No entanto, para que essa variável seja diretamente medida, os sensores devem ser instalados em torno do elemento móvel do gerador, gerando ruídos devido à movimentação lateral do rotor e diminuindo a confiabilidade da medida.

De maneira geral, para contornar o problema de medição de determinadas variáveis, se o sistema for observável, é possível projetar um observador de estados com o objetivo de estimar os estados do sistema a partir dos dados disponíveis na saída.

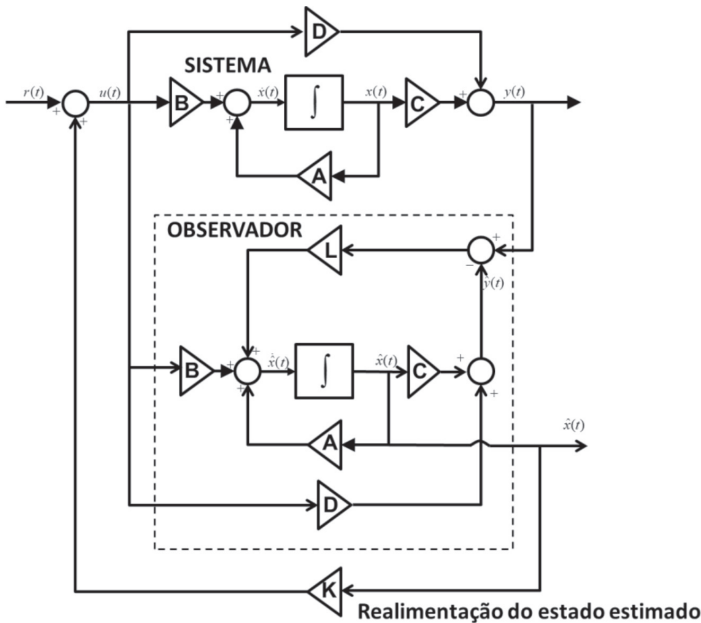
Com base nisso, retomaremos o projeto do aquecedor a gás da planta alimentícia. Você, como responsável técnico, ficou encarregado de projetar o controlador. No entanto, foi verificado que nem todas as variáveis de estados estão disponíveis para realimentação e será necessário projetar um observador a partir do sinal de saída disponível. O observador deve ter resposta rápida o suficiente para que a estimação seja praticamente instantânea e, dessa maneira, possa ser utilizada como sinal de realimentação do controlador projetado na seção anterior. Para o caso do aquecedor a gás, ele deve responder 10 vezes mais rápido que o controlador e com um *overshoot* máximo de 5% para evitar uma ação de controle indesejada. Como resolver esse problema? Vamos descobrir a seguir! Bons estudos!

Não pode faltar

Na seção anterior vimos como projetar um controlador por realimentação de estados, caso o sistema seja controlável. Para que isso ocorra, todas as variáveis de estados devem ser acessíveis, ou seja, devem ser medidas por meio de sensores. No entanto, isso dificilmente ocorre na prática, uma vez que a medição pode ter um custo elevado, pode apresentar imprecisões ou até mesmo estar indisponível devido a alguma restrição de segurança, como é o caso de locais com temperaturas muito elevadas.

Para esses casos, é necessário o projeto de um observador de estados, no qual os estados são estimados a partir da saída disponível e, em seguida, enviados ao controlador, conforme Figura 2.4.

Figura 2.4 | Observador de estados em malha fechada



Fonte: adaptada de Nise (2009).

No observador a diferença entre as saídas do sistema e do observador realimenta as derivadas das variáveis de estados do observador para que o sistema faça as correções de modo a anular esse erro.

Para que todos os estados possam ser estimados pelo observador de estados, é necessário que o sistema seja considerado de estado completamente observável. Se isso ocorrer, será possível projetar um vetor constante L de modo que a resposta transitória do observador seja mais rápida que a resposta do sistema a ser controlado a fim de se obter uma estimação instantânea.

Considere $\hat{\mathbf{x}}$ o vetor de estados observados, \mathbf{x} o vetor de estados do sistema, $\hat{\mathbf{y}}$ a saída do observador e \mathbf{y} a saída do sistema. A partir da Figura 2.4 escrevemos as equações do espaço de estados do observador:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.30)$$

Em que:

$\hat{\mathbf{x}}$ → vetor de estado estimado ($n \times 1$)

$\hat{\mathbf{y}}$ → sinal de saída estimada (escalar)

\mathbf{u} → entrada do sistema (escalar)

\mathbf{A} → matriz de estado do observador = matriz de estado do sistema ($n \times n$)

\mathbf{B} → matriz de entrada do observador = matriz de entrada do sistema ($n \times 1$)

\mathbf{C} → matriz de saída do observador = matriz de saída do sistema ($1 \times n$)

\mathbf{D} → matriz de transmissão direta do observador = matriz de transmissão direta do sistema (1×1)

\mathbf{L} → matriz de realimentação do erro no observador ($n \times 1$)

Lembrando que o sistema é dado pelas equações (2.1) e (2.2), vamos substituir $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ na eq. (2.29):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u})$$

$$\therefore \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.31).$$

O erro da estimação de estados é dado por: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, então a dinâmica do erro é dada por:

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\
 \dot{e} &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})] \\
 \dot{e} &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\
 \therefore \dot{e} &= (A - LC)e \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{A} = A - LC$ é a matriz de estados do observador em malha fechada. Se todos os autovalores dessa matriz possuírem parte real nula, a dinâmica do erro tenderá a zero. Assim, o projeto consiste em obter a matriz L tal que a equação característica de \tilde{A} , dada pela equação (2.33), seja aquela cujos polos são desejados.

$$\det[sI - \tilde{A}] = \det[sI - (A - LC)] = 0 \quad (2.33).$$

Na seção anterior vimos que, para projetar um controlador para realimentação de estados, é preciso que o sistema seja controlável, ou seja, a partir das entradas disponíveis deve ser possível controlar todas as variáveis de estado.

Um requisito semelhante ocorre com o projeto do observador, ou seja, para que seja possível estimar os estados de um sistema a partir da saída y disponível, é necessário que ele seja observável.

Definição: "Se for possível obter um vetor de estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, a partir da medida de u(t) e y(t) durante um intervalo de tempo finito a partir de t_0 , o sistema é dito observável, caso contrário o sistema é dito não-observável" (NISE, 2009, p. 554).

Para verificar a observabilidade de um sistema de ordem n, a matriz de observabilidade M_O é obtida a partir das matrizes de estado e de saída do sistema, conforme a equação (2.34).

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Assim, o sistema é observável se a matriz M_O tiver posto n.



Verifique a observabilidade dos dois sistemas das equações (2.9) e (2.10).

Lembrando que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [2 \quad 0] \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [2 \quad 0]$$

Resolução: Vamos obter a matriz de observabilidade de ambos os sistemas e calcular o posto de cada uma.

Sistema 1:

$$M_{O1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \Rightarrow M_{O1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{2 linhas/colunas} \\ \text{linearmente} \\ \text{independentes} \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(M_{O1}) = 2 = n \rightarrow$ Sistema 1 é observável.

Sistema 2:

$$M_{O2} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \Rightarrow M_{O2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{linhas/colunas} \\ \text{linearmente dependentes} \\ L_2 = -2L_1 \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(M_{O2}) = 1 \neq n \rightarrow$ Sistema 2 é não-observável.

Se um determinado sistema for observável, ele poderá ser transformado em sua forma canônica observável. Ela permite uma rápida identificação da observabilidade do sistema e possibilita o cálculo direto dos elementos de L da equação (2.32), conforme veremos mais adiante.

Note que a definição de controlabilidade vista na Seção 1 da Unidade 2 possui certa similaridade com a definição de observabilidade. Os problemas de projeto do controlador e observador são considerados duais, ou seja, similares e complementares. Essa propriedade é denominada princípio da dualidade. Como os autovalores de uma matriz M qualquer são idênticos aos autovalores de M^T , podemos dizer que os sistemas a seguir são duais.

$$S_1 \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T v \\ w = B^T z + D^T v \end{cases} \quad (2.35).$$

Portanto, a forma canônica observável da função de transferência da equação (2.17) pode ser escrita como o sistema dual à forma canônica controlável das equações (2.18) e (2.19):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \quad (2.36)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Observe na equação (2.37) que a matriz de transmissão direta (matriz D) é nula. Isso ocorreu também na forma canônica controlável e ocorrerá sempre que o maior coeficiente do numerador da função de transferência for menor que o do denominador.



Assimile

Um sistema é dito observável se for possível estimar as variáveis de estados, por meio da saída disponível. Caso isso ocorra, é possível projetar uma matriz de ganhos L tal que o observador possua polos desejados e $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ seja a matriz que rege a dinâmica do erro entre o estado real e o estado estimado.

O problema de projeto do observador é dual ao de projeto do controlador.

Retomemos o sistema do observador em malha fechada. A dinâmica de interesse é dada pela dinâmica da variação do erro entre o estado real e o estado estimado, dada pela equação (2.32): $\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}$. Suponha que a matriz de ganhos L possua a seguinte estrutura:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Veremos aqui dois métodos para obter os elementos de L:

- Projeto fundamentado no princípio da dualidade.
- Projeto do observador utilizando a forma canônica observável.

Projeto baseado no princípio da dualidade

O método utilizado para calcular a matriz de ganhos do observador L é o mesmo utilizado no projeto do controlador de estados K. Para entender, observe a similaridade entre os projetos:

- Projeto do controlador: Matriz de ganhos K é obtida para alocar os polos do sistema em malha fechada ($\bar{A} = A - BK$) com valores desejados.
- Projeto do observador: Matriz de ganhos L é obtida para alocar os polos do observador em malha fechada ($\bar{A} = A - LC$) com valores desejados.

Como os polos das matrizes $\bar{A} = A - LC$ e $\bar{A}^T = (A - LC)^T$ são iguais, temos: $\bar{A}^T = (A - LC)^T = A^T - C^T L^T$, que possui a mesma estrutura de $\bar{A} = A - BK$.

Por analogia temos: $A \rightarrow A^T$, $B \rightarrow C^T$, $K \rightarrow L^T$. Assim, para calcular a matriz L, basta utilizar o método de projeto do controlador de estados para calcular a matriz L^T , seguindo as etapas de 1 a 4 definidas na Seção 1, para o sistema definido por A^T e C^T nos lugares de K, A e B.

Como os polos do observador são responsáveis pela convergência do erro da estimação dos estados para um valor nulo, eles devem possuir uma dinâmica rápida de maneira que a estimação seja instantânea. Utiliza-se, no mínimo, polos duas vezes mais rápidos que os do controlador em malha fechada, ou seja, a parte real dos polos do observador deve ser no mínimo duas vezes maior que a parte real dos polos do controlador de estados.



Exemplificando

Considere o processo da equação (2.24):

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0,75].$$

Projete um observador de estados para esse sistema com dinâmica cinco vezes mais rápida que a do controlador projetado na Seção 1.

Resolução: utilizaremos o princípio da dualidade para obter o observador por meio do projeto do controlador. Primeiramente, escreveremos o sistema dual com as matrizes \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} tal que:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}v \\ w &= \tilde{C}z \end{aligned} \quad \text{em que} \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= A^T, & \tilde{B} &= C^T \\ \tilde{C} &= B^T \end{aligned}$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \end{bmatrix}, C^T = [1 \quad 0].$$

O projeto consiste em encontrar $L^T = [\ell_1 \quad \ell_2]$ que satisfaça os polos desejados. Iniciaremos o projeto seguindo as etapas definidas na Seção 1.

Etapa 1: verificar se o sistema é controlável.

Observe que, se o sistema dual for controlável, o sistema original é observável e vice-versa. A observabilidade pode então ser obtida a partir do sistema original ou a partir da controlabilidade do sistema dual. Aqui nós utilizaremos a segunda opção. Assim:

$$\hat{M}_c = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0,75 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 0,75L_1 \\ L_1 = L_1 + 5L_2}]{L_2 = L_2 / -0,25} \hat{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{2 linhas/colunas} \\ \text{linearmente} \\ \text{independentes} \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(\hat{M}_c) = 2 = n \rightarrow$ O sistema dual é controlável.

Etapa 2: obter a equação característica de $\bar{A} = A - BK$ no sistema original. No sistema dual fica: $\bar{A} = A^T - C^T L^T$. Primeiramente, obteremos \bar{A} :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A^T - C^T L^T = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \end{bmatrix} [\ell_1 \quad \ell_2] = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ 0,75\ell_1 & 0,75\ell_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -8 - \ell_1 & 4 - \ell_2 \\ -4 - 0,75\ell_1 & -0,75\ell_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - \ell_1 & 4 - \ell_2 \\ -4 - 0,75\ell_1 & -0,75\ell_2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - \ell_1 & 4 - \ell_2 \\ -4 - 0,75\ell_1 & -0,75\ell_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s + 8 + \ell_1 & -4 + \ell_2 \\ 4 + 0,75\ell_1 & s + 0,75\ell_2 \end{bmatrix} \right) = (s + 8 + \ell_1)(s + 0,75\ell_2) - (-4 + \ell_2)(4 + 0,75\ell_1) = \\ &= s^2 + 8s + \ell_1 s + 0,75\ell_2 s + 0,75\ell_2 8 + 0,75\ell_2 \ell_1 - (-16 - 4 \cdot 0,75\ell_1 + 4\ell_2 + \ell_2 0,75\ell_1) \\ &= s^2 + s(8 + \ell_1 + 0,75\ell_2) + (6\ell_2 + 0,75\ell_2 \ell_1 + 16 + 4 \cdot 0,75\ell_1 - 4\ell_2 - \ell_2 0,75\ell_1) \\ &= s^2 + s(8 + \ell_1 + 0,75\ell_2) + (2\ell_2 + 16 + 3\ell_1) \end{aligned}$$

Etapa 3: definir os polos e a equação característica desejada. Como desejamos que o observador apresente polos reais 5 vezes mais rápidos que os do controlador, temos:

Polos do controlador obtido na seção 1: $s_{1,2} = -8 \pm 13,247j$.

Polos do observador: $s_{1,2} = -40$.

A equação característica desejada é dada por:

$$\hat{p}_c(s) = (s + 40)(s + 40) = s^2 + 80s + 1600.$$

Etapa 5: agora basta igualar os coeficientes dos polinômios:

$$\hat{p}_c(s) = (s + 40)(s + 40) = s^2 + 80s + 1600 = s^2 + s(8 + \ell_1 + 0,75\ell_2) + (2\ell_2 + 16 + 3\ell_1)$$

$$8 + \ell_1 + 0,75\ell_2 = 80 \Rightarrow \ell_1 = 72 - 0,75\ell_2$$

$$2\ell_2 + 16 + 3\ell_1 = 1600 \Rightarrow 2\ell_2 + 16 + 3(72 - 0,75\ell_2) = 1600 \Rightarrow \begin{cases} \ell_2 = \frac{1600 - 16 - 3 \cdot 72}{2 - 3 \cdot 0,75} = -5472 \\ \ell_1 = 72 - 0,75 \cdot (-5472) = 4176 \end{cases}$$

Assim, temos: $L^T = [4176 \quad -5472]$.

Portanto, para o observador do sistema real, a matriz L resultante é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 4176 \\ -5472 \end{bmatrix}.$$

A outra abordagem para o projeto do observador de estados utiliza a forma canônica observável do sistema das equações (2.36) e (2.37). A metodologia é dual ao projeto do controlador por meio da forma canônica controlável, assim podemos escrever diretamente a matriz do observador em malha fechada e sua equação característica:

$$\tilde{A} = A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_0 + \ell_1) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_1 + \ell_2) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(a_2 + \ell_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_{n-1} + \ell_n) \end{bmatrix}.$$

A equação característica do observador é dada por:

$$p_c(s) = s^n + (a_{n-1} + \ell_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + \ell_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_1 + \ell_2)s + (a_0 + \ell_1) = 0 \quad (2.38).$$

Para sistemas na forma canônica observável, pode-se escrever a equação característica do observador a partir da equação característica em malha aberta e adicionando o termo ℓ_i apropriado a cada coeficiente. Essa abordagem simplifica os cálculos em casos de sistemas de ordem elevada.

Tomando agora a equação característica desejada como sendo:

$$s^n + g_{n-1}s^{n-1} + g_{n-2}s^{n-2} + \dots + g_1s + g_0 = 0 \quad (2.39)$$

Em que: g_i são os coeficientes desejados em malha fechada, igualando-se as equações (2.38) e (2.39), obtemos:

$$g_i = a_i + \ell_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Portanto, os coeficientes de L resultam:

$$\ell_{i+1} = g_i - a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.40).$$

É muito importante atentarmos para o fato de que um sistema possui diversas representações em espaço de estados, a depender das variáveis escolhidas para representá-lo. Desse modo, um observador projetado para determinado conjunto de matrizes deve ser implementado para aquele sistema específico, não valendo para outra representação, mesmo que a função de transferência seja a mesma, pois as variáveis de estado serão diferentes.

Por exemplo, se projetarmos um observador para o sistema da forma canônica, não podemos implementar em outro espaço de estados do mesmo sistema.



Refleta

Projetaremos um observador de estados para o mesmo processo da equação (2.24) e com os mesmos requisitos que o exemplo anterior, mas agora fundamentado na forma canônica observável do sistema,

sabendo que a sua função de transferência é dada por: $G(s) = \frac{s+3}{(s+4)^2}$, o observador resultante é dado por: $L = [-1368 \quad 4176]^T$.

Os dois espaços de estados possuem a mesma função de transferência, então por que os observadores são distintos?



É possível, a partir do observador projetado para a forma canônica observável, obter um observador para o sistema representado por meio de variáveis de estados distintas. Para saber um pouco mais sobre esse conteúdo, bem como o passo a passo para obter um observador representado a partir da forma canônica, acesse o material sugerido a seguir.

NISE, Norman S. **Engenharia de Controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC 2017. p. 536-539. (Seção 12.7). Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>>. Acesso em: 2 dez. 2017.

Escrevendo agora o modelo completo do sistema da Figura 2.4, investigaremos o efeito da utilização do estado estimado \hat{x} para realimentar o controlador, em vez de utilizar o estado real.

O sistema real é definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

O controlador é fundamentado na realimentação do estado estimado, então: $u = -K\hat{x}$.

Substituindo esse controle, a equação de estados resulta: $\dot{x} = Ax - BK\hat{x}$. Considerando que o erro da estimação é dado por: $e = x - \hat{x}$, substituímos $\hat{x} = x - e$ na equação de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK(x - e) \\ \therefore \dot{x} &= (A - BK)x - BKe\end{aligned}\tag{2.41}$$

A dinâmica do erro do observador é dada por:

$$\dot{e} = (A - LC)e\tag{2.42}$$

Combinando as equações (2.41) e (2.42), temos o espaço de estados completo do sistema em malha fechada, denominado controlador baseado em observador, ou compensador de estados,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

cujos polos são os polos decorrentes do controlador e os polos decorrentes do observador. Se a ordem da planta for n , então o observador também será de ordem n e o sistema em malha fechada global será de ordem $2n$.

Sem medo de errar

Você, como responsável técnico, ficou encarregado de projetar o controlador do aquecedor a gás da nova planta alimentícia. No entanto, foi verificado que nem todas as variáveis de estados estão disponíveis para realimentação e será necessário projetar um observador a partir do sinal de saída disponível.

Os estados observados serão utilizados como sinal de realimentação do controlador, e, por esse motivo, como especificação do supervisor, o observador deve responder 10 vezes mais rápido que o controlador para que as variáveis de estados sejam estimadas de forma mais instantânea possível e com um *overshoot* máximo de 5%, para que não resulte ações de controle amplificadas e danifique os alimentos.

Utilizaremos o princípio da dualidade para realizar o projeto. Considere o sistema na forma canônica controlável obtido na seção anterior:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1,6 & -6,32 & -6,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

O sistema dual é dado por:

$$\Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,6 \\ 1 & 0 & -6,32 \\ 0 & 1 & -6,2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se o sistema original é controlável, então o sistema dual é observável.

Etapa 2: obteremos a equação característica de $\hat{A} = \hat{A} - \hat{B}L^T$ considerando $L = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3]^T$:

$$\bar{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,6 \\ 1 & 0 & -6,32 \\ 0 & 1 & -6,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,6 \\ 1 & 0 & -6,32 \\ 0 & 1 & -6,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5\ell_1 & 5\ell_2 & 5\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\hat{A}} = \begin{bmatrix} -5\ell_1 & -5\ell_2 & -1,6-5\ell_3 \\ 1 & 0 & -6,32 \\ 0 & 1 & -6,2 \end{bmatrix}$$

A equação característica é dada por $\det(s\mathbf{I} - \bar{\hat{A}}) = 0$. Você pode ter auxílio do Matlab para obter esse determinante, utilizando variáveis simbólicas (syms) (revise também determinantes de matrizes de ordem 3).

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{\hat{A}}) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5\ell_1 & -5\ell_2 & -1,6-5\ell_3 \\ 1 & 0 & -6,32 \\ 0 & 1 & -6,2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s+5\ell_1 & 5\ell_2 & 1,6+5\ell_3 \\ -1 & s & 6,32 \\ 0 & -1 & s+6,2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\therefore \det(s\mathbf{I} - \bar{\hat{A}}) = s^3 + (5\ell_1 + 6,2)s^2 + (5\ell_2 + 31\ell_1 + 6,32)s + (5\ell_3 + 31\ell_2 + 31,6\ell_1 + 1,6)$$

Etapa 3: agora obteremos a equação característica desejada para igualar os coeficientes. Foi dado que o observador deve responder 10 vezes mais rápido que o controlador e com um *overshoot* máximo de 5%. No projeto do controlador presente no item "Sem medo de errar" da Seção 2.1, o tempo de assentamento era 10 minutos na faixa de 2%, portanto no projeto do observador o tempo de assentamento deverá ser 1 minuto.

Como o sobressinal é igual ao do projeto do controlador, não é necessário calcular o amortecimento novamente, ou seja, $\zeta = 0,6901$.

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0,6901 \cdot 1} = 5,7962$$

A equação característica de segunda ordem desejada é dada por:

$$p_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,6901 \cdot 5,7962s + 5,7962^2 =$$

$$p_c(s) = s^2 + 8s + 33,59$$

Os polos complexos do observador resultam, portanto, em: $s_{1,2} = -4 \pm 4,195j$.

O polo real do observador localiza-se, portanto, com valor: $s_3 = -40$, pois deve ser 10 vezes mais rápido que o polo real do controlador.

Assim, a equação característica do observador é dada por:

$$(s + 40)(s^2 + 8s + 33,596) = 0$$

$$\therefore s^3 + 48s^2 + 353,596s + 1343,8 = 0$$

Etapa 4: agora basta igualar os coeficientes das equações características obtidas nas etapas 2 e 3:

$$(5\ell_1 + 6,2) = 48 \Rightarrow \ell_1 = \frac{48 - 6,2}{5} = 8,36$$

$$(5\ell_2 + 31\ell_1 + 6,32) = 353,596 \Rightarrow \ell_2 = \frac{353,596 - 31\ell_1 - 6,32}{5} = 17,62$$

$$(5\ell_3 + 31\ell_2 + 31,6\ell_1 + 1,6) = 1343,8 \Rightarrow \ell_3 = \frac{1343,8 - 31\ell_2 - 31,6\ell_1 - 1,6}{5} = 106,37$$

Portanto, o observador resultante do projeto fica:

$$L = \begin{bmatrix} 8,36 \\ 17,62 \\ 106,37 \end{bmatrix}.$$

Observe que se tivéssemos utilizado a forma canônica observável para projeto, o resultado seria diferente, pois o observador resultante seria adequado para estimar os estados do sistema na forma canônica observável e não controlável.

Embora a função de transferência de ambos seja a mesma, os espaços de estados são distintos, uma vez que as variáveis de estado se alteram, em significado físico e/ou em posição na matriz de estados.

Portanto, aplicando o observador de estados com a matriz L resultante do projeto, o sistema observador obtido apresentará resposta com *overshoot* máximo de 5% e tempo de acomodação de 1 minuto, ou seja, 10 vezes mais rápido que o controlador, de forma que a estimação de estados seja mais precisa e o estado estimado possa ser utilizado para a realimentação do controlador obtido na seção anterior. O sistema completo composto pelo observador e controlador pode ser escrito por meio da equação (2.43).

Projeto de observador de estados para conversor CC-CC

Descrição da situação-problema

Você faz parte da equipe de projeto de controle dos motores CC que são responsáveis pela movimentação das esteiras transportadoras de uma fábrica. O conversor CC-CC utilizado para acionamentos dos motores precisa ser controlado, mas você verificou que as variáveis de estados não podem ser medidas e precisam ser estimadas para que o controlador por realimentação de estados seja utilizado. Como os estados observados devem ser rastreados com o menor atraso de tempo possível, uma boa estimativa é projetar o observador de estados para responder 10 vezes mais rápido que o controlador.

O modelo em espaço de estados disponibilizado pelo fabricante do conversor é dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 166,67 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Em que: $x = [i \ v]^T$ são respectivamente a corrente interna e a tensão de saída e $u = E$ é a tensão de entrada do conversor.

Dados do controlador obtido na Seção 2.1:

Tempo de assentamento na faixa de 2%: $T_s = 0,5s$.

Porcentagem de *overshoot*: $\%UP = 5\%$.

Resolução da situação-problema

Etapa 1: para projetar o observador, é necessário verificar se o sistema é observável. A matriz de observabilidade é dada por:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ linhas/colunas} \\ \text{linearmente} \\ \text{independentes} \end{array}$$

$\therefore \text{posto}(M_o) = 2 = n \rightarrow$ O sistema é observável.

Etapa 2: obter a equação característica de $\tilde{A} = A - LC$:

$$\tilde{A} = A - LC = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 \\ 500 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \ell_1 \\ 0 & \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -83,33 - \ell_1 \\ 500 & -10 - \ell_2 \end{bmatrix}$$

A equação característica de \tilde{A} é dada por:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -83,33 - \ell_1 \\ 500 & -10 - \ell_2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 83,33 + \ell_1 \\ -500 & s + 10 + \ell_2 \end{bmatrix} \right) = s(s + 10 + \ell_2) - (-500)(83,33 + \ell_1)$$

$$\therefore \det(sI - \tilde{A}) = s^2 + (10 + \ell_2)s + (500\ell_1 + 41665) = 0$$

Etapa 3: escrever a equação característica desejada, sendo que o observador deve responder 10 vezes mais rápido que o controlador.

Como controlador projetado Seção 2. possui um tempo de assentamento de 0,5s, o tempo de assentamento do observador deve ser de 0,05s. O *overshoot* permanece o mesmo, já que não foi especificado.

Desse modo, o amortecimento ζ permanece igual àquele calculado para o controlador, ou seja, $\zeta = 0,6671$. A frequência natural do observador é calculada a seguir:

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0,6671 \cdot 0,05} = 120.$$

A equação característica desejada é dada por:

$$p_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,6671 \cdot 120s + 120^2 =$$

$$p_c(s) = s^2 + 160s + 14400$$

Etapa 4: agora basta igualar as equações características obtidas nas etapas 2 e 3.

$$(10 + \ell_2) = 160 \Rightarrow \ell_2 = 150$$

$$(500\ell_1 + 41665) = 14400 \Rightarrow \ell_1 = \frac{14400 - 41665}{500} = -54,53$$

Assim, o observador resultante para o conversor CC-CC é dado a seguir:

$$L = \begin{bmatrix} -54,53 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, o estado estimado com o observador projetado nesta seção, pode ser utilizado como sinal de realimentação para o controlador do conversor CC-CC obtido na seção anterior, uma vez que as medidas das variáveis de estados do sistema físico não se encontram disponíveis para utilização. A partir da equação (2.43) escrevemos o sistema completo composto por observador e controlador, e simulações podem ser realizadas para verificar o comportamento do equipamento:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -0,1676 & 6 & -83,1624 \\ 500 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28,7604 \\ 0 & 0 & 500 & -160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Faça valer a pena

1. O projeto no espaço de estados consiste em projetar um controlador por realimentação de estados. No entanto, nem sempre dispomos das variáveis de estados disponíveis para realimentação, uma vez que pode se tornar caro instalar sensores para medi-las. Nesses casos, realizamos o projeto de um observador de estados, cujo objetivo é estimar as variáveis de estados a partir dos dados da saída do sistema. Os estados estimados podem então ser utilizados como sinal de realimentação do controlador.

Sobre o projeto do observador de estados, quais afirmativas a seguir estão corretas?

I. Os ganhos do observador podem ser obtidos igualando-se os coeficientes da equação característica do observador aos coeficientes da equação característica desejada.

II. Quando o sinal de saída do sistema permite deduzir todas as variáveis de estado, o sistema é denominado observável.

III. Apenas é possível desenvolver o projeto observador de estados se o sistema for controlável.

IV. Para verificar a observabilidade do sistema, o projetista deve analisar a matriz de observabilidade (M_o). Se $\text{posto}(M_o) = n$, sendo n a ordem do sistema, então ele é observável.

V. A matriz de observabilidade é dada por: $M_o = [C \ AC \ \dots \ A^{n-1}C]$.

- a) I – II – V.
- b) I – III – V.
- c) II – I – V.
- d) I – II – IV.
- e) II – III – IV.

2. Por vezes em que as variáveis de estados não podem ser acessadas fisicamente ou a utilização de sensores pode elevar o custo do processo, uma vantagem do uso do observador de estados é que não é necessária a aquisição de todas as variáveis reais do sistema.

Um exemplo prático consiste na medida da velocidade de um carro, que pode ser feita com base na medida da velocidade de rotação das rodas. No entanto, ao instalar sensores das rodas, as medidas estão sujeitas a erros devidos aos buracos e irregularidades na pista. Nesse caso, um observador pode ser projetado a partir de outras variáveis monitoras de forma mais precisa, porém um requisito, para que o projeto do observador seja possível, é que o sistema seja observável.

Analise a observabilidade dos sistemas a seguir e assinale a alternativa correta.

Considere:

(S) – Observável e (N) – Não observável

I. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 1] x.$

II. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0] x.$

III. 0.

- a) I-S, II-S, III-S.
- b) I-S, II-S, III-N.
- c) I-S, II-N, III-N.
- d) I-N, II-S, III-N.
- e) I-N, II-N, III-N.

3. Um sistema na forma canônica observável é sempre observável, mas essa não é a única vantagem dessa representação. Com o uso da forma canônica observável, o cálculo dos elementos da matriz do observador L pode ser obtido diretamente.

Determine para o sistema a seguir a matriz de ganhos L do observador de estados, utilizando a forma canônica observável para os seguintes polos desejados: $s_{1,2} = -1 \pm j$ e $s_{3,4} = -10$.

$$G(s) = \frac{0,5s^2 - 5}{s^4 - 12,5s^2}.$$

a) $L = [240 \quad 154,5 \quad 22 \quad 200]^T$.

b) $L = [154,5 \quad 22 \quad 200 \quad 240]^T$.

c) $L = [22 \quad 200 \quad 240 \quad 154,5]^T$.

d) $L = [200 \quad 240 \quad 154,5 \quad 22]^T$.

e) $L = [22 \quad 154,5 \quad 240 \quad 200]^T$.

Seção 2.3

Projeto em espaço de estados com uso de software

Diálogo aberto

Atualmente, com o avanço da tecnologia, dispomos de todo suporte computacional necessário para realizar projetos, análises e até mesmo implementar controles.

O Matlab é um software que permite, entre diversas tarefas, manipular sistemas dinâmicos no espaço de estados, facilitando a implementação de projeto, pois minimiza erros e evita cálculos excessivos por meio de funções específicas. Além disso, esse software possui a ferramenta de simulação, o Simulink, que permite implementação dos sistemas dinâmicos por meio de diagrama de blocos, o que torna mais simples e diretos seus testes via software.

Nesse contexto, veremos, nesta seção, como aplicar e testar via software Matlab os conhecimentos adquiridos nas Seções 2.1 e 2.2 deste livro, mais especificamente as análises de controlabilidade e observabilidade, as formas canônicas controlável e observável, bem como o projeto do controlador por realimentação de estados e do observador, de acordo com os requisitos de resposta para o sistema.

Sendo assim, para colocar esses conceitos em prática, suponha que você seja integrante da equipe de projetos de uma nova planta industrial alimentícia e ficou encarregado de projetar e validar computacionalmente um controlador, baseado em observador, para os fornos a gás de acordo com os requisitos predeterminados. Como esse projeto pode ser implementado? Quais os comandos essenciais para realizá-lo?

Vamos descobrir a seguir!

Bons estudos!

Não pode faltar

Nas seções anteriores você aprendeu que, se um sistema for controlável, é possível projetar um controlador por alocação de polos e realimentação de estados. Quando os estados não estiverem

disponíveis para serem utilizados como sinal de realimentação do controlador e se o sistema for observável a partir das saídas disponíveis, podemos projetar um observador de estados, responsável por estimar a resposta das variáveis de estados e servir como sinal de realimentação do controlador.

Nesta seção, veremos que é possível aplicar todos esses conceitos utilizando o software Matlab de forma simples, por meio de alguns comandos que podem ser vistos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Principais comandos utilizados para projeto em espaço de estados

Comando	Descrição
$CO = \text{ctrb}(A,B)$	Calcula a matriz de controlabilidade.
$[A,B,C,D] = \text{tf2ss}(\text{num},\text{den})$	Converte uma função de transferência para a representação em espaço de estados na forma canônica controlável.
$OB = \text{obsv}(A,C)$	Calcula a matriz de observabilidade.
$p = \text{rank}(M)$	Calcula o posto de uma matriz M .
$K = \text{acker}(A,B,P)$	Projeta o controlador por alocação de polos apenas para sistemas SISO.

Fonte: elaborada pela autora.

Para verificar a controlabilidade de um sistema, seja ele SISO ou MIMO, utilizaremos os comandos `ctrb` e `rank`. O primeiro comando calcula a matriz de controlabilidade e o segundo obtém o seu posto. A análise do resultado cabe ao projetista, lembre-se de que o posto da matriz de controlabilidade deve ser igual à ordem do sistema para que ele seja controlável.

Para verificar a controlabilidade de um sistema dinâmico cuja representação em espaço de estados é composta pelas matrizes A , B , C e D , previamente obtidas por meio de um processo de modelagem dinâmica, a seguinte sequência de comandos pode então ser utilizada:

```
A = [ ... ];
B = [ ... ];
CO = ctrb(A,B);
p = rank(CO);
```

Para obter a forma canônica controlável de um sistema, utilizaremos o comando `tf2ss`. Ele é muito utilizado para transformar o sistema em função de transferência para espaço de estados, e o resultado é sempre na forma canônica controlável. Para usar esse comando, é necessário entrar com os vetores que contêm os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência, conforme consta na Tabela 2.1.

Caso você disponha de um sistema já em espaço de estados e deseje obter a sua forma canônica, uma das possibilidades seria obter primeiro a função de transferência, para depois obter a forma canônica controlável. Uma possível sequência de comandos pode feita por meio do comando `tfdata`:

```
A = [ ... ]; B = [ ... ]; C = [ ... ]; D = [ ... ];  
Sys = ss(A,B,C,D);  
[ num, den ] = tfdata(Sys,'v');  
[ Acan,Bcan,Ccan,Dcan ] = tf2ss(num,den);
```



Pesquise mais

Outra possibilidade para obter a forma canônica controlável, a partir de um conjunto de matrizes representativas da dinâmica do sistema, seria utilizar um método que se baseia em mudança de coordenadas do estado. Nesse método, a matriz de mudança de bases é construída utilizando-se a matriz de controlabilidade. Nesse caso, para sistemas SISO, a obtenção da forma canônica controlável é feita sem usar o comando `ss2tf`, conforme você pode ver na referência a seguir.

NISE, Noman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. p. 544-545. Capítulo 12, Seção 12.4.

Essa referência também está presente em nossa biblioteca virtual no link a seguir. Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Como vimos anteriormente, se o sistema for controlável, podemos projetar um controlador, composto por uma matriz de ganhos K , para realimentar as variáveis de estado do sistema, permitindo alocar todos os polos para uma localização desejada.

O comando que permite esse projeto no Matlab é o `acker`, utilizado apenas para sistemas SISO, os quais abordaremos nesta seção.

As entradas desse comando, como você pode ver na Tabela 2.1, são as matrizes A e B, e um vetor P que contém os polos desejados para o sistema. Lembrando que o número de elementos de P é a ordem do sistema.

Como geralmente as especificações de projeto são dadas em função do sobressinal e tempo de acomodação desejados, podemos utilizar os comandos `[num,den] = ord2(wn,z)` e `P = roots(den)` para obter os polos em malha fechada. O comando `ord2` gera um sistema de segunda ordem com a frequência natural w_n e fator de amortecimento z . Já o comando `roots` calcula as raízes do polinômio do denominador, que é também o polinômio característico do sistema.

Para os casos em que o sistema for de ordem maior que dois, os demais polos costumam ser especificados como polos reais com valor 10 vezes maior que o dos polos dominantes, mas você deve se atentar aos requisitos do projeto, pois esse valor não é uma regra.



Exemplificando

Considere o processo cuja dinâmica em espaço de estados é representada pelas equações a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1].$$

Utilizando o Matlab, verifique se ele é controlável e, caso positivo, projete uma realimentação de estados K com sobressinal de 15% e tempo de acomodação de 0,5s.

Resolução:

Lembrando que:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%SP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%SP/100)}} \text{ e } T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Os comandos a seguir são implementados:

`clc` %limpa a tela do command window

`clear all` %limpa todas as variáveis do workspace

`close all` %fecha todas as janelas abertas

```
A = [-8 -4 ; 4 0 ]; %declara as
B = [1 ; 0 ]; %matrizes do
C = [1 0.75 ]; %espaço de estados
```

```
CO = ctrb(A,B) %calcula a matriz de controlabilidade CO
p = rank(CO) %calcula o posto da matriz CO
```

```
UP = 15; %declara a % de sobressinal
Ts = 0.5; %declara o tempo de acomodação
```

```
z = -log(UP/100)/sqrt(pi^2+(log(UP/100)^2)); %calcula o amortecimento
em função do sobressinal
```

```
wn = 4/(z*Ts); %calcula a frequência natural de oscilação em função do
amortecimento e do tempo de acomodação
```

```
[num,den] = ord2(wn,z); % obtem um sistema com amortecimento e
frequência desejados
```

```
P = roots(den) %calcula os polos do sistema desejado
```

```
K = acker(A,B,P) %projeta o controlador para realimentação de estados
```

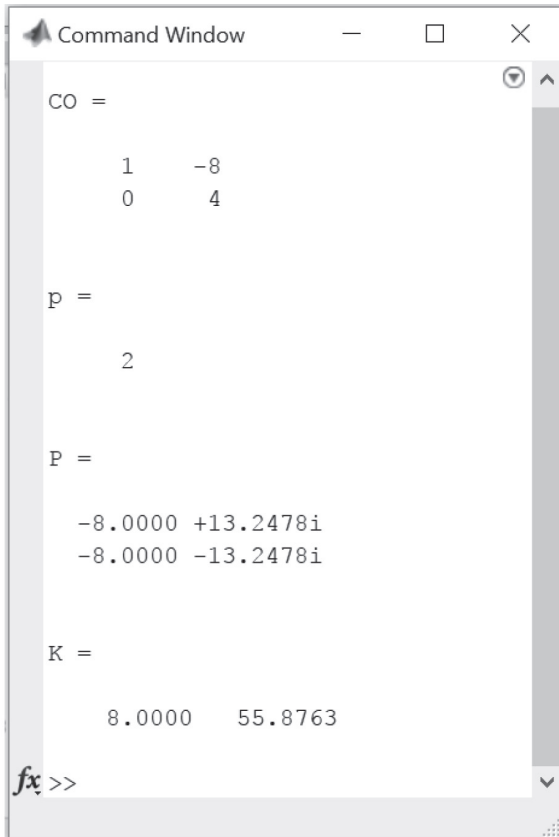
O resultado visto no *Command Window* é dado a seguir. Veja que o comando $p = \text{rank}(CO) = 2 = n$, portanto, o sistema é controlável.

O controlador resultante que aloca os polos para os locais desejados por meio de realimentação de estados é dado por:

$$K = [8 \quad 55,8763].$$

Esse valor é o mesmo calculado manualmente no exemplo da Seção 2.1, pois as matrizes utilizadas para o projeto do controlador (matrizes A e B) são as mesmas.

Figura 2.5 | Projeto do controlador por meio do Matlab



```
Command Window

CO =

    1   -8
    0    4

p =

    2

P =

 -8.0000 +13.2478i
 -8.0000 -13.2478i

K =

    8.0000    55.8763

fx >>
```

Fonte: Matlab R2015a.

Observe que, se projetarmos o ganho do controlador utilizando o Matlab, não é necessário converter a representação para a forma canônica controlável, pois o Matlab fornece o resultado para qualquer conjunto de matrizes de entrada que representa um sistema.

Observabilidade e forma canônica observável com uso de software

Para verificar a observabilidade de um sistema, utilizaremos os comandos `obsv` e `rank`. O primeiro calcula a matriz de observabilidade e o segundo, como já vimos, obtém o seu posto.

