



Mecânica Geral

Mecânica Geral

Gustavo Henrique Judice

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

André Luis Delvas Fróes

Samuel José Casarin

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Judice, Gustavo Henrique

J99m Mecânica geral / Gustavo Henrique Judice. – Londrina :

Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.

224 p.

ISBN 978-85-522-0688-0

1. Engenharia. 2. Mecânica. I. Judice, Gustavo Henrique.

II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 – Londrina – PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Cinemática da partícula _____	7
Seção 1.1 - Análise instantânea do movimento da partícula _____	9
Seção 1.2 - Movimento retilíneo tridimensional _____	27
Seção 1.3 - Movimento curvilíneo tridimensional _____	46
Unidade 2 Dinâmica da partícula _____	63
Seção 2.1 - A segunda lei de Newton para movimentos gerais _____	65
Seção 2.2 - Movimento em coordenadas cilíndricas e esféricas _____	80
Seção 2.3 - Dinâmica gravitacional para partículas _____	97
Unidade 3 Energia e momento linear e angular para a partícula _____	115
Seção 3.1 - Trabalho e energia para a partícula _____	117
Seção 3.2 - Momento linear e angular para uma partícula _____	135
Seção 3.3 - Impacto _____	151
Unidade 4 Sistemas de várias partículas _____	169
Seção 4.1 - Leis de Newton em sistema de partículas _____	171
Seção 4.2 - Impulso e quantidade de movimento em sistema de partículas _____	186
Seção 4.3 - Sistemas variáveis de partículas _____	201

Palavras do autor

Caro aluno, neste livro didático temos como objetivo estudar partículas em movimento, ou seja, aprofundaremos nossos conhecimentos no ramo da Cinemática, para posteriormente aprofundarmos no ramo da Dinâmica, que relaciona o efeito de forças e torques e como eles geram (ou alteram) o movimento dos corpos. Assim, poderemos relacionar esses conteúdos com situações práticas vivenciadas por engenheiros no dia a dia.

Todos os conceitos apresentados serão abordados para corpos representados como partículas, o que não indica que vamos estudar apenas pequenos elementos; na verdade vamos, neste momento, desconsiderar as formas dos elementos para estudar apenas os seus movimentos. Estas partículas podem ser representações de veículos, satélites, planetas etc., ou elementos como motores, engrenagens, polias, pesos etc. Portanto, a Mecânica Geral é essencial para compreendermos diversos ramos da Engenharia, uma vez que, na prática, muitos dos equipamentos analisados não são estáticos. Assim, o empenho no estudo deste livro didático vai auxiliar na sua formação e, por consequência, na sua empregabilidade, já que um bom rendimento neste estudo levará a uma compreensão do movimento e seus esforços geradores.

Na Unidade 1 vamos começar os estudos analisando partículas ao longo de seu movimento a fim de determinar posição, velocidade e aceleração instantâneas em movimentos gerais, assim como analisar o movimento de muitas partículas que estão ou não conectadas, para que possamos responder a questionamentos como: Qual a aceleração instantânea do automóvel após este arrancar em uma corrida automobilística? Quando duas aeronaves poderão cruzar no céu?

Na Unidade 2 deste livro didático serão aprofundados conceitos referentes à segunda lei de Newton, uma vez que agora estarão presentes forças aplicadas em um corpo no qual essas forças não se anulam, gerando por consequência aceleração a este corpo proporcional à resultante das forças gerais. Assim, vamos analisar a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular de partículas para casos específicos e situações reais.

Na Unidade 3 serão aprofundados os conceitos de trabalho e energia, potência e eficiência e o método referente a impulso e conservação de energia, o que nos permitirá desenvolver situações que estejam relacionadas com a força, velocidade e deslocamento, sem a necessidade de considerar a aceleração.

Já na Unidade 4 continuaremos os estudos, chegando a condições em que ocorrem a interação do movimento de mais de uma partícula. Assim, vamos ao estudo de sistemas de partículas. Chegamos, assim, a conceitos relacionados a sistemas de variáveis os quais representam situações em que mais ou menos partículas passam a participar da interação.

O autoestudo é a melhor maneira de desenvolvermos nossos conhecimentos. Para alavancar o conhecimento referente a Mecânica Geral é imprescindível que você realize as atividades de pré e pós aula em cada uma das seções e que consulte sempre os materiais complementares recomendados para aumentar sua compreensão sobre os temas abordados.

O futuro de cada um de nós depende exclusivamente da dedicação pessoal, portanto não deixe para depois; aprofunde sempre seus estudos para se tornar cada vez mais preparado ao mercado de trabalho que o aguarda fora da faculdade e que, a cada dia, está mais competitivo.

Cinemática da partícula

Convite ao estudo

Prezado estudante, saber determinar o movimento de uma partícula é essencialmente importante, uma vez que os equipamentos precisam desenvolver movimentos controlados e precisos. É fundamental saber como prever um movimento para que seja possível definir condições específicas de operação de uma máquina, além de descobrir condições para evitar ou prever intencionalmente a colisão de equipamentos ou componentes.

