Processos Estocásticos

Processos Estocásticos

Alessandra Cristina Santos Akkari

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Pedro Donizeti Bolanho
Bruna Amin Gonçalves

Editorial
Camila Cardoso Rotella (Diretora)
Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Akkari, Alessandra Cristina Santos
A313p Processos estocásticos / Alessandra Cristina Santos Akkari. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
200 p.

ISBN 978-85-522-0763-4

1. Engenharia. I. Akkari, Alessandra Cristina Santos. II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 | Introdução aos processos estocásticos 7

Seção 1.1 - Introdução aos processos estocásticos e à probabilidade 9
Seção 1.2 - Processos estocásticos discretos e contínuos 24
Seção 1.3 - Espaço de parâmetros e espaço de estados 37

Unidade 2 | Processos de renovação e processos estocásticos 53

Seção 2.1 - Processo de renovação 55
Seção 2.2 - Probabilidade de transição 69
Seção 2.3 - Processo de Bernoulli e de Poisson 86

Unidade 3 | Processos estocásticos: cadeia de Markov 103

Seção 3.1 - Processos de Markov 105
Seção 3.2 - Cadeias de Markov discretas 120
Seção 3.3 - Cadeias de Markov contínuas 134

Unidade 4 | Processos estocásticos: teoria das filas 149

Seção 4.1 - Introdução à teoria das filas 151
Seção 4.2 - Filas M/M/1 167
Seção 4.3 - Filas M/M/c 183

Palavras do autor

Prezados alunos, vocês já devem ter se deparado com inúmeras incertezas ao longo da vida. Mas como será que essas incertezas afetam as decisões de um engenheiro de produção? Será que os processos são sempre precisos? Na verdade, em processos de tomada de decisão e gerenciamento, seja em nossa vida pessoal ou profissional, temos que levar em conta a existência de incertezas que impactam nossas decisões.

Assim, comumente buscamos soluções que às vezes são baseadas no bom senso ou em nossa opinião para lidar com as incertezas. Contudo, o objetivo ao longo do nosso estudo é prover diversos conceitos e ferramentas que tragam todo o embasamento necessário para que você tome as melhores decisões como futuro engenheiro, atuando nas áreas de Qualidade, Planejamento e Controle da Produção, Metrologia, entre outras.

Em nossa primeira unidade, teremos uma introdução aos processos estocásticos e à probabilidade, a partir da qual analisaremos diversos exemplos para entender o conceito de processos estocásticos, bem como o uso de distribuições de probabilidades, a classificação entre processos discretos e contínuos e a abordagem do espaço de parâmetros e do espaço de estados, buscando conhecer os tipos de processos para que, futuramente, você possa aplicá-los em sua jornada profissional. Assim, pretende-se que você conheça os tipos de processos e fundamentos de espaços e que saiba analisar os processos estocásticos discretos e contínuos.

Na Unidade 2 nós continuaremos nossa abordagem probabilística com o estudo dos processos de renovação, as probabilidades de transição e os processos de Bernoulli e de Poisson. O objetivo, ao final desta unidade, é que você seja capaz de conhecer, analisar e aplicar os processos de Bernoulli e de Poisson.

Na terceira unidade falaremos sobre as cadeias de Markov, mostraremos diversas aplicações e trataremos das cadeias de Markov discretas e contínuas, para que você conheça os princípios básicos das cadeias de Markov e suas aplicações como engenheiro.

Por último, na Unidade 4, focaremos nossa atenção na parte de Teoria das Filas, iremos conhecer algumas características dos sistemas de filas e aprofundaremos nossos estudos em alguns padrões de filas mais comuns. Nosso objetivo é que você compreenda e saiba aplicar os conceitos na otimização de filas ao longo de sua carreira.

Diante de um cenário repleto de boas perspectivas para as aplicações de processos estocásticos como ferramenta gerencial e de tomada de decisões, espero que você se sinta motivado a dedicar seu tempo e seus esforços em um estudo com viés aplicado!

As competências e habilidades adquiridas lhe proporcionarão chances reais de assimilar os conceitos e as técnicas que você utilizará na sua vida profissional.

Portanto, tenha um excelente estudo e engaje-se na construção do seu próprio conhecimento!

Introdução aos processos estocásticos

Convite ao estudo

Prezado aluno, dada a importância da análise de processos estocásticos, iniciaremos nossos estudos com uma introdução ao conceito de processos estocásticos. Neste primeiro contato, veremos alguns exemplos cotidianos para que estejamos familiarizados com os conceitos apresentados.

Em seguida, veremos o conceito de probabilidade e de distribuições de probabilidade com aplicação em processos estocásticos, para que possamos avaliar as incertezas presentes nesses processos, bem como sua aplicação por meio das distribuições de Poisson e de Bernoulli.

Seguindo um desencadeamento lógico das ideias, poderemos classificar os processos estocásticos em discretos e contínuos, e aprofundar nossos conhecimentos com as abordagens de espaço de parâmetros e espaço de estados.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que que você conheça os tipos de processos e fundamentos de espaços, além de saber analisar os processos estocásticos discretos e contínuos.

Nesse sentido, suponha que você foi contratado por uma empresa de varejo e seja responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações. Ao iniciar suas atividades, você se depara com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, cabendo a você trazer os esclarecimentos necessários. Nesse contexto, como engenheiro

recém-contratado, como você explicaria o comportamento do processo em função da aleatoriedade?

Uma vez que tenha conseguido entender o comportamento do processo, como você classificaria o comportamento do processo, entre discreto ou contínuo, e quais as diferenças resultantes dessa classificação?

Ao descrever o processo de gerenciamento de estoques para os gestores, seria mais adequado utilizar uma abordagem orientada ao espaço de estados ou parâmetros?

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o presidente da filial solicitou a você uma apresentação com esse escopo.

Então, mãos à obra!

Bons estudos!

Seção 1.1

Introdução aos processos estocásticos e à probabilidade

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância dos processos estocásticos, começaremos a explorar esse conceito em um estudo inicial, que será essencial a fim de você entender a partir de qual demanda surgiu a necessidade de estudar os processos estocásticos e vislumbrar a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Assim, teremos uma introdução aos processos estocásticos e à probabilidade, na qual analisaremos diversos exemplos para entender o conceito de processos estocásticos, bem como o uso de distribuições de probabilidades.

Dessa forma, vamos retomar nosso contexto, no qual você foi contratado por uma empresa de varejo e é responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações. Ao iniciar suas atividades, você se deparou com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, cabendo a você trazer os esclarecimentos necessários.

Nesse contexto, como engenheiro recém-contratado, como você explicaria o comportamento do processo em função da aleatoriedade?

Você observou que a venda média diária do produto é de duas unidades. Pensando no estoque que deve estar disponível para venda, qual seria a probabilidade de três ou mais clientes quererem comprar aquele produto especifico naquela loja?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o presidente da filial solicitou a você uma apresentação com esse escopo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Bons estudos!

Não pode faltar

Prezado aluno, vamos começar o nosso estudo de processos estocásticos pensando no significado dessa expressão. O que seriam processos estocásticos? Onde eles são aplicados? Por que são estudados? Vamos tentar responder a essas indagações ao longo do nosso curso, aprofundando alguns conceitos e teorias.

Vamos começar, então, com um conceito fundamental em processos estocásticos e que nos ajudará nas definições futuras: incerteza. Você já deve ter se perguntado qual a chance de uma coisa dar certo? Ou, será que amanhã vai chover? Será que vou ganhar na loteria? São todas perguntas que levam em conta a incerteza em relação a vários eventos futuros, ou seja, coisas que podem ocorrer ou não, dados os diversos fatores que podem interferir nos acontecimentos.

Sabendo que as coisas ao nosso redor apresentam um dado grau de incerteza, vamos a uma definição mais informal de processos estocásticos: conforme o tempo passa, os processos variam em algum grau, de modo incerto. Vamos ver alguns exemplos rotineiros:

- Você já imaginou como deve ser a variação diária na quantidade em estoque de uma empresa?
- Quantos carros passam por um determinado cruzamento ao longo do dia?

Nas situações anteriores, podemos verificar variações com um determinado grau de incerteza com o decorrer do tempo. A variação do estoque hoje não necessariamente será a mesma de amanhã, tampouco o fluxo de carros no cruzamento. Isso ocorre porque em cada uma das situações apresentadas anteriormente existem fenômenos aleatórios que variam com o tempo.

A palavra *aleatório* nos remete àquilo que depende das circunstâncias; por exemplo, se a demanda for maior hoje,

consequentemente a variação no nível de estoque será maior, sendo que alguns fatores que influenciaram o aumento da demanda hoje, não necessariamente influenciarão o aumento da demanda nos dias posteriores.

Agora que temos uma ideia melhor do que sejam processos estocásticos, vamos então a uma definição mais formal, que envolverá alguns conceitos matemáticos.

Segundo Hillier e Lieberman (2013), um processo estocástico pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias (variável que apresenta um comportamento aleatório) ordenadas X_t sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T $\{X_t : t \in T\}$. Vamos deixar a análise da descrição do tempo para um ponto mais adiante nos nossos estudos.

Mas como faremos para medir o grau de incerteza nos processos estocásticos? A própria palavra *estocástico* é um sinônimo de aleatório; portanto, utilizaremos o conceito de distribuições de probabilidades, ou seja, analisaremos as chances daquele comportamento ocorrer.

Exemplificando

Sabemos que uma determinada loja de equipamentos eletrônicos possui diversos modelos de celular. O modelo mais caro pode ter um estoque local máximo de 10 unidades, por questões de segurança. Se até o final do dia de hoje a loja vender alguns aparelhos do modelo mais caro e ficar com poucos disponíveis, o gerente solicitará a reposição do estoque para o nível máximo antes de começar o expediente do próximo dia.

Se considerarmos X_t a quantidade de celulares na loja no final do dia t, essa variável pode ser considerada aleatória, pois não temos como saber exatamente a quantidade de celulares que serão comprados a cada dia.

Uma vez que você já teve esses fundamentos em outras disciplinas do curso, vamos ver os conceitos de distribuições de probabilidades com enfoque mais aplicado a processos estocásticos.

Hines et al. (2006) conceituam uma distribuição de probabilidade como a relação entre um determinado valor da variável em estudo

com a probabilidade desse valor ocorrer. Vamos a um exemplo bem simples: você joga um dado e a probabilidade de cada face sair é a mesma, portanto, para cada face do dado existe uma probabilidade do valor ocorrer que é de 1/6 ou 16,66%.

As distribuições de probabilidades podem ser contínuas ou discretas, ou seja, quando tivermos variáveis expressas numa escala contínua, as distribuições serão contínuas. Já no caso de variáveis discretizadas, como os valores inteiros, a distribuição será discreta.

Um exemplo de variáveis discretas seria a proporção de peças com defeito entre mil testadas, pois as variáveis não poderão assumir qualquer valor dentro do intervalo. Esse caso em especial faria sentido apenas utilizando variáveis inteiras, pois não podemos fracionar uma peça com defeito. As unidades de medida, por exemplo a massa, a temperatura e o comprimento são exemplos de variáveis contínuas, pois podem assumir qualquer valor, inclusive fracionado, dentro do intervalo analisado.

Voltando então aos processos estocásticos, o conceito de distribuição de probabilidades é aplicado da seguinte forma: dado um valor de t, como vimos anteriormente, o processo estocástico é composto por uma variável aleatória no formato X_t, sendo que o tempo t varia no espaço de parâmetros T. Mas qual a utilidade da distribuição de probabilidade aplicada nos processos estocásticos? Se conhecermos a distribuição conjunta $\{X_t : t \in T\}$ podemos prever o comportamento futuro do processo com base no comportamento passado.

Vamos voltar ao exemplo do dado para que isso fique claro, bem como as implicações futuras. Se ao jogar um dado sabemos que a probabilidade de cada face sair é a mesma, ao fazer uma aposta você espera que saia um determinado valor para ganhar. A chance de o dado apresentar o valor da face desejado já é conhecida por você, por meio da probabilidade da face ocorrer.

Similarmente, no box *exemplificando* abordamos um problema de estoque de uma loja de equipamentos eletrônicos. Analisando o comportamento dos dias anteriores e atribuindo a uma variável aleatória X_t a quantidade de celulares na loja no final do dia t, poderemos prever o comportamento futuro com base nas probabilidades levantadas.

Pesquise mais

Vamos aprofundar os nossos conhecimentos sobre distribuições de probabilidades? No artigo sugerido abaixo como referência é abordada a questão da distribuição de chuvas em Santa Maria, no Rio Grande do Sul. São abordadas algumas distribuições de probabilidade diferentes das apresentadas nesta seção para que você amplie seu entendimento.

SILVA, J. C. da et al. Análise de distribuição de chuva para Santa Maria, RS. **Revista Brasileira de Engenharia Agricola e Ambiental**, Campina Grande, v. 11, n. 1, p.67-72, 2007. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/%0D/rbeaa/v11n1/v11n1a09.pdf> Acesso em: 9 out. 2017.

Temos três propriedades básicas da probabilidade que vale a pena retomarmos para seguirmos com os nossos estudos:

1. O valor máximo para uma probabilidade é 1, ou 100%.
2. A probabilidade não pode assumir um valor negativo; portanto, a probabilidade de evento ocorrer pode ser qualquer valor entre o mínimo, 0, e o valor máximo, 1.
3. Em eventos mutuamente exclusivos, ou seja, eventos que não podem ocorrer ao mesmo tempo, a probabilidade de ocorrência de todos os eventos será a soma da probabilidade de que cada evento ocorra isoladamente, lembrando que a soma das probabilidades é igual a 1.

Dentre os diversos modelos de distribuição de probabilidade, vamos adentrar nas distribuições de Poisson e de Bernoulli para a aplicação em processos estocásticos.

Começando pela distribuição de Poisson, o nosso interesse está em descrever eventos que ocorrem aleatoriamente, no entanto, com uma variação média definida. Como assim? Vamos a um exemplo: a quantidade de nascimentos de crianças por mês em um dado hospital (variável aleatória V). Podemos calcular o número médio esperado de nascimentos por mês, embora em cada mês possamos ter uma quantidade aleatória de nascimentos. Nesse caso, poderíamos nos perguntar que tipo de distribuição devemos esperar para o número de nascimentos observado naquele determinado hospital? Cada paciente possui uma probabilidade de ter o seu filho naquele hospital; se conhecermos essa probabilidade e a quantidade de mulheres grávidas, saberíamos o número médio esperado de nascimentos naquele hospital específico.

A princípio, poderíamos considerar uma distribuição binomial, ou seja, analisar o nascimento ou não da criança naquele hospital. No entanto, o número de mulheres grávidas (variável n) é enorme, e a probabilidade de uma delas ter um filho naquele hospital é p, que é pequena. Portanto, podemos fazer uma simplificação com relação à aplicação da distribuição binomial para a distribuição de Poisson.

De acordo com Barbetta, Reis e Bornia (2010) temos duas suposições básicas nas distribuições de Poisson que devemos considerar, e que já ficaram evidentes no exemplo anterior: a independência e a aleatoriedade entre ocorrências do evento que está sendo considerado. Mas por que é importante analisar a variação média presente na distribuição de Poisson, como visto no exemplo dos bebês?

O valor médio, que também podemos denotar pela letra grega μ, seria obtido se repetíssemos o evento muitas vezes, de modo que este valor é obtido somando-se todos os valores possíveis de v, cada um deles multiplicado pela sua probabilidade de ocorrer. Portanto, este parâmetro é o número médio que obteríamos ao repetir a observação muitas vezes.

A distribuição de Poisson será dada por meio da Equação 1.1, na qual utilizaremos as variáveis já exemplificadas anteriormente. Não entraremos em detalhes com relação à derivação da equação, uma vez que isso já foi abordado em disciplinas de estatística.

$$p(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} \qquad \text{(Equação 1.1)}$$

Sendo $p(v)$ a probabilidade de v contagens no intervalo definido, a base do logaritmo natural ($e = 2{,}71828...$) e μ a taxa média.

Temos algumas propriedades desse tipo de distribuição que vale a pena mencionarmos:

- Devemos levar em conta que a distribuição de Poisson apresenta a probabilidade de se obter um resultado levando-se em conta a aleatoriedade dos eventos, no entanto, associado a uma taxa média.
- A taxa média, que representamos pela letra grega μ, é obtida por meio da contagem média, que seriam os valores médios de v.
- Assim como utilizamos o conceito de média, o desvio

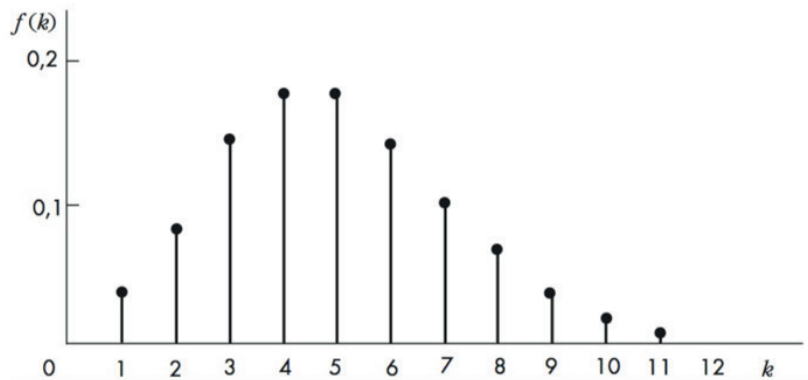
padrão seria a raiz quadrada de μ e a melhor aproximação da distribuição seria quando $\mu = v$, portanto, o número médio de eventos que ocorrem num intervalo de tempo T pode ser descrito pela Equação 1.2.

$$A = v \pm \sqrt{v} \qquad \text{(Equação 1.2)}$$

sendo A o número médio de eventos que ocorrem no tempo T.

A Figura 1.1 apresenta um exemplo de função de densidade de Poisson com média $\mu = 5$, sendo $f(k)$ a probabilidade, que denotamos anteriormente por $p(v)$.

Figura 1.1 | Função de densidade de Poisson



Fonte: Clark e Downing (2010).

A distribuição de Bernoulli é empregada em situações que admitem somente dois resultados, que usualmente são denominados *sucesso* ou *fracasso*. Na prática, é fácil identificar algumas aplicações para esse modelo de distribuição. Vamos a alguns exemplos:

- No lançamento de uma moeda é possível que tenhamos coroa ou cara.
- Ao jogar um dado pode ocorrer ou não a face seis.
- O resultado de um exame pode confirmar ou refutar a existência de uma doença.
- Um processo produtivo pode gerar peças conformes ou não conformes.

Nos casos anteriores foi possível constatar situações nas quais existe uma dicotomia, geralmente representada pelo fracasso-sucesso. Na prática, do que já vimos anteriormente, agora temos a probabilidade p de sucesso ou o complementar de p se for um fracasso ($p-1$). Como ficaria, então, a função de probabilidade nesse caso? Basicamente, a distribuição de Bernoulli também é um tipo especial de distribuição binomial, no qual n é igual a 1 (CLARK; DOWNING, 2010). Portanto, poderíamos definir a função de probabilidade em função da variável aleatória v :

$$v = \begin{cases} 1 \rightarrow sucesso \\ 0 \rightarrow fracasso \end{cases}$$

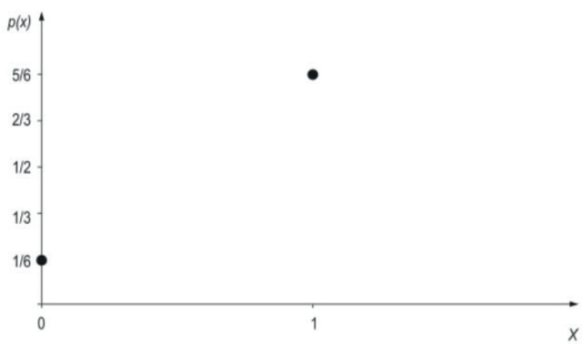
$$p(v) = \begin{cases} p \rightarrow v = 1 \\ p-1 \rightarrow v = 0 \end{cases}$$

Reflita

Caro aluno, você acha que poderíamos dizer que a Distribuição de Bernoulli segue um modelo binário?

Novamente temos o conceito de valor médio, como na distribuição de Poisson, que neste caso também pode ser chamado de esperança ou valor esperado. A Figura 1.2 apresenta um exemplo de função de probabilidade da distribuição de Bernoulli, sendo $p(x)$ a probabilidade, que denotamos anteriormente por $p(v)$.

Figura 1.2 | Função de probabilidade da distribuição de Bernoulli.



Fonte: Kirsten e Rabahy (2007).

Agora que já relembramos e aprofundamos alguns conceitos de processos estocásticos e de distribuições de probabilidades, vamos a algumas aplicações mais comuns para que você entenda bem aquilo que foi tratado:

- Setor de serviços: seguradora de veículos – uma seguradora recebe V reais de cada um dos seus segurados, em troca do serviço de seguro por um período de tempo (podem ser dias, meses, anos, entre outros). Quando um sinistro com algum segurado ocorre, a seguradora também é responsável pela indenização, além de outras despesas gerais, como as administrativas, que não estamos considerando neste momento. Para que a seguradora tenha a liquidez necessária para o pagamento das indenizações, ela possui uma reserva financeira que é afetada apenas pelo pagamento dos prêmios, pelos clientes, ou pelas indenizações, pela própria seguradora. O lucro da empresa será a diferença entre os V reais que ela recebe e o valor total das indenizações que foram pagas no mesmo período.

A pergunta é: estamos lidando com processos estocásticos, que são sujeitos a distribuições de probabilidades? Nessa aplicação, em especial, sim, pois o lucro da seguradora depende da quantidade de recebimentos e de indenizações pagas, que são variáveis aleatórias. Mas e se quisermos utilizar um modelo de distribuição de probabilidade que possa quantificar essa incerteza? Como vimos anteriormente, poderíamos aplicar o conceito de distribuição de Poisson para analisar os processos envolvidos, tendo em vista o emprego de um valor médio de sinistros. Uma das formas de se fazer isso é analisando a ocorrência de sinistros pela faixa etária dos segurados e, com isso, definir uma política de preços para alcançar a margem de lucro desejada.

- Setor industrial: montadora de carros – uma montadora está preocupada com a qualidade dos seus veículos e faz inspeções regulares para manter a conformidade dos seus produtos. Ao final do processo de montagem, cada carro é testado e pode ser considerado conforme (apto para venda) ou não conforme (deve ser retrabalhado). Considerando-se que a existência de um carro não conforme independe dos outros carros, novamente cabe a pergunta: estamos lidando com processos estocásticos, que são sujeitos a distribuições de probabilidades?

Podemos dizer que sim, pois, como a existência de um carro não conforme é independente, esse processo está sujeito a variáveis aleatórias. Mas e se novamente quisermos utilizar um modelo de distribuição de probabilidade que possa quantificar essa incerteza? Poderíamos aplicar o conceito de distribuição de Bernoulli, pois a probabilidade de que um carro seja não conforme uma dicotomia, o fracasso ou sucesso.

Assimile

Vamos retomar alguns conceitos que foram abordados nesta seção e que serão fundamentais ao longo do nosso processo de ensino-aprendizagem.

Em primeiro lugar, temos o próprio conceito de processos estocásticos, que nada mais são do que processos que estão sujeitos a incertezas, que podem ser descritas por meio de variáveis aleatórias.

Quando falamos em variáveis aleatórias, logo nos lembramos dos conceitos de probabilidade e das distribuições de probabilidades, ou seja, a chance de algum evento ocorrer. Dentre as distribuições de probabilidades, aplicamos a distribuição de Poisson e a distribuição de Bernoulli.

A distribuição de Poisson é caracterizada pela probabilidade de ocorrência de uma série de eventos num período de tempo, lembrando da independência e da aleatoriedade entre ocorrências do evento analisado.

Já a distribuição de Bernoulli é utilizada quando temos a dicotomia entre sucesso e fracasso, ou seja, avaliamos a probabilidade de sucesso ou de fracasso numa ocorrência.

Sem medo de errar

Relembrando que você foi contratado por uma empresa de varejo como o responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações, você se deparou com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente. A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, e cabe a você trazer os esclarecimentos necessários. Nesse contexto, como engenheiro recém contratado,

como você explicaria o comportamento do processo em função da aleatoriedade?

Como nós observamos, diversos processos apresentam a característica de aleatoriedade, pois existe uma incerteza com relação à ocorrência de determinados eventos. Para iniciar sua apresentação a ser entregue ao presidente da filial, na situação descrita, não temos como afirmar com 100% de certeza que em um determinado dia serão vendidos tantos produtos.

O que caberia ser explicado aos seus gestores é que essa aleatoriedade é inerente ao processo de vendas e que ela não pode ser eliminada, mas que você irá trabalhar com os conceitos de distribuição de probabilidade para verificar qual modelo melhor se encaixa às características do seu processo para tentar minimizar as perdas decorrentes do excesso ou da falta de produtos.

Uma das possibilidades seria empregar o conceito de distribuição de Poisson, avaliando a aleatoriedade das vendas por meio de uma taxa média, que pode ser observada no dia a dia, para que seja feito um ajuste na quantidade a ser reposta diariamente.

Nesse caso, a probabilidade de mais de três clientes buscarem pelo produto específico por dia naquela loja será a soma das probabilidades complementares de não ocorrer nenhuma procura, de um cliente procurar e de dois clientes procurarem pelo produto, portanto:

$$p(v \geq 3) = 1 - p(0) - p(1) - p(2)$$

Como estamos utilizando o conceito de distribuição de Poisson, sabemos que a probabilidade pode ser calculada por:

$$p(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu}$$

Nos casos descritos, a probabilidade de nenhum cliente querer o produto é:

$$p(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = \frac{1}{1} e^{-2} = 0{,}1353$$

Um cliente querer o produto:

$$p(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = \frac{2}{1} e^{-2} = 0{,}2706$$

Dois clientes procurarem o produto:

$$p(2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = \frac{4}{2}e^{-2} = 0,2706$$

Portanto:

$$p(v \geq 3) = 1 - 0,1353 - 0,2706 - 0,2706 = 0,3233 = 32,35\%$$

A probabilidade de ocorrer mais de três vendas por dia será de aproximadamente 32%.

Desta forma, você conseguirá minimizar os prejuízos fazendo uma análise crítica dos processos e saber como melhor gerenciá-los.

Avançando na prática

Controle de qualidade de uma indústria automobilística

Descrição da situação-problema

Em um laboratório de controle de qualidade de uma indústria automobilística, pequenas engrenagens são selecionadas, por engenheiros juniores de qualidade, de acordo com o critério: em conformidade com a especificação técnica ou fora de conformidade de acordo com a especificação técnica.

Como gestor do laboratório, você percebe que os recém-formados estão tendo dificuldade em fazer uma análise de probabilidade sobre o processo, uma vez que não estão identificando o tipo de distribuição de probabilidade que rege o fenômeno.

Ao passar essa dificuldade para o gerente geral de qualidade, ele o solicita para fazer uma explanação sobre o tema a fim de direcionar as atividades dos engenheiros. Como você faria essa apresentação a fim de ajudar os juniores a entenderem a distribuição de probabilidade que modela esse fenômeno?

Resolução da situação-problema

Para iniciar a sua apresentação, inicialmente é interessante você destacar que se trata de uma distribuição de Bernoulli, que é empregada em situações que admitem somente dois resultados, que usualmente são denominados sucesso ou fracasso.

Neste caso, é fácil identificar que o sucesso se refere ao estado *em conformidade com a especificação técnica,* enquanto o fracasso se refere ao estado *fora de conformidade de acordo com a especificação técnica*. Na prática, temos a probabilidade p de sucesso e o complementar de p se for um fracasso ($p-1$).

Pontuado isso em sua apresentação, agora é válido você mostrar como seria a função de probabilidade para esse caso.

Basicamente, a distribuição de Bernoulli também é um tipo especial de distribuição binomial no qual n é igual a 1. Portanto, poderíamos definir a função de probabilidade, em função da variável aleatória v :

$$v = \begin{cases} 1 \rightarrow \textit{sucesso} - \textit{engrenagem em conformidade com a especificação técnica} \\ 0 \rightarrow \textit{fracasso} - \textit{engrenagem fora de conformidade com a especificação técnica} \end{cases}$$

$$p(v) = \begin{cases} p \rightarrow v = 1 \\ p-1 \rightarrow v = 0 \end{cases}$$

Novamente temos o conceito de valor médio, como na distribuição de Poisson, que neste caso também pode ser chamado de esperança ou valor esperado. A Figura 1.2 apresenta um exemplo de função de probabilidade da distribuição de Bernoulli, sendo $p(x)$ a probabilidade, que denotamos anteriormente por $p\,(v)$.

Você colocaria algo a mais na sua apresentação?

Bom trabalho!

Faça valer a pena

1. No âmbito de distribuição de probabilidade com enfoque nos processos estocásticos, avalie as afirmações I, II e III:

I. Uma distribuição de probabilidade pode ser entendida como a relação entre um determinado valor da variável em estudo com a probabilidade desse valor ocorrer.

II. As distribuições de probabilidades podem ser contínuas ou aleatórias.

III. As unidades de medida, por exemplo, a massa, a temperatura e o comprimento são exemplos de variáveis contínuas, pois podem assumir qualquer valor, inclusive fracionado, dentro do intervalo analisado.

Considerando as afirmações I, II e III, assinale a alternativa correta.

a) Somente a I é correta.

b) Somente as I e II são corretas.

c) Somente a II é correta.

d) Somente as I e III são corretas.

e) Somente a III é correta.

2. A seguir, será apresentado um contexto sobre as distribuições de Poisson e de Bernoulli.

Avalie como as frases devem ser corretamente completadas.

Dentre os diversos modelos de distribuição de probabilidade, destacam-se as distribuições de Poisson e de Bernoulli para a aplicação em processos estocásticos. Na distribuição de Poisson, o interesse está em descrever eventos que ocorrem aleatoriamente, no entanto, com um(a) _____ definido(a). Temos duas suposições básicas nas distribuições de Poisson que devemos considerar: o(a) _____ e o(a) _____ entre ocorrências do evento que está sendo considerado.

Assinale a alternativa que completa a frase corretamente.

a) Variação média; independência; aleatoriedade.

b) Variação média; independência; continuidade.

c) Desvio padrão; independência; aleatoriedade.

d) Desvio padrão; continuidade; aleatoriedade.

e) Incerteza padrão; independência; aleatoriedade.

3. "Mais de 43% dos acidentes nas rodovias federais terminam com mortos ou feridos. Entre julho de 2014 e junho de 2015, foram mais de 8 mil vítimas fatais e 100 mil feridos. Os dados fazem parte de uma análise feita pelo GLOBO com base nos mais de 156 mil acidentes nas estradas. O levantamento apresenta a taxa de mortos por cada 10 km. A maior ocorreu na BR 040, num trecho de 8 km que passa pelo Distrito Federal. O estudo mostra ainda que a chance de haver acidentes com mortos ou feridos aumenta até 19% nos feriados e 18% nos fins de semana."

Disponível em: <http://infograficos.oglobo.globo.com/brasil/mapa-dosacidentes-das-rodovias-federais.html>. Acesso em: 10 out. 2017. Acesso em: 10 out. 2017.

Diante das constatações feitas pela polícia rodoviária ao longo de diversos meses, numa determinada rodovia do Estado de São Paulo ocorrem, em média, 2 acidentes por dia. Pensando no efetivo que deve ser alocado para monitoramento, qual a probabilidade aproximada de ocorrerem 3 ou mais acidentes num dia nessa mesma rodovia?

a) 12%
b) 22%
c) 32%
d) 42%
e) 52%

Seção 1.2

Processos estocásticos discretos e contínuos

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância dos processos estocásticos, começaremos agora a explorar esse conceito refletindo sobre processos estocásticos discretos e processos estocásticos contínuos.

Assim, estudaremos nesta seção os fundamentos e a caracterização de processos discretos e contínuos, a fim de que você consiga identificá-los e diferenciá-los.

Também, a fim de melhorar seu processo de aprendizagem e assimilação de conceitos, serão explorados exemplos de processos estocásticos discretos e contínuos.

Isso será importante em sua prática profissional para você saber reconhecer esses tipos de processos estocásticos e saber trabalhar com cada um deles de acordo com suas especificidades.

Logo, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de varejo e é responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações.

Ao iniciar suas atividades, você se deparou com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, cabendo a você trazer os esclarecimentos necessários.

Em um primeiro momento, como engenheiro recém contratado, você explicou o comportamento do processo em função da aleatoriedade.

Agora, uma vez que você conseguiu entender o comportamento do processo, como classificaria o comportamento do processo, entre discreto ou contínuo, e quais as diferenças resultantes dessa classificação?

O gerente da loja apresentou a você alguns dados das vendas dos últimos dias para que você utilizasse em sua explicação, conforme Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Vendas dos últimos dias, de um dos produtos da linha de eletrodoméstico

Dia	Vendas (unidades)
01/09	3
02/09	4
03/09	4
04/09	5
05/09	3
06/09	2
07/09	3
08/09	3
09/09	2

Fonte: elaborada pela autora.

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o presidente da filial solicitou uma apresentação com esse escopo.

Então, mãos à obra!

Bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que entendemos melhor o conceito de processos estocásticos, faremos uma análise mais profunda na forma de uma classificação.

Aprendemos que um processo estocástico é composto por uma variável aleatória no formato X_t, sendo que t varia ao longo de T. Os valores que são assumidos pelos processos estocásticos podem ser denominados estados, sendo que o conjunto com todos os estados possíveis é chamado espaço de estados. Entraremos com mais detalhes sobre a abordagem de espaço de estados nas próximas seções, mas o que nos interessa agora é responder ao seguinte questionamento: como classificar um processo estocástico?

Antes de responder a esse questionamento, vamos imaginar um

exemplo para que fique mais clara a importância da classificação, para depois vermos as principais definições, seus impactos e alguns exemplos específicos.

Vamos supor que você seja um engenheiro de uma hidrelétrica e se depare com o nível de uma represa observado em um intervalo de tempo, ou que você esteja acompanhando a cotação de uma ação que você adquiriu na bolsa de valores no final de um dia. Será que, em termos de processos estocásticos, estamos falando da mesma coisa?

Embora sejam dois exemplos de duas situações bem parecidas, se analisarmos sob o enfoque de processos estocásticos são duas situações diferentes que exigem tratamentos diferentes. Agora ficará mais claro então a necessidade de fazer a distinção correta entre os tipos de processos estocásticos, pois as ferramentas de análise aplicadas são distintas.

Então, retomando a nossa pergunta inicial, como devemos classificar um processo estocástico?

Basicamente, faremos isso analisando dois aspectos:

1. Relação com o estado do nosso sistema: já temos uma ideia inicial do que seja o estado do nosso sistema, mas vamos deixar essa classificação para mais adiante, quando essa definição e suas implicações estiverem mais aprofundadas.

2. Relação com o tempo: analisaremos se o tempo é uma variável discreta ou contínua.

Então vamos focar neste momento na classificação dos processos estocásticos com relação ao tempo. Veremos mais adiante quais são as definições envolvidas e quais as consequências desse tipo de classificação.

Para que fique clara a distinção proposta, primeiro resgataremos o conceito de variável discreta e de variável contínua.

Dentre as diversas definições possíveis que poderíamos adotar, vamos dizer a princípio que as variáveis contínuas são aquelas que representam características que podem assumir quaisquer valores numa escala contínua, ou seja, os valores fracionados também fazem sentido.

Já as variáveis discretas representam características que podem assumir apenas um número finito ou infinito contável de valores, ou seja, não faz sentido utilizar valores fracionados.

Exemplificando

Vamos ver alguns exemplos de variáveis que podem ser consideradas discretas ou contínuas?

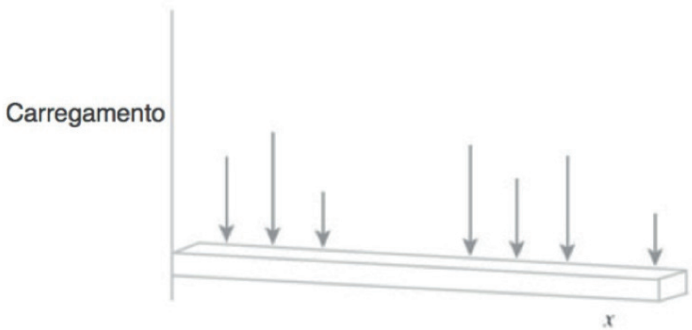
Quando você pega uma balança e mede seu peso ou a sua altura utilizando uma fita métrica, você pode obter valores fracionados, que representariam variáveis contínuas.

Na área de engenharia fazemos o mesmo, isto é, existem alguns processos que são considerados contínuos, sendo aqueles que geralmente envolvem medidas, como comprimento, área, volume, massa, entre outros. Um exemplo típico é uma refinaria de petróleo.

Geralmente em casos nos quais a variável é o resultado de contagens, estamos falando de variáveis discretas. Por exemplo, o número de filhos de um casal ou a quantidade de balas num pote.

Montgomery, Runger e Hubele (2004) apresentam um caso de variáveis discretas bem interessante aplicado à Engenharia: um carregamento numa viga na qual somente são colocadas cargas em pontos discretos. A função de probabilidade para cada um dos valores possíveis para a variável aleatória é descrita na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Carregamento em viga em pontos discretos



Fonte: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000004292 >. Acesso em: 6 nov. 2017.

Na área de engenharia, assim como temos processos contínuos, temos também os processos discretos, que são caracterizados, no segmento de produção, pela fabricação de cada item, de modo separado e individual, por exemplo como ocorre em montadoras de carros, fábricas de aparelhos eletrônicos, entre outros.

Agora que ficou clara a distinção existente entre as variáveis discretas e contínuas, vamos aplicar esses conceitos na análise do tempo nos processos estocásticos.

Hillier e Lieberman (2013) definem um processo estocástico como um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$. Mas o que significa classificar os processos estocásticos em função do tempo t?

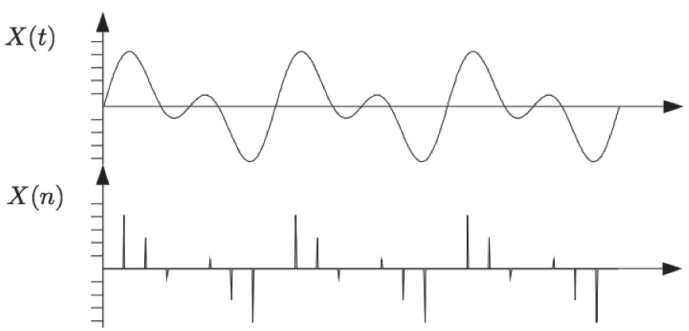
Vamos lá:

1. Se o tempo for discreto, dizemos que temos um processo estocástico de tempo discreto, ou seja, X_t é definido apenas para um dado conjunto de instantes de tempo, ou seja, são valores naturais (inteiros não negativos). Portanto, t, nesse caso, é finito ou infinito enumerável. Dizemos que um conjunto é infinito enumerável quando existe uma bijeção de modo que $f: N \to X$ sendo que N é o conjunto dos naturais.

2. Se o tempo for contínuo, então temos um processo estocástico de tempo contínuo. Nesse caso, a condição anterior não é satisfeita e o tempo pode assumir um valor fracionado.

Ficou clara a diferença entre os processos estocásticos de tempo discreto e de tempo contínuo? Então, para termos certeza, vamos analisar a Figura 1.4 e tentar identificar a diferença entre os tipos de processos estocásticos abordados. Vale lembrar que para cada tipo de processo existe um tratamento diferente para que você chegue à conclusão adequada do seu estudo.

