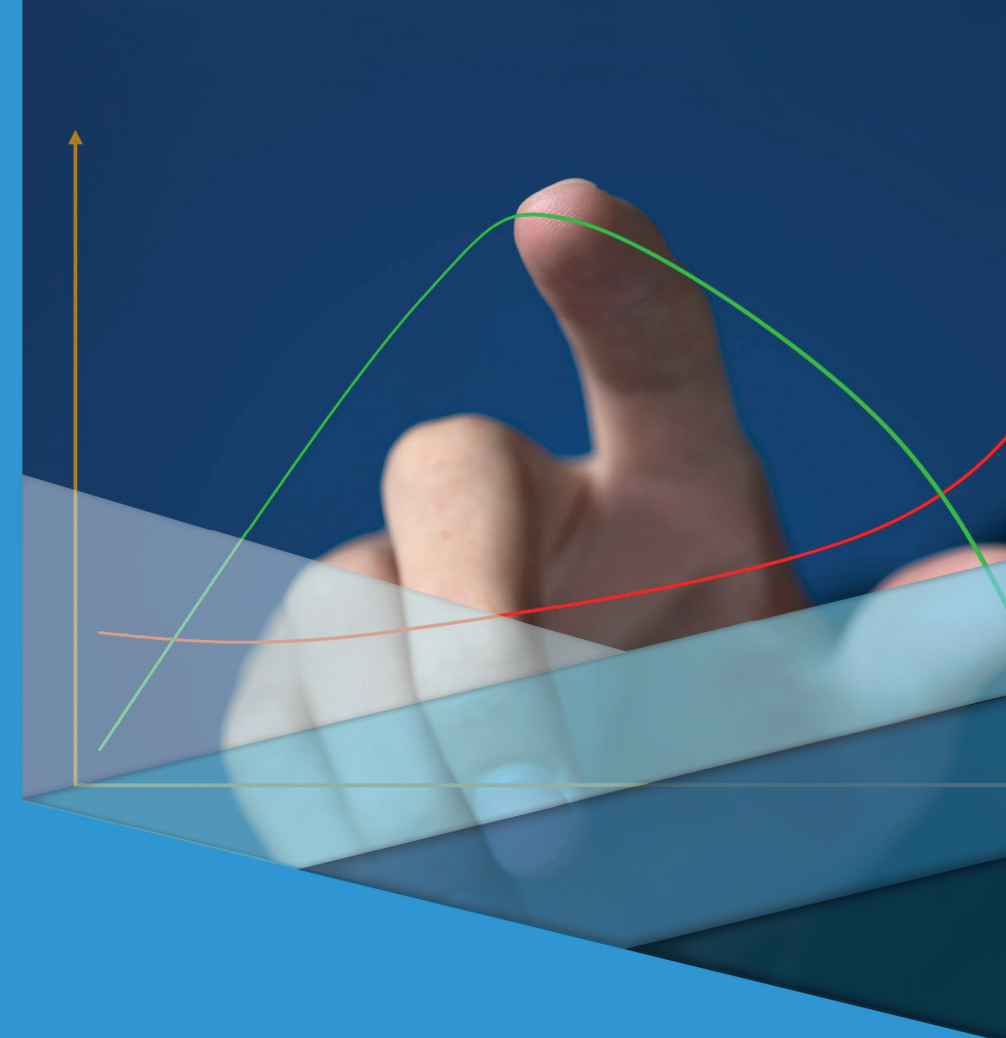


A hand is pointing at a graph. The graph has a vertical yellow axis with an arrow at the top and a horizontal yellow axis. A green curve starts at the origin, rises to a peak, and then falls. A red curve starts at a low point, rises slightly, and then falls. The background is a solid blue color.

Pesquisa Operacional

Pesquisa Operacional

Igor Polezi Munhoz

Alessandra Cristina Santos Akkari

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Kenion César Michelato Colaço

Luiz Rodrigo Bonette

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Munhoz, Igor Polezi
M963p Pesquisa operacional / Igor Polezi Munhoz, Alessandra
Cristina Santos Akkari. – Londrina : Editora e Distribuidora
Educacional S.A., 2018.
216 p.

ISBN 978-85-522-0745-0

1. Engenharia. I. Munhoz, Igor Polezi. II. Akkari,
Alessandra Cristina Santos. III. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

Sumário

Unidade 1 Modelagem na tomada de decisão	7
Seção 1.1 - Introdução à pesquisa operacional	9
Seção 1.2 - Introdução à Modelagem em pesquisa operacional	23
Seção 1.3 - Construção de modelos em pesquisa operacional	36
 Unidade 2 Programação linear, dualidade e sensibilidade	 51
Seção 2.1 - Introdução à programação linear	53
Seção 2.2 - Método simplex	68
Seção 2.3 - Dualidade e análise de sensibilidade	84
 Unidade 3 Aplicações da programação linear	 101
Seção 3.1 - Uso do Solver na resolução de problemas de pesquisa operacional	104
Seção 3.2 - Aplicação da PO em problema de transporte	121
Seção 3.3 - Redes em PO	141
 Unidade 4 Programação inteira e simulação	 161
Seção 4.1 - Programação inteira	163
Seção 4.2 - Cadeia de Markov - simulação em PO	180
Seção 4.3 - Teoria das filas - simulação em PO	196

Palavras do autor

Caro aluno, neste momento inicial você pode se indagar a respeito do motivo de estudarmos a pesquisa operacional, bem como a sua aplicação nos diferentes ramos de atividades da sociedade. Uma simples reflexão pode trazer à luz a resposta para a sua pergunta: seja por meio de uma conduta racional, seja por meio de uma conduta emocional, a todo o instante estamos tomando decisões que, por sua vez, estão vinculadas a variáveis e a restrições que se integram na constituição de um processo decisório. Na tomada de decisão, todos buscamos alcançar uma melhor solução, certo?

Assim, por caminhos diferentes e muitas vezes peculiares, os indivíduos buscam soluções ótimas para seus problemas a fim de se ter resultados assertivos. É exatamente sob essa perspectiva que se insere a pesquisa operacional, sendo aplicada em empresas dos mais diferentes setores, como indústrias, transporte, comércio, mercado financeiro, entre outros, a fim de buscar otimizar as soluções diante dos mais diversos problemas. Logo, observa-se a importância dessa área na sua atuação profissional, desde uma função estratégica operacional até a função de gestor ou administrador que requer alta tomada de decisão.

Em razão disso, iniciaremos nosso estudo, na Unidade 1, por meio do entendimento da pesquisa operacional como ferramenta gerencial e seu papel na tomada de decisão. Entenderemos a importância dos modelos, bem como seus tipos, processo de modelagem e teste de modelos. Assim, na primeira unidade pretende-se que você possa conhecer e saber analisar criticamente o uso de modelos em pesquisa operacional.

Já na Unidade 2, estudaremos os conceitos e aplicação da programação linear, além do funcionamento do método simplex. Aprenderemos a teoria da dualidade e saberemos como desenvolver análise de sensibilidade em pesquisa operacional. Na Unidade 2, espera-se que você consiga formular e implementar um modelo de programação linear para resolução de problemas de pesquisa operacional.

Na Unidade 3, teremos contato com um conteúdo aplicado, englobando a assimilação do uso da ferramenta Solver do Excel e o

estudo de problemas de transporte e de redes. Por meio do estudo desta unidade, você vai ser capaz de saber utilizar ferramentas computacionais para resolução de problemas de pesquisa operacional.

Finalizaremos nosso estudo na Unidade 4, abrangendo a assimilação dos conceitos de programação inteira e adentraremos na parte de simulação em pesquisa operacional. Nesta unidade, espera-se que você consiga analisar criticamente o uso da simulação computacional em problemas de pesquisa operacional.

Perceba que o autoestudo será fundamental, visando à assimilação do conteúdo e à aplicação das melhores práticas de pesquisa operacional do mercado.

Caro aluno, diante de um cenário repleto de boas perspectivas para a área de pesquisa operacional como ferramenta gerencial, esperamos que você se sinta motivado a dedicar seu tempo e seus esforços em um estudo com viés aplicado, que lhe proporcionará chances reais de assimilar os conceitos e as técnicas que você utilizará na sua vida profissional.

Logo, tenha um excelente estudo e seja ativo, a partir de agora, na construção do seu próprio conhecimento!

Modelagem na tomada de decisão

Convite ao estudo

Caro aluno, na Unidade 1, nosso estudo será iniciado por meio do entendimento da pesquisa operacional como ferramenta gerencial e seu papel na tomada de decisão, abrangendo, inclusive, a evolução histórica dessa área, a fim de que você compreenda como começaram os estudos em pesquisa operacional.

Posteriormente, entenderemos a importância do uso de modelos em pesquisa operacional, bem como seus tipos, as fases do processo de modelagem e teste desses modelos.

Então, você verá como construir modelos matemáticos em pesquisa operacional, de acordo com as variáveis de decisão e restrições, e aprenderá a implementar os resultados.

Assim, na primeira unidade, pretende-se que você possa conhecer e saber analisar criticamente o uso de modelos em pesquisa operacional, sendo esse o aspecto fundamental para a sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes. Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira

promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, como você explicaria ao seu gestor o modo por meio do qual a pesquisa operacional contribuirá nesse processo de tomada de decisão?

Para que a pesquisa operacional possa ser aplicada nesse contexto, quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Para a construção do modelo matemático você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Reflita sobre essas indagações e se empenhe no estudo do material a fim de conseguir aplicar esses conhecimentos com sabedoria e de forma efetiva no mercado de trabalho!

Tenha um ótimo estudo!

Seção 1.1

Introdução à pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, iniciaremos nosso estudo a partir de uma perspectiva histórica, refletindo sobre o contexto e perspectiva de surgimento desta área.

Então, exploraremos o uso da pesquisa operacional como ferramenta gerencial, bem como o seu papel na tomada de decisão.

Esse estudo inicial é essencial a fim de você entender a partir de qual demanda surgiu a pesquisa operacional e vislumbrar a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes. Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução deste problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional. Cabendo a você esse desafio, como você explicaria ao seu gestor o modo por meio do qual a pesquisa operacional contribuirá nesse processo de tomada de decisão? Utilizando o conceito de otimização, reflita sobre essa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, vamos iniciar o nosso estudo de pesquisa operacional entendendo um pouco melhor sobre o seu histórico e contextualização.

Sabemos que desde a Revolução Industrial houve um crescimento acentuado tanto no tamanho quanto na complexidade das organizações. O trabalho, que até então era basicamente artesanal, passou por profundas mudanças para atender todas as novas necessidades e anseios da população e das organizações.

Para termos uma ideia de quão profundas foram essas transformações, vamos analisar um indicador: o consumo de energia pela humanidade. No início dos anos 1700 já existiam alguns geradores de energia a vapor que tinham uma potência média 4.000 watts. Em 1850, logo após a transição marcada pela Revolução Industrial, os geradores já produziam na ordem de 600.000 watts, ou seja, em menos de 150 anos a capacidade dos geradores de energia aumentou também em aproximadamente 150 vezes. E de lá até hoje o aumento foi ainda mais significativo: atualmente, por exemplo, a Usina de Itaipu, que é a hidrelétrica com maior produção de energia elétrica no mundo, tem uma potência instalada de 14.000 megawatts, ou seja, mais de 20 mil vezes a capacidade de um gerador em 1850.

Mas por que tudo isso é importante? O aumento do uso da energia está relacionado ao desenvolvimento da sociedade, o que fez com que novas necessidades surgissem. A produção artesanal não era mais suficiente, o que fez com que a complexidade nos sistemas produtivos crescesse.

A alocação de recursos passou a ser um grande problema, uma vez que com uma maior complexidade fica mais difícil destinar os recursos disponíveis para todas as atividades de modo eficiente. Esse contexto gerou um ambiente propício ao emprego da pesquisa operacional, que usualmente chamaremos de PO.

No entanto, a origem da PO, como nós conhecemos hoje, remonta ao início da Segunda Guerra Mundial. Como assim? O que ocorria na Segunda Guerra que trouxe à tona o conceito de PO? Como vocês devem saber, o ambiente de guerra favorece o

surgimento de muitas técnicas e tecnologias, mas nesse caso em especial podemos destacar a necessidade de um planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros. Esses recursos escassos deveriam ser alocados em diversas operações militares, portanto, poderiam ditar o sucesso ou o fracasso nas batalhas.

A necessidade de um planejamento científico para a alocação dos recursos fez com que os comandos norte-americano e britânico escalassem diversos cientistas da época para prover uma solução adequada para esse problema. A questão central aqui seria: como alocar eficientemente os recursos escassos?

Da situação descrita anteriormente surgiu o nome pesquisa operacional, ou seja, foram executadas pesquisas relacionadas às operações militares, e os resultados relacionam-se com o desenvolvimento de diversos métodos eficientes de alocação, o que aliás contribuiu de modo significativo na vitória da Batalha do Atlântico Norte com o uso do radar, combinado às estratégias de administração de operações antissubmarinos.

Nesse contexto, surgiu também o método simplex, que é um algoritmo de otimização que abordaremos futuramente. O simplex foi desenvolvido por George B. Dantzig na década de 1940, enquanto ele trabalhava no Pentágono planejando e programando atividades militares, e foi um dos marcos da PO, sendo Dantzig considerado o pai da programação linear.

No entanto, a aplicação da PO não ficou restrita ao mundo militar, uma vez que a guerra acabou e os problemas das indústrias pós-guerra voltaram a tomar força. A aplicação dos conhecimentos gerados na guerra começou a se disseminar nos anos 1950 em diversas organizações, pois, embora o contexto fosse diferente, os problemas de tomada de decisão eram os mesmos enfrentados pelos militares.

Logo em seguida, outras principais contribuições surgiram, como a própria Teoria das Filas (veremos mais para frente neste livro), que já se encontrava bem desenvolvida antes do final da década de 1950.

Contudo, uma coisa ainda limitava o uso da PO em problemas complexos: a quantidade de cálculos necessários para obtenção da solução. O advento da revolução computacional contribuiu de forma significativa para ampliar o uso da PO, uma vez que o

desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que os executados pelo homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

O acesso à PO foi se intensificando cada vez mais e, hoje, a grande maioria da população consegue utilizar com facilidade softwares que empregam os conceitos de otimização em computadores pessoais, como o Solver do Microsoft Excel, que veremos com mais detalhes adiante.



Pesquise mais

Caro aluno, vamos nos aprofundar um pouco mais sobre o histórico da pesquisa operacional?

Vale a pena ler na Seção 1.2 (Origens da pesquisa operacional) do livro *Introdução à pesquisa operacional* de André Longaray, na qual o autor apresenta uma cronologia detalhada da origem da pesquisa operacional. Indicamos a leitura das páginas 4 à 6.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013. Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000005844>>. Acesso em: 30 ago. 2017.

Como vimos anteriormente, o objetivo da pesquisa operacional é otimizar a alocação de recursos escassos, e isso teve um impacto significativo em diversas organizações no mundo, pois trouxe um meio passível de ser aplicado para aumentar a produtividade das empresas e a economia de muitos países.

Portanto, podemos destacar o uso da PO como uma ferramenta gerencial, dada a sua importância e as suas possíveis aplicações que podem trazer impactos significativos para a gestão empresarial.



Exemplificando

Vamos ver alguns exemplos de aplicações da PO em algumas organizações que obtiveram êxito?

Hillier e Lieberman (2013) apresentam vários casos de sucesso, valendo citar alguns exemplos em diversos segmentos.

Empresas aéreas:

- United Airlines: aplicou os conceitos de PO para ajustar os turnos de trabalho e conseguiu uma economia anual de 6 milhões de dólares.
- Continental Airlines: aplicou os conceitos de PO para realocar tripulantes nas diferenças de horários de voos e conseguiu uma economia anual de 40 milhões de dólares.

Instituições financeiras e de serviços:

- Merrill Lynch: utilizou os conceitos de PO para realizar a gestão de riscos em algumas linhas de crédito e economizou 4 bilhões de dólares, sem contar a liquidez.
- Federal Express: aplicou os conceitos de PO para executar o planejamento logístico dos despachos (valor economizado não informado).

Indústrias:

- Samsung Electronics: aplicou a PO para reduzir o tempo de fabricação e a quantidade estocada, levando a um aumento de 200 milhões de dólares nas receitas.
- Procter & Gamble: utilizou a PO no sistema de produção e na distribuição, economizando mais de 200 milhões de dólares.
- General Motors: aplicou os conceitos de PO para otimizar a eficiência das suas linhas produtivas e conseguiu gerar uma economia anual de 90 milhões de dólares.

Se pensarmos no objetivo da pesquisa operacional e analisarmos as aplicações apresentadas anteriormente, concluiremos que a PO é fundamental no processo de tomada de decisão. Como assim?

Vamos então compreender primeiro o conceito de tomada de decisão, que de acordo com Lachtermacher (2016) é identificar um problema (ou oportunidade) e escolher uma forma de resolvê-lo. O problema ocorre quando o estado atual de um cenário é diferente do esperado e a oportunidade se dá no momento em que as circunstâncias permitem que metas ou objetivos sejam superados.

De modo complementar, a definição de decisão segundo Chiavenato (2003, p. 348) remete ao “processo de análise e escolha entre as alternativas disponíveis de cursos de ações que a pessoa deverá seguir”.

A importância das decisões tomadas é evidente em diversas aplicações, desde a sua vida pessoal, com escolhas rotineiras em diferentes níveis de complexidade, até a gestão de empresas e nações, envolvendo sempre um decisor e diversas opções de caminhos a serem seguidos.

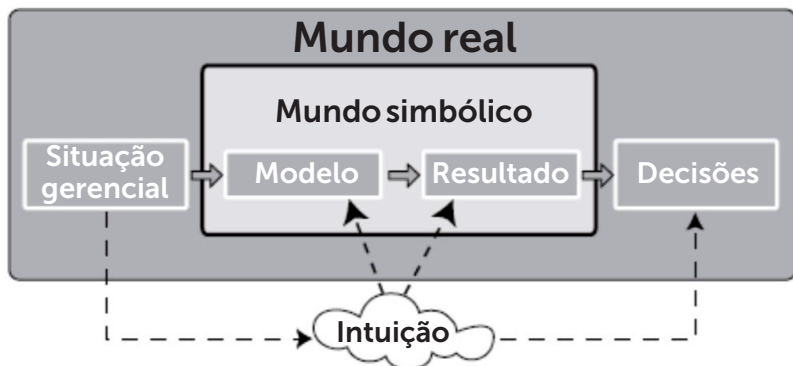
Mas como a pesquisa operacional pode nos ajudar com o processo de escolha?

Tão importante quanto a decisão tomada é o processo que vem antes dela, ou seja, aquilo que vai gerar as ações que podem melhorar o problema, também chamado de processo decisório.

A PO é a ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios.

Ao fazer a alocação adequada dos recursos escassos, estamos na verdade tomando uma decisão, como visto nas aplicações anteriores. A Figura 1.1 representa de modo esquemático o processo de tomada de decisão.

Figura 1.1 | Processo de tomada de decisão



Fonte: Lachtermacher (2016, p. 3).

Como pode ser observado na Figura 1.1, uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do uso do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Logo, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um método científico de tomada de decisão. Ou seja, como objetivo, o fundamento da PO é otimizar o resultado através de métodos puramente científicos.



Caro aluno, vale ressaltar que, quando se pensa na pesquisa operacional em sua essência de aplicação, parte-se do princípio do uso de técnicas e métodos científicos quantitativos, e estes, quando inseridos e desenvolvidos no ambiente organizacional, são analisados por equipes multidisciplinares (isto é, equipe formada por profissionais de diferentes áreas, como administradores, engenheiros, economistas, time de marketing e vendas, equipe de projetos, entre outros), o que confere um enfoque sistêmico à tomada de decisão.

Dessa forma, buscando uma visão mais objetiva e sistêmica (geral e interligada) das atividades, ações, estruturas e, também, dos recursos que serão utilizados para alcançar os objetivos da empresa, as decisões deixam de ser realizadas somente sob o ponto de vista de uma especialidade (marketing, produção, financeiro, etc.), passando a serem desenvolvidas de forma a considerar resultados mais amplos para a organização.

É justamente essa visão sistêmica que permite ao decisor ter um entendimento macro do problema e alinhar a tomada de decisão, utilizando a pesquisa operacional com a estratégia da empresa.

Assim, atualmente faz parte do enfoque da pesquisa operacional um cuidado para se assegurar uma compreensão mais aprofundada (diagnóstico assertivo) do cenário no qual o problema se encontra, possibilitando um melhor reconhecimento dos elementos internos à organização e sua interação com o ambiente externo.

Se observarmos ao nosso redor, é sabido sobre a alta competitividade e reinante dinamismo no mercado, não somente no âmbito local, mas também globalmente, requerendo, a todo o instante, esforços das diversas organizações para se destacarem em relação à concorrência, seja na melhoria do seu produto/serviço, redução de preço, minimização de processos, entre outros.

Nesse sentido, um dos meios de se obter vantagem competitiva se faz por um processo de tomada de decisão rápido, isto é, é a rapidez nas decisões empresariais com baixíssimas margens de erros, de maneira plenamente eficaz e efetiva, torna-se um mecanismo de diferenciação no mercado. Neste cenário, a PO proporciona ao decisor melhor conhecimento do real problema em análise.



Vamos refletir na aplicação da pesquisa operacional na tomada de decisões?

Pense: quais exemplos pessoais você acha que poderia empregar a pesquisa operacional?

Prezado aluno, você deve ter reparado que citamos diversas vezes ao longo da nossa seção a palavra otimização, mas será que está claro para você o real significado desse termo? Então vamos tentar entender melhor o que é otimização e sua aplicação em PO.

A primeira pergunta que podemos nos fazer é: será que otimização é somente obter a melhor solução? Observamos que buscar uma solução ótima é um ideal comum na PO e mostraremos ao longo dos nossos estudos diversos métodos para encontrarmos esse tipo de solução para alguns problemas.

Contudo, primeiro temos que entender uma coisa fundamental: nós trabalhamos com modelos porque eles são uma representação simplificada da realidade, pois além do nível de complexidade da realidade, têm alguns parâmetros que podem exercer alguma influência no comportamento real, mas que não nos interessam. É evidente que quanto mais o modelo se aproximar da realidade, mais complexo será e mais difícil para obter a solução ótima, necessitando, para tanto, de um maior processamento.

Vamos pensar num exemplo cotidiano: você pode se perguntar se amanhã vai chover. Existem inúmeros modelos matemáticos, cada um com a sua complexidade, para tentar responder a esta pergunta com a chance de chuva no dia seguinte. Os telejornais normalmente apresentam a previsão do tempo, que nada mais é do que o resultado da análise desses modelos, no entanto, se formos considerar todas as variáveis envolvidas na possibilidade de chuva no dia seguinte, provavelmente teremos um modelo tão complexo e detalhado que ele não terá serventia alguma. O mais interessante seria levar em conta as variáveis mais relevantes e mais determinantes para o nosso problema de previsão do tempo para que o modelo seja possível de ser solucionado com os recursos de processamento disponíveis.

Mas por que isso é relevante para o problema de otimização? Sabemos que na PO lidamos com modelos, que são uma abstração da realidade, portanto não podemos garantir que uma solução ótima para um modelo será a melhor possível na realidade se for implementada. Se o modelo tiver uma boa formulação e for adequadamente testado, a solução encontrada será uma boa aproximação para o resultado real, como no exemplo da previsão do tempo.

Hillier e Lieberman (2013) destacam que existem duas situações a serem analisadas: satisfatório e otimização. Devemos levar em conta que por vezes pode ser mais interessante procurar uma solução que seja satisfatória, ou seja, suficientemente boa, do que uma solução ótima para o modelo e que não possa ser implementada ou que não seja o ideal para o problema real. Dessa forma, vamos estudar com cuidado o processo de modelagem, pois ele será essencial nos nossos estudos de PO daqui em diante.

Sem medo de errar

Como vimos anteriormente, essa empresa já está atuando há 20 anos no mercado, no entanto um dos seus principais problemas é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais.

O seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você então esse desafio, para convencer o seu gestor sobre a eficiência da pesquisa operacional e explicar o modo por meio do qual a PO pode contribuir no processo de tomada de decisão, a primeira coisa que você deve pensar é sobre a agenda da sua apresentação, que contaria com os seguintes itens:

1. *Apresentar, de modo breve, o surgimento da pesquisa*

operacional. Neste item, caberia destacar o contexto no qual a PO surgiu, que era um ambiente de guerra no qual seria fundamental uma boa alocação de recursos para o sucesso no confronto.

Assim, você deve salientar que a origem da PO, como nós conhecemos hoje, remonta ao início da Segunda Guerra Mundial, ou seja, o ambiente de guerra favoreceu a necessidade de um planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros. Esses recursos escassos deveriam ser alocados em diversas operações militares, portanto poderiam ditar o sucesso ou o fracasso nas batalhas.

A necessidade de um planejamento científico para a alocação dos recursos fez com que os comandos norte-americano e britânico escalassem diversos cientistas da época para prover uma solução adequada para esse problema. Da situação descrita anteriormente surgiu o nome pesquisa operacional.

É interessante você salientar que a quantidade de cálculos necessários para obtenção da solução limitava o uso da PO, de modo que o advento da revolução computacional contribuiu de forma significativa para ampliar o uso da PO, uma vez que o desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que os executados pelo homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos, como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

2. O uso da pesquisa operacional. Neste segundo item cabe a você mostrar alguns casos de sucesso nos quais a pesquisa operacional trouxe significativas economias para a organização.

Assim, na sua apresentação você poderia citar o exemplo da United Airlines, que aplicou os conceitos de PO para ajustar os turnos de trabalho e conseguiu uma economia anual de 6 milhões de dólares. No mercado financeiro, você poderia destacar que a Merrill Lynch utilizou os conceitos de PO para realizar a gestão de riscos em algumas linhas de crédito e economizou 4 bilhões de dólares, sem contar a liquidez.

3. O conceito de otimização: aqui você explicará a necessidade de um processo de modelagem para aplicar o conceito de otimização para resolver o problema de definição do mix ótimo de produção, de modo que a solução encontrada possa ser implementada.

Logo, vale começar explicando na sua apresentação que a PO lida com modelos, que são uma abstração da realidade. Se o modelo tiver uma boa formulação e for adequadamente testado, a solução encontrada será uma boa aproximação para o resultado real. Devemos levar em conta que por vezes pode ser mais interessante procurar uma solução que seja satisfatória, ou seja, suficientemente boa, do que uma solução ótima para o modelo e que não possa ser implementada ou que não seja o ideal para o problema real.

Desse modo, você conseguirá iniciar uma análise crítica do uso da modelagem em pesquisa operacional, aliando as suas competências com a prática.

Parabéns, você concluiu seu primeiro trabalho!

Avançando na prática

Enfoque sistêmico da tomada de decisão e o uso da PO

Descrição da situação-problema

Você foi contratado como consultor de uma empresa que aplica conceitos da pesquisa operacional em diversos problemas de transporte e logística. Em sua primeira demanda, o gestor lhe solicita para treinar novos operadores que aplicam técnicas de PO para a solução de problemas na área citada anteriormente, explicitando o enfoque sistêmico da tomada de decisão.

O que você colocaria na sua apresentação a fim de ressaltar a importância da visão sistêmica no processo de tomada de decisão e a relação disso com a PO, pensando no treinamento de novos operadores?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, é interessante você começar a sua apresentação ressaltando que uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Nesse sentido, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um método científico de tomada de decisão. Ou seja, como objetivo, o fundamento da PO é otimizar o resultado através de métodos puramente científicos.

Dessa forma, deixe claro em seu treinamento que a pesquisa operacional, em sua essência de aplicação, parte do princípio do uso de técnicas e métodos científicos quantitativos, e estes, quando inseridos e desenvolvidos no ambiente organizacional, são analisados por equipes multidisciplinares (isto é, equipe formada por profissionais de diferentes áreas, como administradores, engenheiros, economistas, time de marketing e vendas, equipe de projetos, entre outros), o que confere um enfoque sistêmico à tomada de decisão.

Dessa forma, buscando uma visão mais objetiva e sistêmica (geral e interligada) das atividades, ações, estruturas e, também, dos recursos que serão utilizados para alcançar os objetivos da empresa, as decisões devem deixar de ser realizadas somente sob o ponto de vista de uma especialidade (marketing, produção, financeiro, etc.), passando a serem desenvolvidas de forma a considerar resultados mais amplos para a organização.

É justamente essa visão sistêmica que permite ao decisor ter um entendimento macro do problema e alinhar a tomada de decisão, utilizando a pesquisa operacional com a estratégia da empresa.

Assim, os novos operadores devem atentar ao enfoque atual da pesquisa operacional, que busca assegurar uma compreensão mais aprofundada (diagnóstico assertivo) do cenário no qual o problema se encontra, possibilitando um melhor reconhecimento dos elementos internos à organização e sua interação com o ambiente externo.

Você colocaria algo a mais no seu treinamento?

Parabéns, mais um trabalho executado!

Faça valer a pena

1. Avalie o histórico da pesquisa operacional (PO), considerando as afirmações I, II e III.

I. A origem da PO remonta ao início da Segunda Guerra Mundial, pois o ambiente de guerra requeria planejamento estratégico de alocação de recursos, como tropas, armas, munições, entre outros, impulsionando métodos de alocação eficiente de recursos escassos.

II. Na década de 1940, surgiu também o método simplex, que é um algoritmo de otimização que foi desenvolvido por George B. Dantzig, enquanto ele

trabalhava no Pentágono planejando e programando atividades militares.

III. O advento da revolução computacional contribuiu de forma significativa para ampliar o uso da PO, uma vez que o desenvolvimento de computadores eletrônicos facilitou a execução dos cálculos, que agora poderiam ser milhões de vezes mais rápidos do que o homem. Assim, houve a disseminação da PO no setor empresarial, sendo hoje utilizada nos mais diversos campos, como indústria, mercado financeiro, comércio, logística, etc.

Considerando as afirmações I, II e III, assinale a alternativa correta.

- a) Somente I é correta.
- b) Somente I e III são corretas.
- c) Somente II é correta.
- d) I, II e III são corretas.
- e) Somente III é correta.

2. Avalie o texto abaixo sobre PO e a tomada de decisão.

Uma decisão pode ser resultado do uso da intuição ou do uso do processo de modelagem, que nada mais é do que uma abstração da realidade.

Logo, o foco da PO é utilizar o processo de modelagem para que seja empregado um _____ de tomada de decisão, prezando pelo _____ do processo de decisão.

Enunciado:

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas da frase.

- a) Método científico; enfoque sistêmico.
- b) Método indutivo; enfoque singular.
- c) Método dedutivo; enfoque pluralista.
- d) Método sistemático; enfoque sistêmico.
- e) Método empírico; enfoque único.

3. Pensando na pesquisa operacional (PO) como ferramenta gerencial, considere as afirmações I e II.

I. A PO é uma ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios.

PORTANTO,

II. Podemos destacar o uso da PO como uma ferramenta gerencial, dada a sua importância e as suas possíveis aplicações que podem trazer impactos significativos para a gestão empresarial.

Considere as afirmações I e II, bem como a relação entre elas, e assinale a alternativa correta.

- a) Somente I é correta.
- b) Somente II é correta.
- c) I e II são corretas, e II é consequência de I.
- d) I e II são corretas, mas II não é consequência de I.
- e) I e II não estão corretas.

Seção 1.2

Introdução à Modelagem em pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, vamos agora explorar o uso de modelos em problemas aplicados a essa área.

Assim, inicialmente nesta seção estudaremos como definir um problema e coletar dados relativos a este, no âmbito da pesquisa operacional.

Então, veremos os tipos de modelos empregados nessa área, bem como as fases do processo de modelagem de um problema.

Também, a fim de melhorar seu processo de aprendizagem e assimilação de conceitos, serão explorados exemplos de problemas de pesquisa operacional e casos de sucesso.

Pensando na sua prática profissional, esses conteúdos são de fundamental importância, pois a definição, coleta de dados e modelagem do problema é o início e a base da resolução de desafios em pesquisa operacional!

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão.

Agora, para que a pesquisa operacional possa ser aplicada nesse contexto, quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que nós já conhecemos a história e os principais conceitos e usos da pesquisa operacional no processo de tomada de decisão, vamos iniciar o processo de modelagem em pesquisa operacional e, para isso, precisamos ter claro o que é a definição do problema e como fazer a coleta de dados.

Em primeiro lugar devemos ressaltar a importância da definição do problema. Parece algo simples e trivial de ser feito, mas veremos em breve que caso o problema não esteja bem estabelecido, procurar por uma solução para algo que não conhecemos bem será uma tarefa mais complexa.

O que significa então definir o problema?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013) definir o problema envolve o delineamento dos objetivos; o levantamento das restrições sobre o que pode e sobre o que deve ser feito; como aquele problema interage com outras áreas da empresa; se podem ser adotados caminhos diferentes; quanto tempo temos disponível para tomar a decisão; entre outros.

Repare que são vários fatores que devemos levar em conta para iniciar o nosso estudo de PO, sendo que a fase de definição do problema é crucial para o que virá adiante.

Você já se questionou se é possível encontrar uma resposta certa para o problema errado? Esse tipo de situação que tentaremos evitar.

Então vamos começar pelos objetivos; quais objetivos serão fundamentais para a definição do nosso problema? A primeira coisa

que devemos fazer é verificar quem tomará as decisões e saber o que o decisor pensa a respeito das possibilidades. Isso é importante porque desconhecer o decisor e o pensamento dele a respeito daquela situação dificultará a implementação da solução que você encontrar.

Vamos ver um exemplo do dia a dia para você compreender melhor?

Imagine que um membro da sua família esteja em dúvida com relação à compra de um carro e buscou a sua ajuda para decidir se deve comprar um veículo ou não e qual modelo escolher. Então, nesse caso, o problema é decidir pela compra de um modelo específico. A primeira coisa que você deveria fazer é conversar com a pessoa que será responsável pela compra, aquele que tomará a decisão, e sondar o pensamento dele com relação ao propósito da aquisição. Talvez o objetivo seja gastar pouco dinheiro com combustível, ou seja, ter um carro econômico, ou pode ser que o propósito seja ter um veículo robusto para viajar, entre outras possibilidades.

Uma vez que você sondou o decisor e conseguiu definir o problema em questão, você começará a coletar as informações necessárias para o processo de tomada de decisão. Essa é uma tarefa bem delicada, pois às informações necessárias nem sempre são fáceis de serem obtidas; às vezes elas podem nem existir ou podem depender de pessoas ou processos a que você não tem acesso. Por isso, vale a pena lembrar do que foi dito na seção anterior, isto é, lembre-se de que nós trabalhamos com modelos porque eles são uma representação simplificada da realidade. Muitas vezes não é possível saber todos os dados, além de que não são todas as informações que serão relevantes para o nosso problema e que devem ser obtidas.

Voltando ao nosso exemplo, fica evidente que você precisa coletar todas as informações necessárias para a modelagem e a tomada de decisão, além das informações como as restrições e possíveis alternativas. Alguns dados que você poderia levantar junto ao seu familiar seriam a restrição de quanto gastar na aquisição, a distância mensal percorrida, o preço do combustível, o valor do seguro, entre outros que você julgar relevantes.



Pesquise mais

Prezado aluno, vamos nos aprofundar um pouco mais sobre a definição e a coleta de dados em pesquisa operacional?

Vale a pena ler a Seção 2.1, Definição de um Problema, do livro *Introdução à pesquisa operacional* de André Longaray, na qual o autor apresenta uma abordagem detalhada da definição, como perceber e identificar um problema e utilizar algumas ferramentas para tanto, como o Diagrama de Ishikawa.

Indicamos a leitura das páginas 29 a 34.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013. Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000005844>>. Acesso em: 30 ago. 2017.

E como já falamos sobre modelos e já sabemos que a PO é a ferramenta ou o ramo da ciência, que busca desenvolver modelos para ajudar as organizações e os indivíduos em seus processos decisórios, quais são os principais tipos de modelos de que nós dispomos?

Nós temos os modelos icônicos, que também podem ser chamados de concretos, modelos analógicos e modelos simbólicos, também chamados de abstratos.

Os modelos icônicos são aqueles que são construídos por meio de fatos da realidade, tal como o mapa da cidade de São Paulo, com a divisão dos bairros, apresentado na Figura 1.2.

Figura 1.2 | Mapa da cidade de São Paulo



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mapa_sp.png>. Acesso em 10 set. 2017

Os modelos analógicos são uma representação física de um fenômeno ou processo para que possamos entender adequadamente seu funcionamento ou origem. Por exemplo, um termômetro é um modelo analógico que tem como finalidade medir a temperatura, ou seja, por meio de um termômetro conseguimos representar um fenômeno físico e fazer uma medição.

Já os modelos abstratos são aqueles que serão aplicados na pesquisa operacional, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. No nosso caso, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema, conforme definimos anteriormente.



Exemplificando

Caro aluno, vamos pensar em um modelo matemático, ou seja, um tipo de modelo abstrato, com que frequentemente nos deparamos?

Você com certeza já deve ter se perguntado se naquele dia choveria, se faria calor ou frio, correto?

A previsão do tempo é o resultado de um modelo matemático complexo que analisa diversos fatores para responder se vai chover, fazer frio, calor ou um dia ensolarado.

Para que possamos executar adequadamente um estudo de pesquisa operacional é interessante que sejam seguidos alguns passos:

1. Formulação do problema: já vimos essa etapa anteriormente, é o momento de definir o problema e coletar os dados necessários.
2. Construção do modelo matemático: como já sabemos, utilizaremos um modelo simbólico que represente a realidade do nosso problema, ou seja, faremos uma modelagem matemática.

Mas por que utilizamos um modelo matemático para resolver os problemas de pesquisa operacional?

Além de ser uma representação simplificada da realidade, os modelos matemáticos podem revelar relacionamentos entre as variáveis que não seriam evidentes de outro modo e também permite o aprendizado por experimentação, ou seja, por tentativa e erro controlado.

3. Obtenção da solução: nesta etapa o foco é buscar uma solução para o problema e, para isso, devemos nos atentar a duas coisas:

a. Se o modelo for demasiadamente complexo, na maioria dos casos achar uma solução também será uma tarefa muito complexa.

b. Vocês se lembram de que mencionamos sobre o tempo disponível para tomar a decisão? Se o tempo para obter a solução for maior do que o tempo disponível para tomada de decisão, então essa solução não terá mais serventia alguma. Vale a pena ficar atento a isso, principalmente em problemas mais complexos nos quais buscar a solução também é uma tarefa complexa.

4. Teste do modelo e da solução: é importante que tanto o modelo quanto a solução sejam testados para verificar se todos os componentes foram incluídos no modelo e se ele pode ser executado. Em outras palavras, o teste do modelo e da solução levará em conta se o modelo foi construído corretamente.

5. Estabelecimento de controles sobre a solução: é importante lembrar que o modelo e sua consequente solução não são exatamente iguais à realidade, portanto devemos analisar se são necessários ajustes para que a solução seja implementada e funcione conforme esperado.

6. Implantação da solução: uma vez que todas as etapas anteriores foram concluídas, a solução pode ser empregada na prática para resolver o problema.



Exemplificando

As mesmas fases apresentadas anteriormente poderiam ser utilizadas em diversas outras aplicações. Vamos ver um exemplo do cotidiano?

Vamos supor que você tenha uma reserva de R\$ 10 mil e queira investir o seu dinheiro, tendo duas opções com diferentes riscos e rentabilidades.

A primeira opção é deixar o dinheiro na poupança tendo um rendimento baixo, mas que em compensação também tem um baixo risco.