Lembrando que o posto da matriz de observabilidade deve ser igual à ordem do sistema para que ele seja observável. O projetista é quem deve avaliar o resultado do comando rank. A seguinte sequência de comandos é então utilizada:

```
A = [ ... ];  
C = [ ... ];  
OB = obsv(A,C);  
p = rank(OB);
```

Para obter a forma canônica observável de um sistema, utilizaremos o comando tf2ss e o princípio da dualidade. Sabendo que a forma canônica observável é o sistema dual à forma canônica controlável, utilizaremos tf2ss para transformar o sistema em função de transferência para espaço de estados na forma canônica controlável e, em seguida, obter o sistema dual, fazendo: $A_{ob} = A^T$, $B_{ob} = C^T$, $C_{ob} = B^T$, sendo A_{ob}, B_{ob}, C_{ob} as matrizes que representam a forma canônica observável do sistema e A,B,C as matrizes que representam a forma canônica controlável, resultantes do comando tf2ss. Veja uma possível sequência de comandos:

```
num = [ ... ]; %declara o numerador e denominador  
den = [ ... ]; %da função de transferência  
[ Aco,Bco,Cco,Dco ] = tf2ss(num,den); %obtem a forma canônica controlável  
Aob = Aco'; Bob = Cco'; %obtem a forma canônica observável  
Cob = Bco'; Dob = Dco'; % pelo princípio da dualidade
```

Projeto de observadores de estados com uso de software

Como vimos anteriormente, se o sistema for controlável, podemos projetar um controlador, composto por uma matriz de ganhos K, para realimentar as variáveis de estado do sistema, permitindo alocar todos os polos para uma localização desejada.

No entanto, muitas vezes as variáveis de estado não estão disponíveis para serem realimentadas, seja em razão da dificuldade de acesso à variável fisicamente ou em razão do custo de instalação de sensores. Para contornar esse problema, as variáveis de estado podem ser estimadas por meio de um observador, caso o sistema seja observável.

Os comandos utilizados para esse projeto no Matlab são os mesmos usados no projeto do controlador: `acker` e `place`. Lembrando que o primeiro comando é utilizado apenas para sistemas SISO e o segundo pode ser utilizado em sistemas SISO ou MIMO, mas é mais utilizado para sistemas MIMO.

Como os projetos são duais, o projeto do observador por meio de `acker` ou `place` consiste basicamente em projetar um controlador para o sistema dual. Assim, utilizamos como entrada dos comandos as matrizes A^T , C^T e o vetor P , que contém os polos desejados para o observador.

O resultado desse projeto será a matriz de ganhos do observador transposta L^T . Basta transpor esse resultado para obter a matriz de ganhos do observador para o sistema original.



Exemplificando

Dando continuação ao exemplo anterior, verifique se o sistema é observável e projete um observador de estados por meio do Matlab, com dinâmica cinco vezes mais rápida que a do controlador obtido.

Resolução: dando continuação ao exemplo anterior, vamos adicionar ao script a seguinte sequência de comandos.

```
OB = obsv(A,C) %calcula a matriz de observabilidade OB
```

```
p = rank(OB) %calcula o posto da matriz OB
```

```
Ts = 0.1; % declara os polos do observador
```

```
% 5x mais rápidos que os do controlador
```

```
wn = 4/(z*Ts); %calcula a frequência natural de oscilação
```

```
[num,den] = ord2(wn,z); % obtem um sistema com amortecimento e frequência desejados
```

```
Pob = roots(P)
```

```
L = acker(A',C',Pob); %projeta o observador
```

```
L = L' % calcula a matriz de ganhos do observador para o sistema original
```

Observe que nesse caso o resultado do comando rank é 2, ou seja, é igual à ordem do sistema. Portanto, o processo é também observável.

Como não foi especificado o sobressinal, vamos adotar o mesmo valor utilizado para o controlador, ou seja, 15%.

A matriz de ganhos do observador é obtida por meio do projeto dual para as matrizes A e C transpostas. O resultado se encontra a seguir:

$$L = \begin{bmatrix} 1349 \\ 72 \end{bmatrix}.$$



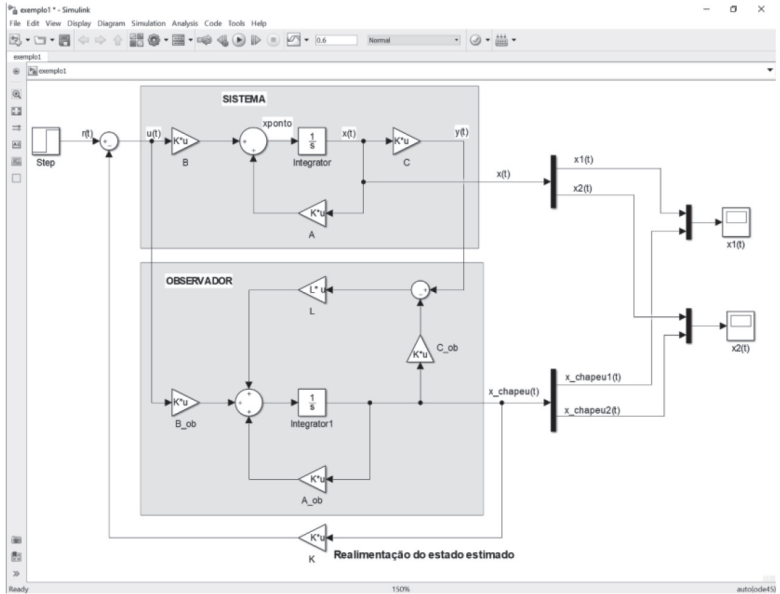
Refleta

Obtivemos como resultados dos projetos do controlador e observador realizados no exemplo anterior duas matrizes de ganhos K e L, as quais devem atender aos requisitos do projeto. Os resultados para as matrizes em malha fechada, respectivamente, ($\bar{A} = A - BK$ e $\tilde{A} = A - LC$) são precisos?

Para finalizar, implementaremos o projeto completo do controlador baseado em observador por meio do Simulink e verificaremos a ação de controle e estimação de estados.







Abra o Simulink e desenhe o diagrama de blocos da Figura 2.3, conforme a Figura 2.6.

Figura 2.6 | Diagrama de blocos do controlador baseado em observador no Simulink



Fonte: Matlab R2015a.

Não é necessário inserir as caixas em destaque, apenas os blocos que compõem o sistema. Os seguintes blocos são utilizados:

- Ganho: Math Operations → Gain :  .
- Integrador: Continuous → integrator:  .
- Degrau: Sources → Step  .
- Multiplexador: Signal Routing → Mux  .
- Demultiplexador: Signal Routing → Demux:  .
- Osciloscópio Sinks → Scope  .

- Ganho: Math Operations → Sum 

As configurações a seguir devem ser feitas:

1. Alterar o tempo de simulação para 0,6 segundos:

Figura 2.7 | Ajuste do tempo de simulação



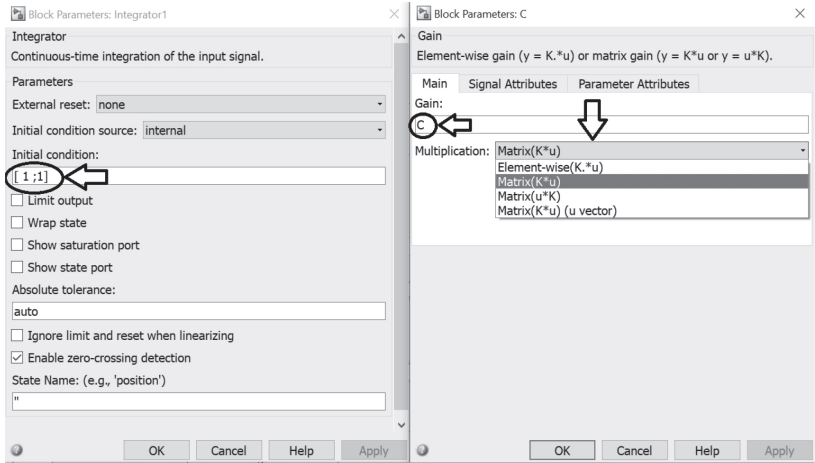
Fonte: Matlab R2015a.

2. Alterar a condição inicial do observador para $\hat{x}_0 = [1 \ 1]^T$, clicando duas vezes no bloco correspondente ao "Integrator1" da Figura 2.6, como mostra a Figura 2.8(a). Esse ajuste serve para verificar a dinâmica do observador até que ele atinja o valor real dos estados do sistema.
3. Alterar os valores dos ganhos e o tipo da sua multiplicação, conforme Figura 2.8 (b). Lembrando que você pode digitar a matriz diretamente no campo *Gain*, exemplo: [1;0], ou indicar o nome da variável que está declarada no *Workspace*. Como utilizaremos os exemplos anteriores desta seção, ao rodar o Simulink em sequência, todas as matrizes do espaço de estado já estarão declaradas.

Figura 2.8 | Ajuste da condição inicial (a) do observador e (b) do bloco de ganho

(a)

(b)



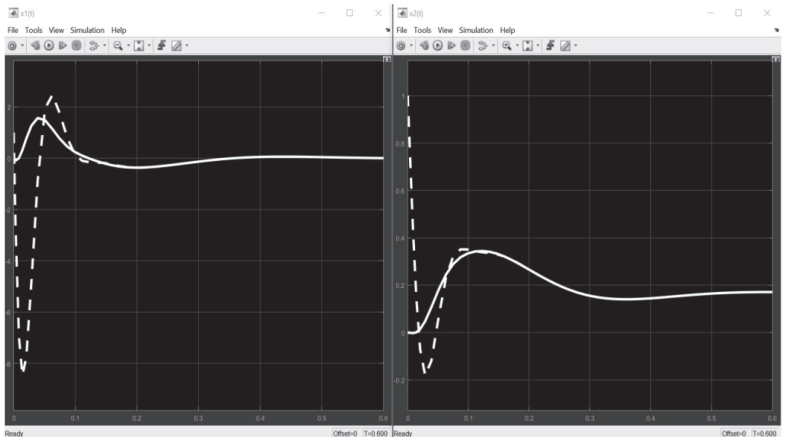
Fonte: Matlab R2015a.

Agora basta simular o sistema. Os resultados podem ser vistos clicando-se duas vezes nos blocos Scope, conforme Figura 2.9.=

Figura 2.9 | Resultado do bloco Scope para simulação no Simulink para (a) resposta dinâmica de $x_1(t)$ e para (b) resposta dinâmica de $x_2(t)$

(a)

(b)

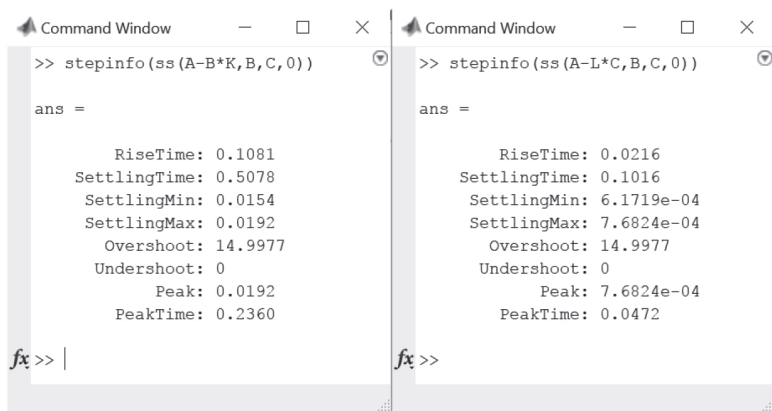


Fonte: Matlab R2015a.

Na Figura 2.9 as curvas contínuas correspondem aos estados do sistema real e as curvas tracejadas correspondem aos estados estimados. Uma vez que a condição inicial do estado estimado foi configurada não nula, ou seja, diferente do estado real, podemos observar que rapidamente o estado estimado alcança o estado real $x_1(t)$ na Figura 2.9 (a) e $x_2(t)$ na Figura 2.9 (b).

Por inspeção das curvas podemos observar que o tempo de acomodação de $x_2(t)$, que corresponde também à saída do sistema, está em torno de 0,5s, conforme foi especificado ao controlador. Já a curva tracejada alcança a curva contínua em $t = 0,1s$, ou seja, esse é o tempo de assentamento imposto ao observador na etapa de projeto. Detalhes sobre esses valores e o sobressinal das curvas podem ser obtidos utilizando-se o comando *stepinfo* no *Command Window*, conforme Figura 2.10.

Figura 2.10 | Verificação dos requisitos de projeto



Fonte: Matlab R2015a.



Assimile

Para verificarmos a controlabilidade de um sistema utilizando o Matlab, basta utilizarmos os comandos `ctrb(A,B)` e `rank`. Já a observabilidade pode ser obtida por meio dos comandos `obsv(A,C)` e `rank`.

Para realizar o projeto do controlador de estados, o comando que pode ser usado para sistemas SISO é o `acker(A,B,P)`. Uma vez que os projetos de controlador e observador são duais, o observador pode ser obtido

também por meio do comando *acker*, porém as entradas devem ser duais, ou seja, $\text{acker}(A',C',P)$.



Pesquise mais

Abordamos nesta seção o projeto em espaço de estados apenas para sistemas SISO por meio do comando *acker*. Para sistemas MIMO, o comando *place* deve ser utilizado. Pesquise mais a respeito de sua utilização digitando *help place* no *Command Window* do *Matlab* ou então visite o link disponível em: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/place.html>. Acesso em: 4 dez. 2017.

Sem medo de errar

Uma nova planta industrial alimentícia necessita que o controle completo (observador e controlador) dos fornos a gás sejam projetados e validados computacionalmente. Você, como integrante da equipe de projeto, ficou encarregado de realizar essa tarefa.

Os requisitos para o controlador são: *overshoot* máximo de 5%, para que um sobressinal elevado não queime ou estrague o alimento, e tempo de acomodação de 10 minutos, para que não haja choque térmico nele. O polo não dominante do sistema deve responder sem oscilar 10 vezes mais rápido que os demais para não interferir na resposta.

Para o observador, os requisitos são: resposta 10 vezes mais rápida que a do controlador e um *overshoot* máximo de 5%, para que não resulte em ações de controle amplificadas e danifique os alimentos e, também, para que o estado estimado alcance rapidamente o estado real do sistema.

O modelo dinâmico do aquecedor, disponibilizado pelo fabricante, é dado pelas equações (2.44) e (2.45).

Figura 2.11 | Diagrama de blocos de um aquecedor a gás



Fonte: Nise (2009).

$$G_H(s) = \frac{1}{(s+0,4)(s+0,8)} \left(\frac{^{\circ}F}{ft^3/min} \right) \rightarrow \text{Função de transferência do aquecedor (2.44)}$$

$$G_V(s) = \frac{5}{s+5} \left(\frac{ft^3/min}{psi} \right) \rightarrow \text{Função de transferência da válvula de gás (2.45)}$$

Para que o sistema atenda aos requisitos, uma das possibilidades de projeto é utilizar um controlador baseado em observador do espaço de estados, conforme vimos nesta segunda unidade. Para realizar esse projeto, empregaremos o software Matlab, a fim de facilitar a sua implementação e diminuir a probabilidade de erro. A seguinte sequência de comandos pode então ser utilizada:

```
clc %limpa a tela do Command Window
clear all %Limpa as variáveis do Workspace
close all %Fecha todas as janelas/gráficos
```

```
s = tf('s'); %declara s como função de transferência (FT)
```

```
Gh = 1/((s+0.4)*(s+0.8)); %FT do aquecedor
```

```
Gv = 5/(s+5); %FT da válvula de gás
```

```
G = Gh*Gv; %FT do processo -> Gh e Gv estão em série
```

```
[num,den] = tfdata(G,'v'); %obtem os dados da FT e retorna o numerador e denominador como vetores
```

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); %transforma de FT para espaço de estados
```

```
UP = 5; %declara a % de sobressinal (iguais para controlador e observador)
```

```
Ts_c = 10; %declara o tempo de acomodação do controlador
```

```
Ts_o = Ts_c/10; %declara o tempo de acomodação do observador 10x mais rápido que do controlador
```

```
%Verificando a controlabilidade
```

```
CO = ctrb(A,B);
```

```
po = rank(CO)
```

```
%Início do projeto do controlador
```

```
z = -log(UP/100)/sqrt(pi^2+(log(UP/100)^2)); %calcula o amortecimento em função do sobressinal
```

```
wn = 4/(z*Ts_c); %calcula a frequência natural de oscilação em função do amortecimento e do tempo de acomodação
```

```
[num,den] = ord2(wn,z); % obtém um sistema com amortecimento e frequência desejados
```

```
P = roots(den); %calcula 2 polos do sistema desejado
```

```
P(3) = 10*real(P(1)); %terceiro polo 10x mais rápido que os demais
```

```
K = acker(A,B,P) %projeta o controlador para realimentação de estados
```

```
%Verificando a observabilidade
```

OB = obsv(A,C); %calcula a matriz de observabilidade OB

p = rank(OB) %calcula o posto da matriz OB

% Início do projeto do observador

z = -log(UP/100)/sqrt(pi^2+(log(UP/100)^2)); %calcula o amortecimento em função do sobressinal

wn = 4/(z*Ts_o); %calcula a frequência natural de oscilação em função do amortecimento e do tempo de acomodação

[num,den] = ord2(wn,z); % obtém um sistema com amortecimento e frequência desejados

P = roots(den); %calcula os polos do observador

P(3) = 10*real(P(1)); %terceiro polo 10x mais rápido que os demais

Lt = acker(A',C',P); %projeta o observador

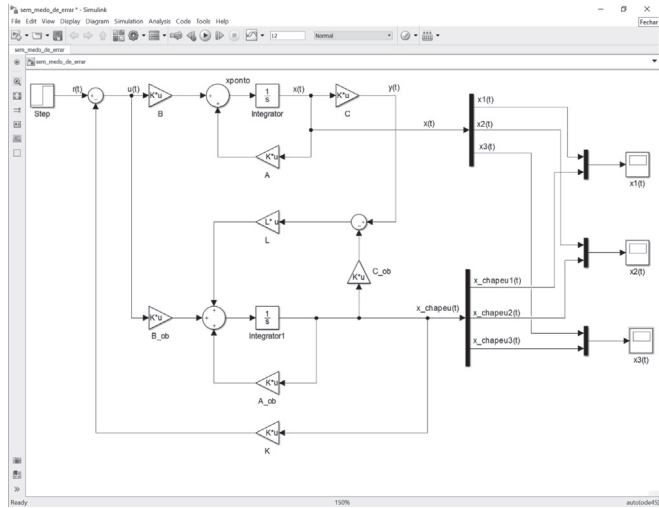
L = Lt' % calcula a matriz de ganhos do observador para o sistema original

Para validar esse projeto de forma simplificada, podemos fazer a implementação gráfica do sistema, ou seja, implementar o diagrama de blocos aproveitando as variáveis declaradas no *Workspace*. Para verificar as respostas dinâmicas das variáveis de estados, utilizaremos então o Simulink.

Um diagrama de blocos similar ao da Figura 2.6 deve ser montado. Após a montagem, conforme a Figura 2.12, você pode salvar e adicionar o comando run ao final do script para simular o diagrama de blocos automaticamente run('sem_medo_de_erro.slx') ou rodar manualmente. No bloco "Integrator1" uma condição inicial deve

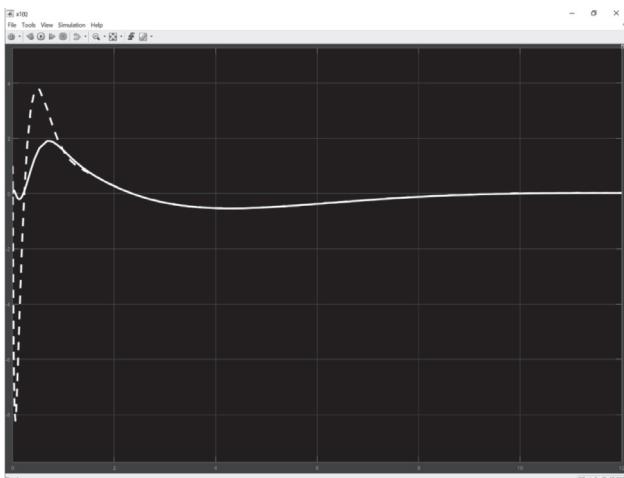
ser definida para o observador. Você pode testar diversos valores, mas, para os resultados gráficos aqui mostrados, vamos utilizar: $\hat{X}_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$. A resposta dinâmica dos estados reais e estimados podem ser vistos nas Figuras 2.13, 2.14 e 2.15.

Figura 2.12 | Diagrama de blocos do controlador baseado em observador



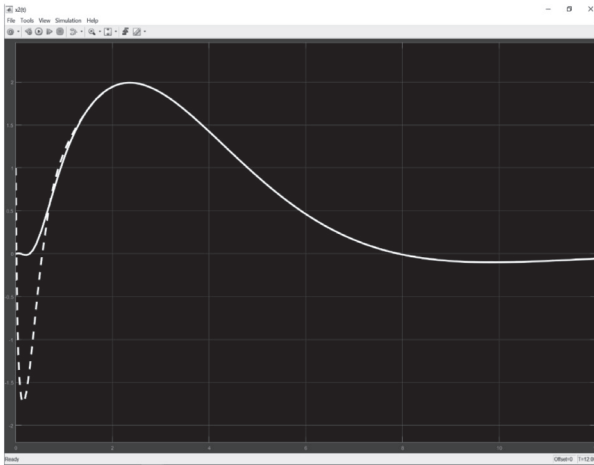
Fonte: Matlab R2015a.

Figura 2.13 | Resposta dinâmica do estado $x_1(t)$ real e observado



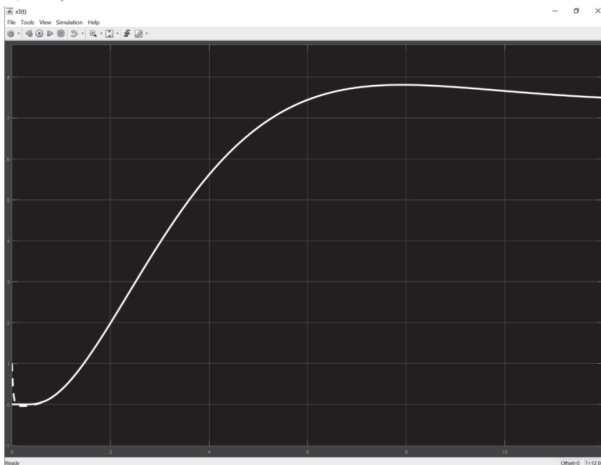
Fonte: Matlab R2015a.

Figura 2.14 | Resposta dinâmica do estado $x_2(t)$ real e observado



Fonte: Matlab R2015a.

Figura 2.15 | Resposta dinâmica do estado $x_3(t)$ real e observado



Fonte: Matlab R2015a.

Em linha contínua podemos ver a resposta dos estados do sistema real e em tracejado a resposta do observador. Observe que os requisitos de projeto foram atendidos, os estados reais atingem o regime permanente em até 10 minutos, enquanto o observador atinge a dinâmica do estado real em até 1 minuto, ou seja, tempo em que as linhas contínua e tracejada coincidem.

Validados os resultados, temos então os ganhos do controlador e observador projetados, os quais podem ser implementados para os fornos a gás da nova plana alimentícia.

$$K = [-1,4 \quad -2,7840 \quad -0,2562]$$

$$L = \begin{bmatrix} 106,3489 \\ 17,6232 \\ 8,3600 \end{bmatrix}$$

Avançando na prática

Controle do ângulo de inclinação das pás de uma turbina eólica

Descrição da situação-problema

Em sistemas de geração eólica com condições de vento variável, a otimização da geração de energia é feita por meio do controle por realimentação de estados para variar o ângulo de inclinação das pás da turbina.

Suponha que você trabalha em uma unidade geradora de energia eólica cujas turbinas necessitam ser controladas. O modelo linearizado de uma turbina com três pás, raio de 15m, trabalhando com velocidade do vento de 12 m/s e gerando 220V, é dado pelo fabricante como:

$$G = \frac{-20,273 \cdot 10^6 s - 6,4472 \cdot 10^9}{s^4 + 31,89s^3 + 1207,1s^2 - 7076,5s - 8566} \text{ rad/W.}$$

Todas as variáveis de estados são medidas por meio de sensores. O supervisor solicitou que os seguintes requisitos de projeto sejam atendidos:

- Controlador – Sobressinal de 10% e tempo de acomodação de 0,2 segundos para entrada degrau – Esses valores, segundo ele, estão relacionados à rapidez com que o vento muda de velocidade e direção, portanto o controlador deve responder rapidamente e com um sobressinal pequeno para não desgastar as partes mecânicas da turbina e das pás.

Resolução da situação-problema

Para que a turbina eólica tenha uma dinâmica de resposta adequada a partir de mudanças das condições de operação do vento e otimização da potência gerada, realizaremos o projeto de realimentação de estados conforme estudamos ao longo da unidade.

A partir dos requisitos solicitados pelo supervisor da usina de geração eólica, uma sequência de comandos pode ser implementada no Matlab para obter os ganhos do controlador de estados, uma vez que o fabricante disponibilizou a função de transferência do sistema.

O seguinte script pode ser implementado:

```
clc
```

```
clear all
```

```
close all
```

```
num = [0 0 0 -20.273e6 -6.4472e9];
```

```
den = [1 31.89 1207.1 -7076.5 -8566];
```

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
```

```
rank(ctrb(A,B)) %verifica a controlabilidade
```

```
UP = 10; Ts = 0.2; %requisitos de projeto
```

```
z = -log(UP/100)/sqrt(pi^2+(log(UP/100)^2)); %calcula o  
amortecimento em função do sobressinal
```

```
wn = 4/(z*Ts); %calcula a frequência natural de oscilação em função  
do amortecimento e do tempo de acomodação
```

```
[num,den] = ord2(wn,z);
```

```
P = roots(den); %calcula 2 polos do sistema desejado
```

$P(3:4) = 10 \cdot \text{real}(P(1))$ %terceiro e quarto polos 10x mais rápido que os demais

$$K = \text{acker}(A,B,P)$$

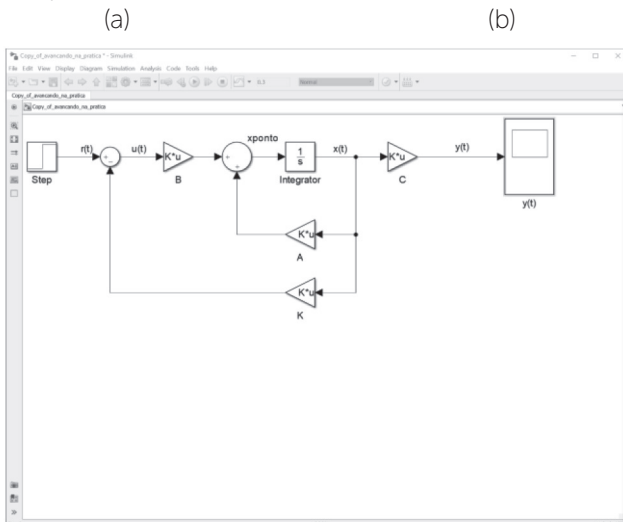
Primeiramente verificamos a controlabilidade do sistema por meio do comando $\text{rank}(\text{ctrb}(A,B))$. Como o resultado é 4, o sistema é controlável.

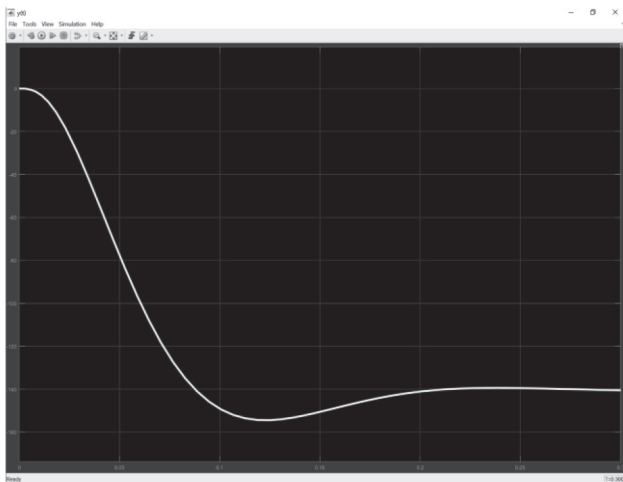
Realizando o projeto do controlador via Matlab, para os polos que apresentam comportamento dinâmico de acordo com os requisitos, obtemos a seguinte matriz de ganhos do controlador:

$$K = [408,11 \quad 55,94 \cdot 10^3 \quad 2,065 \cdot 10^6 \quad 45,793 \cdot 10^6].$$

Para validar esse projeto, simularemos a resposta do sistema para uma entrada degrau, por meio do Simulink. O diagrama de blocos é montado de acordo com a Figura 2.16(a). Para adicionar mais entradas ao Scope, basta clicar com o botão direito, em seguida Signals&Ports → Number of Inputs → More. O resultado do bloco Scope para uma simulação de 0,5 segundos pode ser visto na Figura 2.16 (b).

Figura 2.16 | Simulação de 0,5 segundos do sistema dinâmico: (a) diagrama de bloco do sistema; (b) resposta dinâmica da saída controlada





Fonte: Matlab R2015a.

Como podemos observar na Figura 2.16 (b), a resposta do sistema atinge o regime permanente de acordo com o que foi requisitado, ou seja, 0,2 segundos com sobressinal inferior a 10%.

A fim de verificar os valores exatos, bem como o sobressinal e outros parâmetros, basta aplicar o comando `stepinfo(ss(A-B*K,B,C,0))` para verificar a resposta do sistema controlado.

A partir desses valores de ganho, o projeto foi validado para os valores de K obtidos e o controle das pás pode ser implementado na turbina eólica da planta geradora, resultando em polos que permitem uma resposta com as características desejadas pelo supervisor do projeto.

Faça valer a pena

1. É possível verificar a controlabilidade e observabilidade, bem como realizar os projetos de controlador e observador de estados, por meio do software Matlab. Esse procedimento evita cálculos manuais massivos e diminui as chances de erro de projeto.

Sobre o projeto de controle de sistemas em espaço de estados no software Matlab, relacione os comandos a seguir com suas respectivas definições.

- | | | | |
|----|---|------|---|
| A. | $CO = \text{ctrb}(A,B)$ | I. | Calcula o posto de uma matriz M . |
| B. | $[A,B,C,D] = \text{tf2s-}$
$\text{s}(\text{num},\text{den})$ | II. | Calcula a matriz de observabilidade. |
| C. | $OB = \text{obsv}(A,C)$ | III. | Projeta o controlador por alocação de polos apenas para sistemas SISO. |
| D. | $p = \text{rank}(M)$ | IV. | Calcula a matriz de controlabilidade. |
| E. | $K = \text{acker}(A,B,P)$ | V. | Converte uma função de transferência para a representação em espaço de estados na forma canônica controlável. |

- a) A – IV, B – V, C – II, D – I, E – III.
 b) A – II, B – V, C – IV, D – I, E – III.
 c) A – III, B – IV, C – V, D – II, E – I.
 d) A – I, B – III, C – IV, D – V, E – II.
 e) A – I, B – II, C – III, D – IV, E – V.

2. Devido à similaridade da definição de controlabilidade com a definição de observabilidade, os problemas de projeto do controlador e observador são considerados duais, ou seja, idênticos. Essa propriedade é denominada princípio da dualidade e pode ser aplicada para projeto do observador de estados.

Dado um sistema dinâmico na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

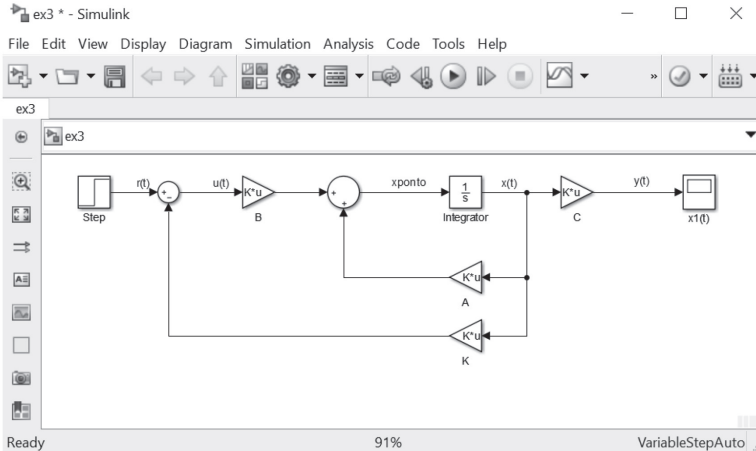
Se esse sistema for observável, qual dos comandos a seguir podemos utilizar para projetar um observador de estados por meio do Matlab?

- a) $\text{acker}(A,B,P)$.
 b) $\text{obsv}(A,C)$.
 c) $\text{ctrb}(A',C')$.
 d) $\text{acker}(A,C,P)$.
 e) $\text{acker}(A',C',P)$.

3. Após o projeto de um controlador e/ou observador de estados, diversas simulações podem ser realizadas para validar o controlador obtido, ou seja, verificar se os requisitos de projeto estão sendo atendidos conforme as especificações.

Analise o diagrama de blocos da Figura 2.17.

Figura 2.17 | Diagrama de blocos sistema dinâmico – Questão 3



Fonte: Matlab R2015a.

Podemos afirmar que a Figura 2.17 corresponde à seguinte opção:

- a) Observador de estados.
- b) Controlador por realimentação de estados.
- c) Controlador baseado na realimentação do estado estimado.
- d) Apenas o sistema, sem controle.
- e) Controlador no domínio da frequência.

Referências

ARRABAÇA, Devair Aparecido, GIMENEZ, Salvador Pinillos. **Conversores de Energia Elétrica CC/CC para Aplicações em Eletrônica de Potência** – Conceitos, Metodologia de Análise e Simulação. São Paulo: Érica, 2013.

ATZINGEN, Gustavo Voltani von. **Simulação, controle e automação de um forno tipo túnel utilizando tecnologia embarcada**. 2017. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia de Alimentos) – Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, Pirassununga. 2017. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/74/74132/tde-14062017-105834/>>. Acesso em: 16 out. 2017.

KOLMAN, Bernard, HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LUENBERGUER, D. G. Observing de State of a Linear System. **IEEE Transactions on Military Eletronics**, v. MIL-8, abr. 1964, p. 74-80.

MATHWORKS. **Matlab: Simulink User's Guide**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/simulink/sLusing.pdf>. Acesso em: 29 set. 2017.

MATLAB.EXE: Matrix Laboratory. Versão R2015a. [S.l.]: MathWorks, 2015. Software. **Configuração mínima**: Processador Intel ou AMD x86 com suporte a instruções SSE2, 1GB de espaço no HD, 2GB de memória RAM.

NISE, Noman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Introdução a sistemas de controle digital

Convite ao estudo

O avanço tecnológico relacionado ao desenvolvimento de microcomputadores e microcontroladores permitiu a análise, o monitoramento e o controle de sistemas dinâmicos por meios digitais. O computador pode ser programado para fornecer a saída de forma que o desempenho do sistema seja o desejado, podendo manipular diversas entradas simultaneamente, conferindo a ele uma característica de controle multivariável.

Computadores processam sinais de forma numérica, ou seja, por meio de valores discretos. Com isso é necessário que os sinais de saída medidos pelos sensores sejam amostrados e posteriormente convertidos para um sinal digital, ou seja, para a linguagem computacional composta por bits. A amostragem é realizada pelo amostrador-segurador, e a conversão para sinal digital é feita por um conversor A/D. Por sua vez, a saída que é enviada ao processo a ser controlado deve ser convertida da forma digital para a analógica mediante um conversor D/A.

Dentre as vantagens do controle digital temos: menores custos, maior sensibilidade de medição, redução de ruídos e flexibilidade para posteriores alterações no projeto.

Assim, nesta unidade veremos uma introdução aos sistemas de controle digital, como é a estrutura da malha de realimentação, onde é inserido o computador e como é feita a amostragem do sinal. Na primeira seção aprenderemos como modelar o computador digital, a transformada Z e a transformada Z inversa, as quais fazem o paralelo entre o universo analógico e o digital e vice-versa.

Em seguida veremos os fundamentos de função de transferência discreta, polos e zeros no domínio da transformada Z, procedimento este que tem o objetivo de discretizar sistemas analógicos e que é muito utilizado para a implementação digital de controladores projetados no domínio de Laplace.

Por fim veremos como todas essas informações podem ser aplicadas de forma rápida e simples com recursos computacionais, por meio do Control System Toolbox do Matlab.

Com os avanços da tecnologia, a área da saúde não poderia ficar de fora. Nesta aplicação, o objetivo é prolongar a vida de doentes ou melhorar a qualidade de vida das pessoas e até mesmo auxiliar em cirurgias e facilitar o trabalho dos profissionais da saúde. Um exemplo disso são os robôs utilizados em laparoscopias, que tornam o procedimento minimamente invasivo, sendo constituídos por microcâmeras e instrumentos como bisturi e tesouras. Outra aplicação de robótica na medicina são as pernas robóticas, controladas por um *joystick* e alimentadas por uma bateria. Na cardiologia especificamente, um dispositivo de assistência ventricular elétrico trabalha em paralelo com o coração humano para auxiliar no bombeamento de sangue em pessoas que possuem insuficiência cardíaca.

Com base nisso, suponha que você seja membro de uma equipe de projetistas em uma empresa de bioengenharia e necessite implementar um controlador digital para o dispositivo de assistência ventricular elétrico. Muitas incógnitas estão presentes. Por exemplo, não se sabe se é necessário um controlador auxiliar, mas sabe-se que o sistema se encontra no domínio contínuo. Nesta unidade veremos todos os caminhos necessários para resolver esses problemas relacionados à análise de sistemas de controle digitais.

Ficou curioso? Então mãos à obra!

Seção 3.1

Introdução a sistemas dinâmicos discretos

Diálogo aberto

Olá! Nesta primeira seção da Unidade 3 serão apresentados os princípios de sinais e sistemas discretos, onde é inserido o computador digital que realiza o controle de sistemas modernos dentro da malha de realimentação dos processos. Veremos uma comparação entre sistemas de controle analógicos e sistemas de controle digitais e quais são as etapas e os elementos que os diferem. Por exemplo, podemos citar a presença de conversores digital/analógico e analógico/digital que fazem a interação física do processo contínuo a ser controlado e o computador digital. Outro exemplo é a necessidade da amostragem do sinal de realimentação da malha, ou seja, a transformação da variável monitorada para uma linguagem computacional.

Para as análises e os projetos no domínio discreto, veremos os conceitos de transformada Z e transformada Z inversa – que permitem a interação entre os mundos analógico e digital – e sua relação com a variável s de Laplace – que representa o domínio da frequência contínua.

Para entender estes conceitos, suponha que você seja integrante de uma equipe de uma empresa de biotecnologia que fabrica dispositivos de assistência ventricular elétricos, os quais são responsáveis pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com um coração fraco de pacientes debilitados.

O objetivo da sua equipe é implementar um controlador digital para este equipamento. Inicialmente foi solicitado que você verificasse o sinal de resposta ao degrau deste sistema para avaliar se é necessário ou não um controle auxiliar. O principal requisito é que o sistema em malha fechada tenha erro de regime permanente nulo, uma vez que a saída do sistema é a pressão sanguínea impulsionada pelo aparelho, e esta deve ser precisa, de modo que não traga consequências negativas ao paciente.

Uma vez que você não dispõe neste momento da modelagem dinâmica do sistema, foi solicitado um teste de laboratório, e a equipe forneceu a equação de saída discreta da resposta ao degrau obtida por meio de testes em bancada.

Como você faria a análise do sinal neste caso?

Vamos descobrir a seguir!

Bons estudos!

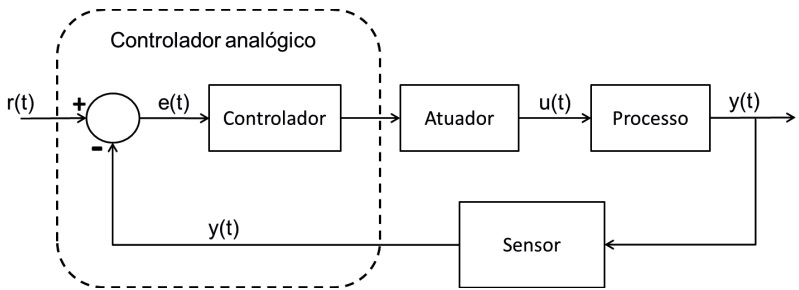
Não pode faltar

O avanço tecnológico relacionado ao desenvolvimento de computadores e microcontroladores permitiu o monitoramento e o controle de sistemas dinâmicos por meios digitais. Dentre as funções que o computador pode executar temos: a supervisão – por exemplo: monitoramento de parâmetros e variáveis, que ocorre externamente à malha de realimentação – e o controle – por exemplo: um controlador PID digital (controlador proporcional integral derivativo digital), que ocorre interno à malha de realimentação.

Como resultado, os computadores digitais possuem diversas vantagens em relação aos sistemas analógicos, entre elas: maior sensibilidade de medição, redução de ruídos e flexibilidade para posteriores alterações no projeto.

Para entender o que é um sistema de controle digital, considere o sistema da Figura 3.1, que mostra uma malha de controle analógico, conforme você já conhece das disciplinas de modelagem de sistemas e teoria de controle moderno.

Figura 3.1 | Malha de realimentação com controlador analógico



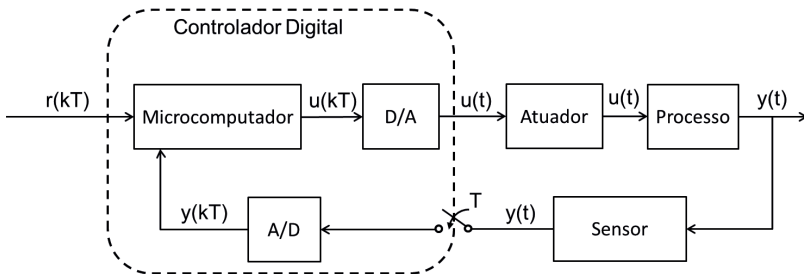
Fonte: elaborada pela autora.

Neste sistema o controlador é analógico, ou seja, contínuo no tempo. A variável de saída $y(t)$ do processo é medida por um sensor que converte a grandeza física que está sendo medida em um sinal elétrico, por exemplo, e é comparada a uma referência $r(t)$ de mesma grandeza. A diferença entre o sinal de referência $r(t)$ e a variável de saída $y(t)$ constitui o erro $e(t)$ entre o sinal atual e o sinal desejado, o qual é aplicado a um controlador que gerará um sinal contínuo no tempo. Este, por sua vez, será aplicado à entrada do processo por meio de um atuador.