Figura 1.4 | Processo estocástico de tempo contínuo e discreto



Fonte: adaptada de: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2017.

Na Figura 1.4 percebemos duas curvas, sendo $X(t)$ uma função de tempo contínuo, enquanto $X(n)$ representa uma função de tempo discreto. É possível observar que no caso discreto a função só assume alguns valores em instantes de tempo pré-definidos.

Portanto, no caso discreto, podemos verificar que o tempo é descrito por uma sequência $X_n = X(nT)$ na qual os instantes de tempo $t_n = nT$ e n são uma constante inteira, bem como $\{T \in Z\}$, ou seja, teremos um múltiplo inteiro do tempo.

Será que ficou evidente a diferença entre o processo estocástico de tempo discreto e de tempo contínuo conforme ilustrado na Figura 1.4?

Então, para termos certeza, vamos retomar os nossos exemplos a partir dos quais iniciamos o estudo da classificação dos processos estocásticos. Se você é um engenheiro de uma hidrelétrica e se depara com o nível de uma represa observado em um intervalo de tempo ou se você está acompanhando a cotação de uma ação que você adquiriu na bolsa de valores no final de um dia, qual a diferença entre os dois casos?

A resposta, embora não pareça tão fácil, é que no primeiro caso temos um exemplo de um processo estocástico de tempo contínuo e no segundo de tempo discreto.

Vamos ver melhor a diferença. No primeiro caso, o tempo é contínuo, uma vez que ele pode ser fracionado e podemos representar o nível da represa em função do tempo contínuo, como observado em $X(t)$ na Figura 1.4.

Já no segundo caso, identificamos um processo estocástico de tempo discreto, no qual ao fim de um dia a cotação da ação apresentará comportamento aleatório. Nesse caso, teríamos aqui representado o comportamento conforme observado em $X(n)$ na Figura 1.4.

Pesquise mais

Vamos aprofundar os nossos conhecimentos em processos estocásticos de tempo contínuo?

No texto *Processos Estocásticos Aplicados às Finanças* é mostrado um exemplo de aplicação e a abordagem de tempo contínuo e discreto, vale a pena dar uma conferida e ampliar os seus conhecimentos, aprendendo novos conceitos e observando algumas aplicações que podem favorecer o seu aprendizado, portanto, mãos à obra. Leia da página 1 até a 13!

NICOLAU, J. Processos estocásticos aplicados às finanças. Instituto Superior de Economia e Gestão. Universidade Técnica de Lisboa. Disponível em: <http://pascal.iseg.utl.pt/~nicolau/myHP/spe%202008.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2017.

Considerando-se então a classificação dos processos estocásticos em tempo discreto ou contínuo, a notação ficaria da seguinte forma:

1. Processos em tempo contínuo: $\{X_t, 0 \leq t\}$
2. Processos em tempo discreto: $\{X_t, t = 1, 2, 3...\}$

Agora, retomando as perguntas iniciais, já sabemos a importância de classificar os processos estocásticos, bem como fazer a classificação pelo tempo. Então, vamos discutir um pouco das implicações da análise do tempo nos processos estocásticos.

Já sabemos que para cada ponto t do conjunto T do nosso processo estocástico observamos uma variável aleatória X_t, certo?

Alguns processos estocásticos de tempo contínuo merecem destaque, como os processos de Poisson, de Nascimento, de Nascimento e Morte. Vamos ver cada um deles de modo detalhado ao longo das seções.

Os processos estocásticos de tempo discreto também podem ser chamados de sequência aleatória.

Exemplificando

Vamos ver alguns exemplos de processos estocásticos de tempo discreto?

Então considere que o histórico de compras de um cliente ao longo do tempo é de uma coxinha.

Neste exemplo simples, poderíamos dizer que o sabor de cada coxinha consumida poderia ser de frango, requeijão ou frango com requeijão.

Se tivermos um público composto por clientes desse tipo, poderíamos escolher, ao acaso, um cliente, e para cada coxinha consumida n chamar de X_n o tipo de coxinha consumido, podendo ser 0 se for de frango, 1 se for de requeijão e 2 se for de frango com requeijão.

Portanto, teremos uma variável aleatória X_n e a sua evolução ao longo do tempo fará com que possamos tirar conclusões sobre as mudanças de consumo do recheio do salgado.

Se você tiver um pequeno comércio que venda salgados, essa informação será extremamente útil para que você saiba quais tipos de salgados deve priorizar no momento da compra ou do preparo.

Agora ficaram evidentes os conceitos de variáveis discretas e contínuas, a importância da classificação em processos estocásticos de tempo discreto e de tempo contínuo, algumas implicações e alguns exemplos. Esses conceitos são fundamentos para o nosso avanço em processos estocásticos.

Assimile

Caro aluno, vale ressaltar que é importante, para o nosso estudo, que fique bem evidente para você a distinção entre os processos estocásticos de tempo discreto e de tempo contínuo.

A primeira coisa que devemos lembrar é do conceito de variáveis discretas e de variáveis contínuas.

Relembrando, as variáveis discretas são aquelas que representam características que assumem apenas um número finito ou infinito contável de valores, ou seja, geralmente resultados de processos de contagens cuja representação é feita com números inteiros, como, por exemplo, a quantidade de alunos numa sala de aula.

Já as variáveis contínuas representam características que podem assumir quaisquer valores, inclusive os fracionados. Como exemplo, temos medidas (volume, área, comprimento, massa, entre outros).

A partir dessas definições podemos estender a aplicação desses conceitos para os processos estocásticos, classificando-os com relação ao tempo, em tempo discreto ou tempo contínuo.

Nos processos de tempo discreto, X_t é definido apenas para um dado conjunto de instantes de tempo, ou seja, são valores inteiros, enquanto no tempo contínuo é possível assumir um valor fracionado.

Devemos levar em conta que as aplicações de processos estocásticos são diversas, portanto vamos estudar na sequência uma outra classificação de processos estocásticos, pensando agora no conceito de espaço de estados.

Veremos alguns conceitos novos, mas já podemos começar nossa reflexão por meio do questionamento apresentado no item *Reflita*.

Reflita

Agora que aprendemos a classificar processos estocásticos com relação ao tempo discreto e ao tempo contínuo, que tal refletirmos sobre o tempo nos processos estocásticos.

Vale a pena lembrar que um processo estocástico é definido como um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$.

Mas será que sempre temos a representação do tempo no conjunto T?

Talvez seja difícil imaginar, prontamente, um exemplo, mas vou dar algumas dicas para que você prossiga com a sua reflexão a respeito dessa pergunta.

Imagine que você seja um engenheiro em uma linha de montagem, de modo que os produtos finais após a inspeção de qualidade são classificados como defeituosos ou conformes.

Se o produto enésimo estiver com defeito, consideraremos $X_n = 0$ e, caso contrário, $X_n = 1$.

Agora, a probabilidade de um produto ser considerado defeituoso independe dos outros produtos fabricados. E então? Que conclusão você chega a respeito dessa reflexão?

Sem medo de errar

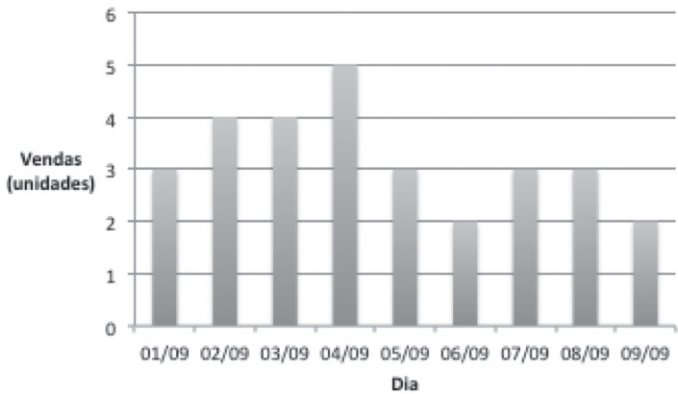
Caro aluno, dada a importância da classificação dos processos estocásticos, começaremos agora a explorar esse conceito refletindo sobre os processos estocásticos discretos e sobre os processos estocásticos contínuos aplicados ao nosso problema.

No nosso contexto você foi contratado por uma empresa de varejo e é responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações, sendo que o problema mais recorrente que a empresa está enfrentando é que um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente, e agora que você entendeu o comportamento do processo, como você classificaria o comportamento do processo, entre discreto ou continuo, e quais as diferenças resultantes dessa classificação?

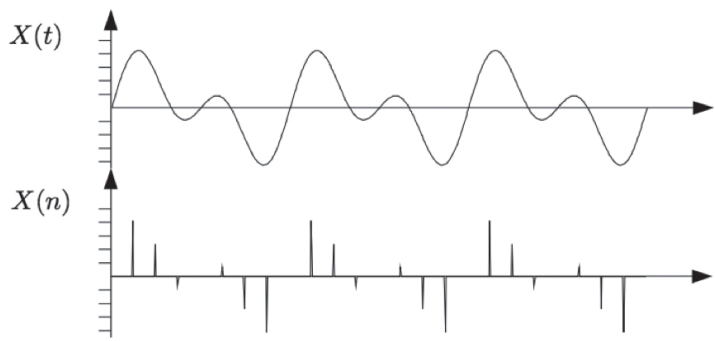
Em primeiro lugar, vamos construir o gráfico (Figura 1.5) que descreve as vendas ao longo dos dias informados e, em seguida, fazer uma comparação com o que apresentamos anteriormente.

Figura 1.5 | Gráfico que descreve as vendas ao longo dos dias informado



Fonte: elaborada pela autora.

Agora, vamos retomar a Figura 1.4 e analisar o comportamento apresentado pela empresa.



Fonte: adaptada de: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2017.

Conforme havíamos observado na Figura 1.4 percebemos duas curvas, sendo $X(t)$ uma função de tempo contínuo, enquanto $X(n)$ representa uma função de tempo discreto. É possível observar que no caso discreto a função só assume alguns valores em instantes de tempo pré-definidos.

Portanto, no caso discreto, podemos verificar que o tempo é descrito por uma sequência $X_n = X(nT)$ na qual os instantes de tempo $t_n = nT$ e n são uma constante inteira.

A quantidade de eletrodomésticos na loja no final do enésimo dia poderia ser chamada de $X(n)$, sendo que o tempo é descrito por $X_n = X(nT)$, pois o tempo é uma constante inteira (enésimo dia), que é representado por $t_n = nT$.

Portanto, no caso da empresa em questão, temos um processo estocástico de tempo discreto, conforme podemos observar no gráfico que construímos.

Após fazer as devidas constatações, você conseguiu elaborar a apresentação para os seus gestores, que agora sabem como classificar adequadamente, utilizando o gráfico elaborado que consta na sua apresentação.

Parabéns por mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Ensaios metrológicos e a correlação com processos estocásticos.

Descrição da situação-problema

Considerando que você foi contratado como gestor de um laboratório de metrologia, foi solicitado que avalie a massa de uma esfera de aço utilizada em rolamentos, sendo que o valor de especificação dessa peça é de 30,00 g. Para isso, você executa 5 medições em uma balança, obtendo as indicações da Tabela 1.2. A partir das medições, um novo estagiário do laboratório, com dificuldade de compreender o processo de medição, questiona o tipo de fenômeno que está modelado. Refletindo sobre a classificação de processos contínuos e discretos, como você explicaria o processo de medição para o estagiário?

Tabela 1.2 | Resultado da medição do ensaio da esfera de aço

Número da medição	Indicação
1	30,50
2	30,27
3	30,35
4	300,19
5	300,31

Fonte: elaborada pela autora.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, é interessante você destacar que, comumente, em ensaios metrológicos com o uso de balanças, paquímetros, micrômetros, trenas, entre outros dispositivos, o resultado de medição pode assumir diferentes valores que divergem de um valor inteiro.

Assim, conceitualmente, dentre diversas definições possíveis que poderíamos adotar, explique ao estagiário que as variáveis contínuas são aquelas que representam características que podem assumir quaisquer valores em uma escala contínua, ou seja, os valores fracionados também fazem sentido. A Tabela 1.2 torna evidente essa definição.

Logo, finalize sua explicação abordando que existem alguns processos, em engenharia, inclusive, que são considerados contínuos, sendo aqueles que geralmente envolvem medidas, como comprimento, área, volume, massa, entre outros.

Parabéns, mais uma etapa conquistada!

Faça valer a pena

1. Ao considerarmos o conceito de variável contínua e discreta, poderemos refletir a respeito da classificação de processos estocásticos em relação ao tempo. Assim, avalie as afirmações I, II e III.

I. Se o tempo for contínuo, consideramos que X_t é definido apenas para um dado conjunto de instantes de tempo, ou seja, são valores inteiros. Portanto, t nesse caso é finito ou infinito enumerável.

II. Se o tempo for discreto, o tempo pode assumir um valor fracionado.

III. Representação de processos em tempo contínuo: $\{X_t, 0 \leq t\}$.

IV. Processos em tempo discreto: $\{X_t, t = 1, 2, 3...\}$.

Avaliando as afirmações de I a IV, assinale a alternativa correta.

a) Somente I e III são corretas.
b) Somente I e II são corretas.
c) Somente II e IV são corretas.
d) Somente III e IV são corretas.
e) I, II, III e IV são corretas.

2. Quando pensamos na classificação de processos estocásticos, devemos considerar dois aspectos, isto é, devemos caracterizar o processo estocástico sob dois pontos distintos.
Assinale a alternativa que apresenta corretamente os dois aspectos de classificação de processos estocásticos.

a) Rastreabilidade; estado do sistema.
b) Tempo; rastreabilidade.
c) Tempo; espaço do sistema.
d) Estado do sistema; espaço do sistema.
e) Estado do sistema; tempo.

3. Pensando em processos contínuos e discretos, diferentes exemplos podem ser observados em uma indústria, por exemplo, no âmbito da Engenharia.
Assim, avalie os exemplos I, II e III aplicados à área de Engenharia.
I. Medição metrológica em uma indústria automobilística, na qual o operador de chão de fábrica deve medir o comprimento e a largura de uma chapa de ferro.
II. Contagem de não conformidades presentes em um produto acabado pelo departamento de controle de qualidade.
III. Carregamento em uma viga no qual há cargas colocadas pontualmente na viga.
Considerando os exemplos I, II e III, assinale a alternativa que os caracteriza, nesta ordem, de modo correto.

a) Contínuo; discreto; contínuo.
b) Discreto; contínuo; contínuo.
c) Contínuo; discreto; discreto.
d) Discreto; discreto; discreto.
e) Contínuo; contínuo; contínuo

Seção 1.3

Espaço de parâmetros e espaço de estados

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância dos processos estocásticos, na seção anterior, exploramos o conceito de processos estocásticos discretos e processos estocásticos contínuos, bem como vimos diferentes exemplos.

Assim, estudaremos, nesta seção, os fundamentos e a caracterização dos processos estocásticos com base no espaço de estado e no espaço de parâmetros.

Também, a fim de melhorar seu processo de aprendizagem e a assimilação de conceitos, serão explorados exemplos de processos estocásticos com base nesses conceitos.

Isso será importante na sua prática profissional para que você reconheça esses tipos de processos estocásticos e saiba trabalhar com cada um deles de acordo com suas especificidades.

Logo, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de varejo e é responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações.

Ao iniciar suas atividades, você se deparou com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, cabendo a você trazer os esclarecimentos necessários.

Em um primeiro momento, como engenheiro recém-contratado, você explicou o comportamento do processo em função da aleatoriedade.

Em um segundo momento, uma vez que você conseguiu entender o comportamento do processo, você classificou o comportamento entre discreto ou contínuo, certo?

Agora, ao descrever o processo de gerenciamento de estoques para os gestores, seria mais adequado utilizar uma abordagem orientada ao espaço de estados ou parâmetros? Pense nisso, considerando que nos dez primeiros dias analisados a demanda do produto possa ser $\{3,2,1,4,2,3,1,3,3,1\}$.

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o presidente da filial solicitou a você uma apresentação com esse escopo.

Então, mãos à obra!

Bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, agora vamos introduzir algumas definições importantes, que são os conceitos de espaço de estados e de espaço de parâmetros.

Bom, vamos retomar então a classificação de processos estocásticos discretos e contínuos. Nós vimos que a classificação poderia ser com relação ao estado do nosso sistema e com relação ao tempo. Aprendemos que quando o tempo é descrito por uma variável discreta, temos um processo estocástico de tempo discreto e, similarmente, quando o tempo é uma variável contínua, temos um processo estocástico de tempo contínuo.

Mas o que seria então a definição de espaço de estados, já que sabemos que ela pode ser utilizada na classificação dos processos estocásticos?

Então, agora que já sabemos a distinção entre o tempo discreto e contínuo, relembrando a definição de um processo estocástico, apresentada por Hillier e Lieberman (2013), no qual um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t, sendo que t é o índice que representa a variação do tempo que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$., vamos analisar o conceito de espaço de estados.

Em primeiro lugar, o que é espaço de estados? A resposta para essa pergunta pode ser bem direta, mas vamos entendê-la bem. Os valores que X_t pode assumir são chamados estados, e o conjunto de todos os valores possíveis de X_t, ou seja, de todos os possíveis estados, é chamado de espaço de estados.

Provavelmente essa definição não tenha ficado clara para você, então vamos entender um pouco melhor o significado dessa afirmação. A primeira coisa que precisamos ter em mente é que os estados não precisam ser definidos apenas por quantidades numéricas. Vamos ver um exemplo?

Retomando a questão da inspeção de qualidade em uma linha de produção, sabemos, na inspeção, que os produtos fabricados nessa linha podem ser considerados defeituosos ou não, certo? O que nós fazemos, nesse caso, é definir os possíveis estados para os resultados da inspeção.

Então, nesse momento, deve ter ficado claro o conceito de estado, ou seja, o valor que X_t pode assumir. Mas, nesse caso, faz sentido associar alguma quantidade ao fato do produto estar defeituoso ou não para fins de estado? Não, nós poderíamos dizer que no estado defeituoso $X_t = 0$, mas X_t poderia assumir qualquer valor, pois este valor não tem correlação com o produto real (não é nenhuma dimensão, nem peso etc). Da mesma forma, poderíamos considerar que $X_t = 1$ para um produto não defeituoso.

Como você pôde reparar, não existe nenhuma obrigação do estado ser definido por uma quantidade numérica que represente o seu sistema real. Mas vamos ver um exemplo no qual o estado pode representar uma quantidade numérica que condiz com o nosso sistema real?

Vamos supor que você esteja planejando investir no mercado financeiro comprando e vendendo ações. Nesse caso, ao final de cada dia, o valor da ação de uma determinada empresa pode ser representado por X_t. Nesse caso, o nosso estado tem uma quantidade numérica que o associa ao nosso sistema real, que é o valor da ação. Conseguiu perceber a diferença?

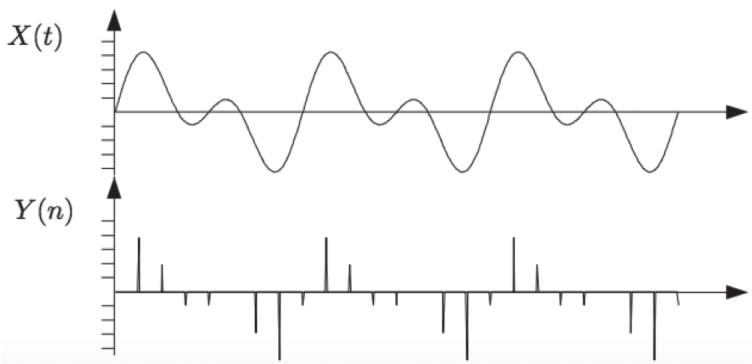
Se você lembra do conceito de variáveis discretas e contínuas, que vimos anteriormente, você já deve ter percebido que, similarmente ao que fizemos com o tempo, podemos fazer o mesmo com as variáveis de estado.

Portanto, podemos ter um processo estocástico de estado discreto ou de estado contínuo. Quando a variável X_t apresentar um comportamento discreto, dizemos que o nosso processo estocástico é de estado discreto e quando X_t é uma variável contínua, que o processo estocástico é de estado contínuo.

O exemplo da inspeção de qualidade é um caso de processo estocástico de estado discreto, sendo que X_t pode assumir apenas dois valores, portanto, é uma variável binária. No caso do valor da ação, X_t pode assumir qualquer valor positivo, inclusive valores fracionados.

Vamos ver como seria a diferença de estado? Na Figura 1.6 temos então a representação de um processo estocástico em função do seu estado.

Figura 1.6 | Processo estocástico de estado contínuo e discreto



Fonte: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

De acordo com Ynoguti (2011), na Figura 1.6 é possível perceber que $X(t)$ é um processo estocástico de estado contínuo. Já $Y(n)$ é obtido por meio da quantização de $X(t)$ nos instantes de amostragem, sendo, portanto, um processo estocástico de estado discreto.

Agora que entendemos o conceito de estado e verificamos alguns exemplos e ilustrações, fica mais simples entender o conceito de espaço de estados.

Como apresentado inicialmente, o conjunto de todos os valores possíveis de X_t, ou seja, todos os possíveis estados, é chamado de espaço de estados. No exemplo da inspeção de qualidade, o espaço de estados, que podemos representar por E, seria $E = \{0,1\}$, ou seja, adotamos uma representação para produtos com defeito e sem defeito. No caso do valor das ações, o espaço de estados é composto pelo conjunto dos números racionais positivos, incluindo-se o zero. Portanto, nesse segundo exemplo, $E = \{0, +\infty\}$.

Exemplificando

Vamos ver um exemplo de espaço de estados?

Sabemos que uma dada loja vende televisores e, como de praxe, não possui muitas unidades em estoque local, para evitar problemas de segurança e de espaço.

A loja pode ter no máximo 10 televisores no estoque local, no entanto, caso no final do dia os vendedores verifiquem que há somente uma, ou eventualmente nenhuma televisão no estoque local, eles solicitam a reposição para a central para ter os 10 televisores no dia seguinte antes do início do expediente.

Nesse caso, o espaço de estados teria uma associação com o número de televisores em estoque local, portanto, $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Mas você deve estar se perguntando, temos a definição de espaço de estados, o que seria, então, a definição de espaço de parâmetros?

Agora que já sabemos todos os conceitos anteriores de variáveis discretas, contínuas e espaço de estados, fica simples definir o que seja espaço de parâmetros. Na verdade, o espaço de parâmetros é composto pelo nosso conjunto T. Lembrando da definição de processos estocásticos, sabemos que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$.

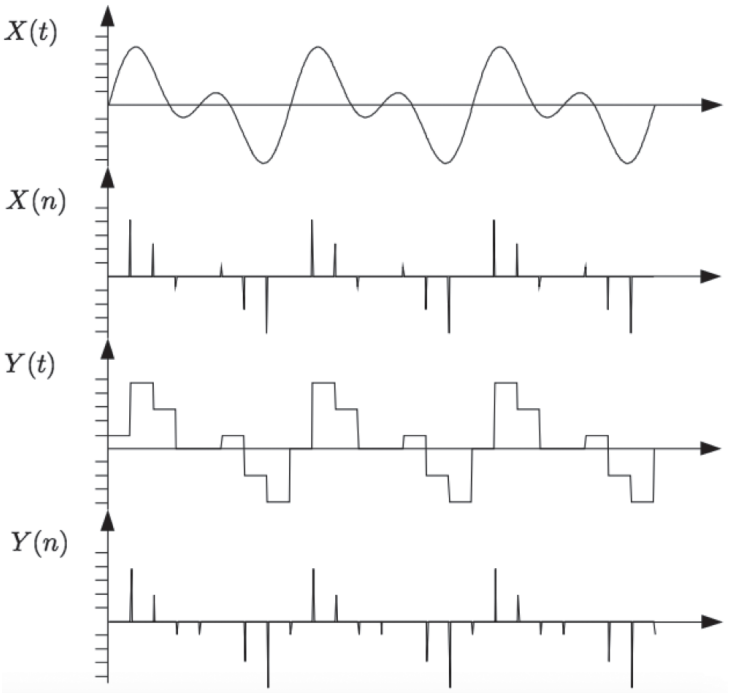
Mas nós já não havíamos falado sobre o comportamento do tempo anteriormente, quando definimos os processos estocásticos de tempo contínuo e de tempo discreto? Exatamente, para complementar aquelas definições anteriores, só ficou faltando mencionar que quando analisamos o tempo, na verdade estamos fazendo uma análise do espaço de parâmetros do nosso processo estocástico.

Desta forma, nós podemos ter:

- Processos estocásticos de estado contínuo e tempo contínuo.
- Processos estocásticos de estado discreto e tempo contínuo.
- Processos estocásticos de estado contínuo e tempo discreto.
- Processos estocásticos de estado discreto e tempo discreto.

Para ficar mais fácil de visualizar os quatro tipos de processos estocásticos, vamos analisar a Figura 1.7.

Figura 1.7 | Tipos de processos estocásticos



Fonte: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Na Figura 1.7 já temos dois exemplos apresentados anteriormente, mas que agora veremos de modo mais detalhado. $X(t)$, que é o caso mais simples de analisar, é um processo estocástico de estado contínuo e tempo contínuo. $X(n)$ é um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto. Já $Y(t)$ é obtido por meio da quantização de $X(t)$ nos instantes de amostragem, sendo, portanto, um processo estocástico de estado discreto e de tempo contínuo. Já $Y(n)$ é um processo estocástico de estado discreto e tempo discreto, pois também foi obtido a partir da quantização de $Y(t)$ nos instantes de amostragem.

Reflita

Agora que já entendemos que existem quatro possibilidades de processos estocásticos, classificados com relação ao tempo (espaço de parâmetros)

e quanto ao estado (espaço de estados), reflita sobre os dois exemplos apresentados anteriormente:

- Inspeção de qualidade (produto com defeito ou sem defeito);
- Ação do mercado financeiro (valor da ação);

Qual a classificação de cada um dos exemplos com relação ao espaço de parâmetros e ao espaço de estados?

Assimile

Caro aluno, note que já sabemos o que é um espaço de estados, um espaço de parâmetros e como classificar processos estocásticos.

Os estados são os valores que X_t pode assumir, de modo que o conjunto de todos os valores possíveis de X_t é chamado de espaço de estados.

O espaço de parâmetros é composto pelo nosso conjunto T, sabendo-se que t é o índice que representa a variação do tempo e que $\{X_t, t \in T\}$.

O espaço de estados e o espaço de parâmetros podem ser compostos por variáveis contínuas e discretas, fazendo com que tenhamos quatro tipos de processos estocásticos entre estado contínuo/discreto e tempo contínuo/discreto.

Agora que já completamos a classificação de processos estocásticos, vamos ver mais uma aplicação? Seria interessante que, após a leitura dos exemplos, você tente plotar um gráfico similar ao apresentado anteriormente para que você tente identificar, de modo mais fácil, qual o tipo de processo estocástico.

Então, suponha que você seja colaborador de um banco, mais especificamente que esteja trabalhando na área de seguros residenciais. Para que a residência esteja coberta pelo seguro, cada segurado paga para o banco uma determinada quantia, que é proporcional ao risco que aquela residência está de sofrer algum sinistro, como roubo, incêndio, desabamento, entre outros.

Para que a seguradora possa indenizar os seus segurados, ela precisa ter uma reserva financeira, que é abastecida pela arrecadação dos segurados (cada seguro é pago anualmente para vigência de um ano).

Essa reserva só é utilizada para as indenizações, de modo que o lucro por período desse setor no banco é a diferença entre o montante

acumulado no período e o total dispendido com as indenizações no mesmo período (estamos desconsiderando outras despesas diversas, como investimentos, bonificações, itens administrativos e de suprimento, entre outros).

Neste caso, como poderíamos classificar o processo estocástico?

Relembrando que, de acordo com Hillier e Lieberman (2013), um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$. A primeira coisa a ser feita, neste caso, é definir o que seria a variável aleatória X_t. O que nos interessa é aferir o lucro do período. Portanto, o lucro pode assumir qualquer valor real, inclusive valores negativos, o que indicaria que o banco teve prejuízos com o seguro, pois o montante arrecadado foi menor que o valor gasto com as indenizações. Desse modo, X_t pode assumir qualquer valor real, o que faz com que o nosso espaço de estados $E = IR$.

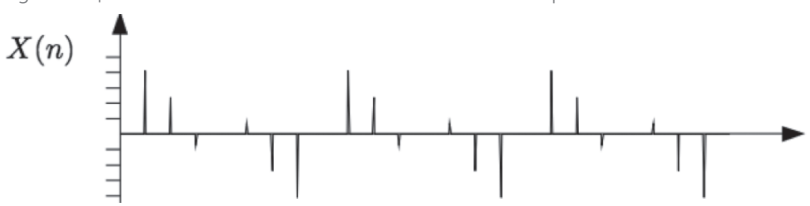
Uma vez que sabemos o espaço de estados do nosso processo estocástico, podemos dizer que se trata de um processo estocástico de estado contínuo.

E com relação ao tempo?

Para analisar o tempo, teremos que verificar o espaço de parâmetros. Nesse caso, o lucro é aferido em períodos específicos, que podem ser meses, semestres ou anos. Portanto, o índice t, que representa a variação do tempo, pertence a um conjunto T. Nesse caso, como o tempo é uma variável discreta, pois assume valores definidos, dizemos que o processo estocástico é de tempo discreto.

Ao final, temos um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto, conforme ilustrado na Figura 1.8.

Figura 1.8 | Processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto.



Fonte: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

Pesquise mais

O que você acha da análise utilizando os conceitos de processos estocásticos aplicada à Ibovespa?

Como já citado em alguns exemplos, a análise dos valores das ações nos mercados financeiros é fundamental para o sucesso dos investidores e nada melhor para fazer esse tipo de análise do que utilizando processos estocásticos.

Vale a pena dar uma lida para entender um pouco melhor dessa aplicação que pode ser, inclusive, uma das suas áreas de atuação futuras! Leia da página 303 até a 307 do texto abaixo:

MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série do Ibovespa. Est. Econ., v. 29, n. 3, p. 303-341, 1999. Disponível em: <http://www8.ufrgs.br/ppge/pcientifica/1999_03.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

Sem medo de errar

Vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de varejo e é responsável pelo gerenciamento dos estoques de uma das instalações.

Ao iniciar suas atividades, você se deparou com um problema recorrente que a empresa está enfrentando: um dos produtos da linha de eletrodomésticos possui um estoque local que pode ser reposto diariamente.

A demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente e os gestores gostariam de entender melhor esse processo ao longo do tempo para otimizar as reposições, cabendo a você trazer os esclarecimentos necessários.

Em um primeiro momento, como engenheiro recém-contratado, você explicou o comportamento do processo em função da aleatoriedade.

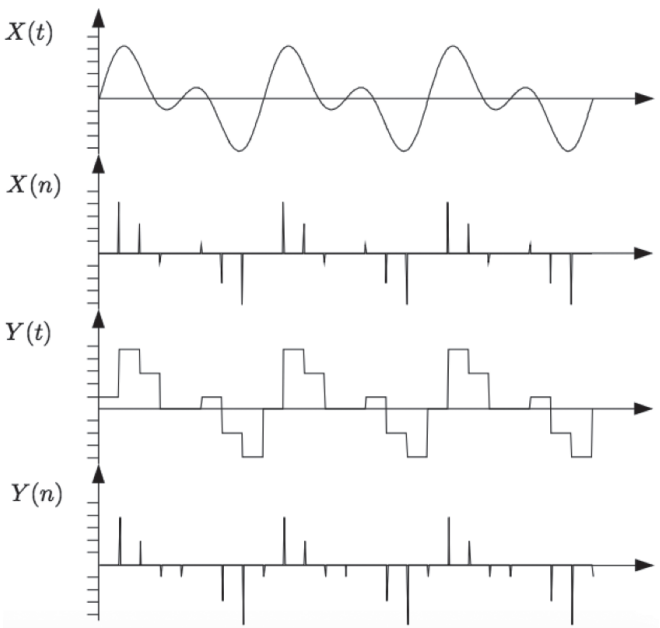
Agora, ao descrever o processo de gerenciamento de estoques para os gestores, seria mais adequado utilizar uma abordagem orientada ao espaço de estados ou parâmetros?

A primeira coisa que temos que considerar são os conceitos de estados, os valores que X_t pode assumir, de modo que o conjunto

de todos os valores possíveis de X_t é chamado de espaço de estados e de espaço de parâmetros, que é composto pelo nosso conjunto T, sabendo-se que t é o índice que representa a variação do tempo e que $\{X_t, t \in T\}$.

Vamos analisar a qual dos espaços esse problema pertence? Vale refletir, então, sobre a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Tipos de processos estocásticos



Fonte: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

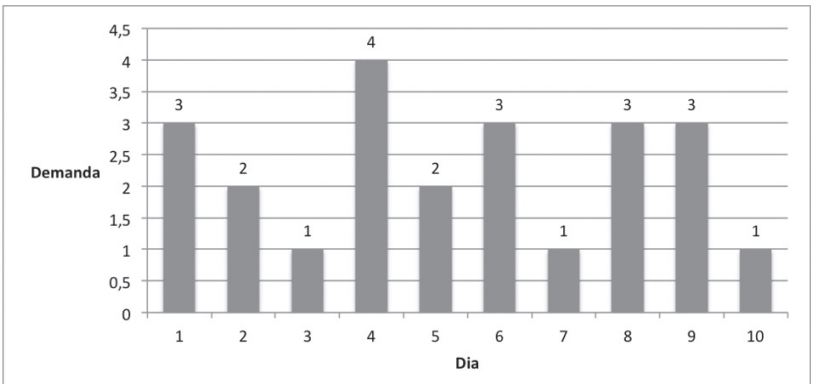
Sabemos que X_t pode assumir apenas valores inteiros, o que faz com que tenhamos um processo estocástico de estado discreto. Com relação ao tempo, como a demanda pelo produto tem apresentado flutuação aleatória, de modo que a cada dia temos um valor diferente, então o tempo também é representado por uma variável discreta, portanto, temos um processo estocástico de tempo discreto. Ambos apresentam espaços discretos, portanto, a abordagem em termos de variável será a mesma, ou seja, ambos lidam com variáveis discretas, tanto t como X_t. O gráfico (Figura 1.10) que representa o comportamento desse processo é:

Figura 1.10 | Processo estocástico de estado discreto e tempo discreto

Fonte:<https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

Como X_t pode assumir apenas valores inteiros, se considerarmos que nos dez primeiros dias analisados a demanda do produto X_t for $\{3,2,1,4,2,3,1,3,3,1\}$ para os dias $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, o nosso gráfico ficaria conforme apresentado na Figura 1.11:

Figura 1.11 | Processo estocástico de estado discreto e tempo discreto



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Inspeção da qualidade

Descrição da situação-problema

Imagine que você seja um engenheiro sênior em uma linha de montagem de eletrodomésticos da linha branca, especificamente refrigeradores. Durante o processo de controle de qualidade, em uma etapa inicial, a amostragem de um lote inicialmente passa por

uma inspeção visual, de modo que se verifica se o produto apresenta alguma varia, como amassado ou riscado. Na ficha de verificação, os operadores devem marcar o número 0, quando o produto não apresentar nenhuma avaria, ou o número 1, quando o produto apresentar alguma avaria. Diante desse procedimento, a fim de evitar erros, você é solicitado pelo gestor de chão de fábrica a explicar a modelagem do processo aos engenheiros juniores a fim de garantir maior assertividade na execução das tarefas. O que você explicaria ao seu tipo sobre o processo em questão?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, você deve mostrar que a modelagem do processo de inspeção visual se baseia no fato de que os produtos finais após a inspeção de qualidade são classificados em conformes ou não conformes (avarias). Se o produto estiver com avaria, os engenheiros devem considerar

$X_t = 1$ e, caso contrário, $X_t = 0$.

Logo, deve ser explicado que se trata de um processo estocástico de estado discreto, uma vez que a variável apresentar um comportamento discreto, dizemos que o nosso processo estocástico é de estado discreto, assumindo valores específicos.

Assim, na inspeção de qualidade, o espaço de estados, que podemos representar por E, seria $E = \{0,1\}$, ou seja, adotamos uma representação para produtos com avarias e sem avarias.

Você acrescentaria algo além na sua explicação?

Que ótimo, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Relembrando a definição de um processo estocástico, apresentada por Hillier e Lieberman (2013), no qual um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t, sendo que t é o índice que representa a variação do tempo que pertence a um conjunto T, de modo que $\{X_t, t \in T\}$.

Sobre a classificação de processo estocástico, avalie as afirmações I, II e III.

I. Os processos estocásticos podem ser classificados com relação ao tempo (espaço de estados) e quanto ao estado (espaço de parâmetros).

II. Podemos ter um processo estocástico de estado discreto ou de estado

contínuo. Quando a variável X_t apresentar um comportamento discreto, dizemos que o nosso processo estocástico é de estado discreto e quando X_t é uma variável contínua, que o processo estocástico é de estado contínuo.

III. O espaço de parâmetros é composto pelo nosso conjunto T, sabendo-se que t é o índice que representa a variação do tempo, ou seja, $\{X_t, t \in T\}$.

Considerando as afirmações I, II e III, assinale a alternativa correta

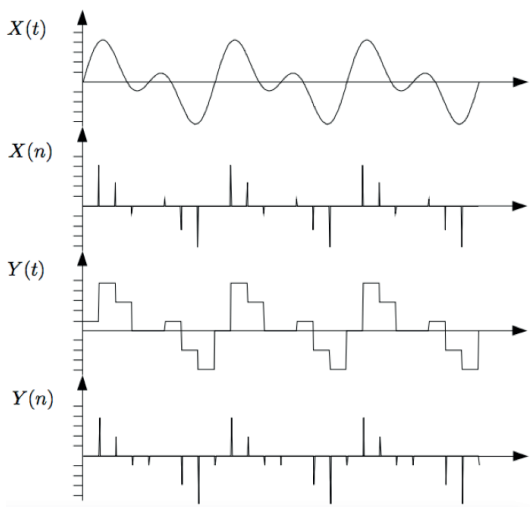
a) I, II e III são corretas.
b) Somente III é correta.
c) Somente II e III são corretas.
d) Somente I é correta corretas.
e) Somente II é correta.

2. Considerando a classificação dos processos estocásticos em relação ao tempo e ao estado, caracterizando entre contínuo ou discreto, sabemos que nós podemos ter:

- Processos estocásticos de estado contínuo e tempo contínuo.
- Processos estocásticos de estado discreto e tempo contínuo.
- Processos estocásticos de estado contínuo e tempo discreto.
- Processos estocásticos de estado discreto e tempo discreto.

Com base nisto, avalie a Figura 1.12

Figura 1.12 | Tipos de processos estocásticos



Fonte: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

Com base na figura, assinale a alternativa correta.

a) $X(t)$ é um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto.
b) $Y(n)$ é obtido por meio da quantização de $X(t)$ nos instantes de amostragem, sendo, portanto, um processo estocástico de estado discreto e de tempo contínuo.
c) $X(n)$ é um processo estocástico de estado contínuo e tempo contínuo.
d) $X(t)$ é um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto.
e) $Y(t)$ é obtido por meio da quantização de $X(t)$ nos instantes de amostragem, sendo, portanto, um processo estocástico de estado discreto e de tempo contínuo

3. Uma loja de equipamentos eletrônicos, especificamente celulares, tem como protocolo manter um estoque mínimo de segurança, para evitar problemas de espaço, bem como de não atendimento de demanda.