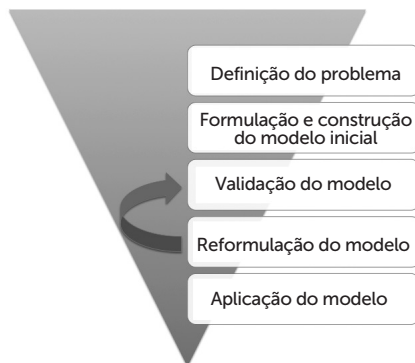
A outra opção é comprar ações na bolsa de valores, o que aumenta o rendimento, mas também aumenta significativamente o risco.

Nós conseguimos deixar bem claro qual é o problema que está sendo analisado. Agora precisamos saber mais informações sobre os investimentos para fazer uma avaliação e decidir como o dinheiro será empregado.

Com as informações, você terá condições de construir um modelo, que represente o seu problema real, para na sequência obter a solução. Antes

de ir até o banco ou até uma corretora de ações, você ainda precisa testar o modelo e a solução. Em seguida você estabelece controles para a solução, que podem ser por exemplo em função do risco do investimento e por último coloca sua solução na prática.

Figura 1.3. | Processo de Modelagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Vale a pena destacar, na Figura 1.3, que caso a etapa de validação não seja concluída de modo satisfatório, o modelo deverá ser reformulado e passar por nova validação, quantas vezes forem necessárias, até que esteja adequado para aplicação.



Reflita

Nós já entendemos como ocorre o processo de modelagem a partir das fases de um estudo de pesquisa operacional, no entanto, como poderíamos validar o modelo na prática?

Reflita nessa indagação e defina alguns critérios para validação do modelo.

Agora que entendemos como executar o processo de modelagem, vamos ver alguns exemplos de casos de sucesso nos quais a pesquisa operacional foi aplicada?

Hillier e Lieberman (2013) apresentam alguns casos que deixam bem evidente o quão fundamental foi a aplicação da pesquisa operacional:

1. IBM – International Business Machines: é uma empresa da área de tecnologia da informação fundada no século XIX, mais precisamente em 1888, que atualmente conta com mais de 400 mil colaboradores no mundo inteiro, sendo considerada a maior empresa de tecnologia da informação no mundo.

Mas para que a IBM poderia aplicar os conceitos de pesquisa operacional?

O objetivo da IBM era melhorar o controle de inventários de peças de reposição por meio da criação de uma rede nacional que melhorasse os serviços de suporte.

Quando a IBM aplicou os conceitos de PO? No ano de 1990.

E qual foi o impacto gerado pelo uso da PO na IBM?

Na ocasião, eles conseguiram uma economia anual da ordem de 20 milhões de dólares, em valores da época, além de uma economia de mais de 250 milhões de dólares por conseguir diminuir o nível nos inventários.

Além disso, dez anos depois, em 2000, a IBM novamente empregou os conceitos de PO, mas dessa vez era para fazer a reengenharia da cadeia global de abastecimento, chegando a uma economia de 750 milhões de dólares somente no primeiro ano.

2. Samsung Electronics: também atua no ramo de tecnologia da informação e está sediada em Seul, na Coreia do Sul. Foi fundada em 1938 e tem um faturamento que representa, sozinha, mais de 10% do PIB da Coreia do Sul.

E onde a Samsung Electronics poderia aplicar os conceitos de PO?

O objetivo da empresa era otimizar o tempo de fabricação e os níveis de estoque.

Quando eles aplicaram esses conceitos? No ano de 2002.

E o impacto gerado pelo emprego da PO?

Eles conseguiram mais de 200 milhões de dólares a mais em receitas.

3. United Airlines: é considerada a terceira maior companhia aérea dos Estados Unidos, com mais de 700 aviões operando em quase 400 destinos ao redor do mundo. Tem mais de 60 mil colaboradores e foi fundada em 1926.

E como a United utilizou os conceitos de PO?

Sabemos que para uma companhia aérea era fundamental que os turnos de trabalho para atendimento nos balcões de reserva fossem otimizados. Hoje, com o uso cada vez maior da internet para reservas de passagens aéreas, esse problema diminuiu.

Quando eles aplicaram os conceitos? Em 1986.

E o impacto da PO na United?

Em valores da época, representou uma economia de aproximadamente 6 milhões de dólares ao ano.

Também podemos destacar o exemplo de outra companhia aérea norte-americana, a Delta Air Lines, considerada a maior empresa aérea do mundo, com aproximadamente 1.400 aeronaves em quase 400 destinos diferentes.

A Delta utilizou os conceitos de PO para otimizar a alocação dos tipos de aeronaves para mais de 2.500 voos domésticos em 1994 e conseguiu uma economia anual de aproximadamente 100 milhões de dólares.



Assimile

Caro aluno, deve ficar bem claro para você que trabalhamos com modelos, pois eles são uma representação simplificada da realidade, sendo que os modelos em pesquisa operacional devem ser abstratos, também chamados de simbólicos.

O processo de modelagem é composto pelas fases:

1. Definição do problema.
2. Formulação do modelo inicial.
3. Validação do modelo.
4. Reformulação, caso o modelo não seja validado.
5. Aplicação.

Sem medo de errar

Vamos retomar o nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema.

Quais dados você deve coletar na empresa e quais passos você deverá seguir no processo de modelagem?

Com relação aos dados que devem ser obtidos, vamos ver alguns exemplos:

- custo de fabricação de cada produto.
- quantidade demandada pelo mercado de cada produto.
- funcionamento do processo de produção de cada produto.
- quantidade de matéria-prima disponível.
- restrições de produção, como a quantidade máxima produzida em cada máquina ao longo do dia, entre outros.

Como vimos na Figura 1.3, devemos seguir os seguintes passos no processo de modelagem:

1. Definição do problema – que já concluímos.
2. Formulação e construção do modelo inicial.
3. Validação do modelo.
4. Reformulação do modelo, caso não seja aprovado na validação.

5. Aplicação do modelo.

Nas próximas seções, nós veremos os itens 2 a 5 do processo de modelagem, mas tente refletir como eles seriam formulados.

Parabéns, mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Definição do problema em uma empresa de logística

Descrição da situação-problema

Como gestor do departamento de logística, você tem reparado que os operadores logísticos estão cometendo erros básicos no processo, uma vez que não estão sabendo modelar adequando cada uma das demandas que lhes é atribuída. Ao comentar esse fato com o gerente geral, ele lhe solicita a elaboração de um protocolo geral que direcione os operadores na elaboração do problema e na coleta de informações. Pensando nessa solicitação, o que você colocaria no protocolo o fim de auxiliar sua equipe a definir o problema de PO de acordo com a demanda?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, no protocolo já é válido você ressaltar que para iniciar o processo de modelagem em pesquisa operacional é preciso ter clareza da definição do problema e como fazer a coleta de dados.

Logo, em primeiro lugar deve-se ressaltar a importância da definição do problema, incluindo:

- delineamento dos objetivos.
- levantamento das restrições sobre o que pode e sobre o que deve ser feito.
- identificação de como aquele problema interage com outras áreas da empresa.
- investigação de como podem ser adotados caminhos diferentes.

- análise do tempo disponível para tomar a decisão, entre outros.

Posteriormente, vale citar que os modelos abstratos, são os mais aplicados na pesquisa operacional, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. Comumente, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema, conforme definimos anteriormente.

Ao ler esses pontos no protocolo, certamente o operador ficará mais atento à definição do problema e já ajudará a pensar na modelagem deste!

Faça valer a pena

1. Considerando que os modelos são muito utilizados em pesquisa operacional, avalie as afirmações I, II e III.

I. São modelos construídos por meio de fatos da realidade.

II. São modelos que podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação e, comumente, eles serão constituídos de equações matemáticas.

III. São modelos que partem de uma representação física de um fenômeno ou processo para que possamos entender adequadamente seu funcionamento ou origem.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o nome dos modelos na ordem I, II e III.

a) icônicos; abstratos; analógicos.

b) icônicos; analógicos; abstratos.

c) analógicos; abstratos; icônicos.

d) abstratos; analógicos; icônicos.

e) abstratos; icônicos; analógicos.

2. Considerando o processo de modelagem em PO, avalie os passos de A à E.

A. Validação do modelo.

B. Aplicação do modelo.

C. Definição do problema.

D. Reformulação do modelo, caso não seja aprovado na validação.

E. Formulação e construção do modelo inicial.

Assinale a alternativa que coloca em ordem correta os passos de A à E.

a) C; D; E; B; A.

b) C; E; A; B; D.

c) A; E; C; B; D.

d) C; E; A; D; B.

e) E; C; D; B; A.

3. Considerando um estudo de pesquisa operacional, analise o texto a seguir:

_____: definição do problema e coleta de dados necessários.

_____: aplicação de um modelo simbólico que representa a realidade do problema identificado, ou seja, faz-se uma modelagem matemática.

Assinale a alternativa que completa corretamente as lacunas da frase.

a) Implementação da solução; Formulação do problema.

b) Obtenção da solução; Construção do modelo matemático.

c) Formulação do problema; Construção do modelo matemático.

d) Formulação do problema; Obtenção da solução.

e) Obtenção da solução; Formulação do problema.

Seção 1.3

Construção de modelos em pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior estudamos a importância do uso de modelos em problemas de pesquisa operacional, bem como os tipos de modelos aplicados na área, tendo como entendimento o enfoque gerencial da PO.

Neste momento, vamos estudar a construção de modelos matemáticos em PO, aprendendo a identificar e definir a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições, de modo a direcionar a busca da melhor solução para o problema.

Então, veremos como desenvolver teste dos modelos obtidos em PO, além de assimilarmos o processo de implementação dos resultados em PO.

Pensando na sua prática profissional, esses conteúdos são de fundamental importância, pois a construção, o teste e a implementação do modelo é o processo direcionador para a busca da melhor solução do problema, sendo um aspecto essencial na resolução de desafios em pesquisa operacional!

Assim, vamos retomar nosso contexto no qual você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução deste problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Cabendo a você esse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão. Depois, você mostrou os passos que deveriam ser seguidos no processo de modelagem.

Agora, para a construção do modelo matemático, você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o gestor lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que já entendemos o contexto da pesquisa operacional e a importância do processo de modelagem, vamos entender um pouco melhor como realizar a modelagem matemática.

Vale a pena lembrar que na pesquisa operacional nós trabalharemos com modelos abstratos, pois eles podem ser utilizados para o estudo de propriedades por meio da simulação. No nosso caso, eles serão constituídos de equações matemáticas que representam o comportamento do nosso problema.

Os modelos matemáticos utilizam sistemas de equações para descrever o comportamento da realidade, utilizando para isso símbolos e expressões matemáticas. Mas o que acontece quando estamos falando de um processo de tomada de decisão?

Como já vimos anteriormente na etapa de coleta de dados, precisamos levantar todas as informações para serem utilizadas pelo modelo. Esses dados serão fundamentais na modelagem matemática que executaremos na presente seção.

Dado que já aprendemos o conceito de otimização, que nos guiará ao longo do processo de modelagem matemática, agora precisamos entender o que é um modelo de otimização, para então formular o modelo matemático.

De acordo com Longaray (2013), um modelo de otimização nada mais é do que uma representação de um problema organizado com

o propósito de obter uma solução ótima. Mas o que deve ser de fato otimizado?

Neste ponto, insere-se o primeiro conceito-chave desta seção: as variáveis de decisão.

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), as variáveis de decisão são aquelas nas quais os valores devem ser determinados, ou seja, se tivermos infinitas decisões que devem ser tomadas, de algum modo precisamos quantificá-las.



Exemplificando

Vamos supor que você tenha um montante de R\$ 20 mil. O gerente da sua conta corrente, ao visualizar o saldo parado em conta, ligou perguntando se você não gostaria de investir aquele dinheiro, ou ao menos parte dele, nas opções que ele tem disponível.

A primeira opção é um investimento de maior risco, no entanto com uma taxa de retorno mais atrativa. Já a segunda opção é um investimento mais conservador (uma poupança) com menor taxa de retorno.

Você ficou em dúvida sobre as duas opções e gostaria de aproveitar os seus conhecimentos em pesquisa operacional para a tomada dessa decisão.

A princípio, você pensou em investir todo o seu dinheiro em uma aplicação ou em outra, mas o gerente falou ser possível investir uma parte em cada tipo de investimento.

Dada essa situação, quais seriam as suas variáveis de decisão para esse problema?

Como vimos anteriormente, se tivermos diversas decisões que iremos quantificar, cada uma delas será uma variável de decisão.

Nesse caso, temos duas decisões a tomar:

- Investir na primeira opção?
- Investir na segunda opção?

Repare que para cada pergunta temos uma variável que representa, de modo quantitativo, a sua respectiva resposta. Portanto, temos duas variáveis de decisão que representam:

- Quantidade de dinheiro investida na primeira opção, que pode ser de R\$ 0 (não investir) até R\$ 20 mil (investir todo o montante).
- Quantidade de dinheiro investida na segunda opção, que também pode ser de R\$ 0 (não investir) até R\$ 20 mil (investir todo o montante).

Certo, entendemos que no processo de modelagem é importante definir quais serão as nossas variáveis de decisão. Mas como podemos otimizar um problema de pesquisa operacional utilizando as variáveis de decisão?

Para responder a esse questionamento, primeiro precisamos lembrar que ao trabalharmos com modelagem temos que ter em mente um objetivo, como vimos anteriormente. Este será apresentado no modelo matemático por meio de uma função, que usualmente chamamos de função objetivo.

Mas o que é uma função objetivo?

A função objetivo é uma relação das variáveis de decisão, através de alguns coeficientes, que chamamos de coeficientes da função objetivo. É importante ressaltar que quando falamos em otimização temos que ter em mente que otimizar significa maximizar ou minimizar o valor da função objetivo. Da mesma forma, a solução das variáveis de decisão que maximiza ou minimiza a função objetivo é chamada de solução ótima.

Mas qual exemplo de objetivo que poderíamos ter e como obter uma função objetivo?

Vamos retomar o exemplo do investimento, apresentado no box *Exemplificando*. Caso o objetivo fosse ter lucro com as aplicações, então teríamos interesse em maximizar o nosso lucro, que pode ser representado por meio da função objetivo.

Vamos supor que a primeira opção de investimento lhe dê um lucro mensal de 1,0%, enquanto que a opção dois (poupança) lhe dê um lucro mensal de 0,5%. A sua função objetivo nesse caso é maximizar o lucro do total investido em cada uma das opções, sendo que a quantia investida na primeira opção estará sujeita a um retorno de 1,0% e na segunda de 0,5%.

Mas será que só temos que nos preocupar com a função objetivo?

Não, porque se fosse assim já teríamos a resposta do nosso problema. Seria simplesmente investir todo o dinheiro na opção mais rentável. Então, o está faltando analisar para concluir a nossa modelagem matemática?

Vamos pensar numa questão simples para direcionar o nosso raciocínio: os recursos disponíveis no nosso planeta são ilimitados? Não, por exemplo, se o ouro fosse ilimitado no nosso planeta ele não custaria tão caro.

De modo geral, todos os nossos recursos, sejam matérias-primas, máquinas, mão de obra, entre outros, são escassos ou apresentam alguma restrição de uso.

Nos anos 1970, Eliyahi Goldratt começou a consolidar alguns princípios acerca dessas limitações no que conhecemos hoje como Teoria das Restrições. Ou seja, as restrições podem ser entendidas como qualquer coisa que limita o melhor desempenho do sistema.

No nosso caso do investimento, se a primeira opção fosse perfeita, não teríamos que nos preocupar, pois era só investir todo o dinheiro nela e lucrar mais. Mas, o gerente falou que o risco da primeira opção era maior, ou seja, a chance de você perder dinheiro com esse investimento também é maior.

Na nossa modelagem matemática, também precisamos, de algum modo, adicionar essas restrições. E como faremos isso?

As limitações são chamadas restrições e podem ser expressas na forma de equações ou inequações. Por exemplo, vamos supor que o valor mínimo a ser investido na primeira opção seja de R\$ 10 mil. Nesse caso, se você decidir por investir nessa opção, a variável de decisão que representa a quantidade de dinheiro a ser investida nessa opção deverá ser maior ou igual a R\$ 10 mil.



Pesquise mais

Ficou curioso com o assunto Teoria das Restrições? Então vamos nos aprofundar nesse assunto lendo o artigo *Os princípios da teoria das restrições sob a ótica da mensuração econômica* do autor Reinaldo Guerreiro?

Nesse artigo, as ideias de Eliyahi Goldratt serão aprofundadas com o enfoque para a área econômica.

GUERREIRO, R. Os princípios da teoria das restrições sob a ótica da mensuração econômica. **Cad. estud.**, São Paulo, n. 13, p. 1-10, 1996. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-92511996000100003&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 29 set. 2017.

Agora que já sabemos os constituintes básicos da nossa modelagem matemática em pesquisa operacional, vamos então resumir a terminologia comum em problemas de pesquisa operacional:

1. Função objetivo: é aquela função a ser otimizada, podendo ser maximizada ou minimizada.
2. Restrições: são as limitações do nosso problema e podem ser divididas em restrições funcionais, que são aquelas com função de todas as variáveis de decisão, e as restrições de não negatividade, nas quais todas as variáveis de decisão devem ser maiores ou iguais a zero (são aplicadas em determinados casos, como a programação linear, que veremos mais adiante nos nossos estudos).
3. Solução: é a especificação de valores para as nossas variáveis de decisão. Podemos ter soluções:
 - a. Viáveis: todas as restrições são satisfeitas.
 - b. Inviáveis: quando ao menos uma das restrições não é satisfeita.
 - c. Região de soluções viáveis: é o conjunto de todas as soluções viáveis.
 - d. Ótimas: é o valor mais favorável da função objetivo, seja ele máximo ou mínimo.

E como ficaria a nossa modelagem matemática, envolvendo as equações e as variáveis de decisão que vimos anteriormente? Vamos a um exemplo genérico de modelagem matemática em pesquisa operacional?

Função objetivo:

$$Z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots a_nx_n$$

Restrições funcionais:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots b_{1n}x_n \leq (\geq) c_1$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots b_{2n}x_n \leq (\geq) c_2$$

$\vdots$

$$b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + \dots b_{kn}x_n \leq (\geq) c_k$$

Restrição de não negatividade:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n \geq 0$$

Sendo:

x_n as variáveis de decisão.

n o índice que representa o número de decisões.

k o índice que representa o número de restrições.

a_n os coeficientes da função objetivo.

b_{kn} os coeficientes tecnológicos.

c_k as constantes do lado direito.

Essa é a chamada forma-padrão para representação da modelagem matemática de um problema de pesquisa operacional.



Reflita

Agora que já sabemos melhor como realizar uma modelagem matemática e já vimos alguns problemas reais, como o problema da análise de investimento, chegou a hora de você colocar esses conhecimentos em prática: quais as situações cotidianas nas quais você poderia empregar o conceito de modelagem matemática para a tomada de decisões?

E mais um questionamento para você refletir: você se lembra de que a etapa de coleta de dados era essencial para os nossos problemas de pesquisa operacional? Então, agora reflita na importância da coleta de dados sabendo que estes serão utilizados nas etapas de modelagem matemática.

Agora que já sabemos como desenvolver um modelo matemático para os nossos problemas de pesquisa operacional, iremos nos deparar com a seguinte questão: como faremos para testar o nosso modelo?

A primeira coisa que devemos saber é que o nosso modelo inicial poderá apresentar algumas inconsistências ou erros, como vimos na seção anterior sobre o processo de modelagem. Mas como podemos lidar com isso?

A primeira observação é que quando você estiver elaborando um modelo com um número elevado de variáveis de decisão e de restrições, invariavelmente esses erros irão aparecer. Por isso que temos sempre que verificar o modelo. A medida que o modelo for aperfeiçoado, a tendência é que esses erros sejam corrigidos.

O processo de teste depende muito do tipo de problema que está sendo estudado e do modelo utilizado, mas vamos ver alguns exemplos?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013) uma das formas de fazer esse tipo de análise é o chamado teste de retrospectiva. Mas o que é um teste de retrospectiva? Nós utilizamos dados históricos para reconstruir

o passado e verificar a eficiência do modelo e da solução utilizando essa abordagem. Ao comparar o resultado do modelo com o que de fato ocorreu, pode nos mostrar qual a melhoria que realmente poderia ter sido feita, em comparação com o que ocorreu.

No entanto, independente da forma que será utilizada para teste do modelo, é preciso levar em consideração que tudo deve ser documentado para que os demais usuários compreendam e confiem no modelo desenvolvido. Se futuramente forem necessárias adaptações ou correções no modelo, a documentação também será extremamente útil para orientar a equipe de desenvolvimento.

Se o modelo foi desenvolvido e foi adequadamente testado, qual a próxima etapa? Lembrando do que vimos no processo de modelagem, agora chegou a vez de aplicar o modelo na prática.

É importante lembrar que apenas encontrar a solução ótima não é o nosso objetivo. O nosso alvo é implementar essa solução ótima. Essa implementação pode levar dias ou meses para ser ocorrer e, dependendo do nível estratégico daquela decisão, poderá deixar consequências no curto, médio e longo prazo. Isso porque as decisões possuem uma inércia, levam um determinado tempo para serem implementadas e também podem demandar muito tempo e esforço para serem revertidas.

Somente após a implementação que os resultados reais da modelagem serão coletados e nos trarão a dimensão real das decisões tomadas. Para que a fase de implementação seja considerada um sucesso, é fundamental que exista um suporte da alta gerência para que as sugestões sejam acatadas.

A análise constante do comportamento do sistema após a implementação da solução é fundamental para verificar se estão ocorrendo desvios daquilo que foi suposto inicialmente, lembrando de que a modelagem partiu de algumas hipóteses iniciais.



Assimile

Agora que já tivemos um primeiro contato com a modelagem matemática em pesquisa operacional, vamos relembrar algumas definições importantes?

Começando pela própria palavra otimização, o que é como otimizar?

Iremos otimizar uma função chamada objetivo, que descreve o objetivo

da nossa modelagem, ou seja, é uma função que será maximizada ou minimizada. Por exemplo, o lucro total é um exemplo de função objetivo que nos interessa maximizar. Já o custo total seria um exemplo de função objetivo na qual o nosso interesse seria de minimizar.

Mas o que compõe a nossa função objetivo? As variáveis de decisão e os coeficientes da função objetivo. Os coeficientes são obtidos na fase de coleta de dados e representam uma contribuição de cada variável de decisão para a função objetivo. Os lucros ou os custos unitários seriam exemplos de coeficientes, enquanto que as quantidades seriam representadas pelas variáveis de decisão.

Além da função objetivo, temos as restrições, que são divididas em funcionais e de não negatividade. As restrições existem pois os nossos sistemas reais apresentam limitações que devem ser levadas em conta nos modelos.

Assim que os modelos são construídos, eles devem ser testados e, na sequência, se aprovados, implementados.

Sem medo de errar

Você foi contratado por uma empresa de eletrônicos, que está há 20 anos atuando no mercado. Um dos principais problemas que esta empresa está enfrentando é a definição do seu mix ótimo de produção, uma vez que os produtos possuem preços de venda e requisitos de produção diferentes.

Para alinhar a produção com o planejamento estratégico de longo prazo, o mix de produtos está sendo redefinido, com a possível exclusão de alguns produtos da linha, bem como o redimensionamento da quantidade produzida dos demais. Seu gestor, ao identificar seus conhecimentos em pesquisa operacional, solicitou sua ajuda na solução desse problema e, como prêmio, ofereceu a você sua primeira promoção, mas ele ainda está desconfiado sobre a eficácia da pesquisa operacional.

Diante desse desafio, em um primeiro instante você mostrou ao seu superior como a pesquisa operacional pode contribuir para o processo de tomada de decisão. Depois, você mostrou os passos que deveriam ser seguidos no processo de modelagem.

Agora, para a construção do modelo matemático você aplicará diversos conceitos da pesquisa operacional, mas antes da implementação dos resultados, como o modelo poderá ser testado?

Bom, como nós vimos nesta seção, para testar os modelos nós precisamos em primeiro lugar obter uma versão inicial do modelo. E como faremos isso?

Primeiro definiremos as variáveis de decisão, que nesse caso seria a quantidade a ser produzida de cada produto que compõe o mix de produção.

O objetivo, neste caso, pode ser reduzir o custo total de produção ou maximizar o lucro total, a depender das informações que você dispõe na fase da coleta de dados.

Em seguida, devemos modelar as restrições na forma de equações e/ou inequações.

Uma vez que o modelo inicial foi construído, ele passará para a fase de testes, sendo que uma das possíveis formas de testar o modelo é utilizando um teste de retrospectiva, no qual utilizamos dados históricos para reconstruir o passado e verificar a eficiência do modelo e da solução utilizando essa abordagem.

Outros testes podem ser utilizados, mas é fundamental documentar todos os procedimentos para que os demais usuários compreendam e confiem no modelo desenvolvido.

Você precisará coletar os dados históricos e, com o modelo em mãos, fazer a comparação para análise do desempenho do modelo frente aos resultados obtidos anteriormente.

Quando os testes forem concluídos e o modelo validado, será iniciada a fase de implementação, na qual conheceremos as soluções reais para o nosso problema.

Parabéns, mais uma etapa concluída e agora você já está apto para construir modelos matemáticas de pesquisa operacional!

Gestão da produção – maximização da produção

Descrição da situação-problema

Uma empresa de manufatura de peças para automóveis tem três produtos numa de suas linhas de fabricação: polias, pistões e virabrequins. O lucro nessa linha está muito abaixo do esperado, com base na capacidade produtiva disponível. A diretoria está planejando redistribuir os níveis de produção de cada produto, tentando melhorar o lucro da linha, de modo que, como gestor da produção, lhe é solicitada uma modelagem do problema a fim de aumentar o retorno financeiro para a empresa.

Cada um dos produtos pode necessitar de até três recursos para sua produção, sendo eles a furadeira, o torno e a retífica. Sabemos o tempo, em minutos, que cada produto deve ficar em cada recurso, conforme apresentado no Quadro 1.1, bem como o tempo máximo disponível por recurso por semana.

O departamento de vendas aponta que a demanda máxima de virabrequins é de 100 unidades por dia e o lucro unitário é, respectivamente, de R\$ 2,20, R\$ 3,15 e R\$ 2,90 para a polia, o pistão e o virabrequim.

Como você desenvolveria esse modelo para a diretoria da empresa?

Resolução da situação-problema

Quadro 1.1 | Tempo de cada produto em cada recurso

Recurso	Polia	Pistão	Virabrequim	Tempo disponível (minutos por dia)
Furadeira	10	7	12	480
Torno	6	5	0	420
Retífica	5	0	4	450

Fonte: elaborada pelo autor.

As variáveis de decisão (x) devem representar as quantidades de produtos que irão compor o mix de produção, estando associados aos respectivos lucros unitários, uma vez que o propósito da função objetivo no problema é maximizar o lucro. As restrições funcionais são compostas pela limitação dos recursos, que possuem uma capacidade máxima diária e as restrições de não negatividade garantem que as variáveis de decisão sejam maiores ou iguais a zero.

Logo, tem-se:

x_1 = quantidade de polias por dia; x_2 = quantidade de pistões por dia; x_3 = quantidade de virabrequins por dia.

Função objetivo: maximizar $Z = 2,20 x_1 + 3,15 x_2 + 2,90 x_3$

Sujeito às restrições: $10 x_1 + 7 x_2 + 12 x_3 \leq 480$

$6 x_1 + 5 x_2 \leq 420$

$5 x_1 + 4 x_3 \leq 450$

Restrições de não negatividade: $x_1; x_2; x_3 \geq 0$

Faça valer a pena

1. Na pesquisa operacional, comumente trabalhamos com modelos abstratos. O _____ trata-se de uma representação de um problema organizado com o propósito de obter uma solução ótima.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o nome do modelo que completa a lacuna da citação anterior.

- a) Modelo de maximização.
- b) Modelo de variação.
- c) Modelo de decisão.
- d) Modelo de otimização.
- e) Modelo de minimização.

2. Sobre modelos matemáticos em pesquisa operacional, considere as afirmações I, II e III.

I. As funções objetivos são aquelas nas quais os valores devem ser determinados, ou seja, se tivermos infinitas decisões que devem ser tomadas, de algum modo precisamos quantificá-las.

II. A solução das variáveis de decisão que maximiza ou minimiza a função objetivo é chamada de solução ótima.

III. As restrições podem ser entendidas como qualquer coisa que limita o melhor desempenho do sistema.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) e Falso (F) e assinale a alternativa que apresenta a ordem correta.

- a) V, V, F.
- b) F, F, V.
- c) F, V, V.
- d) F, F, F.
- e) V, V, V.

3. O lucro total é um exemplo de função objetivo que nos interessa maximizar. Já o custo total seria um exemplo de função objetivo na qual o nosso interesse seria de minimizar. Na função objetivo, os(as) _____ são obtidos(as) na fase de coleta de dados e representam uma contribuição de cada _____ para a função objetivo.

Assinale a alternativa que completa a frase anterior corretamente.

- a) Coeficientes; restrição.
- b) Variáveis de decisão; restrição.
- c) Coeficientes; otimização.
- d) Variáveis de decisão; otimização.
- e) Coeficientes; variável de decisão.

Referências

CHIAVENATO, I. **Gestão de pessoas: o novo papel dos recursos humanos nas organizações**. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva, 2013.

Programação linear, dualidade e sensibilidade

Convite ao estudo

Caro aluno, na Unidade 2, nosso estudo será iniciado por meio do entendimento da programação linear (PL), abrangendo, inclusive, conceito, hipóteses, resolução de problemas e exemplos clássicos de programação linear em PO.

Posteriormente, entenderemos a importância e o funcionamento do método simplex, bem como a álgebra do simplex e o simplex em sua forma tabular.

Então, adentraremos nos estudos de dualidade e sensibilidade, contemplando a análise econômica da dualidade e aplicações da análise de sensibilidade em PO.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que você consiga formular e implementar um modelo de programação linear para resolução de problema de pesquisa operacional, sendo esse aspecto fundamental para a sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas

hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação?

Uma vez que as hipóteses estejam satisfeitas, você realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples para resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a solução ótima?

Você já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução encontrada anteriormente, uma vez que agora ela está sendo implementada. Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada?

Reflita sobre essas indagações e se empenhe no estudo do material, a fim de conseguir aplicar esses conhecimentos com sabedoria e de forma efetiva no mercado de trabalho!

Tenha um ótimo estudo!

Seção 2.1

Introdução à programação linear

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre a importância e conceitos de programação linear.

Considerando as diferentes ferramentas da pesquisa operacional, a programação linear é a mais conhecida e utilizada nos problemas que se vinculam à alocação de recursos.

Então, exploraremos o conceito de programação linear em pesquisa operacional, bem como hipóteses, resolução de problemas e exemplos clássicos nesse âmbito.

Esse estudo é essencial a fim de você tornar-se apto a formular e implementar modelos de programação linear para diferentes problemas em PO, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, agora que já estamos familiarizados com os conceitos introdutórios de pesquisa operacional e com o processo de modelagem matemática, vamos iniciar nossos estudos utilizando uma das possíveis técnicas de otimização que é a programação linear.

O que é programação linear?

Relembrando o que vimos anteriormente na construção de modelos em pesquisa operacional, temos basicamente uma função objetivo, que é aquela que queremos otimizar (maximizar ou minimizar), as restrições funcionais e a restrição de não negatividade. A função objetivo e as restrições funcionais são equações, ou inequações (no caso das restrições funcionais), sendo compostas pelas variáveis de decisão e pelos diversos coeficientes, explicados anteriormente.

Uma das técnicas de programação matemática é a programação linear, que também poderemos abreviar por PL. Na PL as funções, equações e inequações apresentam comportamento linear.

As equações lineares podem ser representadas de modo genérico por $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, sendo $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ os coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; e b é chamado de termo independente, sendo que se $b = 0$ a equação é chamada homogênea.



Vamos executar a modelagem de um problema de programação linear? Então, vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos, que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.1, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.1 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R\$ 3,00 e de cada lousa R\$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Em primeiro lugar, temos que definir as variáveis de decisão, que nesse caso serão as quantidades de bonecos e de lousas. Assim, podemos dizer que x_1 é a quantidade de bonecos e x_2 de lousas. A nossa função objetivo representará o lucro total, que deve ser maximizado. O lucro total é uma função da quantidade de bonecos e lousas multiplicada pelo lucro unitário de cada produto.

Função objetivo: $\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$

E quais as restrições? Temos as restrições funcionais, que são as limitações de cada uma das três máquinas, que foram obtidas pelo Quadro 2.1.

Restrição da máquina 1: $1x_1 + 2x_2 \leq 12$

Restrição da máquina 2: $2x_1 + 3x_2 \leq 12$

Restrição da máquina 3: $2x_1 + 1x_2 \leq 8$

Restrição de não negatividade: $x_1, x_2 \geq 0$, ou seja, a quantidade de bonecos e de lousas deve ser maior ou igual a zero.

O nosso problema ficaria:

$\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Agora que já sabemos o que é a PL, temos que levar em conta alguns pressupostos, ou hipóteses, para a resolução de problemas de programação linear. Quais são essas hipóteses?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), considerando-se o ponto de vista matemático da modelagem, existem quatro hipóteses que devem ser satisfeitas com relação às atividades e aos dados coletados que compõem o problema.

1. Hipótese de proporcionalidade: se aplica tanto à função objetivo quanto às restrições. Tem-se que a contribuição de cada atividade ao valor de Z (função objetivo) é proporcional ao nível da atividade (variável de decisão), conforme representado pelo parâmetro na função objetivo. O alvo dessa hipótese é garantir que o expoente seja igual a um para qualquer variável de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições funcionais. Isso garante que o modelo é linear. No Quadro 2.2 é apresentado um exemplo em que a hipótese é satisfeita e violada.

Quadro 2.2 | Hipótese de proporcionalidade

Variável de decisão (x_i)	Medida de desempenho global ($Z = 4x_i$)	
	Hipótese satisfeita	Hipótese violada
0	0	0
1	4	5
2	8	10
3	12	13

Fonte: elaborada pelo autor.

2. Hipótese de aditividade: garante que o efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais, ou seja, toda função num modelo de programação linear será a soma das contribuições

individuais de cada respectiva atividade. Por exemplo, se a medida de desempenho global Z indicar o custo total, ela será a soma dos custos individuais de cada atividade.

3. Hipótese de divisibilidade: como estamos trabalhando com um modelo de programação linear, as variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros (fracionados). Se as variáveis assumirem apenas valores inteiros, trata-se de programação inteira.

4. Hipótese de certeza: garante que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são assumidos como conhecidos. Essa hipótese vale tanto para os parâmetros da função objetivo quanto para as restrições funcionais, de modo que são não valores aleatórios.

Para que tenhamos um modelo de programação linear, tanto as hipóteses do modelo quanto as hipóteses da modelagem devem ser satisfeitas, pois caso contrário as soluções obtidas não poderão ser validadas.

Para que o problema em questão possa ser resolvido como um problema de PL, obrigatoriamente, as quatro hipóteses apresentadas devem ser satisfeitas. No entanto, na maioria dos problemas reais as hipóteses apresentadas podem não ser satisfeitas. E agora? Isso inviabiliza o uso da programação linear em problemas reais?

A resposta para essa pergunta é *não* e a justificativa é que utilizamos modelos, que nada mais são do que uma representação aproximada da realidade, ou seja, temos uma abstração da realidade. Como já vimos, não são todas as informações reais que deverão ser agregadas no nosso modelo, pois isso deixaria o modelo muito complexo e, com isso, provavelmente não encontraríamos uma solução, o que dirá uma solução ótima.

Portanto, é importante que ao formular o problema você analise bem as hipóteses e as diferenças entre o problema real e o modelo obtido. Se para criar um modelo que descreva adequadamente a realidade você violar de forma significativa as quatro hipóteses ou se ao satisfazer as quatro hipóteses o seu modelo se distanciar muito da realidade, pare e repense o uso da programação linear. Para esses casos, temos outras possibilidades de soluções que veremos mais adiante.



Sabendo quais são as hipóteses da PL que devem ser satisfeitas, reflita no exemplo da indústria de brinquedos (apresentado no box *Exemplificando*) que modelamos anteriormente e verifique se as quatro hipóteses são satisfeitas para esse problema. Lembrando que temos as hipóteses de proporcionalidade, de aditividade, de divisibilidade e de certeza.

Agora que já sabemos o que é programação linear e as hipóteses que devem ser satisfeitas para que o nosso problema possa se enquadrar nesse tipo de programação matemática, como podemos encontrar uma solução ótima para essa classe de problemas?

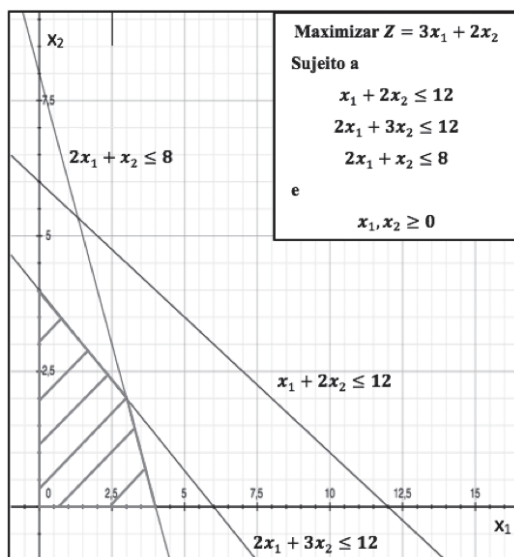
O primeiro método que aprenderemos é muito intuitivo e de fácil visualização; a este método chamaremos de Método Gráfico. Posteriormente, ficará evidente o motivo do uso desse nome para obter uma solução, e, caso ela exista, verificar se ela é ótima.

Para isso, necessitamos relembrar alguns conceitos, a começar pelos tipos de soluções possíveis, considerando-se que um modelo de programação linear consiste, basicamente, de um sistema de equações lineares.

- Solução viável: para uma solução ser viável todas as restrições devem ser satisfeitas.
- Solução inviável: se ao menos uma das restrições for violada, a solução é inviável.
- Região de soluções viáveis: é o conjunto de todas as soluções viáveis.
- Solução ótima: trata-se do valor mais favorável da função objetivo (maior ou menor valor da função objetivo).
- Nenhuma solução ótima.

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), uma solução viável em ponto extremo (também chamada de solução FPE) é aquela que está no vértice da região de soluções viáveis. A Figura 2.1 apresenta um exemplo de região de soluções viáveis, obtida a partir da modelagem do problema de programação linear da indústria de brinquedos (apresentado no box *Exemplificando*), que satisfaz as quatro hipóteses verificadas anteriormente, na qual podemos destacar as soluções FPE.

Figura 2.1 | Exemplo de região de soluções viáveis



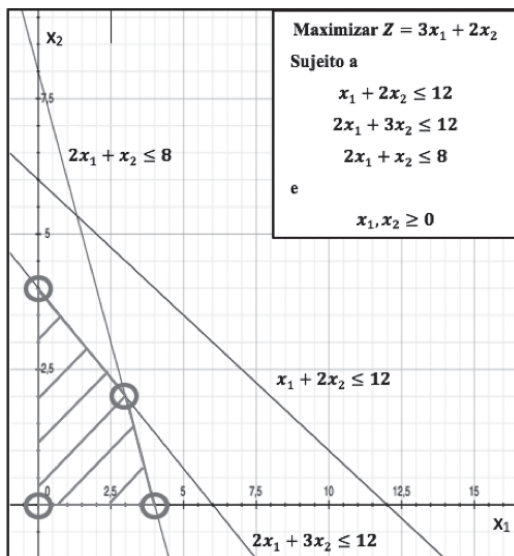
Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2.1 apresenta as restrições do modelo de programação linear em um gráfico bidimensional de x_1 e x_2 . Como já vimos anteriormente, na região de soluções viáveis todas as restrições do problema são satisfeitas, portanto, são candidatas a solução ótima. Se um problema tiver apenas uma solução ótima, esta obrigatoriamente será uma solução FPE. Caso o problema tenha múltiplas soluções ótimas, ao menos duas das soluções ótimas serão soluções FPE.