Controladores analógicos geralmente são implementados por dispositivos analógicos como resistores, indutores, capacitores e amplificadores operacionais, utilizados para realizar operações de integração, derivação e somatórios. Para o caso de operações mais complexas ou não lineares, o uso de controladores analógicos se torna limitante.

Para contornar este problema, os controladores digitais são empregados, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 | Malha de realimentação com controlador digital



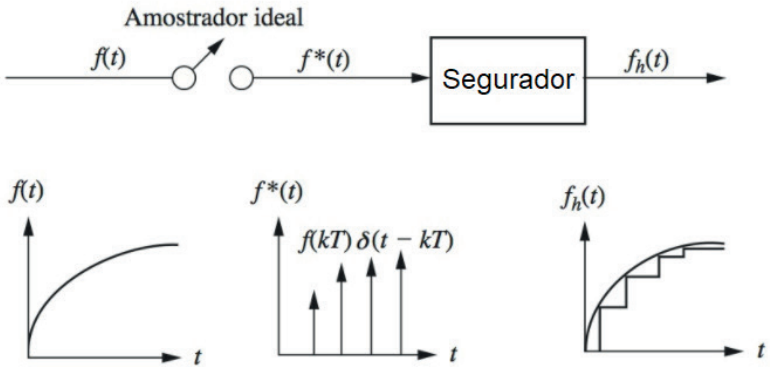
Fonte: elaborada pela autora.

Neste sistema, o controlador é digital, ou seja, baseado em sinais discretos. A malha de realimentação digital da Figura 3.2 envolve o processo de amostragem do sinal de saída $y(t)$ periodicamente com período T .

Um amostrador é basicamente uma chave que se fecha a cada T segundos por um breve instante de tempo. Este procedimento gera uma sequência de pulsos com amplitude de acordo com o valor instantâneo do sinal no momento em que a chave é fechada. Para manter o valor deste pulso até o instante do próximo valor amostrado, é utilizado um segurador de ordem zero (*Zero Order Holder – ZOH*). Um exemplo de sinal amostrado pode ser visto na Figura 3.3, onde o sinal original pode ser visto em linha contínua e o sinal amostrado pode ser visto em forma de escada com degraus periódicos.

O sinal amostrado, ainda analógico, passa por um conversor analógico/digital (A/D), onde é transformado em um sinal digital composto por n bits $y(kT)$. Este sinal é lido e comparado com um valor de referência digital $r(kT)$ por um microcomputador ou microcontrolador que vai realizar operações numéricas e gerar um sinal digital de saída $u(kT)$ correspondente a uma ação de controle que deverá ser aplicada ao processo. Este sinal digital é então convertido de volta a um sinal analógico por meio de um conversor digital/analógico (D/A) que fornecerá um sinal contínuo $u(t)$ a ser aplicado no processo pelo atuador.

Figura 3.3 | Amostragem de um sinal



Fonte: Nise (2009, p. 583).

Na Figura 3.3 podemos ver que a amostragem de um sinal é composta por duas etapas: um amostrador ideal e um segurador de ordem zero, conforme mencionado anteriormente. Cada uma dessas etapas pode ser modelada por equações, conforme veremos a seguir.

O amostrador ideal é representado por uma sequência de funções Delta de Dirac, ou simplesmente por um trem de pulsos unitários, conforme pode ser visto na equação (3.1), onde o sinal de saída é dado por $f^*(t)$.

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \quad (3.1)$$

Já o segurador de ordem zero possui a função de reter o último valor amostrado de $f(t)$ até o próximo pulso, ou seja, fornece uma aproximação em escada para $f(t)$ e é representado por uma sequência de funções degrau com amplitude de $f(t)$ no instante da amostragem, ou seja, $f(kT)$, conforme equação (3.2).

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.2)$$

Com isso, temos que o amostrador ideal e o segurador de ordem zero juntos compõem o modelo conhecido como amostrador de ordem zero, o qual modela o computador digital.

De posse de um sistema contínuo, seja ele no domínio do tempo (t) ou frequência (s), para que possamos analisá-lo, tratá-lo e projetar um controle utilizando ferramentas digitais, vamos utilizar uma ferramenta matemática chamada transformada Z.

Ela é usada de forma semelhante à transformada de Laplace, a qual utilizamos anteriormente para passar um sistema no domínio do tempo para o domínio da frequência, resultando em um sistema polinomial de fácil análise e manipulação.

O objetivo agora é que as informações da amostragem sejam inseridas na representação dos sistemas discretos, e para isso a transformada Z será utilizada para passar um sistema no domínio do tempo para o domínio da variável discreta 'z'.

Para um sinal amostrado f(t), a equação que define a transformada Z é dada por:

$$Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad (3.3)$$



Exemplificando

Obtenha a transformada Z das funções a seguir:

- a) $x(t) = u(t) = 1$ (degrau unitário)
- b) $x(t) = e^{-at}$
- c) $x(t) = t$ (rampa unitária)

Resolução: para todos os itens, vamos aplicar a equação (3.3)

- a) $x(t) = u(t) = 1$ (degrau unitário)

$$Z\{x(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}, \text{ como } x(kT) = 1:$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Observe que a função $X(z)$ representa uma série geométrica do tipo:

$$f(r) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \quad (3.4)$$

cuja função é dada por:

$$f(r) = \frac{a}{1-r} \quad (3.5)$$

se $|r| < 1$.

No caso do exemplo, podemos associar $a = 1$ e $r = z^{-1}$, portanto:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (3.6)$$

b) $x(t) = e^{-at}$

$$Z\{x(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}, \text{ como } x(kT) = e^{-akT}:$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= 1 + (e^{aT} z)^{-1} + (e^{aT} z)^{-2} + (e^{aT} z)^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Esta série geométrica é a mesma do caso a). Fazendo $a = 1$ e $r = (e^{aT} z)^{-1}$, podemos escrever:

$$X(z) = \frac{1}{1 - (e^{aT} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3.7)$$

c) $x(t) = t$ (rampa unitária)

$$Z\{x(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}, \text{ como } x(kT) = kT :$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \cdot z^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$$

Agora vamos manipular este resultado para obtermos uma série similar à da equação (3.3):

Primeiro multiplicamos $X(z)$ por z :

$$X(z) = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \Rightarrow zX(z) = T(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots)$$

Agora vamos subtrair por $X(z)$, ou seja, o resultado será

$$zX(z) - X(z) = (z - 1)X(z) :$$

$$zX(z) - X(z) = T(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) - T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots)$$

$$(z - 1)X(z) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots)$$

Conforme vimos no item a) $(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \frac{z}{z - 1}$, então, substituindo e isolando $X(z)$, temos o resultado:

$$X(z) = T \frac{z}{(z - 1)^2} \quad (3.8)$$



Pesquise mais

Uma propriedade da transformada Z muito utilizada é a propriedade da linearidade, que pode ser vista a seguir:

$$Z\{af(t)\} = aF(z)$$

$$Z\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$$

Outras propriedades da transformada Z podem ser vistas na seguinte referência:

NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. cap. 13, p. 565, tabela 13.2.

Sempre que desejarmos analisar ou conhecer o comportamento de um processo no domínio do tempo contínuo ou no do tempo discreto, devemos utilizar a transformada Z inversa.

Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é $F(s)$, então a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ corresponde a $f(t)$, ou seja, o resultado é único. A transformada Z de uma função $f(t)$ é aplicada a uma função amostrada $f(kT)$, e como resultado temos $F(z)$; já a transformada Z inversa de $F(z)$ será a mesma função $f(kT)$, mas não necessariamente a mesma $f(t)$, pois esta última dependerá do período de amostragem T .

Aqui vamos estudar o método da expansão em frações parciais, semelhante ao que utilizamos para a transformada inversa de Laplace.

Este método consiste em fatorar a função $F(z)$ em termos simples, de forma que a transformada Z inversa possa ser obtida pela tabela. Dentre os termos que podem ser obtidos, temos os da equação (3.9):

$$X(z) = \frac{Az}{(z-1)} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{(z-e^{-aT})} + \frac{Dz}{(z^2 - 2z\alpha + 1)} + \dots$$

(3.9)

Por meio da tabela podemos obter a expressão de $X(z)$ no domínio do tempo discreto:

$$x(kT) = A + Bk + Ce^{-akT} + D \frac{\sin \omega kT}{\sin \omega T} + \dots \quad (3.10)$$

Se o sistema possui polos de multiplicidade n , assim como no caso de Laplace, a fatoração resulta em:

$$(z - z_i)^n (z - z_j)^{n-1} \dots (z - z_i)^2 (z - z_i) \quad (3.11)$$



Exemplificando

Obtenhamos a transformada Z inversa para os seguintes casos, sabendo que o período de amostragem $T = 1$.

$$\text{a) } F(z) = \frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)}$$

$$\text{b) } F(z) = \frac{0,6z}{z^2 - 1,7z + 1}$$

$$\text{c) } F(z) = \frac{z}{(z - 1)^2 (z - 2)}$$

Resolução: vamos decompor os casos em frações parciais e obter a transformada Z inversa por meio da tabela:

$$\text{a) } F(z) = \frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{Az}{(z - 0,5)} + \frac{Bz}{(z - 0,7)}$$

A dificuldade se encontra em obter A e B. Para isso vamos reduzir as duas frações ao mesmo denominador:

$$\frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{Az}{(z - 0,5)} + \frac{Bz}{(z - 0,7)} = \frac{Az(z - 0,7) + Bz(z - 0,5)}{(z - 0,5)(z - 0,7)}$$

$$\frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{Az^2 - 0,7Az + Bz^2 - 0,5Bz}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{z^2(A + B) - z(0,7A + 0,5B)}{(z - 0,5)(z - 0,7)}$$

Agora vamos igualar o numerador para obter A e B:

$$\rightarrow 0,5z = z^2(A+B) - z(0,7A+0,5B) \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ 0,7A+0,5B=0,5 \Rightarrow -0,7B+0,5B=0,5 \end{cases}$$

$$0,5 - 0,2B = 0 \Rightarrow 0,2B = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} B = 2,5 \\ \therefore A = -2,5 \end{cases}$$

Substituindo o resultado temos:

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-0,5)(z-0,7)} = \frac{-2,5z}{(z-0,5)} + \frac{2,5z}{(z-0,7)}$$

A partir da linha 3 da tabela obtemos:

$$f(kt) = 2,5 \cdot 0,7^k - 2,5 \cdot 0,5^k$$

$$\text{b) } F(z) = \frac{0,6z}{z^2 - 1,7z + 1}$$

Neste caso podemos obter diretamente a partir da linha 6 da tabela:

$$f(kT) = \frac{0,6}{\text{sen } \omega T} \text{sen } \omega kT$$

Por comparação temos que $2 \cos \omega T = 1,7$.

Como $T=1$, obtemos ω e conseqüentemente $\text{sen } \omega kT$:

$$\cos \omega = \frac{1,7}{2} \Rightarrow \omega = \cos^{-1}(0,85) = 0,5548 \text{ rad/s}$$

Portanto:

$$f(kT) = 1,4 \text{ sen}(0,5548 k)$$

$$\text{c) } F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Este é um caso especial, em que uma raiz do denominador possui multiplicidade 2.

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{Az}{(z-1)^2} + \frac{Bz}{(z-1)} + \frac{Cz}{(z-2)}$$

Agora vamos obter os coeficientes A, B e C:

$$\frac{Az}{(z-1)^2} + \frac{Bz}{(z-1)} + \frac{Cz}{(z-2)} = \frac{Az(z-2) + Bz \overbrace{(z-1)(z-2)}^{z^2-3z+2} + Cz \overbrace{(z-1)^2}^{z^2-2z+1}}{(z-1)^2(z-2)} =$$

$$\frac{Az^2 - 2Az + Bz^3 - 3Bz^2 + 2Bz + Cz^3 - 2Cz^2 + Cz}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{(B+C)z^3 + (A-3B-2C)z^2 + (-2A+2B+C)z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Igualando o numerador temos:

$$z = (B+C)z^3 + (A-3B-2C)z^2 + (-2A+2B+C)z$$

$$\begin{cases} B+C=0 \Rightarrow B=-C \\ A-3B-2C=0 \Rightarrow A-3B+2B=0 \Rightarrow A-B=0 \Rightarrow A=B \\ -2A+2B+C=1 \Rightarrow -2B+2B-B=1 \Rightarrow B=-1, A=-1, C=1 \end{cases}$$

Substituindo os coeficientes temos:

$$F(z) = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-2)}$$

A partir das linhas 1 e 2 da tabela e sabendo que $T = 1$, obtemos a transformada Z inversa:

$$f(kT) = -k - u(kT) + 2^k$$

Considere a função no tempo contínuo $f(t) = e^{-at}$ para $t > 0$. Aplicando a transformada de Laplace temos:

$$f(t) = e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (3.12)$$

Com polo em $s = -a$

Esta mesma função $f(t)$ discretizada no tempo é dada por $f(kT) = e^{-akT}$. Aplicando a transformada Z obtemos:

$$f(kT) = e^{-akT} \xrightarrow{Z} F(z) = \frac{z}{z - e^{aT}} \quad (3.13)$$

Com polos em $z = e^{aT}$.

Comparando os polos das equações (3.12) e (3.13) temos: $z = e^{-sT}$.

Portanto a relação entre as variáveis s da frequência de Laplace e a variável z do domínio da frequência discreta é dada por:

$$z = e^{sT} \quad (3.14)$$

Sendo T o tempo de amostragem.

A relação da equação (3.14) é particularmente útil na análise da estabilidade discreta, a qual será vista mais adiante.



Assimile

Para realizar o controle de um processo por meio de um computador digital, é necessário discretizar os sinais de realimentação, denominado processo de amostragem. Uma vez no domínio do tempo discreto, o projeto é realizado no domínio da transformada Z, semelhante à transformada de Laplace para sistemas no domínio do tempo contínuo.



Reflita

Por meio da Tabela 3.1 podemos obter a transformada Z de uma função no tempo discreto $f(kT)$ de forma direta para algumas funções comuns.

No entanto, haveria uma maneira de se relacionar a função no domínio Z com sua correspondente função no domínio de Laplace $F(s)$ e vice-versa?

Tabela 3.1 | Tabela parcial de transformada Z

	$f(t)$	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$u(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
4	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{sen } \omega kT$	$\frac{z \cdot \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
5	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{cos } \omega kT$	$\frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
6	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT} \text{sen } \omega kT$	$\frac{ze^{-aT} \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
7	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT} \text{cos } kT$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

Fonte: adaptada de Nise (2009).

Sem medo de errar

Sua equipe é responsável por implementar um controlador digital para dispositivos de assistência ventricular elétricos, os quais são responsáveis pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com o coração de pacientes com insuficiência cardíaca.

Inicialmente foi solicitado que você verificasse o sinal de resposta ao degrau deste sistema para avaliar se é necessário ou não um controle auxiliar, uma vez que o sistema de controle deve responder

de acordo com um sinal de referência na entrada. O principal requisito é que o sistema em malha fechada tenha erro de regime permanente nulo, já que a saída do sistema é a pressão sanguínea impulsionada pelo aparelho, e esta deve ser precisa, de modo que não traga consequências negativas ao paciente.

Uma vez que você não dispõe, a princípio, da modelagem dinâmica do sistema, foi solicitado um teste de laboratório, e a equipe forneceu a equação de saída discreta da resposta ao degrau unitário, que corresponde à pressão auxiliar que o equipamento fornecerá ao paciente para bombear seu sangue, com taxa de amostragem no valor de $T = 0,02$ s, a qual pode ser vista a seguir:

$$y(z) = \frac{1,7 \cdot 10^{-3} z(422z + 299)}{(z-1)(4z^2 - 4,9z + 1)} \quad (3.15)$$

Resolução: para analisar a resposta no tempo, primeiro precisamos aplicar a transformada Z inversa na equação $y(z)$ e obter uma expressão no domínio contínuo.

Vamos utilizar o método por expansão da equação (3.15) em frações parciais. Você pode utilizar o recurso de programação simbólica no Matlab para acompanhar este desenvolvimento, mas aqui mostraremos passo a passo.

$$y(z) = \frac{1,7 \cdot 10^{-3} z(422z + 299)}{(z-1)(4z^2 - 4,9z + 1)} = \frac{4,25 \cdot 10^{-4} z(422z + 299)}{(z-1)(z^2 - 1,225z + 0,25)}$$

$$y(z) = \frac{Az}{(z-1)} + \frac{Bz}{(z-0,966)} + \frac{Cz}{(z-0,259)} = \frac{Az(z^2 - 1,225z + 0,25) + Bz(z-1)(z-0,259) + Cz(z-1)(z-0,966)}{(z-1)(z^2 - 1,225z + 0,25)}$$

$$\Rightarrow 4,25 \cdot 10^{-4} z(422z + 299) = Az(z^2 - 1,225z + 0,25) + Bz(z-1)(z-0,259) + Cz(z-1)(z-0,966)$$

Agora vamos expandir os produtos para igualar os coeficientes:

$$0,179z^2 + 0,127z = Az^3 - 1,225Az^2 + 0,25Az + Bz^3 - 0,259Bz^2 - Bz^2 + 0,259Bz + Cz^3 - 0,966Cz^2 - Cz^2 + 0,966Cz$$

Agupando os termos de mesma potência, resulta:

$$0,179z^2 + 0,127z = (A + B + C)z^3 + (-1,225A - 1,259B - 1,966C)z^2 + (0,25A + 0,259B + 0,966C)z$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & \text{(a)} \\ -1,225A - 1,259B - 1,966C = 0,179 & \text{(b)} \\ 0,25A + 0,259B + 0,966C = 0,127 & \text{(c)} \end{cases}$$

Agora, resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas apresentado, obtemos:

$$\therefore \begin{cases} A = 12,257 \\ B = -12,588 \\ C = 0,331 \end{cases}$$

Reescrevendo $y(z)$ em forma de frações parciais, temos:

$$y(z) = 12,257 \frac{z}{(z-1)} - 12,588 \frac{z}{(z-0,966)} + 0,331 \frac{z}{(z-0,259)}$$

Por meio da tabela, vamos obter a função $y(t)$. As linhas utilizadas são a 1 e a 3. Comparando os termos, temos que:

$$0,966 = e^{a_1 T} \Rightarrow \ln 0,966 = a_1 0,02 \Rightarrow a_1 = \frac{\ln 0,966}{0,02} = -1,715$$

e

$$0,259 = e^{a_2 T} \Rightarrow \ln 0,259 = a_2 0,02 \Rightarrow a_2 = \frac{\ln 0,259}{0,02} = -67,599$$

Portanto, temos que:

$$y(t) = 12,257u(t) - 12,588e^{-1,715t} + 0,331e^{-67,599t}$$

Para verificar o valor deste sinal em regime permanente, vamos utilizar o teorema do valor final que você aprendeu na disciplina Teoria de Controle Moderno.

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 12,257u(t) - 12,588e^{-1,715t} + 0,331e^{-67,599t} = 12,257 \neq 1$$

Observe que, para uma entrada degrau unitário, o valor em regime permanente da saída do sistema, que corresponde à pressão auxiliar fornecida ao paciente, é 12, enquanto deveria ser 1. Isto poderia trazer problemas sérios ao paciente ou até mesmo levá-lo a óbito. Portanto é extremamente necessário que haja um controlador para adequar a resposta desse sistema.

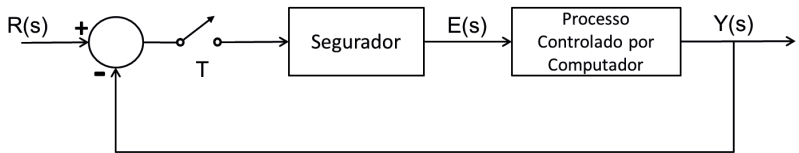
Avançando na prática

Análise de tanque de reservatório de sucos industriais controlados por computador digital

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o responsável técnico pela manutenção dos controladores dos tanques de reservatórios de sucos industriais em uma empresa alimentícia. Todos os tanques são controlados digitalmente por meio de computadores, mas a resposta de um deles está apresentando defeito. Segundo os relatos dos operadores, o líquido no tanque não transborda, mas está acima do valor desejado.

Figura 3.4 | Malha de realimentação de um controle digital com amostrador-segurador



Fonte: elaborada pela autora.

A partir de testes realizados no equipamento, os dados da resposta ao impulso observada na saída amostrada a cada 1 segundo, e que corresponde à função de transferência do sistema controlado em malha fechada, são dados pela equação (3.16).

Qual parecer você daria ao supervisor a respeito desse problema?

$$G(z) = \frac{0,008647z + 0,00799}{z^2 - 1,781z + 0,799} \quad (3.16)$$

Resolução da situação-problema

Se o nível do tanque está acima do valor desejado, significa que a saída não está acompanhando o sinal de entrada, que é a referência do nível do tanque.

Vamos então aplicar uma entrada degrau, e, se não houver problemas, a saída, em regime permanente, deve estabilizar com valor igual a 1. Ao contrário, o controlador deve ser enviado à equipe de projetos para reajustes em seus parâmetros.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z) = \frac{0,008647z + 0,00799}{z^2 - 1,781z + 0,799} U(z)$$

Sabemos que a entrada degrau discreta é dada por $U(z) = \frac{z}{z-1}$, como consta na primeira linha da Tabela 3.1.

$$Y(z) = \left(\frac{0,008647z + 0,00799}{z^2 - 1,781z + 0,799} \right) \frac{z}{z-1} = \frac{0,008647z^2 + 0,00799z}{(z-0,9531)(z-0,8278)(z-1)}$$

Agora vamos aplicar a transformada z inversa para verificar a resposta em função do tempo:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{0,008647z^2 + 0,00799z}{(z-0,9531)(z-0,8278)(z-1)} = \frac{Az}{(z-0,9531)} + \frac{Bz}{(z-0,8278)} + \frac{Cz}{(z-1)} \\ &\Rightarrow 0,008647z^2 + 0,00799z = Az(z-0,8278)(z-1) + Bz(z-0,9531)(z-1) + Cz(z-0,9531)(z-0,8278) \\ 0,008647z^2 + 0,00799z &= (A+B+C)z^3 + (-1,8278A - 1,9531B - 1,7889C)z^2 + (0,8278A + 0,9531B + 0,7889C)z \end{aligned}$$

Temos agora o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -1,8278A - 1,9531B - 1,7889C = 0,008647 \\ 0,8278A + 0,9531B + 0,7889C = 0,00799 \end{cases}$$

Resolvendo para A, B e C, obtemos a seguinte função:

$$Y(z) = -\frac{2,7619z}{z - 0,9531} + \frac{0,7025z}{z - 0,8278} + \frac{2,0595z}{z - 1}$$

Fazendo correspondência com a linha 3 da Tabela 3.1, temos que:

$$0,9531 = e^{-a_1 T} \Rightarrow a_1 T = -\ln(0,9531) = -0,0480$$

$$0,8278 = e^{-a_2 T} \Rightarrow a_2 T = -\ln(0,8278) = -0,1889$$

Portanto, utilizando as linhas 1 e 3 da Tabela 3.1, temos:

$$y(k) = -2,7619e^{-0,0480k} + 0,7025e^{-0,1889k} + 2,0595u(k)$$

Como $T = 1s$, temos também $y(t)$:

$$y(t) = -2,7619e^{-0,0480t} + 0,7025e^{-0,1889t} + 2,0595u(t)$$

Pelo teorema do valor final visto na disciplina Teoria de Controle Moderno:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-2,7619e^{-0,0480t} + 0,7025e^{-0,1889t} + 2,0595u(t)) \approx 2,1 \neq 1$$

Podemos observar que, para uma referência igual a 1, o nível do tanque responde a um valor aproximadamente igual ao dobro do requisitado.

Portanto, como conclusão, temos que o controlador não está fornecendo um comportamento adequado ao sistema, sendo necessário enviá-lo para a equipe de projetos reajustar seus parâmetros.

Faça valer a pena

1. Dentre as diversas vantagens dos sistemas de controle digital temos que, ao invés de implementar controles nos equipamentos, os controles são implementados em software. Por este motivo, caso seja necessário alterar os parâmetros do controlador, eles podem facilmente ser reajustados pelas alterações feitas diretamente nos valores inseridos no computador.

Sobre os controladores digitais, avalie as afirmativas a seguir e assinale a alternativa correta.

I. Geralmente o computador digital é colocado como precedente ao processo a ser controlado.

II. O computador digital pode ser modelado como um amostrador-segurador, juntamente com o controle que deverá executar.

III. A transformada Z permite passar um sistema do domínio da frequência de Laplace s para o domínio da frequência discreta.

IV. Sempre é necessário um conversor D/A entre a saída do computador e o processo. Já o conversor A/D é necessário apenas quando não há um amostrador de sinais.

V. O segurador de ordem zero é aquele que fornece uma aproximação em escada para sistemas amostrados, mantendo o valor do pulso até o próximo período de amostragem.

- a) Estão corretas as afirmativas I, II e V.
- b) Estão corretas as afirmativas I, II, III e V.
- c) Estão corretas as afirmativas II, III e IV.
- d) Estão corretas as afirmativas I, IV e V.
- e) Estão corretas as afirmativas I e V.

2. Os sinais e sistemas podem assumir as mais variadas formas. As duas formas muito importantes de classificar sinais no domínio do tempo são: de tempo contínuo e de tempo discreto.

Sinais de tempo contínuo são aqueles definidos em todos os pontos dentro de um intervalo de tempo que assume infinitos valores reais. Já os sinais de tempo discreto são definidos apenas em instantes de tempo inteiros, de acordo com um período de amostragem predeterminado.

A seguir são apresentados alguns sinais com os quais nos deparamos no dia a dia em nosso ambiente pessoal ou profissional. Dos sinais apresentados, quais são discretos no tempo?

- I. Temperatura ambiente em um termômetro de mercúrio.
- II. Saída de uma caixa de som.
- III. Índice da bolsa a cada minuto.
- IV. Valor de temperatura mostrado no display do ar-condicionado.
- V. Corrente elétrica no fio medida com o multímetro analógico.

- a) I, II e V são discretos.
- b) III e IV são discretos.
- c) III, IV e V são discretos.
- d) II e IV são discretos.
- e) III e V são discretos.

3. O processo de amostragem associado ao segurador atua como um filtro passa-baixa, rejeitando componentes harmônicas de altas frequências geradas no processo de amostragem. Desta forma, o segurador automaticamente filtra ruídos decorrentes da amostragem do sinal analógico.

Um processo possui a resposta $Y(z)$ a seguir:

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

Determine o valor da resposta nos quatro primeiros instantes de amostragem, ou seja, $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ e $y(3)$.

- a) 1, 2, 4, 8.
- b) 0, 2, 7, 14.
- c) 2, 3, 5, 9.
- d) 1, 3, 8, 15.
- e) 0, 1, 3, 7.

Seção 3.2

Análise de sistemas discretos

Diálogo aberto

Olá! Nesta segunda seção da Unidade 3 veremos métodos e conceitos de suporte para análise de sistemas no contexto de controle digital. Muitas vezes, no ambiente profissional como projetista de controle, você pode se deparar com a necessidade de um projeto ou implementação digital, mas ter conhecimento apenas do sistema analógico. Daí surge a necessidade de obter um equivalente digital desse sistema para que técnicas de controle digitais possam ser aplicadas.

Com base nisso, iniciaremos esta seção com a definição de uma função de transferência discreta a partir das entradas e saídas amostradas. A partir disso, veremos como obter os polos e zeros discretos e qual é a sua relação com os polos e zeros de sistemas analógicos.

Estes conceitos nos darão suporte para uma etapa muito importante no projeto de controladores digitais, o conceito de discretização. Ou seja, dado um sistema analógico, ou uma função de transferência no domínio da frequência contínua, faz-se necessário converter este sistema para o domínio Z , ou seja, discretizar o sistema, para que técnicas de controle digital sejam aplicadas. Por final, nesta seção, veremos a representação de sistemas digitais em diagramas de blocos e algumas simplificações possíveis de serem realizadas neles.

Para aplicar estes conceitos, suponha que você seja o responsável técnico de uma empresa de bioengenharia que fabrica dispositivos de assistência ventricular elétricos, responsáveis pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com o coração de pacientes debilitados.

O objetivo final da equipe é implementar um controlador digital para este equipamento, porém você dispõe apenas do modelo analógico para este dispositivo. Neste caso, o primeiro passo de projeto seria obter um equivalente discreto para um dado período

de amostragem considerado adequado para a aplicação.

Como você poderia proceder nesta etapa?

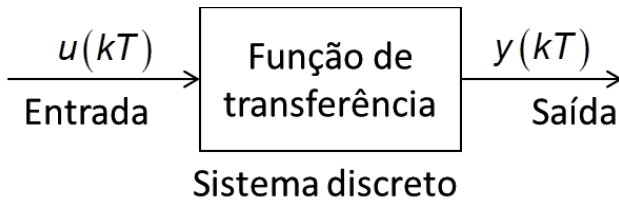
É o que descobriremos a seguir.

Bons estudos!

Não pode faltar

Assim como em sistemas contínuos, a função de transferência de um sistema discreto é descrita pela relação entre a entrada e a saída amostradas, pressupondo condições iniciais nulas, tal como na Figura 3.5 a seguir.

Figura 3.5 | Sistema discreto



Fonte: elaborada pela autora.

Em um sistema de tempo discreto, o estado atual de uma variável ou sinal $y(kT)$ depende da entrada atual $u(kT)$ e das saídas e entradas anteriores, $y(kT - nT)$ e $u(kT - mT)$, para $n = 1, 2, \dots, \ell$, sendo ℓ a ordem do sistema, e para $m = 1, 2, \dots, g$, sendo g o número de entradas do sistema.

Considere um sinal de saída amostrado dado por:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n-1} y(k-n+1) - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (3.17)$$

Aplicando a transformada Z na equação (3.17), temos:

$$Z\{y(k)\} = -a_1 Z\{y(k-1)\} - \dots - a_{n-1} Z\{y(k-n+1)\} - a_n Z\{y(k-n)\} + b_0 Z\{u(k)\} + b_1 Z\{u(k-1)\} + \dots + b_m Z\{u(k-m)\} \quad (3.18)$$

Supondo condições iniciais nulas, ou seja, $y(0) = y(1) = \dots = y(n-1) = u(0) = u(1) = \dots = u(m-1) = 0$ aplicamos a propriedade da translação no tempo dada pela equação (3.19), a seguir, na equação (3.18).

$$Z\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z) \quad (3.19)$$

O resultado é dado pela equação (3.20):

$$\begin{aligned} Y(z) &= -a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_{n-1} z^{-n+1} Y(z) - a_n z^{-n} Y(z) + b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) \\ Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} Y(z) + a_n z^{-n} Y(z) &= b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Isolando Y(z) e U(z), temos:

$$Y(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}] = U(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}]$$

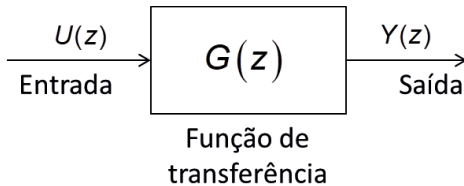
Logo, obtemos a função de transferência discreta $G(z) = Y(z)/U(z)$ na equação (3.21) e representada pela Figura 3.6.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m-1} z^{-m+1} + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

Se $n \geq m$, temos então:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{m-1} z^{n-m+1} + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n} \quad (3.21)$$

Figura 3.6 | Esquemático de uma função de transferência discreta



Fonte: elaborada pela autora.

A equação (3.21) também pode ser reescrita como:

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

Onde z_i são os zeros e p_i são os polos do sistema discreto.

Já vimos na Seção 3.1 desta unidade a equação (3.14), que corresponde à relação entre s e z , dada por: $z = e^{sT}$. Com isso temos que $p_z = e^{p_s T}$, sendo p_z o polo do sistema discreto e p_s o polo do sistema contínuo.

Supondo que $p_s = \sigma \pm j\omega$, temos:

$$p_z = e^{(\sigma \pm j\omega)T} = e^{\sigma T \pm j\omega T}$$

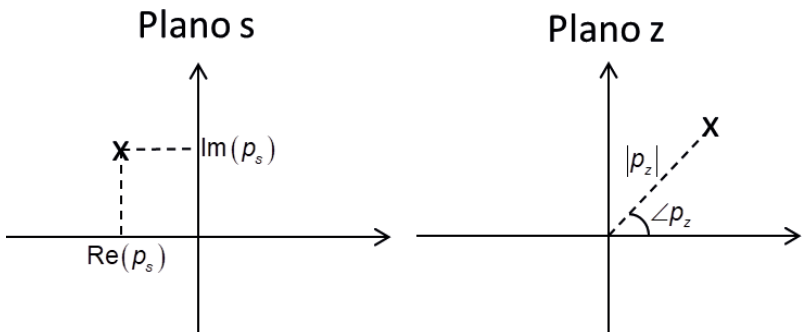
$$\therefore p_z = e^{\sigma T} [\cos(\omega T) \pm j \text{sen}(\omega T)]$$

Cujo módulo e fase são:

$$|p_z| = e^{-\sigma T} \quad \text{e} \quad \phi_z = \angle p_z = \pm \omega T$$

A correspondência gráfica entre polos e zeros de sistemas contínuos e discretos pode ser vista na Figura 3.7.

Figura 3.7 | Correspondência do plano s com o plano z



Fonte: elaborada pela autora.

Na próxima unidade veremos os critérios de estabilidade no plano z e a correspondência entre regiões específicas.



Assimile

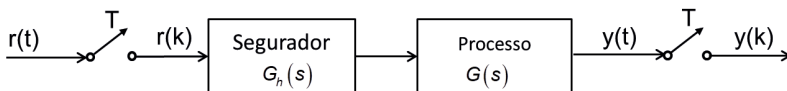
Os polos de um sistema contínuo são analisados por suas partes real e imaginária no plano complexo em um sistema de coordenadas retangulares. Já para sistemas discretos, os polos são analisados em um sistema de coordenadas polares, mediante seu módulo e ângulo.

Embora tenhamos visto como descrever uma função de transferência discreta em função dos sinais de entrada e saída amostrados, na maioria das vezes nos deparamos com o modelo dinâmico do sistema no domínio contínuo.

Para aplicar técnicas de projeto em controle digital nesses sistemas, precisamos realizar o processo de discretização da função de transferência $G(s)$ para $G(z)$. Existem diversas técnicas para realizar este procedimento, as quais dependem da aplicação desejada, mas aqui veremos o método de discretização com o segurador de ordem zero (*zero order holder*), por meio de sua representação equivalente na variável z .

Este método é utilizado para a transformação de função quando se deseja realizar para o sistema um projeto de controle digital ou quando os sinais de entrada e saída aplicados ao sistema analógico forem amostrados, como mostra a Figura 3.8.

Figura 3.8 | Discretização com segurador de ordem zero



Fonte: elaborada pela autora.

O processo da Figura 3.8 consiste em colocar um segurador em cascata com o processo e então obter a transformada Z ,

conforme equação:

$$G(z) = Z\{G_h(s)G(s)\}$$

Com o auxílio da equação (3.2), vista na Seção 3.1, temos:

$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\} \quad (3.22)$$

Sabendo que $z = e^{sT}$, substituímos em (3.22) e remanejamos, resultando na equação (3.23), que define a discretização de um sistema contínuo como:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left\{\frac{1-z^{-1}}{s}G(s)\right\} \Rightarrow G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \\ \therefore G(z) &= \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

O termo $Z\{G(s)/s\}$ pode ser obtido aplicando-se a transformada de Laplace inversa em $G(s)/s$ e em seguida aplicando a transformada Z sobre o resultado, ou então abrindo $G(s)/s$ em frações parciais e associando cada termo diretamente com os termos da Tabela 3.1 (apresentada na Seção 3.1).



Exemplificando

Realize o processo de discretização do sistema a seguir utilizando um segurador de ordem zero para $T = 1$.

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Resolução: aplicando a equação (3.23), obtemos:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{s+2}{s(s+1)}\right\}$$

Para associar com os termos da Tabela 3.1, vamos expandir a equação no domínio s em frações parciais:

$$\frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+Bs}{s(s+1)} = \frac{As+A+Bs}{s(s+1)} = \frac{(A+B)s+A}{s(s+1)} \therefore \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Retomando a transformada Z:

$$Z\left\{\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} \xrightarrow{\text{Tabela}} 2\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z[2(z-e^{-T})-(z-1)]}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\therefore G(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z[2(z-e^{-T})-(z-1)]}{(z-1)(z-e^{-T})} \right) = \frac{2(z-e^{-T})-(z-1)}{(z-e^{-T})}$$

Substituindo $T = 1$ e remanejando, obtemos o resultado final:

$$G(z) = \frac{z+0,2642}{z-0,3679}$$



Refleta

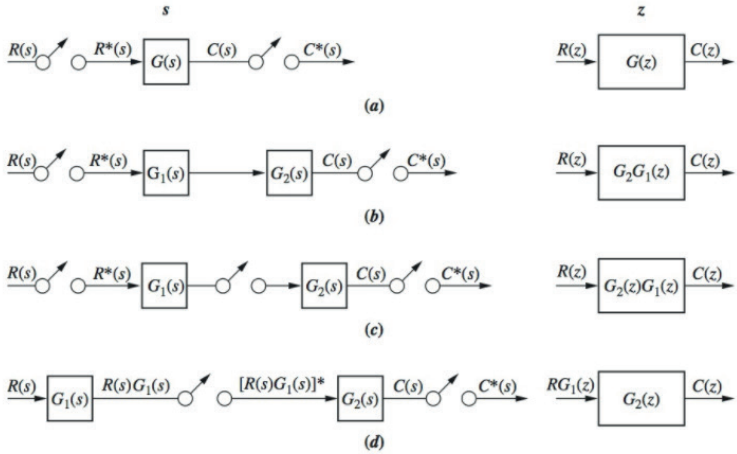
Analise a equação (3.22). Será que $Z\{G_1(s)G_2(s)\}$ é igual a $G_1(z)G_2(z)$?

Utilize um exemplo numérico e verifique o resultado.

Como você pode perceber, $Z\{G_1(s)G_2(s)\}$ é diferente de $G_1(z)G_2(z)$. Por este motivo, é muito importante que as funções no domínio s sejam multiplicadas antes da discretização.

Devemos também tomar cuidado ao manipular diagrama de blocos. Na Figura 3.9 podemos observar algumas equivalências de diagramas de blocos de sistemas discretos.

Figura 3.9 | Equivalências de diagramas de blocos do domínio discreto



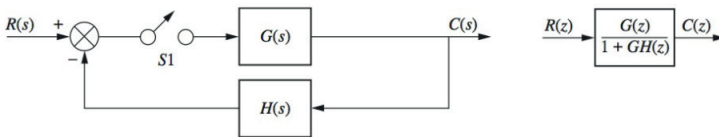
Fonte: Nise (2009, p. 570).

A Figura 3.9(a) mostra o sistema padrão discretizado anteriormente, no qual a saída é $C(z) = G(z)R(z)$. Na Figura 3.9(b), não há amostrador entre G_1 e G_2 , portanto fazemos a multiplicação das duas, considerando uma função única. Na Figura 3.9(c) temos dois subsistemas amostrados em cascata, portanto devemos discretizar G_1 e G_2 individualmente e realizar a multiplicação posteriormente, resultando em $G_1(z)G_2(z)$. Por final, na Figura 3.9(d), temos um sinal contínuo entrando no primeiro amostrador $R(s)G_1(s)$, portanto devemos discretizar $R(s)G_1(s)$ e $G_2(s)$ individualmente.



Uma das configurações em diagrama de blocos mais importantes é a malha de realimentação representada pela Figura 3.10, a seguir, com sua respectiva redução.

Figura 3.10 | Redução do diagrama de blocos de uma malha de realimentação com dados amostrados



Fonte: adaptada de Nise (2009).

Observe que o resultado se assemelha ao caso contínuo e é muito importante para as próximas seções.

A dedução deste resultado pode ser vista na referência:

NISE, Noman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. cap. 13, p. 571, ex. 13.9.

Sem medo de errar

Vamos retomar o sistema de controle de dispositivos de assistência ventricular elétricos, responsáveis pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com um coração fraco de pacientes debilitados. Suponha que você seja o responsável técnico encarregado de implementar um controle digital para esse sistema – lembrando que você já dispõe da função de transferência contínua disponibilizada pela equipe de desenvolvimento do equipamento.

Foi solicitado que a implementação fosse por meio de microcontrolador, ou seja, por meio de computador digital, o qual é modelado por um segurador de ordem zero. Utilizar o segurador de ordem zero para discretizar o sistema permite que o controlador digital seja projetado posteriormente.

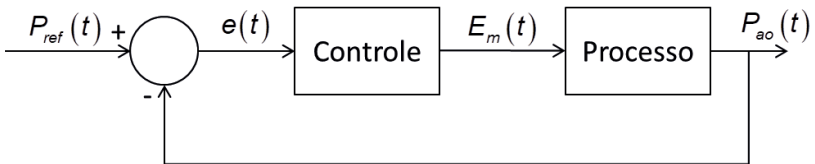
A função de transferência analógica do sistema disponibilizada para a equipe de modelagem é dada pela equação (3.24).

$$G(s) = \frac{P_{ao}(s)}{E_m(s)} = \frac{1361}{s^2 + 69s + 70,85} \quad (3.24)$$

Onde $P_{ao}(s)$ é a pressão sanguínea na artéria aorta e $E_m(s)$ é a tensão de armadura do motor responsável pelo bombeamento do sangue. O diagrama de blocos do sistema pode ser visto na Figura 3.11.

Além disso, a equipe de desenvolvimento informou que o tempo de amostragem deve ser igual a $T = 0,02$ s, pois a pressão sanguínea deve ser monitorada constantemente para evitar erros em relação ao valor de referência.

Figura 3.11 | Sistema do dispositivo de assistência ventricular elétrico controlado



Fonte: elaborada pela autora.