A loja pode ter no máximo 4 celulares, da marca mais vendida, no estoque. No entanto, caso ao final do dia os vendedores verifiquem que tem somente 2, ou eventualmente nenhum celular da marca no estoque local, eles solicitam a reposição para a central para ter os 4 celulares no dia seguinte, antes da abertura da loja.

Considerando o contexto acima, o espaço de estados teria uma associação com o número de celulares em estoque local, sendo representado por:

a) $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
b) $E = \{0,1,2,3,4\}$
c) $E = \{0,2\}$
d) $E = \{2,4\}$
e) $E = \{0,1\}$

Referências

BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C. **Estatística para cursos de engenharia e informática**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

CLARK, J.; DOWNING, D. **Estatística aplicada**. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

HINES, W. W. et al. **Probabilidade e estatística na engenhari**a. 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2006.

KIRSTEN, J. T.; RABAHY, W. A. **Estatística aplicada às ciências humanas e ao turismo**. São Paulo: Saraiva, 2007.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. Estatística aplicada à engenharia. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000004292 >. Acesso em: 6 nov. 2017.

YNOGUTI, C. A. Probabilidade, estatística e processos estocásticos. São Paulo, 2011. Disponível em: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

Processos de renovação e processos estocásticos

Convite ao estudo

Prezado aluno, dada a importância da análise de processos estocásticos, nós continuaremos nossa abordagem probabilística com o estudo dos processos de renovação, as probabilidades de transição e os processos de Bernoulli e de Poisson.

Esses conceitos serão muito úteis na sua vida profissional, pois envolvem diretamente a confiabilidade de sistemas, sistemas reparáveis e não reparáveis, tempo de falhas, entre outros. O processo de Poisson, por exemplo, pode ser empregado na modelagem de clientes que chegam em uma fila ou na retirada de mercadorias de um estoque.

Logo, inicialmente, vamos ver o teorema da renovação, bem como suas propriedades e aplicações.

Em seguida, estudaremos a equação de renovação, probabilidade de transição e conceitos e exemplos da generalização de Poisson com enfoque em processos estocásticos.

Seguindo um desencadeamento lógico das ideias, adentraremos em processo de Bernoulli, processo de Poisson, além dos conceitos de tempos de sucesso, de chegada e de recorrência.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que você seja capaz de conhecer, saber analisar e aplicar os processos de Bernoulli e de Poisson, com enfoque em processos estocásticos.

Assim, suponha que você está trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas. A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida

pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela política de qualidade da empresa.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal. Essa medida trará mais confiança e visibilidade para a marca perante os concorrentes e, nesse contexto, você foi questionado sobre a adequação do tempo de garantia. Como você poderia auxiliar a empresa com essa questão?

Após a definição do tempo de garantia, que foi definido como sendo um instante de tempo máximo, os gerentes questionaram sobre qual a probabilidade de ocorrência de componentes que falharam no período de garantia (até o final do período). De que maneira você poderia demonstrar isso?

Quando um componente em garantia com defeito é substituído, um novo prazo é concedido ao cliente, no caso do novo produto apresentar falha. Conforme solicitado pelos gerentes, qual é a probabilidade do novo produto apresentar falha e por meio de qual processo você poderia fazer essa estimativa?

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Seção 2.1

Processo de renovação

Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção iremos voltar nosso estudo para o processo de renovação e, neste momento, já vale a seguinte reflexão: considerando um processo, como poderíamos modelar a taxa de falha de determinados componentes?

Considerando esse aspecto, vamos definir processo de renovação e discutir suas propriedades, bem como estudaremos o teorema da renovação.

Para colaborar no seu entendimento serão exploradas aplicações do processo de renovação em conjunto com a teoria, para que você possa se situar e vislumbrar o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Assim, suponha que você está trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas.

A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela política de qualidade da empresa.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal; essa medida trará mais confiança e visibilidade para a marca perante os concorrentes.

Você foi questionado sobre a adequação do tempo de garantia dos componentes elétricos produzidos pela sua empresa; como você poderia auxiliar nessa questão? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o presidente da filial solicitou uma apresentação com esse escopo.

Então, mãos à obra e sinta-se estimulado a vencer mais um desafio que vai contribuir muito para a sua jornada profissional!

Bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, agora vamos abordar um dos tipos de processos estocásticos, os chamados processos de renovação.

Mas você deve se perguntar: *o que são processos de renovação?*

Com certeza, você já deve ter se deparado com a seguinte situação: você estava na sua casa e uma lâmpada, ou a resistência do chuveiro, queimou. Nesses casos, é comum que façamos um reparo para que o nosso equipamento possa retornar à sua condição de operação, após a ocorrência de uma falha.

De modo genérico, quando estudamos os processos de renovação, dizemos que, no caso de uma falha, ocorre a substituição do item com falha por um equivalente, sendo que o nosso sistema retornará para a condição operacional que tinha quando estava novo. A esse modo denominamos "reparação perfeita", uma vez que o sistema voltou ao estado de novo.

Então, caso você substitua a lâmpada, ou a resistência do chuveiro, o seu sistema, que se refere, respectivamente, ao lustre e ao chuveiro, retornaria para uma condição operacional tão boa quanto a de um sistema novo, executando todas as funções para as quais foi designado.

Isso também ocorre em equipamentos e sistemas industriais, e a essa classe de sistemas daremos o nome de Sistemas Reparáveis. Perceba que a lâmpada, por exemplo, é um componente não reparável; contudo, o lustre é um sistema reparável, isto é, que pode ser reparado e voltar ao seu pleno estado de funcionamento.

Vale ressaltar que é mais comum a ocorrência de reparação perfeita em sistemas não reparáveis, de modo que quando o sistema apresenta falha ele é, então, substituído por um sistema novo (ROCHA, 2006).

Certo, mas o que isso tem a ver com os processos de renovação?

Nós já vimos anteriormente, inclusive em exemplos, que a ocorrência de falhas pode ser descrita por meio de processos estocásticos, nos quais temos variáveis aleatórias ligadas à ocorrência de um determinado evento, ou seja, associamos uma probabilidade. Portanto, agora que ficou mais claro o que é um processo de renovação, entraremos em mais detalhes sobre o seu funcionamento.

Assimile

Caro aluno, vale ressaltar que existe uma distinção entre sistemas reparáveis e não reparáveis.

Conceitualmente, o que define os tempos para ocorrência de falhas em sistemas não reparáveis é a distribuição de probabilidade de uma única variável aleatória. Assim, entende-se que esses sistemas apresentam uma única falha no tempo, de modo que, quando ele falha, deve ser descartado ou substituído por um novo.

Diferentemente, em sistemas reparáveis, temos que as falhas ocorrem em diversos pontos no tempo, tratando-se de um sistema que, ao falhar, é colocado em operação novamente através de procedimento que não seja sua plena substituição.

No tocante à confiabilidade, a classe de processo estocástico mais utilizada na modelagem de sistemas reparáveis é o Processo de Renovação (FOGLIATO; RIBEIRO, 2009).

Vale a pena explicar, brevemente, o conceito de confiabilidade. Segundo Fogliatto e Ribeiro (2009), a confiabilidade, do modo mais amplo e sob uma abordagem qualitativa, pode ser entendida como um vínculo a uma operação bem sucedida de um sistema, na ausência de quebras ou falhas.

Aprofundando o conceito de confiabilidade, sob uma abordagem quantitativa, associamos confiabilidade à probabilidade, conforme proposto por Leemis (1995). Assim, a confiabilidade de um sistema está agregada à probabilidade deste sistema em desempenhar adequadamente o seu propósito de uso especificado.

Outra característica fundamental que observaremos com relação aos processos de renovação é que o tempo de ocorrência entre as falhas, que são variáveis aleatórias, é independente e identicamente distribuído (utilizamos a notação i.i.d., que tem sua origem no inglês *independent and identically distributed*). Mas o que significa dizer que o tempo entre as falhas é independente e identicamente distribuído?

Quando relembramos os conceitos de distribuição de probabilidades, falamos sobre eventos independentes, que são eventos nos quais a ocorrência de um não influencia a ocorrência de outro. Ao agregarmos o conceito de *identicamente distribuídos*, ficaremos com uma sequência de variáveis aleatórias, de modo que um elemento nessa sequência será independente das variáveis que o antecederam e cada variável terá a mesma distribuição de probabilidade das demais (ROCHA, 2006).

Exemplificando

Você provavelmente já deve ter visto, ou até mesmo jogado, a roleta. Trata-se de um jogo composto por um tabuleiro, no qual são feitas as apostas em uma roleta numerada. Ao girar a roleta, uma bolinha determinará qual é o número sorteado, como exemplificado na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Exemplo de roleta

Fonte: Pixabay.

Agora, vamos imaginar que você esteja jogando roleta e uma sequência de resultados pode ser considerada i.i.d. O que isso significa?

Se a bolinha cair em um número preto em dez jogadas, não quer dizer que a décima primeira jogada também deverá cair num número preto. Isso porque, na próxima jogada, a probabilidade de ser vermelha ou preta não será diferente de qualquer outra jogada. Nesse caso, portanto, temos eventos independentes e identicamente distribuídos.

Outros exemplos clássicos que representam i.i.d. são jogos de dados e moedas.

Agora que já entendemos bem o que é i.i.d. e o que são processos de renovação, vamos ver, então, uma definição mais formal.

Como vimos anteriormente, em um processo de renovação, os tempos entre as falhas podem ser considerados i.i.d. e representaremos por $x_1; x_2; \ldots$ e assim por diante.

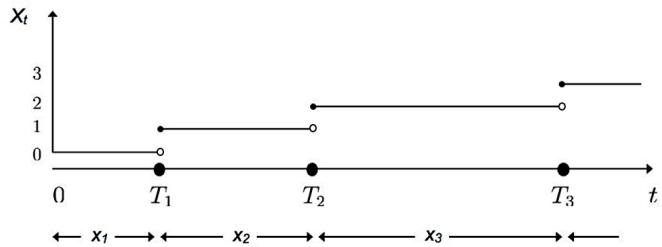
Então, diremos que o próprio processo de falha pode ser considerado um processo de renovação. Portanto, considere uma variável aleatória que seja discreta e definida em função do tempo, que poderia ser representada por X_t, como vimos nas seções anteriores, sendo t o tempo que pode estar no intervalo $[0,t]$, ou seja, entre zero e um tempo qualquer designado pela letra t. Ainda, sendo T, neste caso em especial, o tempo global, que é desde a inicialização do nosso sistema, temos que (FOGLIATO; RIBEIRO, 2009):

$$x_1 = T_1$$
$$x_2 = T_2 - T_1$$
$$\vdots$$

Assim, como vimos anteriormente, o tempo entre as falhas $x_1; x_2; \ldots$ é obtido por meio do tempo global, que leva em conta o início do sistema (ROCHA, 2006).

Se ficou muito difícil entender, vamos verificar na Figura 2.2 como seria essa relação do tempo entre falhas com o tempo global.

Figura 2.2 | Tempo entre falhas e tempo global



Fonte: adaptado de: <http://www.est.ufmg.br/~enricoc/pdf/confiabilidade/aula2.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2017.

De acordo com Rocha (2006), podemos pensar na questão vista anteriormente (de um processo de renovação apresentar os tempos entre as falhas sendo i.i.d.), como se o nosso sistema não tivesse memória. Isso significa que o tempo no qual o nosso sistema funcionou antes do último reparo não influenciará na ocorrência de novas intervenções, bem como no histórico das intervenções já executadas.

Assimile

Caro aluno, vale ressaltar, então, que os processos de renovação são uma classe de processos estocásticos caracterizados por tempos entre as falhas i.i.d (do inglês *independente and identically distributed*).

Isso quer dizer que o tempo de ocorrência entre as falhas é independente e identicamente distribuídos.

Portanto, os sistemas que se comportam como processos de renovação não têm memória, uma vez o histórico das intervenções e o tempo de funcionamento antes do reparo não influenciam na ocorrência de novas intervenções.

Para ficar mais claro, vamos voltar ao exemplo inicial da lâmpada ou da resistência do chuveiro. Ao dizer que o nosso sistema não possui memória, seria equivalente afirmar que o tempo em que o lustre ou o chuveiro funcionou normalmente antes de ocorrer um problema não influenciará na ocorrência de uma nova intervenção, que pode ser a troca da lâmpada ou da resistência. O histórico de trocas de lâmpadas ou resistências também não influenciará na ocorrência de novas intervenções.

Isso segue o pressuposto que adotamos de que, para Sistemas Reparáveis, caso ocorra uma falha, ocorre a substituição do item com falha por um equivalente e o nosso sistema retornará para a condição operacional semelhante à de um sistema novo.

Reflita

Agora que entendemos a importância e a principal aplicação de processos de renovação. Pense em algumas aplicações associadas à engenharia, nas quais temos tempos entre as falhas i.i.d., ou seja, o nosso sistema não apresenta memória.

Como dica, lembre-se dos exemplos anteriores da lâmpada e do chuveiro e pense melhor sobre as inspeções de qualidade que já vimos anteriormente.

Portanto, em quais outros exemplos rotineiros da engenharia podemos aplicar os conceitos de Processos de Renovação?

Portanto, sabendo que k é o índice que enumera o k-ésimo tempo global da ocorrência de uma falha, que ocorre num determinado T_k, as variáveis aleatórias X_t satisfazem a Equação 2.1:

Equação 2.1.

$$P(X_t \geq k) = P(T_k \leq t)$$

Então, vamos entender o que a Equação 2.1 representa.

Em primeiro lugar, podemos observar que a probabilidade de ocorrência de qualquer falha, representada por X_t, quando X_t é maior ou igual a k, é igual à probabilidade de que o tempo global T_k seja menor do que t. Talvez tenha ficado um pouco confuso, mas vamos lembrar, então, do conceito de tempo entre falhas, que representamos por $x_1; x_2; \ldots$. O somatório dos tempos entre falhas, que será menor

ou igual a t, resultará na função distribuição acumulada, conforme apresentado na Equação 2.2 (ROCHA, 2006):

Equação 2.2.

$$P(X_t \geq k) = P(T_k \leq t) = P(\sum_{i=1}^{k} x_k \leq t) = F^{(k)}(t)$$

Apenas relembrando, uma função distribuição acumulada descreverá totalmente a distribuição de probabilidades da nossa variável aleatória, como ficou representado na Figura 2.2.

Teorema: considerando-se que num processo de renovação os tempos entre os eventos tenham média μ e variância σ^2, vale o indicado na Equação 2.3, a seguir.

Equação 2.3.

$$\lim_{t\to\infty} P(X_t < a(t)) = \phi(y)$$

Sabendo-se que $a(t) = t/\mu + y\sigma\sqrt{t/\mu^3}$, e ϕ é a função densidade acumulada da distribuição normal padrão, ou seja $N(0,1)$, na qual $\propto = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Lembrando que, neste caso, teremos que fazer uma relação por meio de uma tabela de distribuição normal padronizada, como apresentada por exemplo na Tabela 2.1 (ROCHA, 2006).

Tabela 2.1 | Exemplo de tabela de distribuição normal padrão cumulativa

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555760	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823815	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0

Fonte: <https://biblioteca-virtual.com/>. Acesso em: 2 dez. 2017.

Exemplificando

Vamos supor que você decida comprar um novo modelo de impressora que promete maior economia de tinta com os cartuchos. No entanto, o preço desse modelo de impressora é maior do que os convencionais, e você quer saber a probabilidade de que dois cartuchos durem pelo menos um ano inteiro, para justificar o preço maior na hora da compra. Considere que o tempo de vida esperado até que ocorra uma falha no cartucho é $\mu = 186{,}22$. A variância do tempo de falha $\sigma^2 = 103{,}813$.

E então, o que você faria?

Em primeiro lugar, o tempo de vida de cada cartucho, em dias, será representado pela variável x. Vamos supor que a distribuição de vida do cartucho foi dada pelo fabricante, de modo que tenhamos um comportamento i.i.d. O tempo de vida esperado até que ocorra uma falha no cartucho é $\mu = 186{,}22$. A variância do tempo de falha $\sigma^2 = 103{,}813$.

A probabilidade desejada é que em 365 dias do ano, sendo essa a nossa medida de tempo, utilizemos até dois cartuchos, ou seja, $X_t \leq 2$, sendo $t = 365$ dias, portanto teremos uma probabilidade $P(X_{365} \leq 2)$, correto?

Agora, precisamos saber o valor de y, sendo que o modo mais fácil de calcular esse valor é por meio de $a(t)$. Vamos verificar?

$a(t) = 2$ para que $P(X_{365} \leq 2)$, como visto anteriormente no teorema. Portanto, o valor de y será:

$$y = \frac{a(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} = \frac{2 - 365/186{,}22}{103{,}813\sqrt{365/186{,}22^3}} = \frac{0{,}0399}{0{,}7805} = 0{,}0511$$

Portanto, sabemos que $y = 0{,}0511$. Agora, aplicando o teorema:

$$\lim_{t\to\infty} P(X_t < a(t)) = \phi(y)$$

$$P(X_{365} \leq 2) \approx \phi(0{,}0511)$$

Utilizando uma tabela de distribuição normal padronizada, como a apresentada na Figura 2.3, saberemos o valor de $P(X_{365} \leq 2)$.

Neste caso, como $\phi(0{,}0511)$, o valor de $P(X_{365} \leq 2) \approx 0{,}519939 \approx 0{,}52$.

Portanto, a probabilidade de usarmos até dois cartuchos em 365 dias do ano, considerando-se o tempo de vida esperado e a variância do tempo de falha informados pelo fabricante, é de 52%.

Cabe aqui que seja feita uma avaliação dessa probabilidade, para que seja efetuada ou não a compra da impressora, uma vez que o valor está

bem próximo dos 50%, então o risco de serem necessários mais de dois cartuchos ao longo de um ano é considerável.

Pesquise mais

Que tal verificarmos um exemplo de aplicação de modelagem de sistemas reparáveis utilizando os Processos de Renovação?

Na dissertação "Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via processo de renovação generalizado", de Sérgio Parente Vieira da Rocha, é feita uma modelagem numa válvula de controle de pressão situada em estações de redução de pressão de gás natural, sendo sujeita a manutenções.

Leia da página 61 até a 66 para se familiarizar com outras aplicações!

ROCHA, S. P. V. da. **Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via processo de renovação generalizado**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/5751/arquivo7328_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 2 dez. 2017.

Sem medo de errar

Caro aluno, vamos voltar ao nosso estudo!

Então, suponha que você esteja trabalhando no departamento de manutenção de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas.

A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela política de qualidade da empresa.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal; essa medida trará mais confiança e visibilidade para a marca perante os concorrentes.

Você foi questionado sobre a adequação do tempo de garantia dos componentes elétricos produzidos pela sua empresa.

Para responder a esse questionamento, vamos primeiro resgatar a definição de processos de renovação: num processo de renovação, os tempos entre as falhas podem ser considerados i.i.d., portanto, o próprio processo de falha pode ser considerado um processo de renovação.

Então, pela definição anterior, você poderia iniciar a apresentação para o seu superior mencionando essa definição, uma vez que o problema apresenta o comportamento de um processo de renovação.

Isso ocorre porque os produtos apresentam vida útil, de modo que o número de reposições deve ser um valor aceitável.

Agora, vamos retomar o exemplo da impressora. Naquele caso, nos importava saber a probabilidade de utilizarmos até dois cartuchos em um ano. Aqui, temos um problema bem parecido, pois a empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, mas os seus produtos apresentam um tempo de vida útil. Nesse caso, poderíamos pensar na probabilidade de ter até um determinado número de reposições no período de garantia.

O número máximo de reposições deve ser definido pela gerência e, ao estender o prazo de garantia, muito provavelmente a probabilidade de que esse número de reposições se mantenha será menor.

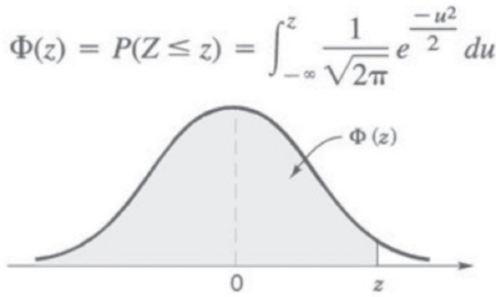
Você poderá fazer o estudo com diferentes prazos de garantia e encontrar a probabilidade que seja aceitável para a empresa, ou seja, o risco que eles estão dispostos a correr com possíveis reposições.

Para obter a probabilidade, é importante lembrar da aplicação do teorema que vimos anteriormente, que levava em conta o tempo médio de vida até que ocorra uma falha, representado por α, e a variância do tempo de falha σ^2.

Em seguida, você deve utilizar uma tabela de distribuição normal padrão, como a apresentada na equação $\Phi(z)$ e na Figura 2.3, para encontrar o valor de probabilidade.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Figura 2.3 | Distribuição normal padrão



Fonte: <https://biblioteca-virtual.com/>. Acesso em: 2 dez. 2017.

Em seguida, passe os valores para o seu superior para que ele, munido das informações quantitativas apresentadas, tome uma decisão se o prazo da garantia deverá ser estendido ou não.

Parabéns por mais um desafio vencido!

Avançando na prática

FMEA e processos de renovação

Descrição da situação-problema

Como gestor do departamento de desenvolvimento de produto, ao se envolver na elaboração de um projeto para um novo componente eletrônico, você observa que o seu time se encontra no momento de realização do FMEA - Análise de Modos de Falhas e Efeitos (do inglês, *Failure Mode and Effect Analysis*). O FMEA é uma ferramenta de identificação de falhas antes que cheguem ao consumidor.

Assim, neste ponto, você sente a dificuldade do seu time em desenvolver o FMEA pautado no entendimento de conceitos de falhas e reparo. Diante desta situação, você sente a necessidade de intervir no processo, fazendo uma apresentação a fim de esclarecer pontos fundamentais que certamente devem ser entendidos para seguir com o desenvolvimento do produto de modo assertivo. Como você faria essa apresentação para o seu time?

Resolução da situação-problema

Primeiramente, na sua apresentação, você deve começar diferenciando o que é um sistema reparável de um sistema não reparável.

Conceitualmente, tem-se que os tempos até falhas de sistemas não reparáveis são designados pela distribuição de probabilidade de uma única variável aleatória. Assim, entende-se que esses sistemas apresentam uma única falha no tempo, de modo que, quando eles falham, devem ser descartados ou substituídos por novos sistemas.

Diferentemente, em sistemas reparáveis, temos que as falhas ocorrem em diversos pontos no tempo, tratando-se de um sistema que, ao falhar, é colocado em operação novamente (reparado) através de procedimento que não seja sua total substituição.

Posteriormente, traga esses conceitos para o caso em questão, ou seja, explicite que, entendendo o componente eletrônico como um sistema reparável, ao se ter a falha, executa-se um reparo e o mesmo volta a funcionar tão bem quanto o novo.

Considerando, assim, um reparo perfeito, entende-se então que a probabilidade do sistema falhar durante um tempo de exposição independe do tempo que o sistema já tenha operado.

A classe de processo estocástico mais utilizada na modelagem de sistemas reparáveis é o Processo de Renovação.

Logo, mostre ao seu time que para construir o FMEA, isto é, identificar potenciais falhas, eles devem ter em mente que se trata de um sistema reparável que pode ser modelado, no tocante à confiabilidade, por processo de renovação, considerando o tempo entre falhas, o tempo global e demais parâmetros.

Parabéns; mais uma etapa cumprida!

Faça valer a pena

1. Ao se refletir sobre um sistema e o seu modo de falha, tempo entre falhas, severidade de falhas, detecção de falhas, entre outros aspectos, certamente o que nos vem à mente é o conceito de confiabilidade. Nesse sentido, avalie as afirmações I, II e III.

I. Confiabilidade possui um entendimento qualitativo e quantitativo. Neste último aspecto, confiabilidade está associada à probabilidade de sistema em desempenhar adequadamente o seu propósito de uso especificado.

II. Considerando um sistema que pode ser reparado, observamos que o tempo de ocorrência entre as falhas, que são variáveis aleatórias, é independente e identicamente distribuído.

III. No sistema que pode ser reparado, um elemento na sequência de variáveis aleatórias será independente das variáveis que o antecederam, embora cada variável tenha uma distribuição de probabilidade diferente das demais.

Assinale a alternativa correta:

a) I e III são corretas.

b) I e II são corretas.

c) II e III são corretas.

d) Somente I é correta.

e) Somente II é correta.

2. Considerando o conceito de sistemas reparáveis e não reparáveis, bem como a modelagem no tocante à confiabilidade, avalie o texto abaixo e complete as lacunas.

Os tempos até falhas de sistemas _____ são designados pela distribuição de probabilidade de uma única variável aleatória. Assim, entende-se que esses sistemas apresentam uma única falha no tempo.

Diferentemente, em sistemas _____, temos que as falhas ocorrem em diversos pontos no tempo, tratando-se de um sistema que, ao falhar, é colocado em operação novamente através de procedimento que não seja sua plena substituição. A classe de processo estocástico mais utilizada para a modelagem desse tipo de sistema é _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente a frase

a) não reparáveis; reparáveis; processo de aleatoriedade.

b) reparáveis; não reparáveis; processo de otimização.

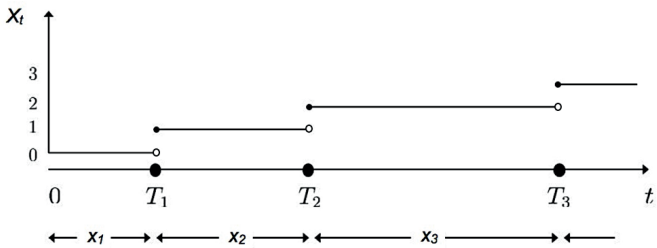
c) reparáveis; não reparáveis; processo de renovação.

d) não reparáveis; reparáveis; processo de otimização.

e) não reparáveis; reparáveis; processo de renovação.

3. Considere a Figura 2.4 que apresenta um típico gráfico descontínuo sobre dois parâmetros importantes associados a sistemas reparáveis e modelo de confiabilidade.

Figura 2.4 | Parâmetros associados a sistemas reparáveis



Fonte: adaptada de: <http://www.est.ufmg.br/~enricoc/pdf/confiabilidade/aula2.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2017.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o que está sendo representado, respectivamente, por X_t, x_1, T_1

a) Variável aleatória contínua no tempo; tempo entre falhas; tempo global.

b) Variável aleatória contínua no tempo; tempo global; tempo entre falhas.

c) Variável aleatória discreta no tempo; tempo entre falhas; tempo global.

d) Variável aleatória discreta no tempo; única falha; tempo de falha.

e) Variável aleatória contínua no tempo; única falha; tempo de falha.

Seção 2.2

Probabilidade de transição

Diálogo aberto

Prezado aluno, dada a importância da análise de processos estocásticos, nós continuaremos nossa abordagem probabilística com o estudo dos processos de renovação e a probabilidade de transição com enfoque em processos estocásticos.

Nesse sentido, adentraremos no conceito de reparo imperfeito e reparo mínimo, bem como estudaremos a modelagem de sistemas por meio do Processo de Renovação Generalizado e Processo Não Homogêneo de Poisson. Também abordaremos a mudança de estado de um processo e o conceito de probabilidade de transição.

A importância desse conteúdo é elevada para a sua prática profissional, uma vez que se refere a conceitos aplicados a sistemas reparáveis, ou seja, sistemas que podem ser reparados, como componentes eletrônicos, por exemplo.

Assim, suponha que você está trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas. A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela política de qualidade da empresa.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal.

Anteriormente, você auxiliou a empresa nesta questão e, após a definição do tempo de garantia, que foi definido como sendo um instante de tempo máximo, você foi questionado pelos gerentes sobre a quantidade de componentes que estariam funcionando após o período de garantia. Pense a respeito, considerando a quantidade de trocas de componentes elétricos no intervalo de tempo determinado pela garantia.

De que maneira você poderia responder aos gerentes sobre essa questão?

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo!

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Prezado aluno, agora que já sabemos bem o que é um processo de renovação e em quais situações ele pode ser aplicado, vamos expandir o nosso conhecimento nesse assunto?

Então, a primeira coisa que veremos é a equação da renovação.

Neste ponto vale lembrar que na seção anterior abordamos o caso de sistemas em que, em caso de falhas, ocorre a substituição do item com falha por um equivalente, fazendo com que o sistema retorne para a condição operacional que tinha quando estava novo, executando todas as funções às quais foi designado. A isto chamamos de reparação perfeita!

A equação de renovação é um tipo especial de equação que parte do pressuposto de que o nosso processo não tem memória, ou seja, o processo reinicia cada vez para o estado inicial, independente do passado. Vimos esse exemplo anteriormente, na Seção 2.1, no caso do chuveiro e do lustre.

Então, quando consideramos a reposição de uma lâmpada, cujo tempo de vida possa ser medido por meio de uma variável aleatória, ao começarmos com uma lâmpada nova e contando que cada vez que ela queimar será substituída por uma nova, qual seria o número esperado de trocas (sem contar a lâmpada que já utilizamos) num determinado tempo?

É isso que a equação da renovação irá nos responder, por meio de uma equação na forma integral, que veremos a seguir. É importante observar que, à medida que o tempo cresce, o número esperado de trocas apresenta um comportamento cada vez mais confuso.

Para calcular o número esperado de trocas, devemos nos atentar, também, ao fato de que a expectativa de uma variável aleatória maior do que zero será definida pela integral da sua função de distribuição.

Portanto, $m(t)$ representará a nossa equação da renovação, sendo, como foi dito anteriormente, a representação do número esperado de trocas no intervalo de $(0,t]$. Relembrando que k é o índice que

enumera o k-ésimo tempo global da ocorrência de uma falha, que ocorre num determinado T_k e as variáveis aleatórias X_t satisfazem a Equação 2.4:

Equação 2.4

$$P(X_t \geq k) = P(T_k \leq t)$$

Sendo que quando temos a k-ésima ocorrência $T_k = \tau$, portanto, temos um processo de contagem de renovação com tempos de intervalos entre chegadas i.i.d.

Como vimos anteriormente, o somatório dos tempos entre falhas, que será menor ou igual a t, resultará na função distribuição acumulada, conforme apresentado na Equação 2.5:

Equação 2.5

$$P(X_t \geq k) = P(T_k \leq t) = P(\sum_{i=1}^{k} x_k \leq t) = F^{(k)}(t)$$

Logo, a equação da renovação segue conforme a Equação 2.6:

Equação 2.6

$$m(t) = F^{(k)}(t) + \int_{\tau=0}^{t} F^{(k)}(t-\tau) dm(\tau)$$

Por meio da Equação 2.6 poderemos estimar o número de trocas no intervalo de tempo determinado.

Assimile

Agora que entendemos o propósito da equação da renovação, associado ao que vimos anteriormente sobre os processos de renovação, ressalta-se que:

- Os processos de renovação são uma classe de processos estocásticos caracterizados por tempos entre as falhas i.i.d., ou seja, o tempo de ocorrência entre as falhas é independente e identicamente distribuído.

- Os sistemas que se comportam como processos de renovação não têm memória.

- A equação da renovação é utilizada para calcular o número estimado de renovações no intervalo de tempo estabelecido.

E o que seria uma probabilidade de transição? Qual a sua relação com um processo de renovação?

Vamos, então, conhecer um pouco mais sobre as probabilidades de transição, que serão detalhadas mais profundamente quando adentramos no assunto sobre cadeias de Markov.

De acordo com Rocha (2006), uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança de estado de um processo.

Definimos essa probabilidade por meio da Equação 2.7:

Equação 2.7

$$P_{i,j}(t) = P\{X(t+\Delta t) = j \,|\, X(t) = i\}$$

Vamos pensar, então, que o nosso processo está no estado i e irá para o estado j após um determinado tempo t . Mas o que essa questão de estados tem a ver com o vimos até agora sobre os processos de renovação?

Lembrando a nossa lâmpada, poderíamos caracterizar o estado dela da seguinte forma: funcionando e queimada. Se nós quisermos saber se essa lâmpada demanda muitas trocas, poderíamos fazer uma análise e utilizar, por exemplo, uma redundância. Vamos supor que o lustre esteja localizado no escritório, um local onde precisamos de claridade para a leitura de documentos, livros etc. Se a lâmpada ficar indisponível, ou seja, queimar, o ambiente ficará escuro e não poderá ser utilizado. Se, ao invés de ter um lustre com apenas uma lâmpada você tivesse um lustre com duas lâmpadas ou dois lustres com uma lâmpada cada, então você teria uma redundância para evitar ficar no escuro.

Exemplificando

A fim de compreender melhor alguns conceitos, considere que uma empresa de manutenção está fazendo uma análise das ordens de serviço que chegam nos instantes de tempo denotados por $t = 0,1,2,...$ de modo que podem ocorrer as seguintes situações:

1. Só uma ordem de serviço pode chegar num instante de tempo e α é a probabilidade de ocorrência de uma chegada de uma ordem de serviço num instante t, ou seja, o sistema estava desocupado e em seguida ficou ocupado para registrar a ordem de serviço.

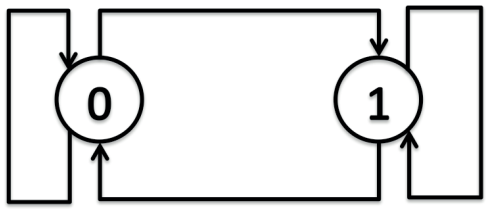
2. Se o sistema está processando uma ordem de serviço, ele fica indisponível para registrar a chegada de uma nova ordem de serviço.

3. A probabilidade de uma chegada de uma ordem de serviço ser registrada num instante t é β. Nesse caso, o sistema que estava ocupado registrando a ordem, finaliza este registro e assim, em seguida, torna-se desocupado.

E agora, como podemos modelar esse problema?

A primeira coisa que podemos fazer é uma representação por meio de um diagrama do que está ocorrendo em nosso sistema, conforme apresentado na Figura 2.5. A essa representação da figura chamaremos de Diagrama de Estados.

Figura 2.5 | Diagrama de Estados



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.5, temos a representação de dois estados: o Estado 0, que indica que o sistema está desocupado, e o Estado 1, sistema ocupado. As mudanças de estado, que podemos associar às situações apresentadas anteriormente, indicam as probabilidades:

$\rho_{01} = \alpha$ (ou seja, o sistema estava desocupado e vai para o estado ocupado);

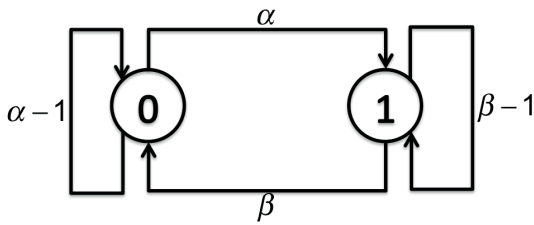
$\rho_{00} = 1 - \alpha$ (ou seja, o sistema estava desocupado e continua desocupado);

$\rho_{10} = \beta$ (ou seja, o sistema estava ocupado e vai para o estado desocupado);

$\rho_{11} = 1 - \beta$ (ou seja, o sistema permanece ocupado e não pode registrar outra chegada).

O diagrama com as suas respectivas probabilidades de transição é apresentado na Figura 2.6.

Figura 2.6 | Diagrama de estados e probabilidades de transição



Fonte: elaborada pelo autor.

Mas o que isso tem a ver com a probabilidade de transição?

Para ficar mais fácil de entender essa relação, nós precisaremos conhecer o conceito de disponibilidade. A NBR 5462, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), define disponibilidade como sendo a capacidade de um item estar em condições para executar dada função durante um instante ou um determinado intervalo de tempo. Essa definição tem muita proximidade com o que vimos anteriormente, os conceitos de sistemas reparáveis e de processos de renovação.

Para fazer uma análise de disponibilidade, de acordo com Rocha (2006), podemos avaliar o número de visitas que o sistema faz aos estados. Mas que estados? Podemos ter um estado disponível, ou seja, um estado no qual o item está em condições para executar a função solicitada, ou um estado indisponível, que seria o oposto, como por exemplo um estado de falha.

Agora está ficando mais clara a relação entre o conceito de probabilidade de transição e os processos de renovação, que aprendemos anteriormente. O que pode ser extremamente útil, principalmente no contexto da das ciências exatas, é saber o tempo médio no qual o sistema está no estado indisponível, o tempo médio de reparo, e com isso conseguimos avaliar a disponibilidade do nosso equipamento. Pensando no exemplo da lâmpada ficará bem fácil compreender essas questões.

Pesquise mais

Uma das formas de utilizar as probabilidades de transição de falha de um sistema é por meio da modelagem de Processos de Renovação Generalizados.

Mas o que são Processos de Renovação Generalizados (PRGs)?

Conforme apresentado por Rocha (2006), um PRG é um modelo baseado em idade virtual, ou seja, são modelos que tratam o reparo com base na idade real do equipamento.

Mas qual a característica de um PRG? Podemos pensar não apenas no reparo perfeito, que leva o seu sistema para as condições de operação de um sistema novo, mas também os conceitos de reparo imperfeito e reparo mínimo.

Ficou curioso com esses novos assuntos?

Então, pesquise mais sobre a aplicação de PRG e probabilidades de transição, lendo as páginas 52 até a 55, do trabalho de Rocha (2006), para se familiarizar com outras aplicações!

ROCHA, S. P. V. da. **Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via processo de renovação generalizado**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/5751/arquivo7328_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 1 dez. 2017.

Agora que já compreendemos bem os processos de renovação, cabe aprofundar os nossos conhecimentos nos chamados Processos de Renovação Generalizados (PRGs).

Mas o que são PRGs? Então vamos lá, os PRGs permitem que outras situações sejam analisadas, além do que já vimos nos processos de renovação em que temos o retorno para a condição tão boa quanto nova (renovação perfeita). É o caso da substituição da lâmpada e da resistência que vimos anteriormente, fazendo com que o nosso sistema opere em condições normais (PERCY; ALKALI, 2006).

E os demais casos que envolvam, por exemplo, um reparo mínimo ou um reparo imperfeito (intermediário entre o reparo perfeito e o mínimo)?

Quando estudamos os processos de renovação, verificamos que o sistema retorna para a condição de novo (renovação perfeita), no

entanto, na prática sabemos que isso não ocorre sempre, pois existem situações nas quais o sistema não retorna para seu estado operacional perfeito. Isso acontece porque a condição do sistema será determinada pela eficácia do reparo (PERCY; ALKALI, 2006).

Vale então afirmar que a eficácia do reparo realizado está relacionada à redução ou ao aumento na idade que o equipamento já possuía antes do reparo, portanto, teremos uma ação de reparo que mudará o que chamamos de idade virtual do sistema.

Exemplificando

Vamos supor que tenhamos dois aparelhos de ar-condicionado, que possuem as mesmas condições de uso e/ou operação. Ambos os aparelhos têm quatro anos de uso; no entanto, só um deles faz as manutenções periódicas, que melhoram a condição dos componentes. Ambos os aparelhos não apresentaram falha até o momento, mas, se pudermos associar a ocorrência de uma falha com a idade dos aparelhos, verificaríamos que a cada intervenção essa idade sofreria uma "diminuição", o que poderíamos considerar como um atraso na idade real.

Ou seja, o aparelho que passou por todas as manutenções necessárias teria uma idade virtual que seria diferente da idade cronológica. Já o aparelho que não passou pelos procedimentos teria uma idade virtual equivalente à sua idade real, ou cronológica.