Considerando as definições de Hillier e Lieberman (2013), o Método Gráfico consiste na identificação da região de soluções viáveis, para que sejam localizadas as soluções FPE. Como a solução ótima é obrigatoriamente uma solução FPE, nos problemas cuja solução ótima existe e seja única, precisamos descobrir qual solução FPE é a melhor, portanto, a ótima.

Vamos voltar ao exemplo da Figura 2.1, na qual identificamos a região de soluções viáveis, composta pela intersecção das retas que representam as restrições funcionais (área hachurada pelas retas vermelhas, incluindo o contorno). As soluções FPE são apresentadas na Figura 2.2, nas intersecções circuladas.

Figura 2.2 | Soluções FPE



Fonte: elaborada pelo autor.

As soluções FPE (x_1, x_2) são: $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,2)$, $(4,0)$. Para determinar a solução ótima, caso ela seja única, sabemos que obrigatoriamente será a melhor solução FPE.

Para descobrir qual a melhor solução FPE, precisamos substituir os valores de x_1 e x_2 encontrados em cada uma na função objetivo, conforme apresentado:

$$(x_1, x_2) = (0,0) \rightarrow Z = 0$$

$$(x_1, x_2) = (0,4) \rightarrow Z = 8$$

$$(x_1, x_2) = (3,2) \rightarrow Z = 13$$

$$(x_1, x_2) = (4,0) \rightarrow Z = 12$$

Considerando-se que neste caso o problema é de maximização, a solução ótima será o valor mais positivo, ou seja, a medida de desempenho global Z , que é **13**. Portanto, existe uma única solução ótima $(x_1, x_2) = (3,2)$. Logo, com a limitação das máquinas, devemos produzir três bonecos e duas lousas por dia e ter um lucro máximo de R\$ 13,00.

É evidente que problemas mais complexos, que envolvam um número maior de variáveis de decisão, não poderão ser resolvidos pelo Método Gráfico. Para esses casos, utilizaremos uma outra abordagem, que é o método simplex, que veremos mais adiante.



Assimile

Caro aluno, perceba que os problemas de programação linear apresentam, como característica fundamental, funções, equações e inequações na forma linear. Para esse tipo específico de problema, devemos satisfazer quatro hipóteses: proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e certeza.

Para resolvermos problemas de programação linear utilizando o Método Gráfico, devemos ter em mente os conceitos de: solução viável, solução inviável, região de soluções viáveis e solução ótima.

Vamos ver alguns exemplos clássicos de programação linear a fim de você entender a aplicação de PL em sua prática profissional?

Como já vimos no problema da indústria de brinquedos, um dos problemas mais recorrentes dentro da programação linear é a escolha do mix ótimo de produção de bens ou serviços. Isso porque geralmente temos um lucro ou um custo unitário para cada produto ou serviço, de modo que queremos otimizar o lucro ou o custo total.

Evidentemente que essa não é a única aplicação possível dos problemas de PL, sendo que um outro exemplo é a definição de escala de funcionários para atendimento aos clientes. Por exemplo, em um *call center* ou em um balcão de atendimento de uma empresa, o objetivo é verificar a quantidade de funcionários necessária para atingir um nível de atendimento mínimo, de modo que o custo com os funcionários seja minimizado.

Um outro exemplo muito recorrente e que será estudado de modo mais detalhado na próxima unidade, é o problema de transporte. Nesse caso, devemos ter em mente que existe uma dada oferta de produtos ou serviços na origem e uma demanda no destino. A questão central aqui é como minimizar o custo total de transporte entre as origens e os destinos.



Vamos avançar nossos estudos em programação linear?

Faça a leitura das páginas 52 a 54 do capítulo 3 (Introdução à programação linear) do livro *Introdução à pesquisa operacional* dos autores Frederick Hillier e Gerald Lieberman. Disponível em: <HYPERLINK "https://biblioteca-virtual.com/detalhes/eds/edsmib/edsmib.000003268" https://biblioteca-virtual.com/>. Acesso em: 2 nov. 2017.

Bons estudos!

Sem medo de errar

Você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Para que os conceitos da programação linear possam ser aplicados no planejamento estratégico do seu negócio, algumas hipóteses precisam ser satisfeitas, então, como você faria essa verificação?

Para que a verificação comece, primeiro vamos à hipótese de proporcionalidade. Sabemos que a contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo é proporcional ao nível da atividade (variável de decisão). Portanto, devemos garantir, por meio dessa hipótese, que o nosso problema do negócio de doces apresenta expoente igual a um para qualquer variável de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições funcionais, ou seja, que é de fato um problema com comportamento linear, configurando um problema de programação linear.

Em seguida, temos a hipótese de aditividade, sendo que o efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais, ou

seja, toda função num modelo de programação linear será a soma das contribuições individuais de cada respectiva atividade. Por exemplo, se a medida de desempenho global Z indicar o lucro total com os diferentes tipos de doces produzidos, ela será a soma dos lucros individuais de cada tipo de doce, multiplicada pela quantidade de cada tipo de doce a ser produzida.

Já a hipótese de divisibilidade garante que as variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros (fracionados). Nesse caso, poderíamos ter um valor fracionado do mix de produção dos diferentes tipos de doces. Se o valor fracionado não tiver sentido real para o nosso problema, veremos como resolver isso utilizando o conceito de programação inteira.

Por último, é fundamental que cada parâmetro do nosso problema seja assumido como conhecido, por exemplo, o lucro unitário de cada doce, a capacidade máxima de produção de cada equipamento, quais os requisitos de produção para cada tipo de doce, entre outros. É isso o que nos garante a hipótese de certeza, que os parâmetros da função objetivo e das restrições funcionais são conhecidos e não valores aleatórios.

Avançando na prática

Investimento financeiro

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhamentos sobre os dois tipos de investimentos, conforme ao Quadro 2.3.

Quadro 2.3 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada R\$ 100 por mês)	Investimento B (a cada R\$ 100 por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pela programação linear. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução; como você faria essa indicação?

Resolução da situação-problema

Em primeiro lugar, o modelo matemático que descreve o problema é:

x_1 = investimento em A (múltiplo de R\$100,00)

x_2 = investimento em B (múltiplo de R\$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

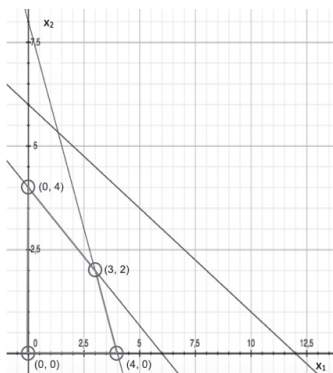
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

E

$$0 \leq x_1, x_2$$

Utilizando o Método Gráfico para solucionar o problema de programação linear, encontramos a seguinte região de soluções viáveis e as soluções FPE conforme apresentado na Figura 2.3:

Figura 2.3 | Soluções FPE



Fonte: elaborada pelo autor.

As soluções FPE e seus respectivos valores para a função objetivo (Z) são (X_1, X_2) :

- $(0, 0)$ com $Z = 0$
- $(0, 4)$ com $Z = 8$
- $(3, 2)$ com $Z = 13$
- $(4, 0)$ com $Z = 12$

Dentre as soluções FPE apresentadas, a que tem o melhor valor, uma vez que o objetivo é maximizar o retorno, é a solução $(3, 2)$, R\$ 300 no investimento A e R\$ 200 no investimento B, com retorno de R\$ 130.

Parabéns, você conseguiu indicar ao seu cliente qual era o melhor investimento!

Faça valer a pena

1. A empresa, produtora de aço, está implantando uma política de redução da poluição do ar, tendo em vista as crescentes preocupações ambientais e sociais, para se manter competitiva no mercado.

Um levantamento realizado por funcionários junto à companhia ambiental do município identificou que a taxa anual máxima (em milhões de toneladas) de emissão de hidrocarbonetos, particulados e óxido de enxofre na atmosfera deve ser, respectivamente, 30, 12 e 20. Caso esses limites sejam respeitados, será seguido um rigoroso padrão de qualidade do ar no município.

A empresa utiliza dois tipos de fornos: os altos-fornos e os fornos Siemens-Martin e cada um deles tem uma taxa de emissão de poluentes, conforme apresentado no Quadro 2.4.

Quadro 2.4 | Emissão de poluentes em cada tipo de forno (milhões de toneladas por mês)

Poluente	Alto-forno	Siemens-Martin
Hidrocarbonetos	2	3
Particulados	1	1
Óxido de enxofre	2	1

Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando-se que o uso do alto-forno gera um lucro mensal de R\$ 40 milhões e que o uso do Siemens-Martins gera R\$ 50 milhões de lucro no mesmo período, qual o uso ótimo dos fornos ao longo dos meses do ano para manter a qualidade do ar dentro dos padrões estabelecidos?

- a) Utilizar apenas o alto-forno por 10 meses.
- b) Utilizar apenas o Siemens-Martin por 10 meses.
- c) Utilizar o alto-forno por 8 meses e o Siemens-Martin por 4 meses.
- d) Utilizar apenas o alto-forno por 11 meses.
- e) Utilizar o alto-forno por 6 meses e o Siemens-Martin por 6 meses.

2. A programação linear é bastante versátil, mas a aplicação mais usual envolve a alocação de recursos e atividades. Os recursos geralmente são escassos, portanto a quantidade disponível é limitada e o objetivo é fazer uma alocação cuidadosa, otimizando o uso dos recursos disponíveis. Com relação à programação linear, avalie as asserções e assinale a alternativa correta:

I. Determinar a alocação ótima nos problemas de programação linear envolve escolher os níveis das atividades que atingem o melhor valor para a função objetivo (ou seja, a medida de desempenho global).

PORQUE

II. Ter um nível maior nas atividades pode gerar custos desnecessários, no entanto, ter um nível menor pode gerar custos de não atendimento.

Com relação à programação linear, avalie as asserções I e II e assinale a alternativa correta.

- a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
- b) As duas afirmações são verdadeiras, mas II não justifica I.
- c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
- d) As duas afirmações são verdadeiras e a II justifica a I.
- e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

3. Sabemos que em um problema de pesquisa operacional, o modelo matemático deve ser uma representação razoável da realidade. Os modelos de programação linear, que são tipos específicos de modelos de pesquisa operacional, partem do pressuposto de que tanto a função objetivo quanto as restrições funcionais são lineares, mas além desses pressupostos, temos algumas hipóteses que norteiam a modelagem. Tratam-se de algumas propriedades matemáticas que devem ser satisfeitas em relação às atividades e aos dados do problema que está sendo modelado.

Com relação às hipóteses da modelagem, analise as afirmações:

I. Hipótese da aditividade

II. Hipótese da certeza

III. Hipótese da divisibilidade

IV. Hipótese da proporcionalidade

A. A contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo é equivalente ao nível da atividade.

B. O efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais.

C. As variáveis de decisão podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não inteiros.

D. Garante que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são conhecidos.

Com relação às hipóteses da modelagem, assinale a alternativa que apresenta a associação correta:

- a) I – B; II – D; III – A; IV – C.
- b) I – A; II – D; III – C; IV – B.
- c) I – B; II – D; III – C; IV – A.
- d) I – A; II – C; III – D; IV – B.
- e) I – B; II – C; III – D; IV – A.

Seção 2.2

Método simplex

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior, estudamos a resolução dos problemas envolvendo duas variáveis de decisão pelo Método Gráfico.

Você já pensou qual seria um possível método ou ferramenta para a solução de problemas que envolvam mais de duas variáveis e que, assim, não podem ser resolvidos graficamente?

Nesta seção, trabalharemos os conceitos e aplicação do Método simplex para a resolução de problemas que podem envolver mais de duas variáveis e que, assim, não poderiam ser resolvidos graficamente.

Será estudado também a álgebra do método simplex, bem como o simplex em sua forma tabular.

Esse estudo é essencial a fim de você tornar-se apto a resolver diferentes problemas em PO, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Inicialmente, você refletiu sobre algumas hipóteses que precisariam ser satisfeitas.

Agora, você realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples para resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a

solução ótima? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão do que e do quanto produzir em seu novo negócio.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Caro aluno, nós já compreendemos como funciona a modelagem em programação linear (PL) e aprendemos a resolver alguns problemas mais simples utilizando o Método Gráfico, mas você deve estar se perguntando: e nos casos mais complexos?

O Método Gráfico restringe a resolução de problemas de programação linear, uma vez que temos a limitação da resolução pelo número de variáveis de decisão que podemos plotar no gráfico e, na grande maioria dos problemas de PL, esse número é extrapolado facilmente.

Para essas situações, utilizaremos o método simplex, que foi desenvolvido por George Dantzig em 1947 e que é utilizado em computadores para resolver problemas de programação linear. O que é o método simplex?

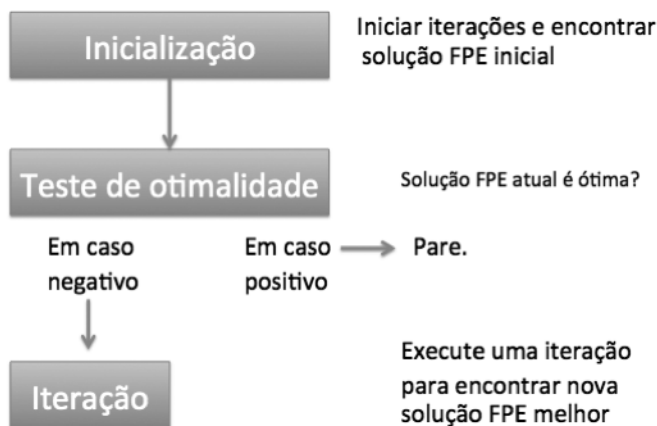
Para responder a essa pergunta, primeiro precisamos lembrar de algo fundamental da programação linear: as funções, equações e/ou inequações apresentam comportamento linear. Isso faz com que tenhamos, na modelagem de problemas de PL, um sistema de equações lineares. O Método simplex nada mais é do que um procedimento algébrico para resolução do sistema de equações lineares que compõe o nosso problema de PL.

Conforme apresentado por Hillier e Lieberman (2013), e também por Lachtermacher (2009), o simplex também apresenta conceitos geométricos, o que nos ajuda a entender o seu funcionamento. Hillier e Lieberman (2013) apresentam seis conceitos-chave para obter as soluções pelo simplex, a saber:

1. O simplex se concentra apenas em soluções FPE (lembrando, são soluções viáveis em pontos extremos).

2.O simplex é um método iterativo, ou seja, possui uma série de passos que são executados de modo repetitivo (que chamaremos de iterações) até chegar-se a uma solução ótima, lembrando que são analisadas apenas soluções FPE. A Figura 2.4 apresenta, de modo prático, como as iterações funcionam.

Figura 2.4 | Funcionamento do simplex



Fonte: adaptada de: Hillier e Lieberman (2013, p. 87).

3. Sempre que for possível, o simplex utiliza como solução inicial a origem (todas as variáveis de decisão são iguais a zero). Em alguns casos veremos que isso não é possível, como nos problemas de minimização ou quando essa solução for inviável, de modo que nesses casos outros procedimentos devem ser empregados para obter a solução inicial.

4. Temos o conceito de solução FPE adjacente, ou seja, uma solução FPE que esteja próxima à solução atual. O simplex verifica as soluções FPE adjacentes para se deslocar da solução atual, não sendo consideradas outras soluções.

5. Como vimos anteriormente no Método Gráfico, a solução atual pode levar a uma solução adjacente. O simplex verifica o deslocamento que trará maior crescimento para a função objetivo e desloca-se nesse sentido para a solução FPE adjacente.

6. Ter uma taxa de crescimento positiva para a função objetivo deslocando-se para a solução FPE adjacente indica que essa solução será melhor do que a atual, mas caso seja uma taxa

de crescimento negativa, a solução adjacente será pior que a atual. Para essa verificação utilizaremos o teste de otimalidade, presente na Figura 2.4.



Refleta

Caro aluno, agora que já sabemos os seis conceitos-chave para o Método simplex, fica a seguinte questão para reflexão: você acha que no exemplo da indústria de brinquedos, apresentado na seção anterior, é possível empregar o conceito-chave 3? Poderíamos utilizar como solução inicial a origem (todas as variáveis de decisão iguais a zero)?

Além dos conceitos apresentados, precisamos inserir as chamadas variáveis de folga no nosso modelo. Como vimos anteriormente, o simplex é um método algébrico utilizado para resolver o sistema de equações lineares oriundo do processo de modelagem do nosso problema de PL. Para que isso ocorra, precisamos transformar as inequações, que por ventura existam nas restrições funcionais, em equações. Como faremos isso? Justamente utilizando as variáveis de folga! Dessa forma, para cada inequação, utilizaremos uma variável de folga que represente a diferença entre o utilizado e o disponível para cada restrição funcional no formato de uma inequação.

As variáveis de folga podem ser representadas por quaisquer letras ou índices, valendo ressaltar que apenas não pode ser adotada exatamente a mesma notação que já foi utilizada para alguma variável de decisão, a fim de evitar equívocos.



Exemplificando

Caro aluno, vamos retomar brevemente o exemplo da indústria de brinquedos, que abordamos na seção anterior, sobre como fazer a modelagem do problema de PL.

Vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.5, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.5 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R\$ 3,00 e de cada lousa R\$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Relembrando, na seção anterior obtivemos o seguinte modelo para o problema em questão:

$$\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Agora, utilizando o simplex, a modelagem será exatamente a mesma, lembrando que precisamos, desta vez, adicionar uma variável de folga para cada restrição funcional que apresente uma inequação.

Logo, como ficaria nesse caso?

A nossa função objetivo não sofrerá alterações, ficando:

$$\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$$

Já as nossas restrições funcionais terão alterações. Nesse caso, adotaremos uma variável de folga para cada inequação e transformaremos as desigualdades em igualdades:

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_5 = 8$$

Portanto, as variáveis de folga inseridas foram:

$$x_3; x_4; x_5$$

A restrição de não negatividade permanece igual, sendo:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Além das variáveis de folga, temos o conceito de solução básica, que é uma solução em ponto extremo aumentada pelas variáveis de folga. Portanto, na solução básica temos os valores obtidos para as variáveis de decisão mais os valores das variáveis de folga. Já a solução básica viável é a solução viável em ponto extremo (FPE).

Cada solução básica é composta por variáveis básicas e não básicas. As variáveis não básicas sempre são configuradas em zero, enquanto que as básicas são os valores encontrados pela solução do sistema de equações lineares. O número de variáveis básicas é igual ao número de restrições funcionais, enquanto que o número de não básicas é o total de variáveis menos o número de variáveis básicas (ou o número de restrições).



Assimile

Caro aluno, diante de tantos conceitos novos, vale a pena resumarmos os principais fundamentos sobre o Método simplex:

- variáveis de folga: transformam as inequações em equações;
- solução básica: solução ponto extremo aumentada;
- variáveis básicas: encontradas pela solução do sistema de equações;
- variáveis não básicas: são configuradas em zero.

Para facilitar o desenvolvimento algébrico do simplex, utilizaremos alguns quadros, sendo essa forma de resolução também chamada de método tabular, como apresentado nos quadros de 2.6 a 2.13.

Vamos aplicar o simplex, por meio do método tabular, considerando ainda o exemplo da indústria de brinquedos, apresentado no box *Exemplificando*, a fim de ajudá-lo a ter um desencadeamento lógico das ideias.

Vale a pena ressaltar que, para que nosso quadros fiquem padronizados e sejam fáceis de utilizar na solução dos problemas, faremos uma alteração na função objetivo, isto é, os termos que estão à direita irão para a esquerda, logo, para a indústria de brinquedos (Quadro 2.6), teremos: $Z - 3,00x_1 - 2,00x_2 = 0$.

Quadro 2.6 | Sistema inicial do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b
	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
x ₃	0	1	2	1	0	0	12
x ₄	0	2	3	0	1	0	12
x ₅	0	2	1	0	0	1	8

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, precisamos escolher uma coluna, que chamaremos de coluna pivô. Essa coluna é aquela que contribui mais para a nossa função objetivo. Como fizemos uma inversão, nesse exemplo será o valor mais negativo, ou seja, conforme observado no Quadro 2.6, será -3. Essa, que é a variável X_1 , é chamada de variável que entra.

o Quadro 2.7 apresenta a coluna pivô e o quociente entre cada termo do lado direito (b) e o respectivo valor da coluna pivô, a exceção da linha que representa a função objetivo.

Quadro 2.7 | Coluna pivô do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Quociente
	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
x ₃	0	1	2	1	0	0	12	12/1=12
x ₄	0	2	3	0	1	0	12	12/2=6
x ₅	0	2	1	0	0	1	8	8/2=4

Fonte: elaborada pelo autor.

A linha que apresentar o menor valor de quociente será chamada de linha pivô. o Quadro 2.8 apresenta a composição do nosso sistema com a coluna e a linha pivôs. O valor que se encontra na interseção entre a coluna e a linha pivôs é chamado de coeficiente pivô.

Quadro 2.8 | Coluna e linha pivôs do problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Quociente
	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
x ₃	0	1	2	1	0	0	12	12/1=12
x ₄	0	2	3	0	1	0	12	12/2=6
x ₅	0	2	1	0	0	1	8	8/2=4

Fonte: elaborada pelo autor.

O coeficiente pivô vale 2, portanto, faremos um novo quadro no qual a variável de folga X_5 é a que sai para a entrada de X_1 . No novo quadro (2.9), faremos o cálculo de uma nova linha pivô, que é a divisão da linha pivô pelo coeficiente pivô.

Quadro 2.9 | Nova linha pivô para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	Nova linha pivô
x_3	0	1	2	1	0	0	12	
x_4	0	2	3	0	1	0	12	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com Hillier; Lieberman (2013) as demais linhas serão calculadas tendo como base:

1. Se o coeficiente da linha a ser calculada na coluna pivô for negativo, adicionaremos a essa linha o produto desse valor absoluto pela nova linha pivô.

Exemplo: a linha Z apresenta valor na coluna pivô -3. Portanto, adicionaremos a essa linha o produto desse valor absoluto pela nova linha pivô, conforme apresentado no Quadro 2.10.

Quadro 2.10 | Novas linhas Z para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	Nova linha Z
x_3	0	1	2	1	0	0	12	
x_4	0	2	3	0	1	0	12	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

2. Se o coeficiente da linha a ser calculada for positivo, subtrairemos dessa linha o produto desse coeficiente pela nova linha pivô.

Exemplo: a linha X_3 apresenta valor na coluna pivô 1 (positivo). Portanto, subtrairemos dessa linha o produto desse coeficiente pela nova linha pivô. Faremos o mesmo com a linha X_4 e ao final teremos o Quadro 2.11.

Quadro 2.11 | Novas linhas x_3 e x_4 para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	Nova linha x_3 Nova linha x_4
x_3	0	0	1,5	1	0	-0,5	8	
x_4	0	0	2	0	1	-1	4	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora temos no Quadro 2.11 o valor final das variáveis após a primeira iteração. Observamos que x_5 saiu e que x_1 entrou. E agora, o que temos que fazer? Vamos retomar a Figura 2.4? Precisamos fazer o teste de otimalidade para saber se a solução encontrada é ótima ou não. Nesse caso, se existir algum valor negativo na linha Z, significa que a solução não é ótima, pois a função objetivo ainda pode crescer nessa direção.

Conforme observamos no Quadro 2.11, temos o valor de -0,5 para a variável x_2 na linha Z. Portanto, como a solução não é ótima, já que o valor da função objetivo ainda pode crescer, precisaremos fazer uma nova iteração igual feito anteriormente, só que agora a coluna pivô será -0,5, portanto, a variável x_2 será a variável que entra. O Quadro 2.12 mostra a variável que sai, por meio do quociente, que é x_4 e o coeficiente pivô que nesse caso é 2.

Quadro 2.12 | Novas coluna e linha pivô para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b	Obs.:
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	-0,5	0	0	1,5	12	8/1,5=5,33 4/2=2 4/0,5=8
x_3	0	0	1,5	1	0	-0,5	8	
x_2	0	0	2	0	1	-1	4	
x_1	0	1	0,5	0	0	0,5	4	

Fonte: elaborada pelo autor.

O novo quadro, com as novas linhas, obtidas de modo similar ao que detalhamos anteriormente, é apresentado no Quadro 2.13.

Ficam agora as perguntas: qual a nova solução? A nova solução é ótima?

Quadro 2.13 | Solução final para o problema da indústria de brinquedos

Variáveis	Coeficientes das variáveis						b
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	1	0	0	0	0,25	1,25	13
x_3	0	0	0	1	-0,75	0,25	5
x_2	0	0	1	0	0,5	-0,5	2
x_1	0	1	0	0	0,25	0,75	3

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, verificamos no Quadro 2.13 que não existe nenhum valor positivo para a linha Z, portanto, a solução encontrada é ótima. E qual é a solução encontrada?

Vamos observar as linhas X_1 e X_2 :

- $X_1 = 3$, pois X_4 e X_5 são variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.

- $X_2 = 2$, pois X_4 e X_5 são variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.

Desse modo, a solução ótima será $(X_1, X_2 = (3, 2)$ com $Z = 13$). É exatamente a mesma solução obtida pelo Método Gráfico. Os valores das variáveis de folga não são importantes para o resultado do nosso problema, uma vez que elas foram inseridas apenas para transformar o nosso problema num sistema de equações lineares. Em todo caso da linha X_3 , saberemos que $X_3 = 5$ e X_4 e X_5 são as variáveis não básicas, portanto, iguais a zero.



Pesquise mais

Você ficou curioso para saber como obter uma solução inicial quando não é possível utilizar a origem (todas as variáveis de decisão iguais a zero)?

Um dos métodos é a técnica das variáveis artificiais, que é detalhada junto com outras adaptações a outras formas de modelo, no livro *Introdução à pesquisa operacional*. Leia as páginas 104 a 113 para aprofundar os seus conhecimentos nesses métodos.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9 ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/>> Acesso em: 10 out 2017.

Sem medo de errar

Voltando à montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários, sabemos que o seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Agora que você verificou que as hipóteses da programação linear são satisfeitas, realizou a coleta de dados e concluiu o processo de modelagem, mas verificou que o problema não é tão simples de resolver pelo Método Gráfico, então, como você poderia encontrar a solução ótima? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que você precisa dessas informações para tomar uma decisão do que e do quanto produzir em seu novo negócio.

Agora, já sabemos que quando temos mais de duas variáveis de decisão, a solução pelo Método Gráfico não é viável. Então, tivemos contato com o Método simplex, que nada mais é do que um procedimento algébrico para a resolução do sistema de equações lineares que compõe a sua modelagem.

Você se deparou com algumas questões ao pensar em aplicar o Método simplex, sendo a primeira delas definir as variáveis de folga. Para cada equipamento que tem uma capacidade máxima, você decidiu formular uma restrição funcional na forma de uma inequação. Para que essas inequações sejam transformadas em equações e o Método simplex possa ser empregado, você adicionou uma variável de folga para cada uma delas.

Em seguida, avaliou a possibilidade de ter como solução inicial a origem (variáveis de decisão iguais a zero). Como você decidiu que o seu problema não é de minimização, e sim de maximização de lucros na função objetivo e a solução origem satisfaz todas as restrições, você definiu a origem como solução básica viável inicial para o seu problema.

Agora, utilizando o método tabular, você fará todos os procedimentos algébricos aprendidos anteriormente para chegar até a solução ótima, utilizando o conceito de variáveis básicas e não básicas.

Mais um desafio vencido e mais conhecimento construído para a sua prática profissional! Parabéns!

Avançando na prática

Investimento financeiro – análise pelo Método simplex.

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhes sobre os dois tipos de investimentos, conforme o Quadro 2.14.

Quadro 2.14 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada R\$ 100 por mês)	Investimento B (a cada R\$ 100 por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pelo simplex. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos,

especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução; como faria essa indicação pelo simplex?

Apresente esse modelo que, posteriormente, será utilizado pela analista de investimentos para a obtenção da solução ótima.

Resolução da situação-problema

Perceba que o seu papel, como gestor de banco, nesse momento, é modelar o problema, de acordo com o Método simplex, para que, então, o analista de investimentos resolva o problema e identifique a solução ótima.

Logo, em primeiro lugar o modelo matemático que descreve o problema é:

x_1 = investimento em A (múltiplo de R\$100,00)

x_2 = investimento em B (múltiplo de R\$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

E

$$0 \leq x_1, x_2$$

Agora, utilizando o simplex, a modelagem será exatamente a mesma, lembrando que precisamos, desta vez, adicionar uma variável de folga para cada restrição funcional que apresente uma inequação.

A nossa função objetivo não sofrerá alterações, ficando:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Já as nossas restrições funcionais terão alterações. Nesse caso, adotaremos uma variável de folga para cada inequação e transformaremos as desigualdades em igualdades:

$$1x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_5 = 8$$

Portanto, as variáveis de folga inseridas foram:

$$x_3; x_4; x_5$$

A restrição de não negatividade permanece igual, sendo:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Parabéns, mais um desafio vencido!

Com esse modelo, o analista de investimentos estará pronto para obter a solução ótima para o cliente!

Faça valer a pena

1. Considerando o Método simplex, analise as afirmações I e II.

I. O Método Gráfico restringe a resolução de problemas de programação linear, uma vez que temos a limitação da resolução pelo número de variáveis de decisão que podemos plotar no gráfico. Logo, para problemas de pesquisa operacional com mais de duas variáveis de decisão, o Método Gráfico já não se aplica.

PORTANTO

II. Para problemas mais complexos de pesquisa operacional, o que é facilmente encontrado na prática, utiliza-se o Método simplex, que pode ser empregado em sua forma tabular.

Analise as afirmações I e II, bem como a relação entre elas, e assinale a alternativa correta.

- a) Somente I é correta.
- b) Somente II é correta.
- c) I e II são corretas, mas II não é justificativa de I.
- d) I e II são corretas e II é justificativa de I.
- e) I e II não são corretas.

2. Sobre o Método simplex, considere as afirmações I, II e III.

I. O Método simplex é um procedimento algébrico para resolução do sistema de equações lineares que compõe o nosso problema de programação linear.

II. O simplex é um método iterativo, no qual uma série de passos são executados de modo repetitivo até chegar-se a uma solução ótima.

III. O simplex não verifica o deslocamento que trará maior crescimento para a função objetivo, de modo a não deslocar-se nesse sentido para a solução FPE adjacente.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) ou Falso (F) e selecione a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V, F, V.
- b) V, V, F.
- c) F, F, V.
- d) F, V, V.
- e) V, F, F.

3. Considerando o Método simplex, analise o tipo de variável (1 a 4) com a sua respectiva representação (A a D):

1. Variáveis de folga

3. Solução básica

2. Variáveis básicas

4. Variáveis não básicas

A - São configuradas em zero.

B - Transformam as inequações em equações.

C - Solução ponto extremo aumentada.

D - Encontradas pela solução do sistema de equações.

Faça a associação correta entre os tipos de variáveis e suas respectivas representações.

- a) 1-A; 2-D; 3-C; 4-B.
- b) 1-B; 2-C; 3-A; 4-D.
- c) 1-C; 2-D; 3-A; 4-B.
- d) 1-D; 2-A; 3-D; 4-C.
- e) 1-B; 2-D; 3-C; 4-A.

Seção 2.3

Dualidade e análise de sensibilidade

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo agora sobre dualidade e análise de sensibilidade.

Assim, nesta seção estudaremos a teoria da dualidade, análise econômica da dualidade, análise de sensibilidade em PO e suas aplicações.

Esse estudo é essencial a fim de você assimilar o conhecimento sobre análise de pós-otimização, o que lhe será muito útil na sua atuação profissional.

Nesse sentido, suponha que você decidiu investir na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Na seção anterior, utilizando o Método simplex, você verificou como encontrar a solução ótima, considerando a decisão sobre o que e quanto produzir.

Agora, então, já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução ótima encontrada anteriormente, uma vez que ela está sendo implementada.

Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que precisa dessas informações para manter sua empresa crescendo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Tenha um excelente estudo!

Não pode faltar

Agora que já sabemos como resolver os problemas de programação linear pelo Método Gráfico e pelo simplex, entenderemos melhor sobre a Teoria da dualidade e a análise de sensibilidade.

Primeiro, o que é Teoria da dualidade?

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), no início do desenvolvimento da programação linear, estudiosos descobriram algo a que deram o nome de dualidade e esse nome veio porque para todo problema de PL verificaram que existia um outro problema associado a ele, chamado de dual.

Dessa forma, temos que o problema original era chamado primal e havia um problema associado a este, sendo denominado dual. Vale ressaltar que a partir do conceito de dualidade, poderemos também desenvolver a nossa análise de sensibilidade.

Certo, talvez o conceito de dualidade tenha ficado claro, mas qual a importância disso?

De acordo com Lachtermacher (2009), em algumas ocasiões queremos encontrar uma estimativa da solução ótima, ao invés de obtê-la utilizando o simplex. Isso porque em alguns casos, principalmente em problemas complexos com um número muito grande de variáveis de decisão, encontrar a solução ótima pode não ser uma tarefa fácil e rápida, mesmo utilizando recursos computacionais. Nesses casos, podemos procurar valores limites superiores ou inferiores para a nossa solução.

Além disso, o problema dual também poderá trazer outras interpretações para o nosso estudo, como a interpretação econômica, que nos ajuda quando temos dúvidas quanto à hipótese de certeza. A interpretação econômica pode ser obtida por meio dos valores das variáveis do dual. Em alguns casos, também pode ser mais eficiente a

resolução do dual, de modo que com a solução de um é possível obter a solução do outro.

Qual é a representação de um problema dual?

A primeira coisa que devemos levar em conta, de acordo com Hillier e Lieberman (2013), é que os parâmetros do problema dual são exatamente os mesmos do primal, apenas em posições diferentes. Para entender melhor, vamos retomar alguns termos de modelagem em PO:

- Coeficientes da função objetivo: são associados às variáveis de decisão na função objetivo.

- Coeficientes tecnológicos: são associados às variáveis de decisão nas restrições funcionais.

- Constantes do lado direito: são os valores do lado direito nas equações ou inequações que representam as restrições funcionais.

O que ocorre, então, num modelo dual com relação ao primal, já que temos apenas uma mudança na posição dos parâmetros?

A primeira coisa que ocorre é com os coeficientes da função objetivo do primal, que se transformam nas constantes do lado direito no dual.

De modo semelhante, as constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual.

Já os coeficientes tecnológicos do primal também são os coeficientes tecnológicos no dual, mas em posição diferente.

Talvez a explicação anterior tenha ficado muito abstrata, então, vamos ver na prática como ficaria o nosso dual? Contudo, antes disso temos que fazer algumas observações iniciais, conforme apresentado nos teoremas a seguir, de acordo Lachtermacher (2009):

1. O dual do dual é o primal.

2. Se a k -ésima restrição do problema primal for uma igualdade, então,

a k -ésima variável do dual será sem restrição de sinal, ou seja, poderá assumir valor positivo, negativo ou zero.

3. Se a p -ésima variável do primal for sem restrição de sinal, como visto anteriormente, então, a p -ésima restrição do dual será uma igualdade.

Vamos ao modelo primal genérico:

$$\text{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leq b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_m$$

E

$$x_n \geq 0$$

Assim, os coeficientes da função objetivo são representados por $c_1; c_2; \dots; c_n$. Os coeficientes tecnológicos por $a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}; \dots; a_{m1}; \dots; a_{mn}$ e as constantes do lado direito por $b_1; b_2; \dots; b_m$.

Nesse caso genérico, como ficaria o nosso problema dual? Vamos retomar o exposto anteriormente, de modo que o dual ficaria:

$$\text{Min}W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots b_my_m$$

Portanto, já observamos que a função objetivo do dual é minimizar, enquanto que no primal era maximizar. Do mesmo modo, o número de variáveis de decisão, que nesse caso passaram a ser $\mathbf{y}$ no dual, é o número de restrições do primal e as constantes do lado direito do primal viram coeficientes da função objetivo no dual.

E com relação às restrições funcionais?

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{m2}y_m \geq c_2$$

$\vdots$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots a_{mn}y_m \geq c_n$$

E

$$y_m \geq 0$$

Com relação às restrições, reparamos uma mudança no sinal da desigualdade, bem como a inversão dos coeficientes tecnológicos e a transformação dos coeficientes da função objetivo do problema primal nas constantes do lado direito no problema dual.



Caro aluno, vamos retomar brevemente o exemplo da indústria de brinquedos, que abordamos na Seção 2.1 sobre como fazer a modelagem do problema de PL.

Vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos, que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabemos que cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado conforme o tempo apresentado no Quadro 2.15, bem como o tempo máximo de processamento diário de cada máquina.

Quadro 2.15 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o lucro de cada boneco é de R\$ 3,00 e de cada lousa R\$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas?

Vamos retomar o modelo de PL que formulamos a partir das informações obtidas?

Então, vamos lá, o nosso problema era:

$$\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$$

Sujeito a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Como ficaria o mesmo problema na forma dual?

$$\min W = 12y_1 + 12y_2 + 8y_3$$

Portanto, agora temos três variáveis de decisão. E as restrições funcionais?

$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 2$$

Com relação à restrição de não negatividade, todos os valores das novas variáveis de decisão continuam sendo maiores ou iguais a zero.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Ficou claro a forma de obter o dual a partir do primal? Se estivéssemos trabalhando com o nosso problema na forma matricial, estaríamos fazendo apenas uma transposição entre as matrizes, ou seja, invertendo as posições ocupadas entre as linhas e as colunas.



Refleta

Caro aluno, agora que você já sabe melhor como obter um modelo dual a partir do primal, que tal retornarmos para os teoremas que vimos anteriormente?

Então, vamos lá, sua tarefa agora é refletir sobre os três teoremas e realizar a sua demonstração.

O mais simples, a princípio, é o teorema 1: o dual do dual é o primal. Tente demonstrar cada um dos teoremas com base nos seus conhecimentos adquiridos até o momento e reflita sobre as implicações de cada um deles!

Agora que entendemos o básico com relação à dualidade, que tipos de interpretações podemos explorar que sejam advindas dessa teoria?

Existem várias possibilidades, mas a mais comum é a interpretação econômica do problema dual. Vamos verificar alguns casos? Lachtermacher (2009) apresenta quatro casos possíveis de análise econômica do dual e, para isso, precisamos relembrar o conceito de variáveis de folga que vimos no Método simplex.

O primeiro caso, descrito por Lachtermacher (2009), é quando a variável de folga do problema primal é maior do que zero e a variável de decisão igual a zero, podemos dizer que nem todo recurso (representado pelas restrições funcionais do modelo primal) está sendo consumido pelas atividades, podendo haver sobra do recurso.

No segundo caso, a variável de decisão do dual é maior que zero e a variável de folga do primal é igual a zero. Nesse caso, todo recurso é consumido pelas atividades, portanto, não há sobra do recurso.

Quando o valor da variável de decisão do primal é zero na solução ótima, essa atividade não seria realizada, pois o custo é maior do que o lucro. Se o valor da variável de decisão do primal é maior do que zero, então o valor implícito da produção de uma unidade do produto i será C_i , ou seja, o valor ou lucro desse produto i .

Quando falamos dessas possibilidades, estamos falando sobre um conceito da programação linear que liga a Teoria da dualidade à análise de otimalidade, chamado de coluna preço-sombra, que, de acordo com Hillier e Lieberman (2013), mede o valor marginal do recurso, ou seja, a taxa que aumentaria o valor da função objetivo, aumentando-se a quantidade do recurso que está sendo disponibilizado.