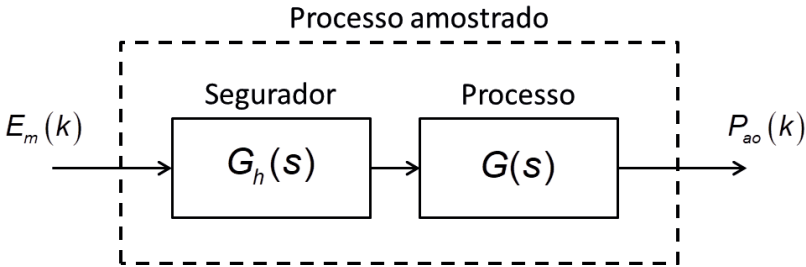
Resolução da situação problema:

Antes de projetar um controlador digital para o processo do dispositivo de assistência ventricular elétrico, é necessário saber a função de transferência discreta deste.

Para que se possa projetar um controlador, devemos obter uma função de transferência discreta utilizando um segurador de ordem

zero, conforme a Figura 3.12. A função de transferência amostrada resulta em:

Figura 3.12 | Processo de discretização do dispositivo de assistência ventricular elétrico



Fonte: elaborada pela autora.

$$G_c(z) = Z\{G_h(s)G(s)\} = Z\left\{\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)\frac{1361}{s^2+69s+70,85}\right\}$$

$$G(z) = Z\left\{\left(1-e^{-Ts}\right)\frac{1361}{s(s^2+69s+70,85)}\right\}$$

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1361}{s(s^2+69s+70,85)}\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left\{\frac{\bar{G}(s)}{s(s^2+69s+70,85)}\right\}$$

Agora, para obter $Z\{\bar{G}(s)\}$, vamos expandir $\bar{G}(s)$ em frações parciais. Você pode utilizar seus conhecimentos de Matlab simbólico para realizar estes procedimentos (comandos 'syms' e 'partfrac').

$$\bar{G}(s) = \frac{1361}{s(s^2+69s+70,85)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+67,96} + \frac{C}{s+1,04} = \frac{A(s+67,96)(s+1,04) + Bs(s+1,04) + Cs(s+67,96)}{s(s^2+69s+70,85)} \quad (3.25)$$

Agora, igualando o numerador e agrupando os coeficientes de mesma potência à equação (3.25), obtemos:

$$1361 = As^2 + 69As + 70,85A + Bs^2 + 1,04Bs + Cs^2 + 67,96Cs$$

$$1361 = s^2(A + B + C) + s(69A + 1,04B + 67,96C) + 70,85A$$

Igualando coeficientes, obtemos:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & (a) \\ 69A + 1,04B + 67,96C = 0 & (b) \\ 70,85A = 1361 & (c) \end{cases}$$

De (c) temos que $A = 19,21$.

Resolvendo agora o sistema das equações (a) e (b), temos:

$$B = -A - C \Rightarrow B = -19,21 - C$$

$$69 \cdot 19,21 + 1,04(-19,21 - C) + 67,96C = 0 \Rightarrow 67C + 1311 = 0 \therefore \begin{cases} C = -19,5 \\ B = 0,29 \end{cases}$$

Portanto

$$\bar{G}(s) = \frac{1361}{s(s^2 + 69s + 70,85)} = \frac{19,21}{s} + \frac{0,29}{s + 67,96} - \frac{19,5}{s + 1,04}$$

(3.26)

Vamos utilizar as linhas 1 e 3 da Tabela 3.1, que consta na Seção 3.1, para obter a transformada Z da equação (3.26).

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{19,21}{s} + \frac{0,29}{s + \underbrace{68}_{a_1}} - \frac{19,5}{s + \underbrace{1,04}_{a_2}} \right\} &= 19,21 \frac{z}{z-1} + 0,29 \frac{z}{z - \underbrace{e^{-67,96 \cdot 0,02}}_{=0,2569}} - 19,5 \frac{z}{z - \underbrace{e^{-1,04 \cdot 0,02}}_{=0,9794}} = \\ &= \frac{19,21z(z-0,9794)(z-0,2569) + 0,29z(z-1)(z-0,9794) - 19,5z(z-1)(z-0,2569)}{(z-1)(z-0,2569)(z-0,9794)} \\ &= \frac{z(0,186z + 0,108)}{(z-1)(z^2 - 1,24z + 0,26)} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado, temos:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{1361}{s(s^2 + 69s + 70,85)} \right\} = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{1361}{s(s^2 + 69s + 70,85)} \right\} = \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{z(0,186z + 0,108)}{(z-1)(z^2 - 1,24z + 0,26)} \right)$$

$$G(z) = \frac{0,186z + 0,108}{z^2 - 1,24z + 0,26} \quad (3.27)$$

Portanto, a partir da função de transferência discreta $G(z)$ obtida da equação (3.27), técnicas de análise e projeto no domínio discreto podem ser aplicadas e implementadas por meio de um microprocessador para controlar a pressão auxiliar proveniente do dispositivo de assistência ventricular elétrico.

Avançando na prática

Acionador de disco flexível

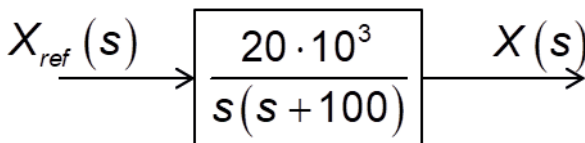
Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o técnico responsável em uma empresa de eletrônicos e informática. Um acionador de disco flexível consiste em um sistema de controle de posição que posiciona o cabeçote de leitura ou gravação de dados sobre a superfície do disco.

Seu supervisor solicitou que uma nova linha de acionadores deve ser controlada digitalmente mediante um ganho em realimentação unitária e solicitou a você primeiramente o modelo equivalente digital deste sistema, ou seja, discretizado.

O sistema analógico disponibilizado pelo supervisor é mostrado na Figura 3.13.

Figura 3.13 | Diagrama de blocos do acionador de disco flexível



Fonte: elaborada pela autora.

Segundo informado pela equipe de modelagem, o tempo de amostragem adequado é $T = 0,01$ s, suficientemente pequeno para que a aplicação de controle de posição seja precisa.

Resolução da situação-problema

Para que possa ser realizado o projeto de controlador digital, primeiramente a função de transferência do acionador de disco flexível deve ser discretizada mediante um segurador de ordem zero.

$$G(z) = Z\{G_h(s)G(s)\} = Z\left\{\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right) \frac{20 \cdot 10^3}{s(s + 100)}\right\}$$

$$G(z) = Z\left\{\left(1 - e^{-Ts}\right) \frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)}\right\} = \left(\frac{z - 1}{z}\right)Z\left\{\frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)}\right\}$$

Agora, para obter $Z\left\{\frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)}\right\}$, vamos expandir $\frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)}$

em frações parciais. Você pode utilizar seus conhecimentos de Matlab simbólico para realizar estes procedimentos.

$$\frac{20 \cdot 10^3}{s^2(s + 100)} = \frac{2}{s + 100} - \frac{2}{s} + \frac{200}{s^2}$$

Por meio das linhas 1, 2 e 3 da Tabela 3.1 (Seção 3.1), vamos obter a transformada Z da expressão dada:

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{2}{\underbrace{s + 100}_a} - \frac{2}{s} + \frac{200}{s^2}\right\} &= 2 \frac{z}{z - e^{-100 \cdot 0,01}} - 2 \frac{z}{z - 1} + 200 \cdot 0,01 \frac{z}{(z - 1)^2} \\ &= 2 \frac{z}{z - 0,3679} - 2 \frac{z}{z - 1} + 2 \frac{z}{(z - 1)^2} = \frac{z(0,736z + 0,528)}{(z - 1)^2(z - 0,3679)} \end{aligned}$$

Com esta expressão, calculamos a função de transferência discreta $G(z)$:

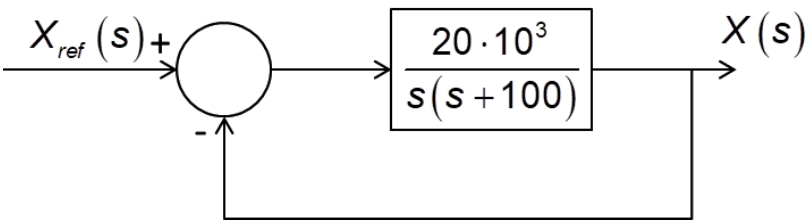
$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{z(0,736z + 0,528)}{(z-1)^2(z-0,3679)}$$

$$G(z) = \frac{0,736z + 0,528}{(z-1)(z-0,3679)} \quad (3.28)$$

A partir desta função de transferência discreta da equação (3.28) é possível aplicar técnicas de projeto de controle digital.

Podemos, a partir dela, realizar uma realimentação unitária e verificar a necessidade de um controlador adicional ou não. A estrutura de realimentação do sistema do acionador de disco flexível pode ser vista no diagrama da Figura 3.10. Considerando $H(s) = 1$, o resultado é o sistema da Figura 3.14.

Figura 3.14 | Realimentação unitária do acionador de disco flexível



Fonte: adaptada de Nise (2009).

Faça valer a pena

1. Para aplicar técnicas de projeto em controle digital em sistemas analógicos, precisamos realizar o processo de discretização da função de transferência $G(s)$ para $G(z)$. Existem diversas técnicas para realizar este procedimento, entre elas a transformação bilateral.

Sobre a análise de sistemas digitais, assinale as afirmativas a seguir.

(I) Quando desejamos realizar um projeto de controle digital para uma função $G(s)$, devemos discretizá-la mediante um segurador de ordem zero, colocando os dois em cascata e aplicando a transformada Z .

(II) Os polos em sistemas analógicos correspondem a uma parte real e uma parte imaginária do plano complexo. Já os polos de sistemas digitais são representados por um módulo e um ângulo, ou seja, pela coordenada polar.

(III) Ao discretizar um sistema analógico com vários subsistemas em cascata, não importa se os multiplicamos antes ou depois da discretização.

(IV) Assim como em sistemas contínuos, a função de transferência de um sistema discreto é descrita pela relação entre a entrada e a saída amostradas.

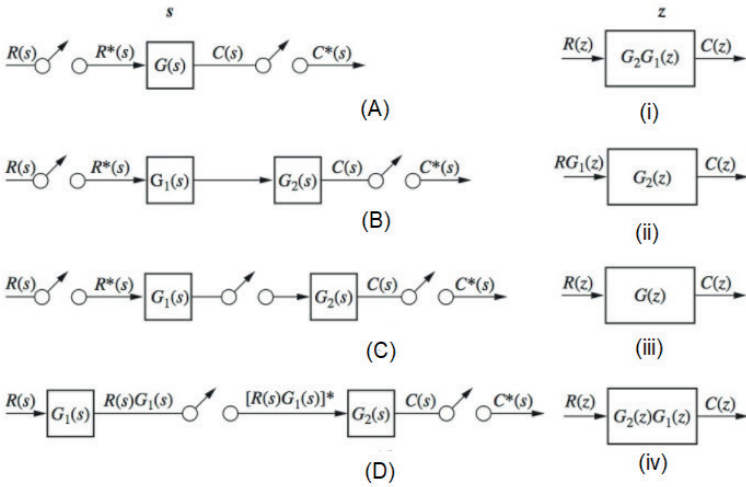
Quais itens estão corretos?

- a) (I) e (II).
- b) (II) e (IV).
- c) (I), (II) e (III).
- d) (I), (II) e (IV).
- e) (I), (II) e (V).

2. Durante o processo de discretização de funções de transferência, pudemos perceber que $Z\{G_1(s)G_2(s)\}$ é diferente de $G_1(z)G_2(z)$, pois $Z\{G_1(s)G_2(s)\} = Z\{G_1G_2(s)\} = G_1G_2(z)$ enquanto $G_1(z)G_2(z) = Z\{G_1(s)\} \cdot Z\{G_2(s)\}$. Por este motivo, é muito importante que as funções no domínio s sejam multiplicadas antes da discretização ao manipular sistemas digitais.

Dados os diagramas de blocos a seguir, associe-os com as correspondentes simplificações:

Figura | Diagrama de blocos (para a questão 2)



Fonte: adaptada de Nise (2009).

- a) A-iii, B-i, C-iv, D-ii.
- b) A-ii, B-iv, C-i, D-iii.
- c) A-iv, B-ii, C-i, D-iii.
- d) A-iii, B-i, C-ii, D-iv.
- e) A-iii, B-iv, C-i, D-ii.

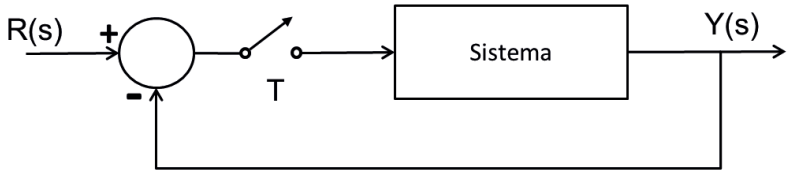
3. No controle em malha fechada, informações sobre como a saída da planta está evoluindo são utilizadas para determinar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo em um instante específico. Isto é feito a partir de uma realimentação da saída para a entrada.

Considere o processo a seguir:

$$G(s) = \frac{20000}{s}$$

Deseja-se realizar uma realimentação unitária neste sistema, supondo que sua entrada seja amostrada com período T, como mostra a Figura.

Figura | Sistema discreto com realimentação unitária



Fonte: elaborada pela autora.

Qual seria a função de transferência discreta resultante em malha fechada?

- a) $G_{MF}(z) = \frac{20000T}{z^2 - 2z + (20000T - 1)}$.
- b) $G_{MF}(z) = \frac{20000T}{(z - 1)^2}$.
- c) $G_{MF}(z) = \frac{20000T}{z + (20000T - 1)}$.
- d) $G_{MF}(z) = \frac{20000T}{z - 1}$.
- e) $G_{MF}(z) = \frac{20000T}{z + (20000T + 1)}$.

Seção 3.3

Análise de sistemas discretos com uso de software

Diálogo aberto

Olá, nesta terceira e última seção da Unidade 3 veremos como os sistemas de controle digital podem ser modelados e analisados por meio do software Matlab, de forma a aplicar os conceitos vistos nas seções anteriores de modo muito mais rápido e simples, usufruindo de toda a tecnologia e o suporte computacional disponível nos dias atuais.

Iniciaremos com a aplicação da transformada Z e da transformada Z inversa pelo software. Para isso vamos dispor dos recursos de computação simbólica do Matlab. Em seguida, será abordada uma forma de realizar a discretização de sistemas dinâmicos contínuos no tempo para um determinado tempo de amostragem desejado e vice-versa, ou seja, a partir de um sistema de controle digital, será possível obter uma representação contínua.

Por final, o diagrama de blocos digital será implementado por meio do Simulink para a realização de simulações e análises dos sistemas dinâmicos implementados.

Para verificar esses novos conceitos, suponha que você seja o técnico responsável pela implementação de um controlador digital para o dispositivo de assistência ventricular elétrico, o qual é responsável pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com um coração de pacientes com insuficiência cardíaca.

Foi disponibilizado pela equipe de projeto o controlador obtido por meio de técnicas de sistemas contínuos, ou seja, em função da variável de Laplace s . Para implementar este controle utilizando um microcontrolador, um sistema equivalente discreto deve ser obtido e validado mediante simulações.

Qual é a melhor maneira de realizar essa tarefa?

Vamos descobrir a seguir!

Bons estudos.

Não pode faltar

Nas seções anteriores, tivemos uma introdução a sistemas discretos e a transformada Z e transformada Z inversa, as quais fazem a interação entre o domínio do tempo contínuo com o domínio discreto. Vimos também a definição de função de transferência discreta e um processo de discretização de sistemas contínuos, etapa esta necessária para que os sistemas possam ser controlados por ferramentas digitais, e por final vimos a representação em diagrama de blocos de uma função de transferência discreta e algumas manipulações que podem ser realizadas.

Todos os conceitos vistos até a Seção 3.2 foram aplicados de forma manual, por meio de cálculos matemáticos muitas vezes complexos e suscetíveis a erros. Nesta seção vamos aplicar todos estes conceitos utilizando comandos simples no software Matlab, conforme o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 | Comandos utilizados para análise discreta em Matlab

Comando	Descrição
$F = \text{ztrans}(f,k,z)$	Realiza a transformada Z de uma função simbólica $f(k)$.
$f = \text{iztrans}(F,z,k)$	Realiza a transformada Z inversa de uma função simbólica $F(z)$.
$\text{sysd} = \text{c2d}(\text{sysc},T_s)$	Computa uma discretização do sistema contínuo "sysc", com tempo de amostragem " T_s ".
$\text{sysc} = \text{d2c}(\text{sysd},T_s)$	Converte o modelo do tempo discreto "sysd" para o tempo contínuo "sysc" a uma amostragem " T_s ".
$[P,Z] = \text{pzmap}(\text{sysd})$	Computa os polos (P) e zeros (Z) de um sistema 'sys' contínuo ou discreto.
zgrid	Gera linhas de grade no plano z para o mapa de polos e zeros discretos (pzmap).

Fonte: elaborado pela autora.

Observe que o Quadro 3.1 apresenta na coluna da esquerda os comandos que utilizaremos nesta seção e sua respectiva estrutura, ou seja, quais são suas entradas e saídas para uma das formas em que pode ser utilizada no software. Lembrando que um determinado comando pode ter diversas estruturas diferentes, as quais podem ser vistas digitando `help <nome da função>` no *Command Window* e teclado `enter`. A função será detalhadamente descrita, assim como todas as formas de utilizá-la.

Como vimos na primeira seção da Unidade 3, a transformada Z, definida pela equação (3.3), é necessária para que possamos analisar, manipular e projetar sistemas discretos e incorporar as informações da amostragem na representação destes.

Para aplicar a transformada Z em Matlab, vamos utilizar variáveis simbólicas. Relembrando: para declarar uma variável simbólica, utilizamos o comando "syms arg1 arg2 ...", onde arg1, arg2, argn são as variáveis simbólicas que iremos tratar.

Utilizando a primeira função do Quadro 3.1 (`ztrans`), podemos ver uma sequência de comandos que pode ser utilizada para obter a transformada Z de uma função amostrada $f(k)$ com período T. Nesta função, o primeiro argumento é a função amostrada $f(k)$, o segundo argumento é a variável atual (k) e o terceiro argumento é a variável discreta (z). Você pode utilizar quaisquer variáveis – por exemplo, x e w para k e z respectivamente –, no entanto o conceito da transformação não muda. Estamos passando uma função amostrada do domínio contínuo para o domínio discreto.

```
syms k z T
```

```
f = . . . ;
```

```
F = ztrans(f, k, z)
```

O resultado da expressão simbólica resultante pode ser manipulado por comandos como `pretty` (para deixar mais bonita a visualização), `simplify` (para simplificar a expressão simbólica, caso possa haver cancelamentos de numerador e denominador, por exemplo), entre outros.

Por outro lado, sempre que desejarmos analisar o comportamento de um sinal ou processo discreto no domínio do tempo contínuo, devemos utilizar a transformada Z inversa. Por meio do Matlab podemos fazer isto utilizando programação simbólica e o comando `iztrans`, que corresponde à segunda linha do Quadro 3.1. Nesta função, o primeiro argumento corresponde a $F(z)$, o segundo argumento é a variável atual, ou seja, "z", e o terceiro argumento corresponde à variável da função amostrada "k". O resultado deste comando é a função amostrada $f(k)$.

De modo similar à transformada Z vista anteriormente, temos agora uma sequência de comandos que pode ser utilizada para realizar a transformada Z inversa de uma função $F(z)$.

```
syms k z
F = . . . ;
f = iztrans(F, z, k);
pretty(f)
```

Note que `ztrans` e `iztrans` não requerem o período de amostragem. Isso acontece porque a transformada Z (direta e inversa) é aplicada às sequências numéricas, que correspondem às funções amostradas $f(k)$.

No entanto, a partir da função $f(k)$ resultante podemos obter a função $f(t)$, caso desejado. Neste caso, podem ocorrer duas situações distintas. Se $f(k)$ estiver em função de "T" (exemplo: $sen(Tk)$), basta substituir "k" por " t/T " ou, em Matlab, declarar as variáveis simbólicas "t" e "T" e, em seguida, utilizar a função `subs(f, k, t/T)`, a qual substitui na função "f" a variável "k" por "t/T".

Caso a função $f(k)$ não esteja em função do período de amostragem T (exemplo: $sen(k)$), é necessário ter conhecimento do valor numérico deste para obter $f(t)$.



Obtenha por meio de computação simbólica em Matlab a transformada Z inversa das funções a seguir:

a) $F(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$ para um tempo de amostragem genérico T.

b) $F(z) = \frac{z}{z - 0,99}$ para um tempo de amostragem T = 0,01 s.

Resolução: vamos resolver os dois itens a seguir.

a) Para obter uma expressão genérica de f(t) em função de t e T, podemos utilizar os comandos a seguir:

```
syms z t k T
```

```
F = z/(z-exp(-T)); %declara F(z)
```

```
f = iztrans(F,z,k); %calcula f(kT)
```

```
f = subs(f,k,t/T); %calcula f(t)
```

```
pretty(simplify(f)) %simplifica e exhibe o resultado
```

O resultado mostrado no *Command Window* pode ser visto na Figura 3.15.

Figura 3.15 | Transformada inversa do item a)

```
Command Window
```

```
      t/T  
    exp(-T)
```

```
fx >>
```

Fonte: Mathworks (2015).

Lembrando que $(A^x)^y = A^{xy}$, temos como resultado:

$$f(t) = (e^{-T})^{t/T} \therefore f(t) = e^{-t}$$

Que corresponde à linha 3 do Quadro 3.1 quando $a = 1$.

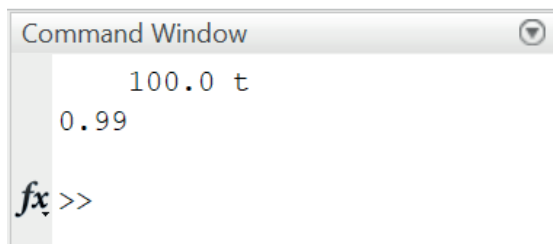
b) Para obter uma expressão de $f(t)$ para $T = 0,01$ s, basta utilizar o código anterior e inserir $T = 0,01$ logo no início.

```
syms z t k
T = 0.01;
F = z/(z-0.99); %declara F(z)
f = iztrans(F,z,k); %calcula f(kT)
f = subs(f,k,t/T); %calcula f(t)
pretty(simplify(vpa(f))) %simplifica e exhibe o resultado
```

Nesta sequência, o comando `vpa` é utilizado para calcular numericamente os termos racionais de "f".

O resultado mostrado no *Command Window* pode ser visto na Figura 3.16.

Figura 3.16 | Transformada inversa do item b)



Fonte: Mathworks (2015).

Observe no resultado que $(0,99^{100})^t = (e^{-1})^t$, portanto $f(t) = e^{-t}$, assim como no item a, porém com tempo de amostragem definido em $T = 0,01$ s.

Ao discretizar uma função de transferência no domínio da frequência de Laplace, para modelar o computador digital, utilizamos um segurador de ordem zero, conforme vimos nas Seções 3.1 e 3.2, representado pelas Figuras 3.3 e 3.8.

Com isso, a função de transferência discreta de $G(s)$ é dada pela equação (3.21) e reproduzida a seguir: $G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right\}$.

No Matlab, este procedimento pode ser realizado por meio do comando localizado na terceira linha do Quadro 3.1, ou seja, o comando `c2d(sysc, Ts, method)`. Neste comando, 'sysc' é o sistema em forma de função de transferência no domínio contínuo e 'Ts' é o tempo de amostragem do sinal (correspondente a um valor numérico). A sequência de comandos a seguir define uma aplicação para a discretização de uma função de transferência $F(s)$.

```
s = tf('s'); %declara s como função de transferência
Fs = ...; %declara F(s)
T = 0.01; %tempo de amostragem escolhido
Fz = c2d(Fs,T); %calcula F(z)
```

O caminho inverso, ou seja, a obtenção de um modelo contínuo a partir de um modelo discreto, pode ser feito pelo comando `d2c` que consta na quarta linha do Quadro 3.1. O primeiro argumento da função é um sistema discreto no domínio "z", e o segundo argumento é o tempo de amostragem utilizado na discretização

do sinal "Ts". Uma aplicação genérica para esse comando pode ser vista a seguir:

```
s = tf('s'); %declara s como função de transferência
Fs = ...; %declara F(s)
T = 0.01; %tempo de amostragem escolhido
Fz = c2d(Fs,T); %calcula F(z)
```



Exemplificando

Faça a discretização da função de transferência a seguir, utilizando um segurador de ordem zero e um período de amostragem $T = 1$ s.

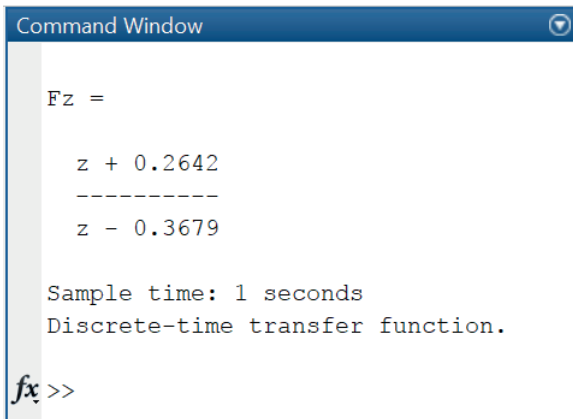
$$F(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Resolução: vamos utilizar a seguinte sequência de comandos para obter um modelo discreto para a função de transferência dada:

```
s = tf('s'); %declara s como função de transferência
Fs = (s+2)/(s+1); %declara F(s)
Ts = 1; %tempo de amostragem
Fz = c2d(Fs,Ts) %obtem o modelo discreto com segurador
```

O resultado mostrado no *Command Window* pode ser visto na Figura 3.17.

Figura 3.17 | Resultado da discretização de F(s)



```
Command Window

Fz =

      z + 0.2642
      -----
      z - 0.3679

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

fx >>
```

Fonte: Mathworks (2015).

Note que fizemos esta discretização no último *Exemplificando* da Seção 3.2, empregando o método analítico, e o resultado utilizando um segurador de ordem zero e tempo de amostragem igual a 1 segundo é igual ao método computacional.

Antes de iniciarmos a implementação de sistemas digitais no Simulink, vamos verificar um comando que permite obter com muita facilidade os polos e zeros discretos de um sistema digital. O comando `pzmap`, que consta na quinta linha do Quadro 3.1, pode ser utilizado tanto para sistemas contínuos, quanto para sistemas discretos. Se utilizado isoladamente, sem os argumentos de saída, ele abre uma figura com as localizações dos polos e zeros discretos. A função `zgrid` (sexta linha) auxilia criando linhas de grade no plano z . Caso `pzmap` seja utilizada com argumentos de saída, conforme consta no Quadro 3.1 – `[P,Z] = pzmap(sysd)` –, ela não gera a figura, mas armazena os polos e zeros nas variáveis P e Z respectivamente.

Uma alternativa também seria utilizar o comando que você já conhece `damp(sysd)` para obter os valores dos polos apenas e respectivas taxas de amortecimento e frequência de oscilação.



Exemplificando

Obtenha o diagrama de polos e zeros discretos da função de transferência a seguir.

$$F(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Resolução: para obter os polos e zeros discretos, precisamos inicialmente discretizar o sistema contínuo, conforme visto no exemplo anterior. A sequência de comandos resultantes é dada por:

```
s = tf('s'); %declara s como função de transferência
```

```
Fs = (s+2)/(s+1); %declara F(s)
```

```
Ts = 1; %tempo de amostragem
```

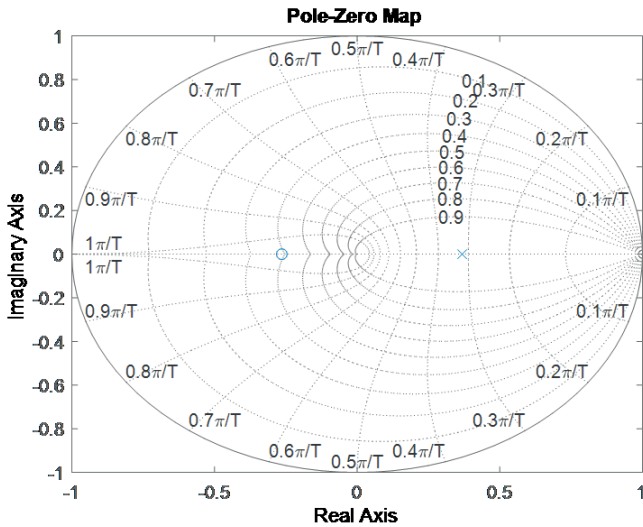
```
Fz = c2d(Fs,Ts); %obtem o modelo discreto com segurador
```

```
pzmap(Fz) %obtem o diagrama de polos e zeros discretos
```

```
zgrid %gera linhas de grade no plano z
```

O resultado deste comando é a Figura 3.18:

Figura 3.18 | Diagrama de polos e zeros no plano discreto



Fonte: Mathworks (2015).

Veja o polo em $z = 0,3679$, representado por um 'x', e o zero em $z = -0,2642$, representado por 'o'.

Na próxima unidade veremos os detalhes das regiões do plano s que correspondem ao plano z .



Assimile

As funções z trans e iz trans podem ser utilizadas para obter a transformada z de um sistema em programação simbólica no Matlab.

Já as funções $c2d$ e $d2c$ realizam a discretização de um sistema modelado como função de transferência no Matlab.

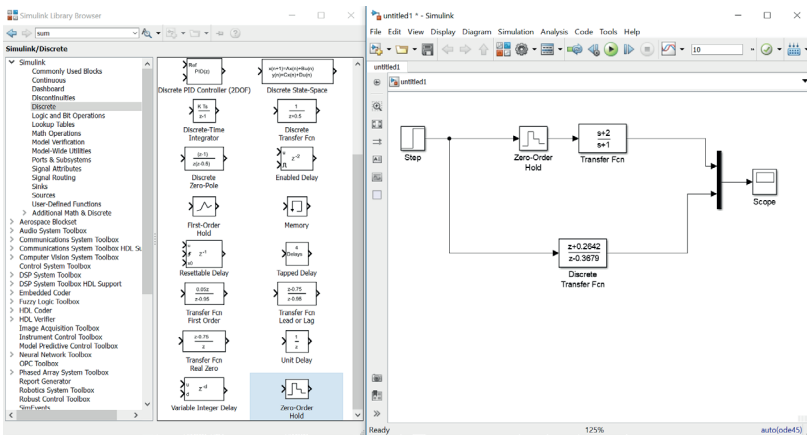
Para finalizar esta unidade, vamos simular um sistema discreto pelo Simulink. Abra o Simulink digitando 'simulink' no *Command Window* e teclando *enter*.

Veremos nesta seção dois blocos novos. O primeiro é o bloco *Discrete Transfer Fcn* (função de transferência discreta), onde podemos inserir a função de transferência discreta diretamente. O segundo bloco é o *Zero-Order Hold*, que corresponde ao segurador de ordem zero, o qual utilizaremos para discretizar uma função de transferência contínua. Com isso teremos uma comparação entre os sistemas discreto e discretizado utilizando os dois diferentes blocos.

Para montar o diagrama da Figura 3.19, vamos utilizar os seguintes blocos:

1. *Discrete* → *Discrete Transfer Fcn* (função de transferência discreta)
2. *Discrete* → *Zero-Order Hold* (segurador de ordem zero)
3. *Continuous* → *Transfer Fcn* (função de transferência contínua)
4. *Commonly Used Blocks* → *Mux* (multiplexador)
5. *Sinks* → *Scope* (osciloscópio)
6. *Sources* → *Step* (degrau).

Figura 3.19 | Diagrama de blocos *discrete* no Simulink



Fonte: Mathworks (2015).

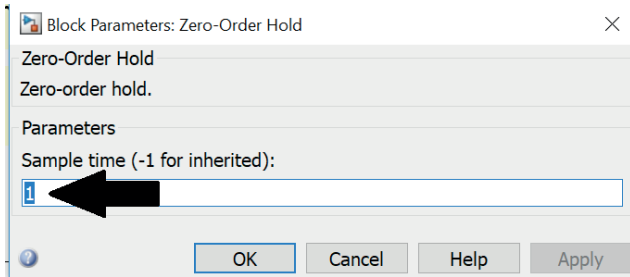
Os parâmetros dos blocos *Zero-Order Hold*, *Transfer Fcn* e *Discrete Transfer Fcn* precisam ser ajustados. Como você já conhece o bloco de função de transferência contínua, vamos abordar aqui apenas os blocos discretos. Clicando duas vezes com o botão esquerdo em cada um desses três blocos, você pode ver uma janela semelhante às que estão nas Figuras 3.20 e 3.21, mais adiante, onde devem ser definidos os parâmetros destacados, que consistem no tempo de amostragem (que deve ser igual para os dois sistemas para fins de comparação da resposta) e no numerador e denominador da função de transferência discreta.

Vamos simular a resposta da função de transferência $F(s) = \frac{s+2}{s+1}$

em malha aberta, cujo modelo discreto corresponde a

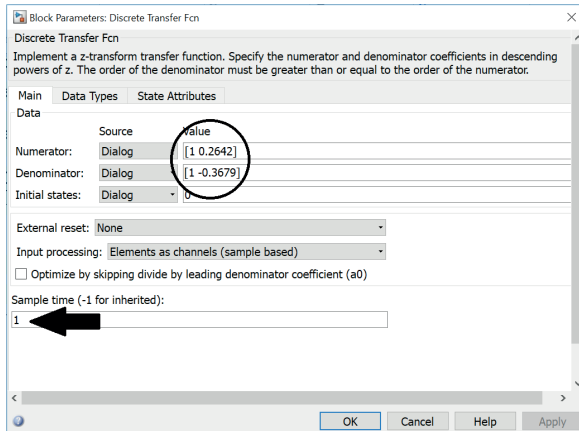
$F(z) = \frac{z+0,2642}{z-0,3679}$ para um tempo de amostragem $T = 1$ segundo.

Figura 3.20 | Janela de parâmetros do segurador de ordem zero



Fonte: Mathworks (2015).

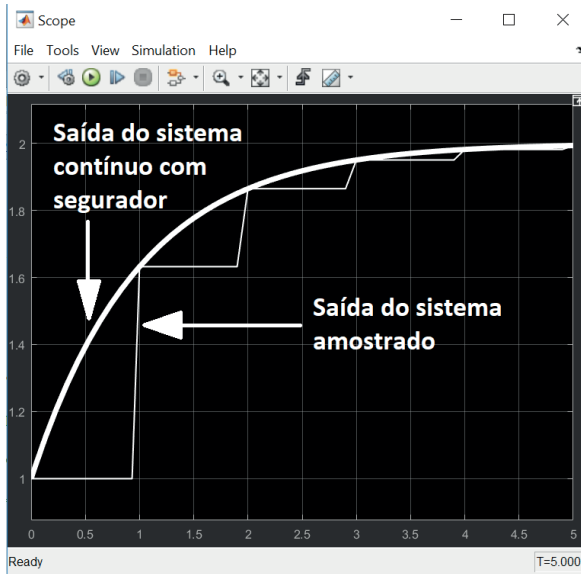
Figura 3.21 | Janela de parâmetros da função de transferência discreta



Fonte: Mathworks (2015).

Concluindo as configurações, você pode rodar o Simulink. O resultado visto no bloco Scope pode ser visto na Figura 3.22:

Figura 3.22 | Comparação entre a saída amostrada e a saída com segurador



Fonte: Mathworks (2015).

Observe na Figura 3.22 o efeito do segurador de ordem zero no sistema contínuo quando o sinal de entrada passa por um processo ou controle digital. Este é o comportamento real do sistema controlado por um computador digital.

Já a resposta do sinal amostrado consiste em uma aproximação do sistema contínuo no domínio discreto, ou seja, uma discretização do mesmo, a qual pode ser utilizada para análise e projeto.



Refleta

Em sistemas reais controlados por computador, a saída do controlador é digital e a entrada do sistema é analógica. Esta interação entre os sinais é feita por um conversor digital-analógico. O computador mais o conversor são representados por um segurador de ordem zero, mas o processo continua sendo contínuo. Por que então a necessidade de discretizar o processo?



É possível declarar sistemas discretos diretamente no Matlab pelo comando "tf". Neste caso você deve inserir também o tempo de amostragem de acordo com a seguinte sintaxe: $H = \text{tf}(\text{num}, \text{den}, T_s)$.

No *Command Window do Matlab*, pesquise mais sobre esta aplicação. Basta escrever `help tf` e pressionar "enter" ou então acessar a página a seguir:

MATHWORKS. **tf**. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ref/tf.html>>. Acesso em: 12 mar. 2018.

Sem medo de errar

Retomando a situação-problema do início da seção, uma empresa de bioengenharia precisa implementar um controlador digital para o dispositivo de assistência ventricular elétrico, o qual é responsável pelo auxílio no bombeamento de sangue em paralelo com um coração de pacientes com insuficiência cardíaca.

Suponha que você seja o técnico responsável por verificar se o controlador digital disponibilizado pela equipe de projetos está adequado para a operação desejada.

Foram disponibilizadas as funções de transferência discreta do controlador obtida por métodos de projeto no domínio discreto e a correspondente contínua, devendo a versão discreta ser validada em relação à contínua. Para que o paciente não seja prejudicado e o equipamento auxilie corretamente o bombeamento do coração, a resposta do sistema controlado deve possuir sobressinal nulo e tempo de subida de até 200 ms.

Dados do processo: $G(s) = \frac{1361}{s^2 + 69s + 70,85}$

Dados do controlador analógico: $G_c(s) = \frac{0,5(s+1)}{s+0,05}$

Dados do controlador digital: $G_c(z) = \frac{0,5047z - 0,4948}{z - 0,999}$,

$T = 0,02s$

Para validar o controlador e verificar se os requisitos são atendidos, temos duas alternativas. A primeira é implementar por linhas de comando ou por simulações no Simulink.

Para analisar o sistema com controlador digital por meio de comandos, podemos inserir as linhas a seguir:

```
clc
clear all
close all
s = tf('s');
G = 1361/(s^2+69*s+70.85); %declara a FT do
processo contínuo
[numG,denG] = tfdata(G,'v'); %obtem os dados da FT
Gc = 0.5*(s+1)/(s+0.05); %declara o
controlador analógico
[numGc,denGc] = tfdata(Gc,'v');
T = 0.02;
```

```

Gz = c2d(G,T); %converte o processo para
domínio discreto

Gcz = tf([0.5047 -0.4948],[1 -0.999],T); %declara o
controlador digital

numGcz,denGcz] = tfdata(Gcz,'v');

Gmf = feedback(Gc*G,1); %realimentação do
sistema analógico

Gmfz = feedback(Gcz*Gz,1); %realimentação do
sistema digital

step(Gmf) %resposta ao degrau do sistema contínuo

hold on

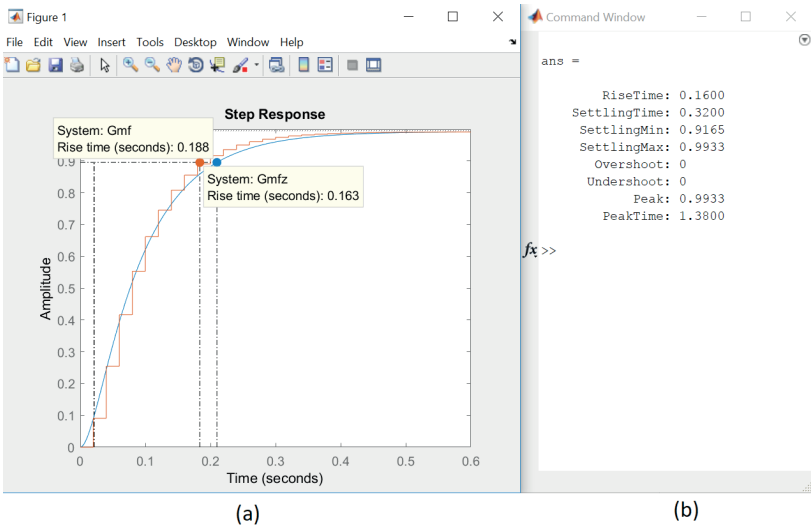
step(Gmfz) %resposta ao degrau do sistema discreto

stepinfo(Gmfz) %características da resposta
ao degrau

```

Como resultado, a resposta ao degrau será exibida conforme a Figura 3.23(a) e o *Command Window* mostrará conforme a Figura 3.23(b):

Figura 3.23 | (a) Resposta ao degrau do sistema discreto; (b) Características da resposta ao degrau no *Command Window*



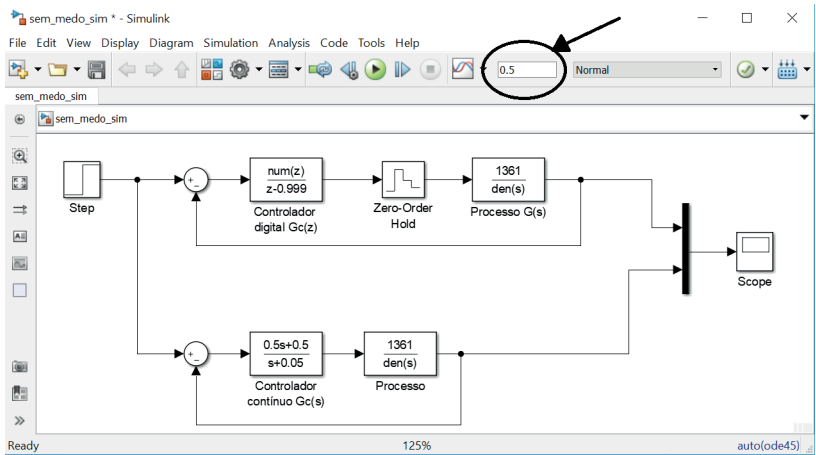
Fonte: Mathworks (2015).