Nesse contexto, passaremos a ter contato com três possíveis situações detalhadas por Rocha (2006), a saber:

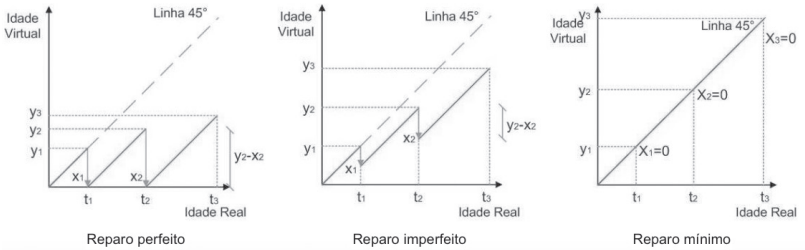
1. Quando temos um reparo perfeito: neste primeiro caso, que foi descrito anteriormente nos processos de renovação, adotamos um parâmetro de rejuvenescimento igual a zero, ou seja, a idade virtual será zerada após cada reparo e o nosso sistema retorna à sua condição de funcionamento como novo.

2. Quando temos um reparo imperfeito: diferente do caso anterior, a idade virtual será uma fração da idade real do sistema.

3. Quando temos um reparo mínimo: agora a idade virtual será exatamente igual à idade real.

A Figura 2.7 apresenta as três situações descritas anteriormente, de modo que os valores de x_n e y_n são, respectivamente, a idade calculada após e antes a n-ésima ação de reparo.

Figura 2.7 | Idade real e idade virtual nas três situações de reparo: perfeito, imperfeito e mínimo



Fonte: Rocha (2006).

Mas o que fazemos nessas situações de reparos imperfeitos e mínimos?

Nos processos de renovação, aprendemos que o reparo é perfeito, como no caso do chuveiro. Para as situações nas quais os reparos podem não ser tão bons assim, isto é, que fogem à situação otimista de reparo (reparo perfeito), geralmente empregamos um outro conceito chamado de Processo Não Homogêneo de Poisson (PNHP).

Para ficar um pouco mais fácil de entender a mudança de abordagem dos processos de renovação para os PNHPs, vale lembrar o que aprendemos de distribuição de Poisson. A distribuição de Poisson é dada por meio da equação $p(v)=\frac{\mu^{v}}{v!}e^{-\mu}$, sendo $p(v)$ a probabilidade de v contagens no intervalo definido, e a base do logaritmo natural $(e=2{,}71828...)$ e μ a taxa média.

Então, num Processo Não Homogêneo de Poisson, dizemos que o nosso sistema retorna à operação por intermédio do reparo, mas não existe a preocupação com falhas futuras (PHAM; WANG, 1996). Vamos ver um exemplo?

Suponha que você seja gerente de um chão de fábrica e que a máquina de solda da empresa começa a apresentar um ruído e vibração estranha, impedindo a execução da operação de modo adequado. O reparo perfeito, nesse caso, poderia ser a troca da máquina de chão de fábrica por um novo dispositivo, fazendo com que o sistema retornasse à condição equivalente ao novo.

No entanto, se você apenas consertar a máquina de solda (diminuir apenas o ruído e vibração) e continuar a utilizá-la normalmente no

chão de fábrica, é sinal que não foi observada uma preocupação com a ocorrência de novas falhas no sistema.

De fato, a confiabilidade do sistema não melhorou, ele apenas voltou a funcionar de modo semelhante ao modo que estava antes de ocorrer o problema.

Exemplificando

Você já deve ter ouvido falar em decaimento radioativo, certo?

Trata-se de um fenômeno que pode ser natural ou induzido, no qual existe a emissão de alguns tipos de radiações, como ocorre numa usina nuclear ou em um tratamento clínico utilizando radioterapia. Um exemplo de decaimento radioativo natural é o Urânio-238, que sofre decaimento alfa e torna-se Tório-234.

Podemos considerar o decaimento radioativo como sendo um processo estocástico, porque o decaimento de um núcleo é um evento aleatório, ou seja, possui uma dada probabilidade de ocorrer. Podemos, então, utilizar um Processo de Poisson Não Homogêneo para modelar o decaimento de uma fonte radioativa em função de dois parâmetros principais:

- a quantidade de núcleos radioativos χ_1 no tempo $t = 0$
- a constante de desintegração χ_2

Nesse caso, a função que representa o a quantidade de núcleos radiativos ainda remanescentes após um intervalo de tempo t é:

$\varphi(\chi,t) = \chi_1 e^{-\chi_2 t}$, sendo $t \geq 0$, $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ e $\chi_1, \chi_2 > 0$.

Para o caso do Urânio-238, sabendo que 1 miligrama tem $2{,}5 \times 10^8$ átomos com tempo de vida de 1 segundo, sabe-se que aproximadamente 12 núcleos decaem emitindo partículas alfa, de modo que todos os núcleos têm a mesma chance de decair.

Se em um segundo, doze núcleos decaem, temos:

1 chance de decaimento em 2×10^7, portanto, $\frac{1}{2 \times 10^7}$ por segundo.

Pensando novamente em seu contexto profissional, caso você atue no departamento de qualidade de uma empresa de telefonia móvel, na área de inspeção de *chips* por amostragem, certamente ao se deparar com um *chip* com falha, este será reposto por um novo, isto é, não poderá ser reparado e seguir para o mercado. Logo, isto irá incorrer em retrabalho para a fabricação de um novo *chip*, dado ser um sistema não reparável, adentrando no conceito de reparação perfeita.

De acordo com Rocha (2006), nesses casos dizemos que o tempo em que o sistema está em operação influencia na probabilidade de uma falha ocorrer.

Retomando o exemplo do aparelho de ar-condicionado, apresentado no item *Exemplificando*, o aparelho que não passou por manutenção ao longo dos quatro anos de uso terá uma probabilidade diferente de uma falha ocorrer do que um aparelho mais novo ou um que passou pelas manutenções programadas, em virtude do desgaste sofrido durante a operação.

Em linhas gerais, utilizando PNHPs, conseguimos contornar as situações nas quais o tempo de operação aumenta e, por consequência, espera-se que o número de falhas aumente mais rapidamente, ou seja, com esse tipo de reparo nosso sistema falhará em intervalos cada vez menores de tempo.

Na próxima seção, trataremos com mais detalhes dos Processos de Poisson, mas é importante que fique claro neste momento que, após um reparo, o nosso sistema poderá falhar em intervalos de tempo cada vez menores, uma vez que os reparos são imperfeitos ou mínimos. Portanto, o intervalo de tempo entre falhas não será diretamente proporcional à quantidade de reparos executados.

Reflita

Agora que já sabemos as limitações e as aplicações dos Processos de Renovação e compreendemos a diferença para os chamados Processos de Renovação Generalizados, fica a seguinte reflexão:

Com base na definição de distribuição de Poisson, que é dada por meio de uma equação exponencial, o que você espera que ocorra num Processo de Poisson?

Já tivemos contato com uma classe específica de Processos de Poisson, que são os Processos Não Homogêneos de Poisson, e constatamos que o tempo entre falhas não é diretamente proporcional à quantidade de reparos executados. Essa é uma dica para a sua reflexão sobre o que são e para que serão utilizados os Processos de Poisson (PHAM; WANG, 1996).

Sem medo de errar

Prezado aluno, suponha que você esteja trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas. A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela gerência.

Nós vimos anteriormente que a empresa deseja ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal. A sua tarefa inicial era verificar se esse tempo de garantia poderia ser estendido, com base na probabilidade de os componentes apresentarem falhas antes do término da garantia e estarem sujeitos a reposições.

Mas, após a definição do tempo de garantia, você foi questionado pelos gerentes sobre qual é a quantidade de componentes que estariam funcionando após o período de garantia. De que maneira você poderia demonstrar isso? Então, agora, vamos tentar responder a esse questionamento.

A primeira coisa que devemos levar em conta é o ramo de atuação da empresa e, consequentemente, dos produtos fabricados. Nesse caso, trata-se de uma empresa de produtos eletrônicos e vimos anteriormente que poderíamos aplicar para esse tipo de problema os processos de renovação.

Agora que conhecemos melhor sobre os Processos de Renovação Generalizados e introduzimos os conceitos de Processo Não Homogêneo de Poisson, será que nesse caso poderíamos aplicar esses novos conceitos?

Geralmente, nos casos de componentes eletrônicos, nós não trabalhamos com o conceito de reparo imperfeito ou mínimo, porque os componentes, em caso de falhas, são substituídos por outros novos que levam o sistema para o estado de operação como novo, designando um sistema não reparável. Vejam o exemplo da lâmpada ou da resistência, que são exemplos de componentes elétricos ou eletrônicos. Quando o componente apresenta uma falha, ele é substituído por outro novo, pois na maioria dos casos não é viável seu reparo, diferentemente de componentes mecânicos, que podem

passar por um reparo imperfeito ou mínimo, como no exemplo do pneu.

Agora que isso ficou bem claro, podemos continuar nossa resposta para o problema. Se nós já sabemos o tempo limite de garantia para o nosso produto, que foi definido anteriormente, você pode aplicar a equação da renovação nessa situação:

$$m(t) = F^{(k)}(t) + \int_{\tau=0}^{t} F^{(k)}(t-\tau)dm(\tau)$$

Por meio desta equação, seria possível estimar o número de trocas de componentes elétricos no intervalo de tempo determinado pela garantia.

Complementando o raciocínio anterior, referente à aplicação da equação da renovação, podemos lembrar o que vimos sobre a definição de disponibilidade. De acordo com a NBR 5462 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que é uma norma técnica que versa sobre manutenção, confiabilidade e mantenabilidade, disponibilidade é a capacidade de um item estar em condições para executar dada função durante um instante ou um determinado intervalo de tempo.

E como poderíamos analisar a disponibilidade de um determinado componente elétrico?

Utilizando o conceito de probabilidade de transição, é possível analisar a disponibilidade do componente, e com isso saber a probabilidade de componentes que ainda estariam funcionando.

Mas como isso seria possível?

Lembrando que de acordo com Rocha (2006) uma probabilidade de transição é associada à mudança de estado de um processo, podendo ser definida por meio da equação:

$$P_{i,j}(t) = P\{X(t+\Delta t) = j \,|\, X(t) = i\}$$

Portanto, teremos a probabilidade do nosso processo estar no estado i e ir para o estado j após um determinado tempo t.

Mas quais seriam esses estados?

Lembrando o conceito de disponibilidade, podemos avaliar a probabilidade de componentes que ainda estariam funcionando

definindo um estado disponível, ou seja, um estado no qual o item está em condições para executar a função solicitada, portanto funcionando, e um estado indisponível, que seria o oposto, por exemplo um estado de falha.

A probabilidade de transição, justamente, define essa transição do estado funcionando para o estado não funcionando após um determinado tempo t, que poderia ser o tempo de garantia. Desta forma, você poderia apresentar para o seu gerente as informações solicitadas.

Avançando na prática

Tipos de reparo e os processos estocásticos

Como gestor do departamento de manutenção de uma empresa de sistemas de medição, você fica responsável por um jovem aprendiz que irá trabalhar no aspecto técnico da manutenção de sistemas. Desta forma, a fim de alinhar algumas novas informações com o jovem aprendiz, você percebe a necessidade de apresentar, no âmbito de sistemas reparáveis, os três tipos de reparo, a fim de que o jovem entenda qual é o seu papel e importância na manutenção de sistemas. Como você faria essa apresentação?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, você deve abordar que o jovem aprendiz terá como foco o trabalho com sistemas reparáveis, ou seja, sistemas que podem ser reparados.

A partir dessa perspectiva, podemos ter o reparo perfeito, o reparo imperfeito e o reparo mínimo, conforme segue:

1. Reparo perfeito – considerando que o sistema falha em algum momento de sua vida útil, o seu reparo deve ser capaz de deixá-lo em uma condição igual a de um sistema novo. Aprofundando um pouco, você pode explicar que, na reparação perfeita, a probabilidade de o equipamento falhar durante um determinado intervalo de tempo será independente do tempo que o sistema já tenha operado até então. Normalmente, o reparo perfeito ocorre para sistemas não reparáveis, de modo que o sistema com falha é substituído por um novo.

Logo, aplicando esse conceito para o caso de sistemas de medição, significaria dizer, por exemplo, que se um paquímetro com problema (falha) fosse levado ao departamento, seria reparado de forma perfeita. Assim, suponha que o problema fosse somente o fato da haste do instrumento estar torta, então esse deveria ser substituída por um instrumento novo.

2. Reparo mínimo – trata-se de uma condição pessimista de manutenção, de modo que o reparo executado é mínimo, ou seja, repara-se o sistema para que ele apenas volte a sua operação, sem se preocupar em prevenir falhas futuras. Assim, o sistema retorna exatamente semelhante à sua condição antes da falha, não melhorando a confiabilidade dele. À medida que o tempo de operação aumenta, espera-se que o número de falhas também aumente.

Logo, aplicando esse conceito para o caso de sistemas de medição, significaria dizer, por exemplo, que se um paquímetro com problema (falha) fosse levado ao departamento, seria reparado de forma mínima. Assim, suponha que o problema fosse somente o fato da face de medição do bico estar desgastada, de modo que, nesse tipo de reparo, essa face de medição seria retificada e polida, sem a preocupação com novas falhas.

3. Reparo imperfeito – trata-se de uma condição que comumente ocorre na prática, sendo intermediária ao reparo perfeito e ao reparo mínimo. Assim, o sistema, após o reparo, não necessariamente voltará ao estado do sistema novo, mas por algum tempo ele apresentará um desempenho melhorado em relação ao estado anterior à falha. Logo, aplicando esse conceito para o caso de sistemas de medição, significaria dizer que, caso um paquímetro com problema (falha) fosse levado ao departamento, seria reparado de forma imperfeita, mas resultaria em um instrumento com estado melhor ao estado que estava antes de ter falhado. Assim, suponha que o problema fosse somente o fato da face de medição do bico estar desgastado, de modo que, nesse tipo de reparo, essa face de medição seria retificada e polida e poderia ser feito um tratamento químico para reduzir a probabilidade de ocorrerem novos desgastes prematuros.

Com essa apresentação, certamente o jovem aprendiz irá perceber que o trabalho dele irá girar mais em torno da reparação imperfeita de sistemas de medição!

Parabéns, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Quando pensamos em manutenção, ou na reparação de sistemas, entendemos que processos estocásticos podem ser aplicados para modelagem dos sistemas. Pensando na idade virtual do sistema, avalie os tipos de reparo (A, B e C) e as representações de cada reparo (I, II e III).

A. Reparo imperfeito

B. Reparo perfeito

C. Reparo mínimo

I. Adotamos um parâmetro de rejuvenescimento igual a zero, ou seja, a idade virtual será zerada após cada reparo e o nosso sistema retorna à sua condição de funcionamento como novo.

II. A idade virtual do sistema, neste tipo de reparo, será uma fração da idade real do sistema.

III. A idade virtual do sistema será exatamente igual à sua idade real.

Assinale a alternativa que associa corretamente o tipo de reparo com a sua representação

a) A-II; B – III; C-I.

b) A – III; B-I; C-II.

c) A-I; B-II; C – III.

d) A-II; B-I; C – III.

e)A – III; B-II; C-I.

2. Em situação otimista ou pessimista de reparo de um sistema, sabemos que podemos utilizar para modelagem os processos estocásticos, refletindo sobre os conceitos de falha, manutenção e confiabilidade. Assim, sobre o Processo Não Homogêneo de Poisson, avalie as afirmações I, II e III.

I. Para as situações que se aproximam de uma condição otimista de reparo, como o reparo perfeito, por exemplo, geralmente emprega-se o conceito de Processo Não Homogêneo de Poisson (PNHP).

II. A distribuição de Poisson é dada por meio da equação $p(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu}$, sendo p(v) a probabilidade de v contagens no intervalo definido, e a base do logaritmo natural (e = 2,71828...) e μ a taxa média.

III. Em um Processo Não Homogêneo de Poisson, não existe a preocupação em se prevenir falhas futuras.

Assinale a alternativa correta quanto às afirmações I, II e III:

a) I e III são corretas.

b) II e III são corretas.

c) Somente I é correta.

d) Somente III é correta.

e) Somente II é correta.

3. Quando refletimos sobre falhas de um sistema e a classe de processo de renovação como um tipo de processo estocástico, podemos adentrar, também, no conceito de probabilidade de transição.

Assinale a alternativa correta sobre probabilidade de transição:

a) Uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança no número de falhas de um processo.

b) Uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança do tipo de reparo de um processo.

c) Uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança de tempo de falha de um processo.

d) Uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança de tempo global de um processo.

e) Uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança de estado de um processo.

Seção 2.3

Processo de Bernoulli e de Poisson

Diálogo aberto

Prezado aluno, dada a importância da análise de processos estocásticos, nós continuaremos nossa abordagem com o estudo do Processo de Bernoulli, que está diretamente vinculado aos conceitos de ensaio de Bernoulli e à variável aleatória binomial.

Além disso, veremos alguns processos associados ao processo de Bernoulli, como o tempo de sucesso. Também aprofundaremos nosso estudo sobre os processos de Poisson.

A importância desses conteúdos é elevada para a sua prática profissional, uma vez que se refere a conceitos aplicados em diferentes situações. O processo de Poisson, por exemplo, abrange a aplicação no segmento de telefonia, chegada de clientes em uma final, retirada de material de estoque, entre outros.

Assim, suponha que você está trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas. A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela gerência.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal.

Anteriormente, você auxiliou a empresa nesta questão e, após a definição do tempo de garantia, que foi definido como sendo um instante de tempo máximo, você demonstrou aos gerentes qual era a probabilidade de componentes que ainda estariam funcionando.

Quando um componente em garantia com defeito é substituído, um novo prazo é concedido ao cliente, no caso do novo produto apresentar falha. Neste momento, conforme solicitado pelos gerentes, qual é a probabilidade do novo produto apresentar falha e por meio de qual processo você poderia fazer essa estimativa? Suponha que, a partir da análise de um lote com 20 componentes elétricos, 8 apresentaram falha (componente número 3, 5, 8, 11, 13, 14, 19, 20) dentro do intervalo

de garantia e foram substituídos por componentes novos.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo!

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Prezado aluno, agora que já entendemos um pouco melhor os diferentes tipos de processos estocásticos, vamos ver com mais detalhes outros dois tipos de processos estocásticos, o Processo de Bernoulli e o Processo de Poisson.

Em primeiro lugar, qual é a diferença do processo de Bernoulli para os apresentados anteriormente? Vamos descobrir?

Você já aprendeu o conceito de distribuição de Bernoulli, certo? Vamos ver um exemplo para recordar e, a partir do exemplo, apresentar algumas considerações.

A experiência que trataremos envolve jogar uma moeda, sendo que se você jogar a moeda uma única vez, teremos então uma probabilidade ρ de sair cara e um complementar de ρ, que é $\rho - 1$, de sair coroa. Essa experiência será dita justa caso a probabilidade seja $\rho = 0{,}5$, ou seja, ambos os resultados apresentam a mesma probabilidade de ocorrência.

Nesses casos, como o da moeda, perceba que os experimentos admitem apenas dois resultados, que são do tipo *sucesso* ou *fracasso*, e geram uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Portanto, podemos dizer que temos um experimento qualquer λ e um evento A, de modo que esse evento tem probabilidade ρ de acontecer, ou seja, probabilidade de sucesso.

Se tivermos n repetições independentes do nosso experimento λ, a quantidade de sucessos será uma variável aleatória binomial X composta pelos parâmetros ρ, que indicam a probabilidade individual de sucesso, e n que é o número de repetições.

Relembrando a definição de Hillier e Lieberman (2013), um processo estocástico é composto por um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas X_t sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto T.

A partir das definições de distribuição de Bernoulli e de processos estocásticos, fica mais fácil entender o que é um processo de Bernoulli. De acordo com Costa e Andrade (2004), para cada repetição do experimento λ teremos uma variável aleatória X_n, que representa o sucesso ou o fracasso da n-ésima repetição. O conjunto dessas variáveis X_n compõe o processo de Bernoulli.

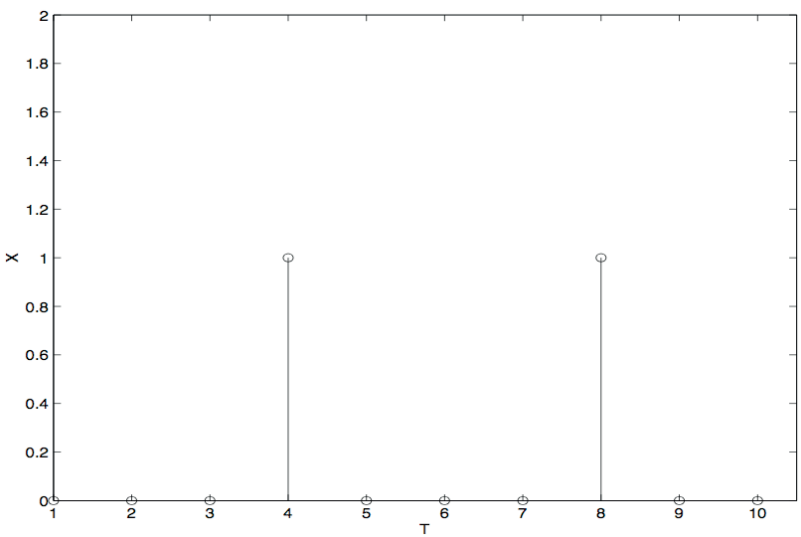
Portanto, ainda de acordo com Andrade e Cobre (2004), o processo estocástico será chamado de processo de Bernoulli quando:

1. Os eventos A são independentes;

2. A probabilidade de sucesso do n-ésimo evento é ρ e a probabilidade de fracasso do n-ésimo elemento é o seu complementar, $\rho - 1$, para qualquer $n = 1, 2, \ldots$. Ou seja, $P(A_n) = \rho$, $P(\bar{A}_n) = 1 - \rho, \forall n = 1, 2, \ldots$;

Os valores aleatórios $X_1, X_2, \ldots$ são identicamente distribuídos e utilizaremos como padrão para um sucesso $X_n = 1$ e como fracasso $X_n = 0$. A Figura 2.8 ilustra um processo de Bernoulli cujo parâmetro $\rho = 0,3$, sendo importante destacar que se trata de um processo discreto.

Figura 2.8 | Exemplo de processo de Bernoulli



Fonte: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/efcosta/mat_didat_sce131.pdf> Acesso em: 15 dez. 2017.

Agora que já compreendemos o que é um processo de Bernoulli, você deve ter ficado com a seguinte dúvida: qual a importância desse tipo de processo ou em que situações ele é aplicado?

Para responder ao questionamento, em primeiro lugar precisamos saber o conceito de número de sucessos. Denotaremos por N_n o número de sucessos obtidos, de modo que $N = \{N_n, n \in \mathbb{N}\}$. Como convencionamos que no caso de um sucesso $X_n = 1$, N_n será definido por:

$$N_n = \begin{cases} 0 \rightarrow n = 0 \\ X_1 + \ldots + X_n \rightarrow n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Observe que o número de sucessos é crescente, de modo que $0 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \ldots$, por meio de incrementos estacionários e independentes.

Agora que já sabemos o que é o número de sucessos, podemos continuar respondendo ao questionamento proposto anteriormente com o segundo conceito, chamado de tempo de sucesso. Mas o que é o tempo de sucesso?

O tempo de sucesso será denotado por T_s, de modo que $\{T_s, s \in \mathbb{N}\}$ trata dos instantes em que ocorre o sucesso. Lembrando que temos a probabilidade de sucesso ρ e o número de sucessos $N = \{N_n, n \in \mathbb{N}\}$, em um processo de Bernoulli no qual temos a variável aleatória $\{X_n; 1 \leq n\}$, então definimos o tempo de sucesso T_s por:

$$T_s = \begin{cases} 0 \rightarrow s = 0 \\ \min_n \{n : s \leq N_n\} \rightarrow s = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Vale mencionar alguns aspectos importantes com relação ao tempo de sucesso, conforme apresentado por Andrade e Cobre (2004):

1. $T_s = n \Leftrightarrow N_{n-1} = s;\ N_n = s$

2. $T_s \leq n \Leftrightarrow s \leq N_n$ (o s-ésimo sucesso ocorrerá até n se, e somente se, o número de sucessos nas primeiras n tentativas for ao menos s).

Exemplificando

Suponha que você seja o gerente de qualidade de uma linha de montagem. Você está verificando o trabalho executado pelos operadores, que inspecionam cada produto em conforme ou não conforme.

Você convencionou que aos produtos conformes será atribuído

$X_n = 1$, enquanto que aos não conformes $X_n = 0$. A existência de um produto não conforme é independente dos demais produtos, sendo que a probabilidade de ocorrência de sucesso (produto conforme) é ρ.

Você observou o operador inspecionar os cinco primeiros produtos e constatou que apenas o primeiro e o terceiro eram não conformes. Nesse caso, quais seriam os tempos de sucesso para a linha de montagem nos produtos observados?

Para responder a esse questionamento, primeiro temos que verificar se o processo em questão é um processo de Bernoulli. Para isso, é essencial verificarmos se o processo é discreto, como demonstramos na Figura 2.8, pois os processos de Bernoulli apresentam comportamento discreto. Além disso, sabemos que nos processos de Bernoulli os experimentos admitem apenas dois resultados, que são do tipo sucesso ou fracasso, e geram uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. No nosso exemplo, todas essas condições são satisfeitas.

Retomando o presente caso, como sabemos que o número de sucessos (produtos conformes) é igual a 3, precisamos identificar os valores de X_n dos produtos conformes e não conformes:

- Produto 1 não conforme, portanto, $X_1 = 0$;

- Produto 2 conforme, portanto, $X_2 = 1$;

- Produto 3 não conforme, portanto, $X_3 = 0$;

- Produto 4 conforme, portanto, $X_4 = 1$;

- Produto 5 conforme, portanto, $X_5 = 1$;

Os tempos de sucesso serão associados aos produtos 2, 4 e 5, portanto:

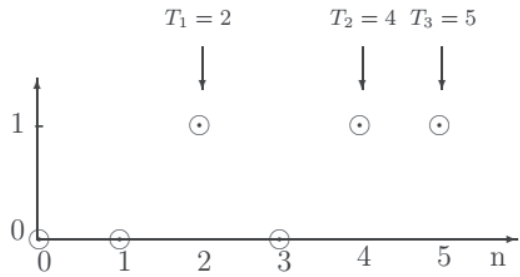
- Tempo de sucesso 1: $T_1 = 2$;

- Tempo de sucesso 2: $T_2 = 4$;

- Tempo de sucesso 3: $T_3 = 5$;

Podemos fazer um gráfico que represente X_n, n e T_s para facilitar nossa representação do processo em questão para outras análises, conforme exemplo da Figura 2.9.

Figura 2.9 | Processo de qualidade



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

E os processos de Poisson? O que são e onde são utilizados?

Os processos de Poisson são processos estocásticos contínuos no tempo, enquanto os processos de Bernoulli são discretos. Isso pode trazer algumas complicações na resolução dos problemas, mas em contrapartida apresenta uma infinidade de possíveis aplicações.

Relembrando o que aprendemos na distribuição de Poisson, temos a Equação 2.8.

$$p(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} \quad \text{(Equação 2.8)}$$

Sendo $p(v)$ a probabilidade de v contagens no intervalo definido, e a base do logaritmo natural $(e = 2{,}71828...)$ e μ a taxa média, já que a distribuição de Poisson descreve eventos que ocorrem aleatoriamente, no entanto, com uma variação média definida.

Um processo de Poisson é um tipo especial de processo de contagem de chegadas no qual algumas hipóteses devem ser satisfeitas. Um processo de contagem de chegadas, por sua vez, tem como principal característica descrever a ocorrência de eventos ao longo do tempo; portanto, um processo de Poisson também apresenta essa característica.

É importante mencionar que nos processos de contagem existe uma variável aleatória de contagem que denotaremos como N_t,

que assume apenas valores naturais e denota o número de falhas no intervalo.

A primeira hipótese a ser considerada diz que o número de chegadas, em um dado intervalo de tempo, será independente do número de chegadas de outro intervalo de tempo, ao que chamaremos de incrementos independentes.

Já a segunda hipótese afirma que temos que levar em conta que os incrementos dependem do tamanho do intervalo de tempo, mas não da decorrência do tempo, de modo que existe uma independência do tempo.

A terceira hipótese, por fim, diz que não ocorrem chegadas simultâneas, mas, sim, individuais.

Assimile

Agora que entendemos o que é um processo de Bernoulli e de Poisson, vamos assimilar algumas características de cada processo:

- Processo de Bernoulli: a variável aleatória X_n representa o sucesso ou o fracasso da n-ésima repetição. É um processo discreto com relação ao tempo e as condições para um processo de Bernoulli são:

1. Os eventos A são independentes;

2. $P(A_n) = \rho$, $P(\bar{A}_n) = 1 - \rho, \forall n = 1, 2, \ldots$;

- Processo de Poisson: são processos estocásticos contínuos no tempo, tratando-se de um processo de contagem especial no qual as seguintes hipóteses são satisfeitas:

1. Incrementos independentes;

2. Independência do tempo;

3. Não ocorrem chegadas simultâneas.

Vale destacar também que existem os chamados processos de Poisson homogêneo e não homogêneo, sendo que este último estudamos na seção anterior.

Os processos de Poisson homogêneos, que também são chamados de estacionários, apresentam um parâmetro constante.

Esse parâmetro pode ser, por exemplo, a probabilidade de falha em um intervalo de tempo pequeno, o que usualmente denominamos como função intensidade. Dado que a função intensidade é constante, esse tipo de processo não pode ser utilizado para modelar sistemas que apresentam deterioração ou melhoria.

Os processos de Poisson não homogêneos, ao contrário do processo homogêneo, não apresentam função intensidade constante. Como vimos na seção anterior, em um Processo não homogêneo de Poisson dizemos que o nosso sistema retorna à operação por intermédio do reparo, mas não existe a preocupação com falhas futuras.

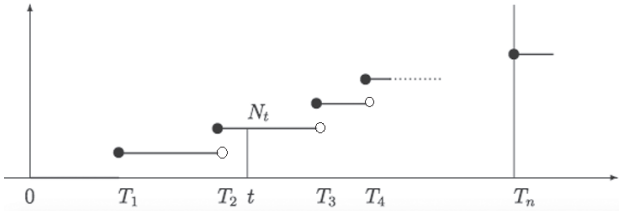
Reflita

Agora que já entendemos melhor o que são os processos de Poisson homogêneos e não homogêneos, assim como a aplicação dos processos não homogêneos (sistema retorna à operação por intermédio do reparo), fica a seguinte reflexão: dizemos que nos processos de Poisson não homogêneo a função intensidade não é constante. Analisando o caso do reparo, o que você conclui a respeito dessa informação? O que significa, nesse caso em especial, ter uma função intensidade não constante?

Reflita sobre essas questões analisando novamente a seção anterior.

Os tempos de chegadas estão relacionados à ocorrência dos eventos do processo analisado. Podemos definir o enésimo tempo de chegada por meio da equação $T_n = \min\{t : N_t = n\}$. Isso é importante porque é comum que tenhamos que verificar o tempo necessário para que um certo número de eventos ocorra, bem como contar o número de eventos que ocorrem em um dado intervalo de tempo. Vale lembrar que a variável N_t é aleatória e descreve a contagem. A Figura 2.10 apresenta um exemplo dos tempos das chegadas $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$.

Figura 2.10 | Tempo de chegadas



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Outro conceito importante é o de tempo entre chegadas, que, de acordo com Andrade e Cobre (2004), são variáveis aleatórias i.i.d (independentes e identicamente distribuídas), como já vimos anteriormente.

É importante lembrarmos que o processo não guarda a passagem de tempo entre a última chegada e o instante atual, o que faz com que o tempo de espera de uma nova chegada não dependa do instante atual nem do instante em que ocorreu a última chegada. Esse tempo de espera também pode ser denominado como tempo de recorrência.

Por exemplo, suponha que no instante t observamos uma máquina A, cuja última peça chegou na máquina no instante z. Portanto, dizemos que o tempo de espera para a chegada de uma nova peça independe do instante atual t e do instante z em que chegou a última peça.

Pesquise mais

Caro aluno, você já ouviu falar sobre manutenção preventiva, correto?

Nesse caso, nos lembramos do conceito de sistema reparável e verificamos que o processo de Poisson não homogêneo é adequado para modelar sistemas com características de reparo mínimo.

No artigo indicado para leitura, os autores fazem um estudo de manutenção preventiva em chaves seccionadoras utilizando os conceitos de processo de Poisson homogêneo e não homogêneo.

Ficou curioso? Então leia as páginas 1 a 3 do artigo a seguir e bons estudos!

SANTOS, W. B.; COLOSIMO, E. A.; MOTTA, S. B. Tempo ótimo entre manutenções preventivas para sistemas sujeitos a mais de um tipo de evento aleatório. **Gestão & Produção**, v. 14, n. 1, p. 193-202, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/gp/v14n1/15.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Sem medo de errar

Vamos agora relembrar a nossa situação inicial. Suponha que você está trabalhando no departamento de manutenção e garantia de uma empresa de componentes eletrônicos e é responsável pela análise da reposição das peças que apresentaram falha e que devem ser substituídas. A vida útil dos componentes deve ser maior do que a garantia fornecida pelo fabricante, para que o número de reposições esteja dentro de um valor aceitável pela gerência.

A empresa quer ampliar o prazo de garantia dos seus produtos, sendo que atualmente é atendido apenas o prazo legal.

Quando um componente em garantia com defeito é substituído, um novo prazo é concedido ao cliente, no caso do novo produto apresentar falha. Neste momento, conforme solicitado pelos gerentes, qual é a probabilidade do novo produto apresentar falha e por meio de qual processo você poderia fazer essa estimativa?

Então, agora temos uma nova situação. Como estamos tratando de componentes eletrônicos, já lidamos anteriormente com o conceito de processo de renovação, lembra-se do caso da lâmpada e da resistência do chuveiro?

Agora, o que nós queremos saber é se o novo produto apresentará defeito ou não no tempo que resta de garantia, uma vez que ele já foi substituído. Para que essa situação fique mais clara para você, vamos nos lembrar do problema de jogar uma moeda: existe a possibilidade de dar cara ou coroa, certo? O mesmo ocorre com um componente elétrico, existe a probabilidade dele apresentar falha ou não. Se você jogou uma moeda uma vez e saiu cara e você tornar a repetir o experimento, o resultado será totalmente independente da jogada anterior, certo?

Então, vamos supor que, a partir da análise de um lote com 20 componentes elétricos, 8 apresentaram falha (componente número 3, 5, 8, 11, 13, 14, 19, 20) dentro do intervalo de garantia e foram substituídos por componentes novos.

Esse novo componente poderá apresentar falha ou não, independente do componente anterior ter falhado, correto? Então agora fica mais evidente a analogia entre jogar a moeda repetidas vezes e o componente falhar mais de uma vez.

Vamos então retomar a definição de um processo de Bernoulli e

ver se ela se encaixa na descrição do nosso problema?

De acordo com Andrade e Cobre (2004), para cada repetição do experimento λ teremos uma variável aleatória X_n que representa o sucesso ou o fracasso da n-ésima repetição. O conjunto dessas variáveis X_n compõe o nosso processo de Bernoulli. Nós também definimos que no caso de um sucesso $X_n = 1$ e no caso de um fracasso $X_n = 0$.

Logo, trazendo para o nosso caso, o primeiro passo que você pode dar é convencionar que aos componentes elétricos sem falha será atribuído $X_n = 1$, enquanto que aos componentes elétricos com falha será atribuído $X_n = 0$.

Como você sabe que o número de produtos sem falha é igual a 12, precisamos identificar os valores de X_n dos produtos sem defeitos e com defeitos:

- Componente 1 sem falha, portanto, $X_1 = 1$;
- Componente 2 sem falha, portanto, $X_2 = 1$;
- Componente 3 com falha, portanto, $X_3 = 0$;
- Componente 4 sem falha, portanto, $X_4 = 1$;
- Componente 5 com falha, portanto, $X_5 = 0$;
- Componente 6 sem falha, portanto, $X_6 = 1$;
- Componente 7 sem falha, portanto, $X_7 = 1$;
- Componente 8 com falha, portanto, $X_8 = 0$;
- Componente 9 sem falha, portanto, $X_9 = 1$;
- Componente 10 sem falha, portanto, $X_{10} = 1$;
- Componente 11 com falha, portanto, $X_{11} = 0$;
- Componente 12 sem falha, portanto, $X_{12} = 1$;
- Componente 13 com falha, portanto, $X_{13} = 0$;
- Componente 14 com falha, portanto, $X_{14} = 0$;
- Componente 15 sem falha, portanto, $X_{15} = 1$;
- Componente 16 sem falha, portanto, $X_{16} = 1$;
- Componente 17 sem falha, portanto, $X_{17} = 1$;
- Componente 18 sem falha, portanto, $X_{18} = 1$;
- Componente 19 com falha, portanto, $X_{19} = 0$;
- Componente 20 com falha, portanto, $X_{20} = 0$.

Até aqui, a descrição formal de um processo de Bernoulli segue o

que foi exposto no nosso problema, com a única diferença de que o sucesso é o componente não apresentar falha e o fracasso significa que o componente apresentou falha.

No entanto, nós tínhamos duas condições para os processos de Bernoulli:

1. Os eventos A são independentes;
2. A probabilidade de sucesso do n-ésimo evento é ρ e a probabilidade de fracasso do n-ésimo elemento é o seu complementar, $\rho - 1$, para qualquer $n = 1,2,\ldots$. Ou seja, $P(A_n) = \rho$, $P(\bar{A}_n) = 1 - \rho, \forall n = 1, 2,\ldots$

Será que essas duas condições se aplicam ao nosso problema?

A primeira delas sim, pois os nossos eventos são independentes, como no exemplo da moeda, uma vez que a ocorrência de uma falha em um componente não influenciará na ocorrência de falha em outro componente novo. A segunda condição também é satisfeita, pois existem apenas duas possibilidades que são descritas por ρ (probabilidade de sucesso – não apresentar falha) ou seu complementar, $\rho - 1$ (probabilidade de fracasso – apresentar falha).

Portanto, com base nas informações apresentadas para o novo problema, que é a possibilidade do novo produto apresentar falha, podemos trabalhar nesse caso com o conceito de processo de Bernoulli.

Mas, agora que já sabemos que tipo de processo utilizar, como faremos para saber a probabilidade do novo produto apresentar falha no tempo restante de garantia?

Para responder ao segundo questionamento, você pode se lembrar do conceito de distribuição de Bernoulli, mas é importante lembrar que a garantia complementar terá um tempo de validade, certo? Então, neste caso, podemos empregar o conceito de tempo de sucesso, você se lembra?

Nós indicamos o tempo de sucesso por meio de T_s, de modo que $\{T_s, s \in \mathbb{N}\}$. Tratam-se dos instantes em que ocorre o sucesso. Lembrando que temos a probabilidade de sucesso ρ e o número de sucessos $N = \{N_n, n \in \mathbb{N}\}$. O tempo de sucesso será:

$$T_s = \begin{cases} 0 \rightarrow s = 0 \\ \min_n \{n : s \leq N_n\} \rightarrow s = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Para o nosso caso, para informar em quais instantes não ocorrem componentes elétricos com falhas, devemos nos referir aos tempos de sucesso que estão associados aos componentes 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 17 e 18; portanto:

- Tempo de sucesso 1: $T_1 = 1$;
- Tempo de sucesso 2: $T_2 = 2$;
- Tempo de sucesso 3: $T_3 = 4$;
- Tempo de sucesso 4: $T_4 = 6$;
- Tempo de sucesso 5: $T_5 = 7$;
- Tempo de sucesso 6: $T_6 = 9$;
- Tempo de sucesso 7: $T_7 = 10$;
- Tempo de sucesso 8: $T_8 = 12$;
- Tempo de sucesso 9: $T_9 = 15$;
- Tempo de sucesso 10: $T_{10} = 16$;
- Tempo de sucesso 11: $T_{11} = 17$;
- Tempo de sucesso 12: $T_{12} = 18$.