Para todas estas analogias precisamos entender de forma completa e clara a relação das grandezas fundamentais posição, velocidade e aceleração para diversas condições por meio do cálculo diferencial e integral, assim como saber analisar movimentos gerais, retilíneos ou curvilíneos.

Imagine que você, aluno, esteja no papel do engenheiro que trabalha em uma empresa de consultoria em projetos automotivos. Nessa condição, a montadora Racing firmou um contrato com a empresa na qual você trabalha para que sejam avaliados alguns componentes do seu novo veículo que está em fase de teste.

Uma primeira tarefa solicitada pela montadora é que seja verificado o comportamento vertical do amortecedor do veículo em condições específicas de testes. Em um segundo momento, você precisa verificar a movimentação dos pistões do motor, para uma posterior análise do tempo do motor pela montadora. E como terceira tarefa, você deve desenvolver uma análise mais completa do amortecedor ao passar por uma irregularidade crítica na pista de teste, assim gerando resultados do deslocamento, além de velocidades e acelerações instantâneas.

O seu gestor lhe incumbiu também a responsabilidade de apresentar, ao final, um relatório técnico contendo os resultados e gráficos obtidos dessas análises. Os meios para obtenção dos resultados dessa situação serão desenvolvidos ao longo desta primeira unidade do livro didático, sendo que ao final, você terá determinado todos os dados para passar à montadora Racing.

Para auxiliar na resolução desse desafio, na Seção 1 estudaremos como se desenvolve o movimento instantâneo de uma partícula mediante análises diferenciais e integrais das grandezas essenciais, enquanto na Seção 2 vamos focar os estudos no movimento uniforme e instantâneo de muitas partículas, além de métodos gráficos para estudar os movimentos. E para finalizar a Unidade 1, na Seção 3 estudaremos o movimento curvilíneo de partículas, focando em vetores de posição, velocidade e aceleração.

Seção 1.1

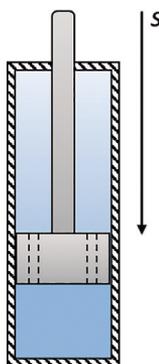
Análise instantânea do movimento da partícula

Diálogo aberto

A aceleração de uma partícula em movimento pode ser constante ou variável, dependendo da situação, sendo que a aceleração pode ser uma função das variáveis de velocidade, distância e tempo, e essas relações são definidas por meio de integrações. Assim, essas variáveis precisam ser definidas sempre que se estuda algum elemento em movimento.

Na presente unidade, você se colocou no papel de um engenheiro responsável por estudar os parâmetros do novo modelo de veículo da montadora Racing, que está em fase de testes. Chegou o momento de começar a análise do movimento de um amortecedor veicular composto essencialmente por um pistão e um cilindro com óleo, no qual a haste do pistão move-se no cilindro que fica fixo e está cheio de óleo, assim oferecendo resistência ao movimento do pistão (Figura 1.1).

Figura 1.1 | Representação do amortecedor hidráulico.



Fonte: elaborada pelo autor.

Sensores fixados no sistema amortecedor do veículo indicaram que a aceleração sofrida pelo amortecedor quando o veículo em teste passou por uma irregularidade na pista foi de $\mathbf{a} = -(0,65 + \text{sen}(s))$

sendo a a aceleração e s a posição do êmbolo em relação ao curso do pistão, com as grandezas dadas nas unidades do SI. Os sensores também indicaram que, quando a posição do êmbolo está 10 mm para baixo da posição de equilíbrio, quando o veículo está em repouso, a velocidade é de 2 m/s. Assim, é necessário definir a equação representativa da velocidade do pistão e o valor da velocidade quando este sofre a compressão máxima de seu curso de 340mm.

Analisando essa situação, de início podem surgir alguns questionamentos: qual a relação dos dados obtidos dos sensores fixados no sistema de suspensão do veículo? Como é possível definir valores da velocidade e a compressão sofrida pelo amortecedor em qualquer instante de tempo? Quais dados utilizar para montar gráficos das curvas de movimento do pistão?

Para respondermos a essas perguntas e desenvolver a situação, vamos aos estudos.

Não pode faltar

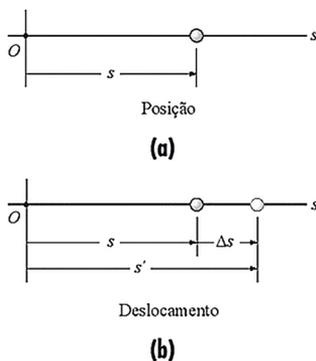
Caro aluno, vamos iniciar o estudo nesta seção analisando a cinemática do movimento de partículas que se deslocam em trajetória linear; assim, analisaremos a posição, velocidade e aceleração de partículas que estejam se movimentando em linha reta para cada instante específico de tempo.

E o estudo de partículas não significa que são analisados corpos muito pequenos; partícula ou ponto material é todo objeto do qual as dimensões (tamanho) e forma são desprezíveis quando comparadas com o movimento estudado.

Como neste primeiro estudo estamos interessados no movimento retilíneo de uma partícula, sua posição é definida em relação a um eixo (linha reta). Ao analisar uma posição qualquer de uma partícula mediante a cinética, primeiramente é necessário definir um eixo que representa o movimento linear dessa partícula. Define-se um ponto de origem neste eixo, chamado de ponto O , e então se analisa o movimento em si da partícula.