Já podemos observar que não há sobressinal e o tempo de assentamento está inferior a 200 ms, tanto na resposta digital quanto na analógica, portanto o controlador está de acordo com os requisitos. Atente para o fato de o tempo ser diferente nas curvas digital e analógica em aproximadamente 0,02 s, correspondente ao tempo de amostragem do sinal analógico.

Os dados do *Command Window* confirmam as observações gráficas que podem ser obtidas por inspeção visual ou clicando com o botão direito do mouse na tela do gráfico e em seguida *Characteristics*.

Para verificar agora o comportamento do sistema analógico controlador por computador digital, vamos implementar o diagrama de blocos no Simulink utilizando um segurador de ordem zero, conforme a Figura 3.24. Atente para o tempo de simulação que deve ser alterado para 0,5 segundo, pois a resposta do sistema é muito rápida devido à necessidade de bombear o sangue com maior precisão, de acordo com a pressão arterial de referência.

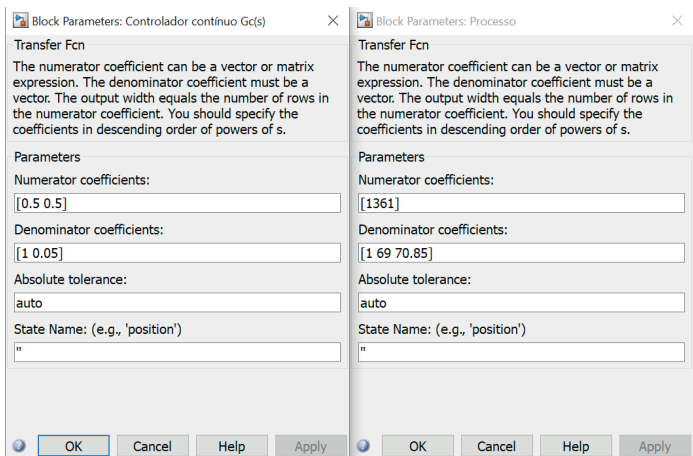
Figura 3.24 | Diagrama de blocos do dispositivo de assistência ventricular elétrica em malha fechada



Fonte: Mathworks (2015).

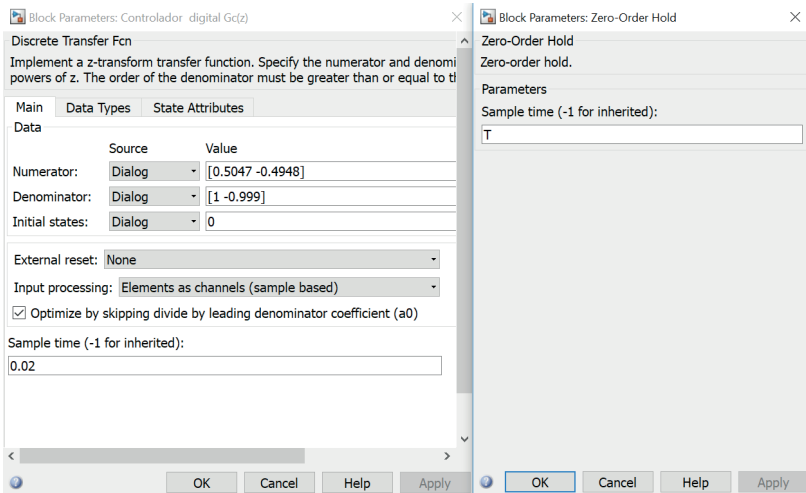
A configuração dos blocos se torna simplificada se importarmos os numeradores e denominadores do *Workspace*, conforme as Figuras 3.25 e 3.26:

Figura 3.25 | Configuração dos blocos contínuos



Fonte: Mathworks (2015).

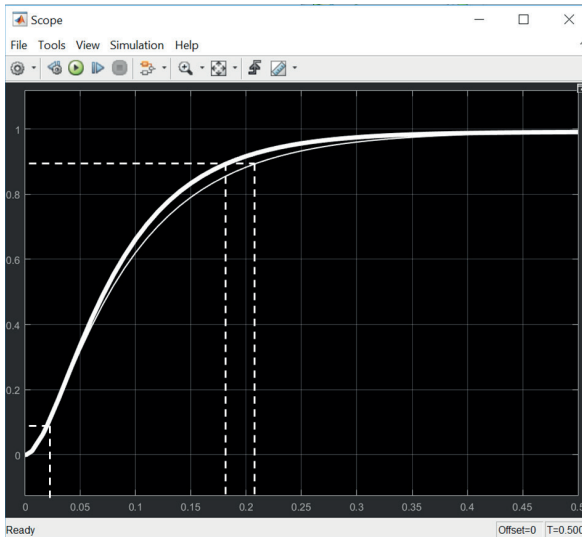
Figura 3.26 | Configuração dos blocos discretos



Fonte: Mathworks (2015).

O resultado do bloco *Scope* pode ser visto na Figura 3.27:

Figura 3.27 | Simulação do sistema analógico controlado por microcontrolador



Fonte: adaptada de Mathworks (2015).

Observe na Figura 3.27 que o tempo de subida pode ser obtido por inspeção visual e corresponde a aproximadamente 0,16 s para o sistema com controlador digital e 0,19 s para o analógico, estando ambos os valores dentro das especificações e sem sobressinal.

Portanto, como parecer final, podemos considerar que o controlador digital se encontra adequado e validado para a aplicação pretendida, pois os requisitos de resposta com sobressinal nulo e tempo de subida de até 200 ms foram atendidos, de maneira que o dispositivo cardíaco auxilie com segurança o bombeamento de sangue do paciente.

Avançando na prática

Análise da posição radial da cabeça de captação de um leitor de DVD

Descrição da situação-problema

Os aparelhos reprodutores de DVDs possuem leitores cuja cabeça de captação deve ter seu controle de posição radial implementado por microcontroladores. Com base nisso, suponha que você seja contratado de uma empresa de eletroeletrônica e sua equipe tenha ficado responsável por analisar e validar um sistema digital que descreve a resposta dinâmica da posição radial da cabeça de captação de um leitor de DVD. Tendo em vista que esse sistema digital deverá ser controlado por um computador digital, é necessário também verificar se a frequência de amostragem está adequada.

Foram dadas a função de transferência do sistema analógico e o período de amostragem desejado, no valor de 0,25 s, conforme informado pela equipe de implementação do amostrador digital.

$$G(s) = \frac{3,6198 \cdot 10^9}{(s^2 + 9,928s + 6,14 \cdot 10^4)(s^2 + 109,9s + 9,327 \cdot 10^4)}$$

Resolução da situação-problema

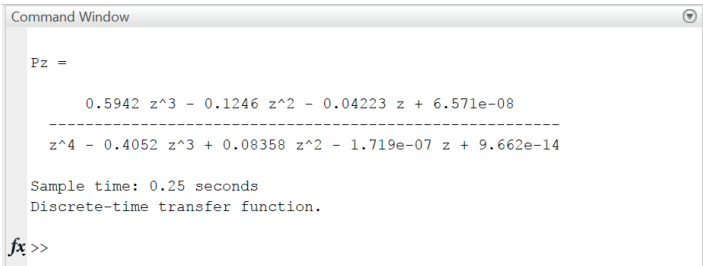
Para analisar e comparar as respostas analógica e digital, vamos obter primeiro um modelo equivalente digital para a frequência solicitada, por meio de linhas de código no Matlab.

A seguinte sequência de códigos pode ser utilizada:

```
clc
clear all
close all
P = tf(3.6198e9,conv([1 9.928 6.14e4],[1 109.9
9.327e4]));
[numP,denP] = tfdata(P,'v');
Ts = 0.25;
Pz = c2d(P,Ts,'zoh')
[numPz,denPz] = tfdata(Pz,'v');
```

A função de transferência digital correspondente ao modelo analógico disponibilizado é exibida no *Command Window* conforme Figura 3.28.

Figura 3.28 | Função de transferência discreta no *Command Window*

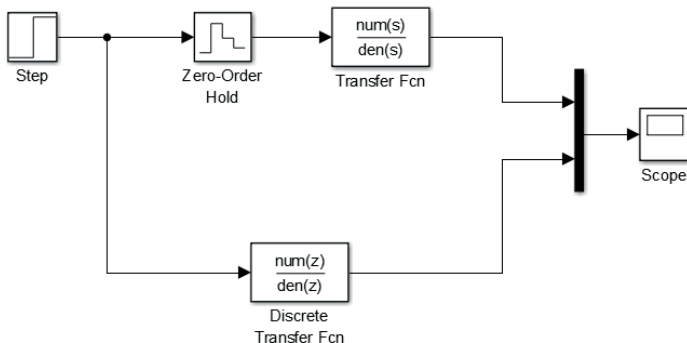


```
Command Window
Pz =
      0.5942 z^3 - 0.1246 z^2 - 0.04223 z + 6.571e-08
-----
      z^4 - 0.4052 z^3 + 0.08358 z^2 - 1.719e-07 z + 9.662e-14
Sample time: 0.25 seconds
Discrete-time transfer function.
fx >>
```


Para validar o modelo discreto, vamos implementar o diagrama de blocos no Simulink, de acordo com a Figura 3.29.

Vamos configurar os parâmetros dos blocos de função de transferência a partir dos numeradores e denominadores obtidos com o comando `tfdata` do script elaborado.

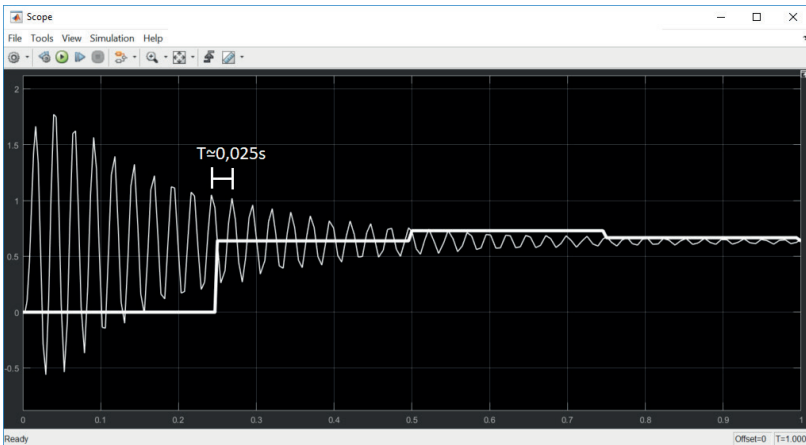
Figura 3.29 | Diagrama de blocos para validação do modelo discreto



Fonte: Mathworks (2015).

O resultado do bloco Scope pode ser visto na Figura 3.30.

Figura 3.30 | Resultado da simulação no bloco Scope



Fonte: Mathworks (2015).

Observe na Figura 3.30 que há uma grande discrepância entre as formas de onda discreta e contínua. Isto ocorreu porque o tempo de amostragem se encontra inadequado para a função de transferência analógica em questão.

Uma vez que a frequência de oscilação da função de frequência analógica fica em torno de 40 Hz a partir de inspeção visual da curva (você pode observar o período das oscilações no gráfico, que corresponde ao tempo entre dois picos positivos da onda, por exemplo, resultando em $T \approx 0,025 \text{ s}$), o ideal neste caso seria um tempo de amostragem inferior a 0,025 s. No entanto, por se tratar da posição da cabeça de captação de um DVD, não é desejável que haja essa oscilação. Além disso, o erro em regime permanente deve ser nulo, pois o posicionamento deve ser preciso. Por este motivo faz-se necessário o projeto de um controlador para o sistema.

Faça valer a pena

1. “Normalmente, o computador digital é colocado no percurso direto, precedendo o processo. São necessárias conversões digital-analógica e analógica-digital no sistema para assegurar a compatibilidade entre os sinais analógicos e digitais ao longo do sistema. O computador digital na malha é modelado como uma estrutura amostrador-segurador juntamente com qualquer compensação que execute.” (NISE, 2009, p. 595)

Dado um processo no domínio contínuo

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

Como podemos obter um modelo equivalente discretizado pelo Matlab, utilizando um tempo de amostragem de 0,5 segundos?

- a) `sysd = ztrans(H, k, z) .`
- b) `sysd = ztrans((s+1)/(s^2+2*s+1), s, z) .`
- c) `sysd = ztrans(tf([1 1], [1 2 1]), k, z) .`
- d) `sysd = d2c(tf([1 1], [1 2 1]), 0.5) .`
- e) `sysd = c2d(tf([1 1], [1 2 1]), 0.5) .`

2. O software Matlab, em conjunto com o Simulink, é muito utilizado como ferramenta de suporte na análise e no desenvolvimento de controladores digitais para sistemas microcontrolados. Alguns comandos simples disponíveis nesta ferramenta possibilitam simplificar cálculos complexos economizando tempo e minimizando a possibilidade de erros.

Sobre a análise de sistemas discretos no software Matlab, relacione os comandos a seguir com as respectivas funções:

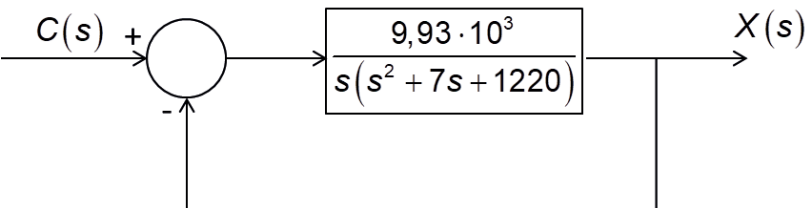
- | | |
|--------------------------|---|
| A. $F = ztrans(f,k,z)$ | I. Computa os polos (P) e zeros (Z) de um sistema |
| B. $f = iztrans(F,z,k)$ | 'sys' contínuo ou discreto. |
| C. $sysd = c2d(sysc,Ts)$ | II. Computa uma discretização do sistema contínuo |
| D. $sysc = d2c(sysd,Ts)$ | "sysc", com tempo de amostragem "Ts". |
| E. $[P,Z] = pzmap(sysd)$ | III. Realiza a transformada Z de uma função simbólica f(k). |
| | IV. Realiza a transformada Z inversa de uma função simbólica F(z). |
| | V. Converte o modelo do tempo discreto "sysd" para o tempo contínuo "sysc" a uma amostragem "Ts". |

- a) A-I, B-V, C-III, D-IV, E-II.
- b) A-II, B-III, C-I, D-IV, E-V.
- c) A-IV, B-V, C-III, D-I, E-II.
- d) A-III, B-IV, C-II, D-V, E-I.
- e) A-III, B-IV, C-V, D-II, E-I.

3. A automação industrial surgiu como uma ideia de se criar um conjunto de estratégias utilizadas para realizar uma tarefa originalmente mental ou manual, executada por gasto de energia humana, de forma automática por meio de equipamentos elétricos e mecânicos. Nos dias atuais, com o avanço das tecnologias disponíveis, o controle destes equipamentos é feito de forma digital, por meio de um computador, microcontrolador ou CLP, otimizando a produção, diminuindo custos, melhorando a qualidade, entre outras vantagens.

Considere uma solda industrial automatizada representada pelo sistema da figura a seguir, onde C(s) é a posição de entrada do objeto a ser soldado e X(s) é a posição da articulação do robô que realiza a soldagem.

Figura | Sistema de solda elétrica industrial executada por robô



Fonte: elaborada pela autora.

Supondo que este sistema seja implementado por microcontrolador, quais são os polos resultantes do sistema discreto, supondo um tempo de amostragem $T = 0,1$ s?

$$a) \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = -0,6658 \\ p_3 = -0,2308 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} p_1 = 0,9642 \\ p_{2,3} = -0,0783 \pm 0,0963i \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -0,8933 \\ p_3 = -0,3270 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{2,3} = -0,8933 \pm 0,3270i \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{2,3} = -0,7047 \end{cases}$$

Referências

- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- FRANKLIN, G. F.; POWEL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de controle para engenharia**. 6. ed. São Paulo: Bookman, 2013.
- MATHWORKS. **Matlab**: Simulink User's Guide. 2017a. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/simulink/sl_using.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2018.
- _____. **Matlab**: Control System Toolbox: User's Guide. 2017b. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/control/usingcontrol.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2018.
- _____. **Matlab R2015a**. 2015. Software. Configuração mínima: Processador Intel ou AMD x86 com suporte a instruções SSE2, 1GB de espaço no HD, 2GB de memória RAM.
- NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PINHEIRO, C. A. M. **Sistemas de controles digitais e processamento de sinais: projetos, simulações e experiências de laboratório**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2017.
- VELONI, A.; MIRIDAKIS, N. **Digital Control Systems: Theoretical Problems and Simulation Tools**. 1. ed. USA: CRC Press, 2018.

Análise e projeto de sistemas de controle digital

Convite ao estudo

Sistemas de controle por computador digital são amplamente utilizados em processos industriais devido às vantagens que eles apresentam. Eles proporcionam um aumento da sensibilidade das medições, diminuição da sensibilidade a ruídos dos sinais, capacidade de reconfiguração do controle via software e diminuição de custos. Além disso, uma vez que um único computador pode desempenhar o papel de diversos controladores analógicos, de acordo com a sua capacidade de processamento, tais características tornam o controlador digital mais utilizado que o controlador analógico nos dias atuais.

Para analisar e projetar sistemas de controle, metodologias de análise e síntese de sistemas e controladores analógicos podem ser utilizadas. Uma das abordagens se dá através da discretização do processo a ser controlado e do compensador analógico resultante do projeto, de acordo com o período de amostragem adotado para a malha digital.

Algumas das técnicas que podem ser utilizadas são aquelas já consolidadas, vistas na disciplina Teoria de Controle Moderno. Para análise, veremos, nesta unidade, o mapeamento do plano s no plano z , transformação bilinear da estabilidade com critério de Routh-Hurwitz, critério de Jury e teorema do valor final. Para projeto de controlador, veremos o ajuste de ganho no plano s por meio da transformada bilinear da estabilidade com critério de Routh, o método do lugar das raízes no plano z , o projeto de compensador digital via transformação bilinear de Tustin e a implementação do PID digital.

Dentre as aplicações de controladores digitais atualmente temos, por exemplo, controle de aeronaves, transmissão de sinais via satélites, sistemas de refrigeração e aquecimento industriais; no nosso cotidiano, em eletrodomésticos, sistemas de telefonia e ar-condicionado, entre outros.

Mas a tecnologia não é utilizada apenas em áreas industriais e de produção. No ramo do entretenimento, temos a aplicação de diversas tecnologias nos esportes. Por exemplo, no futebol, o primeiro sistema de detecção na linha do gol que foi utilizado em uma copa do mundo foi em 2014, onde foram posicionadas ao redor dos dois gols mais de 10 câmeras de alta velocidade, as quais capturaram 500 imagens por segundo. A partir dessas imagens, um sistema de controle calculava a posição da bola a cada dois milissegundos e avisava o árbitro, caso houvesse gol, através de um relógio de pulso inteligente.

Para a transmissão televisionada, além das múltiplas câmeras posicionadas ao redor do campo, as quais permitem a exibição em 360 graus, a tecnologia dos estádios de futebol envolve uma câmera-aranha (*Spidercam*), desenvolvida por Jens C. Peters, em 2000, que consiste em uma câmera suspensa por cabos, fixados no alto e presos nas extremidades do estádio, os quais a movimentam por cima do campo. Antes mesmo de ser aplicada no esporte, essa tecnologia já era amplamente utilizada em shows musicais para gravações de mídias.

Nesse contexto, suponha que você seja contratado por uma emissora de televisão que irá exibir o campeonato brasileiro de futebol. Sua equipe será responsável por analisar, projetar e implementar um controle digital, caso necessário, para uma câmera-aranha a ser instalada no campo, sabendo que o controle dessa câmera é realizado por meio de motores elétricos acoplados às polias que prendem os cabos nas extremidades do estádio.

Veremos, a seguir, todos os conceitos necessários para resolver esse problema de análise, projeto e implementação no domínio digital.

Bons estudos!

Seção 4.1

Estabilidade de sistemas digitais

Diálogo aberto

Olá, nesta primeira seção da Unidade 4, veremos as principais técnicas de análise de estabilidade, resposta dinâmica e de regime permanente de sistemas digitais. Iniciaremos a seção verificando a correspondência entre regiões do plano s e do plano z através do qual o critério de estabilidade de sistemas digitais pode ser deduzido.

Para sistemas lineares digitais complexos ou de ordem elevada, em que o cálculo analítico dos polos se torna mais trabalhoso, será aplicado o critério de Jury, o qual consiste em um método análogo ao critério de Routh-Hurwitz utilizado em sistemas analógicos. Além disso, por meio do mapeamento resultante entre as regiões do plano s e z , será feita uma avaliação das características de resposta transitória dos sistemas digitais, sendo elas a taxa de decaimento, a frequência natural de oscilação e a taxa de amortecimento do sistema. Por fim, faremos a análise de regime permanente por meio do cálculo do erro de estado estacionário, utilizando o teorema do valor final para sistemas digitais.

Para aplicar todos esses novos conceitos, suponha que uma emissora de televisão que irá transmitir o campeonato brasileiro de futebol o contratou para integrar a equipe de projetos responsável pela análise e implementação digital da câmera-aranha (do inglês *spidercam* ou também denominada *cablecama*).

Esse equipamento consiste em uma câmera suspensa sobre o campo de futebol, pendurada por cabos de aço fixados no alto e presos nas extremidades do estádio através de uma polia. O controle da posição da câmera é realizado por meio de motores elétricos acoplados em cada polia, que, por sua vez, são controlados de forma digital por microcontroladores.

O objetivo inicial da sua equipe consiste em elaborar um relatório para o supervisor, constando uma análise de estabilidade e de desempenho em regime permanente do equipamento,

com a finalidade de avaliar se há necessidade de projeto de um controlador digital.

Que resultados você apresentaria ao supervisor em seu relatório nesse caso?

Os caminhos para obtenção dos resultados serão vistos a seguir.

Bons estudos!

Não pode faltar

Na terceira unidade, vimos dois métodos de discretização de sistema, sendo eles através de um segurador de ordem zero ou através de transformação bilinear. Em ambos os casos a taxa de amostragem interfere no resultado da discretização, . Com isso as características da resposta transitória do sistema digital podem ser alteradas, ou até mesmo tornar um sistema estável no plano s em um sistema instável no plano z .

Veremos agora o critério de estabilidade no plano z e as correspondências entre regiões do plano z e s .

Já vimos na unidade anterior que $\mathbf{z} = \mathbf{e}^{sT}$. Supondo que $\mathbf{s} = \mathbf{p}_s = \sigma + j\omega$ seja o polo do sistema contínuo, temos o polo do sistema discreto dado por:

$$\begin{aligned} \rho_z &= e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{(\sigma T+j\omega T)} \\ \rho_z &= e^{\sigma T} [\cos(\omega T) \pm j\text{sen}(\omega T)] \\ \therefore \rho_z &= e^{\sigma T} \angle \omega T \quad (4.1) \end{aligned}$$

Assim, é possível mapear as regiões do plano s no plano z . Caso σ seja maior do que zero ($\sigma > 0$), ou seja, \mathbf{p}_s se localiza no semiplano direito do plano s , temos $e^{\sigma T} > 1$. Portanto os pontos correspondentes ao semiplano direito do plano s são mapeados na região externa a um círculo de raio unitário do plano z , conforme a Figura 4.1.

Caso σ seja menor do que zero ($\sigma < 0$), ou seja, \mathbf{p}_s se localiza no semiplano esquerdo do plano s , temos $e^{\sigma T} < 1$. Portanto, os pontos correspondentes ao semiplano esquerdo do plano s são

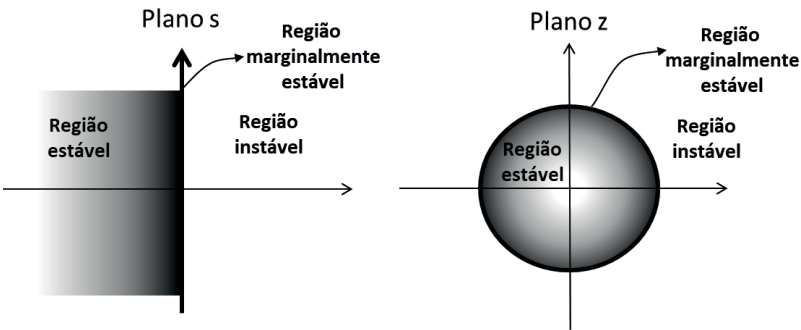
mapeados na região interna a um círculo de raio unitário do plano z, conforme a Figura 4.1.

Por final, caso σ seja igual a zero ($\sigma = 0$), ou seja, p_s se localiza no eixo imaginário do plano s, temos $e^{\sigma T} = 1$. Portanto, os pontos sobre o eixo imaginário do plano s são mapeados na borda do círculo de raio unitário do plano z, conforme a Figura 4.1.

Assim, as raízes da equação característica, ou seja, os polos do sistema, apresentam as seguintes propriedades quanto à estabilidade do sistema digital:

- Estável: se todos os polos da função de transferência estiverem dentro do círculo de raio unitário ($|p_z| < 1$).
- Marginalmente estável: se algum polo estiver localizado na borda do círculo de raio unitário ($|p_z| = 1$).
- Instável: se pelo menos um polo estiver localizado fora do círculo de raio unitário ($|p_z| > 1$).

Figura 4.1 | Correspondência entre regiões do plano s e z



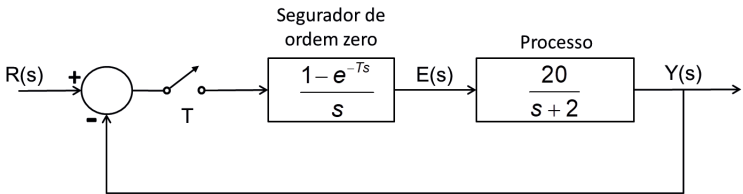
Fonte: elaborada pela autora.

A partir da noção de estabilidade no plano z, é possível verificar o efeito da variação da taxa de amostragem na estabilidade de um sistema de controle em malha fechada quando todos os parâmetros são constantes e realizar projetos de ganhos que tornam o sistema estável em malha fechada (o último será visto na próxima seção).



Determine a faixa de valores do período de amostragem para o qual o sistema a seguir é estável.

Figura 4.2 | Sistema digital com segurador de ordem zero em malha fechada



Fonte: elaborada pela autora.

Resolução: por se tratar de uma realimentação unitária, temos, segundo visto na Unidade 3, que a função do sistema em malha fechada é dada por:

$$G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

Sendo $G(s)$ a função de transferência em malha aberta, composta pelas funções de transferência do segurador e do processo, temos:

$$G(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})20}{s(s+2)} \xrightarrow{\text{Frações parciais}} G(s) = 10(1 - e^{-Ts}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$$

Aplicando a transformada Z:

$$G(z) = Z \left\{ 10(1 - e^{-Ts}) \overbrace{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)}^{\text{quadro 3.1}} \right\} = \frac{10(z-1)}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right)$$

$$\therefore G(z) = \frac{10(e^{2T} - 1)}{ze^{2T} - 1}$$

Em malha fechada temos:

$$G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{10(e^{2T} - 1)}{ze^{2T} + (10e^{2T} - 11)}$$

Analisando os polos:

$$p_z = \frac{10e^{2T} - 11}{e^{2T}} = 11e^{-2T} - 10$$

Para um sistema estável: $|p_z| < 1 \Rightarrow -1 < p_z < 1$

$$\Rightarrow |11e^{-2T} - 10| < 1 \Rightarrow -1 < 11e^{-2T} - 10 < 1$$

$$-1 + 10 < 11e^{-2T} - 10 + 10 < 1 + 10 \Rightarrow 9 < 11e^{-2T} < 11$$

$$\frac{9}{11} < \frac{11e^{-2T}}{11} < \frac{11}{11} \Rightarrow \frac{9}{11} < e^{-2T} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{9}{11}\right) < -2T < \ln(1)$$

$$-0,2 < -2T < 0 \Rightarrow \frac{-0,2}{2} < -T < 0 \quad \times (-1)$$

$$\therefore 0 < T < 0,1$$

Portanto, o sistema digital em malha fechada será estável se $0 < T < 0,1$.

A resolução do exemplo anterior foi possível de ser realizada manualmente, uma vez que o processo possui ordem baixa.

Em sistemas de ordem elevada torna-se difícil calcular a estabilidade através do cálculo das raízes do denominador da função de transferência em malha fechada.

Para contornar esse problema, de forma similar ao critério de Routh-Hurwitz aplicado em sistemas contínuos, vamos utilizar o critério de Jury para verificar o número de polos no plano z estáveis ou instáveis, ou seja, dentro ou fora do círculo de raio unitário sem a necessidade de determinar os valores dos polos.

Considere uma função de transferência discreta:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Onde $N(z)$ é o numerador e $D(z)$ é o denominador da função de transferência. Para aplicar o critério de Jury, vamos utilizar o denominador $D(z)$:

$$D(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n \quad (4.2)$$

Uma tabela deve ser construída onde os coeficientes da equação 4.2 irão compor as primeiras duas linhas, conforme Quadro 4.1. As demais linhas serão compostas da seguinte maneira:

- Linhas pares: formadas pela inversão da ordem de representação dos coeficientes da linha anterior.
- Linhas ímpares: $\text{linha}_i = \text{linha}_{i-2} - \text{linha}_{i-1} \cdot j_{k-1}$, Exemplo: $\text{linha}_3 = \text{linha}_1 - \text{linha}_2 \cdot j_0$

Esse procedimento é repetido até que a última linha da tabela consista em apenas um elemento, como pode ser visto no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 | Construção da tabela para critério de Jury

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	$d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-1} \ d_n$ $d_n \ d_{n-1} \ \dots \ d_1 \ d_0$	$j_0 = \frac{d_n}{d_0}$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$d_0^{n-1} \ d_1^{n-1} \ \dots \ d_{n-2}^{n-1} \ d_{n-1}^{n-1}$ $d_{n-1}^{n-1} \ d_{n-2}^{n-1} \ \dots \ d_1^{n-1} \ d_0^{n-1}$	$j_1 = \frac{d_{n-1}^{n-1}}{d_0^{n-1}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$k = n - 1$	Linha $2k+1$ Linha $2k+2$	$d_0^1 \ d_1^1$ $d_1^1 \ d_0^1$	j_{n-1}
$k = n$		d_0^0	

Fonte: adaptado de Astrom e Wittenmark (1997, p. 81).

O próximo passo é aplicar o critério de Jury:



Se $d_0 > 0$, então, a equação (4.2) possui todas as raízes dentro do círculo de raio unitário (o sistema será estável) se e somente se todo $d_0^{n-k} > 0$ para $k = 1, \dots, n$, (todos os termos da primeira coluna das linhas ímpares positivos). Se nenhum elemento d_0^{n-k} for zero, então o número de elementos d_0^{n-k} negativos é igual ao número de polos fora do círculo de raio unitário. (ASTROM; WITTENMARK, 1997, p. 81, tradução nossa)



Exemplificando

Verifique a estabilidade dos sistemas a seguir, aplicando o critério de Jury:

a)
$$G_1(z) = \frac{1,813z - 1,484}{z^2 + 0,1752z - 0,8138}$$

b)
$$G_2(z) = \frac{6,321z - 2,325}{z^2 + 5,585z - 2,19}$$

Resolução: vamos construir a tabela de Jury para os dois casos. Você pode utilizar um software matemático ou calculadora para acompanhar as operações realizadas.

1- Caso a: $D_1(z) = z^2 + 0,1752z - 0,8138$

Quadro 4.2 | Tabela do critério de Jury para o exemplo a)

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	1 0,1752 -0,8138 -0,8138 0,1752 1	$j_0 = \frac{d_n}{d_0} = \frac{-0,8138}{1} = -0,8138$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$linha_3 = linha_1 - linha_2 \cdot j_0$ 0,3378 0,3178 0,3178 0,3378	$j_1 = \frac{0,3178}{0,3378} = 0,9410$
$k = 2$	Linha 5 Linha 6	$linha_5 = linha_3 - linha_4 \cdot j_1$ 0,0387	

Fonte: elaborado pela autora.

Como $d_0 = 1 > 0$, $d_0^1 = 0,3378 > 0$ e $d_0^0 = 0,0387$, o sistema 1 é estável.

De fato, os polos de $G_1(z)$ são: $z_{1,1} = -0,994$ e $z_{1,2} = 0,8187$, ambos posicionados dentro do círculo de raio unitário no plano z .

2- Caso b: $D_2(z) = z^2 + 5,585z - 2,19$

Quadro 4.3 | Tabela do critério de Jury para o exemplo b)

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	1 5,585 -2,19 -2,19 5,585 1	$j_0 = \frac{d_a}{d_0} = \frac{-2,19}{1} = -2,19$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$linha_3 = linha_1 - linha_2 \cdot j_0$ -3,7966 17,8182 17,8182 -3,7966	$j_1 = \frac{17,8182}{-3,7966} = -4,6932$
$k = 2$	Linha 5 Linha 6	$linha_5 = linha_3 - linha_4 \cdot j_1$ 79,8283	

Fonte: elaborado pela autora.

Nesse caso, o sistema 2 não é estável, pois $d_0^1 = -3,7966 < 0$. Ainda, como temos apenas um d_0^{n-k} negativo, isso indica um polo fora do círculo de raio unitário.

Analisando os polos de $G_2(z)$, obtemos $z_{2,1} = -5,953$ e $z_{2,2} = 0,3679$, ou seja, um dos polos se encontra posicionado fora do círculo de raio unitário do plano z , caracterizando o sistema 2 como instável.



Refleta

Observe que o critério de Jury possui uma semelhança com o critério de Routh-Hurwitz, sendo ambos aplicados a sistemas de ordem maior do que 2, por meio da construção de uma tabela e aplicação de um critério para análise da estabilidade. Sendo o critério de Routh utilizado também para escolha de um ganho K que torne um sistema analógico estável, seria possível utilizar o critério de Jury com o mesmo objetivo, porém para sistemas discretos?

Em sistemas analógicos, os polos da função de transferência em malha fechada, $p_s = \sigma + j\omega$, fornecem informações a respeito da resposta transitória deles. Três características muito comuns a

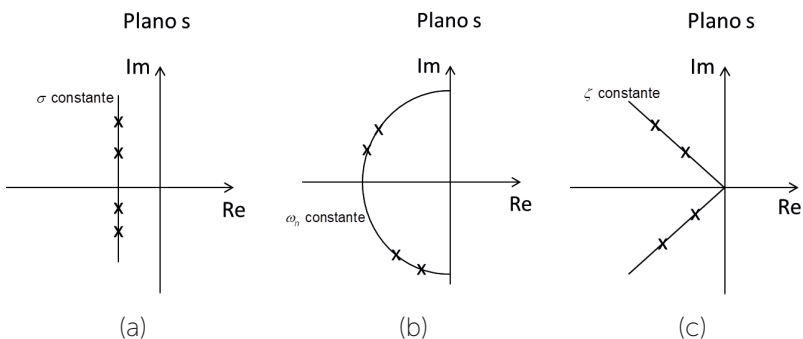
serem analisadas em sistema, obtidas por meio das informações dos polos, são a taxa de decaimento σ , a frequência natural de oscilação $\omega_n = |\rho_s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ e a taxa de amortecimento

$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$; e, com isso, o polo pode ser reescrito como:

$$\rho_s = \sigma + j\omega = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Tais características podem ser observadas no plano s, através do posicionamento dos polos, sendo que as linhas verticais correspondem à taxa de decaimento constante σ , as linhas de módulo ou raio constantes correspondem a frequências naturais de oscilação constante e, por fim, as linhas radiais, a partir da origem correspondem às linhas de amortecimentos constantes (ou sobressinal), conforme a Figura 4.3.

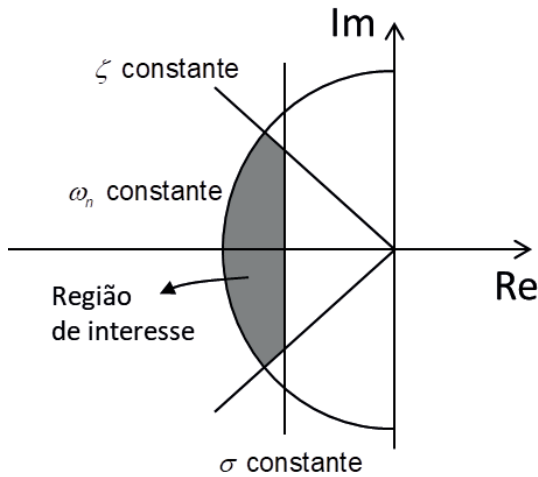
Figura 4.3 | Posicionamento de polos no plano s: (a) taxa de decaimento constante, (b) frequência natural de oscilação constante e (c) taxa de amortecimento constante



Fonte: elaborada pela autora.

Supondo valores específicos que correspondem a requisitos de projeto, resultando em três desigualdades $\sigma \leq \alpha$, $\omega_n \geq \beta$ e $\zeta \geq \gamma$, a interseção dessas três regiões no plano s resulta na Figura 4.4.

Figura 4.4 | Região de interesse de resposta transitória no plano s



Fonte: elaborada pela autora.

De forma similar, podemos associar as características de resposta transitória de um sistema digital observando a posição dos polos no plano z.

Como pode ser visto na equação 4.1, a parte real do polo no plano s corresponde ao módulo (ou raio) no plano z. Assim, no plano z, círculos concêntricos representam uma taxa de decaimento constante para os polos do sistema (normalizados de acordo com a taxa de amostragem), ou seja, $\mathbf{z} = \mathbf{e}^{sT} = \mathbf{e}^{\sigma T} \mathbf{e}^{j\omega T} = r \mathbf{e}^{j\omega T}$ representa círculos com raio r , onde $r = \mathbf{e}^{\sigma T}$ ou $\sigma = \ln(r)/T$, conforme pode ser visto na Figura 4.5 (a).

Já as linhas de raio ou módulo constante do plano s que correspondem à frequência natural de oscilação da resposta são representadas no plano z como linhas curvas, conforme pode ser visto na Figura 4.5 (b). Tais linhas podem ser obtidas por meio da seguinte equação: $\mathbf{z} = \mathbf{e}^{-\zeta\omega_n T} \mathbf{e}^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$, para uma determinada frequência natural ω_n desejada, variando a taxa de amortecimento entre $0 \leq \zeta \leq 1$.

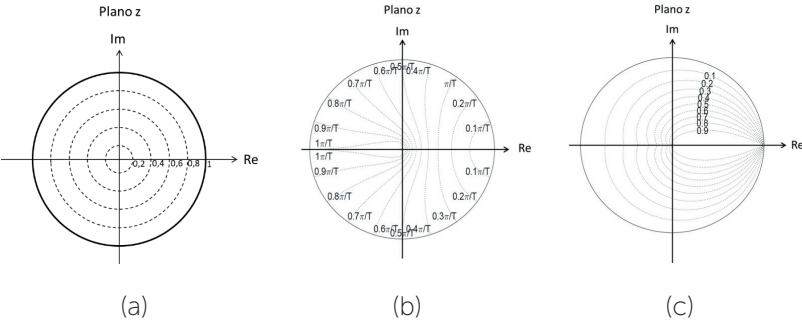
Por fim, as linhas radiais do plano s, que correspondem a taxas de amortecimento constantes, são mapeadas no plano z de acordo com a equação 4.3 e podem ser traçadas no plano z para uma faixa

de valores ωT e uma fração de amortecimento desejada ζ . Essa correspondência pode ser vista na Figura 4.5 (c).

$$p_s = \sigma + j\omega = -\omega \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + j\omega \Rightarrow z = e^{sT} = e^{\left(-\omega T \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + j\omega T\right)}$$

$$\therefore z = e^{-\omega T \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \angle \omega T \quad (4.3)$$

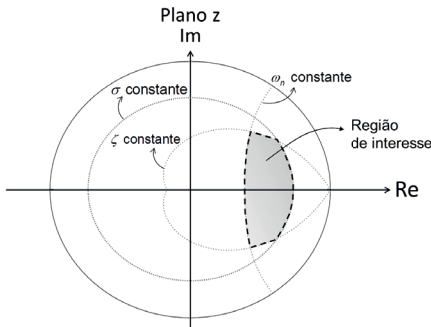
Figura 4.5 | Posicionamento de polos no plano z: (a) taxa de decaimento constante, (b) frequência natural de oscilação constante e (c) taxa de amortecimento constante



Fonte: elaborado pela autora.

A interseção de três regiões correspondentes a desigualdades restritivas para valores específicos que representam requisitos de projeto no plano z, resulta na Figura 4.6.

Figura 4.6 | Região de interesse de resposta transitória no plano z

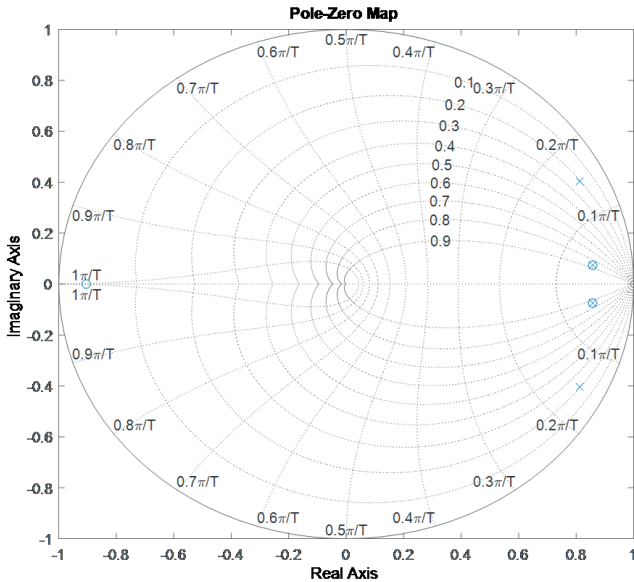


Fonte: elaborada pela autora.