Lembrando que o s-ésimo sucesso ocorrerá até n se, e somente se, o número de sucessos nas primeiras n tentativas for ao menos s.

Portanto, o tempo de sucesso do novo componente deverá ser um valor maior do que o tempo de garantia faltante, pois, caso contrário, terá que ser feita uma nova substituição.

Avançando na prática

Testes de qualidade em eletrodomésticos da linha premium

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja gestor de qualidade do departamento de uma linha premium de uma empresa de eletrodomésticos. Por se tratar de uma linha especial, você solicita que cada operador inspecione 100% das peças, abrindo mão do processo por amostragem.

A partir da inspeção 100%, os operadores devem apontar, em uma folha de verificação, se o dispositivo apresenta algum defeito ou se não apresenta defeito. Vale citar que, por se tratar de uma linha premium,

você recomendou que qualquer não conformidade (como risco, amassado, diferença na tonalidade de cor etc.) deve ser encarado como defeito, de modo que o produto não está apto para chegar ao mercado. Você está verificando o trabalho executado pelos operadores, que inspecionam cada produto em conforme ou não conforme.

Ao analisar a ficha de verificação (composta pela inspeção dos 7 primeiros itens de produção) para prestar contas ao seu superior, foi solicitado a você informar em quais instantes não ocorrem defeitos nos produtos a fim de que providências possam ser tomadas na produção. Com base na Quadro 2.1, como você obteria essa informação a fim de passá-la para o seu superior?

Quadro 2.1 | Status do produto da linha premium de acordo com o controle de qualidade

Produto inspecionado	Status do produto pelo controle de qualidade
1	Com defeito
2	Com defeito
3	Sem defeito
4	Com defeito
5	Sem defeito
6	Sem defeito
7	Com defeito

Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Para você conseguir dar uma resposta ao seu supervisor sobre em quais instantes os produtos não apresentam defeito, inicialmente você deve perceber que se trata de um ensaio do tipo sucesso e fracasso, de modo que o sucesso se refere a um produto sem defeito.

O primeiro passo que você pode dar é convencionar que aos produtos sem defeito será atribuído $X_n = 1$, enquanto que aos produtos com defeitos será atribuído $X_n = 0$.

Perceba também que a existência de um produto defeituoso é independente dos demais produtos, sendo que a probabilidade de ocorrência de sucesso (isto é, a probabilidade do produto não apresentar defeito) pode ser designada por ρ.

De acordo com a Quadro 2.1, você observou que os operadores inspecionaram os 7 primeiros produtos fabricados e constatou que os eletrodomésticos 1, 2, 4 e 7 apresentavam algum tipo de não conformidade.

Perceba, então, que se trata de um caso descrito por meio do processo de Bernoulli, apresentando comportamento discreto, e que os eletrodomésticos geram uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Como você sabe que o número de produtos sem defeitos é igual a 3, precisamos identificar os valores de X_n dos produtos sem defeitos e com defeitos:

- Produto 1 com defeito, portanto, $X_1 = 0$;
- Produto 2 com defeito, portanto, $X_2 = 0$;
- Produto 3 sem defeito, portanto, $X_3 = 1$;
- Produto 4 com defeito, portanto, $X_4 = 0$;
- Produto 5 sem defeito, portanto, $X_5 = 1$;
- Produto 6 sem defeito, portanto, $X_6 = 1$;
- Produto 7 com defeito, portanto, $X_7 = 1$.

Logo, para informar em quais instantes não ocorrem produtos com defeitos, devemos nos referir aos tempos de sucesso que estão associados aos produtos 3, 5 e 6, portanto:

- Tempo de sucesso 1: $T_1 = 3$;
- Tempo de sucesso 2: $T_2 = 5$;
- Tempo de sucesso 3: $T_3 = 6$;

Parabéns, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Pensando no jogo de uma moeda, sabe-se que os experimentos admitem apenas dois resultados: cara ou coroa. Esse tipo de ensaio representa um processo de Bernoulli, de modo que a variável aleatória X_n representa o sucesso ou o fracasso da n-ésima repetição do experimento. Considere as afirmações I, II e III.

I. O processo de Bernoulli é um processo contínuo com relação ao tempo.

II. Em um processo de Bernoulli, os eventos são dependentes.

III. Os processos de Bernoulli geram uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Assinale a alternativa que apresenta as afirmativas corretas:

a) I e III são corretas.

b) II e III são corretas.

c) Somente III é correta.

d) I, II e III são corretas.

e) Somente II é correta.

2. Em relação aos processos de Poisson, sabemos que há os processos de Poisson homogêneos e não homogêneos. No Processo Não homogêneo de Poisson dizemos que o sistema retorna à operação por intermédio do reparo, mas não existe a preocupação com falhas futuras. Avalie e complete a afirmação abaixo.

Os processos de Poisson Homogêneos, que também são chamados de _____, apresentam um parâmetro constante. Esse parâmetro pode ser, por exemplo, a probabilidade de falha num intervalo de tempo pequeno, o que usualmente denominamos como _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente as frases:

a) Estacionários; função aleatoriedade.

b) Discretos; função intensidade.

c) Estacionários; função multiplicidade.

d) Contínuos; função intensidade.

e) Estacionários; função intensidade.

3. Os Processo de Poisson, que podem ser divididos em processos homogêneos e processos não homogêneos, são processos estocásticos contínuos no tempo, a partir de um processo de contagem especial no qual 3 hipóteses devem ser satisfeitas.

Assinale a alternativa que apresenta uma das hipóteses referidas acima:

a) Ocorrem chegadas simultâneas.

b) Independência do tempo.

c) Incrementos dependentes.

d) Incrementos binários.

e) Chegadas aproximadas.

Referências

COSTA, E. F.; ANDRADE, M. G. **Introdução aos processos estocásticos**. Material didático – Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, USP, São Paulo, 2004. Disponível em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/efcosta/mat_didat_sce131.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017

FOGLIATTO, F. S.; RIBEIRO, J. L. D. **Confiabilidade e manutenção industrial**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

HINOJOSA, Adrian; MILANÉS, Aniura. **Uma introdução aos processos estocásticos com aplicações**. Disponível em: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf> Acesso em: 15 dez. 2017.

LEEMIS, L. M. **Reliability - Probabilistic models and statistical methods**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. **Estatística aplicada à engenharia**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. p. 313 Disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000004292 >. Acesso em: 2 dez. 2017.

PERCY, D. F.; ALKALI, B. M. Generalized proportional intensities model for repairable systems. **Journal of Management Mathematics**. n. 17, p. 171-185, 2006.

PHAM, H.; WANG, H. Imperfect maintenance. **European Journal of Operational Research**, v. 94, p. 425-438, 1996.

ROCHA, S. P. V. da. **Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via processo de renovação generalizado**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/5751/arquivo7328_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 1 dez. 2017.

SANTOS, W. B.; COLOSIMO, E. A.; MOTTA, S. B. Tempo ótimo entre manutenções preventivas para sistemas sujeitos a mais de um tipo de evento aleatório. **Gestão & Produção**, v. 14, n. 1, p. 193-202, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/gp/v14n1/15.pdf> . Acesso em: 15 dez. 2017.

Processos estocásticos: cadeia de Markov

Convite ao estudo

Prezado aluno, dada a importância da análise de processos estocásticos, nesta unidade adentraremos em processos Markovianos e cadeias de Markov, continuando nosso enfoque em probabilidade!

Esses conceitos serão muito úteis no seu cotidiano e vida profissional, pois envolvem diretamente o conceito de processos sem memória e podem ser utilizados para modelar diferentes fenômenos como o estoque de uma fábrica, mercado financeiro ou estados climáticos da sua cidade natal (previsão meteorológica!)

Logo, inicialmente, estudaremos a definição de processos de Markov, bem como os tipos de processo; processo de nascimento; e processo de morte.

Em seguida, estudaremos o conceito de cadeia de Markov discreta, os fundamentos de probabilidade de transição e, enfim as cadeias de Markov absorventes.

Seguindo um desencadeamento lógico das ideias, vamos trabalhar os conceitos vinculados à cadeia de Markov contínua, enfatizando a aplicação de cadeias de Markov com enfoque em processos estocásticos.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que você conheça os princípios básicos de cadeias de Markov e sua aplicabilidade.

Logo, pense que você está atuando em empresa do mercado financeiro auxiliando nas decisões de compra e

venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Na empresa em questão, ao final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou, o preço cai.

Para cada situação descrita anteriormente, existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, uma vez que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Nesse contexto, você como analista poderia dizer ao seu cliente que para o processo em questão os eventos passados não são relevantes?

Os clientes têm uma dúvida recorrente e necessitam da sua ajuda: hoje uma ação comprada fechou em queda; logo, qual a probabilidade de ela se valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro?

Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter condições de transmitir ao seu cliente uma probabilidade de lucro?

Pense a respeito e considere que seu gestor lhe solicitou um parecer a fim de transmitir essas informações aos clientes.

A partir de agora, mãos à obra e empenhe-se, com dedicação e com entusiasmopara aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Ótimo estudo!

Seção 3.1

Processos de Markov

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma unidade de estudo!

Neste momento, vamos estudar os processos Markovianos, ou seja, vamos entender que um processo estocástico pode ser compreendido como um processo Markoviano caso o seu estado futuro dependa somente do seu estado presente e não dos estados passados.

A isso denominamos processo sem memória e pode ser utilizado, por exemplo, se pensarmos em uma política de gestão de estoque na qual a quantidade de produtos dependa somente da quantidade anterior do produto e do que foi adquirido ou vendido em um determinado intervalo de tempo de reposição do produto. Assim, vamos estudar os tipos de processos markovianos, bem como os processos de nascimento e os processos de morte.

Logo, pense que você está atuando em uma empresa do mercado financeiro, auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Na empresa em questão, ao final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou o preço cai.

Para cada situação descrita anteriormente, existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, uma vez que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Nesse contexto, você como analista poderia informar ao seu cliente que para o processo em questão os eventos passados não são relevantes?

Pense a respeito e considere que seu gestor lhe solicitou um parecer a fim de transmitir essas informações aos clientes.

Bons estudos!

Não pode faltar

Prezado aluno, agora vamos iniciar nossos estudos sobre os processos de Markov. Mas o que são os processos de Markov?

Para começar a responder ao questionamento proposto, primeiramente relembraremos o conceito de probabilidade de transição, que se refere à probabilidade de transição de um estado para outro estado. Mas o que isso tem a ver com os processos de Markov?

Os processos de Markov que estudaremos são uma classe especial de processos estocásticos. Já sabemos que os processos estocásticos são caracterizados por variáveis aleatórias que são indexadas com base em um parâmetro que pode ser o tempo.

Sabemos que existem processos estocásticos classificados com relação ao estado do sistema, podendo ser discreto ou contínuo, e com relação ao parâmetro, que pode ser, por exemplo, o tempo discreto e o tempo contínuo. Isso já nos dá um direcionamento em relação ao conceito de processos de Markov.

Portanto, um processo estocástico será considerado um processo de Markov quando o estado futuro do sistema depender apenas do estado atual (ou presente) e não dos estados anteriores, ou seja, nos processos de Markov nós dizemos que não existe memória, uma vez que o passado é desprezado.

Exemplificando

Suponha que você seja um consultor financeiro e que, ao fazer a análise de gastos de seu cliente em 2017, você constatou que o uso dos seus recursos financeiros está alocado da seguinte forma:

- 30% para moradia (aluguel ou financiamento imobiliário).

- 50% para demais despesas (água, luz, telefone, impostos, transporte, vestuário, alimentação, saúde).

- 20% para os demais itens pessoais e lazer.

Como consultor financeiro, você pode aplicar conhecimentos de transição de estados para modelar a situação do seu cliente.

Assim, cada um dos usos apontados anteriormente representará um estado do seu sistema, de modo que o uso com moradia seja o estado 1, o uso com demais despesas o estado 2 e os itens pessoais e lazer sejam o estado 3 do sistema, com as suas respectivas probabilidades.

Portanto, você terá um vetor, chamado de vetor de probabilidade de estado, que é composto pelas probabilidades de cada estado (são probabilidades não-condicionais).

Nesse caso, o vetor ficaria:

$$\pi_{2017} = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,50 & 0,20 \end{bmatrix}$$

Ao longo dos próximos anos, a tendência é que a distribuição de renda apresentada anteriormente sofra alterações. Fazendo um planejamento estratégico com o seu cliente, vamos considerar que para cada cinco anos, as probabilidades de transição dos estados sejam conforme o apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 | Probabilidades de transição

Estados	Para 1	Para 2	Para 3
De 1	60%	20%	20%
De 2	10%	70%	20%
De 3	0%	20%	80%

Fonte: elaborada pelo autor

Portanto, analisando a Tabela 3.1, podemos dizer que a probabilidade do sistema, que nesse caso é a distribuição de renda, de 1 para 1 significa que a probabilidade de o estado ser 1 após cinco anos, sendo o estado atual 1, é de 60%. Já a probabilidade de o estado do sistema ser 2 passados cinco anos, sendo que o estado atual é 1, é de 20%. E assim nos demais elementos da Tabela 3.1.

Podemos definir uma matriz, chamada matriz de transição, como uma matriz quadrada na qual cada elemento representa a probabilidade de transição de estado.

Nesse caso, a matriz de transição será:

$$P = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,20 & 0,20 \\ 0,10 & 0,70 & 0,20 \\ 0,00 & 0,20 & 0,80 \end{bmatrix}$$

Se quisermos calcular o vetor probabilidade de estado para daqui a cinco anos, ou seja, em 2022, teremos que multiplicar $\pi \times P$, ou seja, a probabilidade de o nosso sistema estar em cada estado em 2022. Trata-se de um produto entre as matrizes, cujo resultado seria:

$$\pi_{2017} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,45 & 0,32 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{2022} = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,45 & 0,32 \end{bmatrix}$$

Assim, você concluiu com o seu cliente que daqui cinco anos, os gastos dele serão:

- 23% para moradia (aluguel ou financiamento imobiliário).

- 45% para demais despesas (água, luz, telefone, impostos, transporte, vestuário, alimentação, saúde).

- 32% para os demais itens pessoais e lazer.

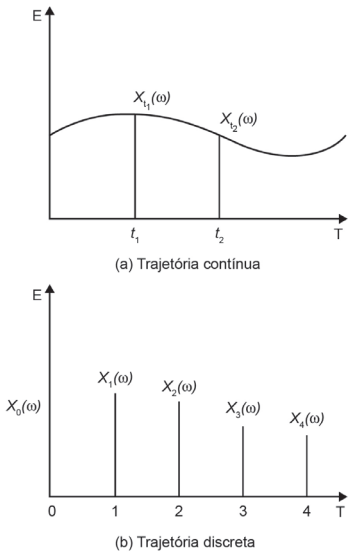
Verificamos, nesse exemplo, que o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados, o que configura um processo Markoviano, como vimos na definição inicial.

Agora que entendemos a conceituação de processo de Markov como um modelo de processo estocástico, podemos adentrar nos tipos de processos markovianos, isto é, a cadeia de Markov discreta no tempo e a cadeia de Markov contínua no tempo. Nesta seção apresentaremos a definição, e os detalhamentos serão estudados nas próximas seções ainda desta unidade!

Assimile

Caro aluno, um ponto importante que você deve ter em mente é que um processo estocástico pode ser de estado discreto ou de estado contínuo. Quando a variável X(t) apresentar um comportamento discreto, dizemos que o nosso processo estocástico é de estado discreto e quando X(t) é uma variável contínua, que o processo estocástico é de estado contínuo. A Figura 3.1 evidencia a representação de um processo estocástico em função do seu estado.

Figura 3.1 | Processo estocástico de estado continuo e discreto



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2017.

Esses conceitos são de extrema importância, pois o processo Markoviano é considerado uma cadeia de Markov quando o estado é discreto, ou seja, quando as variáveis aleatórias X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E (KARLIN e TAYLOR, 1998).

Nesse sentido, definimos uma cadeia de Markov em tempo discreto como um processo de Markov no qual o espaço de estados refere-se a um determinado conjunto finito ou contável, cujo índice temporal do conjunto pode ser designado por T = 0, 1, 2, ..., ou seja, as transições ocorrem em períodos de tempo.

Já as cadeias de Markov em tempo contínuo pode ser descrita de modo semelhante àquela em tempo discreto, divergindo-se no fato de que as transições podem ocorrer em qualquer instante de tempo (KARLIN e TAYLOR, 1998).

Exemplificando

Caro aluno, a fim de especificar o que é uma cadeia de Markov, vale a pena estudarmos um exemplo.

Suponha que você trabalhe em um banco na função gerencial. Certamente, você conseguiria demonstrar a sua equipe que o saldo (valor monetário em reais) de uma conta de um determinado cliente em um período de tempo em semanas refere-se a uma cadeia de Markov, pelo estado ser discreto, isto é, os valores em reais são enumeráveis.

Assim, podemos supor que na primeira semana o cliente terá R$2.500, 00 em conta. Já na segunda semana houve uma redução de 500 reais em relação ao saldo anterior. Na terceira,houve um aumento de 100 reais, conferindo um saldo R$ 2.100,00 ao final da terceira semana. Logo, teremos conforme a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 | Saldo bancário de acordo com a semana

t (semanas)	Semana 1	Semana 2	Semana 3
X(t) reais	R$ 2.500	R$ 2.000	R$ 2.100

Fonte: elaborada pelo autor

Agora que nós já sabemos os tipos de processos de Markov, vamos compreender os chamados processos de nascimento e de morte.

Já sabemos que existem cadeias de Markov de tempo discreto e de tempo continuo, correto? Os processos de nascimento e de morte são tipos especiais de processos estocásticos muito úteis quando analisamos sistemas de filas, que estudaremos mais adiante. Mas então, qual é a relação entre os processos de nascimento e de morte com os processos de Markov?

Como visto anteriormente, os processos de Markov não apresentam memória, ou seja, o estado futuro do sistema depende apenas do estado atual (ou presente). Há também uma probabilidade inerente à transição de estados, que chamamos de probabilidade de

transição. Essas são as características fundamentais de um processo de Markov. Um processo de nascimento e morte apresenta um caso especial no qual as transições são possíveis apenas para os chamados estados vizinhos.

Se considerarmos um estado genérico i, o nascimento será a transição de i para o próximo estado, ou seja, $i+1$. Já a transição do estado i para um estado anterior, ou seja, $i-1$, será chamada de morte.

Ficou confuso de entender? Então vamos analisar um exemplo que facilitará nosso aprendizado.

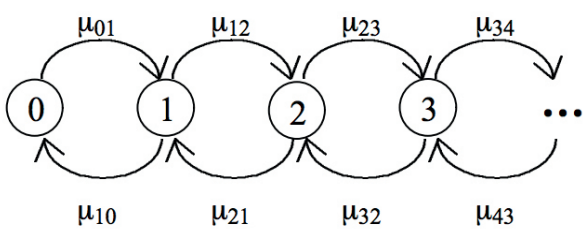
Supomos que o seu sistema seja composto por um banco, no qual temos a chegada e a saída de clientes que fazem movimentações financeiras na instituição. Se o banco apresenta um estado i que caracteriza o número de clientes na fila do caixa, o que você entende que seria um processo de nascimento e um processo de morte?

Nesse exemplo, o processo de nascimento seria a transição para um estado vizinho $i+1$, que poderia ser a representação da chegada de um cliente na fila do caixa para atendimento. Isso traria um aumento no nível da população, ou seja, o nosso sistema não está mais no estado i.

E o processo de morte? Analogamente ao processo de nascimento, a saída de um cliente representaria a transição do estado i para o estado $i-1$ e teremos um decréscimo no nível da população.

Vamos relembrar o diagrama de estados que vimos anteriormente na unidade 2. No diagrama de estados é possível visualizar, de modo intuitivo, o que ocorre em um processo de nascimento e de morte. A Figura 3.2 indica um processo de nascimento e de morte, por meio das transições e suas respectivas probabilidades de transições, representadas por μ.

Figura 3.2 | Processos de nascimento e de morte



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 9 nov. 2017.

Fica evidente, por meio da Figura 3.2, que as transições de estados $X = \{0,1,...\}$ somente podem ocorrer para os estados vizinhos, conforme ilustramos no exemplo anterior. No caso do estado $X = 0$ só é possível ir para o estado $X = 1$.

Os processos de nascimento e de morte são tipos de processos de Markov em tempo contínuo, pois a variável tempo representa instantes ou momentos de tempo, diferentemente dos processos de Markov em tempo discreto, nos quais a variável tempo indica períodos de tempo, uma vez que os processos de Markov são processos estocásticos, nos quais vale $\{X(t), t > 0\}$.

Pesquise mais

Você já ouviu falar nos processos de quase nascimento e morte? Nós acabamos de estudar os processos de nascimento e morte, os processos de quase nascimento e morte são apenas uma extensão.

Vamos nos aprofundar nesse assunto e verificar um exemplo de aplicação em engenharia de produção.

O artigo *Aplicações do processo de quase nascimento e morte em sistemas de produção* traz uma análise e aplicação dessa modelagem para estoques de peças de reposição.

SALES, M. V. da S.; MORALES, G. **Aplicações do processo de quase nascimento e morte em sistemas de produção.** In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 43., Ubatuba, p. 156-167, 2011. Disponível em:

<http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2011/pdf/88197.pdf>. Acesso em: 9 nov. 2017.

Agora que já sabemos o que é um processo de nascimento e de morte, entenderemos as chamadas equações de balanço. A partir do diagrama observado na Figura 3.2, dado que as transições podem ocorrer apenas para os estados vizinhos, temos que:

Probabilidade do estado 0: π_0

Probabilidade no estado 1: π_1

Probabilidade no estado n: π_n

Portanto, o vetor de probabilidade de estado será:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{bmatrix}$$

Também teremos as probabilidades de transição, que podem ser representadas na matriz de transição:

Probabilidade de transição do estado 0 para o estado 1: μ_{01}

Probabilidade de transição do estado 1 para o estado 0: μ_{10}

As equações de balanço ficariam:

Para o estado 0: $\pi_0\mu_{01} = \pi_1\mu_{10}$, ou seja, a probabilidade π_1 pode ser expressa em função da probabilidade π_0 e das probabilidades de transição, ficando:

$$\pi_1 = \frac{\pi_0\mu_{01}}{\mu_{10}}$$

Para o estado 1: $\pi_1(\mu_{10} + \mu_{12}) = \pi_0\mu_{01} + \pi_2\mu_{21}$, ou seja,

$$\pi_2 = \frac{\pi_1(\mu_{10} + \mu_{12}) - \pi_0\mu_{01}}{\mu_{21}}$$

Portanto, poderíamos definir π_2 em função de π_0, substituindo $\pi_1 = \frac{\pi_0\mu_{01}}{\mu_{10}}$. Nesse caso, $\pi_2 = \left(\frac{\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}}\right)\pi_0$

Reflita

Agora que aprendemos o que são as equações de balanço e como elas são calculadas nos processos de nascimento e de morte, você acha que podemos expressar a probabilidade do sistema estar no estado n, que chamamos de π_n, podendo ser calculado pela probabilidade no estado 0 (π_0)?

Reflita a indagação.

Dica: como apresentado anteriormente, π_2 poderia ser calculado por meio de π_0 e pelas probabilidades de transição, ficando

$$\pi_2 = \left(\frac{\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}}\right)\pi_0$$

Faça a expansão para o estado n utilizando o mesmo raciocínio, você verá que é possível encontrar as demais probabilidades de modo simples.

Sem medo de errar

Você está atuando em uma empresa do mercado financeiro auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Na empresa em questão, ao final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou, por fim, o preço cai.

Para cada situação descrita anteriormente, existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, uma vez que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Nesse contexto, você como analista poderia afirmar ao seu cliente que para o processo em questão os eventos passados não são relevantes?

Como visto ao longo da seção, uma das formas de lidar com essa situação é a de utilizar o conceito de processos de Markov. Mas por quê? Relembrando, um processo estocástico será considerado como um processo de Markov quando o estado futuro do sistema depender apenas do estado atual (ou presente) e não dos estados anteriores, ou seja, nos processos de Markov dizemos que não existe memória, uma vez que o passado é desprezado.

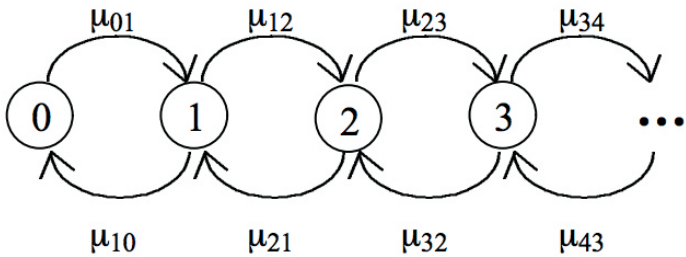
No caso do mercado de ações, como descrito anteriormente, os estados passados não são relevantes, e sim o estado presente (atual), o que indica que o nosso processo não apresenta memória, como visto no processo de Markov.

Outra constatação importante é a da classificação do processo de Markov com relação ao tempo, para definirmos a modelagem a ser utilizada. Nesse caso, ao final de um dia comercial o preço da ação é aferido, ou seja, naquele determinado instante de tempo o preço da ação será aferido, uma vez que o valor da ação sofre inúmeras oscilações durante o dia. Como já evidenciamos, quando a variável de tempo indica o instante de tempo, temos um processo de Markov (ou cadeia de Markov) de tempo contínuo.

O fato de termos um processo de Markov de tempo contínuo nos abre uma nova possibilidade já estudada nessa seção, qual seria

ela? A de ser um processo de nascimento ou de morte. Será que poderíamos caracterizar o nosso processo como sendo um processo de nascimento ou de morte? Para facilitar o nosso raciocínio, vamos observar a Figura 3.3 novamente.

Figura 3.3 | Processos de nascimento e de morte



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 9 nov. 2017.

Imagine que $X = \{0,1,...\}$ seja o estado atual da nossa ação. Esse estado poderia ser representado, numericamente, pelo próprio valor da ação. Nesse caso, só pode ocorrer um aumento ou uma diminuição no valor da ação, alterando o estado do sistema a partir do estado atual, conforme ilustrado na Figura 3.3. Portanto, poderíamos representar nosso problema como um processo de nascimento ou morte, lembrando que nesse caso não são permitidos "pulos" entre os estados.

Agora, para que você tome uma decisão consciente sobre o seu investimento, você precisa de mais uma informação: a probabilidade de transição. Nesse caso, temos uma probabilidade de transição de incremento no valor da ação e uma probabilidade de transição de decréscimo no valor da ação. Com base nessas probabilidades de transição, é possível sabermos a probabilidade de a ação chegar ao estado de maior valor ou ao estado de menor valor.

Nesse caso, utilizaremos as equações de balanço. Com os dados que você pode obter de probabilidade condicional (probabilidade de transição) e probabilidade não-condicional (probabilidade de cada estado), é possível ter uma ideia da chance de perder ou ganhar dinheiro ao investir naquele papel.

Então, se o estado 1 for o valor atual da ação, a probabilidade de o valor cair e ir para o estado vizinho 0: $\pi_0\mu_{01} = \pi_1\mu_{10}$, ou seja, a

probabilidade π_0 pode ser expressa em função da probabilidade π_1 e das probabilidades de transição.

Do mesmo modo, a probabilidade do estado 2, ou seja, valor maior da ação, π_2 é $\pi_2 = \frac{\pi_1(\mu_{10} + \mu_{12}) - \pi_0\mu_{01}}{\mu_{21}}$

Assim, você conseguiu demonstrar para o seu cliente como calcular a probabilidade envolvida no processo de investimento.

Avançando na prática

Gerente de produção e a probabilidade de transição entre estados

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o responsável por uma empresa governamental que fabrica material bélico. Pensando no planejamento estratégico da empresa a longo prazo, você determina que os produtos fabricados terão três destinos principais: I – 30% (0,3) da produção irá para o segmento militar; II – 20% (0,2) da produção será exportada; e III – 50% (0,5) da produção será destinada ao segmento civil. Considerando um planejamento estratégico de 10 anos, estimam-se as probabilidades de transição conforme Tabela 3.3.

Tabela 3.3 | Probabilidade de transição entre estados

	para I	para II	para III
de I	0,8	0,1	0,1
de II	0,1	0,7	0,2
de III	0	0,1	0,9

Fonte: <http://people.csail.mit.edu/psantana/data/files/seminars/Processos_Markovianos_Seminario.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2017.

Seja PI o vetor de probabilidade de estados com $\pi_0 = [0,3 \quad 0,2 \quad 0,5]$ e P dado abaixo, como responsável pela a produção do material bélico, como você conseguiria obter a

participação estimada de cada um dos três segmentos na produção da empresa, considerando um horizonte de tempo de 10 anos?

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Resolução da situação-problema

Inicialmente, você deve considerar que P refere-se à matriz de transição de estados e, a partir dela e de $\pi_0 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$ necessitamos obter o vetor probabilidade de estados para um horizonte de tempo de 10 anos, podendo ser designado por π_1

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,26 & 0,22 & 0,52 \end{bmatrix}$$

Logo, daqui a 10 anos, a participação estimada será de I – 26% para o segmento militar; II – 22% para exportação; e III – 52% para o segmento civil.

Faça valer a pena

1. Em uma hamburgueria gourmet, que apresenta três combos distintos (lanche + acompanhamento + bebida) para venda, o gerente do estabelecimento reparou que a cada semana 50% dos clientes continuam comprando o mesmo produto. Em relação aos clientes que compravam o combo, 1, 20% passam a comprar o combo 2 e 30% o combo 3. Em relação aos clientes que compravam o combo 2, 10% passam a comprar o combo 1 e 40% passam a comprar o combo 3. Por fim, em relação aos clientes que compravam o combo 3, 30% passam a comprar o combo 1 e 20% passam a comprar o combo 2. Podemos notar que é uma cadeia de Markov, pois o estado futuro depende do estado anterior, e que o estado é discreto, pois a quantidade de valores é finita, já que vamos observar uma quantidade finita de clientes. Com base na análise dos 50 clientes que comumente compram os combos da hamburgueria, o gerente viu que, inicialmente, 20 compravam o combo 1, 15 compravam o combo 2, e 15 adquirem o combo 3. Veja a seguir a matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Considerado a matriz P, qual é a quantidade de clientes que compram o combo 1, combo 2 e o combo 3, respectivamente, após uma semana?

a) 34 clientes; 22 clientes; 44 clientes.
b) 22 clientes; 34 clientes; 44 clientes.
c) 39 clientes; 32 clientes; 29 clientes.
d) 30 clientes; 31 clientes; 39 clientes.
e) 32 clientes; 29 clientes; 39 clientes.

2. Um processo estocástico pode ser compreendido como um processo Markoviano caso o seu estado futuro dependa somente do seu estado presente e não dos estados passados. Esse conceito pode ser aplicado ao pensar em uma política de gestão de estoque, na qual a quantidade de produtos dependa somente da quantidade anterior do produto e do que foi adquirido ou vendido em um determinado intervalo de tempo de reposição do produto.

Assinale a alternativa que apresenta o tipo de processo descrito acima.

a) Processo com memória.
b) Processo finito.
c) Processo sem memória.
d) Processo sem passado.
e) Processo sem antecedente.

3. Processo de Markov é um modelo de processo estocástico e, dentre os seus tipos, tem-se a cadeia de Markov discreta no tempo e a cadeia de Markov contínua no tempo. A respeito de processos de Markov, avalie as afirmações I, II e III.

I. O processo de nascimento é um tipo de processo estocástico, sendo um exemplo de cadeia de Markov discreta no tempo.
II. O processo de morte é um tipo de processo estocástico, sendo um exemplo de cadeia de Markov contínua no tempo.
III. Processo Markoviano é considerado uma cadeia de Markov quando as variáveis aleatórias X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E.

Assinale a alternativa correta.

a) Apenas I e III são corretas.
b) Apenas II e III são corretas.
c) I, II e III são corretas.
d) Apenas III é correta.
e) Apenas II é correta.

Seção 3.2

Cadeias de Markov discretas

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior, estudamos o conceito de processos Markovianos, ou seja, processos cujo estado futuro depende somente do seu estado presente e não dos estados passados.

Agora vamos iniciar o estudo sobre cadeias de Markov cujos conceitos estão sendo aplicados nas mais diversas áreas, abrangendo processos de migração populacional, modelos epidêmicos, gerenciamento de recursos, processos de tomada de decisão, modelo para difusão de informação, entre outros. Assim, perceberá a importância desses conteúdos para a sua vida profissional!

Especificamente, neste momento estudaremos as cadeias de Markov discretas e esperamos que você entenda o conceito de cadeia de Markov em tempo discreto, além de todo os fundamentos vinculados a essa temática.

Assim, vamos compreender a definição e a aplicação de cadeia de Markov discreta, probabilidade de transição de ordem superior, classificação de estados e cadeias de Markov absorventes.

Logo, pense que você está atuando em uma empresa do mercado financeiro e auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Na empresa em questão, ao final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou o preço cai.

Para cada situação descrita, existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, já que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Os clientes têm uma dúvida recorrente e necessitam da sua ajuda: hoje uma ação comprada fechou em queda; logo, qual a probabilidade de ela se valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro?

Pense a respeito dessa indagação e considere que seu gestor lhe solicitou um parecer a fim de transmitir essas informações aos clientes.

Bons estudos! Vamos avançar na construção do seu conhecimento em processos estocásticos.

Não pode faltar

Prezado aluno, como já compreendemos a definição sobre os processos Markovianos, vamos aprofundar nossos conhecimentos nas cadeias de Markov discretas.

Em primeiro lugar, vale relembrar que um processo Markoviano é considerado uma cadeia de Markov quando o estado é discreto, ou seja, quando as variáveis aleatórias X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E.

Também vale ressaltar que abordaremos nesta seção as cadeias de Markov em tempo discreto. Como visto anteriormente, uma cadeia de Markov em tempo discreto é um processo de Markov no qual afirma-seque o espaço de estados se refere a um determinado conjunto finito ou contável, cujo índice temporal do conjunto pode ser designado por T = 0, 1, 2, ..., ou seja, as transições ocorrem em períodos de tempo.

Para ficar mais claro, vamos analisar um exemplo clássico de cadeia de Markov: problema simplificado da ruína do jogador.

Suponha que um jogador decidiu fazer uma aposta. Existe uma probabilidade maior de o jogador perder a aposta do que de ganhar, de modo que a probabilidade de ganhar é de 30%, enquanto a probabilidade de perder é o seu complementar, 70%. Para cada aposta, em caso de ganho, o jogador leva R$ 10, mas se perder, deve desembolsar os mesmos R$ 10. Existem duas possibilidades de o jogador parar de jogar: caso acumule R$ 100 reais ou caso não tenha mais dinheiro para apostar. Será que esse é um exemplo de cadeia de Markov de tempo discreto?

Para responder ao questionamento anterior, em primeiro lugar precisamos levar em conta a característica fundamental (propriedade) de um processo de Markov: não existe memória, ou seja, o estado futuro depende apenas do estado atual, não levando em conta os estados passados. Nesse exemplo da aposta, se X_n representa o dinheiro acumulado após n apostas, para saber o valor que o jogador terá na próxima aposta é só saber o valor atual. Ou seja, para prever o estado posterior X_{n+1} é necessário saber apenas o valor presente X_n, desconsiderando-se os estados passados. Se o jogador vencer a aposta $n+1$, então o estado $X_{n+1} = X_n + 10$. Se perder, o estado $X_{n+1} = X_n - 10$ (ALVES e DELGADO, 1997).

Portanto, já sabemos que o exemplo clássico da ruína do jogador trata-se de uma cadeia de Markov, pois atende às definições apresentadas anteriormente.

Porém o que nos garante que se trata de uma cadeia de Markov de tempo discreto? Para responder ao segundo questionamento proposto, vamos analisar a nossa cadeia com relação ao tempo.

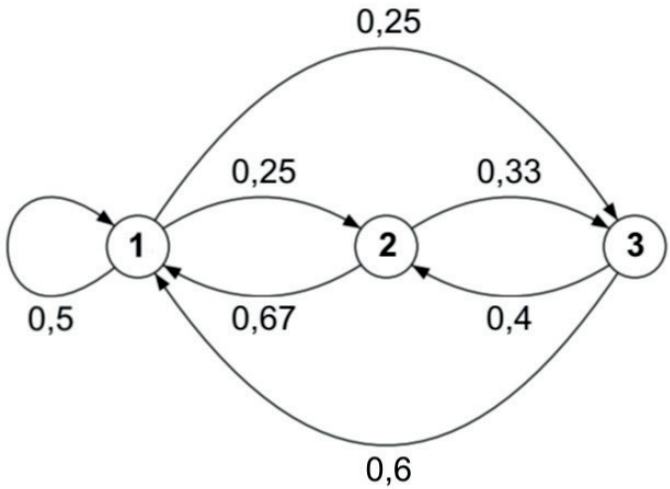
Nesse caso, vamos considerar que em cada intervalo de tempo é feita uma aposta, que definimos por n. Desse modo, nossa cadeia de Markov, para o problema do jogador, apresenta tempo discreto associado a cada aposta.

Agora, vamos explorar um potencial problema de sua realidade profissional: suponha que você trabalhe em uma fábrica de carros conceituais (veículos experimentais que são apresentados ao público), como gerente de produção. Os veículos são feitos de modo artesanal, de modo que, com o passar das gerações dos carros, observou-se que é produzido apenas um veículo por vez. A classe de inovações de cada geração de carros pode ser definida como alta (veículo totalmente inovador), média (veículo parcialmente inovador, com algum incremento na tecnologia, por exemplo) ou baixa (poucas alterações na concepção e na tecnologia). Como gerente de produção, para cada geração de carros é possível que você descreva sua evolução tecnológica ao longo do tempo.

Assim, se você pensar em uma montadora composta por diversas gerações de carros, podemos escolher totalmente ao acaso uma geração, que denotaremos por n, e associada a ela teremos X_n, que representa o nível de inovações, sendo 1 alta, 2 média e 3 baixa. Portanto, X_n será uma variável aleatória e a sua evolução no tempo

lhe permitirá concluir se os carros estão ficando mais tecnológicos, conforme demonstrado na Figura 3.4.

Figura 3.4 | Diagrama de estados da fábrica de carros



Fonte: adaptada de: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Retomando o conceito de matriz de probabilidade de transição, poderemos ter uma matriz P que indique a transição entre os estados anteriores (1, 2 e 3).

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,67 & 0 & 0,33 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de que os carros de uma geração de alta tecnologia (estado 1) permaneçam nesse estado é de 0,5 ou 50%. Porém e se você quiser saber a chance da sexta geração de carros ter baixo nível de inovação (estado 3), tal que a quarta geração tenha nível médio de inovação (estado 2)? Ou seja, passar do estado 2 para o estado 3 em dois passos?

Para isso utilizaremos o conceito de probabilidade de transição de ordem superior, ou de matriz de transição de ordem superior. Obteremos a matriz de transição de ordem superior ao multiplicar a matriz de transição P por ela mesma. Em alguns casos, isso faz

com que após certa ordem as probabilidades se aproximem.