Pesquise mais

Caro aluno, vamos aprofundar os nossos conhecimentos nas relações entre o primal e o dual?

Nós conseguimos iniciar os nossos estudos sobre as relações entre primal e dual quando falamos sobre a Teoria da dualidade, mas o capítulo do livro do Hillier e Lieberman (2013), sobre Teoria da Dualidade e análise de sensibilidade, traz algumas outras relações primal-dual que sugerimos que você leia! As páginas recomendadas para consulta são da 194 até a 199.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/>>. Acesso em: 12 out. 2017.

E a análise de sensibilidade, também denominada análise pós-otimização? O que é esse tipo de análise e quais as suas aplicações?

Como já vimos anteriormente, as hipóteses da programação linear dificilmente são satisfeitas nos problemas reais, principalmente a hipótese de certeza. Apenas lembrando, a hipótese de certeza dizia que todos os valores atribuídos a cada parâmetro de um modelo de programação linear são assumidos como conhecidos. Essa hipótese vale tanto para os parâmetros da função objetivo quanto para as restrições funcionais, de modo que são não valores aleatórios.

Então, o que ocorre se realizarmos mudanças nos valores dos parâmetros do modelo (coeficientes da função objetivo, coeficientes tecnológicos e constantes do lado direito) diante de alguma alteração ocorrida no problema? Será que a nossa solução permanecerá ótima até que nível de alteração nesses parâmetros? E com relação ao problema dual que vimos anteriormente?

Vamos ver alguns exemplos de alterações para responder aos questionamentos anteriores?

O primeiro caso envolve a introdução de uma nova variável no modelo. Como no exemplo da indústria de brinquedos, apresentado no box *Exemplificando*, antes produzíamos bonecos e lousas. E se agora nós quiséssemos fabricar um terceiro produto? Será que isso alteraria a solução ótima que nós já encontramos?

A primeira coisa que teríamos que fazer é acrescentar essa nova variável na função objetivo e nas restrições funcionais existentes. Já no problema dual, como nós vimos anteriormente, a transformação de um problema primal num dual, a única diferença que teríamos é a existência de mais uma restrição funcional. Será que se a nova variável assumisse valor zero, a solução anterior ainda seria ótima? Lembrando que agora teremos uma nova restrição no nosso modelo dual, o que implica numa nova análise para verificar se nossa solução ótima permanece viável no novo modelo. Hillier e Lieberman (2013) demonstram que sim, ou seja, se a nova variável de decisão for igual a zero, a solução ótima anterior se mantém ótima e para analisar o impacto da viabilidade da solução, podemos utilizar os preço-sombra.

E se acrescentarmos uma nova restrição ao nosso modelo? Precisamos verificar de que tipo é essa restrição. As chamadas restrições redundantes, ou seja, repetitivas, não afetam a solução ótima, mas caso a restrição afete a solução, teremos que levá-la em conta na resolução e verificar os seus possíveis impactos na solução do problema.

E se mudarmos os coeficientes de uma variável não básica no nosso modelo? Como vimos anteriormente, as variáveis não básicas são configuradas em zero. Para responder a essa pergunta, é necessário conhecer o coeficiente crítico para a estabilidade da solução. Em outras palavras, precisamos verificar o valor que fará com que a variável se transforme em básica e altere a solução.

Em linhas gerais, nos interessa saber quais são os parâmetros sensíveis, ou seja, aqueles que não podem ser alterados sem alterar

a solução ótima. Em problemas menores, é mais simples verificar os impactos dos parâmetros sensíveis, de modo que é suficiente ir aplicando o simplex e verificando o que ocorre com a nossa solução. Contudo, como ocorre em problemas mais complexos?

Os problemas que em geral são encontrados na prática, apresentam uma certeza menor com relação aos parâmetros que serão utilizados na modelagem, ou seja, é realizada uma estimativa. Além disso, nesse mesmo tipo de problema talvez não seja viável replicar o simplex desde o início para buscar possíveis alterações na solução a cada mudança num parâmetro. Nesses casos, é importante termos inicialmente em mente os exemplos que já vimos como o acréscimo de variáveis de decisão, o acréscimo de restrições, entre outros.

Hillier e Lieberman (2013) destacam que em caso de mudanças no modelo original, inicialmente deveríamos verificar se a solução básica viável ótima original ainda é ótima ou se ela tornou-se inviável. Caso continue ótima, poderíamos utilizá-la para reiniciar o simplex como solução básica inicial. Dependendo do grau de mudanças no modelo, chegar a uma nova solução ótima por meio da solução ótima anterior pode ser um procedimento rápido.

Hillier e Lieberman (2013) sintetizaram alguns procedimentos para a análise de sensibilidade, que estão descritos a seguir.

O primeiro passo para a análise de sensibilidade consiste na revisão do modelo, passo esse no qual faremos todas as alterações desejadas ou necessárias no nosso modelo. Em seguida, devemos fazer uma revisão no quadro final do simplex, pois desse modo podemos verificar as mudanças que devem ser executadas em função do passo anterior.

Posteriormente, precisamos converter o nosso quadro (similar ao que fizemos no simplex) para avaliar a solução básica atual. Caso a solução seja viável, ou seja, todas as variáveis básicas na coluna do lado direito do simplex ainda são não negativas, daremos prosseguimento com o teste de otimalidade.

O teste de otimalidade será utilizado para verificar se a solução é ótima, ou seja, verificaremos se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos, similar ao que foi feito no simplex anteriormente.

Caso a solução não passe pelo teste de viabilidade ou de otimalidade, uma nova solução ótima pode ser obtida, utilizando o quadro atual

como simplex atual.

Uma outra forma de trabalhar com a análise de sensibilidade é por meio de planilhas, como no Microsoft Office Excel, utilizando o suplemento Solver. Trata-se de um método simples no qual são avaliadas as alterações provocadas individualmente pela alteração de cada parâmetro e não mais de um parâmetro simultaneamente. Os detalhes da análise de sensibilidade em planilhas serão tratados mais adiante.



Assimile

Agora nós já sabemos alguns conceitos e aplicações da Teoria da dualidade e da análise de sensibilidade.

Começando pela Teoria da dualidade, descobriu-se que para todo problema de programação linear verificaram que existia um outro problema associado a ele, chamado de dual. O problema original era chamado primal.

Para obter o modelo dual, precisamos levar em conta que os coeficientes da função objetivo do problema primal se transformarão nas constantes do lado direito no dual. De modo semelhante, as constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual. Já os coeficientes tecnológicos do primal também são os coeficientes tecnológicos no dual, mas em posição diferente.

A análise de sensibilidade é utilizada quando precisamos ou desejamos verificar quais são os parâmetros sensíveis, ou seja, os parâmetros que não podemos alterar sem modificar a solução ótima.

Sem medo de errar

Você está investindo na montagem de um pequeno negócio de doces finos, especializado em festas de casamentos, debutantes e aniversários. O seu objetivo é atender bem a todos os clientes para que a empresa se mantenha competitiva no mercado, principalmente nesta fase inicial crítica de inserção e recuperação do capital investido.

Agora que o planejamento estratégico está começando, você deverá investir parte dos recursos na compra de equipamentos, que

dependerão dos produtos e das quantidades que serão oferecidos aos clientes e, lembrando das aulas de pesquisa operacional, mais especificamente da programação linear, decidiu fazer um uso ótimo dos recursos disponíveis.

Agora, então, você já está tendo os primeiros resultados do seu novo negócio, fechando novas parcerias e contratos, mas está inseguro com relação à solução ótima encontrada anteriormente, uma vez que ela está sendo implementada.

Como você poderia analisar a sensibilidade da solução ótima encontrada? Pense a respeito dessa indagação, uma vez que precisa dessas informações para manter sua empresa crescendo.

Como apresentado por Hillier e Lieberman (2013), a primeira coisa a ser feita para a análise de sensibilidade consiste na revisão do modelo, passo esse no qual faremos todas as alterações desejadas ou necessárias no nosso modelo. Seria o momento no qual verificaremos os primeiros resultados do negócio e levantaríamos os principais pontos a serem melhorados no nosso modelo.

Em seguida, devemos fazer uma revisão no quadro final do simplex, pois desse modo podemos verificar as mudanças que devem ser executadas em função do passo anterior. Nesse momento, consideramos essencial que o simplex tenha sido executado adequadamente, sem que nenhum erro algébrico possa comprometer a obtenção da solução ótima.

Em seguida, precisamos converter o nosso quadro (similar ao que fizemos no simplex) para avaliar a solução básica atual com relação as modificações propostas. Caso essa solução seja viável, ou seja, todas as variáveis básicas na coluna do lado direito do simplex ainda são não negativos, passaremos para o teste de otimalidade.

O teste de otimalidade será utilizado para verificar se a solução é ótima após as alterações no nosso modelo, ou seja, verificaremos se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos, similar ao que foi feito no simplex, anteriormente quando encontramos a solução ótima.

Caso a solução não passe pelo teste de viabilidade ou de otimalidade, uma nova solução ótima pode ser obtida utilizando o quadro atual com o simplex atual. Nesse caso, teremos que obter uma nova solução, uma vez que o refinamento do modelo,

proposto, anteriormente, afetou a nossa solução ótima encontrada anteriormente.

Parabéns, mais um desafio vencido e assim você fará a sua empresa crescer!

Avançando na prática

Investimento financeiro e a modelagem do problema dual para posterior análise de sensibilidade

Descrição da situação-problema

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B.

A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhes sobre os dois tipos de investimentos, conforme o Quadro 2.16.

Quadro 2.16 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada cem reais por mês)	Investimento B (a cada cem reais por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos.

Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pela programação linear. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros

investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%.

Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada cem reais investidos por mês em A, haverá um retorno de três reais, enquanto que para cada cem reais investidos em B, haverá um retorno de dois reais.

Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, coube a você apontar a melhor solução.

Contudo, é sabido que, futuramente, estará à disposição do cliente um novo tipo de investimento C, cujo retorno espera-se que seja entre R\$ 2,50 a R\$ 2,75.

Diante disso, embora o investimento C ainda não esteja disponível, você prevê a necessidade de fazer uma análise de sensibilidade e, para isso, observa que é necessário construir o problema dual para o caso exposto. Como construiria o problema dual para o fenômeno em análise?

Resolução da situação-problema

O primeiro passo é formular o problema de acordo com o modelo de programação linear, conforme já feito na Seção 2.1

Em primeiro lugar o modelo matemático que descreve o problema é:

x_1 = investimento em A (múltiplo de R\$100,00)

x_2 = investimento em B (múltiplo de R\$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

SUJEITO a

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

E

$$0 \leq x_1, x_2$$

Posteriormente, deve-se construir o modelo dual:

$$\min W = 12y_1 + 12y_2 + 8y_3$$

Portanto, agora temos três variáveis de decisão. E as restrições funcionais?

$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 2$$

Com relação à restrição de não negatividade, todos os valores das novas variáveis de decisão continuam sendo maiores ou iguais a zero.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Parabéns, mais uma etapa vencida!

Faça valer a pena

1. Sobre o problema dual, analise as afirmações I, II e III.

I. Os coeficientes da função objetivo do primal se transformam nas constantes do lado direito no dual.

II. As constantes do lado direito do primal passam a ser os coeficientes da função objetivo do dual.

III. Os coeficientes tecnológicos do primal são os coeficientes tecnológicos no dual e nas mesmas posições.

Classifique as afirmações anteriores em Verdadeiro (V) ou Falso (F) e selecione a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) V, F, F.

b) V, F, V.

c) F, V, F.

d) F, F, V.

e) V, V, F.

2. Na análise de sensibilidade, aplica-se um teste para verificar se a solução é ótima, ou seja, verificar se os coeficientes de variáveis não básicas na linha da função objetivo do quadro simplex ainda são não negativos. Caso a solução não passe pelo teste, uma nova solução ótima pode ser obtida utilizando o quadro atual como o simplex atual.

A qual teste o texto se refere?

- a) Teste de sensibilidade.
- b) Teste de otimalidade.
- c) Teste de variabilidade.
- d) Teste de dualidade.
- e) Teste de operacionalidade.

3. No tocante à interpretação econômica do problema dual, há quatro casos típicos que podem ser descritos e, para todos eles, é necessário ter o entendimento de _____. Um dos casos ocorre quando a variável de folga do problema _____ é maior do que zero e a _____ do dual for igual a zero. Neste caso, entendemos que pode haver _____ do recurso.

Assinale a alternativa que completa corretamente a frase

- a) Variáveis de decisão; dual; variável de folga; sobra.
- b) Variáveis de folga; primal; variável de decisão; falta.
- c) Variáveis de decisão; primal; variável de folga; sobra.
- d) Variáveis de folga; dual; variável de decisão; falta.
- e) Variáveis de folga; primal; variável de decisão; sobra.

Referências

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

Aplicações da programação linear

Convite ao estudo

Caro aluno, a partir dos conceitos e fundamentos assimilados na Unidade 2 iniciaremos nosso estudo com base na aplicação da Programação Linear em problemas clássicos de Pesquisa Operacional.

Esta unidade é de extrema importância para a sua formação, pois será o seu contato com ferramentas computacionais para a solução de diferentes problemas de PO.

Assim, inicialmente estudaremos como utilizar a ferramenta Solve do Excel em Pesquisa Operacional, ou seja, você aprenderá a fazer a modelagem de um problema em PO no Solver, fato este que facilitará muito a obtenção da solução ótima.

Posteriormente, entenderemos como modelar e resolver problemas de transporte e de designação, englobando novamente o uso do Solver.

Logo, adentraremos nos estudos de otimização de rede, trabalhando especificamente com os problemas do caminho mínimo, do fluxo máximo e da roteirização.

Assim, ao final da terceira unidade, pretende-se que você consiga aplicar as ferramentas computacionais, especialmente o Solver do Excel, para resolução de problemas de pesquisa operacional, sendo esse aspecto fundamental para a sua atuação profissional.

Nesse sentido, considere que você está prestando uma consultoria numa empresa do segmento de logística que está

enfrentando alguns problemas de gerenciamento. A empresa possui diversos fornecedores, que são chamados de origens, e consumidores, os destinos, fazendo as entregas com caminhões em diversas rotas.

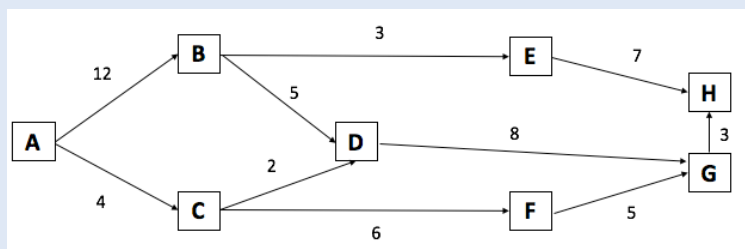
O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

Numa primeira análise, você verificou que seria inviável aplicar o método Simplex manualmente por conta da grande quantidade de variáveis envolvidas. Logo, como essa situação poderia ser resolvida, sugerindo uma ferramenta computacional viável à empresa?

Por ser um problema com características de um Problema de Transporte, você lembrou que comumente há um grande número de variáveis, sendo necessário trabalhar com resolução computacional. Como você poderia formular um modelo matemático genérico para Problema de Transporte a fim de servir de protocolo para a empresa?

A rota que mais tem gerado custo refere-se ao caminho do fornecedor A ao consumidor H, passando por diferentes cidades, conforme Figura 3.1. Considerando a rede apresentada, qual seria o caminho mínimo, entre A até H, visando otimizar o custo?

Figura 3.1 | Possíveis rotas do fornecedor A até o consumidor H, com as distâncias em km



Fonte: elaborada pela autora.

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o presidente da filial lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo para aproveitar este conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Bons estudos!

Seção 3.1

Uso do Solver na resolução de problemas de pesquisa operacional

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da pesquisa operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre a aplicação da Programação Linear em problemas clássicos de pesquisa operacional

Considerando as diferentes ferramentas computacionais para Pesquisa Operacional, uma das mais conhecidas e utilizadas nos problemas de PO é o Solver, do Excel.

Então, neste momento exploraremos a modelagem e solução de problemas de PO no Microsoft Excel, englobando o uso da ferramenta Solver do Microsoft Excel, bem como o uso de relatórios para análise de sensibilidade.

Esse estudo é essencial para que você torna-se apto a modelar e implementar modelos de programação linear para diferentes problemas em PO por meio do uso de ferramentas computacionais, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Nesse sentido, considere que você está prestando uma consultoria numa empresa do segmento de logística que está enfrentando alguns problemas de gerenciamento. A empresa possui diversos fornecedores, que são chamados de origens, e consumidores, os destinos, fazendo as entregas com veículos de pequeno, médio e grande porte em diversas rotas.

O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

Numa primeira análise, você verificou que seria inviável aplicar o método Simplex manualmente por conta da grande quantidade de variáveis envolvidas. Logo, como você poderia resolver essa situação

sugerindo uma ferramenta computacional viável à empresa?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o presidente da empresa lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Bons estudos e vamos avançando na construção do seu conhecimento em pesquisa operacional!

Não pode faltar

Caro aluno, o uso de ferramentas computacionais para simulação e resolução de problemas de pesquisa operacional é de extrema importância em função do aumento da complexidade dos fenômenos modelados, bem como a necessidade de se adotar uma abordagem mais sistêmica e generalista (CAIXETA-FILHO, 2011).

Uma das ferramentas mais conhecida e utilizada refere-se ao Suplemento Solver da planilha eletrônica Excel, cuja distribuidora é a Microsoft Corporation. O Solver tem seu princípio de ação baseado na resolução de problemas de programação matemática de forma geral, sendo empregado para a modelagem de fenômenos vinculados à programação linear, programação não-linear e programação inteira.

Assim, essa ferramenta do Excel, para problemas de programação não-linear, utiliza o código de otimização não-linear denominado *Generalized Reduced Gradient*. No tocante aos problemas de programação linear e programação inteira, a ferramenta faz uso do método Simplex com limites sobre as variáveis e o método de desvio e limite (CAIXETA-FILHO, 2011).

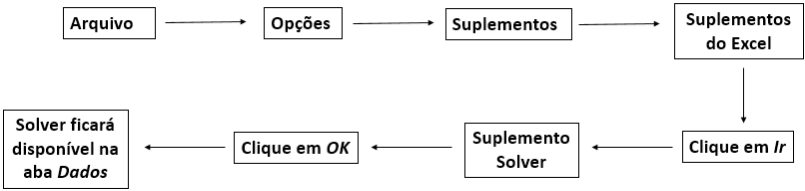
Vale ressaltar que nesta unidade daremos o enfoque no uso do Solver para resolução de problemas de programação linear!

Inicialmente, deve ser ressaltado que o uso desse suplemento do Excel está disponível na própria planilha eletrônica, embora não venha com a instalação padrão do Office.

Logo, se você quiser ter acesso a essa ferramenta, habilitando-a em seu computador pessoal ou em qualquer outro dispositivo, o único requisito é ter o Microsoft Excel disponível.

Assim, para carregar a ferramenta Solver no Excel, segundo o próprio site institucional, o caminho a ser utilizado está descrito na Figura 3.2.

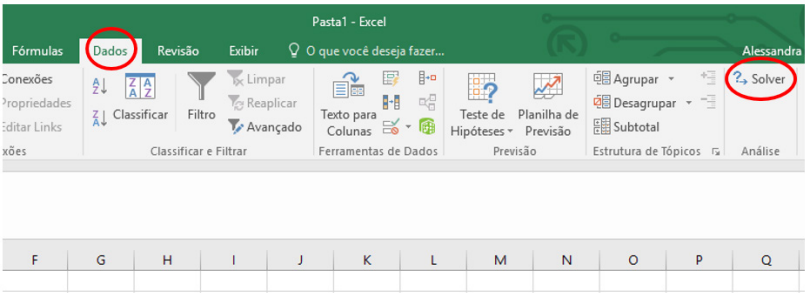
Figura 3.2 | Caminho para carregamento do suplemento Solver do Microsoft Excel



Fonte: elaborada pela autora.

Seguindo o caminho apresentado na Figura 3.2, será possível habilitar o Solver, e esse suplemento ficará disponível na barra de ferramentas, especificamente na aba Dados, conforme Figura 3.3. Vale explicar que caso o suplemento Solver não apareça ao você clicar em *Suplemento*, você deve, então, clicar em Procurar para localizar a ferramenta.

Figura 3.3 | Localização do suplemento Solver na aba Dados do Microsoft Excel



Fonte: elaborada pela autora.

Em termos de processo, isto é, construção do modelo em PO no Excel, há a necessidade de colocar todos os dados do problema em estudo na planilha eletrônica, uma vez que as fórmulas, por meio das quais serão realizadas as combinações lineares dos coeficientes dos problemas com as variáveis, devem ser elaboradas previamente à resolução. Também, posteriormente à resolução, há ainda a possibilidade de geração de relatórios de resultados e de análises de sensibilidade pelo Solver, conforme veremos mais adiante.



Assimile

Caro aluno, ressalta-se, então, que o suplemento Solver do Microsoft Excel é utilizado para a resolução computacional de problemas de programação linear, programação não-linear e programação inteira.

Quanto às vantagens do uso da ferramenta, além da economia de tempo e assertividade na obtenção da solução ótima, também se destaca que (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- Facilidade de obtenção da ferramenta, uma vez que se trata de uma ferramenta adicional de Microsoft Excel.
- Facilidade de uso, uma vez que o princípio de uso é o mesmo daquele aplicado ao Microsoft Excel.
- Ferramenta permite alterar variáveis, coeficientes e outros dados do problema de forma rápida, sendo necessário apenas a modificação dos dados na planilha eletrônica.

Logo, para fins didáticos, nesta seção será apresentado um problema de programação linear que servirá como modelo de solução a partir das interfaces do Solver do Microsoft Excel.

Suponha que você possua uma função gerencial em um banco que possui os investimentos A e B para oferecer a seus clientes, de modo que A apresenta maior risco que o investimento B. A rentabilidade de cada investimento acaba compensando os riscos associados, de modo que A apresenta maior retorno que B.

Como gerente, você informou a um cliente interessado os detalhes sobre os dois tipos de investimentos, conforme o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 | Detalhamento dos tipos de investimentos

	Investimento A (a cada R\$ 100 por mês)	Investimento B (a cada R\$ 100 por mês)
Taxa administrativa (%)	1,0	2,0
Risco (%)	2,0	3,0
Imposto de renda (%)	2,0	1,0

Fonte: elaborado pela autora.

A fim de garantir uma boa rentabilidade, o cliente quer saber como diversificar seus rendimentos de modo a atingir os seus objetivos. Visando esclarecer para o cliente a melhor combinação de investimentos, você percebeu a necessidade de aplicar um método científico de análise, optando pela Programação Linear. Por meio de uma conversa inicial com o cliente, você conseguiu determinar alguns parâmetros baseados no custo de oportunidade de outros investimentos, especificando o risco máximo de 12%, a máxima taxa administrativa igual a 12% e o máximo imposto de renda igual a 8%. Ademais, em sua função gerencial, você também informou ao cliente que os investimentos apresentam diferentes rentabilidades, de modo que para cada R\$ 100,00 investidos por mês em A, haverá um retorno de R\$ 3,00, enquanto que para cada R\$ 100,00 investidos em B, haverá um retorno de R\$ 3,00. Com base nesses critérios, respeitando que o objetivo do cliente é alcançar o melhor retorno possível, vamos ver como obter a solução ótima utilizando o Solver. Para modelarmos o problema, precisamos identificar a função objetivo, que é aquela que queremos otimizar (maximizar ou minimizar), as restrições funcionais e a restrição de não-negatividade. A função objetivo e as restrições funcionais são equações, ou inequações (no caso das restrições funcionais), sendo compostas pelas variáveis de decisão e pelos diversos coeficientes.

Conforme vimos nas seções anteriores, para esse problema de investimento temos, em primeiro lugar, o modelo matemático que o descreve:

x_1 = investimento em A (múltiplo de R\$100,00)

x_2 = investimento em B (múltiplo de R\$100,00)

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

e

$$0 \leq x_1, x_2$$

Agora, no Excel, precisamos criar uma planilha eletrônica com as informações presentes no modelo de PL:

- Células para variáveis de decisão.
- Célula para função objetivo.
- Células para as restrições funcionais.

No problema do investimento, as variáveis de decisão referem-se a x_1 e a x_2 com a função objetivo de Maximizar o Investimento $Z = 3x_1 + 2x_2$. A Figura 3.4 ilustra esses dados na planilha de Excel.

Figura 3.4 | Variáveis de decisão e função objetivo na planilha eletrônica do Excel

	A	B	C
1			
2			
3		Variáveis de decisão	
4	Tipo de investimento:	Investimento A	Investimento B
5	Lucro por investimento a cada R\$100,00	R\$3,00	R\$2,00
6		x1	x2
7		Função Objetivo	=B4*B6+C4*C6

Fonte: elaborada pela autora.

Diante da Figura 3.4, tem-se que na busca pela solução ótima, o programa computacional permitirá que as células B6 e C6 (variáveis de decisão) assumam qualquer valor não negativo e que respeite as restrições. Repare que neste momento essas células estão vazias e, após a resolução pelo Solver, a solução ótima será gerada exatamente nestas células. Logo, devemos colocar as restrições em nossa planilha eletrônica, conforme mostra a Figura 3.5.



Caro aluno, como você acha que poderíamos escrever as restrições na planilha eletrônica do Excel? Abra o Solver em algum dispositivo e tente colocar as restrições do problema em estudo.

Figura 3.5 | Restrições na planilha eletrônica do Excel

	A	B	C	D
1				
2		Variáveis de decisão		
3	Tipo de investimento:	Investimento A	Investimento B	
4	Lucro por investimento a cada R\$100,00	3	2	
5		x1	x2	
6				
7		Função Objetivo	=B4*B6+C4*C6	
8				
9		Restrições		Constantes
10				
11		=1*B6+2*C6	≤	12
12		=2*B6+3*C6	≤	12
13		=2*B6+1*C6	≤	8
14				

Fonte: elaborada pela autora.

Agora, uma vez que já colocamos na planilha eletrônica todos os nossos dados, vamos efetivamente usar o Solver. Logo, abra o Solver e defina a célula que contém a função objetivo, isto é, a célula C7, bem como defina se o valor da função objetivo deve ser maximizado ou minimizado. Posteriormente, vamos definir as variáveis de decisão, que estão representadas pelas células B6 e C6, conforme Figura 3.6.

Figura 3.6 | Parâmetros no Solver - função objetivo, maximização e variáveis de decisão

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: ☒ **Máx.** ☐ **Mín.** ☐ **Valor de:**

Alterando Células Variáveis:

Fonte: elaborada pela autora.

Então, vamos definir todas as restrições (adicionar uma a uma) do modelo (funcionais e não-negativas), conforme Figura 3.7. Perceba que clicamos em “tornar variáveis irrestritas não-negativas”. Além disso, para adicionar as restrições, primeiro definimos a célula da equação, depois o sinal e então a constante.

Figura 3.7 | Parâmetros no Solver – restrições funcionais e não-negativas

Sujeito às Restrições:

☒ **Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas**

Botões: Adicionar, Alterar, Excluir, Redefinir Tudo, Carregar/Salvar

Fonte: elaborada pela autora.

Por fim, escolhe-se o método de resolução do problema que, neste caso, será o Simplex PL, pois se trata de um problema de programação linear. Assim, a Figura 3.8 mostra todos os parâmetros do problema já colocados no Solver.

Figura 3.8 | Colocação dos parâmetros no Solver - função objetivo, maximização, variáveis de decisão, restrições e método de solução

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: ☒ Máx. ☐ Mín. ☐ Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$B\$11 <= \$D\$11
\$B\$12 <= \$D\$12
\$B\$13 <= \$D\$13

☒ **Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas**

Selecionar um Método de Solução: **LP Simplex**

Botões: Adicionar, Alterar, Excluir, Redefinir Tudo, Carregar/Salvar, Opções

Fonte: elaborada pela autora.

Finalmente, vamos clicar em *Resolver* e, então, o Solver vai apontar a solução ótima diretamente nas células B6 e C6, conforme Figura 3.9.

Figura 3.9 | Obtendo a solução do problema de programação linear pelo Solver

	A	B	C	D
1		Variáveis de decisão		
2	Tipo de investimento:	Investimento A	Investimento B	
3	Lucro por investimento a cada R\$100,00	3	2	
4		x1	x2	
5	SOLUÇÃO ÓTIMA DADA PELO SOLVER	3	2	
6		Função Objetivo	=B3*B5+C3*C5	
7				
8		Restrições		Constantes
9				
10		=1*B5+2*C5	≤	12
11		=2*B5+3*C5	≤	12
12		=2*B5+1*C5	≤	8

Resultados do Solver

O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.

☒ Manter Solução do Solver
 ☐ Restaurar Valores Originais

Relatórios

Resposta
 Sensibilidade
 Limites

Fonte: elaborada pela autora.

O Solver gerou como solução ótima $x_1=3$ e $x_2=2$, de modo que, dado ser múltiplo de 100, o rendimento máximo será alcançado ao se investir R\$ 300,00 no investimento A e R\$ 200,00 no investimento B.

O uso do Solver permite ainda a geração do relatório de sensibilidade, conforme mostra a Figura 3.10. Na Figura 3.10, na tabela superior, temos que: (i) valor final indica a solução ótima; (ii) coeficiente objetivo (permitido aumentar e permitido reduzir) trata-se do intervalo de valores sobre o qual a solução ótima permanece ótima. Vale ressaltar que quando a tabela superior do relatório de sensibilidade indicar acréscimo como decréscimo maior do que zero para todos os coeficientes objetivos, significa que somente existe uma solução ótima. Se o acréscimo ou decréscimo apresentar valores iguais a zero, existem soluções ótimas múltiplas.

Na tabela inferior do relatório, podemos destacar o preço sombra, que mede o valor marginal do recurso, ou seja, a taxa que

Z poderia ser aumentado, elevando-se (ligeiramente) a quantidade deste recurso que está sendo disponibilizado.

Figura 3.10 | Análise de sensibilidade obtida por relatório do Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade							
2	Planilha: [PL - Excel.xlsx]Planilha1							
3	Relatório Criado: 24/11/2017 19:58:06							
4								
5								
6	Células Variáveis							
7			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido	
8	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir	
9	\$B\$6	x1	3	0	3	1	1,666666667	
10	\$C\$6	x2	2	0	2	2,5	0,5	
11								
12	Restrições							
13			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido	
14	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir	
15	\$B\$11	Restrições	R\$7,00	0	12	1E+30	5	
16	\$B\$12	Restrições	R\$12,00	0,25	12	6,666666667	4	
17	\$B\$13	Restrições	R\$8,00	1,25	8	4	4	

Fonte: elaborada pela autora.



Exemplificando

Vamos resolver o exemplo da indústria de brinquedos no Solver? Então, vamos supor que você trabalhe numa indústria de brinquedos, que possui três máquinas para a fabricação de dois produtos, um boneco de plástico e uma lousa. Sabendo que o lucro de cada boneco é de R\$ 3,00 e de cada lousa R\$ 2,00, o dono da empresa quer saber: quanto ele deve produzir de cada brinquedo para otimizar o lucro diário, dadas as restrições apresentadas no Quadro 3.2 (cada produto deve passar por cada uma das máquinas para ser processado)?

Quadro 3.2 | Tempo de processamento nas máquinas

	Boneco de plástico	Lousa	Tempo máximo
Máquina 1	1 hora	2 horas	12 horas
Máquina 2	2 horas	3 horas	12 horas
Máquina 3	2 horas	1 hora	8 horas

Fonte: elaborada pela autora.

As variáveis de decisão serão: x_1 é a quantidade de bonecos e x_2 de lousas. A nossa função objetivo representará o lucro total, que deve ser maximizado: Função objetivo: $\max Z = 3,00x_1 + 2,00x_2$. A Figura 3.11 apresenta a modelagem do problema já com a solução ótima, que aponta a fabricação de 3 bonecos e de 2 lousas.

Figura 3:11 | Obtendo a solução do problema de PL pelo Solver

	A	B	C	D
1				
2		Variáveis de decisão		
3	Produto	Boneco	Lousa	
4	Lucro por produto	3	2	
5		x1	x2	
	SOLUÇÃO ÓTIMA DADA PELO SOLVER			
6		3	2	
7		Função Objetivo	=B4*B6+C4*C6	
8				
9		Restrições		Constantes
10				
11		=1*B6+2*C6	≤	12
12		=2*B6+3*C6	≤	12
13		=2*B6+1*C6	≤	8

Fonte: elaborada pela autora.



Pesquise mais

Caro aluno, a fim de você compreender melhor a resolução de problemas de PO pelo Solver, assista ao vídeo a seguir, em especial aos primeiros 10 minutos. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=KunPQw5szeY>>. Acesso em: 24 nov. 2017.

Sem medo de errar

Vamos retomar o seu papel como consultor de uma empresa do segmento de logística que está enfrentando alguns problemas de gerenciamento.

O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

Numa primeira análise, você verificou que seria inviável aplicar o método Simplex manualmente por conta da grande quantidade de variáveis envolvidas. Logo, como você poderia resolver essa situação utilizando uma ferramenta computacional e fazer uma apresentação com esses dados para o presidente?

O primeiro passo, em sua apresentação, é explicar a importância das ferramentas computacionais na solução e simulação de problemas de Pesquisa Operacional em função do aumento da complexidade dos fenômenos modelados, bem como a necessidade de se adotar uma abordagem mais sistêmica e generalista.

O segundo passo é sugerir e apresentar uma ferramenta que execute o método Simplex, conforme você identificou em seu problema como consultor. Logo, uma das ferramentas mais conhecida e utilizada refere-se ao Suplemento Solver da planilha eletrônica Excel cuja distribuidora é a Microsoft Corporation.

O Solver tem seu princípio de ação baseado na resolução de problemas de programação matemática de forma geral, sendo empregado para a modelagem de fenômenos vinculados à programação linear, programação não-linear e programação inteira.

Assim, essa ferramenta do Excel, para problemas de programação não-linear, utiliza o código de otimização não-linear denominado *Generalized Reduced Gradient*. No tocante aos problemas de programação linear e programação inteira, a ferramenta faz uso do método Simplex com limites sobre as variáveis e o método de desvio e limite.

Neste momento, vale a pena você apresentar as vantagens do uso do Solver:

- Facilidade de obtenção da ferramenta, uma vez que se trata de uma ferramenta adicional de Microsoft Excel.
- Facilidade de uso, uma vez que o princípio de uso é o mesmo daquele aplicado ao Microsoft Excel.
- Ferramenta permite alterar variáveis, coeficientes e outros dados do problema de forma rápida, sendo necessário apenas a

modificação dos dados na planilha eletrônica.

Logo, ressalte na apresentação ao presidente que o Solver atende à necessidade da empresa de um modo fácil e a baixo custo.

Em sua apresentação você pode ressaltar ainda que o Solver, do Microsoft Excel, é apenas um exemplo de software para programação linear, de modo que há diversas outras alternativas de software para pesquisa operacional, conforme mostra a Figura 3.12.

Uma revista bastante conceituada e reconhecida na área de Pesquisa Operacional, denominada *OR/MS Today*, publica periodicamente revisões sobre a performance e características operacionais de ferramentas computacionais disponíveis no mercado e direcionadas à programação linear (Caixeta-Filho, 2011).

Dentre os softwares mais comuns utilizados para programação linear, podemos citar o Lindo (Lindo System, Chicago); AXA (Sunset Software Tech; San Marino); LOQO (Princeton University; Princeton); MINOS (Stanford Business Software; Mountain), entre outros (Caixeta-Filho, 2011, p. 32).

Avançando na prática

Alocação de recursos em empresa de manufatura

Descrição da situação-problema

Uma empresa de manufatura de peças para automóveis tem três produtos numa de suas linhas de fabricação: polias, pistões e virabrequins. O lucro nesta linha está muito abaixo do esperado, com base na capacidade produtiva disponível. Como diretor da empresa, você está planejando redistribuir os níveis de produção de cada produto, tentando melhorar o lucro da linha.

Cada um dos produtos pode necessitar de até três recursos para sua produção, sendo eles a furadeira, torno e retífica. Sabemos o tempo, em minutos, que cada produto deve ficar em cada recurso, conforme apresentado no Quadro 3.3, bem como o tempo máximo disponível por recurso por semana.

Quadro 3.3 | Tempo de cada produto em cada recurso

Recurso	Polia	Pistão	Virabrequim	Tempo disponível (minutos por dia)
Furadeira	10	7	12	480
Torno	6	5	0	420
Retífica	5	0	4	450

Fonte: elaborado pela autora.

O departamento de vendas aponta que a demanda máxima de virabrequins é de 100 unidades por dia e o lucro unitário é, respectivamente, de R\$ 2,20, R\$ 3,15 e R\$ 2,90 para a polia, o pistão e o virabrequim. Como diretor, para ajudar a empresa a otimizar o mix de produtos, como você formularia um modelo de programação linear com os dados apresentados e resolveria utilizando o Solver?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, para fazer o modelo de PL, as variáveis de decisão (x) devem representar as quantidades de produtos que irão compor o mix de produção, estando associados aos respectivos lucros unitários, uma vez que o propósito da função objetivo no problema é maximizar o lucro.

As restrições funcionais são compostas pela limitação dos recursos, que possuem uma capacidade máxima diária e as restrições de não-negatividade garantem que as variáveis de decisão sejam maiores ou iguais a zero.

Logo, temos a modelagem do problema e a Figura 3.13 apresenta a solução ótima.

Variáveis de decisão

x_1 = quantidade de polias por dia.

x_2 = quantidade de pistões por dia.

x_3 = quantidade de virabrequins por dia.

Função objetivo: Maximizar

$$Z = 2,20 x_1 + 3,15 x_2 + 2,90 x_3$$

Sujeito às restrições:

$$10 x_1 + 7 x_2 + 12 x_3 \leq 480$$

$$6 x_1 + 5 x_2 \leq 420$$

$$5 x_1 + 4 x_3 \leq 450$$

Restrições de não-negatividade: $x_1; x_2; x_3 \geq 0$

Figura 3.13 | Solução ótima dada pelo Solver

	A	B	C	D
1				
2			Variáveis de decisão	
3	Produto	Polia	Pistão	Virabrequins
4	Lucro por produto (R\$)	2,2	3,15	2,9
5		x1	x2	x3
6	SOLUÇÃO ÓTIMA DADA PELO SOLVER	0	68,5714285714286	0
7		Função Objetivo	=B4*B6+C4*C6+D4*D6	
8				
9		Restrições		Constantes
10		=10*B6+7*C6+12*D6	≤	480
11		=6*B6+5*C6	≤	420
12		=5*B6+4*D6	≤	450

Resultados do Solver

O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.

☒ Manter Solução do Solver

☐ Restaurar Valores Originais

Relatórios

Resposta

Sensibilidade

Limites

Fonte: elaborada pela autora.

O Solver indica como solução ótima a produção somente de pistão, sendo 68,57 unidades. Como não temos uma maneira de produzir uma fração do produto, podemos tentar arredondar para 69 pistões. Contudo, para $x_2 = 69$, a restrição 1 não é satisfeita; logo, teremos a produção de 60 pistões como solução ótima.

Parabéns, mais um desafio cumprido!

Faça valer a pena

1. A importância das ferramentas computacionais na solução e simulação de problemas de Pesquisa Operacional é significativa em função do aumento da complexidade dos fenômenos modelados, bem como a necessidade de se adotar uma abordagem mais sistêmica e generalista. Uma das ferramentas mais conhecida e utilizada refere-se ao Suplemento Solver da planilha eletrônica Excel cuja distribuidora é a Microsoft Corporation.