Determine as características de resposta transitória de um processo cujo mapa de zeros e polos no plano z é dado pela Figura 4.7.

Figura 4.7 | Mapeamento de polos e zeros de um sistema digital



Fonte: Matlab R2015a.

Resolução: a partir da Figura 4.7, podemos afirmar que o sistema digital em questão possui um zero e dois pares de polos complexos conjugados, totalizando quatro polos, sendo portanto de quarta ordem.

A partir da posição dos polos podemos afirmar que o sistema é estável, pois os polos se encontram no interior do círculo de raio unitário.

Em relação à frequência natural de oscilação ω_n e fator de amortecimento ζ , podemos afirmar valores aproximados, observados a partir da posição dos polos no mapa:

$$p_{1,2} \simeq 0,8 + j0,4$$

$$\omega_n \simeq 0,15\pi/T \text{ rad/s (entre } 0,1\pi/T \text{ e } 0,2\pi/T)$$

$$\zeta \simeq 0,2 = 20\%$$

$$p_{3,4} \simeq 0,857 + j0,075$$

$$\omega_n \simeq 0,05\pi/T \text{ rad/s (entre } 0 \text{ e } 0,1\pi/T)$$

$$\zeta \simeq 0,85 = 85\%$$

A taxa de amostragem, além de influenciar na estabilidade do sistema digital, nos valores dos polos e, por consequência, em sua resposta transitória, pode afetar também o erro de regime estacionário em sistemas digitais.

Se o sistema digital for estável, ou seja, se todos os polos estiverem no interior do círculo de raio unitário do plano z , o valor em regime permanente pode ser calculado por meio do Teorema do Valor Final (TVF).

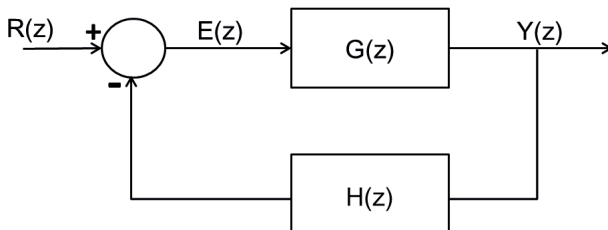
Para sistemas contínuos, o TVF é dado por: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$, desde que todos os polos de $X(s)$ estejam no semiplano esquerdo do plano s .

Uma relação semelhante para sistemas discretos pode ser vista na equação 4.4:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z) \quad (4.4)$$

A partir dessa equação, o erro de regime permanente (ou estacionário) pode ser obtido. Considere o sistema digital da Figura 4.8.

Figura 4.8 | Diagrama de blocos de sistema digital realimentado



Fonte: elaborada pela autora.

A função de transferência do sistema da Figura 4.8 é dada por:

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Equacionando agora o diagrama de blocos para obter a expressão do erro $E(z)$, obtemos:

$$E(z) = R(z) - H(z)Y(z) \quad (4.5)$$

e

$$Y(z) = E(z)G(z) \quad (4.6)$$

Substituindo a equação 4.6 na equação 4.5 e isolando $E(z)$, obtemos a equação 4.7, que contém a expressão do erro de estado estacionário no domínio discreto z .

$$E(z) = R(z) - H(z)E(z)G(z)$$

$$E(z) + H(z)E(z)G(z) = R(z)$$

$$E(z)(1 + H(z)G(z)) = R(z)$$

$$\therefore E(z) = \frac{R(z)}{1 + H(z)G(z)} \quad (4.7)$$

Observe, na equação 4.7, que a expressão do erro depende da entrada aplicada ao sistema. Assim, substituindo essa expressão na equação 4.4, podemos calcular o erro de regime estacionário para cada uma das seguintes entradas: degrau, rampa e parábola, utilizando a equação 4.8.

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + H(z)G(z)} \quad (4.8)$$

(a) Erro de regime estacionário para uma entrada degrau

A expressão do degrau no domínio z é dada pela equação 4.9, como mostra o Quadro 3.1.

$$R(z) = A \frac{z}{z-1} \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) em (4.8), obtemos:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A}{1 + H(z)G(z)} \frac{z}{z-1}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{1 + H(z)G(z)} = \frac{A}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)]}$$

Definindo uma constante de erro K_p como $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)]$, o erro de regime permanente para uma entrada degrau de amplitude A pode ser obtido, conforme a equação 4.10.

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} \quad (4.10)$$

(b) Erro de regime estacionário para uma entrada rampa

A expressão da rampa no domínio z é dada pela equação 4.11, conforme o Quadro 3.1.

$$R(z) = A \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (4.11)$$

Substituindo a equação 4.11 na equação 4.8, obtemos:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{AT}{1 + H(z)G(z)} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT}{1 + H(z)G(z)} \frac{1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT}{(z-1) + H(z)G(z)(z-1)}$$

$$e_{ss} = \frac{AT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) + \lim_{z \rightarrow 1} H(z)G(z)(z-1)} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{H(z)G(z)(z-1)}{T}}$$

Definindo uma constante de erro K_v como $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)(z-1)]$, obtemos o erro de regime permanente para uma entrada rampa, conforme a equação 4.12.

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} \quad (4.12)$$

(c) Erro de regime estacionário para uma entrada parábola

A expressão da parábola no domínio z é:

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (4.13)$$

Substituindo a equação 4.13 em 4.8, obtemos:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{T^2}{1 + H(z)G(z)} \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2/2}{1 + H(z)G(z)} \frac{(z+1)}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)T^2/2}{(z-1)^2 + (z-1)^2 H(z)G(z)}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{[\lim_{z \rightarrow 1} (z+1)T^2/2]}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 + \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z)G(z)} = \frac{T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z)G(z)}$$

Definindo uma constante de erro K_a como

$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z)G(z)$ obtemos o erro de regime permanente para uma entrada parábola, conforme a equação 4.14.

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (4.14)$$



O erro de regime estacionário de um sistema digital, cuja função de

transferência é dada por: $T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$, pode ser calculado

a partir da seguinte expressão: $e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + H(z)G(z)}$.

Resumidamente, temos o erro de estado estacionário para as entradas, degrau, rampa e parábola no Quadro 4.4:

Quadro 4.4 | Erro de estado estacionário de sistemas digitais

Entrada	Erro de estado estacionário
Degrau	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$, $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)]$
Rampa	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$, $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)(z - 1)]$
Parábola	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$, $K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)^2 H(z)G(z)]$

Fonte: elaborado pela autora.



Pesquise mais

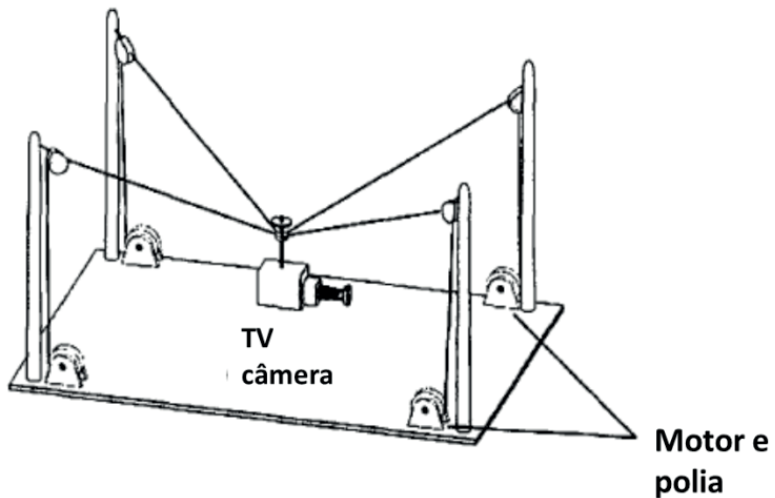
Para obter o erro de estado estacionário de um processo $G(z)$ com realimentação unitária negativa, basta utilizarmos as equações 4.10, 4.12 e 4.14, fazendo $H(z) = 1$. Você pode ver um exemplo de obtenção do erro para as três entradas estudadas em um sistema com essa estrutura na referência a seguir:

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. p. 580, exemplo 13.9.

Sem medo de errar

Suponha que você foi contratado para integrar a equipe técnica da emissora de televisão que irá exibir o campeonato brasileiro de futebol. Sua equipe ficou encarregada de analisar e implementar o controle digital de uma câmera-aranha (do inglês *spidercam* ou também denominada *cablecama*), que consiste em uma câmera suspensa sobre o campo de futebol, pendurada em cabos de aço fixados no alto e presos nas extremidades do estádio, conforme Figura 4.9.

Figura 4.9 | Câmera-aranha em um estádio de futebol



Fonte: adaptada de Dorf (2008, p. 610).

A posição da câmera é controlada através dos motores acoplados em cada uma das polias, cuja função de transferência em malha aberta disponibilizada pelo fabricante, é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s/10+1)} \quad (4.15)$$

Em que a entrada $R(s)$ é a posição desejada e a saída $Y(s)$ é a posição atual.

Inicialmente o supervisor solicitou uma análise a respeito da necessidade de um compensador adicional para o motor e suas características de desempenho dinâmico quando submetido a entradas e saídas amostradas a cada 0,1s.

Resolução: para analisar a necessidade de um compensador para o motor, vamos analisar a sua estabilidade e o seu erro em regime permanente. Uma vez que a posição da câmera deve ser precisa, para captar os principais momentos dos lances, é necessário que o erro em regime permanente seja nulo. Para a análise de estabilidade, todos os polos do sistema devem estar dentro do círculo de raio unitário.

Primeiro, vamos discretizar o sistema:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{10}{s^2(s+1)(s/10+1)} \right\}$$

Abrindo a função em frações parciais, temos:

$$Z \left\{ \frac{10}{s^2(s+1)(s/10+1)} \right\} = Z \left\{ \frac{100}{9} \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{9} \frac{1}{(s+10)} - \frac{11}{s} + \frac{10}{s^2} \right\}$$

Utilizando o Quadro 3.1, que consta na Seção 1 da Unidade 3, obtemos:

$$Z \left\{ \frac{100}{9} \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{9} \frac{1}{(s+10)} - \frac{11}{s} + \frac{10}{s^2} \right\} = \frac{100}{9} \frac{z}{(z-e^{-T})} - \frac{1}{9} \frac{z}{(z-e^{-10T})} - 11 \frac{z}{(z-1)} + 10 \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Substituindo T = 0,1s, obtemos:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \left(\frac{100}{9} \frac{z}{(z-e^{-0.1})} - \frac{1}{9} \frac{z}{(z-e^{-1})} - 11 \frac{z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-1)^2} \right)$$

$$G(z) = z^{-1} \left(\frac{100}{9} \frac{1}{(z-e^{-0.1})} - \frac{1}{9} \frac{1}{(z-e^{-1})} - 11 \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2} \right)$$

$$G(z) = z^{-1} \left(\frac{100/9(z-e^{-1})(z-1)^2 - 1/9(z-e^{-0.1})(z-1)^2 - 11(z-e^{-0.1})(z-e^{-1})(z-1) + (z-e^{-0.1})(z-e^{-1})}{(z-e^{-0.1})(z-e^{-1})(z-1)^2} \right)$$

Cancelando o termo $(z-1)$ do numerador com uma potência do termo do denominador, obtemos:

$$G(z) = \frac{100g'(z-e^{-1})(z-1)^2 - 1g'(z-e^{-0.1})(z-1)^2 - 11(z-e^{-0.1})(z-e^{-1})(z-1) + (z-e^{-0.1})(z-e^{-1})}{(z-e^{-0.1})(z-e^{-1})(z-1)}$$

Após manipulações matemáticas, o resultado fica:

$$G(z) = \frac{0,012874(z+2,895)(z+0,1997)}{(z-1)(z-0,9048)(z-0,3679)} \quad (4.16)$$

$$G(z) = \frac{0,01287z^2 + 0,0398z + 0,0074}{z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329} \quad (4.17)$$

A função de transferência discreta resultante pode ser vista na equação 4.17, mas os polos do sistema digital podem ser facilmente observados ao longo das deduções matemáticas, no denominador das funções, sendo eles mostrados na equação 4.16 como:

$$p_{z1} = 1, \quad p_{z2} = 0,9048 \quad \text{e} \quad p_{z3} = 0,3679$$

Embora não haja nenhum polo fora do círculo de raio unitário (o sistema não é instável), como temos um polo na borda do círculo de raio unitário, podemos caracterizar esse sistema como marginalmente estável. Trata-se do limiar entre a estabilidade e a instabilidade e, por isso, o sistema também não pode ser considerado estável.

Lembrando-se da disciplina Teoria de Controle Moderno, sistemas em malha fechada apresentam uma melhora no comportamento dinâmico de sistemas, eventual estabilização do sistema originalmente instável em malha aberta, rejeição a perturbações externas e diminuição da sensibilidade à variação dos parâmetros da planta. Por esses motivos, sistemas são frequentemente aplicados em malha fechada na prática.

Portanto, para melhorar a estabilidade desse sistema, você pode optar por fechar a malha dele, com realimentação unitária. Sendo assim, temos:

$$G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \quad (4.18)$$

Os polos do sistema em malha fechada $G_{MF}(z)$ são as raízes do denominador de (4.18). Então, temos:

$$D(z) = 1 + \frac{0,01287z^2 + 0,0398z + 0,0074}{z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329}$$

$$1 + \frac{0,01287z^2 + 0,0398z + 0,0074}{z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329} = \frac{z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329 + 0,01287z^2 + 0,0398z + 0,0074}{z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329}$$

$$D(z) = z^3 - 2,2727z^2 + 1,6056z - 0,3329 + 0,01287z^2 + 0,0398z + 0,0074$$

$$\therefore D(z) = z^3 - 2,2598z^2 + 1,6454z - 0,3255$$

Por se tratar de um polinômio de terceira ordem, vamos aplicar o critério de Jury para verificar se ao fechar a malha o sistema se torna estável, eliminando a necessidade de um controlador adicional:

$$D(z) = z^3 - 2,2598z^2 + 1,6454z - 0,3255$$

Quadro 4.5 | Quadro do critério de Jury para o sistema em malha fechada

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	$\begin{matrix} 1 & -2,2598 & 1,6454 & -0,3255 \\ -0,3255 & 1,6454 & -2,2598 & 1 \end{matrix}$	$j_0 = \frac{d_n}{d_0} = -0,3255$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$\begin{matrix} \text{linha}_3 = \text{linha}_1 - \text{linha}_2 \cdot j_0 \\ 0,8941 & -1,7244 & 0,9100 \\ 0,9100 & -1,7244 & 0,8941 \end{matrix}$	$j_1 = \frac{0,9100}{0,8941} = 1,0178$
$k = 2$	Linha 5 Linha 6	$\begin{matrix} \text{linha}_5 = \text{linha}_3 - \text{linha}_4 \cdot j_1 \\ -0,0321 & 0,0307 \\ 0,0307 & -0,0321 \end{matrix}$	$j_2 = \frac{0,0307}{-0,0321} = -0,9558$
$k = 3$	Linha 7 Linha 8	$\begin{matrix} \text{linha}_7 = \text{linha}_5 - \text{linha}_6 \cdot j_2 \\ -0,0028 \end{matrix}$	

Fonte: elaborado pela autora.

Pelo critério de Jury, o sistema em malha fechada com realimentação unitária é instável, pois d_0^{n-k} , $k = 2, 3$ são negativos. Além disso, concluímos que há dois polos fora do círculo de raio unitário, pois há dois elementos d_0^{n-k} no Quadro 4.4 com valor negativo.

Por esse motivo é necessário que um compensador seja projetado para estabilizar e aumentar o amortecimento do sistema.

Dessa forma, temos que o sistema de controle de posição da câmera-aranha em malha aberta é marginalmente estável em malha aberta, apresentando, por esse motivo, um comportamento dinâmico não desejado.

Em malha fechada com realimentação unitária o sistema se torna instável pelo critério de Jury, portanto, para que haja correto posicionamento sobre o campo, a partir de uma referência de posição desejada, é necessário informar ao supervisor a necessidade de ajuste de um compensador digital para o sistema.

Avançando na prática

Análise de funcionamento de um controlador para um dispositivo de assistência ventricular elétrico

Descrição da situação-problema

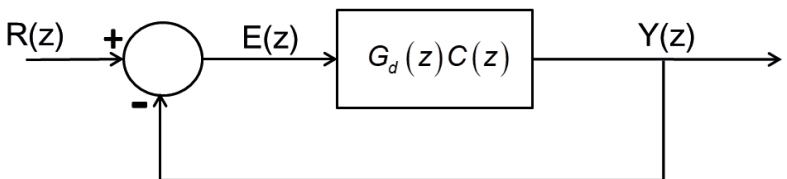
Suponha que você seja o responsável técnico de uma empresa de bioengenharia que fabrica dispositivos de assistência ventricular elétricos que auxiliam no bombeamento de sangue em paralelo com um coração fraco de pacientes cardíacos.

Um controlador foi projetado para o equipamento, mas alguns testes constataram um comportamento indesejado para ele.

O sistema consiste no diagrama de blocos da Figura 4.10, cuja função de transferência em malha aberta do dispositivo $G_d(z)$ em cascata com o compensador $C(z)$, o qual lhe forneceram, é dado por:

$$G(z) = G_d(z)C(z) = \frac{P_{ao,ref}(z)}{E_m(z)} = \frac{0,08665z^2 - 0,02991z - 0,05394}{z^3 - 2,141z^2 + 1,37z - 0,2276}$$

Figura 4.10 | Diagrama de blocos do sistema controlado



Fonte: elaborada pela autora.

Solicitaram que você avaliasse as características dinâmicas desse sistema para verificar o problema.

Resolução da situação-problema

Para verificar o que há de errado com o comportamento do sistema, devemos ter em mente que, por ser um dispositivo auxiliar de bombeamento cardíaco ele deve operar de forma precisa, respondendo a um valor de referência de pressão arterial com estabilidade e erro preferencialmente nulo.

Com base nisso, vamos iniciar analisando a estabilidade desse sistema utilizando o critério de Jury.

$$D(z) = z^3 - 2,054z^2 + 1,34z - 0,2816$$

Quadro 4.6 | Quadro do critério de Jury para o dispositivo ventricular com compensador em malha fechada

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	$\begin{matrix} 1 & -2,054 & 1,34 & -0,2816 \\ -0,2816 & 1,34 & -2,054 & 1 \end{matrix}$	$j_0 = \frac{d_n}{d_0} = -0,2816$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$\begin{matrix} \text{linha}_3 = \text{linha}_1 - \text{linha}_2 \cdot j_0 \\ 0,9207 & -1,677 & 0,7618 \\ 0,7618 & -1,677 & 0,9207 \end{matrix}$	$j_1 = \frac{0,7618}{0,9207} = 0,8274$
$k = 2$	Linha 5 Linha 6	$\begin{matrix} \text{linha}_5 = \text{linha}_3 - \text{linha}_4 \cdot j_1 \\ 0,2905 & -0,2895 \\ -0,2895 & 0,2905 \end{matrix}$	$j_2 = \frac{-0,2895}{0,2905} = -0,9968$
$k = 3$	Linha 7 Linha 8	$\begin{matrix} \text{linha}_7 = \text{linha}_5 - \text{linha}_6 \cdot j_2 \\ 0,0019 \end{matrix}$	

Fonte: elaborado pela autora.

Como $d_0 = 1 > 0$ e todo $d_0^{n-k} > 0$ para $k = 1, \dots, 3$, o sistema é estável, ou seja, todos os polos estão no interior do círculo de raio unitário.

Vamos agora analisar o erro de regime estacionário para resposta ao degrau unitário.

Utilizando a equação 4.14 para $A = 1$ (amplitude do degrau), temos que $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$, sendo que $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [H(z)G(z)]$.

Como a realimentação é unitária, fazemos $H(z) = 1$ e calculamos K_p :

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,08665z^2 - 0,02991z - 0,05394}{z^3 - 2,141z^2 + 1,37z - 0,2276}$$

$$K_p = \frac{0,08665 - 0,02991 - 0,05394}{1 - 2,141 + 1,37 - 0,2276}$$

$$\therefore K_p = 2$$

Calculando agora o valor do erro, temos:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore e_{ss} \approx 0,33$$

Observe que o erro de regime permanente não é nulo, por esse motivo, embora o sistema seja estável em malha fechada, o valor de regime permanente não é capaz de acompanhar o sinal de referência de entrada, sendo necessário elaborar um novo ajuste de controlador para que o equipamento possa ser fabricado e colocado à venda no mercado.

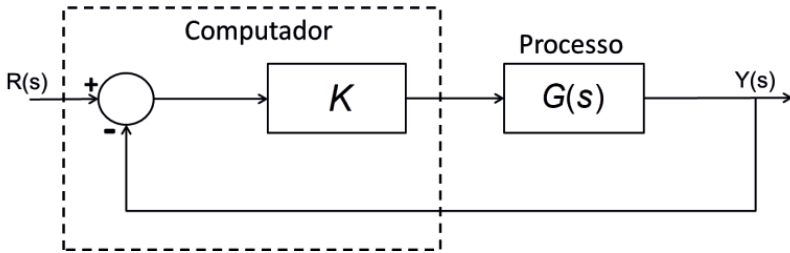
Faça valer a pena

1. O avanço tecnológico que se observa nos dias atuais não teria sido o mesmo sem o processo de industrialização. As linhas de produção, ou linhas de montagem industriais, que foram concebidas por Henry Ford na década de 1920, são consideradas algumas das maiores inovações tecnológicas da era industrial, pelo fato de diminuir significativamente o tempo de produção de peças. A partir disso, houve um avanço da automação industrial, o qual está ligado ao avanço da microeletrônica, ao uso de CLPs e ao desenvolvimento computacional, aliando softwares e hardwares com alta capacidade de processamento. O sistema a seguir consiste na função de transferência em malha aberta de um robô industrial que realiza a pintura de automóveis em uma linha de montagem por meio de uma pistola, cuja entrada é a posição de referência da pistola e a saída é a posição atual dela.

O controle é realizado por um ganho K por meio de um computador digital, conforme a figura *Sistema de controle por ganho em malha fechada*.

$$G(z) = \frac{4,107 \cdot 10^{-3} z + 3,363 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 1,489z + 0,5488}$$

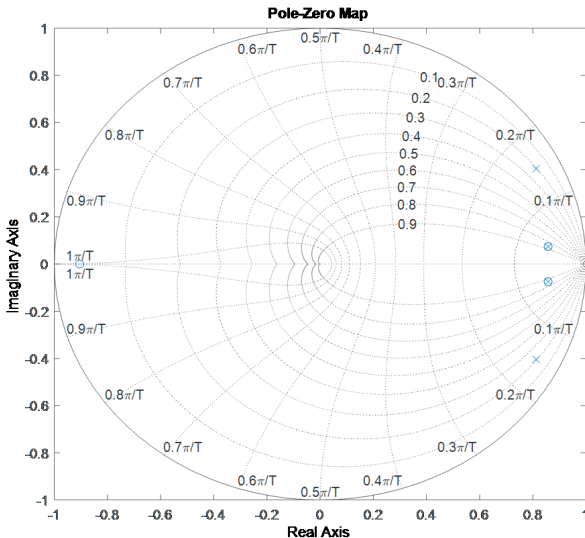
Figura | Sistema de controle por ganho em malha fechada



Fonte: elaborada pela autora.

A seguir, você pode ver na figura *Diagrama de polos e zeros no plano Z* o diagrama de polos e zeros no plano Z do sistema em malha fechada para $K = 28,5$ e uma taxa de amostragem $T = 1s$.

Figura | Diagrama de polos e zeros no plano Z



Fonte: Matlab R2015a.

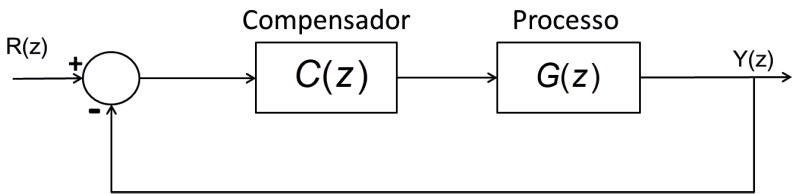
Qual das alternativas apresenta uma boa aproximação da taxa de amortecimento e da frequência natural de oscilação?

- a) $\zeta = 6,28\%$ e $\omega_n = 0,3 \text{ rad/s}$.
- b) $\zeta = 30\%$ e $\omega_n = 6,28 \text{ rad/s}$.
- c) $\zeta = 5,97\%$ e $\omega_n = 0,37 \text{ rad/s}$.
- d) $\zeta = 37,5\%$ e $\omega_n = 5,97 \text{ rad/s}$.
- e) $\zeta = 40\%$ e $\omega_n = 4,71 \text{ rad/s}$.

2. Sistemas de controle realimentados envolvem a comparação da saída com uma referência desejada. O resultado dessa comparação é um sinal de erro que atuará sobre o controlador, que, por sua vez, produzirá uma ação de controle de modo que a saída acompanhe a referência, ou seja, ao final do período transitório de atuação do controle, o erro entre a saída e a referência deverá ser nulo.

Considere o processo da figura a seguir. Ela representa um sistema de controle de posição de um bico dosador de cola, utilizada para colar a borda de um material em um processo de fabricação.

Figura | Sistema de controle por realimentação unitária



Fonte: elaborada pela autora.

Em que:

$$G(z) = \frac{1,264}{z - 0,3679}$$

$$C(z) = \frac{0,3}{z}$$

$$T = 0,03$$

Desconfia-se que o compensador não está adequado à necessidade, uma vez que o controle de posição deve ser preciso, ou seja, o erro de regime permanente deve ser nulo.

Com base nisso, calcule o erro de regime estacionário do sistema em malha fechada, para entrada degrau, e assinale a alternativa correta.

a) $e_{ss} = 1,67 \Rightarrow$ o compensador está adequado para a aplicação desejada.

b) $e_{ss} = 0,625 \Rightarrow$ o compensador não está adequado para a aplicação desejada.

c)

d) $e_{ss} = 0 \Rightarrow$ o compensador está adequado para a aplicação desejada.

e) $e_{ss} = 0,375 \Rightarrow$ o compensador não está adequado para a aplicação desejada.

f) $e_{ss} = 0,625 \Rightarrow$ o compensador está adequado para a aplicação desejada.

3. O critério de Jury pode ser aplicado em sistemas discretos, quando estes possuem ordem elevada ou quando há dificuldade em calcular seus polos. Sua aplicação é análoga à do critério de Routh-Hurwitz e pode ser utilizada para verificar a estabilidade de um sistema digital, projetar um compensador tipo ganho K ou até mesmo para verificar uma faixa de valores de amostragem para as quais o sistema é estável.

Considere um sistema de controle de temperatura representado pela função de transferência em malha aberta $G(s)$ a seguir. Deseja-se controlar a temperatura por meio de um computador digital utilizando um ganho K em cascata com o sistema.

$$G(s) = \frac{0,8}{3s + 1}$$

Utilizando o critério de Jury, determine a faixa de valores de K para o qual o sistema será estável, supondo uma realimentação unitária e $T = 0,5$ s.

a) $0 < K < 15,03$

d) $-8,15 < K < 8,15$

b) $-1,25 < K < 15,03$

e) $0 < K < 8,15$

c) $0 < K < 1,25$

Seção 4.2

Projetos de controle digital

Diálogo aberto

Olá! Nesta segunda seção da unidade veremos algumas abordagens para projeto e implementação de controladores digitais via microcontrolador, sendo uma delas baseada em projeto no plano z e as demais baseadas em projeto no plano s . Assim como a análise de sistemas digitais que vimos na Unidade 3, diversas técnicas de controle clássico e moderno utilizadas em sistemas analógicos podem ser adaptadas e aplicadas em sistemas digitais. Entre essas técnicas temos: lugar das raízes, critério de Routh-Hurwitz, sintonia de PIDs, espaço de estados, entre outros.

Nesta seção veremos inicialmente dois métodos de ajuste de ganho para sistemas digitais. O primeiro deles consiste na análise do gráfico do lugar geométrico das raízes de um sistema em malha aberta $KG(z)$ e o segundo consiste na verificação do critério de Routh-Hurwitz para atender ao critério de estabilidade do sistema $KG(z)$ em malha fechada.

Neste ponto, será visto o conceito de transformada bilinear da estabilidade, que consiste em uma transformação $S \Leftrightarrow Z$ que preserva a estabilidade do sistema e permite a aplicação do critério de Routh para análise ou ajuste de um ganho K .

Em seguida será abordado o projeto de compensadores em cascata e PIDs. Neste livro veremos o método de projeto no plano " s " e transformação para o plano " z " por meio da transformada bilinear de Tustin. Esta transformação $S \Leftrightarrow Z$ preserva o comportamento dinâmico do controlador nos instantes da amostragem, caso o período de amostragem T seja pequeno o suficiente. Veremos então uma forma de determinar o valor desse período de amostragem, com base na resposta em frequência do sistema em controlador em cascata com o sistema em malha aberta.

Feita a escolha adequada do período de amostragem T , a transformada de Tustin pode ser aplicada a controladores

projetados por meio de técnicas analógicas para obter o compensador digital equivalente.

Para aplicar esses novos conceitos, lembre-se de que você é o responsável técnico por implementar o controle de uma câmera-aranha utilizada para o televisionamento de uma partida de futebol, por emissora de televisão. A câmera-aranha consiste em uma câmera suspensa por cabos fixados acima do campo de futebol e presos nas extremidades do estádio, os quais a movimentam por cima do campo permitindo uma visão detalhada dos lances da partida.

A partir de um compensador analógico desenvolvido para o controle de posição da câmera, como pode ser feita a implementação digital deste controlador e como validá-lo??

É o que descobriremos nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

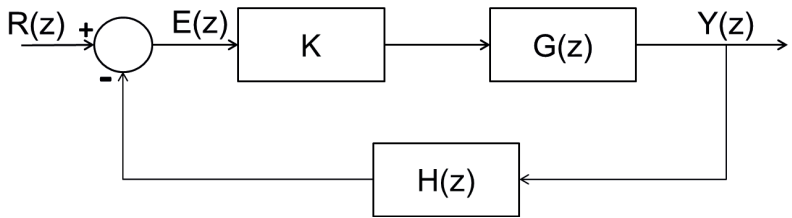
Na seção anterior vimos alguns conceitos sobre análise de sistemas digitais, sendo eles o mapeamento de polos e zeros no plano Z , análise de estabilidade de sistemas digitais, cálculo do erro em regime permanente e o critério de estabilidade de Jury.

Uma vez que essas ferramentas acusem um sistema instável ou fora das especificações desejadas, torna-se necessário o projeto de um controlador digital para adequar o comportamento da resposta de acordo com os requisitos da aplicação, utilizando o método mais adequado.

Veremos nesta seção algumas abordagens para obtenção de controladores digitais, sendo a primeira delas o método do lugar das raízes para sistemas digitais (*root-locus*). Como o próprio nome diz, o lugar das raízes é o caminho percorrido (ou posição ou lugar ocupado no plano complexo) pelas raízes da equação característica do sistema em malha fechada quando um parâmetro real varia de zero a infinito. Geralmente este parâmetro é o ganho do controlador.

Considere o sistema digital em malha fechada, segundo a Figura 4.14.

Figura 4.14 | Malha de realimentação de um sistema de controle digital



Fonte: elaborada pela autora.

Supondo na Figura 4.14 que a realimentação seja unitária, ou seja $H(z) = 1$, e K seja um parâmetro de valor real variável, por exemplo o ganho de um controlador que precisa ser ajustado, temos a seguinte função de transferência em malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)} \quad (4.19)$$

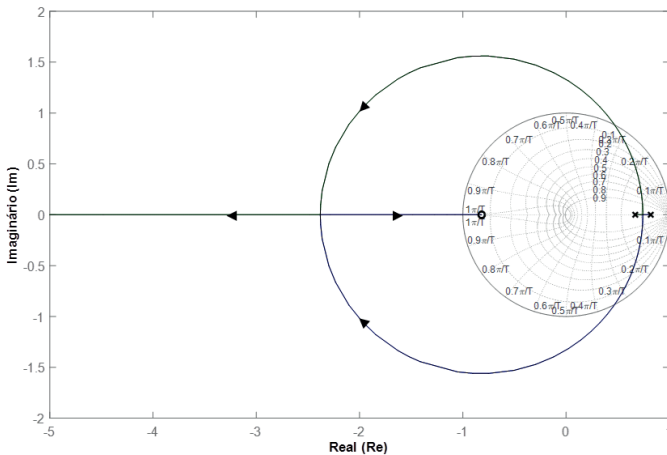
A equação característica do sistema digital em malha fechada é dada por: $1 + KG(z) = 0$. Observe que o formato da equação característica da equação 4.19 é o mesmo de um sistema contínuo, portanto a construção do lugar das raízes de sistemas digitais segue as mesmas regras que a construção do lugar das raízes de um sistema contínuo.

Conforme foi visto na disciplina *Teoria de Controle Moderno*, com a diferença de que a interpretação do gráfico deve ser modificada de acordo com o mapeamento dos polos e zeros, vistos na seção anterior desta unidade, pois as posições dos polos apresentam características de resposta transitória distintas.

A Figura 4.15 apresenta o lugar geométrico das raízes do polinômio característico da função de transferência da equação 4.20.

$$G(z) = \frac{0,004107z + 0,003363}{z^2 - 1,489z + 0,5488} \quad (4.20)$$

Figura 4.15 | Lugar geométrico (rlocus) de G(z)



Fonte: adaptada de Matlab R2015a.

No lugar geométrico das raízes, os polos em malha aberta são representados pelo símbolo 'x' no gráfico da Figura 4.15 e os zeros são representados por 'o', que correspondem a $K = 0$. À medida que o ganho K aumenta, de forma que $K \rightarrow \infty$, a posição dos polos tende para os zeros, cuja representação no gráfico é feita pelas linhas com as setas que vão dos polos aos zeros.

Caso o número de zeros seja inferior ao número de polos, como é o caso da Figura 4.15, a diferença entre eles, ou seja $|n_p - n_z|$, corresponde ao número de trechos (ou assíntotas) que tendem ao infinito.

A partir do lugar das raízes, é possível verificar o limite de K para o qual o sistema é estável, ou seja, podemos observar na Figura 4.15 que a partir de um determinado valor, os polos migram para fora do círculo de raio unitário, caracterizando o sistema como instável. Para este sistema o valor limite é $K = 134$, ou seja, para o intervalo $0 < K < 134$ o sistema digital será estável.

Além disso, podemos utilizar o lugar das raízes para escolher o valor de K de acordo com os requisitos específicos de amortecimento e frequência de oscilação, por exemplo, desejados para a resposta

da saída do sistema, formando uma região de interesse para a localização dos polos, conforme vimos na Seção 1 da Unidade 4 nas Figuras 4.5(b) e 4.5(c).

Também é possível realizar o projeto do ganho K através do plano s . Para isso utiliza-se uma transformada bilinear, que consiste em uma forma de discretizar um sistema contínuo para uma aplicação específica de análise ou projeto.

Para análise de estabilidade do sistema discreto, utilizamos a transformada bilinear da estabilidade, conforme a equação 4.21 ou sua inversa dada pela equação 4.22. Esta transformação $\mathbf{s} \rightleftharpoons \mathbf{z}$ preserva a estabilidade do sistema, ou seja, fornece um sistema discreto estável, caso o sistema contínuo seja estável, o que nem sempre ocorre quando utilizamos a discretização com o segurador de ordem zero, visto na Unidade 3. No entanto, esta transformada não preserva o desempenho transitório do sistema, como amortecimento e frequência de oscilação por exemplo.

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{z} + 1}{\mathbf{z} - 1} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{s} + 1}{\mathbf{s} - 1} \quad (4.22)$$

Aplicando a transformada bilinear da equação 4.22 em um sistema digital $KG(z)$ em malha aberta ou em malha fechada, obtemos um sistema no plano s , $KG(s)$ em malha aberta ou fechada respectivamente, com estabilidade (ou instabilidade) equivalente ao sistema digital.

Para realizar o projeto do ganho K que torna (ou mantém) este sistema estável, basta aplicar o critério de Routh-Hurwitz da mesma forma que você aprendeu na disciplina Teoria de Controle Moderno.

Uma observação importante é que este método de projeto pode ser aplicado a qualquer função de transferência $T(z)$, inclusive a da equação 4.20, permitindo encontrar uma faixa de valores de ganho K que atende apenas ao critério de estabilidade, ou seja, supondo que o sistema digital seja estável em malha fechada, este método não pode ser utilizado para realizar uma melhoria de desempenho

dinâmico (uma vez que o comportamento transitório não é preservado com esta transformada).



Pesquise mais

O critério de Routh-Hurwitz fornece informações sobre a estabilidade de um sistema sem a necessidade de calcular seus polos. Este método é particularmente útil para verificar a estabilidade de sistemas de ordem elevada. O critério de Routh-Hurwitz para análise de estabilidade e projeto de ganho pode ser visto na referência abaixo:

Garcia, Henrique Borges. **Teoria de controle moderno**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017.



Exemplificando

Para o sistema da equação 4.20, utilize a transformada bilinear e o critério de Routh-Hurwitz para obter a faixa de valores em que a aplicação do controle da Figura 4.13 seja estável no plano z , supondo $H(z) = 1$.

Resposta: O sistema em malha aberta é dado por

$$G(z) = \frac{0,004107z + 0,003363}{z^2 - 1,489z + 0,5488}$$

Para a Figura 4.13 temos o sistema em malha fechada dado por:

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}$$

Com o auxílio de computação simbólica em um software, podemos substituir $G(z)$ na equação de malha fechada e obter uma representação numérica simplificada, conforme a seguinte equação:

$$T(z) = \frac{K(0,004107z + 0,003363)}{z^2 + (0,004107K - 1,489)z + (0,5488 + 0,003363K)}$$

Vamos aplicar agora a transformação bilinear da estabilidade,

substituindo $z = \frac{s+1}{s-1}$ em $T(z)$:

$$T(\bar{s}) = \frac{0,1722K\bar{s}^2 - 0,1551K\bar{s} - 0,01717K}{(0,1722K + 1,378)\bar{s}^2 + (20,81 - 0,1551K)\bar{s} + (70,05 - 0,01717K)}$$

Agora vamos aplicar o critério de Routh no denominador de $T(\bar{s})$:

$$D(\bar{s}) = (0,1722K + 1,378)\bar{s}^2 + (20,81 - 0,1551K)\bar{s} + (70,05 - 0,01717K)$$

s^2	$0,1722K + 1,378$	$70,05 - 0,01717K$
s^1	$20,81 - 0,1551K$	0
s^0	$70,05 - 0,01717K$	

A interpretação da tabela de Routh diz que o número de raízes que se situam no semiplano direito é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna.

Assim, para que o sistema seja estável, não pode haver trocas de sinal na primeira coluna, ou seja, todos os termos devem ser positivos, portanto:

$$\begin{aligned} 0,1722K + 1,378 > 0 &\Rightarrow K > -8 \\ 20,81 - 0,1551K > 0 &\Rightarrow K < 134,17 \\ 70,05 - 0,01717K > 0 &\Rightarrow K < 4088 \end{aligned}$$

Como resultado, temos o intervalo de K para o qual o sistema digital é estável em malha fechada:

$$-8 < K < 134,17$$

Usualmente descartamos os valores negativos de K , pois eles causam a inversão do valor de saída devido ao sinal negativo e aumentam ainda mais o erro em regime permanente, resultando assim:

$$0 < K < 134,17$$

Observe que este resultado é semelhante àquele obtido pelo lugar das raízes, porém mais preciso devido aos cálculos e o número de casas decimais consideradas.

Até agora vimos dois métodos de projeto de ganho para sistemas digitais, o primeiro deles via lugar das raízes no plano z

e o segundo via transformada bilinear de estabilidade e critério de Routh no plano s .

No entanto, pode acontecer de apenas um ganho não garantir o desempenho transitório desejado ou erro de regime permanente nulo para o sistema. Dentre algumas dificuldades destes métodos temos:

- O método do lugar das raízes pode não interceptar um ponto desejado no mapa do plano z , ou seja, uma localização a qual descreve um comportamento específico para o sistema.
- O método via Routh-Hurwitz no plano s não permite escolher o valor de K que garanta um desempenho transitório desejado, pois a transformada bilinear utilizada garante apenas a estabilidade entre os sistemas do plano s e z , e não seu comportamento dinâmico.

Para contornar este problema, veremos agora o método de compensação em cascata no plano s . Trata-se do projeto de um compensador no plano s e posteriormente a conversão do compensador contínuo em um compensador digital.

Para isso é utilizada uma transformação bilinear que preserva a resposta do compensador contínuo nos instantes da amostragem. Essa transformação permite converter um compensador contínuo $C(s)$ em um compensador digital $C(z)$ e é denominada *transformação de Tustin*, direta e reversa, expressas pelas equações 4.23 e 4.24 respectivamente.

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (4.23)$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (4.24)$$

Para o projeto do compensador no plano s , há diversas técnicas disponíveis, dentre elas: compensação por avanço e atraso de fase, compensação proporcional (P) integral (I) e derivativa (D) e suas combinações, entre outras.

Uma vez obtida a função de transferência do compensador contínuo $C(s)$, a próxima etapa é determinar uma taxa de amostragem ideal para a aplicação digital.

À medida que o período de amostragem T diminui, z tende à s , ou seja, a saída do compensador digital $C(z)$ se assemelha ao analógico $C(s)$ (esta demonstração pode ser vista em Ogata, 1995, páginas 228 a 230). Portanto se o período de amostragem não for suficientemente pequeno para que haja essa semelhança, podem haver discrepâncias entre as respostas em frequência dos filtros analógicos e digitais para frequências mais altas.

Para selecionar corretamente o período de amostragem T , deve-se verificar a resposta em frequência da associação em cascata do compensador analógico com o processo $C(s)G(s)$ em malha aberta. O valor de T , em segundos, deve ser escolhido entre $0,15/\omega_c$ e $0,50/\omega_c$, onde ω_c corresponde ao valor da frequência (em rad/s) referente ao cruzamento em zero dB da curva de magnitude do diagrama de Bode de $C(s)G(s)$, ou seja, $0,15/\omega_c < T < 0,50/\omega_c$ segundos, método desenvolvido por Astrom e Wittenmark (1984).