Retomando nosso exemplo, vamos encontrar primeiro P^2.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,57 & 0,22 & 0,21 \\ 0,53 & 0,3 & 0,17 \\ 0,57 & 0,15 & 0,28 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade da sexta geração de carros ter baixo nível de inovação (estado 3), tal que a quarta geração tenha nível médio de inovação (estado 2) é de 0,17 ou 17%. Como gerente de produção, isso lhe permite analisar tendências por meio da aplicação do conceito de matriz de transição de ordem superior.

Pesquise mais

Caro aluno, que tal expandirmos nossos conhecimentos sobre as matrizes de transição de ordem superior, bem como analisar outras aplicações?

O texto *Introdução aos Processos Estocásticos com Aplicações* de Adrian Hinojosa e Aniura Milanés nos traz diferentes aplicações, bem como outros aprofundamentos.Leia a partir da página 33 à 38, no link a seguir:

HINOJOSA, A.; MILANES, A. **Uma introdução aos processos estocásticos com aplicações.** UFMG, Minas Gerais, 2013. Disponível em:<http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Esclarecido o conceito de cadeia de Markov de tempo discreto, vamos entender melhor a classificação de estados. Uma cadeia de Markov é definida em função de estados, de modo que o estado futuro depende apenas do estado atual. O caminho percorrido de um dado estado qualquer i para um outro estado j é composto por uma sequência de transições, que já sabemos que têm probabilidades associadas (KARLIN e TAYLOR, 1998).

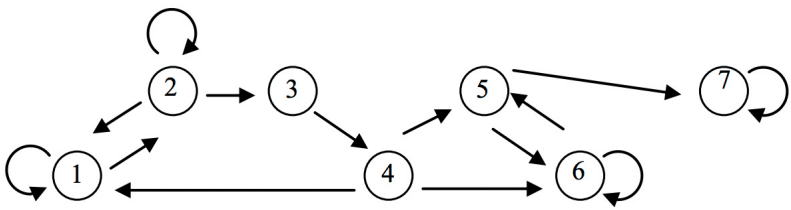
É importante destacar que não existe um limite de transições que podem ocorrer para o sistema passar do estado i para o estado j, e o caminho também não precisa ser o mais curto, ou seja, ter o menor número de transições entre os dois estados. Contudo, é

relevante mencionar que o estado j somente poderá ser atingido a partir de i caso exista um caminho entre eles.

Portanto, em primeiro lugar, considera-se que dois estados são comunicantes quando há a seguinte condição: o estado j é atingível a partir de i, e i também deve ser atingível a partir do estado j (KARLIN e TAYLOR, 1998).

A partir dessa classificação inicial, podemos dizer que a cadeia de Markov será irredutível se, e somente se todos os estados que formam a cadeia forem comunicantes. Caso isso não possa ser garantido, dizemos que a cadeia de Markov é redutível. A Figura 3.5 apresenta um exemplo de diagrama de estado, vamos analisá-lo.

Figura 3.5 | Exemplo de diagrama de estado



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.661335001390983227.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

De acordo com a definição de cadeia de Markov irredutível, podemos dizer que o diagrama da Figura 3.5 representa uma cadeia redutível, já que nem todos os estados são comunicantes como, por exemplo, o estado 7. Temos uma transição do estado 5 para o estado 7, ou seja, a partir do estado 5 é possível atingir o estado 7. No entanto, a recíproca não é verdadeira, pois não existe transição do estado 7 para o estado 5, o que significa que os estados 5 e 7 não são comunicantes. O mesmo vale, por exemplo, para o estado 6; temos transições dos estados 4 e 5 para o estado 6, no entanto, a recíproca para o estado 4 não existe, pois não é possível atingir o estado 4 a partir do estado 6, de modo que os estados 4 e 6 não são comunicantes.

Constatamos, assim, que uma cadeia de Markov será irredutível se e somente se todos os estados forem comunicantes, o que não ocorre no diagrama da Figura 3.5. Logo, a cadeia apresentada é redutível (Alves; Delgado, 1997).

Vale dizer que a classificação de estados também pode ser definida como transiente ou recorrente. Nós dizemos que um estado será transiente sempre que existir um estado j que possa ser atingido a partir de i, mas o oposto não é obrigatoriamente válido, ou seja, i ser atingível por j (KALIN e TAYLOR, 1998).

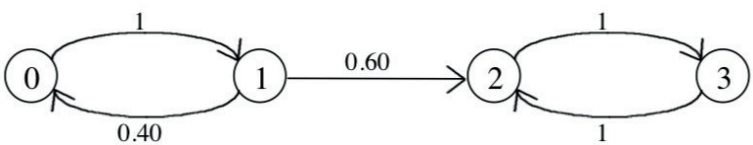
Portanto, podemos dizer que após entrar no estado transiente, há a probabilidade de que o processo nunca mais retorne a esse estado outra vez.

E o estado recorrente? Diferentemente do estado transiente, nesse caso sempre será possível regressar ao estado i a partir de j. Em outras palavras, quando o sistema entra no estado recorrente, ele com certeza retornará a esse estado novamente (ALVERS e DELGADO, 1997).

Assimile

Para ficar mais claro a diferença entre um estado recorrente e um estado transiente, vamos analisar a Figura 3.6.

Figura 3.6 | Diagrama de estado transiente e recorrente



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

O que podemos observar na Figura 3.6?

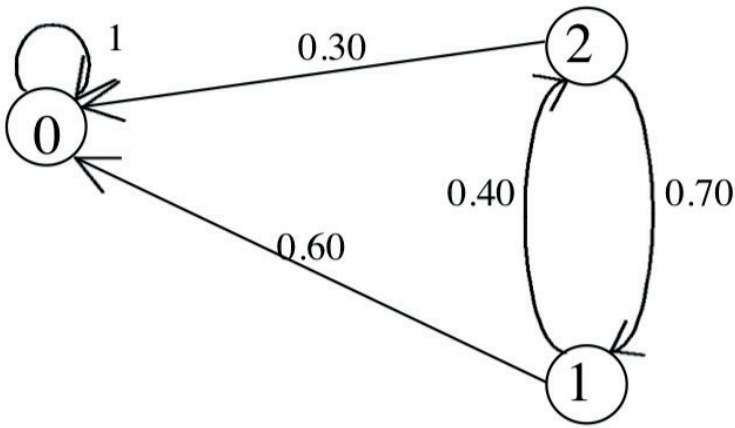
Os estados 0 e 1 são considerados transientes, pois, uma vez que o sistema visita o estado 0, existe uma probabilidade real (que nesse caso é 1, ou 100%) de se deslocar para o estado 1, mas dificilmente retornará para o estado 0 (probabilidade de 0,4, ou 40%); portanto, o estado 0 será visitado finitas vezes.

Já os estados 2 e 3 são considerados recorrentes, pois, uma vez que o sistema visita o estado 2, existe uma probabilidade real (que nesse caso é 1, ou 100%) de se deslocar para o estado 3 e retornar para o estado 2 (probabilidade 1, ou 100%); portanto, o estado 2 será visitado infinitas vezes.

Percebe-se pela Figura 3.6 que existe uma probabilidade de 0,6, partindo-se do estado 1 para o estado 2; não retornará mais para o estado 1.

Há uma outra possibilidade: a do estado absorvente. Trata-se de um estado que ao ser visitado, fará com que o sistema jamais o deixe novamente (ALVERS e DELGADO, 1997). A Figura 3.7 apresenta um exemplo de estado absorvente.

Figura 3.7 | Diagrama de estado absorvente



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Observamos na Figura 3.7, que o estado 0 apresenta probabilidade 1 (ou 100%) de que ao ser visitado, nunca mais sairá desse estado. Como o estado 0 trata-se de um estado que ao ser visitado fará com que o sistema jamais o deixe novamente, trata-se um estado absorvente (ALVERS; DELGADO, 1997).

Nas cadeias de Markov com estados absorventes, que chamaremos simplesmente de cadeias de Markov absorventes, como a exemplificada na Figura 3.7, qualquer estado que esteja ligado ao estado absorvente é um estado transiente. No caso da Figura 3.7, os estados 1 e 2 são transientes.

Então, qual é o interesse prático desse tipo especial de cadeias de Markov? Para responder ao questionamento, observaremos o que ocorre em uma cadeia de Markov absorvente e, a seguir analisaremos um exemplo.

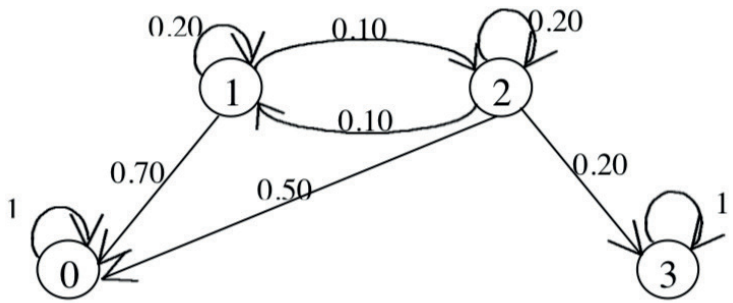
Imagine que com o decorrer do tempo, ou seja, quando o tempo tender a infinito, a probabilidade de que um sistema (como o sistema de estoque), cuja modelagem segue uma cadeia de Markov absorvente, esteja em um estado transiente é praticamente nula, o que faz com que, a longo prazo, nosso sistema esteja no estado

absorvente. A probabilidade de o sistema ir para o estado absorvente é chamada de probabilidade estacionária de absorção, sendo essa a probabilidade que nos interessa, conforme pode ser constatado no box exemplificando.

Exemplificando

Suponha que você trabalhe em uma fábrica que produz pequenas peças para a indústria automobilística, e a sua tarefa é cuidar do estoque da fábrica. Considere, assim, o diagrama de transições disposto na Figura 3.8, que representa o nível de estoque de uma determinada peça na empresa em questão.

Figura 3.8 | Diagrama de estados



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Considere, então, que o estado 0 representa o estoque elevado do produto em questão; o estado 1 mostra o estoque justo com a demanda; o estado 2, por sua vez, indica estoque baixo; e o estado 3 representa o estoque zero sem chance de reabastecimento (produto fora de linha). Logo, considere que cada seta do diagrama indica a mudança de estado e a probabilidade associada.

Todo mês, como responsável do estoque, você verifica os níveis de estoque, para que sejam feitas reposições quando necessárias.

Logo, suponha que em uma das verificações você observou que o estoque chegou ao estado 3. Repare que o estado 3 é absorvente, ou seja, ao chegar ao estado 3 o sistema jamais deixará o estado novamente, pois o estoque do produto zerou e ele saiu de linha, uma vez que não há chances de reabastecimento.

Assim, você pode dizer que o sistema de estoque desse produto atingiu um estado absorvente, de modo que não sairá mais desse estado.

Reflita

Conforme visto no item *Exemplificando*, a probabilidade de o sistema de estoque ir para o estado absorvente é chamada de probabilidade estacionária de absorção.

O que você acha que essa probabilidade significaria para o exemplo proposto?

Sem medo de errar

Caro aluno, vamos retomar o caso em que você está atuando em uma empresa do mercado financeiro, e auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Os clientes têm uma dúvida recorrente e necessitam da sua ajuda: hoje uma ação comprada fechou em queda; logo, qual é a probabilidade de ela se valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro?

Utilizando o conceito de transição de estados e de probabilidade de transição de estados, é possível fazer a avaliação proposta anteriormente, vamos lá?

Matriz de transição de ordem superior

O primeiro passo é definir os estados:

- Estado 0: ação desvalorizada
- Estado 1: ação valorizada

Portanto, podemos ter quatro hipóteses de transição, a saber:

P_{00} é a probabilidade da ação estar no estado 0 e continuar no estado 0

P_{01} é a probabilidade da ação estar no estado 0 e ir para o estado 1

P_{10} é a probabilidade da ação estar no estado 1 e ir para o estado 0

P_{11} é a probabilidade da ação estar no estado 1 e continuar no estado 1

A matriz de transição para cada dia futuro é a matriz P

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

Por meio da matriz de transição P é possível, utilizando o conceito de matriz de transição de ordem superior, calcular a probabilidade de a ação ser valorizada no próximo dia e se estabilizar no futuro.

A probabilidade de a ação ser valorizada no próximo dia será P_{01}, mas a probabilidade da ação se estabilizar no futuro só ocorrerá se ela mantiver a sua valorização constantemente, portanto, a ação é valorizada no próximo dia (estado 1) e continua se valorizando nos demais dias.

Para cada dia futuro, multiplica-se a matriz P por ela mesma para descobrir a probabilidade futura. No entanto, em alguns casos, isso faz com que após certa ordem as probabilidades se aproximem.

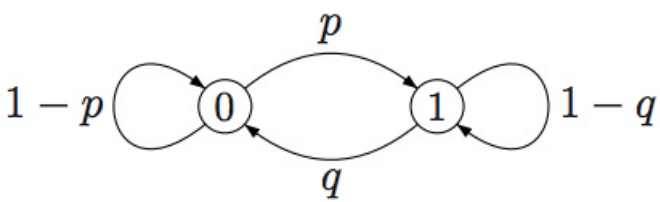
Desse modo, a matriz ficaria:

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

A probabilidade, é portanto, para P^n dias, de modo que n é o número de dias a partir do dia atual, definindo a matriz de transição de ordem n.

Logo, tem-se a probabilidade da ação se estabilizar no futuro, ou seja, se valorizar no próximo dia (estado 1) e continuar se valorizando nos demais dias, conforme apresentado no diagrama de estados da Figura 3.9.

Figura 3.9 | Diagrama de estados



<http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Avançando na prática

Profissional de RH e o estudo de ascensão de cargos

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja um gestor de recursos humanos (RH) e que lhe foi solicitado o estudo a probabilidade de ascensão profissional das pessoas em função das oscilações no mercado de trabalho. Assim, você considerou a existência de 2 estados (estado 0 – função técnica; estado 1 – função gerencial), e obteve a matriz P de transição de estados de acordo com as oscilações de mercado.

Qual é a chance de o sétimo emprego de um funcionário ser de função gerencial tal que na sua quarta posição de mercado, que é o estado atual, ele tenha função técnica?

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Resolução da situação-problema

Pela matriz P, observamos que a probabilidade de o funcionário de cargo técnico (estado 0) permanecer nesse estado é de 0,5 ou 50%. Enquanto a probabilidade de o funcionário de cargo técnico (estado 0) passar ao cargo gerencial é de 0,5 ou 50%.

Já para o funcionário de cargo gerencial (estado 1), a probabilidade de ele se manter no cargo é 0,7 ou 70%. Enquanto a probabilidade de o funcionário de cargo gerencial (estado 0) voltar para o cargo técnico é de 0,3 ou 30%.

Mas agora você quer encontrar a probabilidade de o funcionário técnico (estado 0) passar para uma função gerencial (estado 1) em três passos, isto é, do seu quarto emprego para o seu sétimo emprego.

Para isso utilizaremos o conceito de probabilidade de transição de ordem superior, ou de matriz de transição de ordem superior. Obteremos a matriz de transição de ordem superior ao elevarmos a matriz de transição P ao cubo.

Logo, vamos encontrar primeiro P^3.

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,62 \\ 0,372 & 0,628 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de o funcionário em seu sétimo emprego ter função gerencial (estado 1), tal que em seu quarto emprego ele tenha função técnica (estado 0) é de 0,63 ou 63%.

Parabéns, mais uma etapa cumprida!

Faça valer a pena

1. Uma cadeia de Markov é definida em função de estados, de modo que o estado futuro depende apenas do estado atual. O caminho percorrido de um dado estado qualquer i para um outro estado j é composto por uma sequência de transições com probabilidades associadas. Afirma-se que dois estados são comunicantes quando o estado j é atingível a partir de i e i também deve ser atingível a partir do estado j.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o tipo de cadeia de Markov quando todos os estados que formam a cadeia forem comunicantes.

a) Irredutível.
b) Redutível.
c) Absorvida.
d) Transitória.
e) Randômica.

2. Suponha que você seja um gestor de marketing e que lhe foi solicitado o estudo da probabilidade de liderança de mercado da empresa ABC, montadora de automóveis, em função das oscilações no mercado automobilístico. Assim, você considerou a existência de 2 estados (estado 0 – não lider; estado 1 – lider), e obteve a matriz P de transição de estados de acordo com as oscilações do mercado automobilístico.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Qual é a chance de a empresa ABC, em seu vigésimo ano de existência no mercado, ser uma empresa líder, tal que no seu décimo oitavo ano de mercado, que é o estado atual, ela não seja líder de mercado?

a) 18%.
b) 20%.
c) 50%.
d) 40%.
e) 60%.

3. Em uma cadeia de Markov, o caminho percorrido de um dado estado qualquer i para um outro estado j é composto por uma sequência de transições. Não existe um limite de transições que podem ocorrer para que o sistema passe do estado i para o estado j, e o caminho também não precisa ser o mais curto, ou seja, ter o menor número de transições entre os dois estados.
Faça a associação entre os tipos de estados (I, II e III) da cadeia de Markov e suas respectivas definições (A, B e C).

I – Transiente
II – Absorvente
III – Recorrente

A - Sempre será possível o sistema regressar ao estado i a partir de j, isto é, quando o sistema entra nesse tipo de estado, com certeza retornará a esse estado novamente.

B - Sempre existe um estado j que possa ser atingido a partir de i, mas o oposto não é obrigatoriamente válido, ou seja, i ser atingível por j.

C - Trata-se de um estado que ao ser visitado fará com que o sistema jamais o deixe novamente.

Assinale a alternativa que expressa corretamente a associação entre os tipos de estados (I, II e III) da cadeia de Markov e suas repectivas definições (A, B e C).

a I-A; II-C; III-B.
b) I-B; II-C; III-A.
c) I-C; II-B; III-A.
d) I-B; II-A; III-C.
e) I-A; II-B; III-C.

Seção 3.3

Cadeias de Markov contínuas

Diálogo aberto

Caro aluno, uma vez estudado o conceito de processos de Markov e cadeias de Markov discretas, agora seguiremos o estudo com cadeias de Markov contínuas no tempo.

Neste momento, vamos estudar as cadeias de Markov contínuas, englobando conceitos correlatos, como probabilidade de regime permanente e processos de Poisson associados aos conceitos de Markov.

Além disso, serão exploradas aplicações da cadeia de Markov contínua em conjunto com a teoria para que você possa se situar e vislumbrar o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Lembre-se de que os conceitos de cadeias de Markov estão sendo aplicados nas mais diversas áreas, abrangendo processos de migração populacional, modelos epidêmicos, gerenciamento de recursos, processos de tomada de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros. Assim, perceba a importância desses conteúdos para a sua vida profissional!

Logo, vamos retomar o contexto em que você se encontra. Está atuando em uma empresa do mercado financeiro, e auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com competências para análise de risco.

Na empresa em questão, ao final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou o preço cai.

Para cada situação descrita, existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, já que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter

condições de passar para o seu cliente uma probabilidade de lucro?

Pense a respeito dessa indagação e considere que seu gestor lhe solicitou um parecer a fim de transmitir essas informações aos clientes.

Bons estudos! Vamos avançar na construção do seu conhecimento em processos estocásticos.

Não pode faltar

Prezado aluno, com uma definição mais clara dos processos Markovianos e cadeias de Markov discretas no tempo, vamos aprofundar nossos conhecimentos nas cadeias de Markov contínuas.

Em primeiro lugar, vale relembrar que um processo Markoviano é considerado uma cadeia de Markov quando o estado é discreto, ou seja, quando as variáveis aleatórias X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E.

As cadeias de Markov em tempo contínuo podem ser descritas de modo semelhante àquela em tempo discreto, divergindo-se no fato de que as transições podem ocorrer em qualquer instante de tempo (KARLIN e TAYLOR, 1998).

De acordo com Alves e Delgado (1997), nas cadeias de Markov em tempo contínuo é importante considerar o tempo em que o processo permanece em cada estado, diferentemente da cadeia de Markov em tempo discreto. Esse tempo é aleatório, podendo ser representado por τ_i, ou seja, o tempo que o processo permanece no estado i.

Portanto, para que uma cadeia de Markov de tempo contínuo esteja completamente definida, precisamos conhecer os estados que compõem o espaço de estados discreto E, o parâmetro que representa a distribuição de cada variável τ_i, que definiremos como ϑ_i, e as probabilidades de transição para outro estado j, que já conhecemos e podemos denotar como P_{ij}.

A variável ϑ_i, de acordo com Alves e Delgado (1997), é o número esperado de vezes em que o processo sairá do estado i pela unidade de tempo que ele permaneceu no estado i.

Exemplificando

Suponha que você seja o engenheiro de uma indústria de peças automotivas. Em uma das linhas de produção existe um recurso físico (por exemplo, um dispositivo) que é responsável pela montagem de duas peças iguais, formando uma peça única.

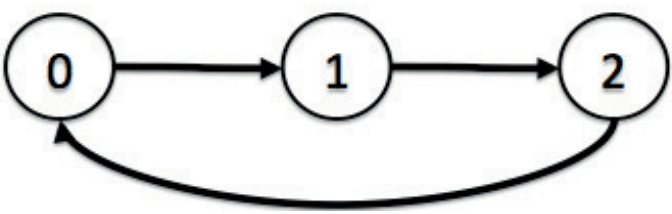
O tempo entre duas chegadas consecutivas de peças no recurso ocorre por meio de uma distribuição exponencial com média de 30 minutos, ou seja, duas peças chegam ao recurso a cada 30 minutos. Como seria a modelagem desse sistema utilizando uma cadeia de Markov?

O primeiro passo é fazerum diagrama de estados que represente o nosso sistema, tendo como base os possíveis estados em que nosso recurso poderá ser encontrado:

- Estado 0: nenhuma peça no recurso
- Estado 1: uma peça no recurso
- Estado 2: duas peças no recurso

Ou seja, a princípio, o recurso encontra-se vazio, chega a primeira peça, em seguida a segunda, e, então ocorre a montagem e o recurso libera uma peça única montada, retornando ao estado vazio, conforme evidencia a Figura 3.10.

Figura 3.10 | Diagrama de estados do problema em estudo

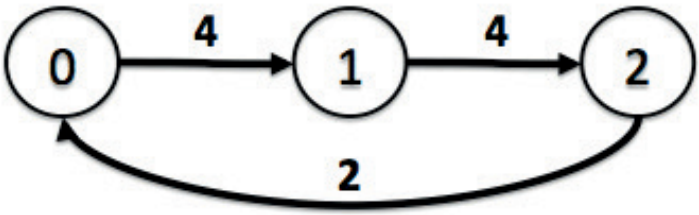


Fonte: elaborada pelo autor.

Com relação ao tempo entre as chegadas, sabe-se que o tempo entre duas chegadas no recurso é de 30 minutos, portanto, por hora chegam 4 peças no recurso ($\vartheta_{chegada} = 4$ peças por hora). Como a montagem envolve o uso de duas peças para produção da peça única, a taxa de saída é a metade da taxa de entrada, ou seja, $\vartheta_{saída} = 2$ peças por hora.

Portanto, o diagrama de estados com os valores de $\vartheta_{chegada}$ e $\vartheta_{saída}$ ficaria conforme apresenta a Figura 3.11.

Figura 3.11 | Diagrama de estados com a taxa de chegadas e de saídas



Fonte: elaborada pelo autor.

É importante destacar que nas cadeias de Markov de tempo contínuo aplica-se o conceito de probabilidade de regime permanente, ou seja, conforme o tempo tende ao infinito, nos interessa saber as probabilidades estacionárias de o sistema estar em diferentes estados.

O que são probabilidades estacionárias?

De acordo com Alves e Delgado (1997), nas situações descritas, ou seja, quando o tempo tende ao infinito, a probabilidade de um dado processo estar em um estado qualquer j é constante e independe do estado inicial i.

Portanto, quando o tempo tende ao infinito, a relação abaixo é verdadeira:

$$P_{ij}^{(n+1)} \approx P_{ij}^{(n)} \approx \pi_j$$

Teremos π_j como nosso vetor linha de probabilidade, que chamaremos de probabilidade estacionária do estado j. Algo semelhante fora apresentado quando tratamos da probabilidade de ordem superior e, como pudemos evidenciar, com o passar das repetições, a probabilidade de estar em um estado seria igual à probabilidade de transição para o mesmo estado.

As equações de balanço, apresentadas e utilizadas anteriormente nos ajudam a calcular as probabilidades estacionárias π_j, de modo que em uma situação de equilíbrio a taxa média de saída de um

estado é igual à taxa média de entrada no mesmo estado. Alves e Delgado (1997) demonstram esse fenômeno por meio da equação 3.1

$\mu_j \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_j \mu_{ij}$ (Equação 3.1)

No nosso caso em especial, estamos considerando $\mu_j = \vartheta_j$, resultando na equação 3.2:

$\vartheta_j \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_j \vartheta_{ij}$ (Equação 3.2)

Portanto, para avançar um no exemplo abordado no item *Exemplificando* e saber as probabilidades de cada estado, é necessário utilizar as equações de balanço, conforme visto anteriormente, de modo que:

Probabilidade do estado 0: π_0

Probabilidade no estado 1: π_1

Probabilidade no estado 2: π_2

A matriz com as taxas de transição é:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo ϑ a taxa a ser utilizada, então teremos:

Para o estado 0:

$$\vartheta_0 \pi_0 = \sum_{i \neq j} \pi_i \vartheta_{i0} = \pi_1 \vartheta_{10} + \pi_2 \vartheta_{20} \therefore \pi_0 = \frac{\pi_1 \vartheta_{10} + \pi_2 \vartheta_{20}}{\vartheta_0}$$

$$\pi_0 = \frac{0 + 2\pi_2}{4} \therefore \pi_0 = 0{,}5\pi_2$$

Para o estado 1:

$$\vartheta_1 \pi_1 = \sum_{i \neq j} \pi_i \vartheta_{i1} = \pi_0 \vartheta_{01} + \pi_2 \vartheta_{21} \therefore \pi_1 = \frac{\pi_0 \vartheta_{01} + \pi_2 \vartheta_{21}}{\vartheta_1}$$

$$\pi_1 = \frac{4\pi_0 + 0}{4} \therefore \pi_1 = \pi_0$$

Para o estado 2:

$$\vartheta_2 \pi_2 = \sum_{i \neq j} \pi_i \vartheta_{i2} = \pi_0 \vartheta_{02} + \pi_2 \vartheta_{12} \therefore \pi_2 = \frac{\pi_0 \vartheta_{02} + \pi_1 \vartheta_{12}}{\vartheta_2}$$

$$\pi_2 = \frac{0 + 4\pi_1}{2} \therefore \pi_2 = 2\pi_1$$

Sabendo também que:

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Resolvendo o sistema anterior, podemos inferir que:

$$\pi_0 = 0{,}25 = 25\%$$
$$\pi_1 = 0{,}25 = 25\%$$
$$\pi_2 = 0{,}50 = 50\%$$

De posse das informações anteriores, podemos dizer que o recurso fica 25% do tempo vazio, 25% do tempo com apenas 1 peça e 50% do tempo com 2 peças executando a montagem.

Pesquise mais

Você sabia que existem diversas aplicações possíveis para modelagem utilizando cadeias de Markov? Você está estudando alguns exemplos, porém,vamos expandir um pouco as possibilidades de aplicações em áreas que não seja a engenharia, mas que também envolvam a tomada de decisões.

Como sugestão de leitura tem-se o artigo *Modelos de Markov aplicados a saúde*, de Renato Cesar Sato e Désirée Moraes Zouain, que apresentam como exemplo a aplicação na área de saúde, mais precisamente na avaliação do estado dos pacientes.

SATO, R. C.; ZOUAIN, D. M. Modelos de Markov aplicados a saúde. **Einstein**, v. 8, n. 1, p. 376-379, 2010. Disponível em: <http://apps.einstein.br/revista/arquivos/PDF/1567-Einsteinv8n3_pg376-9.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2017.

Agora que já sabemos o que é uma cadeia de Markov de tempo contínuo, podemos inferir que um processo de Poissoné um tipo de cadeia de Markov de tempo contínuo. Vamos entender melhor essa questão.

Em primeiro lugar, vamos relembrar brevemente o que é um processo de Poisson e suas principais características. Os processos de Poisson são processos estocásticos contínuos no tempo, também conhecido como processo de contagem de chegadas, ou seja, descreve a ocorrência de eventos ao longo do tempo. A equação 3.3 descreve o processo de Poisson:

$$p(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} \quad \text{(Equação 3.3)}$$

Assim, $p(v)$ é a probabilidade de v contagens no intervalo definido, e a base do logaritmo natural $(e = 2{,}71828...)$ e μ a taxa média. A taxa média μ é o número esperado de eventos ocorrendo no período de tempo t.

É importante mencionar que os processos de Poisson não têm memória, uma vez que os incrementos são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídos).

Vamos entender agora o conceito de superposição de processos de Poisson. Considerando-se os processos de Poisson independentes $X(t)$ e $Y(t)$, com taxas α_x e α_y, o processo de Poisson $Z(t)$ apresentará taxa $\alpha_z = \alpha_x + \alpha_y$, caso $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Essa taxa α é a taxa média μ dividida pelo período t, ou seja, $\alpha = \frac{\mu}{t}$.

Já a decomposição de processos de Poisson ocorre de modo análogo. Se X é um processo de Poisson, então os processos Y e Z serão processos de Poisson caso a separação seja probabilística e independente. Ficou confuso? Vamos entender melhor.

Considerando-se que t_n seja o instante de tempo do enésimo evento de um processo de Poisson $X(t)$ com $0 \leq t$ e taxa α_x, e sabendo-se que o número de sucessos até o instante t seja $W(t)$, dizemos que o número de fracassos até o instante t será $V(t)$, de modo que $V(t) = X(t) - W(t)$.

De acordo com Andrade e Cobre (2004), em um processo de Bernoulli a probabilidade de sucesso do enésimo evento é ρ e a probabilidade de fracasso do enésimo elemento é o seu complementar, $1 - \rho$, para qualquer $n = 1,2...$, podemos então decompor o processo de Poisson da seguinte forma: $\alpha_x(\rho - 1)$ Os processos $W(t)$ e $V(t)$, número de sucessos e de fracassos até t,

são processos de Poisson com respectivas taxas $\alpha_x(\rho)$ e $\alpha_x(\rho-1)$.

Perceba que os exemplos de processos de Poisson, inclusive exemplos práticos e de abordagem numérica, já foram desenvolvidos na Seção 2.3. Logo, neste momento, caro aluno, a intenção é que você compreenda que o processo de Poisson segue os preceitos de uma cadeia de Markov contínua no tempo.

Assimile

Ainda que esclareciso o conceito de cadeia de Markov de tempo contínuo, vamos fixar algumas informações principais:

- Uma cadeia de Markov de tempo contínuo é completamente definida quando conhecemos o espaço de estados discreto E, o parâmetro ϑ_i que representa a distribuição de cada variável π_i e as probabilidades de transição para outro estado P_{ij}.

- Quando o tempo tende ao infinito, a probabilidade de um dado processo estar em um estado qualquer j é constante e independe do estado inicial i.

- Os processos de Poisson seguem os mesmos preceitos da cadeia de Markov de tempo contínuo, de modo que eles podem passar por decomposição ou superposição.

Como observamos anteriormente, uma das aplicações das cadeias de Markov de tempo contínuo são os processos de nascimento e morte. Um exemplo de um processo de nascimento e morte é a quantidade de habitantes em uma cidade, de modo que as taxas de nascimento e morte são as taxas de transição de estados.

Vamos analisar outra aplicação de cadeias de Markov.

Hillier e Lieberman (2013) apresentam outra possibilidade de aplicação das cadeias de Markov de tempo contínuo, para exemplificação.

Suponha, então, que você seja gerente de uma fábrica que tem duas máquinas iguais e que funcionam continuamente, menos quando estão quebradas. Como funcionam de modo ininterrupto, a frequência de quebras é alta, o que faz com que um funcionário da manutenção seja alocado prioritariamente para efetuar os reparos necessários.

O tempo de reparo segue uma distribuição exponencial com

média de 12 horas. O tempo de funcionamento da máquina, após reparo, também tem distribuição exponencial com média de 24 horas, sendo essa distribuição independente do reparo.

Se a variável aleatória representa o número de máquinas quebradas em um instante de tempo, os possíveis estados são 0, 1 e 2:

- Estado 0: nenhuma máquina quebrada naquele instante de tempo.
- Estado 1: uma máquina quebrada naquele instante de tempo.
- Estado 2: duas máquinas quebradas naquele instante de tempo.

Nesse caso, teríamos uma cadeia de Markov de tempo contínuo, uma vez que nosso processo não apresenta memória e o tempo contínuo forneceria a evolução na quantidade de máquinas quebradas, com distribuição exponencial.

Portanto, por meio das aplicações abordadas nessa seção, podemos abstrair e modelar outros diversos sistemas produtivos que seguem as mesmas características apresentadas.

Reflita

Agora que conhecemos os conceitos de cadeias de Markov de tempo discreto e de tempo contínuo, bem como algumas aplicações, também verificamos que os processos de Poisson seguem os preceitos de uma cadeia de Markov de tempo contínuo.

Portanto, agora vale uma reflexão: quando estudamos os processos de Bernoulli, verificamos que se tratavam de processos estocásticos de tempo discreto. Inclusive, levamos em conta o conceito de processo de Bernoulli quando abordamos a decomposição de processos de Poisson.

Em breve, você será um profissional das ciências exatas, assim, contará com as ferramentas estudadas para a resolução de problemas e para a tomada de decisões. Quais são as informações que você precisaria coletar na prática para modelar um sistema utilizando o conceito de cadeias de Markov?

Sem medo de errar

Retomando o contexto em que você está atuando em uma empresa do mercado financeiro e auxiliando nas decisões de compra e venda de ações dos clientes, uma vez que você conta com

competências para análise de risco, no final de um dia comercial, o preço de determinada ação é aferido e podem ocorrer três situações, tendo como base o dia comercial anterior: o preço da ação se mantém constante; o preço sobe; ou o preço cai.

Para cada situação descrita existe uma probabilidade de ocorrência associada, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer sérios prejuízos para a empresa, já que os clientes esperam ter lucro em seus investimentos.

Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter condições de transmitir ao seu cliente uma probabilidade de lucro?

Vamos lá! Já resolvemos parte desse problema anteriormente, quando falamos sobre cadeias de Markov em tempo discreto. Vamos relembrar brevemente o que foi feito e a relação com o que foi abordado nessa seção?

Por meio da matriz de transição P é possível, ao utilizar o conceito de matriz de transição de ordem superior, calcular a probabilidade da ação valorizar no futuro através da matriz P^n:

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Isso é semelhante ao que estudamos como probabilidade estacionária, ou seja, quando o tempo tende ao infinito, a probabilidade de um dado processo estar em um estado qualquer <<Eqn081.eps>> é constante e independe do estado inicial <<Eqn082.eps>>, por meio da relação:

$$P_{ij}^{(n+1)} \approx P_{ij}^{(n)} \approx \pi_j$$

Relembrando o conceito de processos de Bernoulli, a probabilidade de sucesso do enésimo evento é ρ e que a probabilidade de fracasso do enésimo elemento é o seu complementar, $1-\rho$. Nesse caso, poderíamos pensar a probabilidade de sucesso como sendo a probabilidade de lucro e a probabilidade de fracasso como a probabilidade de prejuízo.

Na decomposição de processos de Poisson, verificamos que os processos $W(t)$ e $V(t)$, que representam o número de sucessos e de fracassos até t, são processos de Poisson com respectivas taxas $\alpha_x\rho$ e $\alpha_x(1-\rho)$.

Portanto, para responder ao questionamento proposto sobre

quais são as informações necessárias para transmitir ao seu cliente uma probabilidade de lucro, precisamos saber:

- O valor de α, que é a taxa média μ dividida pelo período t, ou seja,

$$\alpha = \frac{\mu}{t}$$

- O valor de ρ, que é a probabilidade de sucesso de sucesso do enésimo evento, ou seja, a probabilidade de lucro do enésimo dia de investimento.

Avançando na prática

Gestão da produção e cadeia de Markov

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o gestor técnico de uma empresa que fabrica chocolates. Em função da chegada da páscoa, a demanda pelo produto ovo de páscoa aumenta consideravelmente, requerendo uma gestão assertiva da produção. Em cada linha de produção, sempre existe um operador específico responsável pela embalagem do ovo de páscoa, por meio da junção das duas metades do ovo de chocolate. O tempo entre duas chegadas consecutivas das metades do ovo de chocolate ao operador ocorre a partir de uma distribuição exponencial com média de 10 minutos, ou seja, duas metades chegam ao operador a cada 10 minutos. Pensando em uma gestão de recursos mais assertiva, em função da alta demanda da Páscoa, como seria a modelagem desse sistema utilizando uma cadeia de Markov?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, você deve identificar os estados do sistema, conformea seguir:

Estado 0: nenhuma metade de ovo de páscoa chega ao operador

Estado 1: uma metade de ovo de páscoa chega ao operador

Estado 2: duas metades de ovo de páscoa chegam ao operador

Com relação ao tempo entre as chegadas, sabemos que o tempo entre duas chegadas consecutivas ao operador é de 10 minutos;

portanto, por hora chegam 12 metades de ovos de chocolate ao operador para fazer a embalagem ($\vartheta_{chegada} = 12$).

Como a embalagem do ovo de páscoa envolve a junção das duas metades de chocolate para formar um único ovo de páscoa, então, a taxa de saída será a metade taxa de entrada, ou seja, $\vartheta_{saída} = 6$.

Logo, para ter uma melhor gestão das linhas de produção, você deve considerar que, a cada hora, chegam para embalagem dozes metades de ovo de chocolate, resultando na saída de seis ovos embrulhados e prontos para a venda.

Parabéns, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Nas cadeias de Markov em tempo contínuo é importante levar em conta o tempo em que o processo permanece em cada estado, diferentemente da cadeia de Markov em tempo discreto.
Portanto, para que uma cadeia de Markov de tempo contínuo esteja completamente definida, precisamos conhecer três parâmetros: conhecer os estados que compõem o espaço de estados discreto E, o parâmetro que representa a distribuição de cada variável τ_i , que definiremos como ϑ_i , e as probabilidades de transição para outro estado j , que já conhecemos e podemos denotar como P_{ij} .

Assinale a alternativa que apresenta os três parâmetros corretamente.

a) Estados que compõem o espaço de estados discreto E; a distribuição de cada variável; e as probabilidades de transição entre os estados.
b) Estados que compõem o espaço de estados discreto E; a probabilidade de transição de cada variável; e a distribuição de transição.
c) O tempo contínuo; a probabilidade de transição de cada variável; e a distribuição de transição.
d) O tempo contínuo; a distribuição de cada variável; e as probabilidades de transição entre os estados.
e) Tempos que compõem o espaço de estados discreto E; a distribuição de cada variável; e as probabilidades de associação entre os estados.

2. Um processo Markoviano é considerado uma cadeia de Markov quando o estado é discreto, ou seja, quando as variáveis aleatórias <<Eqn106.eps>> estão definidas em um espaço de estados discreto E. As cadeias de Markov continuas ou discretas no tempo são tipos de processo de Markov.

Assim, avalie as afirmações I, II e III.
I. As cadeias de Markov em tempo contínuo podem ser descritas de modo semelhante àquela em tempo discreto, divergindo-se no fato de que as transições podem ocorrer em qualquer instante de tempo.
II. Quando o tempo tende ao infinito, a probabilidade de um dado processo estar em um estado qualquer j é constante e independe do estado inicial i.
III. Os processos de Poisson não são um tipo de cadeia de Markov de tempo contínuo.