Assinale a alternativa que apresenta o(s) tipo(s) de problemas que podem ser resolvidos pelo Solver

- a) Somente Programação Linear.
- b) Somente Programação Inteira.
- c) Somente Programação Linear e Não-Linear.
- d) Somente Programação Inteira e Programação Linear.
- e) Somente Programação Inteira, Programação Linear e Não-Linear.

2. Após fazer um curso de empreendedorismo oferecido pela universidade, Pedro decidiu investir na montagem de um pequeno negócio para produção de refeições prontas. O objetivo de Pedro é focar no mercado de pessoas que desejam emagrecer com saúde, fornecendo refeições sob supervisão de uma nutricionista.

A nutricionista determinou que os níveis aceitáveis de carboidratos, proteínas e gorduras em duas refeições, o almoço e o jantar, e também a exigência diária de cada um dos itens para ter uma dieta saudável.

O Quadro 3.4 apresenta a quantidade de gramas presentes em cada refeição para cada um dos grupos nutricionais, bem como o custo por refeição

Quadro 3.4 | Composição das refeições (gramas)

Componente nutricional	Almoço	Jantar
Gordura	50	45
Proteína	200	165
Carboidrato	150	170
Custo por refeição (por grama)	R\$ 0,05	R\$ 0,07

Fonte: elaborado pela autora.

A exigência diária apresentada pela nutricionista é de no mínimo 300 gramas de proteína e 250 gramas de carboidrato, e no máximo 60 gramas de gordura. Pedro pretende iniciar nesse segmento agora e quer otimizar o custo por refeição, mas atendendo a todas as restrições apresentadas pela nutricionista.

Utilizando o Solver, assinale a alternativa que apresenta a solução ótima do problema descrito, isto é, qual deve ser a massa (gramas) por refeição.

- a) 1,33 g.
- b) 1 g.
- c) 2 g.
- d) 3 g.
- e) Não há solução viável.

3. O Solver apresenta algumas vantagens, as quais o fizeram ser uma das ferramentas mais utilizada em Pesquisa Operacional. Analise as afirmações I, II e III.

- I. Facilidade de obtenção da ferramenta, uma vez que se trata de uma ferramenta adicional de Microsoft Excel.
- II. Facilidade de uso, uma vez que o princípio de uso é o mesmo daquele aplicado ao Microsoft Excel.
- III. Ferramenta permite alterar variáveis, coeficientes e outros dados do problema de forma rápida, sendo necessária apenas a modificação dos dados na planilha eletrônica.

Assinale a alternativa correta de acordo com as afirmações I, II e III.

- a) Somente I e II são corretas.
- b) Somente III é correta.
- c) I, II e III são corretas.
- d) Somente II é correta.
- e) Somente II e III são corretas.

Seção 3.2

Aplicação da PO em problema de transporte

Diálogo aberto

Caro aluno, continuando a abordagem de solução de problemas de pesquisa operacional utilizando ferramentas computacionais, especialmente o Solver do Excel, estudaremos, nesta seção, dois tipos de problemas clássicos de Programação Linear (PL): problema de transporte e problema de designação.

Assim, entenderemos como modelar e resolver problemas de transporte e de designação, englobando novamente o uso do Solver.

Para que você já possa se situar, vale a pena compreender que todos os problemas que tratam do deslocamento de itens entre uma fonte e um destino podem ser caracterizados como um problema de transporte.

O problema de designação, por sua vez, é um caso particular do problema de transporte, focando a alocação ou distribuição de recursos.

Logo, perceba que estes conceitos são muito comuns no setor de logística e distribuição de recursos, sendo de extrema significância para a sua vida profissional!

Nesse sentido, vamos retomar o caso em que você está prestando uma consultoria numa empresa do segmento de logística que está enfrentando alguns problemas de gerenciamento. A empresa possui diversos fornecedores, que são chamados de origens, e consumidores, os destinos, fazendo as entregas por caminhões em diversas rotas. O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

Numa primeira análise, você verificou que seria inviável aplicar o método Simplex manualmente por conta da grande quantidade de variáveis envolvidas e indicou o uso do Solver como ferramenta computacional.

Por ser um problema com características de um Problema

de Transporte, você lembrou que para algumas aplicações há um grande número de variáveis, sendo necessário trabalhar com resolução computacional. Como você poderia formular um modelo genérico para o problema de transporte a fim de servir de protocolo para a empresa?

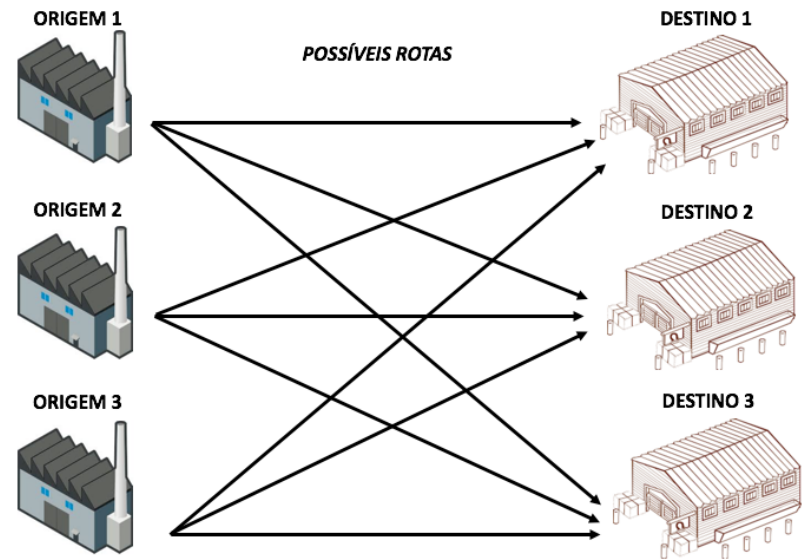
Pense a respeito, uma vez que o presidente da filial lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, comumente pode-se entender um problema de transporte como aquele em que há deslocamento de algo entre uma fonte (origem) e um destino, isto é, ocorre o transporte de itens advindos de centros de origens até centros de destinos, conforme Figura 3.14.

Figura 3.14 | Problema de transporte – deslocamento de itens entre uma origem e um destino



Fonte: elaborada pela autora.

Conforme a Figura 3.14, podemos imaginar o transporte de itens entre fábricas (origem) e depósitos (destino), ou ainda o transporte de mercadorias das fábricas para os estoques, ou

então o transporte de produtos dos estoques para as lojas, entre outros casos. Além disso, perceba que temos diferentes opções de transporte considerando três origens e três destinos, resultando em nove possíveis rotas, de acordo com a Figura 3.14.

Qualquer que seja o caso, sempre em um problema de transporte precisamos conhecer:

- O valor do custo relativo ao transporte de cada item.
- O número (quantidade) de produtos disponíveis em cada centro.
- A demanda de produtos de cada consumidor.

Além disso, sempre precisamos considerar que a execução do transporte deve atender às limitações de oferta em cada centro, bem como a demanda de cada mercado, alcançando um custo mínimo de transporte. Assim, temos um problema de Programação Linear caracterizado como um problema de transporte, podendo ser utilizado o Método Simplex para solução.

Logo, conforme apresentado por Hillier e Lieberman (2013), estudaremos um problema genérico de transporte. Vamos supor que tenhamos a fábrica i cujo despacho de itens, por caminhão, deve seguir para o depósito j . Sabendo que temos três fábricas (1, 2, e 3) e quatro depósitos (1, 2, 3 e 4), então teremos 12 variáveis de decisão denominadas genericamente por x_{ij} :

- x_{11} = quantidade transportada da fábrica 1 para o depósito 1
- x_{12} = quantidade transportada da fábrica 1 para o depósito 2
- x_{13} = quantidade transportada da fábrica 1 para o depósito 3
- x_{14} = quantidade transportada da fábrica 1 para o depósito 4
- x_{21} = quantidade transportada da fábrica 2 para o depósito 1
- x_{22} = quantidade transportada da fábrica 2 para o depósito 2
- x_{23} = quantidade transportada da fábrica 2 para o depósito 3
- x_{24} = quantidade transportada da fábrica 2 para o depósito 4
- x_{31} = quantidade transportada da fábrica 3 para o depósito 1
- x_{32} = quantidade transportada da fábrica 3 para o depósito 2
- x_{33} = quantidade transportada da fábrica 3 para o depósito 3
- x_{34} = quantidade transportada da fábrica 3 para o depósito 4

Adicionalmente, considere o Quadro 3.5 que apresenta o custo do transporte, destinação e a saída. Perceba que com o custo do transporte podemos obter a função objetivo e com a demanda do

mercado (restrição dos depósitos) e a oferta da fábrica (restrição das fábricas) podemos obter as restrições.

Quadro 3.5 | Custo do transporte, por caminhão, entre as fábricas e os diferentes depósitos, bem como quantidade, por caminhão, que pode ser destinado a cada depósito (demanda) e a quantidade, por caminhão, disponíveis em cada fábrica (oferta)

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta
Fábrica 1	R\$ 464	R\$ 513	R\$ 654	R\$ 867	75
Fábrica 2	R\$ 352	R\$ 416	R\$ 690	R\$ 791	125
Fábrica 3	R\$ 995	R\$ 682	R\$ 388	R\$ 685	100
Demanda	80	65	70	85	

Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2013, p. 293).

Assumindo o custo total de transporte como Z e lembrando a necessidade de minimizá-lo, então temos a seguinte função objetivo:

Minimizar $Z = 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$

Sujeito às restrições:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 125$
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100$
 $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$
 $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 65$
 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70$
 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85$
 $0 \leq x_{ij}$

Conforme o modelo matemático apresentado para um problema genérico de transporte, podemos constatar que esse tipo de problema de PL faz uma suposição entre oferta e demanda, gerando uma hipótese, denominada hipótese das exigências.

Hipótese das exigências: há uma oferta previamente conhecida e fixa (ou máxima) de unidades por cada origem e toda essa oferta, por sua vez, necessita ser distribuída aos destinos. Os destinos, no entanto, possuem uma demanda previamente conhecida e fixa (ou máxima) de unidades por cada depósito. Toda essa demanda,

por sua vez, deve ser recebida das origens.

Logo, em um problema de transporte somente haverá soluções viáveis se, e somente se, houver um equilíbrio entre a oferta total (fábricas) e a demanda total (depósitos). Repare que nosso exemplo genérico, conforme Quadro 3.5, a oferta total (soma da coluna saída) resulta em 300 unidades, assim como a demanda total (soma da linha destino).

Nos problemas de transporte, há ainda a **hipótese de custo** na qual tem-se que o custo de transporte dos itens entre qualquer origem e qualquer destino é diretamente proporcional à quantidade de itens distribuídos.



Reflita

Caro aluno, no problema genérico de transporte que acabamos de discutir, como você conseguiria demonstrar que a hipótese de custo é satisfeita?

Por fim, temos no problema de transporte a **propriedade de soluções inteiras**, na qual tem-se que a partir de ofertas e demandas representadas por valores inteiros, sempre teremos, então, valores inteiros para as variáveis das soluções viáveis, abrangendo, inclusive, a solução ótima.



Assimile

Caro aluno, um problema genérico de transporte pode ser caracterizado pelo deslocamento de produtos entre um centro de fornecimento que pode ser chamado como origem, e um centro de destino, chamado apenas como destino.

O objetivo do problema é minimizar o custo total do transporte, respeitando as restrições dos depósitos (demanda dos mercados) e as restrições das fábricas (oferta das fábricas).

Logo, por meio dos parâmetros a seguir podemos modelar um problema do tipo transporte:

c_{ij} = custo de transporte entre a origem i e o destino j
 x_{ij} = quantidade a ser transportada entre a origem i e o destino j
 d_j = demanda do destino j
 s_i = oferta da origem i
 m = número de origens
 n = número de destinos

Além disso, deve atender à hipótese de exigência e à hipótese de custo.

Vale ressaltar que qualquer problema de programação linear que se encaixe nesse tipo de modelo matemático pode ser entendido como um problema de transporte, independente do seu contexto, podendo ser utilizado o método Simplex para a sua solução (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Comumente, um problema de transporte envolve um conjunto grande de restrições e variáveis, requerendo o uso de ferramentas computacionais para resolução do problema. Logo, vamos resolver esse problema genérico utilizando o Solver? Veja na Figura 3.15 como é construída a planilha eletrônica com os dados do problema. A Figura 3.16, por sua vez, apresenta a inserção dos parâmetros no Solver, enquanto a Figura 3.17 já apresenta a solução ótima obtida pela ferramenta.

Figura 3.15 | Planilha eletrônica do Excel para os dados do problema de transporte em estudo

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		Custo do transporte por caminhão (R\$)			
4		Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4
5	Fábrica 1	464	513	654	867
6	Fábrica 2	352	416	690	791
7	Fábrica 3	995	682	388	685
8					
9		VARIÁVEIS DE DECISÃO			
10		Quantidade, por caminhão, a ser transportada			
11		Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4
12	Fábrica 1	x11	x12	x13	x14
13	Fábrica 2	x21	x22	x23	x24
14	Fábrica 3	x31	x32	x33	x34
15					
16					
17					
18	FUNÇÃO OBJETIVO	=B4*B12+C4*C12+D4*D12+E4*E12+B5*B14+C5*C14+D5*D14+E5*E14+B6*B16+C6*C16+D6*D16+E6*E16			
19					
20	RESTRIÇÕES				
21	=B12+C12+D12+E12	=	75	(restrição de oferta)	
22	=B14+C14+D14+E14	=	125	(restrição de oferta)	
23	=B16+C16+D16+E16	=	100	(restrição de oferta)	
24	=B12+B14+B16	=	80	(restrição de demanda)	
25	=C12+C14+C16	=	65	(restrição de demanda)	
26	=D12+D14+D16	=	70	(restrição de demanda)	
27	=E12+E14+E16	=	85	(restrição de demanda)	

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.16 | Inserção dos parâmetros do problema de transporte em estudo no Solver

Solver Parameters

Set Objective:

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

-
-
-
-
-
-
-

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method
Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.17 | Solução ótima dada pelo Solver do Excel para o problema de transporte em estudo

	A	B	C	D	E
1					
2			Custo do transporte por caminhão (R\$)		
3		Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4
4	Fábrica 1	464	513	654	867
5	Fábrica 2	352	416	690	791
6	Fábrica 3	995	682	388	685
7					
8			VARIÁVEIS DE DECISÃO		
9			Quantidade, por caminhão, a ser transportada		
10		Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4
11	Fábrica 1	x11	x12	x13	x14
12	SOLUÇÃO SOLVER	0	20	0	55
13	Fábrica 2	x21	x22	x23	x24
14	SOLUÇÃO SOLVER	80	45	0	0
15	Fábrica 3	x31	x32	x33	x34
16	SOLUÇÃO SOLVER	0	0	70	30
17					
18	FUNÇÃO OBJETIVO	=B4*B12+C4*C12+D4*D12+E4*E12+B5*B14+C5*C14+D5*D14+E5*E14+B6*B16+C6*C16+D6*D16+E6*E16			
19					
20	RESTRIÇÕES				
21	=B12+C12+D12+E12	=	75		(restrição de oferta)
22	=B14+C14+D14+E14	=	125		(restrição de oferta)
23	=B16+C16+D16+E16	=	100		(restrição de oferta)
24	=B12+B14+B16	=	80		(restrição de demanda)
25	=C12+C14+C16	=	65		(restrição de demanda)
26	=D12+D14+D16	=	70		(restrição de demanda)
27	=E12+E14+E16	=	85		(restrição de demanda)

Fonte: elaborada pela autora.

Pela Figura 3.17, temos que a solução ótima para minimização de custos ocorre se 20 caminhões saírem da fábrica 1 para o depósito 2; 55 caminhões saírem da fábrica 1 para o depósito 4; 80 caminhões saírem da fábrica 2 para o depósito 1; 45 caminhões saírem da fábrica 2 para o depósito 2; 70 caminhões saírem da fábrica 3 para o depósito 3; e 30 caminhões saírem da fábrica 3 para o depósito 4.



Pesquise mais

Caro aluno, como o problema de transporte é um tipo de problema de programação linear, então podemos utilizar o Método Simplex para a sua resolução. Nesse sentido, HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. Introdução à Pesquisa Operacional. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013, entre as páginas 304 a 315, apresenta o Método Simplex Aperfeiçoado, sendo destinado para agilizar a solução de problemas de transporte.

Faça a leitura em sua biblioteca digital e aprenda mais sobre esse conteúdo.

Como um tipo especial de problemas de transporte, temos os problemas de designação que, desta forma, também são problemas de programação linear.

Assim, podemos já entender que o problema da designação vai ser caracterizado também pela presença de origem e destino, cabendo especificar cada uma das fontes a cada um dos destinos de modo otimizado. Logo, seriam exemplos desse tipo de problema designar colaboradores para tarefas; designar maquinários para as localizações; designar produtos para as plantas fabris, entre outros.

Os problemas de designação ocorrem quando se há a intenção de designar determinada quantidade de itens (ou pessoas) em uma igual quantidade de destinos (localizações) de modo a diminuir o custo.

Especificamente, são caracterizados pelas quatro hipóteses apresentadas logo a seguir e qualquer problema que possa ser formulado de modo a respeitar essas indicações, então poderá ser resolvido como um problema de designação (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- O número de origens deve ser igual ao número de destinos, sendo genericamente denominado por n .

- Cada origem deve ser designada para somente **um** destino.
- Cada destino deve ser designado para somente **uma** origem.
- Em relação ao custo de designação, há um custo c_{ij} vinculado à ação de designar uma origem i ($i = 1, 2, \dots, n$) a um destino j ($j = 1, 2, \dots, n$).
- Objetiva-se, nesse tipo de problema, determinar como deve ocorrer todas as designações a fim de minimizar o custo de designação.

Refletindo sobre as variáveis de decisão (x_{ij}) do problema da designação, chegaremos à constatação que se trata de uma variável binária que possui valor 0 ou 1, conforme explicado a seguir:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se a origem } i \text{ for designada para o destino } j \\ 0 \rightarrow \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, percebemos que no problema da designação, as decisões devem ser tomadas entre sim ou não, de acordo com a seguinte pergunta: a origem i deve ser designada ao destino j ?

Com base nesses conceitos, o problema da designação, de modo genérico, pode ser modelado conforme segue:

Função objetivo: $\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{cada origem deve ser designada}$$

para exatamente **um** destino).

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{cada destino deve ser}$$

designado para exatamente **uma** origem).

$$0 \leq x_{ij}$$

Para variáveis binárias, utilizamos a programação inteira, conforme será visto na próxima unidade. Contudo, é válido ressaltar que para problemas da designação, conforme colocado por Hillier e Lieberman (2013), a restrição de que x_{ij} é uma variável

binária pode ser **eliminada**, de modo que o modelo construído para o problema da designação é um tipo especial de problema de programação linear, podendo ser resolvido facilmente. Em outras palavras, a literatura nos assegura que podemos tratar os problemas de designação como problemas de programação linear (ou seja, do mesmo modo como vimos até agora) e não pela programação inteira, conforme veremos adiante.

Agora, tente comparar o problema de transporte com o problema da designação, desconsiderando a restrição de variável binária. O que é possível concluir?

Sim, o problema da designação é um tipo especial do problema de transporte, sendo que?

- Cada origem do problema do transporte pode ser entendida como um trabalhador, uma máquina, um produto, ou qualquer outro item/pessoa que será designado para um destino.

- Cada destino do problema do transporte pode ser entendido como uma tarefa, uma fábrica, uma planta ou qualquer outra localização para qual será designada uma origem.

- O número de origens deve ser sempre igual ao número de destinos, no problema da designação. Assim, pelo problema do transporte isso significa dizer que $m = n$.

- No problema da designação, todas as restrições são iguais a 1, tendo em vista que será designada somente uma origem para exatamente um destino e vice-versa. Logo, toda oferta $s_i = 1$ e toda a demanda $d_j = 1$.

Agora vamos retomar ao fato do por quê podemos dizer que a restrição da variável binária, para o problema da designação, pode ser eliminada. Se refletirmos sobre a propriedade das soluções inteiras, que vimos para transporte, dado que s_i e d_j serão iguais a 1, isto é, serão sempre inteiros, isso implica no fato de que todas as soluções viáveis são soluções inteiras para um problema de designação. Pelas restrições do modelo de designação

$$(\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ e } 0 \leq x_{ij})$$

percebemos que é impossível qualquer variável ser maior que 1 ou menor que 0. Logo, mesmo eliminando a restrição de variável

binária, as soluções viáveis obtidas **automaticamente** atenderão à restrição binária (Hillier; Lieberman, 2013).



Exemplificando

A fim de facilitar o entendimento, vamos desenvolver um problema de designação na qual se tenha a necessidade de se produzir quatro novos produtos e há quatro plantas fabris disponíveis, de modo que o objetivo é designar os novos produtos às fábricas disponíveis a fim de minimizar o custo de produção, de acordo com a proximidade com fornecedor e centros de trabalho.

O custo (em milhares) associado a cada produto em cada planta é apresentado no Quadro 3.6.

Quadro 3.6 | Custo associado a cada produto em cada planta

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	Oferta
Produto 1	R\$ 8	R\$ 5	R\$ 10	R\$ 13	1
Produto 2	R\$ 6	R\$8	R\$ 9	R\$ 11	1
Produto 3	R\$ 9	R\$ 7	R\$ 7	R\$ 8	1
Produto 4	R\$10	R\$6	R\$11	R\$7	1
Demanda	1	1	1	1	

Fonte: elaborado pela autora.

Como poderíamos construir o modelo desse problema de designação?

O modelo para o problema proposto pode ser escrito como:

Função objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 8x_{11} + 5x_{12} + 10x_{13} + 13x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 11x_{24} + 9x_{31} + 7x_{32} + 7x_{33} + 8x_{34} + 10x_{41} + 6x_{42} + 11x_{43} + 7x_{44}$$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$0 \leq x_{ij}$$

Sem medo de errar

Caro aluno, vamos retomar o contexto no qual você é um consultor numa empresa do segmento de logística que está enfrentando alguns problemas de gerenciamento. A empresa possui diversos fornecedores, que são chamados de origens, e consumidores, os destinos, fazendo as entregas por caminhões em diversas rotas. O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

Logo, dado que problemas de transporte normalmente possuem muitas variáveis de decisão, então você foi solicitado a formular, em uma planilha eletrônica, um modelo genérico para o problema de transporte a fim de servir de protocolo para a empresa.

A primeira coisa a fazer é explicar os parâmetros necessários para modelar um problema de transporte. Para este caso, temos:

c_{ij} = custo de transporte entre o fornecedor i e o consumidor j

x_{ij} = quantidade a ser transportada entre o fornecedor i e o consumidor j

d_j = demanda do consumidor j

s_i = oferta do fornecedor i

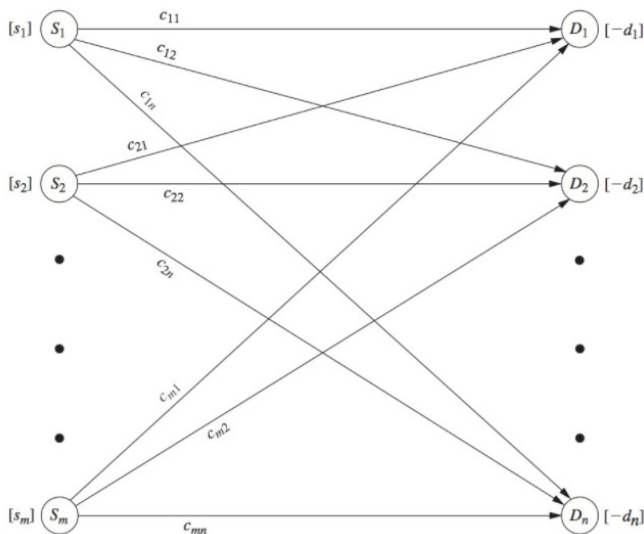
m = número de fornecedores

n = número de consumidores

Assim, o interessante é você colocar na sua apresentação ao presidente que, após levantar esses parâmetros, a empresa deve

construir uma figura esquemática com os dados do problema, conforme Figura 3.18. Posteriormente, colocar esses dados em uma tabela com o intuito de facilitar a visualização e a construção da planilha eletrônica. Logo, o Tableau do Transporte para um problema genérico é apresentado no Quadro 3.7.

Figura 3.18 | Figura esquemática de um problema genérico de transporte



Fonte: Hiller e Lieberman (2013, p. 296).

Quadro 3.7 | Tableau do Transporte

	Consumidor (destino n)				Oferta
Fornecedor (origem m)	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	s_1
	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	s_m
<i>Demanda</i>	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Fonte: Hiller e Lieberman (2013, p. 296).

Pos

Além disso, deve estar explícita a hipótese das exigências que mostra que em um problema de transporte somente haverá soluções viáveis se, e somente se, houver um equilíbrio entre a oferta total e a demanda total conforme equação logo a seguir:

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Pela hipótese do custo e considerando os dados do problema, podemos entender que as variáveis de decisão vão se referir à quantidade transportada por caminhão.

Uma vez levantados todos os parâmetros, mostre como construir um modelo de programação linear para o problema de transporte genérico. Lembre-se que o objetivo sempre vai ser minimizar o custo, atendendo às restrições de demanda e de oferta.

Logo, teremos o modelo a seguir:

Função objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

$$0 \leq x_{ij}$$

Parabéns, assim você finaliza a formulação genérica de um problema de transporte e permite que a empresa tenha esse documento como um protocolo!

Alocação de produto de acordo com a planta fabril

Descrição da situação-problema

Vamos continuar o problema de alocação do produto de acordo com a planta fabril.

Logo, tem-se a necessidade de se produzir quatro novos produtos e há quatro plantas fabris disponíveis, de modo que o objetivo é designar os novos produtos às fábricas disponíveis a fim de minimizar o custo, de acordo com a proximidade com fornecedor e centros de trabalho.

Agora, suponha que você é o gerente da empresa e que você precisa responder como será a distribuição destes produtos entre as fábricas, considerando os custos de designação (em milhares) conforme Quadro 3.8. Qual será a solução ótima?

Quadro 3.8 | Custo (em milhão) associado a cada produto em cada planta

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	Oferta
Produto 1	R\$ 8	R\$ 5	R\$ 10	R\$ 13	1
Produto 2	R\$ 6	R\$ 8	R\$ 9	R\$ 11	1
Produto 3	R\$ 9	R\$ 7	R\$ 7	R\$ 8	1
Produto 4	R\$ 10	R\$ 6	R\$ 11	R\$ 7	1
<i>Demanda</i>	1	1	1	1	

Fonte: elaborada pela autora.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, já vimos que o modelo contruído é:

$$\text{Minimizar } Z = 8x_{11} + 5x_{12} + 10x_{13} + 13x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 11x_{24} + 9x_{31} + 7x_{32} + 7x_{33} + 8x_{34} + 10x_{41} + 6x_{42} + 11x_{43} + 7x_{44}$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\
0 &\leq x_{ij}
\end{aligned}$$

No Solver, as Figuras 3.19, 3.20 e 3.21 mostram a obtenção da solução ótima.

Figura 3.19 | Construção do modelo na planilha eletrônica

	A	B	C	D	E	F	
1							
2		Custo de designação (R\$)					
3		Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4		
4	Produto 1	8	5	10	13		
5	Produto 2	6	8	9	11		
6	Produto 3	9	7	7	8		
7	Produto 4	10	6	11	7		
8							
9		VARIÁVEIS DE DECISÃO					
10							
11		Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4		
12	Produto 1	x11	x12	x13	x14		
13							
14	Produto 2	x21	x22	x23	x24		
15							
16	Produto 3	x31	x32	x33	x34		
17							
18	Produto 4	x41	x42	x43	x44		
19							
20							
21	FUNÇÃO OBJETIVO	=B4*B13+C4*C13+D4*D13+E4*E13+B5*B15+C5*C15+D5*D15+E5*E15+B6*B17+C6*C17+D6*D17+E6*E17+B7*B19+C7*C19+D7*D19					
22							
23	RESTRIÇÕES						
24	=B13+C13+D13+E13	=	1				
25	=B15+C15+D15+E15	=	1				
26	=B17+C17+D17+E17	=	1				
27	=B19+C19+D19+E19	=	1				
28	=B13+B15+B17+B19	=	1				
29	=C13+C15+C17+C19	=	1				
30	=D13+D15+D17+D19	=	1				
31	=E13+E15+E17+E19	=	1				

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.20 | Inserção dos parâmetros no Solver

Parâmetros do Solver

X

Definir Objetivo:

Para: ☐ Máx. ☒ Mín. ☐ Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$A\$24 = \$C\$24
\$A\$25 = \$C\$25
\$A\$26 = \$C\$26
\$A\$27 = \$C\$27
\$A\$28 = \$C\$28
\$A\$29 = \$C\$29
\$A\$30 = \$C\$30
\$A\$31 = \$C\$31

Adicionar
Alterar
Excluir
Redefinir Tudo
Carregar/Salvar

☒ Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Opções

Método de Solução

Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolver Fechar

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3.21 | Solução ótima dada pelo Solver

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Custo de designação (R\$)				
3		Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	
4	Produto 1	8	5	10	13	
5	Produto 2	6	8	9	11	
6	Produto 3	9	7	7	8	
7	Produto 4	10	6	11	7	
8						
9		VARIÁVEIS DE DECISÃO				
10						
11		Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	
12	Produto 1	x11	x12	x13	x14	
13	SOLUÇÃO SOLVER	0	1	0	0	
14	Produto 2	x21	x22	x23	x24	
15	SOLUÇÃO SOLVER	1	0	0	0	
16	Produto 3	x31	x32	x33	x34	
17	SOLUÇÃO SOLVER	0	0	1	0	
18	Produto 4	x41	x42	x43	x44	
19	SOLUÇÃO SOLVER	0	0	0	1	
20						
21	FUNÇÃO OBJETIVO	=B4*B13+C4*C13+D4*D13+E4*E13-B5*B15-C5*C15-D5*D15-E5*E15-B6*B17-C6*C17-D6*D17-E6*E17-B7*B19-C7*C19-D7*D19				
22						
23	RESTRIÇÕES					
24	=B13+C13+D13+E13	=	1			
25	=B15+C15+D15+E15	=	1			
26	=B17+C17+D17+E17	=	1			
27	=B19+C19+D19+E19	=	1			
28	=B13+B15+B17+B19	=	1			
29	=C13+C15+C17+C19	=	1			
30	=D13+D15+D17+D19	=	1			
31	=E13+E15+E17+E19	=	1			

Fonte: elaborada pela autora.

Logo, perceba que a solução encontrada é binária e aponta que o produto 1 deve ser designado para a planta fabril 2, o produto 2 deve ser designado para a planta fabril 1, o produto 3 deve ser designado para a planta fabril 3 e o produto 4 deve ser designado para a planta fabril 4.

Faça valer a pena

1. Sobre o problema de transporte, avalie as afirmações I, II e III:

- I. O problema de transporte é aquele em que há deslocamento de itens entre uma fonte (origem) e um destino.
- II. O problema de transporte pode ser resolvido como um problema de programação inteira.
- III. Um dos parâmetros que precisamos saber para resolver um problema de transporte é o custo de transporte.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente I e II são corretas
- b) Somente III é correta
- c) Somente II e III são corretas
- d) Somente I e III são corretas
- e) I, II e III são corretas

2. O problema da designação pode ser entendido como um tipo especial do problema de transporte. Sobre esse assunto, avalie as afirmações I, II e III.

- I. Cada origem do problema do transporte pode ser entendida como um trabalhador, uma máquina, um produto, ou qualquer outro item/pessoa que será designado para um destino.
- II. O número de origens deve ser sempre igual ao número de destinos, no problema da designação. Assim, pelo problema do transporte isso significa dizer que $m = n$.
- III. No problema da designação, todas as restrições são iguais a 1, exceto a restrição de não negatividade.

Com base nas afirmações, atribua V (Verdadeiro) ou F (Falso).

- a) F, V, V.
- b) V, V, V.
- c) V, F, V.
- d) F, F, F.
- e) F, V, F.

3. Vamos supor que um atacadista possua dois centros de distribuição - CD com 100 (CD 1) e 50 (CD2) unidades de um determinado item, o qual deve ser transportado para o abastecimento de três diferentes lojas L1, L2 e L3. As lojas, por sua vez, consomem, respectivamente, 80, 30 e 40 unidades do item. Os custos de transporte constam no Quadro 3.9.

Quadro 3.9 | Custos de transporte

	L1	L2	L3
CD1	R\$ 5,00	R\$ 3,00	R\$ 2,00
CD2	R\$ 4,00	R\$ 2,00	R\$ 1,00

Fonte: elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente o modelo para o problema proposto.

a) *Minimizar* $Z = 5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 40$$

$$0 \leq x_{ij}$$

b) *Minimizar* $Z = 5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100$$

$$x_{11} + x_{21} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 40$$

$$0 \leq x_{ij}$$

c) *Minimizar* $Z = 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100$$

$$x_{11} + x_{21} = 40$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

$$0 \leq x_{ij}$$

d) *Minimizar* $Z = 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 40$$

$$0 \leq x_{ij}$$

e) *Minimizar* $Z = 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23}$

Sujeito às restrições:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} = 30$$

$$x_{12} + x_{22} = 80$$

$$x_{13} + x_{23} = 40$$

$$0 \leq x_{ij}$$

Seção 3.3

Redes em PO

Diálogo aberto

Caro aluno, continuando a abordagem de solução de problemas de pesquisa operacional utilizando ferramentas computacionais, especialmente o Solver do Excel.

Vamos estudar, nesta seção, tipos de problemas clássicos de Programação Linear (PL) no tocante a otimização de redes: problema do caminho mais curto, problema do fluxo máximo e da roteirização.

Assim, entenderemos como modelar e resolver problemas de rede, englobando novamente o uso do Solver.

Para você já se situar, problemas de rede modelam-se como tipos especiais de problemas de programação linear, que são melhor estudados por meio de uma representação gráfica. A título de exemplificação, podemos citar a distribuição de energia, fluxo de água em uma tubulação, a programação de veículos em uma rede de transportes; entre outros exemplos que serão vistos adiante.

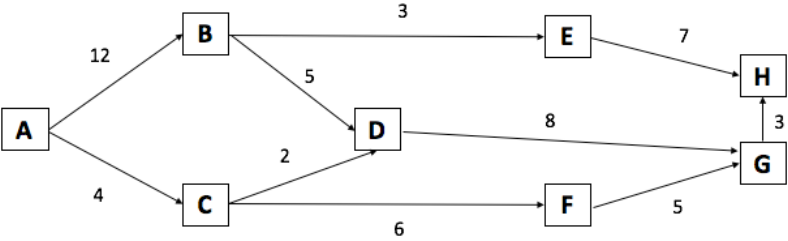
Logo, perceba que estes conceitos são muito comuns no setor de logística, administração de recursos, planejamento, setor elétrico, entre outros, sendo de extrema significância para a sua vida profissional!

Nesse sentido, vamos retomar o caso em que você está prestando uma consultoria numa empresa do segmento de logística que está enfrentando alguns problemas de gerenciamento. A empresa possui diversos fornecedores, que são chamados de origens, e consumidores, os destinos, fazendo as entregas por caminhões em diversas rotas.

O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

A rota que mais tem gerado custo refere-se ao caminho do fornecedor A ao consumidor H, passando por diferentes cidades, conforme mostra a Figura 3.22. Considerando a rede apresentada, qual seria o caminho mínimo, entre A até H, visando otimizar o custo?

Figura 3.22 | Possíveis rotas do fornecedor A até o consumidor H, com as distâncias em km



Fonte: elaborada pela autora.

Pense a respeito, uma vez que o presidente da filial lhe solicitou uma apresentação com esse escopo.

Bons estudos!

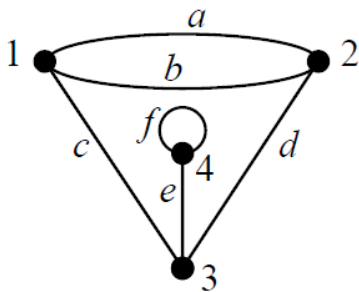
Não pode faltar

Caro aluno, para adentrarmos no conceito de rede, inicialmente faz-se válido entendermos alguns conceitos básicos sobre grafo. Para a definição de um grafo $G = (X; E)$ basta especificar o conjunto de pontos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, denominados vértices ou nós do grafo, e a família de seus arcos, ou arestas, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, representados por pares de vértices. Para uma aresta $e = \{x, y\}$, os vértices x e y são chamados de extremidades de do arco e . Vale a pena ressaltar que $x = y$, tem-se um laço (*loop*), ou seja, o arco inicia e termina em si mesmo.

Desta forma, a representação gráfica de um grafo ocorre por meio de pontos (vértices) e linhas (arestas) que unem esses pontos, conforme Figura 3.21. De acordo com a Figura 3.23, temos o grafo $G = (X; E)$ com vértices (ou nós) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e arcos $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ em que

$a = \{1,2\}$, $b = \{1,2\}$, $c = \{1,3\}$, $d = \{3,2\}$, $e = \{3,4\}$, $f = \{4,4\}$;
f é um laço e os arcos a e b são paralelos (Finke, 2008).

Figura 3.23 | Exemplo de grafo



Fonte: Finke (2008, p. 29).

Os grafos podem ser caracterizados como orientado (possuem orientação origem-destino) ou não orientado (não possuem noção de direção), conforme Figura 3.24, e valorado (os arcos possuem valores numéricos associados a eles) ou não valorado (arcos não possuem valores numéricos associados).

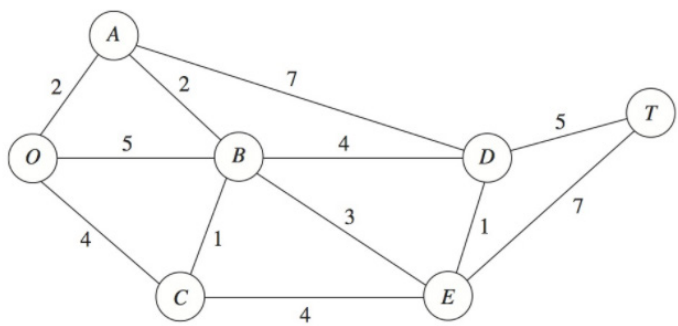
Figura 3.24 | Grafos orientados e grafos não orientados

Grafos não orientados	Grafos orientados

Fonte: adaptada de Finke (2008, p. 37).

Logo, podemos entender que uma rede é um grafo, podendo ser representada pelos nós que são ligados por linhas, formando os arcos. Comumente, trata-se de um grafo valorado, podendo ser orientado (fluxo através do arco é permitido somente em uma direção) ou não (fluxo é permitido em ambas direções), conforme Figura 3.25. Para um arco não orientado, a fim de facilitar a análise, observa-se o fluxo líquido através do arco, isto é, diferença entre os fluxos admitidos nas duas direções.

Figura 3.25 | Exemplo de rede



Fonte: Hiller e Lieberman (2013, p. 342).

Quando analisamos uma rede, podemos identificar diferentes caminhos entre dois nós, ou seja, por meio de uma sequência de arcos parte-se de um nó que é a origem para outro nó que seja o destino. Na Figura 3.25, por exemplo, um possível caminho entre os nós O e T pode ser a sequência OB-BD-DT. Quando um caminho começa e termina em um mesmo nó, temos então um exemplo de ciclo. Na mesma figura, o caminho OA-AB-BC-CO representa um possível ciclo.



Assimile

Caro aluno, a partir desses conceitos introdutórios, você pode estar se perguntando que tipo de problema real poderia ser caracterizado como um problema de rede.

A fim de você assimilar melhor o conteúdo, a Quadro 3.10 correlaciona a definição de nós, arcos e fluxo para problemas reais de rede.