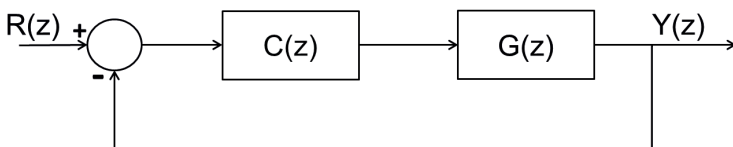
A partir do período de amostragem obtido, o compensador analógico $C(s)$ pode então ser convertido em um compensador digital $C(z)$ aplicando a transformação de Tustin da equação 4.23.



Exemplificando

Considere o sistema da Figura 4.16 em que o processo $G(z)$ é dado pela equação 4.25 e o compensador $C(s)$ projetado para este sistema, a partir de técnicas de controle clássicas resultou na equação 4.26.

Figura 4.16 | Sistema com compensador digital em malha fechada



Fonte: elaborada pela autora.

Deseja-se implementar o compensador por meio de um microcontrolador. Com base nisso, obtenha um compensador

equivalente discreto e um período de amostragem adequado para o sistema.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)} \quad (4.25)$$

$$C(s) = 150 \frac{s+0,7}{s+0,1} \quad (4.26)$$

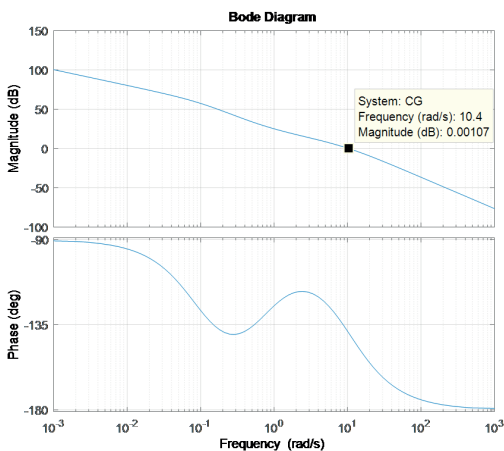
Resolução: para obter um compensador equivalente digital, vamos utilizar a transformação de Tustin da equação 4.23, mas antes precisamos obter um período de amostragem T adequado para o sistema.

Para obter T , é necessário observar a resposta em frequência da associação em cascata do compensador analógico com o processo $C(s)G(s)$.

$$G(s)C(s) = 150 \frac{s+0,7}{s(s+10)(s+0,1)}$$

Utilizando o Matlab para obter o diagrama de Bode deste sistema, obtemos a Figura 4.17.

Figura 4.17 | Diagrama de Bode do sistema contínuo em malha aberta



Fonte: Matlab R2015a.

Do gráfico, obtemos a frequência de cruzamento em zero dB $\omega_c = 10,4 \text{ rad/s}$. Portanto, obtemos uma faixa de valores para T:

$$\frac{0,15}{\omega_c} < T < \frac{0,50}{\omega_c}$$

$$0,0144 < T < 0,0481$$

$$\therefore T=0,02\text{s}$$

Escolhendo $T = 0,02\text{s}$, substituímos a equação 4.23 na equação 4.26 e obtemos o controlador digital $C(z)$:

$$C(z) = 150 \frac{\left(\frac{2(z-1)}{0,02(z+1)} \right) + 0,7}{\left(\frac{2(z-1)}{0,02(z+1)} \right) + 0,1} = 150 \frac{2(z-1) + 0,7 \cdot 0,02(z+1)}{2(z-1) + 0,1 \cdot 0,02(z+1)}$$

$$\Rightarrow C(z) = 150,9 \frac{z - 0,986}{z - 0,998}$$

Um dos compensadores mais utilizados na indústria é o controlador proporcional-integral-derivativo (PID), pela sua facilidade de ajuste e implementação.

A forma geral de um controlador PID analógico é dada pela equação 4.27.

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right] \quad (4.27)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação 4.27 obtemos:

$$U(s) = K_p \left[E(s) + \frac{1}{T_I s} E(s) + T_D s E(s) \right]$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_p}{T_I s} + K_p T_D s \quad (4.28)$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (4.29)$$

Onde K_P , $K_I = \frac{K_P}{T_I}$ e $K_D = K_P T_D$ são os ganhos proporcional,

integral e derivativo respectivamente e T_I e T_D são denominados tempo integrativo e derivativo respectivamente.

Agora vamos deduzir uma aproximação digital para a função de transferência do controlador PID. Fique ciente de que existem diversas abordagens para aproximar um PID digital e fazer um ajuste dos seus parâmetros no plano z.

No entanto, por se tratar de um assunto complexo, veremos aqui a forma genérica de um PID digital, obtido por meio de técnicas de projeto no plano s, aproximado pela transformação de Tustin.

Supondo que um PID analógico tenha sido projetado, na forma da equação 4.28, aplicando a transformação de Tustin, ou seja, substituindo a equação 4.23 na equação do PID 4.28, obtemos:

$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_P}{T_I} \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + K_P T_D \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (4.30)$$

A equação 4.30 mostra uma forma genérica da função de transferência de um PID digital, obtido por metodologias contínuas e aproximadas pela transformação de Tustin.

Na próxima seção desta unidade veremos como é feita a sintonia de PIDs diretamente no plano z, por meio da ferramenta gráfica PIDTuner do Matlab.



Assimile

Para realizar o projeto de um ganho K, que no plano z torne o sistema apenas estável em malha fechada (sem levar em conta a resposta transitória) utilizamos a transformada bilinear da estabilidade e o critério de Routh-Hurwitz.

Se desejarmos melhorar o desempenho dinâmico do sistema no plano z, utilizando apenas um ganho K, podemos utilizar o lugar das raízes do sistema digital em malha aberta.

Para os casos em que o ajuste de um ganho K apenas não é suficiente para atingir uma resposta transitória específica, podemos obter um compensador equivalente discreto, a partir de um compensador originalmente projetado com técnicas no tempo contínuo, utilizando a transformada bilinear de Tustin.



Refleta

A partir da transformada bilinear de Tustin, seria possível tirar conclusões a respeito da estabilidade do sistema digital?

Dica: utilize o software Matlab para aplicar a transformada da equação 4.24 em diferentes valores de $s = \sigma \pm j\omega$. Faça primeiro para valores de s que conduzem a um sistema estável e desenhe no mesmo gráfico o valor de s e o resultado de z para um valor genérico de T . Depois faça em um novo gráfico com os valores de s que conduzem a um sistema instável e o resultado de z . Compare os mapeamentos e tire as conclusões.

Sem medo de errar

Novas tecnologias vêm sendo aplicadas no ramo do entretenimento. Entre elas, a câmera-aranha utilizada nos estádios de futebol para televisionar as partidas, exibindo visão completa de todo o estádio. A câmera-aranha consiste em uma câmera suspensa por cabos fixados acima do campo de futebol e presos nas extremidades do estádio, os quais a movimentam por cima do campo.

Suponha que você seja o responsável técnico por implementar o controle da câmera-aranha para uma emissora de televisão. A equipe de projetos desenvolveu um compensador analógico, mas é necessário que a implementação seja feita por microcontrolador, segundo a Figura 4.18, e cabe a você a tarefa de obter um controlador digital equivalente e validá-lo antes da implementação.

A função de transferência da câmera-aranha, segundo o fabricante, é dada pela equação 4.31.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s/10+1)} \quad (4.31)$$

Onde a entrada $U(s)$ é o sinal de controle e a saída $Y(s)$ é a posição da câmera.

A função de transferência do controlador analógico, desenvolvido pela equipe de projetos, é dada pela equação 4.32.

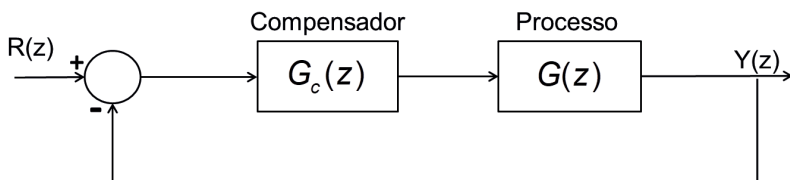
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s+4} \quad (4.32)$$

Onde a entrada $E(s)$ é o sinal de erro entre a posição da câmera e a posição de referência e a saída $U(s)$ é o sinal de controle enviado à planta $G(s)$.

Além disso, a equipe que realizou o projeto do compensador analógico disponibilizou o gráfico de amplitude da resposta em frequência do compensador em cascata com o processo em malha aberta, ou seja, de $G_c(s)G(s)$, que pode ser vista na Figura 4.19.

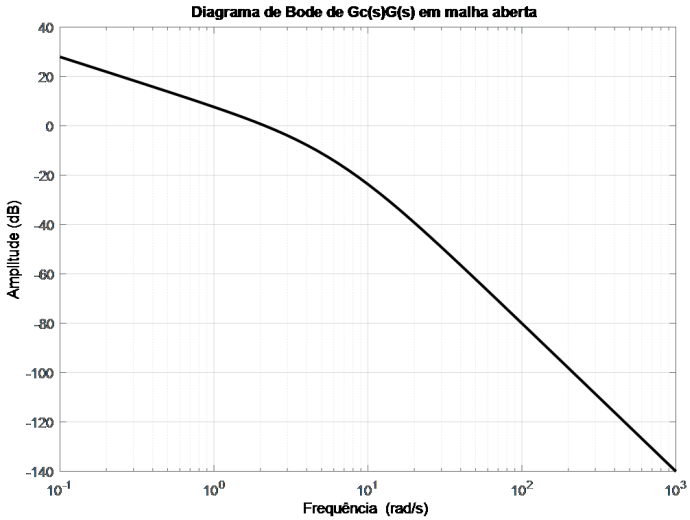
A partir das informações disponibilizadas, como você faria para obter um compensador digital de forma a viabilizar a implementação via microcontrolador?

Figura 4.18 | Estrutura de realimentação do sistema



Fonte: elaborado pela autora.

Figura 4.19 | Diagrama de Bode do processo $G(s)$ em cascata com o compensador $G_c(s)$



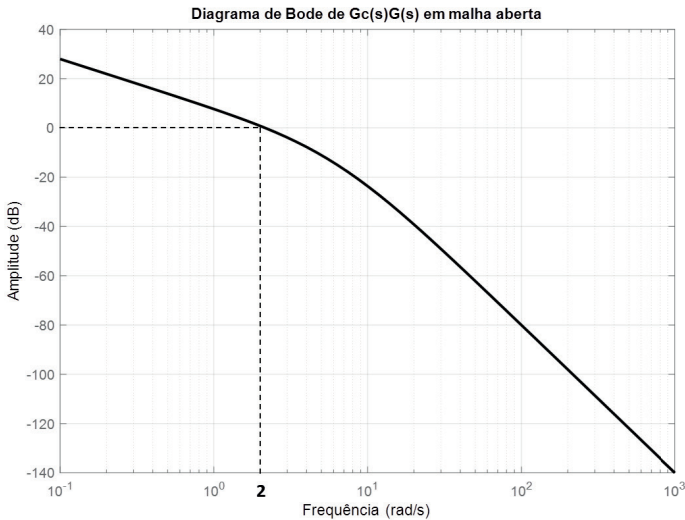
Fonte: Matlab R2015a.

Resolução:

Primeiro vamos utilizar o diagrama de Bode de $G_c(s)G(s)$ em malha aberta para obter um período de amostragem adequado para a aplicação digital.

Por inspeção visual do gráfico, obtemos a frequência de cruzamento em 0dB como sendo $\omega_c \approx 2 \text{ rad/s}$, como mostra a Figura 4.20.

Figura 4.20 | Diagrama de Bode: frequência de cruzamento com 0dB



Fonte: adaptado de Matlab R2015a.

Com esta frequência, obtemos uma faixa de período de amostragem adequado para a aplicação deste controlador:

$$\frac{0,15}{\omega_c} < T < \frac{0,50}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad 0,075 < T < 0,25 \text{ segundo}$$

Lembrando que, quanto menor o período de amostragem, mais o comportamento do controlador digital se aproxima do controlador analógico, e escolhemos arbitrariamente $T = 0,1s$.

Para este valor, a transformação de Tustin fica:

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} = \frac{2(z-1)}{0,1(z+1)} = \frac{20(z-1)}{(z+1)} \quad (4.33)$$

Substituindo a equação 4.33 na 4.32 obtemos:

$$G_c(z) = \frac{\left(\frac{20(z-1)}{(z+1)}\right) + 1}{\left(\frac{20(z-1)}{(z+1)}\right) + 4} = \frac{\left(\frac{20(z-1)}{(z+1)}\right) + \frac{(z+1)}{(z+1)}}{\left(\frac{20(z-1)}{(z+1)}\right) + \frac{4(z+1)}{(z+1)}} = \frac{20(z-1) + (z+1)}{20(z-1) + 4(z+1)}$$

$$G_c(z) = \frac{20z - 20 + z + 1}{20z - 20 + 4z + 4} = \frac{21z - 19}{24z - 16}$$

Manipulando a expressão obtida, obtemos finalmente o controlador digital para o sistema:

$$G_c(z) = 0,875 \frac{z - 0,9048}{z - 0,6667} \quad (4.34)$$

Agora vamos fechar a malha com o controlador digital para analisar os polos e o valor do erro em regime permanente para validar o controlador proposto.

Na seção anterior, calculamos a função de transferência discreta do sistema para $T = 0,1s$, o que resultou em equação 4.16:

$$G(z) = \frac{0,012874(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 1)(z - 0,9048)(z - 0,3679)}$$

Em malha fechada com o controlador digital obtido, temos:

$$G_{MF}(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} = \frac{\frac{0,875(z - 0,9048)}{(z - 0,6667)} \frac{0,012874(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 1)(z - 0,9048)(z - 0,3679)}}{1 + \frac{0,875(z - 0,9048)}{(z - 0,6667)} \frac{0,012874(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 1)(z - 0,9048)(z - 0,3679)}}$$

$$G_{MF}(z) = \frac{0,0113(z - 0,9048)(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 0,6667)(z - 1)(z - 0,9048)(z - 0,3679) + 0,0113(z - 0,9048)(z + 2,895)(z + 0,1997)}$$

Neste ponto, podemos simplificar a equação à mão, utilizando calculadora, ou a ferramenta de computação simbólica do Matlab.

Após manipulações, temos a função de transferência em malha fechada:

$$G_{MF}(z) = \frac{0,11264(z + 2,895)(z + 0,1997)(z - 0,9048)}{(z - 0,2895)(z - 0,9048)(z^2 - 1,725z + 0,7999)}$$

Observe que temos um polo e um zero em 0,9048. Como este valor é menor que 1, o polo é caracterizado como estável e, portanto, faremos o cancelamento do numerador com o denominador. Para casos em que o polo é instável, não é interessante fazer o cancelamento, pois pode mascarar a instabilidade nos cálculos seguintes.

O resultado em malha fechada fica:

$$G_{MF}(z) = \frac{0,11264(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 0,2895)(z^2 - 1,725z + 0,7999)}$$

Calculando as raízes do denominador temos:

$$z - 0,2895 = 0 \Rightarrow z_1 = 0,2895$$

$$z^2 - 1,725z + 0,7999 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = 0,8624 \pm j0,2378 = 0,8944 \angle \pm 15,3552^\circ$$

Como todos os polos estão no interior do círculo de raio unitário, ou seja, $|z_i| < 1$, então o sistema é estável.

Para finalizar, vamos analisar o erro de regime permanente. Na Seção 1 desta unidade vimos na equação 4.10 que para a

entrada degrau unitário, o erro é dado por $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$, sendo

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [G_c(z)G(z)].$$

Para o sistema de monitoramento do estádio, por meio da câmera-aranha temos:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [G_c(z)G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,0113(z - 0,9048)(z + 2,895)(z + 0,1997)}{(z - 0,6667)(z - 1)(z - 0,9048)(z - 0,3679)}$$

$$\therefore K_p \rightarrow \infty$$

Com isso temos o erro nulo, pois: $e_{ss} = \frac{1}{1 + \infty} \Rightarrow e_{ss} = 0$.

Portanto, o controlador digital obtido pela transformação de Tustin, visto na equação 4.34, é adequado para a aplicação de controle de posição da câmera-aranha, fornecendo um sistema estável em malha fechada e com erro de regime estacionário nulo.

Ajuste de ganho para um controlador de orientação de uma estação espacial

Descrição da situação-problema

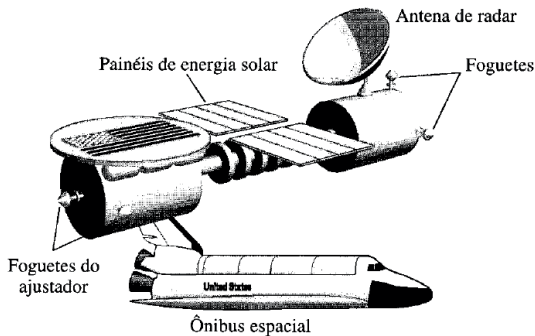
Em 2019 o Brasil pretende lançar seu primeiro foguete ao espaço (MALTCHIIK, 2017), com estrutura mostrada na Figura 4.21. Um dos problemas é manter a aeronave com orientação direcionada ao Sol e à Terra para gerar energia e comunicação. O controlador digital de orientação pode ser representado por um sistema com realimentação unitária, em cascata com a função de transferência da nave espacial, e pode ser visto na equação 4.35, segundo disponibilizado pelo fabricante.

$$G_c(z)G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353} \quad (4.35)$$

Sendo a entrada $R(z)$ a posição de referência e a saída $Y(z)$ a posição efetiva da nave.

Você como responsável técnico da Aeronáutica ficou encarregado de obter uma faixa de valores de K adequado para que o sistema seja estável. Como você poderia proceder para atingir este objetivo?

Figura 4.21 | Estrutura de uma nave espacial



Fonte: Dorf (2011, p. 303).

Resolução da situação-problema

Para encontrar a faixa de valores de ganho que torna este sistema estável, vamos aplicar a transformação da estabilidade na função de transferência em malha fechada e em seguida o critério de Routh-Hurwitz.

Sabemos que $G_{MF}(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$. Substituindo $G_c(z)G(z)$ temos:

$$G_{MF}(z) = \frac{\frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353}}{\frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353} + 1} = \frac{\frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353}}{1 + \frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353}}$$

$$G_{MF}(z) = \frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353 + K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}$$

Manipulando a equação, obtemos:

$$G_{MF}(z) = \frac{K(z^2 + 0,112z - 0,0364)}{z^3 + (K - 1,7358)z^2 + (1,1206K + 0,8711)z + (-0,0364K - 0,1353)}$$

Aplicando a transformação bilinear da equação 4.22

$$z = \frac{s+1}{s-1} \text{ obtemos:}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{K \left(\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^2 + 0,112 \left(\frac{s+1}{s-1} \right) - 0,0364 \right)}{\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^3 + (K - 1,7358) \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^2 + (1,1206K + 0,8711) \left(\frac{s+1}{s-1} \right) + (-0,0364K - 0,1353)}$$

Fazendo MMC no numerador e denominador, resulta:

$$G_{MF}(s) = \frac{\frac{K}{(s-1)^2} [(s+1)^2 + 0,112(s+1)(s-1) - 0,0364(s-1)^2]}{\frac{1}{(s-1)^3} [(s+1)^3 + (K - 1,7358)(s+1)^2(s-1) + (1,1206K + 0,8711)(s+1)(s-1)^2 + (-0,0364K - 0,1353)(s-1)^3]}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{K(s-1) [(s+1)^2 + 0,112(s+1)(s-1) - 0,0364(s-1)^2]}{(s+1)^3 + (K - 1,7358)(s+1)^2(s-1) + (1,1206K + 0,8711)(s+1)(s-1)^2 + (-0,0364K - 0,1353)(s-1)^3}$$

Para aplicar o critério de Routh-Hurwitz o interesse é apenas no denominador da função de transferência, portanto vamos manipular apenas ele:

$$D(s) = (s+1)^3 + (K - 1,7358)(s+1)^2(s-1) + (1,1206K + 0,8711)(s+1)(s-1)^2 + (-0,0364K - 0,1353)(s-1)^3$$

$$D(s) = (2,0842K)s^3 + (0,799 - 0,0114K)s^2 + (3,4588 - 2,2298K)s + (0,157K + 3,7422) + 2,0842$$

$$\therefore D(s) = (K)s^3 + (0,3834 - 0,0055K)s^2 + (1,6595 - 1,0699K)s + (0,0753K + 1,7955)$$

Montando a tabela de Routh para $D(s)$ temos:

s^3	K	$1,6595 - 1,0699K$
s^2	$0,3834 - 0,0055K$	$0,0753K + 1,7955$
s^1	$\frac{(0,3834 - 0,0055K)(1,6595 - 1,0699K) - K(0,0753K + 1,7955)}{0,3834 - 0,0055K}$	
s^0	$0,0753K + 1,7955$	

O critério de Routh-Hurwitz diz que, para que o sistema seja estável, não pode haver troca de sinal na primeira coluna entre uma linha e a próxima. Sendo K positivo, ou seja, $K > 0$, temos que os termos da primeira coluna em todas as linhas devem ser positivos.

Para as linhas s^2 e s^0 :

$$0,3834 - 0,0055K > 0 \Rightarrow K < 69,09$$

$$0,0753K + 1,7955 > 0 \Rightarrow K > -22,84$$

Para a linha s^1 , vamos analisar separadamente:

$$\frac{(0,3834 - 0,0055K)(1,6595 - 1,0699K) - K(0,0753K + 1,7955)}{0,3834 - 0,0055K} = \frac{-0,0695K^2 - 2,2147K + 0,6362}{0,3834 - 0,0055K} > 0$$

Para um resultado positivo, temos que, ambos numerador e o denominador sejam positivos, ou ambos sejam negativos. Como o denominador, que também corresponde ao termo da primeira coluna da linha s^2 , deve ser positivo, então o numerador deve ser positivo também.

Portanto $-0,0695K^2 - 2,2147K + 0,6362 > 0$. Para resolver, vamos primeiro encontrar as raízes da equação.

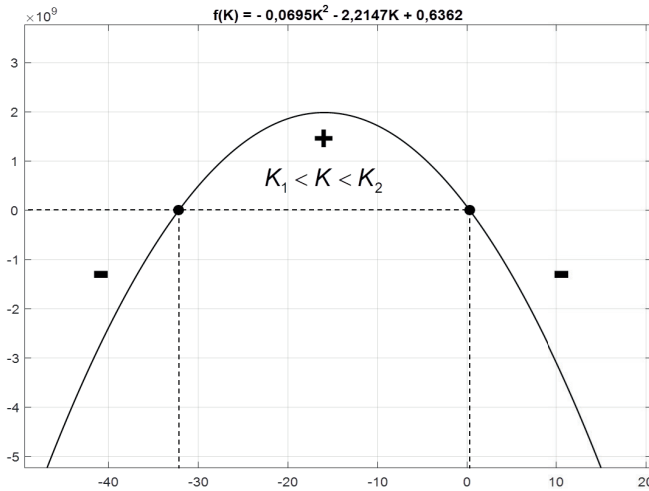
$$-0,0695K^2 - 2,2147K + 0,6362 = 0 \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{-2,2147 - \sqrt{2,2147^2 - 4 \cdot 0,0695 \cdot (-0,6362)}}{2 \cdot 0,0695} = -32,162 \\ K_2 = \frac{-2,2147 + \sqrt{2,2147^2 - 4 \cdot 0,0695 \cdot (-0,6362)}}{2 \cdot 0,0695} = 0,2847 \end{array} \right.$$

Como o coeficiente de K^2 é negativo, o gráfico desta equação é uma parábola com a curvatura voltada para baixo, conforme a Figura 4.22.

A partir dela, observamos que para a função ser positiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} K > -32,162 \\ K < 0,2847 \end{array} \right.$$

Figura 4.22 | Gráfico em parábola de uma equação de segundo grau negativa



Fonte: elaborado pela autora.

Descartando todas as possibilidades de K negativo, temos as seguintes restrições finais que garantem estabilidade ao sistema:

$$\begin{cases} K < 69 \\ K < 0,2847 \end{cases} \quad \therefore 0 < K < 0,2847$$

Faça valer a pena

1. Na análise e projeto de sistemas de controle digitais, diversas técnicas de controle clássico e moderno aplicadas em sistemas de controle analógicos podem ser adaptadas para aplicação em sistemas de controle digitais, podendo destacar, lugar das raízes, critério de Routh-Hurwitz, sintonia de PIDs, espaço de estados, entre outros.

A respeito do projeto de controladores digitais, assinale a alternativa que contém apenas afirmações verdadeiras.

- I. Podemos aplicar o método do lugar das raízes para sistemas discretos, apenas por meio de uma transformada bilinear que permite esta análise.
- II. Para obter a faixa de valores de K que torne o sistema digital estável em malha fechada podemos aplicar o critério de Routh-Hurwitz através de uma transformada bilinear.

III. A transformada bilinear da estabilidade e a transformada bilinear de Tustin possuem a mesma aplicação, por este motivo tanto faz usar uma ou outra para projeto de controladores digitais.

IV. Uma forma de realizar o projeto de um compensador digital é fazer o projeto analógico, por técnicas de controle clássico, e em seguida utilizar a transformada de Tustin para obter o equivalente digital.

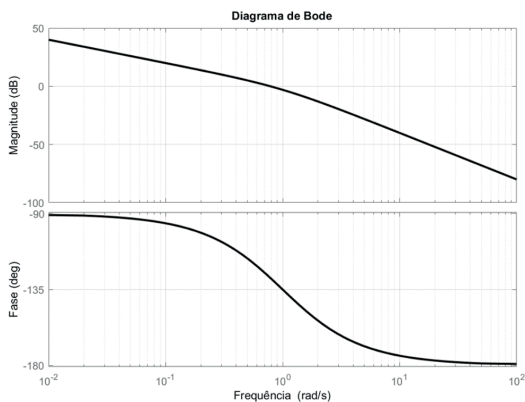
V. Para obter o controlador equivalente digital através da transformada de Tustin, é necessário escolher um período de amostragem adequado, baseado na frequência de cruzamento em 0dB do diagrama de Bode do controlador em cascata com o processo.

- a) I, II, III e V são verdadeiras.
- b) I, II, IV e V são verdadeiras.
- c) I, II e V são verdadeiras.
- d) II, IV e V são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

2. A extrusora é um equipamento amplamente utilizado na indústria de polímeros para a fabricação de peças plásticas contínuas. Durante o processo de extrusão é necessário aquecer o polímero de forma gradual para que o mesmo possa ser moldado em uma forma pré-determinada que pode ser utilizada para diversas finalidades, por exemplo para a produção de tubos, maçanetas, trilhos para portas e janelas deslizantes, peças para automóveis, entre outros.

A Figura 4.23 mostra a resposta em frequência de um sistema de controle de temperatura de uma extrusora em malha aberta.

Figura 4.23 | Diagrama de Bode do sistema de controle da extrusora em malha aberta



Fonte: Matlab R2015a.

Com base na Figura 4.23, assinale a alternativa que corresponde a uma faixa adequada para o período de amostragem T supondo a implementação do controle de temperatura digital.

- a) $0,1875 < T < 0,6250$ s.
- b) $0,1250 < T < 0,6250$ s.
- c) $0,12 < T < 0,40$ s.
- d) $0,08 < T < 0,40$ s.
- e) $0,08 < T < 0,8$ s.

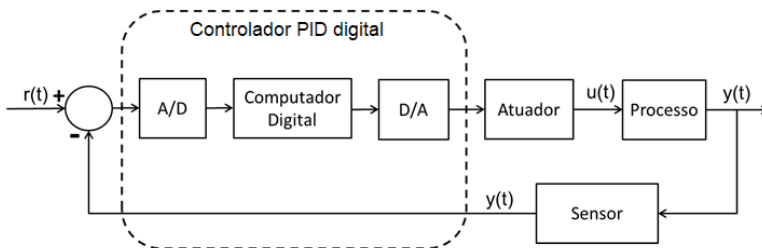
3. “O controlador digital é utilizado em praticamente todas as plantas industriais, dispondo hoje no mercado de diversas plataformas de hardware para implementação dos mesmos, tais como microcontroladores e controladores lógicos programáveis (CLPs). Uma alternativa para a execução de controladores digitais são os FPGAs (*Field Programmable Gate Array*), que consistem em dispositivos lógicos programáveis muito versáteis e de baixo consumo de energia. Entre as vantagens da utilização de FPGAs tem-se que os mesmos podem ser usados para projetos complexos e possuem alta velocidade de operação” (BEZERRA, 2010, p. 15).

A Figura 4.24 mostra uma malha de controle de um pêndulo, cuja planta é composta por um motor fixo a uma haste móvel. O papel do controle é manter essa haste estável em um ângulo pré-determinado em relação ao solo. O controlador atua sobre o motor através de um PWM (Pulse Width Modulation).

Dados os valores de K_p , T_d e T_i do PID analógico e considerando que o controlador obtido será implementado por meio de um microcontrolador, obtenha um PID digital para este sistema, considerando tempo de amostragem $T = 0,01s$.

Dados: $T_i = 0.378$; $T_d = 0.302$; $K_p = 8.5263$.

Figura 4.24 | Malha de controle digital da posição angular do pêndulo



Fonte: elaborado pela autora.

$$\text{a) } G_{PID}(z) = \frac{2,58z^2 + 3,31z + 8,76}{z}$$

$$\text{b) } G_{PID}(z) = 2,58 \frac{z^2 + 3,31z + 8,76}{z}$$

$$\text{c) } G_{PID}(z) = 523,63 \frac{(z^2 - 1,967z + 0,967)}{(z^2 - 1)}$$

$$\text{d) } G_{PID}(z) = \frac{(523,63z^2 - 1,967z + 0,967)}{(z^2 - 1)}$$

$$\text{e) } G_{PID}(z) = 523,63 \frac{(z^2 - 1,967z + 1)}{(z^2 - 1)}$$

Seção 4.3

Estabilidade e projeto de controlador digital com uso de software

Diálogo aberto

Olá! Esta é a última seção deste livro e estaremos encerrando o ciclo de conhecimentos básicos em controle por espaço de estados e controle digital (sim, conhecimentos básicos, pois existem diversas técnicas avançadas de projetos, por exemplo: controle robusto e controle adaptativo, que podem ser encontradas na literatura).

Então, para finalizar esta jornada, veremos os comandos básicos utilizados em Matlab para projetar e analisar sistemas digitais de forma rápida e muito mais simplificada do que realizar cálculos à mão, como vínhamos fazendo nas Seções 1 e 2 desta unidade.

Veremos a análise do diagrama de polos e zeros (pzmap) no plano z , projeto de ganho pelo lugar das raízes, discreto a discretização pela transformação de Tustin para compensadores analógicos e sintonia de PID digital pelo PIDTuner e sua implementação no Simulink.

Para aplicar esses novos conceitos, vamos retomar o sistema de controle da câmera-aranha sobre um campo de futebol. A equipe de projeto simulou o controlador atual e chegou à conclusão de que é necessária uma resposta mais rápida para o sistema.

Neste caso é desejável que o tempo de acomodação em 2% seja ao menos a metade do tempo de acomodação praticado pelo controlador atual, uma vez que os lances futebolísticos ocorrem em frações de milésimos de segundos e a câmera deverá se mover rapidamente para não perder as jogadas.

Tendo em vista que a implementação será realizada por microcontrolador, cabe a você obter um novo controlador digital que atenda ao requisito de resposta imposto.

Quais comandos você poderia utilizar para executar este projeto?

Vamos descobrir nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

Nas seções anteriores, vimos que um sistema discreto é considerado estável apenas se todos os seus polos estiverem no interior de um círculo de raio unitário do plano z . Vimos também suas características de resposta transitória associando as regiões de posicionamento de polos entre os planos ' s ' e ' z '.

Caso o sistema seja instável ou de baixo amortecimento, algumas técnicas de síntese para sistemas digitais podem ser aplicadas, entre elas está o ajuste de ganho por meio do lugar geométrico das raízes e a discretização de um compensador em cascata por meio da transformada bilinear de Tustin sobre um controlador projetado por técnicas analógicas.

Nesta última seção do livro, veremos comandos simples; alguns deles já foram vistos na disciplina Teoria de Controle Moderno e nas seções anteriores deste livro, cuja aplicação pode ser estendida aos sistemas discretos - inclusive a ferramenta 'SISO Design Tool' (`sis_tool`), que pode ser utilizada para projeto de controladores PID digitais, amplamente utilizados na automação industrial, conforme mostra o Quadro 4.1.

Quadro 4.1 | Comandos para análise de estabilidade e projeto de sistemas discretos em Matlab

Comando	Descrição
<code>sysd = tf(num,den,T)</code>	Declara uma função de transferência discreta com tempo de amostragem T .
<code>[P,Z] = pzmap(sysd)</code>	Computa os polos (P) e zeros (Z) de um sistema ' <code>sys</code> ' contínuo ou discreto.
<code>zgrid</code>	Gera linhas de grade no plano z para o mapa de polos e zeros discretos (<code>pzmap</code>).
<code>step(sysd)</code>	Desenha a resposta ao degrau de um sistema dinâmico contínuo ou discreto.
<code>impulse(sysd)</code>	Desenha a resposta ao impulso de um sistema dinâmico contínuo ou discreto.

Comando	Descrição
<code>rlocus(sysd)</code>	Desenha o lugar das raízes de um sistema para analisar a malha de realimentação negativa.
<code>sysd = c2d(sysc, T, método)</code>	Computa um sistema discreto <code>sysd</code> utilizando um método escolhido a partir de um sistema contínuo <code>sysc</code> , um tempo de amostragem <code>T</code> .
<code>pidTuner(sysd, tipo)</code>	Abre uma ferramenta para projeto de PID para sistemas dinâmicos contínuos ou discretos.
<code>pid(C)</code>	Exibe o controlador <code>C</code> no formato de PID com as respectivas constantes proporcional, integral e/ou derivativa.

Fonte: elaborado pela autora.

Na Seção 3 da Unidade 3 já havíamos estudado o comando `pzmap`. Este comando calcula os polos e zeros de um sistema, seja ele analógico ou discreto, e pode salvá-los em vetores se utilizado conforme consta no Quadro 4.1 (`[P,Z] = pzmap(sys)`), ou abrir um gráfico com o posicionamento dos polos e zeros no plano complexo se utilizado sem especificar as variáveis de saída (`pzmap(sys)`). No gráfico, os polos são representados por 'x' e os zeros por 'o'.

Se utilizarmos da segunda forma seguida pelo comando `zgrid`, surgem no gráfico linhas de grade, conforme vimos anteriormente. O que muda aqui é que agora sabemos o significado dessas linhas, ou seja, podemos observar as regiões de taxa de decaimento, frequência e taxa de amortecimento constantes, permitindo caracterizar a resposta transitória de um sistema digital.

Para declarar uma função de transferência diretamente em sua forma discreta, utilizamos o comando `sysd = tf(num, den, T)`, onde `num` e `den` são os vetores que contém os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência respectivamente, e `T` é o período de amostragem. Uma vez declarado o sistema discreto,

o mesmo pode ser aplicado a diversos comandos utilizados em sistemas analógicos, como veremos a seguir.



Exemplificando

Obtenha o diagrama de polos e zeros do sistema da equação 4.36 e, com base no gráfico resultante, sabendo que $T = 1s$, responda:

- O sistema é estável? Por quê?
- Quais são as características de resposta transitória deste sistema?

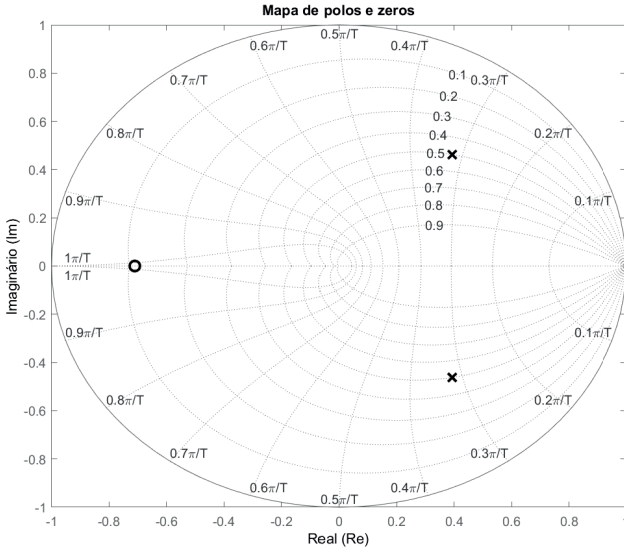
$$G(z) = \frac{0,3403z + 0,247}{z^2 - 0,7859z + 0,3679} \quad (4.36)$$

Resposta: Para obter o diagrama de polos e zeros no Matlab, podemos utilizar a seguinte sequência de comandos:

```
clc  
  
clear all  
  
close all  
  
Gz = tf([0.3403 0.247], [1 -0.7859 0.3679], 1)  
  
pzmap(Gz)  
  
zgrid
```

O comando `pzmap(Gz)` abre automaticamente uma figura semelhante à Figura 4.25, com a diferença de que o título e rótulos dos eixos são em inglês.

Figura 4.25 | Diagrama de polos e zeros do sistema digital



Fonte: Matlab R2015a.

Pela Figura 4.25 podemos inferir que os polos e zeros do sistema são, aproximadamente: $p_{1,2} \approx 0,4 \pm j0,45 = 0,6 \angle \pm 48,4^\circ$ e $z = -0,7$ respectivamente. Por inspeção do gráfico podemos responder aos itens a e b.

a) O sistema é estável, pois todos os polos estão inseridos no círculo de raio unitário.

De fato, o módulo dos polos é inferior a 1, pois $|p_{1,2}| = 0,6 < 1$, portanto eles caracterizam o sistema como estável.

b) A partir do gráfico, estimamos as seguintes características de resposta transitória para o sistema:

- Frequência natural não amortecida :

$$\omega_n = 0,33\pi / T = 0,33\pi \Rightarrow \omega_n \approx 1 \text{ rad/s}$$

- Taxa de amortecimento:

$$\zeta = 0,5 \Rightarrow \zeta = 50\%$$

A taxa de decaimento não pode ser observada diretamente no gráfico, mas corresponde ao módulo do polo discreto, que pode ser calculado por meio dos dados contidos nele, portanto $\sigma = 0,6$.

Para obter todas as características dinâmicas com precisão, basta posicionar o ponteiro do *mouse* sobre o polo e uma caixa de texto mostrará as informações dinâmicas do mesmo.

Outro método que permite a análise da estabilidade de um sistema digital é o gráfico do lugar das raízes, o qual pode ser utilizado no Matlab para sistemas discretos de forma semelhante à utilizada para sistemas contínuos.

O gráfico do lugar das raízes permite também o ajuste de um ganho K para uma configuração de realimentação negativa com ramo direto dado por $G(z)$, e sendo esta utilizada como argumento da função `rlocus`, conforme consta no Quadro 4.1. Uma sequência de comandos que pode ser utilizada para gerar o lugar das raízes pode ser vista a seguir:

```
Gz = tf(num, den, T);  
  
rlocus(Gz)  
  
zgrid
```

O gráfico do lugar das raízes, analisado por software, permite a escolha de um ganho K que não apenas estabilize o sistema em malha fechada, mas também que atenda aos requisitos de resposta transitória, tais como: taxa de decaimento, taxa de amortecimento e frequência de oscilação, os quais podem ser atingidos posicionando-se os polos em determinadas regiões do plano complexo. Para mover os polos no gráfico e verificar o valor do ganho K resultante, basta clicar com o *mouse* sobre qualquer ponto da curva e arrastar até a posição desejada, conforme veremos no exemplo a seguir.



Para o sistema da equação 4.37, obtenha sabendo que $T = 1s$:

- A faixa de valores de ganho para o qual o sistema é estável em malha fechada.
- A faixa de valores de ganho para o qual o sistema responde com amortecimento mínimo de 20% e frequência natural não amortecida entre $0,2\pi$ e $0,3\pi$ rad/s.

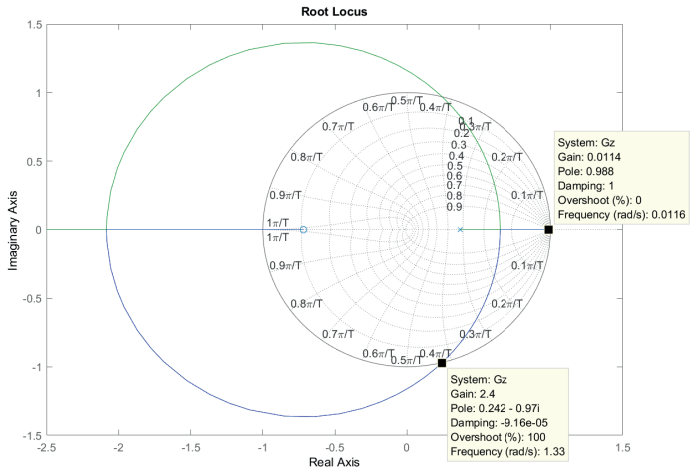
$$G(z) = \frac{0,3679z + 0,2642}{z^2 - 1,368z + 0,3679} \quad (4.37)$$

Resposta: Para obter os valores de ganho, vamos obter o lugar das raízes do sistema, utilizando os comandos a seguir:

```
clc
clear all
close all
Gz = tf([0.3679 0.2642],[1 -1.368 0.3679],1)
rlocus(Gz)
zgrid
```

O comando `rlocus` irá gerar um gráfico semelhante ao da Figura 4.26 a partir do qual poderemos responder aos itens a e b.

Figura 4.26 | Lugar das raízes de $G(z)$



Fonte: Matlab R2015a.