Com base nas afirmações I, II e III, assinale a alternativa correta.

a) Apenas I é correta.
b) Apenas I e III são corretas.
c) I, II e III são corretas.
d) Apenas I e II são corretas.
e) Apenas II é correta.

3. Em um processo fabril, três peças metálicas iguais passam por uma etapa de junção por aquecimento a fim de formar uma única nova peça. Em cada linha de produção existe sempre um operador responsável pelo processo de junção por aquecimento. O tempo entre chegadas consecutivas das peças metálicas ao operador ocorre por meio de uma distribuição exponencial com média de 20 minutos, ou seja, as três peças chegam ao operador a cada 20 minutos.

Durante uma hora, quantas peças metálicas chegam e quantas saem do processo de junção por aquecimento?

a) A cada hora, chegam 9 peças para o processo de junção por aquecimento, resultando na saída de 9 novas peças.
b) A cada hora, chegam 3 peças para o processo de junção por aquecimento, resultando na saída de 3 novas peças.
c) A cada hora, chegam 9 peças para o processo de junção por aquecimento, resultando na saída de 6 novas peças.
d) A cada hora, chegam 9 peças para o processo de junção por aquecimento, resultando na saída de 4,5 novas peças, em média.
e) A cada hora, chegam 9 peças para o processo de junção por aquecimento, resultando na saída de 3 novas peças.

Referências

ALVES, R.; DELGADO, C. **Processos estocásticos.** Portugal: Universidade do Porto, 1997. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

FERREIRA FILHO, V. J. M. **Processos estocásticos e teoria de filas**, UFRJ, Rio de Janeiro, p. 11, 2005. Disponível em: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.661335001390983227.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

HINOJOSA, A.; MILANES, A. **Uma introdução aos processos estocásticos com aplicações**, p. 34. UFMG, Minas Gerais, 2013 Disponível em: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>.Acesso em: 20 nov. 2017.

KARLIN, S.; TAYLOR, H. E. **An introduction to stochastic modeling.** 3. ed. Academic Press, 1998. Disponível em: <http://matap.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/Probabilidad/KarlinTaylorIntrodStochModeling.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

YNOGUTI, C. A. **Probabilidade, estatística e processos estocásticos.** São Paulo, 2011, 258 p. Disponível em: <https://www.linux.ime.usp.br/~daniloss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>. Acesso em: 9 nov. 2017

Processos estocásticos: teoria das filas

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade vamos dar continuidade ao estudo de processos estocásticos, entrando em teoria de filas.

A fim de você já vislumbrar o que vamos tratar nesta unidade, de modo geral, entenda que a teoria de filas se preocupa com o estudo das filas sob um aspecto matemático, ou seja, estuda matematicamente a existência de pessoas ou objetos esperando algum tipo de serviço.

As aplicações dos modelos de filas são diversas, visando à melhoria na performance do sistema, por meio da otimização do uso de recursos de serviço disponíveis, menor tempo de espera, maior agilidade no atendimento, etc.

Assim, inicialmente vamos tratar das principais características de uma fila, medidas de desempenho e notações e terminologias comuns em teoria das filas.

Posteriormente, estudaremos a fila M/M/1, medidas de desempenho de Little e distribuição estacionária para essa fila.

Por fim, trabalharemos com a fila M/M/c, distribuição estacionária e exemplos para essa fila.

Logo, ao final desta unidade, pretende-se que você saiba aplicar a teoria das filas para realização de previsões.

Assim, perceba que nos diversos serviços comerciais temos evidências de filas como em bancos, hospitais, clínicas, transportes, lojas, entre outros. Considerando que você seja o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento

de varejo de produtos perecíveis, você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento, uma vez que a empresa deseja diversificar os ramos de atuação e os serviços prestados aos clientes.

A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas.

Como gestor, quais as medidas de desempenho que você apresentaria para os diretores avaliarem a respeito da implementação das bombas?

Considerando que a princípio você recomende a instalação de apenas uma bomba, de modo que o cliente ao acessar o local de abastecimento possa se deparar com a bomba vazia e prontamente abastecer o veículo ou aguardar numa fila, você poderia se deparar com um problema de a fila crescer indefinidamente?

Se você julgar necessário avaliar a instalação de mais de uma bomba, quais as informações que precisariam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Pense a respeito dessa indagação e apresente um relatório com esses dados, conforme solicitado pela diretoria.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe com dedicação e com entusiasmo para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Seção 4.1

Introdução à teoria das filas

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma unidade de estudo!

Neste momento, entraremos nos conceitos fundamentais de teoria das filas, tratando das principais características de uma fila, medidas de desempenho e notações e terminologias comuns em filas.

Para você já compreender um pouco sobre o modelo de filas, pense em clientes ou usuários que chegam para um determinado serviço; contudo, formam um fila em função da indisponibilidade do atendimento naquele momento.

Perceba que filas impactam nos custos e na satisfação do cliente, sendo possível vislumbrar a importância do estudo de teoria de filas e sua aplicação diversa, de modo que os estudos iniciais na área se deram no segmento de telefonia, por K. Erlang, que era engenheiro da empresa dinamarquesa de telefones e começou a estudar o problema de congestionamento das linhas telefônicas.

Para colaborar no seu entendimento, são exploradas aplicações dos modelos de fila em conjunto com a teoria para que você possa se situar e perceber o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Assim, veja que nos diversos serviços comerciais temos evidências de filas como em bancos, hospitais, clínicas, transportes, lojas, entre outros. Considerando que você seja o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento de varejo de produtos perecíveis, você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento, uma vez que a empresa deseja diversificar os ramos de atuação e os serviços prestados aos clientes.

A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas.

Como gestor, quais as medidas de desempenho que você apresentaria para os diretores avaliarem a respeito da implementação das bombas?

Pense a respeito dessa indagação e considere que a diretoria lhe solicitou um relatório com esses dados.

Bons estudos e vamos avançando na construção do seu conhecimento em processos estocásticos, especialmente agora em teoria das filas!

Não pode faltar

Você muito provavelmente já se deparou com uma situação que envolvesse uma fila, correto? Seja numa agência bancária, ou seja, num parque de diversões, num posto de combustível, no mercado. Mas será que esse conceito de filas é importante?

Vamos então nos aprofundar no tema filas, mas em primeiro lugar precisamos conhecer detalhadamente as características das filas que serão objeto do nosso estudo, que também chamaremos de teoria das filas.

Em primeiro lugar, precisamos entender o que é uma fila. Vamos supor que você seja o dono de um mercadinho de bairro e que, para poupar custos no negócio, coloque apenas um caixa para pagamento. O que ocorre quando um cliente chega até o caixa para ser atendido, mas já existe outro cliente passando as compras? Nesse momento, uma fila é formada! Ou seja, o caixa estava ocupado atendendo um cliente enquanto outro cliente chegou para ser atendido. Como só temos um caixa, o segundo cliente teve que ficar aguardando o término do atendimento anterior, para então ser atendido.

Como ocorre no mercadinho, num banco ou numa máquina de uma indústria, existe um conceito denominado processo de chegada.

O processo de chegada está associado à chegada de um novo usuário no sistema e suas principais características, por exemplo, a quantidade de chegadas por vez, tempo entre chegadas, etc. Podemos considerar, nesse caso, se as chegadas são constantes ou se são aleatórias. Caso tenhamos chegadas aleatórias, estamos tratando de uma classe de processos estocásticos como os processos de renovação, que são identicamente e independentemente

distribuídos (i.i.d.) (FERREIRA FILHO, 2013).

E as chegadas são unitárias ou em conjunto? Podem ocorrer os dois casos, e também é importante analisar se é previsto perdas de usuários que não fiquem na fila, ou seja, o cliente nem sequer entra na fila e já é excluído pelo sistema ou por decisão própria. Um exemplo de sistema com perda de usuários é o telefônico residencial, pois uma vez que você liga para um telefone residencial que esteja em outra ligação (ocupado), você automaticamente é retirado do sistema e a chamada fica indisponível (FERREIRA FILHO, 2013).

Tudo bem, mas o que gera uma fila? Será que é somente o processo de chegada? Não, como nós vimos no exemplo do mercadinho, além da chegada de novos clientes, um outro fator que influencia na formação de uma fila é a taxa de atendimento. Assim, se o atendimento for mais rápido, o sistema permanecerá ocupado menos tempo e a chance de ocorrer uma chegada no instante em que o sistema está ocupado, gerando uma fila, é menor. Similarmente, se houver mais de um posto de atendimento, a probabilidade de formar uma fila também será diferente.

O tempo de serviço também pode depender do usuário ou do próprio sistema e ser definido como constante ou aleatório. Por exemplo, dois clientes foram atendidos pelo mesmo caixa (não ao mesmo tempo) para fazer um depósito. O primeiro cliente depositou R$ 100,00 em notas de R$ 50,00 (duas notas para o caixa conferir) e o segundo depositou os mesmos R$ 100,00 em notas de R$ 5,00 (vinte notas para o caixa conferir). O serviço, nesse caso, é o mesmo, executado pela mesma pessoa, mas o tempo de serviço será diferente em função do trabalho a ser executado; portanto, nesse caso o tempo de serviço seria uma variável aleatória.

Além do processo de chegada e do tempo de serviço, o modo de atendimento influenciará na fila formada. Mas o que é o modo de atendimento? É a forma como o sistema seleciona os usuários para receber o atendimento.

Geralmente, o primeiro usuário que entra é o primeiro a ser atendido, mas podemos ter situações nas quais o último a chegar será o primeiro a ser atendido ou alguma outra regra que pode ser criada pelo sistema para direcionar o atendimento. Podemos citar, como exemplo, o caso de clientes com necessidades especiais, idosos, entre outros.

E por último, mas não menos importante, outro fator que é capaz de influenciar nas filas é a capacidade da fila, ou seja, se ela pode ser infinita ou finita. Na maioria dos casos cotidianos, a fila é finita, mas existem situações nas quais não existe um limite no número de usuários na fila.

Portanto, se alterarmos as características que vimos anteriormente (processo de chegada, tempo de serviço, modo de atendimento e a capacidade da fila), poderemos criar diversos modelos de filas diferentes, o que faz com que exista uma infinidade de aplicações possíveis (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Pesquise mais

Caro aluno, vamos aprofundar os nossos conhecimentos em teoria das filas? Nós já estamos acostumados a encontrar filas nos caixas de supermercados, pois geralmente o número de postos de atendimento e a taxa de serviço não acompanham a taxa de chegada de clientes, o que invariavelmente cria as temidas filas.

Mas será que já foi feito um estudo científico para analisar as filas em supermercados? A resposta é sim, e um dos estudos realizados foi publicado na revista Pesquisa Operacional, com o título "Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso", de autoria de Reinaldo Morabito e Flávio Lima.

Um dos interesses dos autores é modelar o tempo de espera e para isso são testadas três opções de modelos.

Ficou curioso para descobrir o resultado?

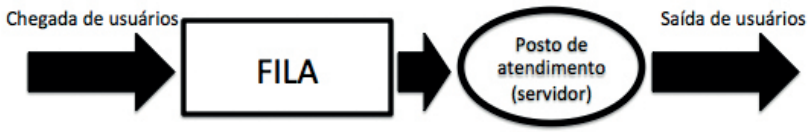
Então leia o artigo e bons estudos!

MORABITO, R.; DE LIMA, F. C. R. Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso. **Pesquisa Operacional**, v. 20, n. 1, p. 59-71, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/pope/v20n1/a07v20n1.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

Agora que você já sabe as principais características de uma fila e já viu algumas aplicações cotidianas, vamos ver algumas outras aplicações com enfoque em processos estocásticos? Lembre-se que a principal característica de um processo estocástico é a presença de variáveis aleatórias.

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam alguns tipos comuns de processos de filas. Vamos conferir?

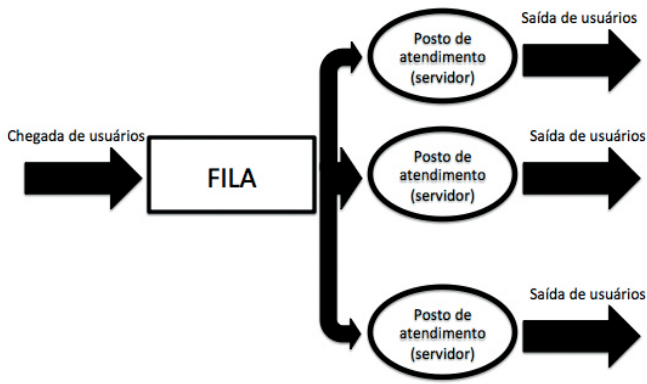
Figura 4.1 | Processo de fila com um servidor e fila única



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4.1 nos mostra um tipo de processo de fila no qual temos uma chegada, uma fila única, um único posto de atendimento e a saída. Um exemplo é um aeroporto que possui apenas uma pista de pouso. Os aviões que chegam ao aeroporto formam uma fila única para utilizar a pista, que nesse caso seria o nosso servidor. Nesse caso, tanto o tempo entre chegadas e o tempo de serviço podem ser aleatórios, dependendo da demanda, do clima (se está chovendo, se a pista está molhada ou seca), entre outros fatores.

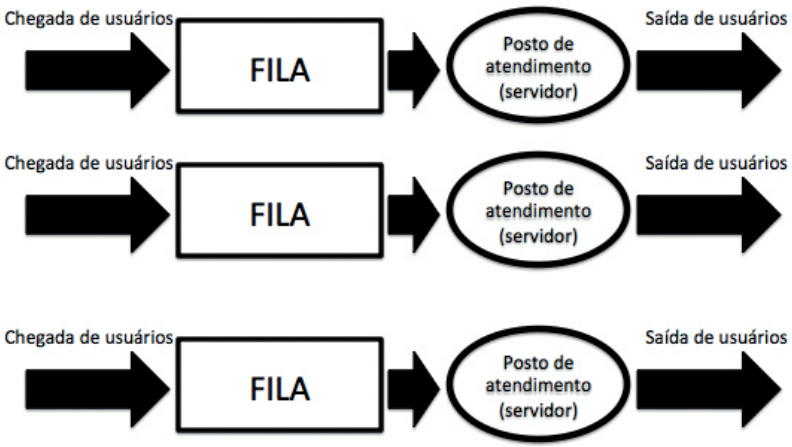
Figura 4.2 | Processo de fila com mais de um servidor e fila única



Fonte: elaborada pelo autor.

Já na Figura 4.2, temos uma fila única e mais de um posto de atendimento. Poderia ser a fila de um banco sem o atendimento preferencial. Existe uma fila única formada pela chegada de clientes, que pode ser aleatória e apresentar uma distribuição de probabilidades, e mais de um caixa para atendimento, que também pode apresentar tempo de serviço probabilístico.

Figura 4.3 | Processo de fila com mais de um servidor e fila individual por servidor



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 4.3, observamos um processo de fila com mais de um servidor e filas individuais por servidor, como no caso de um supermercado.

Mas é possível identificar diversas outras aplicações para a teoria das filas, como o fluxo de carros, pessoas, o escalonamento de máquinas em indústrias, sistemas de telecomunicações, entre outros.

Reflita

Agora que você já compreendeu o conceito e as principais características de filas, imagine que você trabalha como gerente de produção numa indústria alimentícia.

Na indústria em questão, que produz iogurtes e laticínios, existe uma linha de produção sequencial que é composta por apenas uma máquina.

A máquina envasa os iogurtes em garrafas de 500 ml, de modo que o iogurte fica aguardando para ser envasado num tanque.

Você acha que a situação apresentada descreve um sistema de fila?

Reflita sobre isso, considerando as Figuras 4.1, 4.2 e 4.3!

E como podemos saber se o nosso sistema de filas está com um desempenho adequado? Existe alguma métrica para definir o desempenho do sistema?

Existe sim, na verdade temos algumas formas de avaliar o desempenho do nosso sistema, como:

- Tempo de espera do usuário.

- Tamanho da fila.

- Tempo ocioso dos postos de atendimento (servidores).

É importante ressaltar que as medidas anteriores podem apresentar variação, uma vez que geralmente são variáveis aleatórias. Deste modo, podemos considerar para efeitos de avaliação, valores médios ou esperados.

Também vale lembrar que temos o tempo de espera do usuário na fila e o tempo total que ele gasta no sistema. Em cada caso, pode ser mais relevante a análise de um tempo ou do outro.

Quem fará a avaliação do desempenho do sistema deve levar em conta os tempos previstos na fase de projeto para avaliar se eles são condizentes com a realidade ou se devem ser feitos ajustes.

Por exemplo, na cidade de São Paulo existe um acordo firmado entre os bancos e a Federação Brasileira de Bancos (FEBRABAN) que estipula um limite máximo de tempo de espera nas filas de caixas bancários. Nesse caso, os bancos tiveram que alterar a sua estrutura para adequar o tempo de espera máximo. Uma das formas de avaliar as alterações é utilizando a simulação, de modo que as condições reais sejam modeladas e as alterações avaliadas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Agora que os conceitos sobre teoria das filas já foram apresentados, vamos aprender a notação que é mais utilizada nessa área.

A notação que veremos aqui é fruto do esforço de diversos autores, mas em especial do professor David George Kendall, que criou em 1953 a referência que utilizamos nos nossos estudos.

E como é a notação proposta por Kendall em 1953? Nós temos, basicamente, uma representação para as características que vimos anteriormente, na forma: A/B/c/K/Z (FERREIRA FILHO, 2013).

Mas o que são essas letras?

- A: trata-se da distribuição de tempo entre chegadas

- B: distribuição de tempo de serviço

- c: número de servidores (ou postos de atendimento)

- K: capacidade da fila

- Z: modo de atendimento

Portanto, podemos caracterizar uma fila utilizando a notação de Kendall. Vamos ver um exemplo? Para as letras A e B, podemos ter:

- M: significa que temos uma distribuição exponencial, ou seja, sem memória

- D: significa que temos uma distribuição determinística (ou constante)

- U: significa que temos uma distribuição uniforme

- G: significa que temos uma distribuição geral, ou seja, que não foi especificada.

E com relação às letras K e Z? É comum encontrarmos filas com notações nas quais essas letras não aparecem. Isso quer dizer que não existe uma capacidade e um modo de atendimento para essas filas?

Não, é que nos casos nos quais não evidenciamos as letras K e Z, é porque a fila segue o padrão mais comum de K e Z e por isso são omitidos. Portanto, convencionou-se que quando K e Z estão ausentes, significa que a fila tem capacidade infinita e modo de atendimento no qual o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido.

Vamos então ver um exemplo de fila utilizando a notação de Kendall?

Suponha que você tenha uma fila com as características:

- Tempo entre chegadas: distribuição exponencial

- Tempo de serviço: distribuição exponencial

- Número de servidores: 1

Nesse caso, a notação de Kendall para essa fila seria: M/M/1. Esse tipo de fila, em especial, será tratado com detalhes posteriormente.

Além disso, temos uma terminologia comum sempre que o assunto é teoria das filas, e vale a pena você conhecer (HILLIER;

LIEBERMAN, 2013):

- Estado do sistema: é o número de usuários presentes no sistema.

- Comprimento da fila: é o número de usuários esperando por um atendimento (ou serviço). Ou seja, é o estado do sistema menos o número de usuários que estão sendo atendidos.

- N(t) nesse caso é o número de clientes no sistema no tempo, de modo que $t \geq 0$.

- S é o número de servidores (ou postos de atendimento).

- $P_n(t)$ é a probabilidade de que n usuários estejam no sistema no tempo t.

- λ_n faz referência à taxa de chegada de novos usuários, dado que n usuários já estão no sistema.

- μ_n é a taxa de serviço para o sistema, quando temos n usuários no sistema.

Exemplificando

Suponha que seja o gerente de produção de indústria que possui uma linha de produção com apenas uma máquina que trabalha de modo contínuo, exceto quando está em manutenção.

Nessa máquina, chegam 20 peças por hora, de modo que cada peça é processada em média a cada 4 minutos.

Qual seria a taxa de chegada de novos usuários e a taxa de serviço para o sistema nesse exemplo?

Em primeiro lugar, devemos lembrar que λ faz referência à taxa de chegadas. Nesse caso, a taxa de chegada é de 20 peças por hora, portanto:

$\lambda = 20 peças / hora$ (taxa de chegada)

E a taxa de serviço? Ela é representada por μ, que nesse caso é de 4 minutos. Se quisermos transformar essa taxa em horas, como está expressado em λ, ficará:

$1 hora = 60 \min \therefore {}^{60}/_{4} = 15 \ \mu = 15 peças / hora$ (taxa de serviço)

Perceba que a taxa de chegada é maior que a taxa de serviço, de modo que há a formação de fila!

Quando o nosso sistema está em estado de equilíbrio, ou seja, quando o nosso sistema não depende mais do estado inicial e do tempo decorrido, temos uma outra terminologia comum que utilizaremos (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- N é o número de usuários no sistema.
- P_n é a probabilidade de n clientes no sistema.
- L é o número de clientes esperado no sistema.
- L_q é o comprimento esperado da fila.
- ω é o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço.
- ω_q é o tempo de espera para cada usuário na fila (excluindo o tempo de serviço).

Assimile

Os conceitos de teoria das filas ficaram muito difíceis de assimilar? Então vamos rever alguns itens importantes quando o assunto é teoria de filas.

As características principais que foram apresentadas de uma fila são:

- Tempo entre chegadas
- Tempo de serviço
- Modo de atendimento
- Capacidade da fila

Também é importante mencionar a notação de Kendall, que é o padrão mais utilizado para descrever um sistema de filas. Lembrando que a notação é na forma A/B/c/K/Z, sendo (FERREIRA FILHO, 2013):

- A: trata-se da distribuição de tempo entre chegadas
- B: distribuição de tempo de serviço
- c: número de servidores (ou postos de atendimento)
- K: capacidade da fila
- Z: modo de atendimento

Sem medo de errar

Analisando os diversos serviços comerciais cotidianos, é fácil nos depararmos com o conceito de filas. Por exemplo, em bancos, hospitais, clínicas, transportes, lojas, entre outros.

Considerando que você seja o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento de varejo de produtos perecíveis, você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento, uma vez que a empresa deseja diversificar os ramos de atuação e os serviços prestados aos clientes.

A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas.

Como gestor, quais as medidas de desempenho que você apresentaria para os diretores avaliarem a respeito da implementação das bombas?

Em primeiro lugar, para resolver esse problema, é essencial relembrar as características de um sistema de filas, dado que o posto de gasolina apresentará duas possíveis filas: no abastecimento e no pagamento.

As características principais que foram apresentadas de uma fila são:

- Tempo entre chegadas: nesse caso temos o tempo entre chegadas de clientes no posto de combustível e também o tempo de chegadas de clientes para pagamento após o abastecimento. É importante que essas informações sejam previstas, consultando o departamento de planejamento da empresa.

- Tempo de serviço: novamente nós temos duas variáveis, o tempo de serviço na bomba de combustível e o tempo de serviço para pagamento. Nesse primeiro momento, estamos desconsiderando os demais serviços que podem ser oferecidos, como troca de óleo e lavagem. Com a ajuda das medidas de desempenho, também será possível definir o número de postos de atendimento, tanto as bombas como os caixas de pagamento.

- Modo de atendimento: aqui é importante ressaltar o modo de

atendimento nas filas, se existirá alguma regra de atendimento prioritário ou se a regra a ser adotada é o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido (vale tanto para atendimento na bomba como no caixa de pagamento).

- Capacidade da fila: nesse caso em especial, a capacidade da fila está condicionada ao espaço físico disponível para que os clientes aguardem o atendimento com os seus respectivos veículos. Portanto, muito provavelmente teremos uma restrição de espaço, o que fará com que nossa fila tenha uma capacidade máxima. Quando a fila atingir a capacidade máxima, ou seja, o espaço físico estiver totalmente ocupado, os clientes que chegarem não entrarão no sistema.

Agora que o nosso sistema está devidamente caracterizado, podemos pensar nas formas de mensurar a implementação das bombas. Nós vimos que isso é possível por meio de alguns tempos:

- Tempo de espera do usuário
- Tempo ocioso dos postos de atendimento (servidores)

Deve ser levado em consideração a existência de outros postos de combustíveis na mesma região, ou seja, a presença de concorrentes. Caso seja possível analisar o tempo de espera do usuário e o tempo ocioso nos postos concorrentes, será possível iniciar a nossa avaliação de desempenho.

Em seguida, é importante ouvir o cliente, podendo ser executado por meio de uma pesquisa de satisfação. Com a pesquisa de satisfação será possível descobrir o tempo desejável de espera do usuário para tentar compará-lo à concorrência e fazer um ajuste de acordo com os recursos disponíveis.

Agora é importante que a equipe de planejamento avalie o tempo ocioso dos postos de atendimento (bombas de combustível e caixas de pagamento). Aqui vale uma observação importante: para que o tempo de espera na fila seja minimizado, os recursos devem ser maximizados, o que geralmente faz com que exista uma quantidade de postos de atendimento que podem ficar ociosos por mais tempo aguardando a chegada de um novo cliente. Isso deve ser adequadamente ajustado, uma vez que se o tempo de espera for muito além do desejado pelo cliente, provavelmente ele desistirá

de abastecer ali, mas deixar uma ociosidade grande nos postos de atendimento acarreta custos operacionais maiores.

Utilizando as informações anteriores será possível que você apresente para os diretores o que deve ser avaliado para decidir quantas bombas devem ser implementadas no novo empreendimento.

Logo, por exemplo, caso você conclua que uma bomba seja o ideal, então temos um sistema M/M/1.

Parabéns, mais um desafio vencido.

Avançando na prática

Inspeção de qualidade e a teoria de filas

Descrição da situação-problema

Imagine que você seja o responsável pelo setor de qualidade em uma linha de montagem de eletrodomésticos da linha branca, especificamente refrigeradores.

Durante o processo de controle de qualidade, em uma etapa inicial, todo o lote com 10 refrigeradores passa por uma inspeção visual, de modo que se verifica se o produto apresenta alguma avaria, como amassado ou riscado. A fim de evitar erros, a empresa abriu mão da amostragem, fazendo a inspeção de 100% do lote.

No entanto, há no setor de qualidade somente 1 pessoa responsável pela inspeção de refrigerados da linha branca, de modo que a cada hora chega um lote e cada refrigerador é inspecionado em 10 minutos. A fim de avaliar a viabilidade de se continuar com esse sistema de inspeção 100%, avalie se há ou não a formação de filas. Como você poderia demonstrar isto?

Resolução da situação-problema

A primeira coisa que devemos avaliar para saber se há ou não a formação de filas refere-se à taxa de chegada e à taxa de serviço.

Logo, em primeiro lugar, devemos lembrar que λ faz referência à taxa de chegadas. Nesse caso, a taxa de chegada é de 10 refrigeradores (1 lote) a cada hora:

$\lambda = 10$ *refrigeradores / hora* (taxa de chegada)

A taxa de serviço é representada por μ, que nesse caso é de 10 minutos, representando a inspeção de um refrigerador. Se quisermos transformar essa taxa em horas, como está expressado em λ, ficará:

$1\ hora = 60\,\text{min} \therefore {}^{60}\!/_{10} = 6$

$\mu = 6$ *refrigeradores / hora* (taxa de serviço)

Perceba que a taxa de chegada é superior à taxa de serviço, de modo que há formação de filas. Assim, uma das alternativas para a eliminação da fila poderia ser trabalhar com amostragem para igualar as taxas, de modo que a cada lote você pode retirar 6 peças, permitindo que o operador execute a inspeção.

Outra alternativa é continuar com a inspeção 100% e acrescentar outro operador para fazer essa atividade; vale considerar que essa alternativa acarreta aumento de custo.

Assim, caro aluno, fica claro para você o porquê de as empresas adotarem a inspeção por amostragem em seus departamentos de qualidade!

Parabéns, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Ao se conceituar uma fila, pode-se pensar em clientes, ou usuários, que chegam para um determinado serviço (executado por servidores); contudo, formam uma fila em função da indisponibilidade do atendimento naquele momento.

As filas impactam nos custos, sendo possível vislumbrar a importância do estudo de teoria de filas e sua aplicação diversa, de modo que os estudos iniciais na área se deram no segmento de telefonia. Contudo, atualmente, a teoria das filas vem sendo aplicada em diversas áreas.

Com base no texto acima, assinale a alternativa que mostra a aplicação da teoria de filas a sistemas de serviço social.

a) O salão de beleza pode ser considerado um local onde os serviços são prestados; os cabelereiros são os servidores; as pessoas que aguardam para cortar o cabelo são os clientes.

b) O centro logístico de distribuição pode ser considerado um local onde os serviços são prestados; os carregadores que abastecem o caminhão que será despachado são os servidores; e os caminhões que esperam para serem

abastecidos são os clientes.
c) O centro de manuseio de materiais pode ser considerado um local onde os serviços são prestados, unidades de manuseio são os servidores; as cargas a serem manuseadas são os clientes.
d) Os tribunais podem ser considerados locais onde os serviços são prestados, os juízes são os servidores, e cada caso esperando para ser julgado são os clientes.
e) Uma lanchonete pode ser considerada um local onde os serviços são prestados; os atendentes são os servidores; as pessoas que aguardam para comer são os clientes.

2. Em um banco, há apenas um dispositivo de contagem de cédulas, de modo que chegam 100 notas, de um mesmo valor, a cada 10 minutos.
A leitura de cada nota é feita pela máquina de contagem de cédulas, em média, a cada 6 s.
Considere esses dados para avaliar a taxa de chegada de novas notas.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente a taxa de chegada de novas notas e a taxa de serviço para o sistema.

a) $\mu = 600\ notas / hora$; $\lambda = 30\ notas / hora$
b) $\lambda = 100\ notas / hora$; $\mu = 10\ notas / hora$
c) $\lambda = 600\ notas / hora$; $\mu = 600\ notas / hora$
d) $\mu = 30\ notas / hora$; $\lambda = 30\ notas / hora$
e) $\lambda = 100\ notas / hora$; $\mu = 600\ notas / hora$

3. Quando se pensa em tipologia de filas, as características principais a serem consideradas em uma fila são: tempo de serviço; tempo entre chegadas; modo de atendimento; capacidade da fila. Assim, uma das notações mais utilizadas nos estudos de filas refere-se à contribuição de David George Kendall, que criou em 1953 a referência comumente empregada na descrição de uma fila.

Assinale a alternativa que descreve corretamente a fila M/M/1.

a) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; tempo de serviço: distribuição exponencial; Número de servidores: 1.
b) Tempo de serviço: distribuição exponencial; tempo de chegada: distribuição uniforme; capacidade: 1.
c) Tempo entre chegadas: uniforme; tempo de serviço: determinística; Capacidade: 1.
d) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; capacidade da fila: distribuição exponencial; Número de servidores: 1.
e) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; capacidade da fila: distribuição uniforme; Número de servidores: 1.

Seção 4.2

Filas M/M/1

Diálogo aberto

Caro aluno, continuaremos nosso estudo de filas, trabalhando especificamente com as filas M/M/1.

Neste momento, entraremos nos conceitos fundamentais das filas M/M/1, englobando o estudo das medidas de desempenho de Little, distribuição estacionária para M/M/1 e exemplos desse tipo de fila.

Você já deve estar percebendo a importância do estudo da teoria de filas, uma vez que está vendo aplicada nos mais diversos sistemas, tais como nos sistemas de serviços comerciais; sistemas de serviço de transporte; sistemas de serviço empresa-indústria; e até sistemas de serviço social.

Para colaborar no seu entendimento, são exploradas aplicações da fila M/M/1 em conjunto com a teoria para que você possa se situar e perceber o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Logo, vamos retomar o caso em que você seja o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento de varejo de produtos perecíveis, você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento, uma vez que a empresa deseja diversificar os ramos de atuação e os serviços prestados aos clientes.

A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas.

Considerando que, inicialmente, você recomende a instalação de apenas uma bomba, de modo que o cliente ao acessar o local de abastecimento possa se deparar com a bomba vazia e prontamente abastecer o veículo ou aguardar numa fila, você poderia se deparar com um problema de a fila crescer indefinidamente?

Pense a respeito dessa indagação e considere que a diretoria lhe

solicitou um relatório com esses dados a fim de analisar a viabilidade de instalação de apenas uma bomba.

Bons estudos e vamos avançando na construção do seu conhecimento em processos estocásticos, especialmente agora em teoria das filas!

Não pode faltar

Caro aluno, na seção anterior, no âmbito de notação e tipologia de filas, vimos sobre a notação de Kendall. Logo, agora que nós já sabemos sobre essa notação, vamos ver um tipo especial de fila: M/M/1, que indica (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

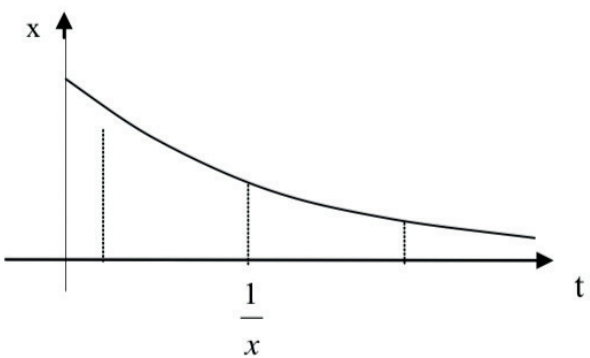
- Tempo entre chegadas (M): distribuição exponencial.

- Tempo de serviço: distribuição exponencial.

- Número de servidores: 1.

Vamos então nos aprofundar na fila M/M/1? Em primeiro lugar, qual a importância de uma distribuição exponencial para a teoria de filas? Para ficar mais fácil de entender, vamos analisar a Figura 4.4.

Figura 4.4 | Distribuição exponencial na teoria de filas



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.661335001390983227.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2017.

O que fica evidente na Figura 4.4? Se a taxa de chegadas ou a taxa de serviço seguir uma distribuição exponencial, a primeira coisa que conseguimos observar é que a função que representa essas taxas é decrescente em função do tempo, ou seja, quanto maior o tempo decorrido, menor o valor de X, que nesse caso representa o valor da função das taxas.

Mas o que isso quer dizer? Vamos analisar então a taxa de serviço.

É razoável pensar que quando os serviços forem iguais para os usuários, o tempo de serviço real seria muito próximo do tempo médio, correto? As pequenas oscilações podem ocorrer devido à eficiência do servidor. Nesse caso, não tem como aproximar o comportamento do servidor para uma distribuição exponencial, uma vez que o tempo muito abaixo da média seria praticamente impossível.

Agora, e se as tarefas forem diferentes para cada cliente, mesmo que o serviço executado pelo servidor seja o mesmo? Vamos imaginar uma situação num banco, por exemplo. Os clientes chegam até o caixa para fazer um depósito. Um cliente vai depositar R$ 100,00, mas só tem notas de R$ 10,00, enquanto o outro tem duas notas de R$ 50,00. Podemos dizer que na maioria dos casos o tempo de atendimento do caixa pode ser rápido, mas se chegar um cliente para depositar a mesma quantia com notas de R$ 5,00, o tempo para que o caixa confira e contabilize o dinheiro será maior. Nesses casos, a distribuição exponencial pode ser utilizada para aproximar o comportamento do servidor. E com relação à taxa de chegadas?

Entende-se que uma distribuição exponencial é consistente com chegadas aleatórias, sendo que o tempo entre chegadas não é influenciado pelo tempo da última chegada. Portanto, é razoável pensar que se existirem usuários diferentes, o tempo entre chegadas não depende do tempo da última chegada, o que nos permite desprezar a distinção dos usuários.

Por último, vale também a relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson. Para isso, vale retomar também o conceito do processo de Poisson. Dizemos que um processo de Poisson é um tipo especial de processo de contagem de chegadas no qual algumas hipóteses devem ser satisfeitas (FERREIRA FILHO, 2013):

1. Incrementos independentes
2. Independência do tempo
3. Não ocorrem chegadas simultâneas

Portanto, vamos considerar que a chegada de usuários siga o disposto anteriormente, por meio de um processo de Poisson. Também vamos considerar que o processo de chegadas siga uma distribuição exponencial e a taxa de chegadas seja representada por λ, conforme visto anteriormente.

Uma vez que os usuários chegam no sistema, dado que existe apenas um servidor para atendimento, existem duas possibilidades:

- O servidor está disponível e o usuário já é encaminhado para ser atendido.
- O servidor está ocupado e o usuário é encaminhado para a fila.

Estamos considerando também que sempre que o servidor ficar disponível e existir usuário na fila, o servidor imediatamente inicia o atendimento, de modo que o servidor somente ficará ocioso quando não houver usuário para ser atendido.

A taxa de serviço μ também é uma variável aleatória com distribuição exponencial, assim como a taxa de chegadas.

Lembrando do conceito de sistema em equilíbrio:

$\lambda_n = \lambda$, para $n \geq 0$

$\mu_n = \mu$, para $n \geq 1$

Lembrando que na condição de equilíbrio:

- L é o número de clientes esperado no sistema
- L_q é o comprimento esperado da fila

Logo, no caso da fila M/M/1, podemos dizer que, na condição de equilíbrio, temos as equações 4.1 e 4.2 (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$ (Equação 4.1)

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$ (Equação 4.2)

Pesquise mais

Sabendo da importância da distribuição exponencial na teoria de filas, em especial a fila do tipo M/M/1, vamos aprofundar nossos conhecimentos?

Uma das medidas de desempenho é chamada de intensidade de tráfego, que nada mais é do que a razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço.

Nos problemas reais, como podemos estimar os parâmetros envolvidos no processo de filas? Uma das formas de fazermos isso é utilizando as ferramentas de simulação.

O artigo "Análise de desempenho em filas M/M/1 usando uma abordagem bayesiana" utiliza a simulação para obter estimativas da intensidade de tráfego para filas do tipo M/M/1.

Vamos lá? Então leia o artigo abaixo e bons estudos.

ALMEIDA, M. A. C.; CRUZ, F. R. B. Análise de desempenho em filas M/M/1 usando uma abordagem bayesiana. **Proceeding Series of Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v. 3, n. 2, 2015. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/949/962>. Acesso em: 13 dez. 2017.

Nós já vimos algumas medidas de desempenho que podem ser utilizadas para avaliar nosso sistema de filas, como o tamanho da fila, o tempo médio de espera da fila e o tempo médio de espera no sistema.

John Little formulou, no início dos anos 1960, uma lei, que levou seu nome em sua homenagem. Conhecida, então, como Lei de Little, esta faz uma relação que pode ser particularmente útil na medida de desempenho dos sistemas de filas.

A referida lei faz uma relação entre o número de usuários que estão no sistema ou na fila e o tempo médio que eles gastam na fila. Podemos dizer que essa lei é aplicada quando o número de chegadas é igual ao número de saídas, ou seja, nosso sistema está em equilibro.

Agora, como isso se traduz numa medida de desempenho do sistema?

Para responder a essa pergunta, precisamos primeiro lembrar de algumas outras variáveis que definimos quando o nosso sistema está em equilíbrio (FERREIRA FILHO, 2013):

- ω é o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço
- ω_q é o tempo de espera para cada usuário na fila (excluindo o tempo de serviço)

Portanto, de acordo com Little, é possível afirmar que:

$L = \lambda \times \omega$ (Equação 4.3)

Ou seja, o número esperado de clientes no sistema é igual à taxa de chegadas multiplicada pelo tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço.

$L_q = \lambda \times \omega_q$ (Equação 4.4)

O comprimento esperado da fila é igual à taxa de chegadas multiplicada pelo tempo de espera para cada usuário na fila.