Quadro 3.10 | Definição de nós, arcos e fluxo a partir de exemplos de problemas reais de rede

Nós ou Vértices	Arcos	Fluxo
Interseções	Rodovias	Veículos
Aeroportos	Linhas aéreas	Aviões
Estações de bombeamento	Dutos	Fluidos

Fonte: <<http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/vania/apostilas/Apostila-Redes.pdf>>. Acesso em: 29 nov. 2017.

Uma vez vistos conceitos fundamentais sobre redes, vamos refletir sobre exemplos clássicos desta temática. Assim, começaremos estudando o problema do caminho mais curto (ou caminho mínimo) que se refere à obtenção de um caminho otimizado, compreendendo a menor distância (outras aplicações podem sugerir menor custo ou menor tempo) entre dois nós de uma rede. Logo, suponha uma rede não orientada, valorada (arcos associados com uma distância não negativa) e com dois nós específicos denominados origem e destino. O objetivo é determinar um caminho com distância total mínima entre a origem e o destino, ou seja, é obter a sequência de arcos entre a origem e o destino de modo que a soma dos valores relativos aos arcos seja minimizada.

Lembre-se que os problemas de caminho mínimo tratam-se de problemas de programação linear, de modo que podem ser solucionados pelo Método Simplex, utilizando a ferramenta computacional Solver. Logo, novamente nos direcionaremos para a Figura 3.25 e tentaremos obter o caminho mais curto da origem O para o destino T.

Perceba, pela Figura 3.25, que a partir do nó O podemos seguir para os nós A, B ou C em direção a T, de modo que precisamos analisar essas três possibilidades. Saindo de O para A, então o caminho pode seguir para B ou para D; saindo-se de O para B, então o caminho pode seguir para C, para D ou para E (veja que não convém sair de B para A, uma vez que o destino é T e precisamos avançar no caminho); saindo de O para C, então podemos seguir caminho por B ou por E. Perceba que já estudamos os nós O, A, B e C (e seus respectivos arcos) e isso é importante você considerar, pois não vamos repetir a análise de nós na planilha do Excel.

Agora, vamos continuar a análise de acordo com novas possibilidades que surgiram.

Se de O for para A e então para B, como já analisamos o nó B, não há necessidade de inserir novamente na planilha, mas se de A for para D, então podemos seguir para E ou para T. Assim, perceba que acabamos de estudar o nó D, faltando apenas a análise do nó E, certo?

Se de O for para B e, então para C, também já consideramos a análise do nó C; se de B for para D também já consideramos o nó D; mas se de B for para E, então pode-se seguir para D ou para T, concluindo o estudo do nó E. Perceba que podemos parar a construção de nossa

planilha neste momento, uma vez que todos os nós foram analisados. Logo, observe esse raciocínio que acabamos de descrever na Figura 3.26, que apresenta a construção da planilha no Excel.

Refletindo sobre as variáveis de decisão (x_{ij}) do problema do caminho mínimo, trata-se de uma variável binária que possui valor 0 ou 1, ou seja, ou o arco $i \rightarrow j$ está no caminho ou não está no caminho.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se o arco } i \rightarrow j \text{ estiver no caminho} \\ 0 \rightarrow \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos entender que caso o nó pertença ao melhor caminho, então terá o fluxo de 1 passando através dele e, contrariamente, caso não pertença, nenhum fluxo passará por ele. Nesse sentido, podemos refletir sobre o fluxo líquido e, assim, chegaremos nas restrições do problema. Segundo Hillier e Lieberman (2013, p. 349), “o fluxo líquido gerado em um nó é o fluxo que sai menos o fluxo que entra de modo que o fluxo líquido seja 1 na origem, -1 no destino e 0 em todos os outros nós”. Desta forma, para obtermos as restrições, devemos analisar todos os arcos que entram e que saem do nó, de modo que teremos uma coluna Fluxo Líquido (referente a cada nó) em nossa planilha eletrônica, conforme Figura 3.26.

Figura 3.26 | Planilha eletrônica do Excel para o problema em estudo, destacando a solução dada pelo Solver

	A	B	C	D	E	F
	DE	PARA	Arco	Distância	VARIÁVEIS DE DECISÃO	SOLUÇÃO ÓTIMA - SOLVER
1	O	A	AO	2	X _{OA}	1
2	O	B	OB	5	X _{OB}	0
3	O	C	OC	4	X _{OC}	0
4	A	B	AB	2	X _{AB}	1
5	A	D	AD	7	X _{AD}	0
6	B	C	BC	1	X _{BC}	0
7	B	D	BD	4	X _{BD}	1
8	B	E	BE	3	X _{BE}	0
9	C	B	CB	1	X _{CB}	0
10	C	E	CE	4	X _{CE}	0
11	D	E	DE	1	X _{DE}	0
12	D	T	DT	5	X _{DT}	1
13	E	D	ED	1	X _{ED}	0
14	E	T	ET	7	X _{ET}	0
15						
16						
17	FUNÇÃO OBJETIVO					
18	Minimizar Z					
19	=D2*F2+D3*F3+D4*F4+D5*F5+D6*F6+D7*F7+D8*F8+D9*F9+D10*F10+D11*F11+D12*F12+D13*F13+D14*F14+D15*F15					
20						
21	RESTRIÇÕES					
22	Nó	DE - PARA		Fluxo líquido		
23	O (Origem)	=F2+F3+F4	=	1		
24	A	=F5+F6-F2	=	0		
25	B	=F7+F8+F9-F5-F3-F10	=	0		
26	C	=F10+F11-F4-F7	=	0		
27	D	=F12+F13-F6-F8-F14	=	0		
28	E	=F14+F15-F12-F11-F9	=	0		
29	T (Destino)	=-F13-F15	=	-1		

Fonte: elaborada pela autora.

A solução ótima dada pelo Solver aponta que, no caminho de O até T, teremos a melhor rota $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$. Somando as distâncias, teremos $2 + 2 + 4 + 5 = 13$ como distância mínima. A seguir temos o modelo genérico para a resolução de um problema de caminho mínimo, conforme Lemes (2006):

Função objetivo : $\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$

Sujeito a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = \text{origem} \\ -1 & \text{se } i = \text{destino} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No qual c_{ij} é o comprimento do arco ij e A é o nó de destino.

Outro problema de otimização rede refere-se ao fluxo máximo, ou seja, eventos nos quais necessita-se analisar a quantidade máxima de fluxo que pode ser enviada de um nó de origem a um nó de destino na rede, avaliando a máxima capacidade de fluxo em uma determinada rede. Como exemplo, podemos citar a maximização do fluxo de veículos em uma rede de transportes, maximização do fluxo de água nas tubulações e maximização da rede de abastecimento, considerando o deslocamento das indústrias até os consumidores, entre outros.

Nesse tipo de problema, alguns conceitos específicos são válidos (Hillier; Lieberman, 2013):

- Considerando uma rede orientada, todo o fluxo por meio dela origina-se em um nó, denominado origem, e finaliza em outro nó, denominado escoadouro.
- Os demais nós da rede são chamados de transbordo.
- Dado ser uma rede orientada, o fluxo no arco deve respeitar a seta indicativa, bem como o fluxo máximo no arco deve estar de acordo com o valor (capacidade) associado a ele.
- O objetivo é maximizar a quantidade total de fluxo da origem para o escoadouro, podendo ser mensurada por meio da quantidade que sai da origem ou da quantidade que chega ao escoadouro.

Assim, a seguir é apresentado o modelo de programação linear para um problema de fluxo máximo genérico, considerando um nó S de origem e um nó T como escoadouro.

Função objetivo : Max V

Sujeito a :

Para o nó origem :

$$\sum_i f_{si} - \sum_i f_{is} = V$$

Para o nó destino :

$$\sum_i f_{ti} - \sum_i f_{it} = -V$$

Para qualquer outro nó :

$$\sum_i f_{ji} - \sum_i f_{ij} = 0$$

Para todo arco :

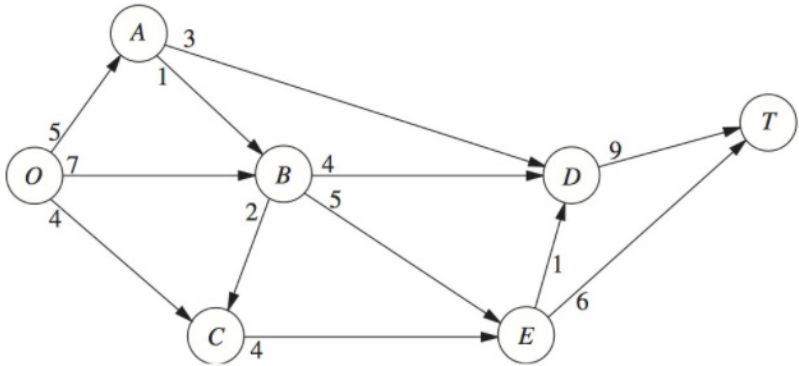
$$0 \leq f(i, j) \leq c(i, j)$$

No qual V refere-se ao fluxo máximo na rede; $f(i, j)$ é o fluxo no arco (variáveis de decisão) ij ; c_{ij} capacidade de fluxo do arco ij .

A função objetivo refere-se ao fluxo máximo V, isto é, refere-se ao fluxo gerado na origem, uma vez que este é igual à quantidade total do fluxo da origem para o escoadouro (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). As três primeiras restrições dizem respeito ao fluxo líquido, de modo que há uma conservação de fluxo no arco, isto é, a soma dos fluxos que entram em um nó iguala-se à soma dos fluxos que saem deste nó. Já a última restrição, que se refere à viabilidade de passagem de fluxo, impõe que o fluxo que vai passar pelo arco não seja maior que a capacidade do arco.

Considere a Figura 3.27. Conforme Hillier e Lieberman (2013), suponha que cada nó representa uma cidade e que o objetivo agora é maximizar o número de viagens por dia, entre o nó O e o nó T, determinando o fluxo otimizado. Neste ponto, vamos considerar que cada meio de transporte vai e volta pela mesma rota, de modo que necessitamos apenas estudar as viagens de ida.

Figura 3.27 | Rede de cidades e o problema do fluxo máximo



Fonte: Hiller e Lieberman (2013, p. 375).

A partir da Figura 3.27, vamos construir o modelo de programação linear, podendo ser descrito como:

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = x_{OA} + x_{OB} + x_{OC} \text{ (quantidade de fluxo gerada na origem)}$$

Sujeito a:

Conservação de fluxo:

$$x_{AB} + x_{AD} - x_{OA} = 0$$

$$x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} - x_{OB} - x_{AB} = 0$$

$$x_{CE} - x_{OC} - x_{BC} = 0$$

$$x_{DT} - x_{AD} - x_{BD} = 0$$

$$x_{ED} + x_{ET} - x_{BE} - x_{CE} = 0$$

Viabilidade de passagem de fluxo (capacidade do arco):

$$x_{OA} \leq 5$$

$$x_{OB} \leq 7$$

$$x_{OC} \leq 4$$

$$x_{AB} \leq 1$$

$$x_{AD} \leq 3$$

$$X_{BC} \leq 2$$

$$X_{BD} \leq 4$$

$$X_{BE} \leq 5$$

$$X_{CE} \leq 4$$

$$X_{DT} \leq 9$$

$$X_{ED} \leq 1$$

$$X_{ET} \leq 6$$

Por fim, agora adentraremos na questão da roteirização, quando estudada otimização de rede. O termo roteirização é mais comum na área logística, para se referir à roteirização de veículos.

Assim, Christofides (1985) coloca que a roteirização de veículos é um problema de rede de transporte, no qual busca-se a programação de veículos (iniciando e terminando no depósito) a fim de atender assertivamente aos clientes dispersos em uma determinada região, respeitando a demanda de cada consumidor e a capacidade de cada veículo, de modo a minimizar os custos de operação, ou o tempo de trajeto, etc. Considera-se ainda que cada nó é atendido uma única vez e somente por um veículo que, por sua vez, tem capacidade limitada.

Em termos de modelo matemático, Fisher e Jaikumar (1981) apresentam que:

$$x_{ij}^v = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se a rota } i \rightarrow j \text{ for percorrida pelo veículo } v \\ 0 \rightarrow \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_i^v = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se a demanda } i \text{ for atendida pelo veículo } v \\ 0 \rightarrow \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Função objetivo : } \min \sum_i \sum_j \sum_v c_{ij} x_{ij}^v$$

Sujeito a :

$$(1) \sum_v y_0^v = NV$$

$$(2) \sum_v y_i^v = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3) \sum_i q_i y_i \leq C_v \quad v = 1, \dots, NV$$

$$(4) \sum_i x_{ij}^v = y_j^v \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV$$

$$(5) \sum_j x_{ij}^v = y_i^v \quad i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV$$

$$(6) \sum_{i,j \in S} x_{ij}^v \leq |S| - 1 \quad S \subseteq \{1, \dots, n\}; 2 \leq |S| \leq n - 1; v = 1, \dots, NV$$

$$(7) x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV$$

$$(8) y_i^v \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV$$

Onde:

NV: quantidade de veículos disponíveis; n: número total de clientes que devem ser atendidos, sendo que 0 representa o depósito central; C_v capacidade do veículo v (volume, por exemplo); c_{ij} custo do deslocamento entre i e j; d_i demanda do local i; S : Subgrafo qualquer do problema, excluindo-se o depósito central.

Caro aluno, perceba, inicialmente, que as variáveis de decisão são binárias, conforme restrições 7 e 8. Pela restrição 1, é imposto que os caminhos comecem e terminem no depósito (i = 0), já a restrição 2 aponta que cada nó é visitado por apenas um único veículo cuja restrição de capacidade é expressa por meio da restrição 3. Referente à conservação de fluxo, temos as restrições 4 e 5, enquanto a restrição 6 impede que haja sub-rotas.

No tocante aos problemas de roteirização, um problema típico estudado primeiramente na área foi o Problema do Caixeiro Viajante, consistindo em obter a sequência de cidades a serem visitadas por um caixeiro viajante, considerando que cada cidade deve ser visitada somente uma única vez e que a distância percorrida pelo caixeiro deve ser mínima.

A partir do problema do caixeiro viajante, novos problemas de roteirização mais complexos foram surgindo por meio da adição de novas restrições, incluindo horários de atendimento, capacidades dos meios de transporte, duração máxima dos caminhos, magnitude e composição da frota, precedência entre

clientes, etc. Logo, atualmente, podemos entender um problema de roteirização, genericamente, como um problema de múltiplos caixeiros viajantes.



Exemplificando

Caro aluno, vamos ver exemplos que nos permitem vislumbrar a complexidade que os problemas de roteirização de veículos podem atingir? Conforme consta abaixo, podemos observar exemplos de parâmetros que podem ser considerados na modelagem de problemas de roteirização:

- Função objetivo: minimizar custos; minimizar número de veículos; minimizar distância percorrida; etc.
- Restrições: limite de capacidade do veículo; atendimento parcial das demandas; limitação do número de veículos disponíveis; etc.
- Variáveis de decisão: roteiro que cada veículo deve percorrer; instante de início de atendimento de cada cliente da rota; qual veículo deve atender cada demanda; etc.



Refleta

Caro aluno, constatada a complexidade de problemas de roteirização, quais métodos você acha que poderíamos utilizar para resolvê-los?

Dada a complexidade dos problemas de roteirização, comumente são aplicadas algumas técnicas de inteligência artificial, incluindo métodos de busca heurística e métodos de computação bioinspirada, como os algoritmos genéticos e colônia de formigas (PIRLOT, 1996). Para você compreender melhor, vale explicar que a inteligência artificial, por meio de conhecimentos da ciência da computação, objetiva construir dispositivos ou mesmo mecanismos capazes de simular a capacidade do ser humano de pensar e solucionar problemas.



Caro aluno, a fim de você compreender melhor os preceitos e técnicas de resolução dos problemas de roteirização, leia o artigo

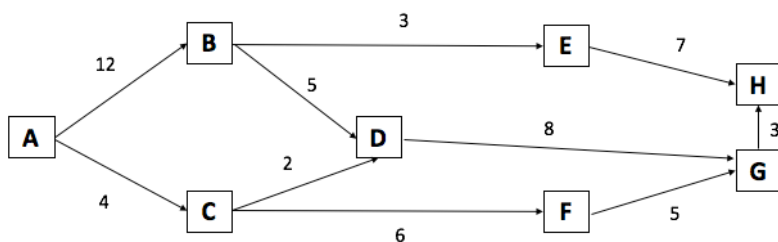
BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. L. Problema de roteirização de veículos com entregas fracionadas: revisão da literatura. In: XIII Simpósio de Engenharia de Produção, 2006, Bauru. Anais do XIII SIMPEP, 2006. Disponível em: <http://www.simpep.feb.unesp.br/anais/anais_13/artigos/675.pdf>. Acesso em: 1 dez. 2017.

Sem medo de errar

Caro aluno, vamos voltar ao caso em que você é o consultor de uma empresa de logística. O principal problema enfrentado é realizar a roteirização das entregas com o menor custo possível, fazendo com que a empresa se mantenha competitiva no mercado.

A rota que mais tem gerado custo refere-se ao caminho do fornecedor A ao consumidor H, passando por diferentes cidades, conforme Figura 3.29.

Figura 3.29 | Possíveis rotas do fornecedor A até o consumidor H com as distâncias em km



Fonte: elaborada pela autora.

Inicialmente, na sua apresentação ao presidente, você já deve mencionar que os problemas de caminho mínimo tratam-se de problemas de programação linear, de modo que podem ser solucionados pelo Método Simplex, utilizando a ferramenta computacional Solver.

Logo, direcione-se para a rede apresentada na Figura 3.29 e tente obter o caminho mais curto do fornecedor A até o consumidor H.

Para tanto, comece construindo o modelo de programação linear para o caso apresentado, no qual a função objetivo é minimizar a distância entre a origem e o destino.

$$\text{Função Objetivo : } \text{Min } Z = 12x_{AB} + 4x_{AC} + 5x_{BD} + 3x_{BE} + 2x_{CD} + 6x_{CF} + 8x_{DG} + 7x_{EH} + 5x_{FG} + 3x_{GH}$$

Sujeito a (conservação de fluxo):

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{AC} &= 1 \\ x_{BD} + x_{BE} - x_{AB} &= 0 \\ x_{CD} + x_{CF} - x_{AC} &= 0 \\ x_{DG} - x_{CD} &= 0 \\ x_{EH} - x_{BE} &= 0 \\ x_{FG} - x_{CF} &= 0 \\ x_{GH} - x_{FG} - x_{DG} &= 0 \\ -x_{GH} - x_{EH} &= -1 \end{aligned}$$

A Figura 3.30 apresenta a planilha eletrônica para este problema construída no Excel, bem como a solução dada pelo Solver.

Figura 3.30 | Planilha do Excel para o problema em estudo

	A	B	C	D	E	F
1	Nó de origem (DE)	Nó de destino (PARA)	Arco	Distância	Variáveis de Decisao	SOLVER
2	A	B	AB	12	X _{AB}	0
3	A	C	AC	4	X _{AC}	1
4	B	D	BD	5	X _{BD}	0
5	B	E	BE	3	X _{BE}	0
6	C	D	CD	2	X _{CD}	1
7	C	F	CF	6	X _{CF}	0
8	D	G	DG	8	X _{DG}	1
9	E	H	EH	7	X _{EH}	0
10	F	G	FG	5	X _{FG}	0
11	G	H	GH	3	X _{GH}	1
12						
13	Função Objetivo			17		
14						
15	Restrições (sal - entra)					
16	Nó	DE - PARA		Fluxo líquido		
17	A		1 =	1		
18	B		0 =	0		
19	C		0 =	0		
20	D		0 =	0		
21	E		0 =	0		
22	F		0 =	0		
23	G		0 =	0		
24	H		-1 =	-1		

Fonte: elaborada pela autora.

Logo, pelo Solver, o caminho mínimo é A-C-D-G-H, resultando em uma função objetivo igual a 17 km.

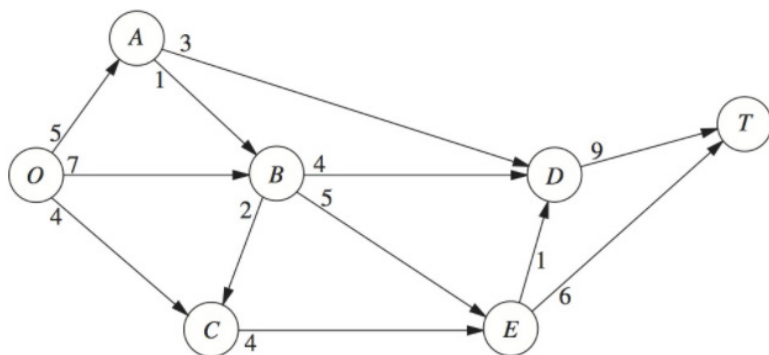
Avançando na prática

Problema do fluxo máximo – resolução Solver

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja administrador de um parque que possui diversas atrações, designadas pelos nós de O a T, sendo que cada nó representa uma atração e que o objetivo agora é maximizar o número de viagens, por dia, entre o nó O e o nó T (Figura 3.31), determinando o fluxo máximo. Neste ponto, vamos considerar que cada meio de transporte vai e volta pela mesma rota, de modo que necessitamos apenas estudar as viagens de ida. Qual seria a solução ótima pelo Solver?

Figura 3.31 | Rede de atrações no parque (distância em km)



Fonte: HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 375.

Resolução da situação-problema

A partir da Figura 3.31, vamos construir o modelo de programação linear:

Função objetivo:

$$\text{Max } Z = x_{OA} + x_{OB} + x_{OC} \text{ (quantidade de fluxo gerada na origem)}$$

Sujeito a:

Conservação de fluxo:

$$x_{AB} + x_{AD} - x_{OA} = 0$$

$$x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} - x_{OB} - x_{AB} = 0$$

$$x_{CE} - x_{OC} - x_{BC} = 0$$

$$x_{DT} - x_{AD} - x_{BD} = 0$$

$$x_{ED} + x_{ET} - x_{BE} - x_{CE} = 0$$

Viabilidade de passagem de fluxo (capacidade do arco):

$$x_{OA} \leq 5$$

$$x_{OB} \leq 7$$

$$x_{OC} \leq 4$$

$$x_{AB} \leq 1$$

$$x_{AD} \leq 3$$

$$x_{BC} \leq 2$$

$$x_{BD} \leq 4$$

$$x_{BE} \leq 5$$

$$x_{CE} \leq 4$$

$$x_{DT} \leq 9$$

$$x_{ED} \leq 1$$

$$x_{ET} \leq 6$$

Então, vamos construir a planilha eletrônica no Excel (Figura 3.32), analisando cada nó (De-Para) os arcos, a capacidade de fluxo em cada arco e as restrições, conforme o modelo matemático que acabamos de desenvolver.

Figura 3.32 | Planilha eletrônica do Excel-Solver para a rede em estudo

	A	B	C	D	E	F
1	DE	PARA	Arco	Capacidade de Fluxo	VARIÁVEIS DE DECISÃO	SOLVER
2	O	A	AO	5	X _{OA}	3
3	O	B	OB	7	X _{OB}	7
4	O	C	OC	4	X _{OC}	4
5	A	B	AB	1	X _{AB}	0
6	A	D	AD	3	X _{AD}	3
7	B	C	BC	2	X _{BC}	0
8	B	D	BD	4	X _{BD}	4
9	B	E	BE	5	X _{BE}	3
10	C	E	CE	4	X _{CE}	4
11	D	T	DT	9	X _{DT}	8
12	E	D	ED	1	X _{ED}	1
13	E	T	ET	6	X _{ET}	6
14						
15	FUNÇÃO OBJETIVO	=B20				
16	Fluxo máximo	14				
17						
18	RESTRIÇÕES (conservação de fluxo)					
19	Nó	DE - PARA		Fluxo líquido		
20	O (Origem)	=F2+F3+F4		=B15		
21	A	=F5+F6-F2	=	0		
22	B	=F7+F8+F9-F3-F5	=	0		
23	C	=F10-F4-F7	=	0		
24	D	=F11-F12-F8-F6	=	0		
25	E	=F12+F13-F9-F10	=	0		
26	T (Destino)	=F11-F13		=B15		
27						
28	RESTRIÇÕES (viabilidade de passagem de fluxo)					
29	Arco			Capacidade de fluxo		
30	AO	=F2	≤	=D2		
31	OB	=F3	≤	=D3		
32	OC	=F4	≤	=D4		
33	AB	=F5	≤	=D5		
34	AD	=F6	≤	=D6		
35	BC	=F7	≤	=D7		
36	BD	=F8	≤	=D8		
37	BE	=F9	≤	=D9		
38	CE	=F10	≤	=D10		
39	DT	=F11	≤	=D11		
40	ED	=F12	≤	=D12		
41	ET	=F13	≤	=D13		

Fonte: elaborada pela autora.

Logo, a função ótima refere-se a um fluxo máximo de 14 km.

Parabéns, mais um desafio vencido!

Faça valer a pena

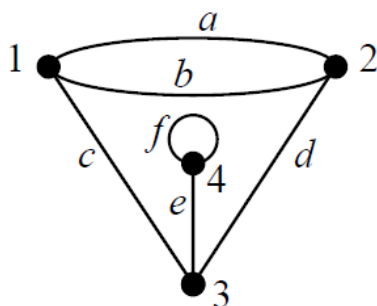
1. Considere um problema de rede de transporte, no qual busca-se a programação de veículos a fim de atender assertivamente aos clientes dispersos em uma determinada região, respeitando a demanda de cada consumidor e a capacidade de cada veículo, de modo a minimizar os custos de operação, ou o tempo de trajeto, etc.

O problema retratado no enunciado refere-se a um problema de:

- a) Resíduo casual.
- b) Fluxo aumentado.
- c) Roteirização.
- d) Caminho mínimo.
- e) Fluxo máximo.

2. O conceito de grafo é de extrema importância nos problemas de otimização de rede. Assim, considere a Figura 3.33, bem como as afirmações I, II e III.

Figura 3.33 | Grafo $G = (X; E)$



Fonte: Finke (2008, p. 29).

- I. No grafo $G = (X; E)$, os pontos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ são denominados vértices (ou nós) do grafo.
- II. No grafo $G = (X; E)$, tem-se os arcos $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ em que $a = \{1, 2\}$, $b = \{1, 2\}$, $c = \{1, 3\}$, $d = \{3, 2\}$, $e = \{3, 4\}$, $f = \{4, 4\}$.
- III. Trata-se de um grafo orientando.

Com base na figura, assinale a alternativa correta.

- a) Somente I e II são corretas.
- b) Somente I e III são corretas.
- c) Somente II é correta.
- d) I, II e III são corretas.
- e) Somente I é correta.

3. Quanto ao problema do fluxo máximo, avalie as afirmações I, II e III.

- I. A função objetivo refere-se à maximização do fluxo gerado somente no nó de origem da rede.

- II. As variáveis de decisão são binárias, isto é, podem assumir somente valor igual a 1 ou igual a 0.
- III. As restrições devem considerar a viabilidade de passagem de fluxo, de acordo com a capacidade do arco, bem como a conservação de fluxo.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente I e II são corretas.
- b) Somente III é correta.
- c) Somente I e III são corretas.
- d) Somente I é correta.
- e) Somente II e III são corretas.

Referências

CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional**: técnicas de otimização aplicadas a sistemas. 2. ed. – 5. reimpr. – São Paulo: Atlas, 2011.

CHRISTOFIDES, N. **The Traveling Salesman Problem**: a Guided Tour of Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons, 1985.

FINKE, G. **Operational Research and Networks**. New Jersey: Wiley, 2008, p. 37.

Fisher, M. L.; Jaikumar R. **A generalized assignment heuristic for vehicle routing**. Networks, v. 11(2), p. 109-124, 1981.

HILLIER, F S; LIEBERMAN, G J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

LEMES, D. F. **Fluxo em redes**. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2006. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/gustavo/bcc342/Apostila_fluxo_redes.pdf>. Acesso em: 1. Dez. 2017.

PIRLOT, M. **General local search methods**. European Journal of Operational Research, v. 92, p. 493–511, 1996.

Programação inteira e simulação

Convite ao estudo

Caro aluno, iniciaremos, agora, o nosso estudo de programação inteira, bem como de simulação, sendo esta uma parte essencial da Pesquisa Operacional.

Logo, esta unidade é de extrema importância para sua formação profissional, pois será seu contato com a simulação em PO, permitindo que você resolva problemas complexos a partir de uma abordagem mais sistêmica.

Desta forma, estudaremos, inicialmente, a programação inteira, incluindo seus princípios, sua modelagem e suas aplicações.

Posteriormente, entenderemos a importância das cadeias de Markov para simulação em PO, de modo que você estudará os processos markovianos, as cadeias de Markov discreta no tempo, as cadeias de Markov contínua no tempo e as aplicações destas.

Dessa forma, continuando nos estudos de simulação, adentraremos nos fundamentos da teoria das filas, abrangendo as principais características e tipologias de filas, medidas de desempenho e sua aplicação.

Assim, ao final desta unidade, pretende-se que você saiba analisar criticamente o uso da simulação computacional em problemas de Pesquisa Operacional.

A fim de refletir e aplicar esses conceitos, considere um posto de combustível que conta, atualmente, com três bombas: uma de diesel, uma de gasolina e a outra de álcool.

Você é o gerente administrativo e está avaliando a expansão no número de bombas para melhor atender os consumidores, uma vez que, em alguns horários do dia, a demanda

apresenta picos que geram filas, fazendo que possíveis clientes migrem para outros postos concorrentes. Como o orçamento para expansão apresenta restrições, suas primeiras dúvidas são decidir entre qual dos três tipos de bomba adicionar e em qual quantidade.

Nesse cenário, você se lembrou das aulas de Pesquisa Operacional e decidiu aplicar os conceitos de programação inteira para otimizar o lucro obtido, isso seria possível?

Na fase de coleta de dados para a modelagem, você percebeu que, no final de uma semana comercial, o preço de determinado combustível é aferido, podendo ocorrer três situações, que têm como base o período anterior: o preço pode se manter constante, aumentar ou diminuir. Para cada situação, existe uma probabilidade de ocorrência, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer prejuízos para a expansão proposta.

Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter condições de passar para o dono do posto uma probabilidade de lucro?

Outra questão relevante refere-se à formação de filas nas bombas de combustível; quais informações deveriam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o dono do posto de combustível solicitou uma apresentação com esse escopo.

A partir de agora, mãos à obra e se empenhe, com dedicação e com entusiasmo, para aproveitar esse conteúdo e fazer a diferença em sua carreira.

Bons estudos!

Seção 4.1

Programação inteira

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da Pesquisa Operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre os conceitos e fundamentos da programação inteira.

Lembre-se de que já vimos a programação linear e, agora, adentraremos na programação inteira, estudando seus princípios, sua modelagem e suas aplicações.

Para começar a refletir sobre programação inteira, vale ressaltar que esta surgiu a partir de uma limitação da programação linear, quando havia a necessidade do uso de variáveis de decisão inteiras na solução de vários problemas.

Além disso, considerando as diferentes ferramentas computacionais para Pesquisa Operacional, uma das mais conhecidas e utilizadas nos problemas de PO é o Solver, do Excel.

Vale lembrar que essa ferramenta do Excel também pode ser utilizada para a solução de problemas de programação inteira, facilitando seu entendimento sobre o tema.

Esse estudo é essencial para que você se torne apto a modelar e implementar modelos de programação inteira para diferentes problemas em PO (problemas com variáveis binárias ou problemas com restrição de números inteiros, por exemplo) por meio do uso de ferramentas computacionais (Solver, por exemplo), inclusive, vislumbrando a aplicação dessa área em diferentes segmentos da Economia, como indústria, transporte, mercado financeiro, entre outros, uma vez que se trata de uma área estratégica.

Logo, a fim de refletir e aplicar esses conceitos, considere um posto de combustível que conta, atualmente, com três bombas: uma de diesel, uma de gasolina e a outra de álcool.

Você é o gerente administrativo e está avaliando a expansão no número de bombas para melhor atender os consumidores, uma vez

que, em alguns horários do dia, a demanda apresenta picos que geram filas, fazendo que possíveis clientes migrem para outros postos concorrentes. Como o orçamento para expansão apresenta restrições, suas primeiras dúvidas são decidir entre qual dos três tipos de bomba adicionar e em qual quantidade.

Nesse cenário, você se lembrou das aulas de Pesquisa Operacional e decidiu aplicar os conceitos de programação inteira para otimizar o lucro obtido, isso seria possível?

Pense a respeito dessas indagações, uma vez que o dono do posto de combustível solicitou uma apresentação com esse escopo.

Bons estudos!

Não pode faltar

A programação inteira (PI) trata da resolução de modelos lineares (neste ponto, podemos destacar que o nome mais completo seria programação linear inteira, mas comumente é omitida a palavra “linear”, tratando-se apenas de programação inteira) nos quais algumas ou todas as variáveis de decisão são restritas para serem inteiras.

Existem algoritmos especialmente projetados para problemas de PI que, basicamente, encontram a solução ótima ao resolver uma sequência de problemas de programação linear (PL), conforme veremos a seguir. Assim, o modelo de programação linear é um modelo matemático para a programação inteira, adicionando-se que as variáveis devem apresentar valores inteiros.

O algoritmo Simplex, já estudado, baseia-se no fato de que a região que apresenta o conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é convexa e essa propriedade desempenha um papel fundamental na solução de modelos lineares. De fato, o número de pontos extremos de um conjunto convexo de soluções é finito e vimos que a solução ótima é obtida em um ponto extremo.

Logo, vale ressaltar que mesmo que o número de soluções seja reduzido, quando as variáveis de decisão ficam restritas à necessidade de serem inteiras, os problemas de PI, geralmente, são muito mais difíceis de resolver do que os problemas de PL, uma vez que o conjunto de soluções viáveis não é convexo.

Vale ressaltar também que as variáveis de decisão não necessariamente devem ser todas inteiras, de modo que, se algumas forem restritas a valores inteiros, teremos um problema de programação inteira. Ademais, quando as variáveis são binárias, também estamos tratando de um problema de PI que pode ser caracterizado como programação inteira binária.



Assimile

Caro aluno, conforme já comentamos, de acordo com a natureza das variáveis de decisão, podemos identificar três tipos de modelos de programação inteira (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

1. Na programação inteira mista, apenas algumas das variáveis são restritas a valores inteiros.
2. Na programação inteira pura, todas as variáveis de decisão devem ser inteiras.
3. Na programação inteira binária, todas as variáveis de decisão são binárias (restrita aos valores 0 ou 1).

Perceba, assim, a importância da PI, inclusive para problemas do tipo sim ou não, ou seja, problemas em que as variáveis de decisão podem apresentar somente dois valores vinculados à tomada de decisão. Logo, na programação inteira binária, a variável vinculada à j -ésima decisão pode ser representada conforme a seguir (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

$$x_j = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se a decisão } j \text{ for sim} \\ 0 \rightarrow \text{se a decisão } j \text{ for não} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4 \dots)$$

Para melhor compreender esses conceitos, nos debruçaremos sobre um exemplo. Imagine-se como gerente de um supermercado. Em função da época natalina, visando aumentar a demanda e a visibilidade do negócio, você decide organizar uma cesta de natal para presentear o cliente, de modo que, quando este gastar acima de R\$ 350,00 no estabelecimento, ele a receberá. A cesta de natal pode conter quatro itens típicos da época (itens A, B, C e D), que foram comprados em excesso pelo departamento de compras do supermercado. Assim, tem-se à disposição uma cesta com capacidade para até 12 kg, sendo sua intenção decidir quais itens colocar na cesta para maximizar seu valor monetário total, a fim de atrair mais clientes para o supermercado. O Quadro 4.1 apresenta o valor monetário de cada um dos itens (em reais), bem como a massa (em kg).

Quadro 4.1 | Valor monetário e massa de cada um dos itens que podem estar na cesta de natal

	Item A	Item B	Item C	Item D
Massa (kg)	3	6	5	5
Valor (R\$)	15	25	12	10

Fonte: elaborado pela autora.

O primeiro passo é decidir quais produtos estarão na cesta e, neste ponto, perceba que a decisão é binária, ou seja, o item estará ou não na cesta. Logo, trata-se de um problema de programação inteira binária e, quanto às variáveis de decisão, temos:

$$x_j = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{se o item } j \text{ estiver na cesta} \\ 0 \rightarrow \text{se o item } j \text{ não estiver na cesta} \end{cases}$$

O modelo de programação inteira binária que representa esse problema pode ser descrito como:

Função objetivo :

$$\max Z = 15x_A + 25x_B + 12x_C + 10x_D$$

Sujeito às restrições :

$$3x_A + 6x_B + 5x_C + 5x_D \leq 12$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \leq 1$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0 \text{ (não – negatividade)}$$

e

$$x_A, x_B, x_C, x_D \text{ são inteiras}$$

Repare que as três últimas linhas das restrições já nos permitem dizer que as variáveis de decisão são binárias.

Esse é um exemplo típico de programação inteira binária, apresentado por Orlin (2017), que pode ser facilmente incrementado com a adição de outras restrições, como o volume do item, por exemplo. Vale ressaltar que assim como no caso do supermercado, diariamente os colaboradores que possuem função gerencial em uma empresa devem lidar com decisões do tipo sim ou não, apondo a importância do estudo dessa temática no âmbito da programação inteira (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Comumente, a programação inteira binária também é aplicada na análise de investimento,

escolha de local, redes de produção, redes de distribuição, despacho de mercadorias e linhas aéreas.



Refleta

Caro aluno, como poderíamos montar a planilha eletrônica do Excel para o problema da cesta de natal, visando a utilização do Solver? Será que seria semelhante à construção de um problema de programação linear?

Quanto à resolução por meio de ferramentas computacionais, podemos utilizar o Solver, do Excel, no tocante aos problemas de programação inteira, fazendo uso do método Simplex com limites sobre as variáveis e o método de desvio e limite (CAIXETA-FILHO, 2011).



Exemplificando

Caro aluno, continuando nosso exemplo da cesta de natal, veremos, agora, como se constrói a planilha eletrônica para a resolução pelo Solver.

Logo, com base no modelo matemático construído para o problema de programação inteira binária, obteremos a solução ótima por meio do Solver. A Figura 4.1 ilustra a planilha do Excel construída para o problema da cesta de natal, apontando como solução ótima a presença dos itens A e B, totalizando 40 reais e 9 kg. Perceba, neste ponto, que nas restrições devemos selecionar as variáveis de decisão como binárias (bin).

Figura 4.1 | Planilha Excel e solução ótima obtida pela Solver para o problema da cesta de natal

	A	B	C	D	E
1					
2		Variáveis de decisão			
3	Item	A	B	C	D
4	Massa (kg)	3	6	5	5
5	Valor (R\$)	15	25	12	10
6		XA	XB	XC	XD
7	SOLUÇÃO ÓTIMA	1	1	0	0
8					
9	Função objetivo:	=B5*B7+C5*C7+D5*D7+E5*E7			
10					
11	Restrições				
12	=B4*B7+C4*C7+D4*D7+E4*E7	≤	12		
13	=B7	=	bin		
14	=C7	=	bin		
15	=D7	=	bin		
16	=E7	=	bin		

Fonte: elaborado pela autora.

Diante do apresentado até aqui, você deve estar imaginando que é fácil resolver um problema de PI, podendo ser entendido como um problema de PL com variáveis inteiras. Nesse sentido, refletiremos um pouco mais a respeito da dificuldade de resolver problemas de PI (puro ou misto).

Logo, conforme apresentado por Orlin (2017), considere um problema de PI, cujo modelo matemático está descrito a seguir. A Figura 4.2 apresenta o conjunto de soluções do problema por meio de representação gráfica, de acordo com o que vimos na Unidade 2. Caro aluno, vale ressaltar que para exercitar a resolução gráfica do problema em questão, você pode utilizar o software Graph, em sua versão gratuita.