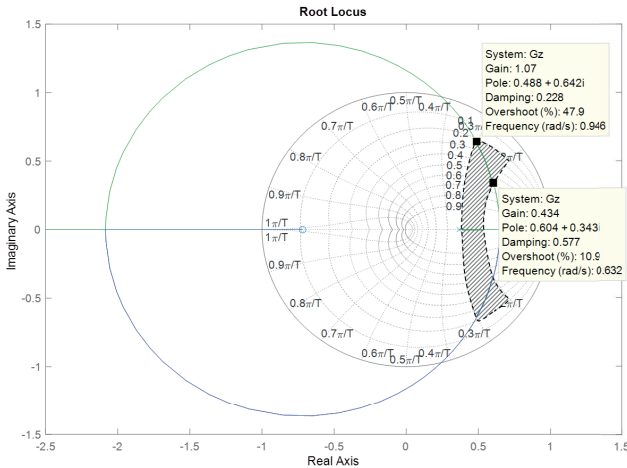
a) Posicionando e clicando o cursor do mouse nos cruzamentos entre o caminho dos polos com a borda do círculo de raio unitário, obtemos a faixa de valores para o qual o sistema em malha fechada será estável.

Conforme mostra a Figura 4.26 obtemos: $0 < K < 2,4$

b) Agora para atender aos requisitos do item b, vamos posicionar o cursor conforme mostra a Figura 4.27, onde você pode ver a região de posicionamento desejado dos polos hachurada.

Esta região corresponde ao cruzamento da região de frequência natural não amortecida entre $0,2\pi$ e $0,3\pi$ rad/s e à região com taxa de amortecimento maior ou igual a 20%, ou seja, 0,2.

Figura 4.27 | Região de interesse de resposta transitória do sistema digital



Fonte: Matlab R2015a.

A partir da Figura 4.27 podemos afirmar que a faixa de ganho apropriada para a resposta desejada corresponde à faixa de valores em que os polos "entram" na região (valor mínimo) e "saem" da mesma (valor máximo), ou seja: $0,434 < K < 1,07$.



Refleta

Na Seção 2 desta unidade, vimos também que o critério de Routh-Hurwitz pode ser aplicado a sistemas discretos, por meio de uma transformação bilinear. Utilizando o Matlab seria possível implementar este método de análise e projeto? Os resultados seriam semelhantes àqueles obtidos com o lugar das raízes?

Como você pode observar na Figura 4.27, algumas regiões do plano complexo não são atingidas pelo lugar das raízes, e com isso, alguns comportamentos transitórios não podem ser atendidos. Nestes casos torna-se necessário o projeto de um compensador para o sistema.

Como vimos na Seção 2 desta unidade, um compensador analógico pode ser projetado e em seguida discretizado pelo método da transformação de Tustin.

Para realizar esta transformação, o comando `c2d` deve ser utilizado, incluindo um terceiro argumento nesta função, que contém a especificação do método a ser utilizado.

Utilizando o comando `help` no Command Window você pode visualizar todos os métodos que são contemplados, mas para a transformação de Tustin, utilizamos o comando da seguinte maneira:

```
sysd = c2d(sysc,T,'tustin')
```

Por padrão, este comando realiza a discretização pelo segurador de ordem zero (`zoh`), por este motivo não é necessário especificá-lo quando desejamos utilizar este método, conforme vimos na Seção 3 da Unidade 3. A escolha do período de amostragem adequado pode ser feita em uma etapa prévia à discretização analisando-se a resposta em frequência do sistema em cascata com compensador, por meio do comando `bode` ou `bodemag`. Para analisar o comportamento transitório do sistema em malha aberta ou fechada, o comando `step(sysd)` pode ser utilizado.

Por outro lado, em vez de obter um compensador analógico e discretizar pelo método de Tustin, podemos utilizar a ferramenta `PIDTuner` do Matlab e o projetar um PID diretamente no domínio discreto. A estrutura do comando apresentada no Quadro 4.1 é dada por `pidTuner(sysd,tipo)` onde `sysd` é a função de transferência do sistema discreto e `tipo` é o tipo de controlador que se deseja, por exemplo, 'P', 'PI' ou 'PID'. Para verificar como esta ferramenta funciona, vamos projetar um PID para o sistema da equação 4.38, criando um novo *script* com a seguinte sequência de comandos:

$$G(z) = \frac{0,4528z + 0,4097}{z^2 - 1,724z + 0,7408}, \quad T = 1s \quad (4.38)$$

```

clc;

clear all;

close all

num = [0.4528 0.4097];

den = [1 -1.724 0.7408];

Ts = 1;

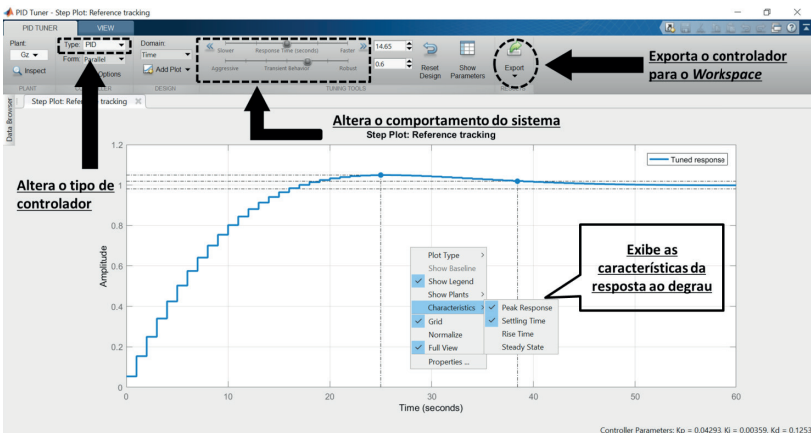
Gz = tf(num,den,Ts);

pidTuner(Gz,'PID')

```

Ao executar estes comandos, se abrirá uma janela conforme mostra a Figura 4.28. Nela é possível alterar alguns parâmetros, por exemplo, o tempo de resposta que se deseja para o sistema em 'Response Time (seconds)' e o comportamento transitório em 'Transient Behavior'. É possível alterar o tipo de controlador para 'PI' ou 'P', por exemplo. Enquanto o ajuste é feito, você pode clicar com o botão direito do mouse sobre o gráfico, e exibir as características de resposta em 'Characteristics'.

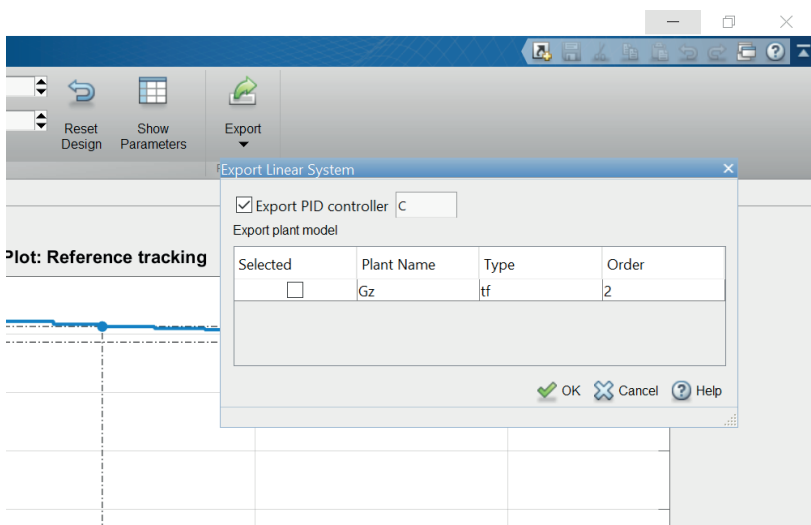
Figura 4.28 | Janela gráfica do PIDTuner do Matlab



Fonte: Matlab R2015a.

Observe que no canto inferior direito do PIDTuner são exibidos os valores dos ganhos do PID ajustado. Ao finalizar o ajuste, basta clicar em 'export' para exportar o controlador para o Workspace e uma janela irá abrir, conforme a Figura 4.29, onde você pode escolher o nome da variável onde será armazenado.

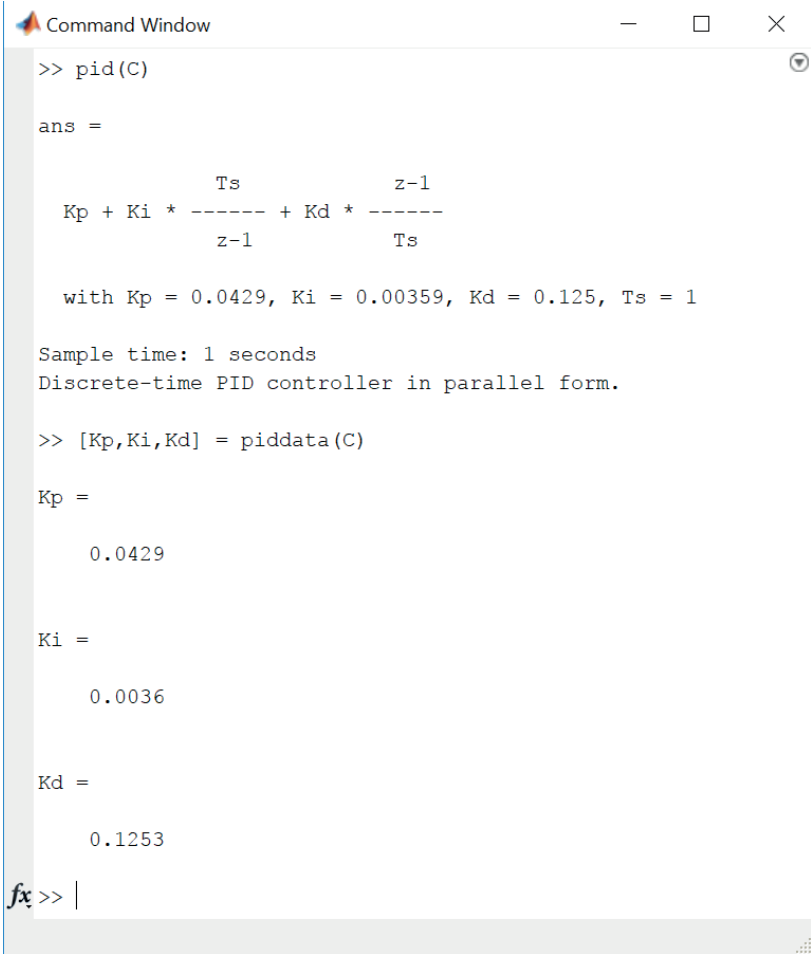
Figura 4.29 | Janela de exportação do controlador PID ajustado



Fonte: Matlab R2015a.

Para visualizar o controlador projetado, podemos utilizar os comandos `pid(C)` e `[Kp, Ki, Kd] = piddata(C)` no Command Window, e o mesmo será exibido no formato de PID com os respectivos valores de ganho proporcional, integral e/ou derivativo, conforme mostra a Figura 4.30.

Figura 4.30 | Estrutura do PID digital projetado e seus parâmetros



```
>> pid(C)

ans =

      Kp + Ki *  $\frac{T_s}{z-1}$  + Kd *  $\frac{z-1}{T_s}$ 

with Kp = 0.0429, Ki = 0.00359, Kd = 0.125, Ts = 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time PID controller in parallel form.

>> [Kp,Ki,Kd] = piddata(C)

Kp =

    0.0429

Ki =

    0.0036

Kd =

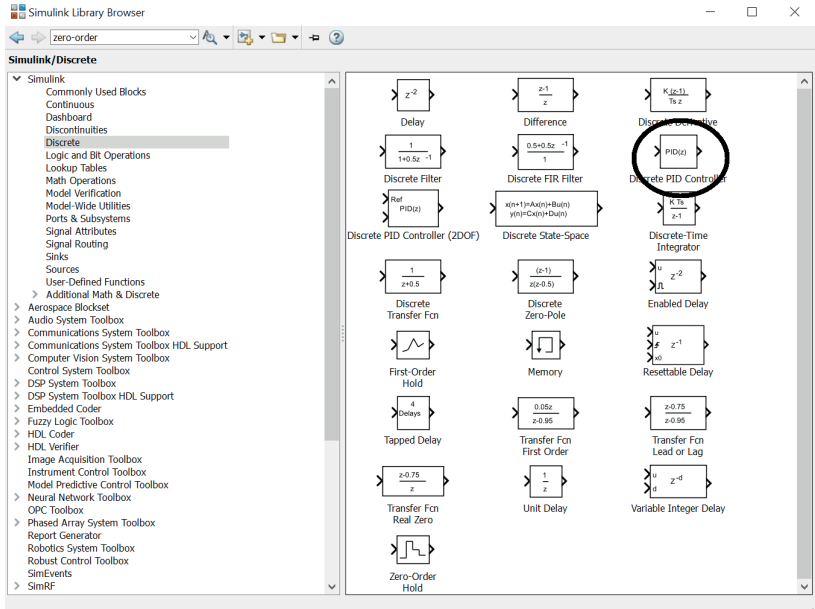
    0.1253

fx >> |
```

Fonte: Matlab R2015a.

Agora só falta implementar este controlador, e para isso vamos utilizar o Simulink. Um novo bloco será empregado, denominado ‘Discrete PID Controller’, disponível na biblioteca de blocos discretos, conforme pode ser visto na Figura 4.31.

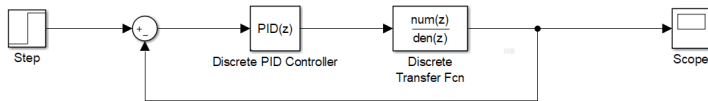
Figura 4.31 | Biblioteca de blocos discretos e o 'Discrete PID Controller'



Fonte: Matlab R2015a.

Feito o projeto do PID no PIDTuner, abra então o Simulink e monte a malha de controle da Figura 4.32, utilizando o bloco 'Discrete PID Controller'.

Figura 4.32 | Malha de controle para implementação do PID digital

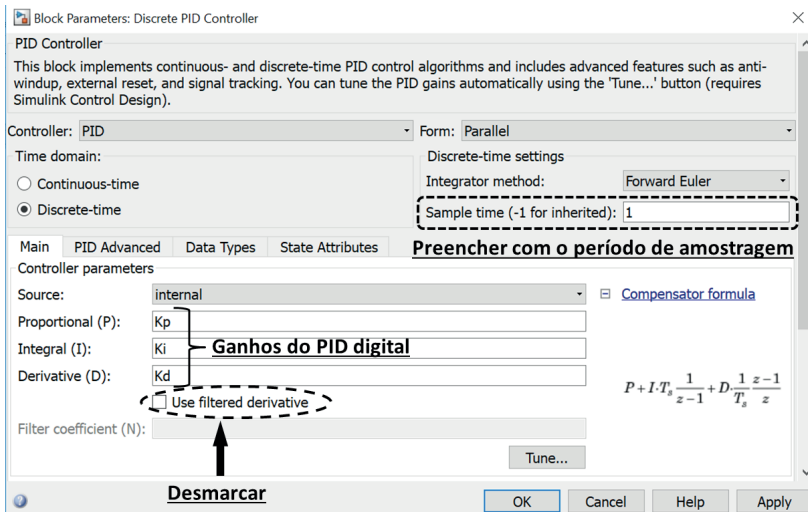


Fonte: Matlab R2015a.

Em seguida, clique duas vezes com o botão esquerdo do mouse sobre o bloco do PID para ajustar seus parâmetros, conforme a Figura 4.33, com o detalhe de desmarcar o item "Use filtered derivative" e

preencher com o valor da taxa de amostragem em “*Sample Time*”. Os valores dos ganhos proporcional, integral e derivativo podem ser digitados diretamente nesta janela, ou importados do Workspace após a utilização do comando $[K_p, K_i, K_d] = \text{piddata}(C)$. Os demais campos permanecem inalterados.

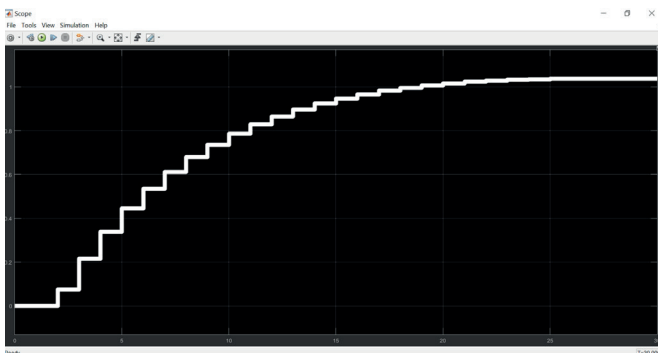
Figura 4.33 | Ajuste dos parâmetros do bloco PID discreto do Simulink



Fonte: Matlab R2015a.

É possível reajustar o PID clicando no botão “*Tune...*” dentro do bloco do PID discreto, e com isso o PIDTuner irá abrir para que os ajustes possam ser feitos. Agora basta executar a simulação. O resultado pode ser visto no bloco Scope, conforme a Figura 4.34.

Figura 4.34 | Resultado da simulação do sistema com PID digital no Simulink



Fonte: Matlab R2015a.



Assimile

Quando possuímos um controlador PID analógico e desejamos implementá-lo por meio de um microcomputador, podemos fazer a discretização no Matlab utilizando o comando `c2d(sysc,T,'tustin')`.

No entanto, se desejarmos fazer o projeto diretamente sobre um sistema digital, podemos utilizar a ferramenta `pidTuner(sysd)` do Matlab.



Pesquise mais

O PIDTuner do Matlab é uma ferramenta do Control System Toolbox e consiste em uma das alternativas de projeto de PID no *software*.

No link a seguir, você pode assistir a um vídeo mostrando que o PID pode ser projetado diretamente no Simulink. No caso, o vídeo trata de um sistema analógico, mas pode ser facilmente estendido para um PID digital apenas trocando para o bloco '*Discrete PID Controller*'. Disponível em:

<<https://www.mathworks.com/videos/getting-started-with-simulink-part-4-tuning-a-pid-controller-1508444927396.html>>. Acesso em: 29 set. 2018.

Sem medo de errar

Suponha que você seja o responsável técnico por implementar um controlador para a câmera-aranha em uma emissora de televisão. A equipe simulou o controlador atual e chegou à conclusão de que é necessária uma resposta mais rápida para o sistema, pelo menos a metade do tempo de acomodação em 2% do tempo de acomodação fornecido pelo controlador atual, uma vez que os lances futebolísticos ocorrem em frações de milésimos de segundos e a câmera deverá se mover rapidamente para não perder as jogadas.

Tendo em vista que a implementação será realizada por microcontrolador, cabe a você a tarefa de projetar um novo

controlador digital mais rápido que o anterior e validá-lo antes da implementação.

A função de transferência da posição da câmera-aranha é dada pela equação 4.31 e o controlador antigo é dado pela equação 4.32. O período de amostragem do sistema é $T = 0,1s$, conforme obtido na Seção 2 desta unidade.

Resolução: primeiramente, vamos verificar as características de resposta ao degrau fornecida pelo controlador anterior. Utilizando as funções das equações 4.31 e 4.32, apresentadas na seção anterior, vamos criar um novo script.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s/10+1)} \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s+4}$$

A seguinte sequência de comandos pode ser utilizada:

```
clc
clear all
close all

s = tf('s');
Gp = 10/(s*(s+1)*(s/10+1))
Gc = (s+1)/(s+4);
T = 0.1;

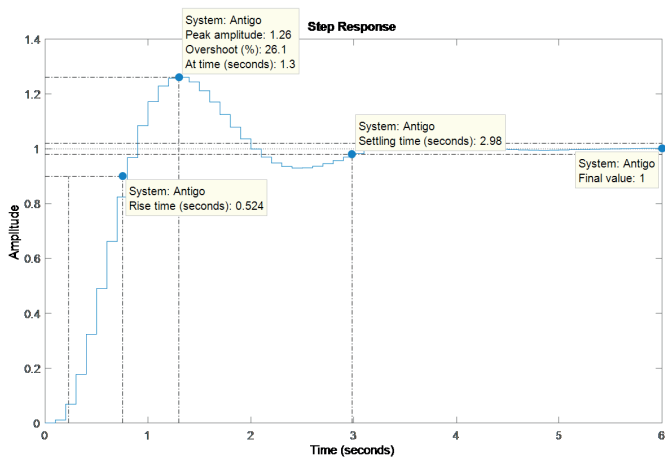
Gcz = zpkc2d(Gc,T,'tustin')
Gz = (c2d(Gp,T,'zoh'))

figure(1)

step(feedback(Gcz*Gz,1))
```

Abrir-se-á uma janela com a resposta ao degrau. Clicando com o botão direito do mouse, podemos exibir as características de resposta, conforme a Figura 4.35.

Figura 4.35 | Resposta ao degrau com o controlador da Seção 2



Fonte: Matlab R2015a.

Observe que o tempo de acomodação em 2% é aproximadamente 3 segundos. O ideal é que este tempo caia pelo menos para a metade, ou seja, 1,5 segundo.

Vamos agora observar o lugar das raízes do sistema em cascata com o controlador antigo para verificar se um ajuste de ganho atende aos requisitos necessários. Incluímos no script a seguinte linha de código:

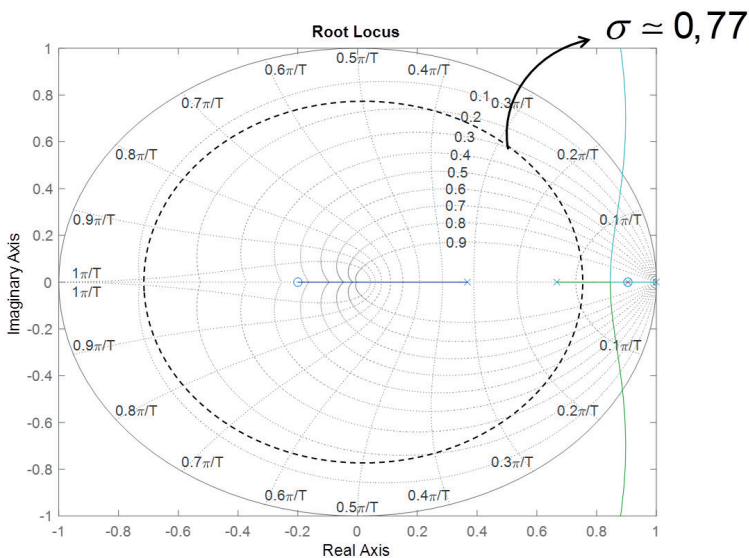
```
figure (2)
rlocus (Gcz*Gz)
zgrid
```

Lembrado que no plano s , o polo tem a seguinte forma genérica $p_s = \sigma \pm j\omega$, em que, segundo as métricas estudadas em Teoria de Controle Moderno, um tempo de acomodação de $T_a = 1,5$ s, para o critério de 2%, corresponde a uma taxa de decaimento de $\sigma = -4/T_a = -2,67$.

No plano z esta taxa de decaimento é representada por um círculo de raio igual a $r = e^{\sigma T} = e^{-2,67 \cdot 0,1} \approx 0,77$, conforme vimos na Seção 1 desta unidade. Ou seja, o polo discreto deve apresentar módulo menor ou igual a este valor para atender a este tempo de acomodação como valor máximo.

Observando o lugar das raízes que pode ser visto na Figura 4.36, arrastando com o mouse sobre um dos caminhos dos polos, podemos observar que alterar o ganho apenas não fornecerá a taxa de decaimento máxima requerida pois o caminho do lugar das raízes não passa no interior do círculo de raio 0,77. Por este motivo, será necessário projetar um novo controlador.

Figura 4.36 | Lugar das raízes do sistema com controlador antigo em malha aberta

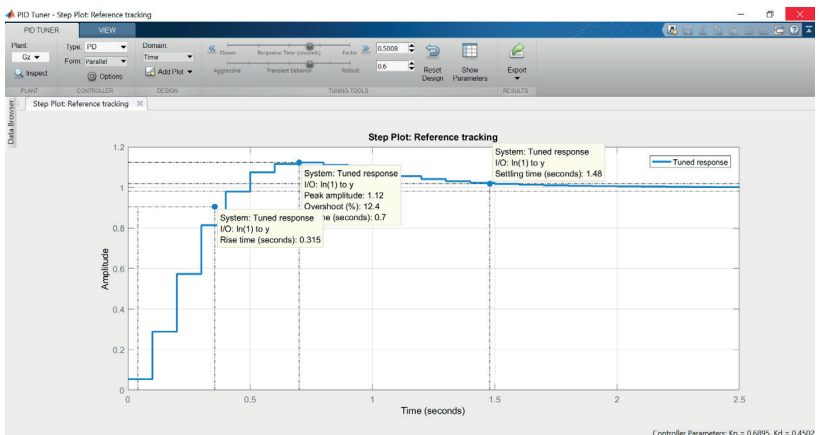


Para projetar um novo controlador, vamos utilizar o `PIDTuner`. A estrutura escolhida será um PD, pois a ação derivativa é responsável por diminuir o tempo de resposta do sistema, ou seja, o torna mais rápido. No Command Window digitamos:

```
pidTuner(Gz, 'PD')
```

Ajustando o tempo de acomodação para 1,5 segundo, tentando manter todas as demais características de resposta aproximadamente iguais àsquelas fornecidas com o controlador antigo (sobressinal, tempo de subida e valor em regime permanente igual a um), obtemos o resultado da Figura 4.37.

Figura 4.37 | Janela do PIDTuner para projeto do novo controlador



Fonte: Matlab R2015a.

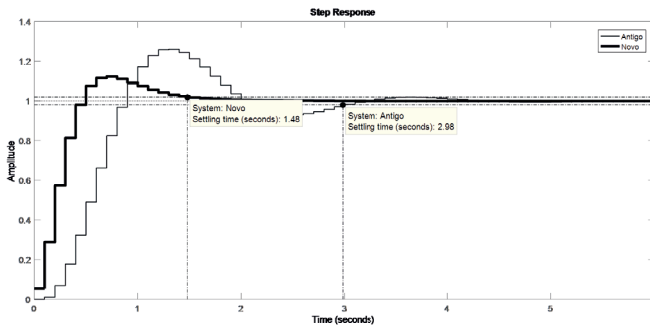
Finalizado o ajuste, podemos exportar o controlador com o nome $C(z)$ e digitar no Command Window: `[Kp, Ki, Kd] = piddata(C)` para extrair os valores do ganho proporcional e derivativo.

No Command Window digitamos:

```
[Kp,Ki,Kd] = piddata(C);
Novo = feedback(C*Gz,1);
figure(1)
hold on
step(Novo) %Resposta com o novo controlador
```

Teremos a Figura 4.38, na qual podemos comparar a resposta do controlador antigo com o novo.

Figura 4.38 | Comparativa entre a resposta ao degrau para o sistema com o controlador antigo e o novo



Fonte: Matlab R2015a.

Observe na Figura 4.38 que houve uma melhora significativa da resposta do sistema, sendo que o tempo de acomodação requerido foi atendido, ou seja, caiu pela metade e, além disso, houve uma diminuição do sobrevalor e do tempo de subida.

Assim, o controlador $C(z)$ da equação 4.39, que constitui um PD, encontra-se adequado para o controle de posição da câmara-aranha utilizada para televisualização da partida de futebol.

$$C(z) = 4,5017(z - 0,8468) \quad (4.39)$$

Com $K_p = 0,689$, $K_D = 0,45$ e período de amostragem $T = 0.1$ segundo.

Obtenção de um controlador digital para um moedor industrial

Descrição da situação-problema

Em uma unidade industrial sucroalcooleira, a extração do caldo da cana é feita por meio da moagem. A moenda é responsável por extrair o caldo e produzir o bagaço que, no final do processo, será utilizado como fonte combustível nas caldeiras.

Com base nisso, suponha que você seja o responsável técnico da seção de moagem em uma usina de cana-de-açúcar e álcool. O controle de um grupo de moendas antigas, atualmente executado por controladores analógicos, deverão ser atualizados para controles executados por meio de computador digital. Como você poderia obter e validar um controlador digital a partir do controlador analógico já implementado? Como obter a função de transferência discreta?

Lembre-se que a função de transferência disponibilizada pelo fabricante é dada pela equação 4.40 e o controlador analógico atuante na moenda é fornecido pela equipe de projetos pode ser visto na equação 4.41.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)} \quad (4.40)$$

$$G_c(s) = 11,7 \frac{(s+6)}{(s+20)} \quad (4.41)$$

Resolução da situação-problema

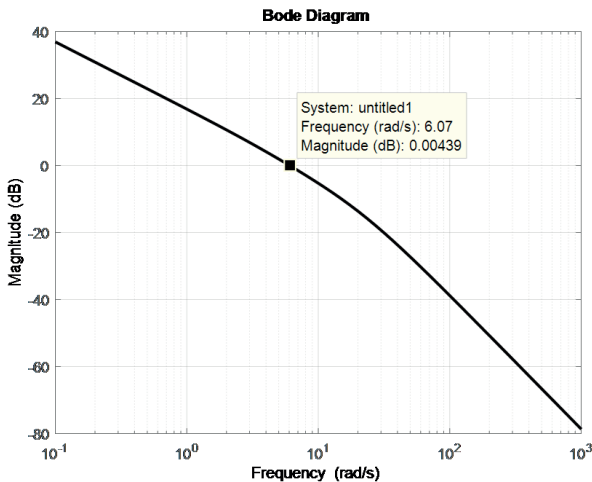
Para obter um controlador equivalente digital para a moenda, vamos utilizar a transformação de Tustin no Matlab. Antes disso, devemos escolher um período de amostragem adequado para implementação digital.

A seguinte sequência de comandos pode ser executada em um novo script:

```
clc  
  
clear all  
  
close all  
  
s = tf('s');  
  
G = 10/(s*(s+5));  
  
C = 11.7*(s+6)/(s+20);  
  
figure(1)  
  
bodemag(G*C)  
  
grid
```

O resultado desta sequência é um diagrama de ganho de Bode do sistema analógico em cascata com o controlador, também analógico, para que a taxa de amostragem seja escolhida.

Figura 4.39 | Magnitude de Bode do processo em cascata com o controlador analógico



Fonte: Matlab R2015a.

A partir do gráfico, posicionando o cursor do mouse no ponto em que a curva cruza o 0dB e clicando, podemos visualizar o valor da frequência.

Conforme a Figura 4.39, podemos observar a frequência de cruzamento $\omega_c = 6$ rad/s. Assim, calculamos o período de amostragem:

$$0,15/\omega_c < T < 0,5/\omega_c$$

$$0,15/6 < T < 0,5/6$$

$$0,0267 < T < 0,0833$$

Escolhemos arbitrariamente $T = 0,05$ s (qualquer valor dentro da faixa calculada pode ser escolhido) e seguindo o script anterior, acrescentamos os seguintes comandos:

```
T = 0.05;
```

```
Gz = c2d(G,T);
```

```
[numG,denG] = tfdata(Gz,'v');
```

```
Cz = c2d(C,T,'tustin')
```

```
[numC,denC] = tfdata(Cz,'v');
```

```
[numG,denG] = tfdata(G,'v');
```

O controlador equivalente digital obtido (Cz) será mostrado no Command Window, conforme a Figura 4.40.

Figura 4.40 | Controlador digital obtido do processo de discretização

```
Command Window

Cz =

      8.97 z - 6.63
      -----
           z - 0.3333

Sample time: 0.05 seconds
Discrete-time transfer function.

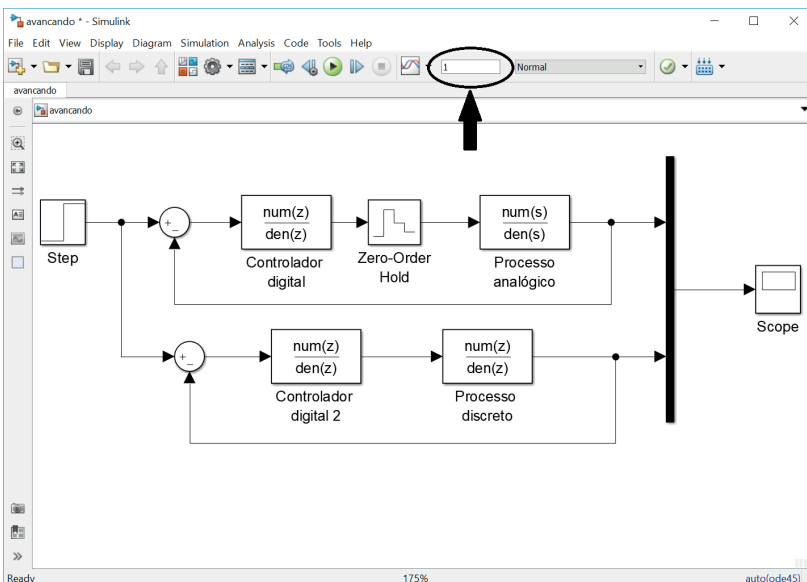
fx >> |
```

Fonte: Matlab R2015a.

Agora vamos simular este controlador no Simulink. Para isto, montamos o diagrama de blocos da Figura 4.41.

Ajuste o tempo de simulação para 1 segundo, pois a resposta do sistema é muito rápida.

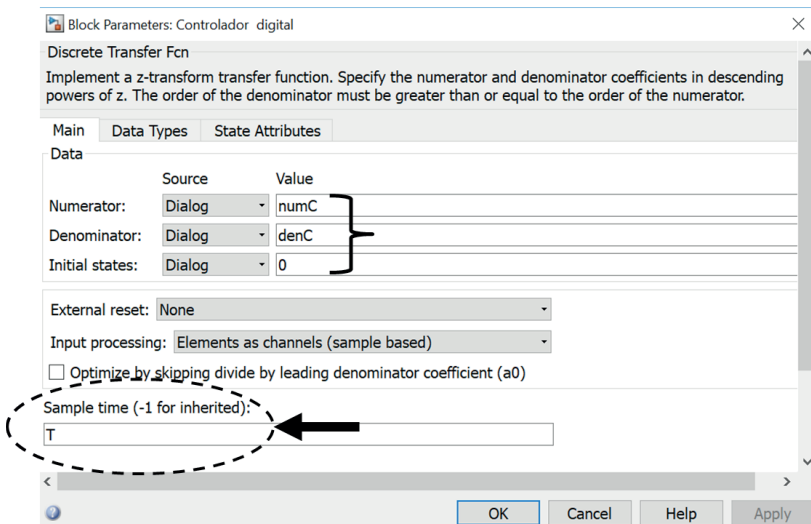
Figura 4.41| Montagem do diagrama de blocos no Simulink



Fonte: Matlab R2015a.

Ajuste também os parâmetros das funções de transferência, chamando os numeradores e denominadores declarados no *Workspace*, e também o período de amostragem T , de forma similar à Figura 4.42 (não se esqueça de inserir o período de amostragem também no bloco do segurador).

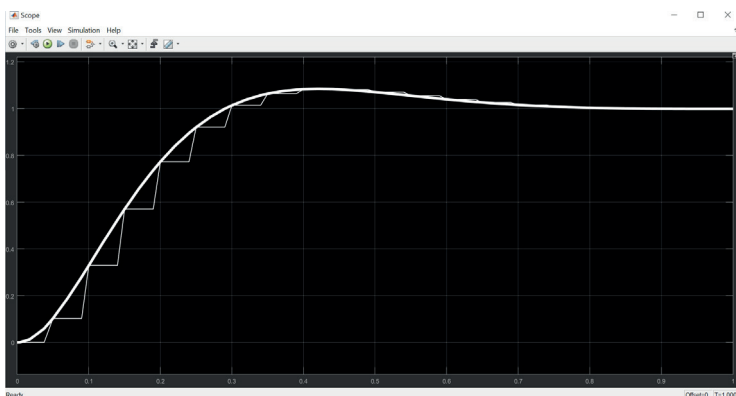
Figura 4.42 | Ajuste dos parâmetros do bloco de função de transferência discreta



Fonte: Matlab R2015a.

Ao executar a simulação, o resultado pode ser visto no bloco Scope, conforme a Figura 4.43.

Figura 4.43 | Resultado da simulação do sistema com o controlador



Fonte: Matlab R2015a.

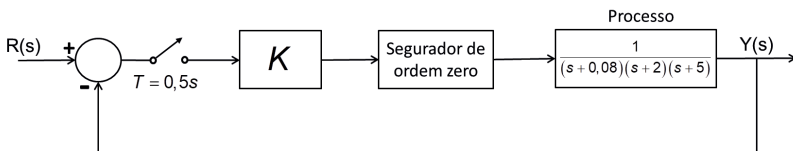
Como isso, temos que o controlador digital resultante a partir da discretização pela transformação de Tustin encontra-se validado e pode ser implementado para controle digital de uma moenda para a indústria sucroalcooleira.

Faça valer a pena

1. A análise de sistemas digitais pode ser feita de forma semelhante à análise nos planos. O conceito do lugar das raízes é um exemplo de técnica analógica que pode ser estendida ao plano z e as regras de análise são as mesmas, sendo que as regiões no plano s são agora mapeadas no plano z para associação de características de resposta transitória.
 Fonte: Nise, 2009.

Considere o sistema da figura a seguir. Trata-se de um sistema de controle de uma turbina a vapor para um gerador síncrono de uma unidade de geração de energia elétrica. Deseja-se ajustar o ganho K para que o sistema em malha fechada atenda com amortecimento de aproximadamente 50%.

Figura | Malha de controle de uma turbina a vapor para um gerador síncrono



Fonte: elaborada pela autora.

Onde $R(s)$ é a velocidade de referência da turbina e $Y(s)$ é a velocidade do rotor do gerador.

Com base nisso, qual das alternativas apresenta um valor de ganho adequado para este sistema?

- a) $K = 7,7$ d) $K = 0,5$
- b) $K = 6,7$ e) $K = 0,7$
- c) $K = 5$

2. Durante o projeto de controladores digitais, o ajuste de um ganho apenas pode não ser suficiente para que o sistema atinja uma resposta transitória eficiente em malha fechada. Nestes casos, um compensador em cascata pode ser projetado no plano s , utilizando técnicas clássicas de

controle, por exemplo, e o compensador resultante pode ser discretizado por meio de uma transformada bilinear específica que preserva a resposta transitória do mesmo.

O sistema de tratamento de pacientes infectados com HIV é feito da seguinte maneira: a quantidade de vírus ativos no sangue é medida a cada T período de tempo, medido em dias. Por realimentação unitária, é feito o ajuste da medicação para manter a contagem de vírus dentro dos níveis aceitáveis.

O modelo linearizado da infecção pelo vírus e o controle da medicação são dados pelas equações 4.42 e 4.43 respectivamente.

$$G(s) = \frac{-520s - 10,3844}{s^3 + 2,6817s^2 + 0,11s + 0,0126} \quad (4.42)$$

$$C(s) = \frac{-2 \cdot 10^{-4} (s^2 + 0,04s + 0,0048)}{s(s + 0,02)} \quad (4.43)$$

Como não é possível monitorar o paciente e nem ajustar a dose do medicamento continuamente, este sistema de controle é um sistema discreto no tempo.

Com base nisso, obtenha um controlador de medicação discreto $C(z)$ adequado para o tratamento e, considerando que as medições do vírus e ajuste da medicação são realizadas semanalmente, assinale a alternativa que contenha os polos deste controlador.

a) $z_1 = 1$
 $z_2 = 0,9841$

b) $z_1 = 1$
 $z_2 = 0,2019$

c) $z_1 = 1$
 $z_2 = 0,5512$

d) $z_1 = 1$
 $z_2 = 0,8692$

e) $z_1 = 1$
 $z_2 = 0,0869$

3. Em termos práticos, o ajuste de controladores PID digitais para plantas industriais cujo modelo dinâmico não é conhecido é feito de forma experimental, ou seja, os valores dos ganhos proporcional, integral e derivativo são incrementados até que boas características de resposta sejam obtidas experimentalmente (Ogata, 1995). Para os casos em que o modelo dinâmico do sistema seja conhecido, o *software* Matlab pode ser utilizado para ajuste dos parâmetros do PID, por meio do PIDTuner.

A figura a seguir mostra um sistema de controle de temperatura de um processo químico cuja implementação deverá ser feita por um PID digital.

Figura | Malha de controle com PID digital



Fonte: elaborada pela autora.

Na figura, $Y(s)$ é a temperatura do processo e $R(s)$ é a temperatura de referência.

Sabendo que $C(s) = \frac{0,9645(s + 0,293)^2}{s}$ assinale a alternativa que

contém os valores de ganho proporcional, integral e derivativo adequados para o PID digital deste sistema, considerando o período de amostragem $T = 0,5s$.

- a) $K_p = 0,565, K_i = 0,0828, K_D = 0,965$.
- b) $K_p = 0,565, K_i = 0,828, K_D = 0,965$.
- c) $K_p = 0,586, K_i = 0,0828, K_D = 0,0965$.
- d) $K_p = 0,586, K_i = 0,828, K_D = 0,965$.
- e) $K_p = 0,586, K_i = 0,0828, K_D = 0,965$.

Referências

ASTROM, K. J.; WITTENMARK, Bjorn. **Computer-Controlled Systems: theory and design**. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.

DORF, Richard C., BISHOP, Robert H. **Sistemas de Controle Modernos**. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC 2011.

FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEINI, Abbas. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6. ed. São Paulo: Bookman, 2013.

NISE, Noman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

_____. **Matlab: Simulink User's Guide**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/simulink/sl_using.pdf>. Acesso em: 29 set. 2017.

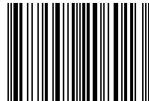
_____. **Matlab: Control System Toolbox User's Guide**. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/control/usingcontrol.pdf>. Acesso em: 29 de set. 2017.

_____. **Matlab.exe Matrix Laboratory**. Versão R2015a. Natick, MA: The MathWorks Inc., 2015.

OGATA, Katsuhiko. **Discrete-Time Control Systems**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.

PINHEIRO, C. A. M. **Sistemas de Controles Digitais e Processamento de Sinais: projetos, simulações e experiências de laboratório**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2017.

ISBN 978-85-522-0801-3



9 788552 208013 >