Portanto, com base nas equações anteriores é possível calcular o número de clientes esperado no sistema e o comprimento esperado na fila, sendo possível, deste modo, avaliar o desempenho do sistema de filas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Ficou confuso? Então vamos a um exemplo? Acompanhe no box "Exemplificando".

Exemplificando

Vamos supor que você seja o gerente de produção de uma indústria que possui uma linha de montagem com apenas uma máquina. Chegam 15 peças a essa máquina por hora e cada peça leva, em média, 3 minutos para ser processada. Qual o tempo de espera para cada usuário (incluindo e excluindo o tempo de serviço)?

Vamos lá, primeiro precisamos definir os valores de λ e μ.

Nesse caso, $\lambda = 15$ peças/hora e $\mu = \frac{60}{3} = 20$ peças/hora

$L = \lambda \times \omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda}$ como $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3$, portanto $\omega = \frac{3}{15} = 0{,}2$ hora

Ou seja, o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) é 0,2 hora, o equivalente a 12 minutos.

$L_q = \lambda \times \omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$ como $L_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = 2{,}25$, portanto

$\omega_q = \frac{2{,}25}{15} = 0{,}15$ hora

Ou seja, o tempo de espera na fila é de 0,15 hora, ou 9 minutos.

Portanto, nesse sistema em especial podemos verificar que o tempo na fila (9 minutos) é o triplo do tempo em serviço (3 minutos). Assim, provavelmente o sistema deverá ser reavaliado.

O que você acha que ocorre quando $\lambda = \mu$? Ou seja, quando a taxa de chegada é igual à taxa de serviço? Ou, nas situações onde a taxa de chegada é maior do que a taxa de serviço ($\lambda > \mu$) ou a taxa de serviço é maior do que a taxa de chegada ($\lambda < \mu$)? Para responder a essa pergunta, precisamos lembrar da classificação de estados na cadeia de Markov.

Nós aprendemos que os estados podem ser transientes ou recorrentes. Um estado recorrente é aquele no qual sempre será possível regressar ao estado i a partir de j. Em outras palavras, quando o sistema entra no estado recorrente, o sistema com certeza retornará a esse estado novamente (ALVES; DELGADO, 1997).

Quando tratamos de distribuições estacionárias nas filas M/M/1, consideramos:

- se $\lambda = \mu$ dizemos que o processo é recorrente nulo, ou seja, o tempo médio recorrente tende a infinito. Portanto, o tempo necessário para que a cadeia esteja no estado i e atinja o estado j será infinito.

- se $\lambda < \mu$ o processo será recorrente positivo, ou seja, o tempo médio recorrente será finito. Portanto, o tempo necessário para que a cadeia esteja no estado i e atinja o estado j será finito.

- se $\lambda > \mu$ então a quantidade de usuários no sistema certamente tenderá ao infinito, uma vez que a taxa de atendimento é menor do que a taxa de chegada.

Portanto, a distribuição estacionária, representada por π como já visto anteriormente nas cadeias de Markov, será:

$$\pi_{n+1} = -\frac{(\lambda + \mu)}{\mu}\pi_n + \pi_{n+1} + \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} \quad \text{(Equação 4.5)}$$

Por exemplo, $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$

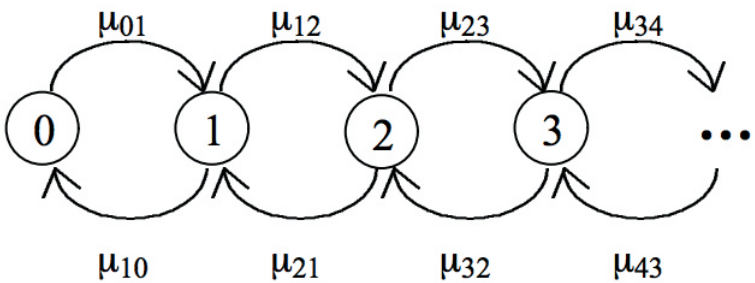
Quando $\lambda < \mu$, portanto, o processo for recorrente positivo, podemos dizer que a distribuição estacionária será:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \text{(Equação 4.6)}$$

Diante das nossas constatações anteriores, o que podemos concluir? Que o modelo de fila M/M/1 trata-se de um processo de nascimento e morte. Está lembrado do que seja um processo de nascimento e morte? Vamos rever para ficar mais claro (FERREIRA FILHO, 2013).

Nas filas M/M/1 ocorre o que é apresentado na Figura 4.5, a cada chegada e atendimento de um usuário, lembrando que as transições de estado somente podem ocorrer para os estados vizinhos.

Figura 4.5 | Processos de nascimento e de morte



Fonte: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2017.

Reflita

Agora que está mais claro para você o que é uma fila do tipo M/M/1, vamos refletir nas situações apresentadas anteriormente:

- $\lambda = \mu$
- $\lambda < \mu$
- $\lambda > \mu$

Nós vimos que se o processo é recorrente nulo, o tempo médio recorrente tende a infinito. Já no processo recorrente positivo o tempo médio recorrente será finito.

Qual o seu entendimento dessas afirmações com relação à transição de estados? Para ficar mais claro, reflita nessas afirmações analisando a Figura 4.5. O que você acha que ocorrerá em cada um dos casos no diagrama de estados?

Vamos ver um outro exemplo de uma fila M/M/1? Provavelmente você não deve ter imaginado este tipo de aplicação, mas na área de informática e de telecomunicações também podemos aplicar a teoria de filas.

Imagine que um dado servidor de e-mails recebe os arquivos e as requisições por meio de um processo de Poisson. A taxa de requisições é da ordem de 50 requisições por segundo. Se considerarmos que o tempo de serviço para cada requisição esteja na ordem de 10 milissegundos, poderíamos considerar este um exemplo de uma fila M/M/1. A taxa de chegada e de serviço seguem uma distribuição exponencial, enquanto temos a indicação de apenas um servidor.

Mas, o que será fundamental que analisemos para a caracterização de um sistema de filas, como no exemplo anterior? Poderíamos destacar ao menos quatro itens fundamentais para serem analisados quando estivermos modelando um sistema de filas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- Classes de usuários: todos os usuários do sistema têm os mesmos requisitos de serviço e são tratados do mesmo modo pelo posto de atendimento (ou servidor)? Em outras palavras, estamos dizendo se a distribuição do tempo de serviço será igual para todos os usuários. Em sistemas com diversidade de usuários, ou seja, classes diferentes, temos necessidades e modo de atendimentos diferentes.

- Escalonamento: nos sistemas que possuem classes diferentes de usuários, o posto de atendimento deve decidir qual o próximo tipo de usuário a ser atendido.

- Políticas de admissão no sistema: quais os usuários que serão admitidos no sistema? É importante definir as políticas que nortearão o acesso dos usuários ao sistema.

- Disciplina da fila: mesmo quando temos apenas uma classe

de usuários, é importante definir a ordem com a qual os usuários serão processados no posto de atendimento.

Assimile

Agora que já temos uma boa compreensão sobre o conceito de filas M/M/1, vamos assimilar alguns conceitos?

O primeiro, relembrando a notação de Kendall, é do significado de uma fila M/M/1:

- 1º M: tempo entre chegadas, que segue uma distribuição exponencial

- 2º M: tempo de serviço, que também segue uma distribuição exponencial

- 1: número de servidores

Observamos que a fila M/M/1 é um exemplo de um processo de nascimento e morte, de modo que podemos calcular L (número de clientes esperado no sistema) e L_q (comprimento esperado da fila).

Sem medo de errar

Vamos retomar ao caso em que você é o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento de varejo de produtos perecíveis, e você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de combustível no estacionamento. A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura.

Considerando que, inicialmente, você recomende a instalação de apenas uma bomba, de modo que o cliente ao acessar o local de abastecimento possa se deparar com a bomba vazia e prontamente abastecer o veículo ou aguardar numa fila, você poderia se deparar com um problema de a fila crescer indefinidamente?

Para responder a esse questionamento da diretoria, você precisa se lembrar dos seguintes itens:

- L é o número de clientes esperado no sistema

- L_q é o comprimento esperado da fila
- ω é o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço
- ω_q é o tempo de espera para cada usuário na fila (excluindo o tempo de serviço)

A princípio, dadas as informações que o setor de planejamento está levantando a taxa de chegada (λ) e da taxa de serviço (μ), você pode analisar a intensidade de tráfego. A intensidade de tráfego nada mais é do que a razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço.

O que ocorre se a intensidade de tráfego for menor do que 1?

Estamos então lidando com o seguinte caso: $\lambda < \mu$. Portanto, o processo será recorrente positivo, ou seja, o tempo médio recorrente será finito. Portanto, o tempo necessário para que a cadeia esteja no estado i e atinja o estado j será finito.

E se a intensidade de tráfego for igual a 1?

Então, $\lambda = \mu$, ou seja, o nosso processo é recorrente nulo. Portanto, o tempo médio recorrente tende a infinito. Ou seja, o tempo necessário para que a cadeia esteja no estado i e atinja o estado j será infinito.

E se a intensidade de tráfego for maior do que 1?

Nesse caso, $\lambda > \mu$, então a quantidade de usuários no sistema certamente tenderá ao infinito, uma vez que a taxa de atendimento é menor do que a taxa de chegada.

Portanto, a primeira forma de avaliar se a fila crescerá indefinidamente seria por meio da intensidade de tráfego, tendo como base os dados coletados e sendo a fila do tipo M/M/1, ou seja, com taxa de chegada e de serviço com distribuição exponencial.

Além disso, é possível calcular os valores de:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$

E, a partir deles, calcular:

$$\omega = \frac{L}{\lambda}$$

$$\omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Ou seja, o tempo de espera para cada usuário, com o tempo de serviço, e o tempo de espera para cada usuário na fila, respectivamente. Sabendo-se o tempo de serviço e o tempo de espera na fila, é possível avaliar se o cliente ficará muito tempo aguardando para ser atendido, comparado ao tempo de abastecimento. Analisando os tempos anteriores nos outros postos da região e com a pesquisa de satisfação, é possível avaliar se é necessário acrescentar uma nova bomba de combustível ou não, para que o tempo de espera esteja adequado à necessidade e ao tempo limite dos clientes.

Logo, a fim tornar o seu parecer mais claro, você pode supor que, inicialmente, chegam 25 automóveis a essa bomba de combustível por hora e cada automóvel requer, em média, 2 minutos para ser abastecido. Qual o tempo de espera para cada usuário (incluindo e excluindo o tempo de serviço)?

Vamos lá, primeiro precisamos definir os valores de λ e μ.

Nesse caso, $\lambda = 25$ automóveis/hora e $\mu = \frac{60}{2} = 30$ automóveis/hora

$L = \lambda \times \omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda}$ como $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{25}{30 - 25} = 5$, portanto

$\omega = \frac{5}{25} = 0{,}2$ hora

Ou seja, o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) é 0,2 hora, o equivalente a 12 minutos.

$L_q = \lambda \times \omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$ como

$L_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \frac{25}{30}\left(\frac{25}{30 - 25}\right) = 4{,}17$, portanto

$\omega_q = \frac{4{,}17}{25} = 0{,}17$ hora

Ou seja, o tempo de espera na fila é de 0,17 hora, ou 10,2 minutos.

Portanto, nesse sistema em especial podemos verificar que o tempo na fila (9,6 minutos) é quase cinco vezes do tempo em serviço (2 minutos).

Neste caso hipotético, perceba que $\lambda < \mu$. Portanto, o processo será recorrente positivo, ou seja, o tempo médio recorrente será finito.

Avançando na prática

Teoria de filas em um aeroporto

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja um analista de tráfego de um aeroporto que possui uma única pista de pouso e decolagem. O histórico do aeroporto mostra que chegam 10 aviões por hora, sendo que cada avião requer, em média, 4 minutos para aterrissar. Considerando que as chegadas dos aviões são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo de aterrisagem, qual é o tempo médio de espera para o pouso?

Resolução da situação-problema

Vamos lá, primeiro precisamos definir os valores de λ e μ.

Nesse caso, $\lambda = 10$ aviões/hora e $\mu = \frac{60}{4} = 15$ aviões/hora

$L = \lambda \times \omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda}$ como $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10}{15 - 10} = 2$, portanto

$\omega = \frac{2}{10} = 0,2$ hora

Ou seja, o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) é 0,2 hora, o equivalente a 12 minutos.

$L_q = \lambda \times \omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$ como

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right) = \frac{10}{15}\left(\frac{10}{15-10}\right) = 1{,}33$$, portanto

$$\omega_q = \frac{1{,}33}{10} = 0{,}13 \text{ hora}$$

Logo, o tempo de espera para o pouso é de 0,13 hora, ou 7,8 minutos.

Portanto, nesse sistema em especial podemos verificar que o tempo na fila (7,8 minutos) é quase o dobro do tempo em serviço (4 minutos).

Parabéns por mais esse desafio vencido!

Faça valer a pena

1. Dentre as medidas de desempenho que podem ser utilizadas para avaliar o sistema de filas, pode-se destacar o tamanho da fila, o tempo médio de espera da fila e o tempo médio de espera no sistema. Contudo, uma das mais utilizadas refere-se à medida de desempenho de Little.
Avalie as afirmações I, II e III.

I. Conhecida como Lei de Little, esta lei faz uma relação entre o número de usuários que estão no sistema ou na fila e o tempo médio que eles gastam na fila.

II. Matematicamente, sabe-se que as equações de Little relacionam o número médio de usuários (L ou L_q) com o tempo médio de espera (ω ou ω_q).

III. Essa lei não é aplicada quando o número de chegadas é igual ao número de saídas, ou seja, quando o sistema está em equilíbrio.

Assinale a alternativa correta.

a) I, II e III são corretas.
b) Somente I e II são corretas.
c) Somente II e III são corretas.
d) Somente I é correta.
e) Somente II é correta.

2. Uma hamburgueria, para economizar custos, começou seu negócio atendendo somente pelo sistema drive *thru*, permitindo ao cliente

comprar o produto sem sair do carro. O histórico de vendas mostra que, na hamburgueria, chegam 30 clientes por hora, sendo que cada cliente requer, em média, 1,5 minutos para fazer o pedido. Considere que as chegadas dos clientes são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo.

Qual é o tempo médio de espera?

a) 4,5 minutos.
b) 15 minutos.
c) 11,6 minutos.
d) 3,8 minutos.
e) 5,5 minutos.

3. Um tipo especial de fila: M/M/1 indica: tempo entre chegadas (M) regido por distribuição exponencial; tempo de serviço regido por distribuição exponencial; e somente 1 servidor. Com base nisso, considere as afirmações I, II e III:

> I. A distribuição exponencial é consistente com chegadas aleatórias, sendo que o tempo entre chegadas não é influenciado pelo tempo da última chegada.
> II. Se existirem usuários diferentes, o tempo entre chegadas depende do tempo da última chegada, o que nos permite desprezar a distinção dos usuários.
> III. A taxa de serviço μ também é uma variável aleatória com distribuição exponencial, assim como a taxa de chegadas.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente I é correta.
b) Somente III é correta.
c) I, II e III são corretas.
d) Somente II e III são corretas.
e) Somente I e III são corretas.

Seção 4.3

Filas M/M/c

Diálogo aberto

Caro aluno, continuaremos nosso estudo de filas, trabalhando especificamente com as filas M/M/c.

Neste momento, entraremos nos conceitos fundamentais das filas M/M/c, englobando o estudo distribuição estacionária para M/M/c e exemplos desse tipo de fila e aplicações do sistema de filas.

Você já deve estar percebendo a importância do estudo da teoria de filas, uma vez que está sendo aplicada nos mais diversos sistemas, tais como nos sistemas de serviço comerciais; sistemas de serviço de transporte; sistemas de serviço empresa-indústria; e até sistemas de serviço social.

Para colaborar no seu entendimento, são exploradas aplicações dos modelos de fila em conjunto com a teoria para que você possa se situar e perceber o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Assim, veja que nos diversos serviços comerciais temos evidências de filas como em bancos, hospitais, clínicas, transportes, lojas, entre outros.

Considerando que você seja o gestor de uma rede de supermercados que atua no segmento de varejo de produtos perecíveis, você está sendo requisitado pela cúpula administradora a emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento, uma vez que a empresa deseja diversificar os ramos de atuação e os serviços prestados aos clientes.

A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas.

Inicialmente, você recomendou a instalação de apenas uma bomba. Se você julgar necessário avaliar a instalação de mais de uma bomba, quais as informações que precisariam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que

existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Pense a respeito dessa indagação e considere que a diretoria lhe solicitou um relatório com esses dados.

Bons estudos e vamos avançando na construção do seu conhecimento em processos estocásticos, especialmente agora em teoria das filas!

Não pode faltar

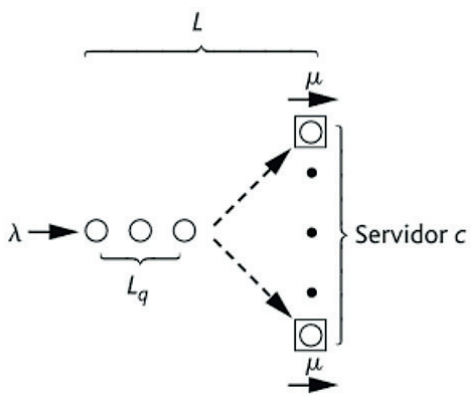
Caro aluno, você já aprendeu o conceito de fila M/M/1, mas o que ocorre quando temos mais de um servidor (ou posto de atendimento)? Nesse sentido, então, vamos estudar o conceito de fila M/M/c.

Para entendermos a fila M/M/c, vamos relembrar a notação de Kendall:

- 1º M: taxa de chegada com distribuição exponencial
- 2º M: taxa de serviço com distribuição exponencial
- c: número de servidores

Portanto, na fila M/M/c, diferentemente da fila M/M/1, podemos ter múltiplos servidores. A Figura 4.6 apresenta uma representação geral das filas M/M/c.

Figura 4.6 | Fila M/M/c



Fonte: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000004981>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Como visto anteriormente, a chegada de usuários segue um processo de Poisson, com distribuição exponencial (λ), e a taxa de serviço (μ) também é uma variável aleatória com distribuição exponencial.

No sistema em equilíbrio, temos:

- $\lambda_n = \lambda$, para $n \geq 0$
- $\mu_n = \mu$, para $n \geq 1$

O que ocorre com múltiplos servidores? A taxa de serviço agora será em função do número de servidores c, conforme segue abaixo, lembrando que n faz referência ao número de usuários no sistema.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \rightarrow 0 \leq n < c \\ c\mu \rightarrow n \geq c \end{cases}$$

Portanto, quando o número de usuários no sistema for maior ou igual a zero e menor que o número de servidores, a taxa de serviço será em função do número de usuários no sistema. Quando o número de usuários do sistema for maior ou igual ao número de servidores, a taxa de serviço será em função do número de servidores (FERREIRA FILHO, 2013).

Pesquise mais

Caro aluno, o que você acha de aprofundar um pouco mais os seus conhecimentos em filas M/M/c?

Como nós vimos, na notação de Kendall também existem outros itens que não estão explícitos quando falamos em M/M/c:

- K: capacidade da fila
- Z: modo de atendimento

Quando K e Z estão ausentes, significa que a fila tem capacidade infinita e modo de atendimento primeiro a chegar primeiro a ser atendido. E quando temos uma fila com capacidade finita?

Vamos então ver as diferenças entre uma fila $M/M/c/\infty$ (capacidade infinita) e $M/M/c/K$ (capacidade finita)? Leia da página 21 até a 26 do material abaixo:

SINAY, M. C. F. **Modelagem de filas a partir de diagramas de fluxos.**

In: XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2004, São João del-Rei. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2004/pdf/arq0281.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Bons estudos!

E como fica a distribuição estacionária para filas do tipo M/M/c? Será que temos alguma alteração?

A primeira coisa que podemos observar que sofre alteração é a intensidade de tráfego (razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço), pois agora temos múltiplos servidores, conforme equação 4.7:

Intensidade de tráfego: $\frac{\lambda}{c\mu}$ quando $n \geq c$ (Equação 4.7)

Lembrando também que a distribuição estacionária, representada por π, será:

$$\pi_{n+1} = -\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\pi_n + \pi_{n+1} + \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} \quad \text{(Equação 4.8)}$$

Nos casos em que $0 \leq n < c$, a distribuição estacionária ficará:

$$\pi_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 \quad \text{(Equação 4.9)}$$

Caso $n \geq c$, a distribuição fica:

$$\pi_n = \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 \quad \text{(Equação 4.10)}$$

Sendo que π_0 é descrito conforme equação 4.11 (FERREIRA FILHO, 2013):

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{-1}\right]^{-1} \quad \text{(Equação 4.11)}$$

Como vimos nas filas M/M/1, se $\lambda < \mu$ o processo será recorrente positivo. No caso da fila M/M/c, se $\lambda < c\mu$ também dizemos que o processo será recorrente positivo, ou seja, o tempo

médio recorrente será finito. Portanto, o tempo necessário para que a cadeia esteja no estado i e atinja o estado j será finito.

Desta forma, o número de clientes esperado no sistema (L) é descrito conforme equação 4.12:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c!\left(c - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}} \right] \pi_0 \quad \text{(Equação 4.12)}$$

O comprimento esperado da fila (L_q) segue conforme equação 4.13:

$$L_q = \frac{\pi_0 c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c!\left(c - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}} \quad \text{(Equação 4.13)}$$

De acordo com a Lei de Little, o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço, será conforme equação 4.14 (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

$$\omega = \frac{L}{\lambda} \quad \text{(Equação 4.14)}$$

O tempo de espera para cada usuário na fila (excluindo o tempo de serviço) será descrito conforme equação 4.15:

$$\omega_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad \text{(Equação 4.15)}$$

Exemplificando

Caro aluno, a fim de facilitar seu entendimento, vamos reconsiderar o exemplo visto na seção anterior, mas agora com a possibilidade de múltiplos servidores.

Então, suponha que você esteja numa indústria que possui uma linha de montagem com duas máquinas iguais, ao invés de apenas uma. Chegam 15 peças nessa máquina por hora e cada uma leva em média

3 minutos para ser processada, independente se será processada pela máquina 1 ou 2, uma vez que são iguais. Qual o tempo de espera para cada usuário (incluindo e excluindo o tempo de serviço)?

Os valores da taxa de chegada e de serviço são os mesmos:

$\lambda = 15$ peças/hora

$$\mu = \frac{60}{3} = 20 \text{ peças/hora}$$

Temos dois servidores, portanto $c = 2$.

Vamos agora calcular L e L_q, mas para isso precisamos calcular π_0.

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

O somatório é de $n = 0$ até $n = 1$, uma vez que $c - 1 = 1$, portanto:

$$n = 0 \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{0!} \left(\frac{15}{20} \right)^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{1!} \left(\frac{15}{20} \right)^1 = 0,75$$

$$\pi_0 = \left[1 + 0,75 + \frac{1}{2!} \left(\frac{15}{10} \right)^2 \left(1 - \frac{15}{40} \right)^{-1} \right]^{-1} = \left[1,75 + 0,28 \times 1,6 \right]^{-1} = 0,4545$$

$$L = \frac{15}{20} + \left[\frac{2 \left(\frac{15}{20} \right)^3}{2! \left(2 - \frac{15}{20} \right)^2} \right] 0,4545 = 0,87$$

$$\omega = \frac{0,87}{15} = 0,05$$

Ou seja, o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço, é de 0,05 hora, ou 3,5 minuto

$$L_q = \frac{0{,}4545 \times 2\left(\frac{15}{20}\right)^3}{2!\left(2-\frac{15}{20}\right)^2} = 0{,}122$$

$$\omega_q = \frac{0{,}122}{15} = 0{,}00813$$

Portanto, o tempo na fila é de 0,00813 horas, ou 0,5 minuto, o que resulta num tempo em serviço de aproximadamente 3 minutos.

Comparando com o exemplo de um único servidor (M/M/1), tínhamos 9 minutos de espera na fila. Ao acrescentar mais um servidor, esse tempo de espera caiu para 0,5 minuto e o tempo total do usuário no sistema caiu para 3,5 minutos.

Seria interessante analisar também o custo de implementação de mais uma máquina, mas já observamos que o tempo em fila reduziu em 18 vezes.

Analogamente ao apresentado no box "Exemplificando", será que podemos, então, utilizar a teoria das filas para prever o número de caixas que uma loja necessita para atender os clientes?

A resposta é sim e foi exatamente isso que Figueiredo e Rocha (2010) fizeram, de modo que desenvolveram um trabalho utilizando filas do tipo M/M/c para atingir esse objetivo. O estudo de caso, proposto pelas autoras, era composto por uma loja com um grande número de clientes e que possuía uma fila única para atendimento aos caixas e utilizava um sistema próprio para controle do número de clientes na fila.

Portanto, o estabelecimento já utilizava múltiplos caixas, mas a questão era saber se a quantidade de caixas disponível estava adequada para a demanda, levando-se em consideração que podem existir picos de demanda em diferentes horários do dia.

Figueiredo e Rocha (2010) colocaram como condição que o tempo médio de espera na fila não excedesse três minutos e,

ao utilizar o sistema M/M/c para a modelagem do problema em questão, conseguiram resultados melhores do que os apresentados pelo sistema próprio de controle do número de clientes na fila. Isso conferiu benefícios para a loja, uma vez que existe um custo associado à ociosidade dos caixas.

Assimile

O que você entendeu do assunto filas M/M/c? Vamos relembrar alguns conceitos importantes para que você assimile os assuntos abordados?

Em primeiro lugar, relembrando a notação de Kendall, que dá sentido ao termo M/M/c:

- 1º M: taxa de chegada com distribuição exponencial
- 2º M: taxa de serviço com distribuição exponencial
- c: número de servidores

Ou seja, verificamos que a principal diferença da fila M/M/c para a fila M/M/1 é a existência de múltiplos caixas. Mas, além dessa diferença, qual o impacto que isso gerava para o nosso sistema?

Que a taxa de serviço μ passa a ser em função do número de servidores c, de modo que:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \rightarrow 0 \leq n < c \\ c\mu \rightarrow n \geq c \end{cases}$$

Sendo n o número de usuários no sistema.

Quando $n \geq c$, definimos que a intensidade de tráfego será:

$$\frac{\lambda}{c\mu}$$

Lembrando que a intensidade de tráfego é a razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço, o que reflete na utilização do nosso sistema de fila.

Agora que você já compreendeu o conceito de teoria das filas, vamos ver alguns exemplos reais de estudos de caso?

- O primeiro deles é o estudo de filas em bancos. Uma coisa

que é fundamental observarmos é que o aumento no número de servidores pode reduzir significativamente o tempo de espera na fila. No entanto, o aumento no número de servidores também acarretará custos operacionais maiores, ou seja, a decisão a ser tomada deve levar em conta os custos advindos com a implementação de um novo servidor. Diversos autores, como Leitner, Sznitowski e Geier (2011), fizeram estudos de filas em bancos analisando a capacidade de atendimento e demanda versus custo. Vale ressaltar, nesse caso, que os municípios possuem legislação própria sobre o tempo máximo de espera. Leitner, Sznitowski e Geier (2011) buscaram responder ao seguinte questionamento: qual o número de caixas necessário para o atendimento da demanda local, considerando-se a legislação sobre o tempo de espera?

- Outro estudo interessante é o de chamadas em *call* centers. Provavelmente você já teve que entrar em contato com o *call* center de algum prestador de serviços ou comércio, correto? É comum que exista uma fila para que você seja atendido por um operador, o que muitas vezes faz com que o tempo gasto aguardando atendimento seja maior do que o tempo de serviço, deixando o cliente por vezes insatisfeito. Alguns autores já fizeram esse tipo de análise, como Araújo, Araújo e Adissi (2003). No estudo em questão, os autores buscaram implementar o que eles chamaram de fila inteligente. A fila inteligente, de acordo com Araújo, Araújo e Adissi (2003), é um modo de atendimento diferente do que normalmente é utilizado pelas empresas de *call* center, pois o sistema prioriza o atendimento das chamadas mais rápidas. Com a adoção dessa nova regra no atendimento da fila, uma empresa na área de telecomunicações conseguiu economizar quase R$ 780.000,00 ao ano, além de aumentar a satisfação dos clientes.

- Você sabia que também podemos aplicar os conceitos da teoria das filas em portos? É o que Silva et al. (2006) fizeram ao analisar as demandas no porto de Itajaí, em Santa Catarina. No caso dos portos, existe um termo muito comum que é berço de atracação, ou somente berço. O berço é o local onde o navio atraca, para que seja feito o embarque e o desembarque de cargas. O que ocorre, na prática, é que cada porto possui um número limitado de berços, mas existe

uma fila de embarcações aguardando para poder carregar ou descarregar, o que leva tempo e acarreta custos para as empresas. Como no estudo de caso apresentado por Silva et al. (2006), que foi feito no porto de Itajaí, caso um berço a mais fosse implantado, isso traria uma redução no tempo médio que o navio permanece no sistema.

Reflita

Agora que nós já vimos algumas aplicações reais de teoria das filas, é a sua vez. Você consegue pensar em alguma outra aplicação para a teoria das filas diante do que estudamos?

Reflita sobre isso e bons estudos!

Sem medo de errar

Vamos retomar nosso problema do posto de combustível? Lembre-se de que você necessita emitir um parecer sobre a implantação de um posto de abastecimento de combustível no estacionamento do supermercado. A princípio, a diretoria está analisando quantas bombas de combustível deveriam ser instaladas para atender à demanda futura, uma vez que se trata de um problema de demanda e formação de filas. Se você julgar necessário avaliar a instalação de mais de uma bomba, quais as informações que precisariam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Precisamos então das seguintes informações:

- Taxa de chegada
- Taxa de serviço

Com essas duas informações preliminares podemos avaliar a intensidade de tráfego. Já fizemos isso anteriormente para a fila M/M/1, ou seja, com apenas uma bomba de combustível. E para instalar uma segunda bomba?

Poderíamos calcular o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço, (ω) e o tempo de espera para cada usuário na fila (ω_q) para a fila com uma bomba de combustível (tipo

M/M/1) e para duas bombas de combustível (tipo M/M/c).

Analisar a diferença de tempo é fundamental para avaliar o impacto da instalação da segunda bomba, levando-se em conta o tempo médio máximo de que os clientes estão dispostos a aguardar para serem atendidos.

Estamos avançando na análise do tempo de espera e do tempo de serviço, mas só isso basta? Não, temos que levar em conta que a instalação de uma bomba terá custos de instalação e de operação. Será que esses custos serão cobertos pelo uso da nova bomba?

Portanto, avaliando o comportamento do número de clientes no sistema com apenas uma bomba e com duas bombas, teremos uma primeira ideia da amortização do investimento com a nova bomba.

Deste modo, utilizando as informações anteriores você poderá avaliar o real impacto do acréscimo de uma bomba no sistema.

Logo, a fim tornar o seu parecer mais claro, você pode supor que agora tenham duas bombas (bomba 1 e bomba 2) e, inicialmente, chegam 25 automóveis ao posto de combustível por hora e cada automóvel requer, em média, 2 minutos para ser abastecido independente se será abastecido pela bomba 1 ou 2, uma vez que são iguais. Qual o tempo de espera para cada usuário (incluindo e excluindo o tempo de serviço)?

Os valores da taxa de chegada e de serviço são os mesmos:

Nesse caso, $\lambda = 25$ automóveis/hora e $\mu = \frac{60}{2} = 30$ automóveis/hora

Temos dois servidores (2 bombas iguais de combustível), portanto $c = 2$.

Vamos agora calcular L e L_q, mas para isso precisamos calcular π_0.

O somatório é de $n = 0$ até $n = 1$, uma vez que $c - 1 = 1$, portanto:

$$n = 0 \rightarrow \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{0!}\left(\frac{25}{30}\right)^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1!}\left(\frac{25}{30}\right)^1 = 0,83$$

$$\pi_0 = \left[1 + 0,83 + \frac{1}{2!}\left(\frac{25}{30}\right)^2 \left(1 - \frac{25}{60}\right)^{-1}\right]^{-1} = [2,89]^{-1} = 0,412$$

$$L = \frac{25}{30} + \left[\frac{2\left(\frac{25}{30}\right)^3}{2!\left(2 - \frac{25}{30}\right)^2}\right] 0,412 = 0,83 + \left[\frac{1,142}{2,738}\right] 0,346 = 1,0084$$

$$\omega = \frac{1,0084}{25} = 0,0403$$

Ou seja, o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço, é de 0,0403 hora, ou 2,42 minutos.

$$L_q = \frac{0,412 \times 2\left(\frac{25}{30}\right)^3}{2!\left(2 - \frac{25}{30}\right)^2} = \frac{0,471}{2,738} = 0,175$$

$$\omega_q = \frac{0,17}{25} = 0,007$$

Portanto, o tempo na fila é de 0,007 hora, ou 0,42 minutos, o que resulta num tempo em serviço de 2 minutos.

Agora, vamos comparar quando tinha apenas uma bomba (fila M/M/1), conforme vimos na seção anterior: o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) era de 12 minutos e o tempo de espera na fila era de 9,6 minutos.

Perceba que, com a introdução de uma nova bomba de combustível, o tempo na fila reduziu de 9,6 minutos para 0,42 minutos.

Parabéns, mais uma etapa concluída!!

Avançando na prática

Teoria de filas e o aeroporto

Descrição da situação-problema

Vamos retomar a situação do aeroporto da seção anterior, mas agora suponha que você seja um analista de tráfego de um aeroporto que possui **duas pistas** de pouso e decolagem. O histórico do aeroporto mostra que chegam 10 aviões por hora, sendo que cada avião requer, em média, 4 minutos para aterrissar, independente da pista. Considerando que as chegadas dos aviões são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo de aterrisagem, qual é o tempo médio de espera para o pouso?

Resolução da situação-problema

Os valores da taxa de chegada e de serviço são os mesmos: Nesse caso, $\lambda = 10$ aviões/hora e $\mu = \frac{60}{4} = 15$ aviões/hora

Temos dois servidores, portanto $c = 2$.

Vamos agora calcular L e L_q, mas para isso precisamos calcular π_0.

O somatório é de $n = 0$ até $n = 1$, uma vez que $c - 1 = 1$, portanto:

$$n = 0 \rightarrow \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{0!}\left(\frac{10}{15}\right)^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{15}\right)^1 = 0,67$$

$$\pi_0 = \left[1 + 0,67 + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{15}\right)^2\left(1 - \frac{10}{30}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[1,67 + 0,22 \times 1,49\right]^{-1} = 0,501$$

$$L = \frac{10}{15} + \left[\frac{2\left(\frac{10}{15}\right)^3}{2!\left(2-\frac{10}{15}\right)^2} \right] 0,501 = 0,67 + \left[\frac{0,6}{7,08} \right] 0,501 = 0,712$$

$$\omega = \frac{0,712}{10} = 0,07$$

Ou seja, o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço, é de 0,07 hora, ou 4,2 minutos.

$$L_q = \frac{0,501 \times 2\left(\frac{10}{15}\right)^3}{2!\left(2-\frac{10}{15}\right)^2} = \frac{0,3}{3,53} = 0,08$$

$$\omega_q = \frac{0,08}{10} = 0,008$$

Portanto, o tempo na fila para pouso é de 0,008 hora, ou 0,48 minutos.

Agora, vamos comparar quando tinha apenas uma pista (fila M/M/1), conforme vimos na seção anterior: o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) era de 12 minutos e o tempo de espera na fila era de 7,8 minutos.

Perceba que, com a introdução de uma nova pista no aeroporto, o tempo na fila reduziu de 7,8 minutos para 0,48 minuto.

Parabéns, mais uma etapa concluída!!

Faça valer a pena

1. Quando se pensa em tipologia de filas, as características principais a serem consideradas em uma fila são: tempo de serviço; tempo entre chegadas; modo de atendimento; capacidade da fila. Assim, uma das notações mais utilizadas nos estudos de filas refere-se à contribuição de David George Kendall, que criou em 1953 a referência comumente empregada na descrição de uma fila.

Assinale a alternativa que descreve corretamente a fila M/M/c.

a) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; tempo de serviço: distribuição exponencial; número de servidores: maior que 1.
b) Tempo de serviço: distribuição exponencial; tempo de chegada: distribuição uniforme; capacidade: 2.
c) Tempo entre chegadas: uniforme; tempo de serviço: determinística; Capacidade: c.
d) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; capacidade da fila: distribuição exponencial; Número de servidores: 1.
e) Tempo entre chegadas: distribuição exponencial; capacidade da fila: distribuição uniforme; número de servidores: c.

2. A teoria de filas vem sendo muito aplicada em diferentes contextos, como em bancos, sistemas de saúde, portos, redes de atendimento, entre outros. Nesse sentido, um tipo comum de fila é a M/M/c.
Avalie as afirmações I e II, bem como a relação entre elas.

> I. Quando o número de usuários do sistema for maior ou igual ao número de servidores, a taxa de serviço será em função do número de servidores.
> PORTANTO
> II.A intensidade de tráfego (razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço) será dependente do número de servidores na razão $\frac{1}{c}$

Assinale a alternativa correta.

a) Somente I é correta.
b) Somente II é correta.
c) I e II são corretas, mas II não é consequência de I.
d) I e II são corretas, e II é consequência de I.
e) I e II não são corretas.

3. Um restaurante, para economizar custos, começou seu negócio atendendo somente pelo sistema *drive thru*, de modo que há 2 cabines de atendimento, permitindo ao cliente comprar o produto sem sair do carro. O histórico de vendas mostra que no restaurante chegam 20 clientes por hora, sendo que cada cliente requer, em média, 2 minutos para fazer o pedido. Considere que as chegadas dos clientes são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo.

Qual é o tempo médio de espera na fila?

a) 0,5 min.
b) 2 min.
c) 7,5 min.
d) 0,4 min.
e) 0,25 min.

Referências

ALVES, R.; DELGADO, C. **Processos Estocásticos**. Universidade do Porto, 1997. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2017.

ARAUJO, M. A. V.; ARAUJO, F. J. C.; ADISSI, P. J. **Distribuição da demanda telefônica de um call center através da criação e priorização de filas inteligentes.** Produção Online, v. 3, n. 4, 2003. Disponível em: <https://producaoonline.org.br/rpo/article/view/570>. Acesso em: 15 dez. 2017.

FERREIRA FILHO, V. G. M. F. **Processos estocásticos e teoria das filas.** Departamento de Engenharia Industrial. COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

FIGUEIREDO, D. D.; ROCHA, S. H. **Aplicação da teoria das filas na otimização do número de caixas: um estudo de caso.** Iniciação Científica CESUMAR, v. 12, n. 2, p. 175-182, 2010. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br:8080/jspui/bitstream/1/1348/1/IC_FIGUEIREDO, Danielle Durski_2010.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional.** 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

LEITNER, C. P. S.; SZNITOWSKI, A. M.; GEIER, L. Dimensionamento do número de caixas executivos em relação à demanda e tempo de atendimento: um estudo de caso em uma agência bancaria no interior do estado de Mato Grosso. INGEPRO – Inovação, **Gestão e Produção**, v. 3, n. 4, 2011. Disponível em: <http://www.ingepro.com.br/Publ_2011/Abr/428 pg 24-33.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

SILVA, V. M. D. et al. **Teoria das filas aplicada ao caso:** porto de Itajaí-SC. In: XIII SIMPEP, 2006, Bauru. Disponível em: <http://www.simpep.feb.unesp.br/anais/anais_13/artigos/169.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2017.

Anotações

ISBN 978-85-522-0763-4
9 788552 207634