Função objetivo:

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

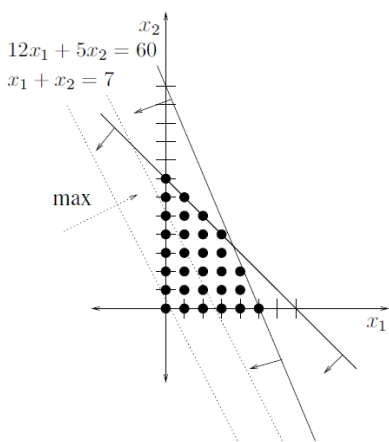
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

e

$$x_1, x_2 \text{ são inteiras}$$

Figura 4.2 | Representação gráfica do conjunto de soluções do problema PI em estudo



Fonte: <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.<https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

De acordo com a Figura 4.2, podemos ver que a região viável do problema de PI não é um conjunto convexo. Perceba que há uma quantidade limitada de pontos na região viável e, assim, é possível obter a solução ótima por meio do cálculo de Z (função objetivo) para cada uma das soluções na região viável, comparando-as entre si.

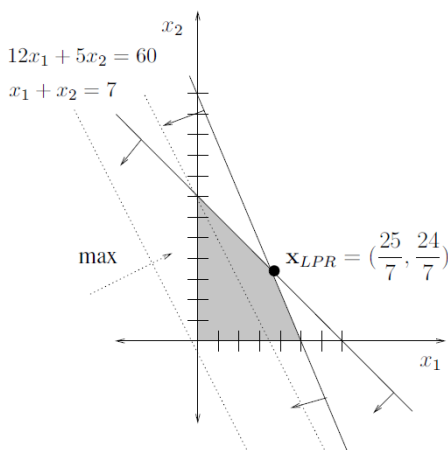
No entanto, fica claro que esse método de obtenção da solução ótima não é eficiente para problemas com um grande número de variáveis, uma vez que o número de pontos viáveis torna-se extremamente grande.

Assim, podemos constatar, segundo Hillier e Lieberman (2013), que é necessário um esforço maior, inclusive, computacional, para resolver um problema de PI do que resolver um problema de PL obtido ao ignorar todas as restrições de variáveis inteiras, mesmo que o número de soluções viáveis para o problema PI seja menor.

Outra abordagem para resolver um problema de PI parte do pressuposto de ignorar as restrições de números inteiros, resolver o problema de PL aplicando o método Simplex e, dessa forma, redirecionar os valores de não inteiros para números inteiros. O problema de PL obtido, ao ignorar as restrições inteiras, denomina-se de relaxamento PL, ou seja, relaxação linear do problema de PI, denotado, comumente, pela sigla LPR.

Assim, se voltarmos ao exemplo genérico apresentado na Figura 4.2, podemos ver, na Figura 4.3, a solução gráfica do relaxamento PL do problema de PI dado.

Figura 4.3 | Relaxamento PL do problema de PI em estudo



Fonte: <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

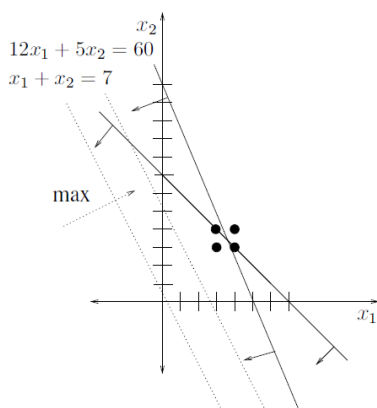
De acordo com a Figura 4.3, temos que a solução ideal para o

$$x_{LPR} = \left(\frac{25}{7}; \frac{24}{7}\right) = (3,571; 3,428)$$

relaxamento PL é, de modo que o valor ótimo da função objetivo é $Z = 440$. No entanto, claramente percebemos que essa não é uma solução ideal para o problema PI, porque não é viável, ou seja, não satisfaz as restrições inteiras.

Arredondando cada variável para o valor inteiro mais próximo, obtemos os seguintes quatro pontos (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), conforme Figura 4.4. Ao calcular o valor Z da função objetivo para cada uma dessas soluções, concluímos que o ponto (4, 4) confere um valor máximo para Z. Contudo, essa solução não é viável porque não está contida no conjunto de soluções do problema de PI.

Figura 4.4 | Representação gráfica dos quatro potenciais pontos de solução para o problema de PI em estudo



Fonte: <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Logo, percebe-se que o método não é apropriado para resolver problemas de PI, porque não há garantia de que a solução arredondada seja otimizada, ou mesmo viável, para o problema de PI. Além disso, para problemas de PI com um grande número de variáveis inteiras, as dificuldades aumentam. Devido a isso, uma técnica muito popular empregada para resolver problemas de PI chama-se método *branch and bound* (ramifica e limita).

A essência deste método parte da resolução do relaxamento PL correspondente ao problema de PI. Dessa forma, caso a solução

ideal não satisfaça as restrições de variáveis inteiras, dois problemas de PL adicionais são criados, subdividindo o conjunto de soluções do relaxamento PL. Esse particionamento é feito de tal forma que um subconjunto de soluções não inteiras que contém a solução ideal para o relaxamento PL é excluído do conjunto de soluções e origina o conceito de ramificação no algoritmo *branch and bound*.

Neste momento, faz-se válido aplicarmos o método *branch and bound* ao problema de PI que estamos tratando. Logo, uma sequência de problemas de relaxamento PL é usada para resolver o problema de PI, de modo que sua solução gráfica representa os conjuntos de soluções de forma muito apropriada (ORLIN, 2017). Assim, consideraremos problema de PI e seu relaxamento PL, conforme a seguir.

PROBLEMA PI

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

e

x_1, x_2 são inteiras

RELAXAMENTO PL: LPR

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

Conforme já vimos, pela solução gráfica, sabemos que a solução ideal para o relaxamento PL é $x_{LPR} = (3,571; 3,428)$, sendo $Z = 440$. Contudo, essa solução não confere valores inteiros às variáveis. Assim, veremos que a solução ideal para o problema PI pode ser obtida por meio da solução de uma sequência de problemas de relaxamento PL. Para isso, iniciamos o processo de ramificação dividindo o conjunto de soluções do relaxamento PL em dois e excluindo um subconjunto de soluções não inteiras que contém x_{LPR} .

Desta forma, selecionamos, inicialmente, uma variável definida inteira que assume um valor fracionário na solução ideal para o relaxamento PL. Perceba que no nosso exemplo em estudo, tanto x_1 quanto x_2 podem ser selecionados, pois ambos são frações. Selecionando x_1 arbitrariamente, com um valor ótimo igual a 3,571, podemos excluir a região $3 < x_1 < 4$ da região viável do relaxamento

PL, uma vez que não contém valores inteiros para x_1 . Assim, observe que cada ponto na região viável do problema de PL deve ter $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$.

Portanto, dividimos a região viável do relaxamento PL por ramificação em x_1 e criamos os seguintes problemas adicionais de PL adicionais:

PROBLEMA PL2

$\max Z = 80x_1 + 45x_2$

Sujeito às restrições:

$x_1 + x_2 \leq 7$

$12x_1 + 5x_2 \leq 60$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ (não-negatividade)

PROBLEMA PL3

$\max Z = 80x_1 + 45x_2$

Sujeito às restrições:

$x_1 + x_2 \leq 7$

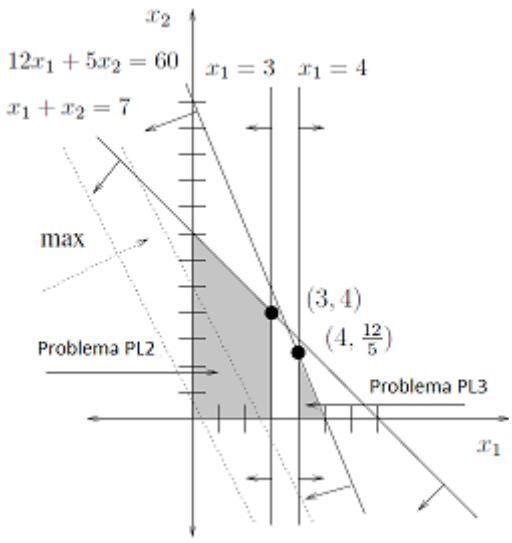
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$

$x_1 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ (não-negatividade)

A solução gráfica dos dois problemas PL2 e PL3 consta na Figura 4.5, sendo que as duas áreas sombreadas correspondem às regiões viáveis. Observe que a região $3 < x_1 < 4$ da região viável de relaxamento PL foi excluída.

Figura 4.5 | Soluções viáveis dos problemas PL 2 e PL3



Fonte: <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2017.

Logo, as soluções ideais são: problema PL2 apresenta solução ótima $\mathbf{x} = (3, 4)$, sendo $Z = 420$; problema PL3 apresenta solução ótima $\mathbf{x} = (4, \frac{12}{5})$, sendo $Z = 428$.

Perceba que a solução ideal, para o problema PL2, satisfaz os requisitos inteiros para x_1 e x_2 . Dessa forma, podemos dizer que nenhuma ramificação adicional é necessária para PL2, de modo que a solução ideal para PL2 pode ser considerada uma solução candidata para o problema de PI, se não for encontrada uma solução melhor viável, isto é, uma solução inteira que confira um valor maior que 420 para Z (uma vez que a função objetivo é maximizar).

Examinando o problema PL3, percebemos que a solução não é viável, pois é fracionária. Logo, o valor fracionário de x_2 origina dois ramos $x_2 \leq 2$ e $x_2 \geq 3$ e, dessa maneira, dois novos problemas PL4 e PL5; lembrando que $2 < x_2 < 3$ é excluída da região viável do problema PL3.

PROBLEMA PL4

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

PROBLEMA PL5

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

Resolvendo graficamente o PL5, percebemos que se trata de uma solução inviável, não sendo necessária nenhuma ramificação adicional. Já o PL4 resulta em uma solução não inteira, com $\mathbf{x} = (\frac{25}{6}; 2) = (4, 166; 2)$, sendo $Z = 423,33$. Dado Z ser maior que 420, continuaremos a ramificação, de modo que o valor não inteiro de x_1 conduz aos dois ramos $x_1 \leq 4$ e $x_1 \geq 5$, originando os problemas PL6 e PL7 a seguir.

PROBLEMA PL6

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

PROBLEMA PL7

$$\max Z = 80x_1 + 45x_2$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

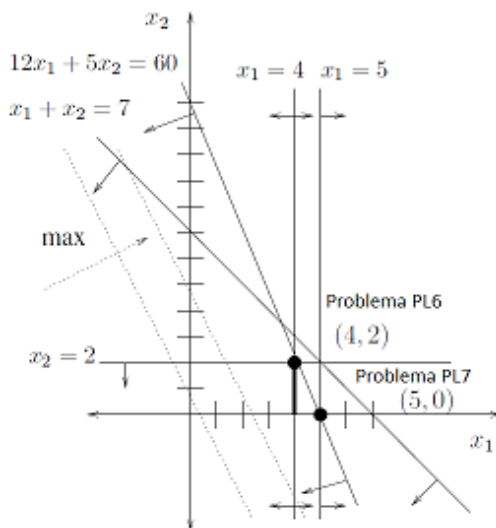
$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade)}$$

De acordo com a Figura 4.6, a região viável do problema PL6 é um segmento de reta e sua solução ideal é $\mathbf{x} = (4;2)$ com $\mathbf{Z} = 410$. Dado que o Z obtido para o PL6 é menor que o Z obtido para o PL2, ou seja, é menor que 420, podemos, dessa forma, desconsiderar a solução dada pelo PL6. Já a região viável do problema PL7 contém a solução ótima $\mathbf{x} = (5;0)$, com $\mathbf{Z} = 400$. Novamente, como o valor obtido para Z no PL7 não é maior que o valor obtido no PL2, o problema PL7 pode ser descartado.

Figura 4.6 | Região viável e solução ótima para os problemas PL6 e PL7



Fonte: adaptada de <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Neste momento, nenhuma outra ramificação é necessária e a solução ideal para o problema de PI é a solução candidata obtida para PL2. Logo, temos que a solução ótima do problema de PI proposto é $\mathbf{x} = (3,4)$, sendo $\mathbf{Z} = 420$.

Mesmo que seja necessário um alto esforço computacional para encontrar a solução ótima para um problema de PI por meio da aplicação do método *branch and bound*, de fato, trata-se do algoritmo mais popular usado para resolver problemas de PI mistos e puros (ORLIN, 2017).



Pesquise mais

Caro aluno, a programação inteira é muito inutilizada no mercado financeiro, especificamente em análise de investimentos para a tomada de decisão. Nesse contexto, leia o artigo que aplica os conceitos de programação linear inteira mista para análise de investimentos na indústria petrolífera.

FIORENCIO, L. et al. Análise de investimentos na cadeia de suprimentos downstream da indústria petrolífera: proposta de um modelo de programação linear inteira mista. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 4, 2012, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <<http://www.labnexo.com/pt/question/analise-de-investimentos-na-cadeia-de-suprimentos-downstream-da-industria-petrolifera-proposta-de-um-modelo-de-programacao-linear-inteira-mista>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Sem medo de errar

Caro aluno, retomaremos o caso em que você é o gerente administrativo e está avaliando se os conceitos de programação inteira podem ser aplicados para otimizar o lucro obtido por meio da implantação de uma nova bomba de combustível.

Para refletir sobre esse assunto e fazer uma apresentação ao dono do posto de combustível, você deve, primeiramente, expor o que representa a programação inteira.

Assim, comece explicando que a programação inteira (PI) trata da resolução de modelos lineares em que algumas ou todas as variáveis de decisão são restritas para serem inteiras. Dessa forma, o modelo de programação linear é um modelo matemático para a

programação inteira, o qual adiciona que as variáveis devem apresentar valores inteiros.

Para facilitar a compreensão do dono do posto, explique que, de acordo com a natureza das variáveis de decisão, podemos identificar três tipos de modelos de programação inteira:

1. Na programação inteira mista, apenas algumas das variáveis são restritas a valores inteiros.
2. Na programação inteira pura, todas as variáveis de decisão devem ser inteiras.
3. Na programação inteira binária, todas as variáveis de decisão são binárias (restrita aos valores 0 ou 1).

Agora, trazendo esses conceitos para o caso do posto de combustível, temos como função objetivo a maximização do lucro, certo?

Para tanto, as variáveis de decisão referem-se à quantidade de bombas de combustível que serão adicionadas ao posto, visando aumentar o lucro.

Perceba que uma das restrições das variáveis de decisão refere-se à necessidade de ser valor inteiro, uma vez que não há possibilidade de se adicionar 1,67 bom de gasolina. Logo, explique esse ponto para o dono do posto, mostrando que a programação inteira é uma forma de modelar o problema.

Nesse sentido, caso queira ir além, sugira o algoritmo *branch and bound* como o método mais popular, usado para resolver problemas de PI mistos e puros.

Você acrescentaria algo a mais na sua apresentação?

Parabéns, mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Gerente de RH e alocação de pessoas

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o gerente de RH de uma agência de publicidade, de modo que você está analisando a alocação de funcionários de acordo com a demanda na fábrica, por dia de semana.

Assim, o número de funcionários necessários depende do dia da semana, conforme mostrado no quadro a seguir.

Quadro 4.2 | Necessidade de funcionário na agência de acordo com o dia da semana

Dia da semana	Número de funcionários
1. Segunda-feira	15
2. Terça-feira	13
3. Quarta-feira	15
4. Quinta-feira	18
5. Sexta-feira	14
6. Sábado	16
7. Domingo	10

Fonte: adaptado de: <https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/8171/mod_resource/content/1/6_Integer_Slides.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Os funcionários trabalham cinco dias consecutivos e têm os próximos dois dias de folga. Assim, torna-se necessário organizar grupos para trabalhar em turnos diferentes, de modo que o número de colaboradores necessários seja satisfeito todos os dias da semana. O objetivo, com isso, é empregar o número mínimo de trabalhadores. Com base no exposto, qual é o modelo matemático que descreve o problema em estudo?

Resolução da situação-problema

Como o objetivo é empregar o número mínimo de trabalhadores, definimos as seguintes variáveis de decisão:

x_j : número de funcionários cujo turno de trabalho começa no dia j , $j = 1, 2, \dots, 7$.

Podemos garantir que o número de funcionários necessários todos os dias da semana seja satisfeito por meio da introdução de uma restrição no modelo. Cada uma das restrições exige ter o número necessário de colaboradores por dia.

Logo, temos, a seguir, o modelo matemático que descreve o problema em questão. Perceba que se trata de um problema de programação inteira pura, no qual todas as variáveis de decisão devem ser inteiras.

Função objetivo:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Sujeito às restrições:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 13$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 18$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

e

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ são inteiras

Faça valer a pena

1. Quanto à programação inteira, as variáveis de decisão não necessariamente devem ser todas inteiras, de modo que se algumas forem restritas a valores inteiros, teremos, dessa forma, um problema de programação inteira. Assim, pode-se identificar três tipos de modelos de programação inteira de acordo com as variáveis de decisão:

- I. Programação inteira binária.
- II. Programação inteira mista.
- III. Programação inteira pura.
 1. Nesse tipo de programação, apenas algumas das variáveis são restritas a valores inteiros.
 2. Nesse tipo de programação, todas as variáveis de decisão devem ser inteiras.
 3. Nesse tipo de programação, todas as variáveis de decisão são restritas aos valores 0 ou 1.

Assinale a alternativa que associa corretamente o tipo de programação com sua especificação.

- a) 1-III; 2-I; 3-II.
- b) 1-I; 2-III; 3-II.
- c) 1-III; 2-II; 3-I.
- d) 1-II; 2-III; 3-I.
- e) 1-II; 2-I; 3-III.

2. Uma abordagem empregada para resolver um problema de programação inteira parte do pressuposto de ignorar as restrições de números inteiros, resolver o problema de programação linear, aplicando o método Simplex, e redirecionar os valores de não inteiros para números inteiros.

Com base no texto anterior, assinale o nome do problema de programação linear obtido, ao ignorar as restrições inteiras do problema de programação inteira.

- a) Região convexa.
- b) Relaxamento PL.
- c) Diversificação.
- d) Ramificação.
- e) Pós-otimalidade.

3. Sobre o algoritmo *branch and bound*, analise as afirmações I, II e III.

- I. Considere um problema PL que corresponde a um problema PI, mas ignora as restrições inteiras. Caso a solução ótima do problema PL não satisfaça as restrições inteiras, esta será considerada uma solução candidata para o problema de PI.
- II. Caso a solução ideal do problema PL não satisfaça as restrições de variáveis inteiras, será criado um problema de PL adicional.
- III. Esse particionamento é feito de tal forma que um subconjunto de soluções não inteiras, que contém a solução ideal do problema PL, é excluído do conjunto de soluções, originando o conceito de ramificação no algoritmo *branch and bound*.

Assinale a alternativa correta.

- a) I, II e III estão corretas.
- b) I e II estão corretas.
- c) Somente a III está correta.
- d) Somente a II está correta.
- e) I e III estão corretas.

Seção 4.2

Cadeia de Markov - simulação em PO

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da Pesquisa Operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre a importância da simulação nesta área.

Ao pensarmos em simulação, faz-se necessário estudarmos os fundamentos de processos markovianos, incluindo cadeia de Markov discreta no tempo e cadeia de Markov contínua no tempo, bem como a aplicação desses conceitos.

As cadeias de Markov estão sendo aplicadas nas mais diversas áreas, abrangendo processos de migração populacional, modelos epidêmicos, gerenciamento de recursos, processos de tomada de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros. Assim, perceba a relevância destes conteúdos para sua vida profissional.

Logo, a fim de refletir e aplicar essas informações, considere um posto de combustível que conta, atualmente, com três bombas: uma de diesel, uma de gasolina e a outra de álcool.

Você é o gerente administrativo e está avaliando a expansão no número de bombas para melhor atender os consumidores, uma vez que, em alguns horários do dia, a demanda apresenta picos que geram filas, fazendo que possíveis clientes migrem para outros postos concorrentes. Como o orçamento para expansão apresenta restrições, suas primeiras dúvidas são decidir entre qual dos três tipos de bomba adicionar e em qual quantidade.

Inicialmente, você constatou ser possível aplicar os conceitos de programação inteira para otimizar o lucro obtido do posto de combustível.

Na fase de coleta de dados para a modelagem, você percebeu que, no final de uma semana comercial, o preço de determinado combustível é aferido, podendo ocorrer três situações, que têm como base o período anterior: o preço pode se manter constante, aumentar ou diminuir. Para cada situação, existe uma probabilidade

de ocorrência, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer prejuízos para a expansão proposta.

Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter condições de passar para o dono do posto uma probabilidade de lucro? Atualmente, o preço do combustível fechou em queda; logo, qual é a probabilidade de o preço do combustível valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o dono do posto de combustível solicitou uma apresentação com esse escopo.

Avance na construção do seu conhecimento nesta disciplina.

Bons estudos!

Não pode faltar

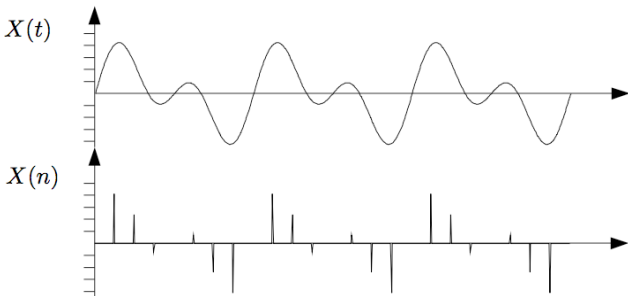
Caro aluno, para começarmos o nosso estudo de processos markovianos, necessitamos, inicialmente, entender a respeito de processos estocásticos. Começaremos, dessa forma, com um conceito fundamental em processos estocásticos e que nos ajudará nas definições futuras: **incerteza**. Você já deve ter se perguntado qual é a chance de um evento dar certo? Será que amanhã vai chover? Será que vou ganhar na loteria? Esses são exemplos de perguntas que levam em conta a incerteza em relação a vários eventos futuros, ou seja, situações que podem ocorrer ou não, dados os diversos fatores que podem interferir nos acontecimentos.

Segundo Hillier e Lieberman (2013), um processo estocástico pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias (variável que apresenta um comportamento aleatório) ordenadas X_t , sendo que t é o índice que representa a variação do tempo, que pertence a um conjunto $T \{X_t : t \in T\}$.

Assim, classificar os processos estocásticos em função do tempo t significa diferenciar processo estocástico de tempo discreto e de tempo contínuo. Se o tempo for discreto, dizemos que temos um processo estocástico de tempo discreto, ou seja, X_t é definido apenas para um dado conjunto de instantes de tempo, sendo valores naturais (inteiros não negativos). Portanto, t , nesse caso, é finito ou infinito enumerável. Dizemos que um conjunto é infinito enumerá-

vel quando existe uma bijeção, de modo que $f:N \rightarrow X$, sendo que N é o conjunto dos naturais. Se o tempo for contínuo, teremos um processo estocástico de tempo contínuo. Nesse caso, a condição anterior não é satisfeita e o tempo pode assumir um valor fracionado. Pela Figura 4.7, é possível visualizar duas curvas, sendo $X(t)$ uma função de tempo contínuo, enquanto $X(n)$ representa uma função de tempo discreto.

Figura 4.7 | Processo estocástico de tempo contínuo e discreto



Fonte: adaptado de: <<https://www.linux.ime.usp.br/~dani loss/antes-2012/Apostila%20TP501%20-%20Ynoguti,%202011.pdf>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Agora que já sabemos a distinção entre o tempo discreto e contínuo e, lembrando a definição de um processo estocástico, analisaremos o conceito de espaço de estados.

Os estados são os valores que X_t pode assumir, de modo que o conjunto de todos os valores possíveis de X_t é chamado de espaço de estados. O espaço de parâmetros é composto pelo nosso conjunto T , sabendo que t é o índice que representa a variação do tempo e que $\{X_t, t \in T\}$. O espaço de estados e o espaço de parâmetros podem ser compostos por variáveis contínuas e discretas, fazendo que tenhamos quatro tipos de processos estocásticos entre estado contínuo/discreto e tempo contínuo/discreto.

Pensando em estados, consideraremos o processo de inspeção de qualidade em uma linha de produção; sabemos, nessa área, que os produtos fabricados podem ser considerados conforme ou não conforme, de modo que definimos os possíveis estados para os resultados da inspeção. Logo, poderíamos dizer que no estado não conforme $X_t = 0$, mas perceba que X_t poderia assumir qualquer valor, pois este valor não tem correlação numérica com o produto

real. Da mesma forma, poderíamos considerar que $X_t = 1$ para um produto conforme. Nesse mesmo exemplo, o espaço de estados, representado por E , seria $E = \{0,1\}$, de modo que adotamos uma representação para produtos com conforme e não conforme.



Refleta

Caro aluno, agora que vimos os fundamentos básicos sobre processos estocásticos, qual é a relação entre processo estocástico e processo markoviano?

Os processos de Markov são uma classe especial de processos estocásticos. Portanto, um processo estocástico será dito um processo de Markov quando o estado futuro do sistema depender apenas do estado atual (ou presente), e não dos estados anteriores, ou seja, diremos que não existe memória nos processos de Markov, uma vez que o passado é desprezado. A definição de processo sem memória pode ser utilizada, por exemplo, se pensarmos em uma política de gestão de estoque na qual a quantidade de produtos dependa somente da quantidade anterior do produto e do que foi adquirido ou vendido em um determinado intervalo de tempo de reposição do produto.

O processo markoviano, por sua vez, é dito uma cadeia de Markov quando o estado é discreto, ou seja, quando as variáveis aleatórias X_t estão definidas em um espaço de estados discreto E (KARLIN; TAYLOR, 1998).

Definimos uma cadeia de Markov em tempo discreto como tratando-se de um processo de Markov no qual o espaço de estados refere-se a um determinado conjunto finito ou contável e cujo índice temporal do conjunto pode ser designado por $T = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, as transições ocorrem em períodos de tempo. Já as cadeias de Markov em tempo contínuo podem ser descritas de modo semelhante às aquelas em tempo discreto, divergindo no fato de que as transições podem ocorrer em qualquer instante de tempo (KARLIN; TAYLOR, 1998).

Quando pensamos em processos markovianos, um ponto importante refere-se à probabilidade inerente à transição de estados, que chamamos de probabilidade de transição. De acordo com Rocha (2006), uma probabilidade de transição é aquela associada à mudança de estado de um processo, por exemplo, um processo está no estado

i e migrará para o estado j após um determinado tempo t . Vale ressaltar que as probabilidades de transição, ditas estacionárias, implicam que as probabilidades de transição não mudem ao longo do tempo, sendo estas inicialmente consideradas nos processos de Markov.

No âmbito da cadeia de Markov contínua no tempo, destaca-se o processo de nascimento e morte, no qual as transições somente são possíveis para os chamados estados vizinhos. Se considerarmos um estado genérico i , o nascimento será a transição para o próximo estado, ou seja, $i + 1$. Já a transição do estado i para um estado anterior, ou seja, $i - 1$, será chamada de morte.

Imagine um sistema bancário, no qual temos a chegada e a saída de clientes que fazem movimentações financeiras na instituição. Se o banco apresenta um estado i , que caracteriza o número de clientes na fila do caixa, o que você entende que seria um processo de nascimento e um processo de morte? Nesse exemplo, o processo de nascimento seria a transição para um estado vizinho $i + 1$, que poderia ser a representação da chegada de um cliente na fila do caixa para atendimento; isso traria um aumento no nível da população, ou seja, o sistema não estaria mais no estado i . Analogamente ao processo de nascimento, a saída de um cliente representaria a transição do estado i para o estado $i - 1$ e teríamos um decréscimo no nível da população.

A Figura 4.8 indica um processo de nascimento e de morte, por meio das transições e suas respectivas probabilidades de transições, representadas por α . É possível perceber, por meio da figura, que as transições de estados $X = \{0,1,\dots\}$ somente podem ocorrer para os estados vizinhos. Por exemplo, no caso do estado $X = 0$, só é possível ir para o estado $X = 1$.

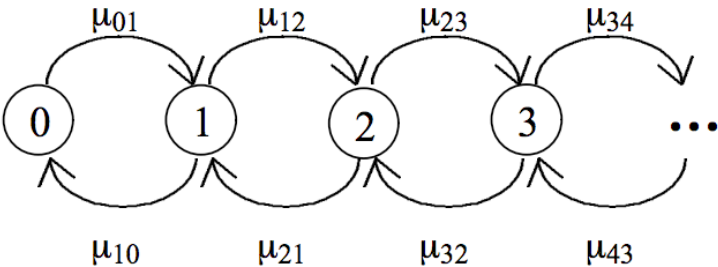


Figura 4.8 | Processos de nascimento e de morte

Fonte: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Agora que já sabemos o que é um processo de nascimento e de morte, veremos as chamadas equações de balanço. A partir do diagrama observado na Figura 4.8, dado que as transições só podem ocorrer para os estados vizinhos, temos que:

Probabilidade do estado 0: π_0

Probabilidade no estado 1: π_1

Probabilidade no estado n: π_n

Portanto, o vetor de probabilidade de estado será:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{bmatrix}$$

Também teremos as probabilidades de transição, que podem ser representadas na matriz de transição:

Probabilidade de transição do estado 0 para o estado 1: μ_{01}

Probabilidade de transição do estado 1 para o estado 0: μ_{10}

As equações de balanço ficarão:

Para o estado 0: $\pi_0 \mu_{01} = \pi_1 \mu_{10}$, ou seja, a probabilidade π_1 pode ser expressa em função da probabilidade π_0 e das probabilidades de transição, ficando: $\pi_1 = \frac{\pi_0 \mu_{01}}{\mu_{10}}$.

Para o estado 1: $\pi_1(\mu_{10} + \mu_{12}) = \pi_0 \mu_{01} + \pi_2 \mu_{21}$, ou seja,

$$\pi_2 = \frac{\pi_1(\mu_{10} + \mu_{12}) - \pi_0 \mu_{01}}{\mu_{21}}.$$

Portanto, poderíamos definir π_2 em função de π_0 , substituindo

$$\pi_1 = \frac{\pi_0 \mu_{01}}{\mu_{10}}. \text{ Nesse caso, } \pi_2 = \left(\frac{\mu_{12} \mu_{01}}{\mu_{21} \mu_{10}} \right) \pi_0.$$

Embora a Figura 4.8 ilustre um processo de nascimento e morte que, na verdade, é uma cadeia de Markov contínua no tempo, o conceito de probabilidade de transição estende-se para os processos markovianos de forma geral, conforme podemos perceber no exemplo apresentado no box Exemplificando.



Suponha que você seja um consultor financeiro e que, ao fazer a análise de gastos de seu cliente, em 2017, constatou que o uso dos seus recursos financeiros estão alocados da seguinte forma:

- 30% para moradia (aluguel ou financiamento imobiliário).
- 50% para demais despesas (água, luz, telefone, impostos, transporte, vestuário, alimentação e saúde).
- 20% para os demais itens pessoais e lazer.

Como consultor financeiro, você pode aplicar conhecimentos de transição de estados para modelar a situação do seu cliente. Assim, cada um dos usos apontados anteriormente representará um estado do seu sistema, de modo que o uso com moradia seja o estado 1, o com as demais despesas, o estado 2, e os itens pessoais e lazer sejam o estado 3 do sistema, com suas respectivas probabilidades. Portanto, você terá um vetor, chamado de vetor de probabilidade de estado, que é composto pelas probabilidades de cada estado (são probabilidades não condicio-

nais). Nesse caso, o vetor ficaria: $\pi_{2017} = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,50 & 0,20 \end{bmatrix}$

Ao longo dos próximos anos, a tendência é que a distribuição de renda apresentada anteriormente sofra alterações. Fazendo um planejamento estratégico com seu cliente, consideraremos que, para cada cinco anos, as probabilidades de transição dos estados sejam conforme as apresentadas no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Probabilidades de transição

Estados	Para 1	Para 2	Para 3
De 1	60%	20%	20%
De 2	10%	70%	20%
De 3	0%	20%	80%

Fonte: elaborada pela autora.

Dessa forma, analisando o Quadro 4.3, podemos dizer que a probabilidade do sistema, que, nesse caso, é a distribuição de renda, de 1 para 1 significa que a probabilidade de o estado ser 1 após 5 anos, sendo o estado atual 1, é de 60%. Já a probabilidade de o estado do sistema ser 2 passados 5 anos, sendo que o estado atual é 1, é de 20%; e assim em todos os demais elementos do Quadro 4.3.

Podemos definir uma matriz, chamada de transição, como uma matriz quadrada na qual cada elemento representa a probabilidade de transição de estado. Nesse caso, a matriz de transição será:

$$P = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,20 & 0,20 \\ 0,10 & 0,70 & 0,20 \\ 0,00 & 0,20 & 0,80 \end{bmatrix}$$

Se quisermos calcular o vetor de probabilidade de estado para 2022, por exemplo, teremos de multiplicar $\pi \times P$, ou seja, a probabilidade do nosso sistema estar em cada estado neste ano. Trata-se de um produto entre as matrizes, cujo resultado seria:

$$\pi_{2017} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,45 & 0,32 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{2022} = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,45 & 0,32 \end{bmatrix}$$

Assim, você concluiu, com seu cliente, que daqui 5 anos os gastos dele serão: 23% para moradia; 45% para demais despesas; 32% para os demais itens pessoais e lazer. Verificamos, nesse exemplo, que o estado futuro somente depende do estado presente, e não dos estados passados, o que configura um processo markoviano, como vimos na definição inicial.

Em alguns casos de simulação, não necessariamente trabalhamos com matriz de transição de somente uma etapa, de modo que podemos utilizar matriz de transição em n-etapas. De fato, o estudo do comportamento da cadeia de Markov, quando o número de passos tende ao infinito, é uma das temáticas mais importantes nos estudos em simulação (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Assim, suponha, por exemplo, que você seja um gestor de recursos humanos, que precisa estudar a probabilidade de ascensão profissional das pessoas em função das oscilações no mercado de trabalho. Nesse sentido, você considerou a existência de 2 estados (estado 0 – função técnica; estado 1 – função gerencial), bem como obteve a matriz P de transição de estados de acordo com as oscilações de mercado. Assim, qual é a chance de o sétimo emprego de um funcionário ser de função gerencial, tal que, na sua quarta posição de mercado, que é o estado atual, ele tenha função técnica?

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

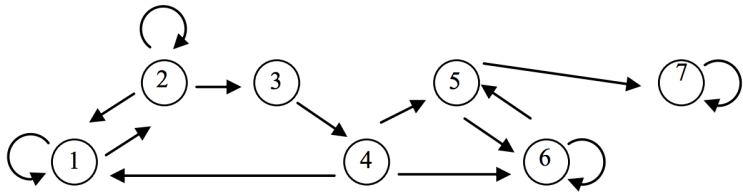
Para isso, utilizaremos o conceito de probabilidade de transição de ordem superior, ou de matriz de transição de ordem superior. Pela matriz P , observamos que a probabilidade do funcionário de cargo técnico (estado 0) permanecer nesse estado é de 0,5 ou 50%. Enquanto a probabilidade do funcionário de cargo técnico (estado 0) passar para o cargo gerencial é de 0,5 ou 50%. Já para o funcionário de cargo gerencial (estado 1), a probabilidade de ele se manter no cargo é 0,7 ou 70%, enquanto a probabilidade do funcionário de cargo gerencial (estado 0) voltar para o cargo técnico é de 0,3 ou 30%. Mas, neste momento, você pretende encontrar a probabilidade de o funcionário técnico (estado 0) passar para uma função gerencial (estado 1) em três passos, isto é, do seu quarto emprego para seu sétimo emprego. Logo, obteremos a matriz de transição de ordem superior, ao elevarmos a matriz de transição P ao cubo:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,62 \\ 0,372 & 0,628 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de o funcionário, em seu sétimo emprego, ter a função gerencial (estado 1), tal que em seu quarto emprego ele tenha a função técnica (estado 0), é de 0,63 ou 63%.

Por fim, vale a pena estudarmos a classificação de estados de uma cadeia de Markov. Em primeiro lugar, dizemos que dois estados são comunicantes quando temos a seguinte condição: o estado j é atingível a partir de i , e i também deve ser atingível a partir do estado j (KARLIN; TAYLOR, 1998). A partir dessa classificação inicial, podemos dizer que a cadeia de Markov será irreduzível se, e somente se, todos os estados que formam a cadeia forem comunicantes. Caso isso não possa ser garantido, dizemos que a cadeia de Markov será redutível. De acordo com a definição de cadeia de Markov irreduzível, podemos dizer que o diagrama da Figura 4.9 representa uma cadeia redutível, dado que nem todos os estados são comunicantes como, por exemplo, o estado 7.

Figura 4.9 | Exemplo de diagrama de estado



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1L_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.661335001390983227.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Vale dizer que a classificação de estados também pode ser definida como transiente ou recorrente. Nós dizemos que um estado será transiente sempre que existir um estado j que possa ser atingido a partir de i , mas o oposto não é obrigatoriamente válido, ou seja, i ser atingível por j (KALIN; TAYLOR, 1998). Portanto, podemos dizer que após entrar no estado transiente, temos a probabilidade de que o processo nunca mais retorne a esse estado outra vez. Diferentemente do estado transiente, nesse caso, sempre será possível regressar ao estado i a partir de j . Em outras palavras, quando o sistema entra no estado recorrente, ele, com certeza, retornará a esse estado novamente (ALVES; DELGADO, 1997).

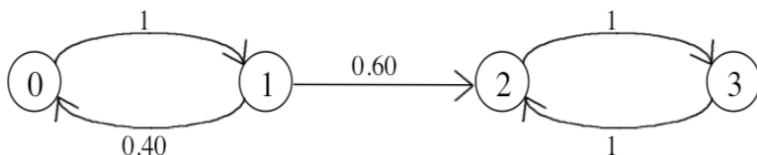


Assimile

Caro aluno, pela Figura 4.10, os estados 0 e 1 são ditos transientes, pois uma vez que o sistema visita o estado 0, existe uma probabilidade real (que, nesse caso, é 1, ou 100%) de se deslocar para o estado 1, mas dificilmente retornará para o estado 0 (probabilidade de 0, 4 ou 40%); portanto, o estado 0 será visitado finitas vezes.

Já os estados 2 e 3 são ditos recorrentes, pois uma vez que o sistema visita o estado 2, existe uma probabilidade real (que, nesse caso, é 1 ou 100%) de se deslocar para o estado 3 e retornar para o estado 2 (probabilidade 1 ou 100%); portanto, o estado 2 será visitado infinitas vezes.

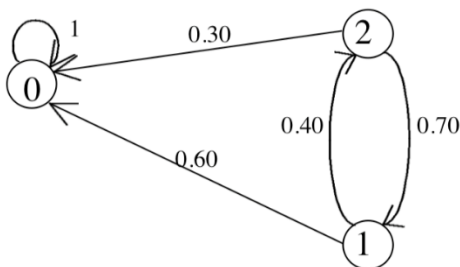
Figura 4.10 | Diagrama de estado transiente e recorrente



Fonte: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Temos uma outra possibilidade de estado, isto é, o absorvente, que se trata de um estado que, ao ser visitado, fará com que o sistema jamais deixe esse estado novamente (ALVES; DELGADO, 1997). A Figura 4.11 apresenta um exemplo de estado absorvente.

Figura 4.11 | Diagrama de estado absorvente



Fonte: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Observamos, na Figura 4.11, que o estado 0 apresenta probabilidade de 1 (ou 100%) de que, ao ser visitado, nunca mais sairá desse estado. Como o estado 0 trata-se de um estado que, ao ser visitado, fará que o sistema jamais o deixe novamente, trata-se de um estado absorvente (ALVES; DELGADO, 1997). Nas cadeias de Markov que têm estados absorventes, denominadas cadeias de Markov absorventes, qualquer estado que esteja ligado ao estado absorvente é um estado transiente. No caso da Figura 4.11, os estados 1 e 2 são transientes.



Pesquise mais

Você sabia que existem diversas aplicações possíveis para modelagem utilizando cadeias de Markov? Você está vendo alguns exemplos no nosso material, mas vamos expandir um pouco as possibilidades de aplicações em áreas que não sejam a Engenharia, mas que também envolvem a tomada de decisões? Uma sugestão de leitura é o artigo *Modelos de Markov aplicados a saúde*, de Renato Cesar Sato e Désirée Moraes Zouain, que apresenta um exemplo de aplicação na área de saúde, mais precisamente na avaliação do estado dos pacientes.

SATO, R. C.; ZOUAIN, D. M. Modelos de Markov aplicados a saúde. **Einstein**, v. 8, n. 1, p. 376-379, 2010. Disponível em: <http://apps.einstein.br/revista/arquivos/PDF/1567-Einsteinv8n3_pg376-9.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Sem medo de errar

Caro aluno, recordaremos que, na fase de coleta de dados para a modelagem no posto de combustível, você percebeu que, no final

de uma semana comercial, o preço de determinado combustível é aferido, podendo ocorrer três situações, que têm como base o período anterior: o preço pode se manter constante, aumentar ou diminuir. Para cada situação, existe uma probabilidade de ocorrência, de modo que uma análise de risco equivocada poderá trazer prejuízos para a expansão proposta. Quais informações você precisaria coletar e analisar para ter condições de passar para o dono do posto uma probabilidade de lucro? Atualmente, o preço do combustível fechou em queda; logo, qual é a probabilidade de o preço do combustível valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro?

Utilizando o conceito de transição de estados e de probabilidade de transição de estados, é possível fazer a avaliação proposta anteriormente.

- Matriz de transição de ordem superior

O primeiro passo é definir os estados:

Estado 0: preço do combustível desvalorizado.

Estado 1: preço do combustível valorizado.

Portanto, podemos ter quatro hipóteses de transição, a saber:

P_{00} é a probabilidade de o preço do combustível estar no estado 0 e continuar no estado 0.

P_{01} é a probabilidade de o preço do combustível estar no estado 0 e ir para o estado 1.

P_{10} é a probabilidade de o preço do combustível estar no estado 1 e ir para o estado 0.

P_{11} é a probabilidade de o preço do combustível estar no estado 1 e continuar no estado 1.

A matriz de transição para cada dia futuro é a matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

Por meio da matriz de transição P , é possível, utilizando o conceito de matriz de transição de ordem superior, calcular a probabilidade de o preço do combustível valorizar no próximo dia e se estabilizar no futuro.

A probabilidade de o preço do combustível valorizar no próximo dia será P_{01} , mas a probabilidade de este se estabilizar no futuro só

ocorrerá se ele mantiver constante sua valorização; portanto, o preço do combustível valoriza no próximo dia (estado 1) e continua se valorizando nos demais.

Para cada dia futuro, multiplica-se a matriz P por ela mesma para descobrir a probabilidade futura. No entanto, em alguns casos, isso faz que após certa ordem as probabilidades se aproximem.

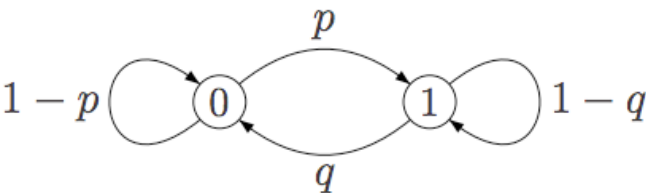
A nossa matriz, deste modo, ficaria:

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Assim, temos a matriz P^n , de modo que n é o número de dias a partir do dia atual, definindo a matriz de transição de ordem n .

Logo, conseguimos obter a probabilidade de o preço do combustível se estabilizar no futuro, ou seja, valorizar-se no próximo dia (estado 1) e continuar se valorizando nos demais, conforme apresentado no diagrama de estados da Figura 4.12.

Figura 4.12 | Diagrama de estados



Fonte: <http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.356332001389470718.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2018.

Parabéns, mais um desafio vencido!

Avançando na prática

Previsão de liderança de mercado de uma empresa.

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja um gestor de marketing e que precisa estudar a probabilidade de liderança de mercado da empresa ABC,

montadora de automóveis, em função das oscilações no mercado automobilístico. Assim, você considerou a existência de 2 estados (estado 0 – não líder; estado 1 – líder), bem como obteve a matriz P de transição de estados de acordo com as oscilações desse mercado.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Qual é a chance de a empresa ABC, em seu vigésimo ano de existência no mercado, ser uma companhia líder, tal que, no seu décimo oitavo ano de mercado, que é o estado atual, ela não seja líder de mercado? Comunique os dados em um relatório para a diretoria.

Resolução da situação-problema

Você quer achar a probabilidade de a empresa não líder (estado 0) passar para empresa líder (estado 1), no mercado automobilístico, em dois passos, isto é, do seu décimo oitavo ano para seu vigésimo ano de mercado.

Para isso, utilizaremos o conceito de probabilidade de transição de ordem superior, ou de matriz de transição de ordem superior. Além disso, obteremos a matriz de transição de ordem superior ao elevarmos a matriz de transição P ao quadrado

Logo, acharemos primeiro P^2 .

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,36 & 0,64 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de a empresa não líder (estado 0) passar para empresa líder (estado 1), no mercado automobilístico, em dois passos, é de 0,6 ou 60%.

Parabéns, dessa forma, você conseguiu construir com sucesso o relatório para a diretoria.

Faça valer a pena

1. Em uma cadeia de Markov, o caminho percorrido de um dado estado qualquer i para um outro estado j é composto por uma sequência de transições. Não existe um limite de transições que podem ocorrer para o sistema passar do estado i para o estado j , e o caminho também não precisa ser o mais curto, ou seja, ter o menor número de transições entre os dois estados.

Faça a associação entre os tipos de estados (I, II e III) da cadeia de Markov e suas respectivas definições (A, B e C).

- I. Transiente.
- II. Absorvente.
- III. Recorrente.

A - Sempre será possível o sistema regressar ao estado i a partir de j , isto é, quando o sistema entra neste tipo de estado, ele, com certeza, retornará a esse estado novamente.

B - Sempre existe um estado j que possa ser atingido a partir de i , mas o oposto não é obrigatoriamente válido, ou seja, i ser atingível por j .

C - Trata-se de um estado que, ao ser visitado, fará que o sistema jamais o deixe novamente.

Assinale a alternativa que expressa corretamente a associação entre os tipos de estados (I, II e III) da cadeia de Markov e suas respectivas definições (A, B e C).

- a) I-A; II-C; III-B.
- b) I-B; II-C; III-A.
- c) I-C; II-B; III-A
- d) I-B; II-A; III-C.
- e) I-A; II-B; III-C

2. Processo de Markov é um modelo de processo estocástico e, dentre seus tipos, tem-se a cadeia de Markov discreta no tempo e a cadeia de Markov contínua no tempo. A respeito de processos de Markov, avalie as afirmações I, II e III.

- I. O processo de nascimento é um tipo de processo estocástico, sendo um exemplo de cadeia de Markov discreta no tempo.
- II. O processo de morte é um tipo de processo estocástico, sendo um exemplo de cadeia de Markov contínua no tempo.

III. Processo markoviano é dito uma cadeia de Markov quando as variáveis aleatórias $X(t)$ estão definidas em um espaço de estados discreto E.

Assinale a alternativa correta.

- a) I e III estão corretas.
- b) II e III estão corretas.
- c) I, II e III estão corretas.
- d) Somente III está correta.
- e) Somente II está correta.

3. Em uma rede de fast-food, que apresenta três combos distintos (prato principal + sobremesa + bebida) para venda, o gerente do estabelecimento reparou que a cada semana 50% dos clientes continuam comprando o mesmo produto. Em relação aqueles que compravam o combo 1, 20% passaram a comprar o combo 2, e 30%, o combo 3. Em relação aos consumidores que adquiriram o combo 2, 10% passaram a comprar o combo 1 e 40%, o combo 3. Por fim, em relação aos clientes que compravam o combo 3, 30% passaram a comprar o combo 1 e 20%, o combo 2. Podemos notar que é uma cadeia de Markov, pois o estado futuro depende do estado anterior, que o estado é discreto, pois a quantidade de valores é finita, já que vamos observar uma quantidade finita de clientes. Com base na análise dos 50 clientes que comumente compram os combos da rede de fast-food, o gerente viu que, inicialmente, 20 compravam o combo 1, 15 compravam o 2 e 15 adquirem o 3. Veja, a seguir, a matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Considerado a matriz P, qual é a quantidade de clientes que compram o combo 1, o combo 2 e o combo 3, respectivamente, após uma semana?

- a) 34 clientes; 22 clientes; 44 clientes.
- b) 22 clientes; 34 clientes; 44 clientes.
- c) 39 clientes; 32 clientes; 29 clientes.
- d) 30 clientes; 31 clientes; 39 clientes.
- e) 32 clientes; 29 clientes; 39 clientes.

Seção 4.3

Teoria das filas - simulação em PO

Diálogo aberto

Caro aluno, dada a importância da Pesquisa Operacional no processo decisório, continuaremos nosso estudo refletindo sobre a importância da simulação em nesta área.

Ao pensarmos em simulação, faz-se necessário estudarmos os fundamentos da teoria de filas, incluindo os conceitos básicos, as características de uma fila, as medidas de desempenho e as aplicações dos sistemas de filas.

Para compreender um pouco sobre o modelo de filas, pense em clientes, ou usuários, que chegam a um determinado serviço; contudo, formam uma fila em função da indisponibilidade do atendimento naquele momento.

Perceba que filas impactam nos custos, sendo possível vislumbrar a relevância do estudo de teoria de filas e sua aplicação diversa, de modo que os estudos iniciais na área ocorreram no segmento de telefonia.

Para colaborar no seu entendimento, são exploradas aplicações dos modelos de fila em conjunto com a teoria para que você possa se situar e perceber o uso desses conceitos em seu ambiente profissional.

Assim, veja que nos diversos serviços comerciais temos evidências de filas, como em bancos, hospitais, clínicas, transportes, lojas, entre outros.

Logo, a fim de refletir e aplicar esses conceitos, considere um posto de combustível que conta, atualmente, com três bombas: uma de diesel, uma de gasolina e a outra de álcool.

Você é o gerente administrativo e está avaliando a expansão no número de bombas para melhor atender os consumidores, uma vez que, em alguns horários do dia, a demanda apresenta picos que geram filas, fazendo que possíveis clientes migrem para outros postos concorrentes. Como o orçamento para expansão apresenta restrições, suas primeiras dúvidas são decidir entre qual dos três tipos de bomba adicionar e em qual quantidade.

Inicialmente, você constatou ser possível aplicar os conceitos de programação inteira para otimizar o lucro obtido do posto de combustível.

Na fase de coleta de dados para a modelagem, você percebeu a importância da matriz de probabilidade de transição que o permite passar para o dono do posto uma probabilidade de lucro.

Outra questão relevante refere-se à formação de filas nas bombas de combustível; quais são as informações que deveriam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Pense a respeito dessa indagação, uma vez que o dono do posto de combustível solicitou uma apresentação com esse escopo.

Continue avançando na construção do seu conhecimento em Pesquisa Operacional.

Bons estudos!

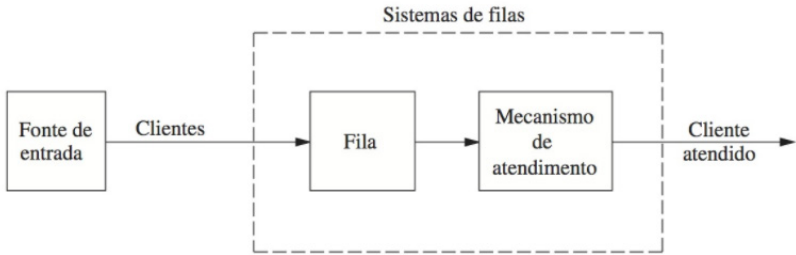
Não pode faltar

Você, muito provavelmente, já se deparou com uma situação que envolvesse uma fila, correto? Seja em uma agência bancária, seja em um parque de diversões, em um posto de combustível, ou até em um mercado. Logo, entende-se que as filas são parte da vida cotidiana e há uma dicotomia quando pensamos nessa temática: fornecer muito serviço (alta capacidade de atendimento) envolve custos excessivos e não fornecer capacidade de serviço suficiente faz que a fila de espera se torne excessivamente longa. O objetivo final é alcançar um equilíbrio econômico entre o custo do serviço e o associado à espera deste.

Para entender melhor o conceito de filas, suponha que você seja o gerente administrativo de uma loja de bairro e que, para poupar custos no negócio, coloque apenas um caixa para pagamento. O que ocorre quando um cliente chega até o caixa para ser atendido, mas já existe outro cliente passando as compras? Nesse momento, uma fila é formada. Dessa forma, o caixa estava ocupado atendendo um cliente enquanto outro chegou para ser atendido. Como só há um caixa, o segundo indivíduo teve de ficar aguardando o término do atendimento anterior, para então ser atendido.

A Figura 4.13 apresenta um esquema geral do processo de filas, no qual os usuários chegam para receber um determinado atendimento e, em função da indisponibilidade de atendimento imediato, há a formação de uma fila de espera. Por meio de um mecanismo, o cliente da fila é selecionado para o serviço.

Figura 4.13 | Esquema geral do processo de filas



Fonte: Hillier e Lieberman (2013, p. 729).

O processo de chegada está associado à chegada de um novo usuário no sistema e, como principais características, podemos citar a quantidade de chegadas por vez, tempo entre chegadas, etc. Podemos considerar, neste último caso, se as chegadas são constantes ou se são aleatórias (FERREIRA FILHO, 2013).

As chegadas podem ser tanto unitárias quanto em conjunto, e também é importante analisar se é previsto perdas de usuários que não fiquem na fila, ou seja, o cliente nem sequer entra na fila e já é excluído, pelo sistema ou por decisão própria. Um exemplo de sistema com perda de usuários é o telefônico residencial, pois uma vez que você liga para um telefone residencial que esteja em outra ligação (ocupado), você automaticamente é retirado do sistema e a chamada fica indisponível (FERREIRA FILHO, 2013).

Além do processo de chegada, um outro fator que influencia na formação de uma fila é a taxa de atendimento. Assim, se o atendimento for mais rápido, o sistema permanecerá ocupado menos tempo e a chance de ocorrer uma chegada no instante em que ele está ocupado, gerando uma fila, é menor. Similarmente, se houver mais de um posto de atendimento, a probabilidade de formar uma fila também será diferente. Além disso, o tempo de serviço pode depender do usuário ou do próprio sistema e ser definido como constante ou aleatório.

Além do processo de chegada e do tempo de serviço, o modo de atendimento influenciará na fila formada, referindo-se à forma como o sistema seleciona os usuários para receber o atendimento. Geralmente, o primeiro cliente que entra é o primeiro a ser atendido, mas podemos ter situações nas quais o último a chegar será o primeiro a ser atendido, ou alguma outra regra que pode ser criada pelo sistema para direcionar o atendimento. Podemos citar, como exemplo, o caso de clientes com necessidades especiais, idosos, entre outros.

Finalmente, outro fator que é capaz de influenciar na fila é a capacidade desta, ou seja, se ela pode ser infinita ou finita. Na maioria dos casos cotidianos, a fila é finita, mas existem situações nas quais não existe um limite no número de usuários nela.

Portanto, se alterarmos as características que vimos anteriormente (processo de chegada, tempo de serviço, modo de atendimento e capacidade da fila), poderemos criar diversos modelos de filas diferentes, o que faz que exista uma infinidade de aplicações possíveis (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Assim, a teoria de filas é o estudo da espera em todas essas várias formas, envolvendo o estudo matemático das filas. Com o advento e a evolução da informática, a simulação começou a ganhar espaço na modelagem de filas, a fim de tentar, cada vez mais, imitar o funcionamento do sistema real.



Pesquise mais

Caro aluno, vamos aprofundar os nossos conhecimentos em teoria das filas? Já estamos acostumados a encontrar filas nos caixas de supermercados, pois, geralmente, o número de postos de atendimento e a taxa de serviço não acompanham a taxa de chegada de clientes, o que invariavelmente cria as temidas filas. Um dos estudos realizados nesse assunto foi publicado na Revista Pesquisa Operacional e um dos interesses dos autores é modelar o tempo de espera, sendo testadas, para isso, três opções de modelos.

Leia o artigo e bons estudos!

MORABITO, R.; DE LIMA, F. C. R. Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso. **Pesquisa Operacional**, v. 20, n. 1, p. 59-71, 2000. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/pope/v20n1/a07v20n1.pdf>>. Acesso em 13 abr. 2018.

As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam alguns tipos comuns de processos de filas. A Figura 4.14 nos mostra um tipo de processo de fila no qual temos uma chegada, uma fila única, um único posto de atendimento e a saída. O aeroporto é um exemplo que apresenta apenas uma pista de pouso. Os aviões que chegam a este lugar formam uma fila única para utilizar a pista, que, nesse caso, seria o nosso servidor. Assim, tanto o tempo entre chegadas quanto o tempo de serviço podem ser aleatórios, dependendo da demanda, do clima (se está chovendo, se a pista está molhada ou seca), entre outros fatores.

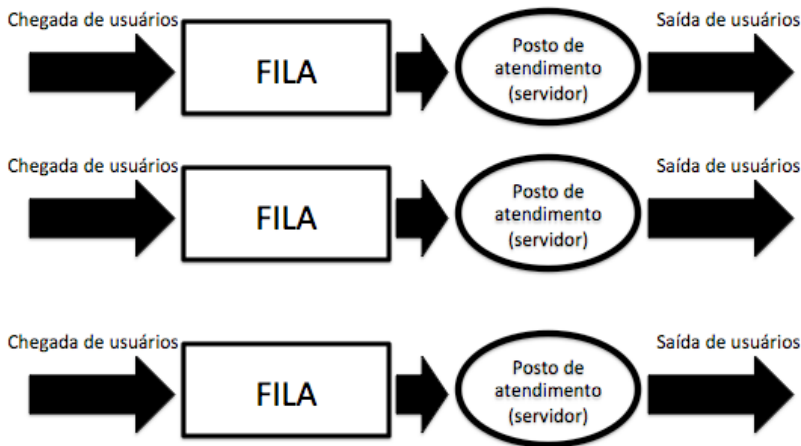
Figura 4.14 | Processo de fila com um servidor e fila única



Fonte: elaborada pela autora.

Na Figura 4.15, observamos um processo de fila com mais de um servidor e filas individuais por servidor, como no caso de um supermercado.

Figura 4.15 | Processo de fila com mais de um servidor e fila individual por servidor



Fonte: elaborada pela autora.

Há algumas métricas para definir o desempenho do sistema, por exemplo, tempo de espera do usuário, tamanho da fila e tempo ocioso dos postos de atendimento (servidores). É importante ressaltar que as medidas anteriores podem apresentar variação, uma vez que, geralmente, são variáveis aleatórias. Desse modo, podemos considerar, para efeitos de avaliação, valores médios ou esperados. Vale também lembrar que temos o tempo de espera do usuário na fila e o tempo total que ele gasta no sistema. Em cada caso, pode ser mais relevante a análise de um tempo ou do outro. Quem fará a avaliação do desempenho do sistema deve levar em conta os tempos previstos na fase de projeto, para avaliar se eles são condizentes com a realidade ou se devem ser realizados ajustes.

Por exemplo, na cidade de São Paulo existe um acordo firmado entre os bancos e a Federação Brasileira de Bancos (Febraban) que estipula um limite máximo de tempo de espera nas filas de caixas bancários. Nesse caso, os bancos tiveram que alterar sua estrutura para adequar o tempo de espera máximo. Uma das formas de avaliar as alterações é utilizando a simulação, de modo que as condições reais sejam modeladas e as alterações avaliadas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Agora que os conceitos sobre teoria das filas já foram apresentados, aprenderemos a notação que é mais utilizada nessa área.

A notação que veremos nesta seção é fruto do esforço de diversos autores, mas, em especial, ao professor David George Kendall, que criou, em 1953, a referência que utilizamos nos nossos estudos.

E como é a notação proposta por Kendall, em 1953? Temos, basicamente, uma representação para as características que vimos anteriormente, na forma: $A/B/c/K/Z$ (FERREIRA FILHO, 2013).

- A: trata-se da distribuição de tempo entre chegadas.
- B: distribuição de tempo de serviço.
- c: número de servidores (ou postos de atendimento).
- K: capacidade da fila.
- Z: modo de atendimento.



Caro aluno, quando pensamos em notação de filas, é comum encontrarmos filas com notações nas quais as letras K e Z não aparecem. Nos casos nos quais não evidenciamos as letras K e Z, é porque a fila segue o padrão mais comum de K e Z e, por isso, são omitidos. Portanto, convencionou-se que quando K e Z estão ausentes, significa que a fila tem capacidade infinita e o seguinte modo de atendimento: o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido.

Além disso, temos uma terminologia comum sempre que o assunto é teoria das filas, a qual vale a pena ser conhecida (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- Estado do sistema: é o número de usuários presente no sistema.
- Comprimento da fila: é o número de usuários esperando por um atendimento (ou serviço).
- S: é o número de servidores (ou postos de atendimento).
- $P_n(t)$: é a probabilidade de que n usuários estejam no sistema no tempo t.
- λ_n : é a taxa de chegada de novos usuários, dado que n usuários já estão no sistema.
- μ_n : é a taxa de serviço para o sistema, quando temos n usuários no sistema.

Quando o nosso sistema está em estado de equilíbrio, ou seja, quando o nosso sistema não depende mais do estado inicial e do tempo decorrido, temos uma outra terminologia comum que utilizaremos (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- N: é o número de usuários no sistema.
- P_n : é a probabilidade de n clientes no sistema.
- L: é o número de clientes esperando no sistema.
- L_q : é o comprimento esperado da fila.
- ω : é o tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço.
- ω_q : é o tempo de espera para cada usuário na fila (excluindo o tempo de serviço).



Imagine que você seja o responsável pelo setor de qualidade de uma linha de montagem de refrigeradores. Durante o processo de controle de qualidade, em uma etapa inicial, todo o lote, com 10 refrigeradores, passa por uma inspeção visual, de modo que se verifica se o produto apresenta alguma variação, como amassado ou riscado. A fim de evitar erros, a empresa abriu mão da amostragem, fazendo a inspeção de 100% do lote.

No entanto, há no setor de qualidade somente 1 pessoa responsável pela inspeção de refrigerados, de modo que a cada hora chega um lote, sendo cada refrigerador inspecionado em 10 minutos. A fim de avaliar a viabilidade de se continuar com esse sistema de inspeção 100%, avalie se há ou não a formação de filas. Como você poderia demonstrar isto?

Devemos, primeiramente, avaliar para saber se há ou não a formação de filas, sobretudo a taxa de chegada e a de serviço.

Logo, em primeiro lugar, é necessário lembrar que λ , faz referência à taxa de chegadas. Nesse caso, esta taxa é de 10 refrigeradores (1 lote) a cada hora: $\lambda = 10 \text{ refrigeradores / hora}$ (taxa de chegada).

A taxa de serviço é representada por μ , que, nesse caso, é de 10 minutos, representando a inspeção de um refrigerador. Se quisermos transformar essa taxa em horas, como está expressado em λ , ficará:

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ min} \therefore \frac{60}{10} = 6 \quad \mu = 6 \text{ refrigeradores / hora} \quad (\text{taxa de serviço}).$$

Perceba que a taxa de chegada é superior à de serviço, fato este que faz que uma fila seja formada. Assim, uma das alternativas para a eliminação da fila poderia ser trabalhar com amostragem para igualar as taxas, de modo que a cada lote você pode retirar 6 peças, permitindo que o operador execute a inspeção.

Um tipo muito comum de filas refere-se à M/M/1, na qual o tempo entre chegadas é regido por distribuição exponencial, o tempo de serviço é regido por distribuição exponencial e o número de servidores é igual a 1. A distribuição exponencial é consistente com chegadas aleatórias, sendo que o tempo entre chegadas não é influenciado pelo tempo da última. Portanto, é razoável pensar que se existirem usuários diferentes, o tempo entre chegadas não depende do tempo da última, o que nos permite desprezar a distinção dos usuários.

Consideramos que o processo de chegadas segue uma distribuição exponencial e a taxa de chegadas é representada por λ . A taxa de serviço α também é uma variável aleatória com distribuição exponencial, assim como a taxa de chegadas.

No caso da fila M/M/1, podemos dizer que, na condição de equilíbrio, temos as Equações 4.1 e 4.2 (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \text{ (Equação 4.1)}$$

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \right) \text{ (Equação 4.2)}$$

Nesse sentido, vale citar a medida de desempenho de Little, conhecida como Lei de Little, que faz uma relação entre o número de usuários que estão no sistema ou na fila e o tempo médio que eles gastam nesta. Matematicamente, sabe-se que as equações de Little relacionam o número médio de usuários (L ou L_q) com o tempo médio de espera (W ou W_q). Podemos dizer que essa lei é aplicada quando o número de chegadas é igual ao número de saídas, ou seja, nosso sistema está em equilíbrio.

Portanto, de acordo com Little, é possível afirmar que:

$$L = \lambda \times \omega \text{ (Equação 4.3)}$$

Em outras palavras, o número esperado de clientes no sistema é igual à taxa de chegadas multiplicada pelo tempo de espera para cada usuário, incluindo o tempo de serviço.

$$L_q = \lambda \times \omega_q \text{ (Equação 4.4)}$$

O comprimento esperado da fila é igual à taxa de chegadas multiplicada pelo tempo de espera para cada usuário na fila.

Portanto, com base nas equações anteriores, é possível calcular o número de clientes esperado no sistema e o comprimento esperado na fila, sendo possível, deste modo, avaliar o desempenho do sistema de filas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

A seguir, veja um exemplo para ficar mais claro como estudar a fila M/M/1. Suponha que você seja um analista de tráfego de um aeroporto que apresenta uma única pista de pouso e decolagem. O histórico do aeroporto mostra que chegam 10 aviões por hora, sendo que cada um requer, em média, 4 minutos para aterrissar. Considerando que as chegadas dos aviões são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo de aterrissagem, qual é o tempo médio de espera para o pouso?

Precisamos, primeiramente, definir os valores de λ e μ .

Nesse caso, $\lambda = 10$ aviões/hora e $\mu = \frac{60}{4} = 15$ aviões/hora.

$$L = \lambda \times \omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda} \text{ como } L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10}{15 - 10} = 2,$$

portanto, $\omega = \frac{2}{10} = 0,2$ hora.

Em outras palavras, o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) é 0,2 hora, o que é equivalente a 12 minutos.

$$L_q = \lambda \times \omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda} \text{ como } L_q = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \right) = \frac{10}{15} \left(\frac{10}{15 - 10} \right) = 1,33,$$

portanto, $\omega_q = \frac{1,33}{10} = 0,13$ hora.

Logo, o tempo de espera para o pouso é de 0,13 hora, ou 7,8 minutos. Portanto, nesse sistema, podemos verificar que o tempo na fila (7,8 minutos) é quase o dobro do tempo em serviço (4 minutos).



Refleta

Caro aluno, de acordo com a notação de Kendall, quais são as características de uma fila M/M/c? Reflita sobre isso!

Outro tipo de fila muito conhecida refere-se à fila M/M/c que, diferentemente da M/M/1, pode ter múltiplos servidores. Agora, a taxa de serviço será em função do número de servidores c , conforme a seguir, lembrando que n faz referência ao número de usuários no sistema.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \rightarrow 0 \leq n < c \\ c\mu \rightarrow n \geq c \end{cases}$$

Portanto, quando o número de usuários no sistema for maior ou igual a zero e menor que o número de servidores, a taxa de serviço será em função do número de usuários no sistema. Quando o número de usuários do sistema for maior ou igual ao número de servidores, a taxa de serviço será em função do número de servidores.

Com múltiplos servidores, a intensidade de tráfego (razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço) sofre alteração, de modo que:

$$\text{Intensidade de tráfego: } \frac{\lambda}{c\mu} \text{ quando } n \geq c \text{ (Equação 4.5)}$$

Lembrando também que a distribuição estacionária, representada por π , será:

Dessa forma, o número de clientes esperado no sistema (L) será dado a partir da distribuição estacionária, representada por π (FERREIRA FILHO, 2013):

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{c \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c+1}}{c! \left(c - \frac{\lambda}{\mu} \right)^2} \right] \pi_0 \quad (\text{Equação 4.6})$$

E o comprimento esperado da fila (L_q) é:

$$L_q = \frac{\pi_0 c \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c+1}}{c! \left(c - \frac{\lambda}{\mu} \right)^2} \quad (\text{Equação 4.7})$$

Sendo que π_0 é dado por:

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{Equação 4.8})$$



Exemplificando

Suponha que você seja o gerente de produção de uma indústria cuja linha de montagem conta com duas máquinas iguais (máquina 1 e máquina 2). 15 peças chegam nessa máquina por hora e cada uma leva, em média, 3 minutos para ser processada, independente da máquina, isto é, 1 ou 2, uma vez que são iguais. Qual é o tempo de espera para cada usuário, incluindo e excluindo o tempo de serviço?

Os valores da taxa de chegada e de serviço são os mesmos:

$\lambda = 15$ peças/hora

$$\mu = \frac{60}{3} = 20 \text{ peças/hora}$$

Temos dois servidores, portanto, $c = 2$.

Agora, calcularemos L e L_q , mas, para isso, precisamos calcular π_0 .

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

O somatório é de $n = 0$ até $n = 1$, uma vez que $c - 1 = 1$, portanto:

$$n = 0 \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{0!} \left(\frac{15}{20} \right)^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{1!} \left(\frac{15}{20} \right)^1 = 0,75$$

$$\pi_0 = \left[1 + 0,75 + \frac{1}{2!} \left(\frac{15}{20} \right)^2 \left(1 - \frac{15}{40} \right)^{-1} \right]^{-1} = 0,4545$$

$$L = \frac{15}{20} + \left[\frac{2 \left(\frac{15}{20} \right)^3}{2! \left(2 - \frac{15}{20} \right)^2} \right] 0,4545 = 0,87$$

$$\omega = \frac{0,87}{15} = 0,05$$

Em outras palavras, o tempo de espera para cada usuário, incluindo o de serviço, é de 0,05 hora, ou 3,5 minutos.

$$L_q = \frac{0,4545 \times 2 \left(\frac{15}{20} \right)^3}{2! \left(2 - \frac{15}{20} \right)^2} = 0,122$$

$$\omega_q = \frac{0,122}{15} = 0,00813$$

Assim, o tempo na fila é de 0,00813 horas, ou 0,5 minutos, o que resulta em um tempo de serviço de, aproximadamente, 3 minutos.

Para analisar a diferença, vamos refazer esse mesmo problema no Avançando na Prática, considerando apenas 1 máquina.

Caro aluno, lembre-se de que você é o gerente administrativo de um posto de combustível e está avaliando a expansão no número de bombas para melhor atender os consumidores, uma vez que, em alguns horários do dia, a demanda apresenta picos que geram filas.

Quais as informações que deveriam ser coletadas para que você indique a quantidade de bombas instaladas, lembrando que existe um custo de instalação, de operação e um tempo tolerável de espera na fila?

Em primeiro lugar, para resolver esse problema, é essencial relembrar as características de um sistema de filas, dado que o posto de gasolina apresentará duas possíveis filas: no abastecimento e no pagamento.

Assim, comece sua apresentação para o dono do posto de combustível, mostrando as características principais de uma fila:

- Tempo entre chegadas: nesse caso, temos o tempo entre chegadas de clientes no posto de combustível e o tempo de chegadas de clientes para pagamento, após o abastecimento. É importante que essas informações sejam previstas, consultando o departamento de planejamento da empresa.
- Tempo de serviço: novamente, temos duas variáveis, o tempo de serviço na bomba de combustível e o tempo de serviço para pagamento. Nesse primeiro momento, estamos desconsiderando os demais serviços que podem ser oferecidos, como troca de óleo e lavagem. Com a ajuda das medidas de desempenho, também será possível definir o número de postos de atendimento, tanto as bombas quanto os caixas de pagamento.
- Modo de atendimento: neste tópico é importante ressaltar o modo de atendimento nas filas, isto é, se existirá alguma regra de atendimento prioritário ou se a regra a ser adotada é: o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido, valendo tanto para atendimento na bomba quanto no caixa de pagamento.
- Capacidade da fila: nesse caso, a capacidade da fila está condicionada ao espaço físico disponível para que os clientes

aguardem o atendimento com os seus respectivos veículos. Portanto, muito provavelmente teremos uma restrição de espaço, o que fará que nossa fila tenha uma capacidade máxima. Quando ela atingir esta capacidade, ou seja, o espaço físico estiver totalmente ocupado, os clientes que chegarem não entrarão no sistema.

Agora que o nosso sistema está devidamente caracterizado, podemos pensar nas formas de mensurar a implementação das bombas. Vimos que isso é possível por meio de alguns tempos: tempo de espera do usuário e tempo ocioso dos postos de atendimento (servidores).

Além disso, deve ser levado em consideração a existência de outros postos de combustíveis na mesma região, ou seja, a presença de concorrentes. Caso seja possível analisar o tempo de espera do usuário e o tempo ocioso nos postos concorrentes, iniciaremos a nossa avaliação de desempenho.

Em seguida, é importante ouvir o cliente, podendo ser por meio de uma pesquisa de satisfação. Com isso, será possível descobrir o tempo desejável de espera do usuário, para tentar compará-lo à concorrência e fazer um ajuste de acordo com os recursos disponíveis.

Agora, é importante que a equipe de planejamento avalie o tempo ocioso dos postos de atendimento (bombas de combustível e caixas de pagamento). Neste ponto, vale uma observação importante: para que o tempo de espera na fila seja minimizado, os recursos devem ser maximizados, o que, geralmente, faz que exista uma quantidade de postos de atendimento que podem ficar ociosos por mais tempo aguardando a chegada de um novo cliente. Isso deve ser adequadamente ajustado, uma vez que se o tempo de espera for muito além do desejado pelo cliente, provavelmente ele desistirá de abastecer no local; mas deixar uma ociosidade grande nos postos de atendimento acarreta em custos operacionais maiores.

Utilizando as informações anteriores, será possível que você apresente para o dono do posto o que deve ser avaliado para decidir quantas bombas devem ser implementadas no novo empreendimento.

Linha de produção com 1 servidor.

Descrição da situação-problema

Suponha que você seja o gerente de produção de uma indústria que tem uma linha de montagem com apenas uma máquina. 15 peças chega, a essa máquina por hora e cada uma leva, em média, 3 minutos para ser processada. Nesse contexto, qual é o tempo de espera para cada usuário, incluindo e excluindo o tempo de serviço?

Resolução da situação-problema

Precisamos, primeiramente, definir os valores de λ e α .

Nesse caso, $\lambda = 15$ peças/hora e $\mu = \frac{60}{3} = 20$ peças/hora.

$$L = \lambda \times \omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda} \text{ como } L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3,$$

$$\text{portanto } \omega = \frac{3}{15} = 0,2 \text{ hora.}$$

Em outras palavras, o tempo de espera (incluindo o tempo de serviço) é 0,2 hora, o que é equivalente a 12 minutos.

$$L_q = \lambda \times \omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda} \text{ como } L_q = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \right) = 2,25,$$

$$\text{portanto } \omega_q = \frac{2,25}{15} = 0,15 \text{ hora}$$

Assim, o tempo de espera na fila é de 0,15 hora, ou 9 minutos.

Portanto, nesse sistema, podemos verificar que o tempo na fila (9 minutos) é o triplo do tempo em serviço (3 minutos), devendo, provavelmente, o sistema ser reavaliado.

Se retornarmos ao box Exemplificando, no qual temos 2 servidores, comparando com o exemplo de um único servidor (M/M/1), tínhamos 9 minutos de espera na fila. Ao acrescentar mais um servidor, esse tempo de espera caiu para 0,5 minuto e o tempo total do usuário no sistema caiu para 3,5 minutos.

Seria interessante analisar também o custo de implementação de mais uma máquina, mas já observamos que o tempo em fila caiu 18 vezes.

Parabéns, mais uma etapa vencida!

Faça valer a pena

1. Para economizar custos, uma hamburgueria começou seu negócio atendendo somente pelo sistema *drive-thru*, permitindo ao cliente comprar o produto sem sair do carro. O histórico de vendas mostra que, no local, chegam 30 clientes por hora, sendo que cada um requer, em média, 1,5 minutos para fazer o pedido. Considere que as chegadas dos clientes são regidas por um processo de Poisson (chegadas aleatórias), bem como a distribuição exponencial do tempo.

Qual é o tempo médio de espera?

- a) 13,8 minutos.
- b) 15 minutos.
- c) 11,6 minutos.
- d) 23 minutos.
- e) 17,5 minutos.

2. Em um banco, há apenas um dispositivo de contagem de cédulas, de modo que chegam 100 notas, de um mesmo valor, a cada 10 minutos.

A leitura de cada uma é feita pela máquina de contagem de cédulas, em média, a cada 6 s.

Considere esses dados para avaliar a taxa de chegada de novas notas.

Assinale a alternativa que apresenta corretamente a taxa de chegada de novas notas e a de serviço para o sistema

- a) $\mu = 600 \text{notas} / \text{hora}$; $\lambda = 30 \text{notas} / \text{hora}$.
- b) $\lambda = 100 \text{notas} / \text{hora}$; $\mu = 10 \text{notas} / \text{hora}$.
- c) $\lambda = 600 \text{notas} / \text{hora}$; $\mu = 600 \text{notas} / \text{hora}$.
- d) $\mu = 30 \text{notas} / \text{hora}$; $\lambda = 30 \text{notas} / \text{hora}$.
- e) $\lambda = 100 \text{notas} / \text{hora}$; $\mu = 600 \text{notas} / \text{hora}$.

3. Suponha que você seja um analista de tráfego de um aeroporto que tem duas pistas de pouso e decolagem. O histórico do aeroporto mostra que chegam 10 aviões por hora, sendo que cada um requer, em média, 4 minutos para aterrissar, independente da pista. Considerando que as chegadas dos aviões são regidas por um processo de Poisson, bem como a distribuição exponencial do tempo de aterrissagem.

Qual é o tempo médio de espera para o pouso?

- a) 7,8 min.
- b) 4,2 min.
- c) 0, 57 min.
- d) 0,48 min.
- e) 12,5 min.

Referências

ALVES, R.; DELGADO, C. **Processos estocásticos**. Universidade do Porto, 1997. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71434/2/40417.pdf>>. Acesso em: 13 abr. 2018.

CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional**: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

FERREIRA FILHO, V. G. M. F. **Processos estocásticos e teoria das filas**. Rio de Janeiro: COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.

KARLIN, S.; TAYLOR, H. E. **An introduction to stochastic modeling**. 3. ed. NY: Academic Press, 1998.

ORLIN, J. B. **Integer programming**. Optimization Methods in Business Analytics - MIT Sloan School of Management. Massachusetts, 2017. Disponível em: <<http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-09.pdf>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

ROCHA, S. P. V. da. **Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via processo de renovação generalizado**. 105f. 2006. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/5751>>. Acesso em: 13 abr. 2018.

Anotações

[illegible]

Anotações

[illegible]

Anotações

[illegible]

Anotações

[illegible]

ISBN 978-85-522-0745-0



9 788552 207450 >