A partir do ponto O se determina a posição s da partícula, e o quanto essa partícula se movimentou é definido como um deslocamento Δs sobre o eixo, como representado na Figura 1.2, sendo que $\Delta s = s' - s$.

Figura 1.2 | Representação do movimento da partícula sobre uma trajetória linear com origem em O , sendo (a) a posição inicial e (b) a posição final da partícula.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2011, p. 3).



Assimile

O estudo da cinemática de partículas refere-se ao estudo de objetos que podem ser representados por um ponto (ou partícula), e que não estejam em movimento de rotação em relação ao centro de massa.

Considerando que o sentido positivo do eixo sobre o qual a partícula se movimentou é positivo da esquerda para a direita, o sinal positivo de Δs significa que a partícula se movimentou para a direita, como representado na Figura 1.2(b), na qual a partícula saiu de uma posição inicial s e moveu-se para s' .

Analisando o movimento da partícula e definindo o instante para cada posição em que a partícula esteja, conseguimos determinar a velocidade média da partícula, que representa um valor geral que não se altera ao longo do movimento: $v_{méd} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Partindo da equação da velocidade média, para definir a velocidade em um determinado tempo específico do movimento da partícula, ou seja, sua velocidade instantânea, é necessário simplesmente fazer a análise da velocidade para um intervalo de tempo muito pequeno.

A variação de tempo Δt e consequentemente a variação de deslocamento Δs para um período de tempo muito pequeno vão tender a zero; assim:

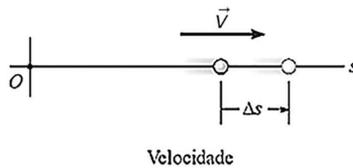
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Analisando a equação apresentada, com o intervalo de tempo tendendo a um valor muito pequeno próximo a zero não consideramos mais o deslocamento, mas sim uma posição específica do movimento, e podemos passar a definir a relação da velocidade instantânea pela derivada do deslocamento em relação ao tempo da seguinte forma:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Assim como o sentido do deslocamento é representado pelo sinal algébrico de ΔS , o sinal algébrico da velocidade também indica o sentido de deslocamento, uma vez que o tempo só pode ser positivo; o sinal do deslocamento é que indicará o sinal da velocidade. Analisando a Figura 1.3 com o eixo do deslocamento tendo origem em O e sentido positivo da esquerda para a direita, se o sinal da velocidade for positivo significa que a partícula se desloca para a direita, como representado. Mas se o sinal da velocidade for negativo, é o mesmo que dizer que a partícula se desloca da direita para a esquerda sobre o eixo de referência.

Figura 1.3 | Representação do movimento da partícula sobre uma trajetória linear com origem em O regido pelo vetor velocidade \vec{v} .



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2011, p. 3).

Partindo de duas velocidades conhecidas em dois pontos distintos para uma determinada partícula, pode-se definir o valor da aceleração média: $a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

E partindo do mesmo raciocínio da velocidade instantânea, podemos definir a aceleração instantânea da partícula adotando

intervalos de tempo cada vez menores e assim Δv também cada vez menores, de modo que:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

O limite do tempo tendendo a zero mede a taxa da variação da velocidade, que, por definição é formulada como:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

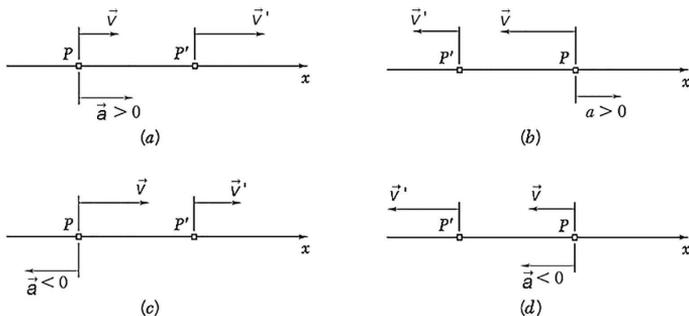
E sabendo que a velocidade é definida pela derivada do deslocamento em relação ao tempo, define-se a aceleração como:

$$a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}s\right) = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Assim como a velocidade, a aceleração apresenta um sinal algébrico, positivo ou negativo. Se a partícula estiver se movendo na direção adotada positiva para o eixo da coordenada de deslocamento, de uma posição inicial P para P' , como indicado na Figura 1.4(a), a aceleração com sinal positivo demonstra que a velocidade da partícula aumenta ao longo do tempo de deslocamento. E agora, analisando os vetores de velocidade na Figura 1.4(a), perceberemos que v' é maior que o vetor da velocidade inicial v , ou seja, houve um aumento na velocidade devido à aceleração positiva.

O sinal negativo da aceleração indica que a velocidade diminui ao longo do deslocamento, como exemplificado na Figura 1.4(c), uma vez que o vetor de velocidade diminuiu ao longo da trajetória de P até P' .

Figura 1.4 | Representação do movimento da partícula sobre uma trajetória linear com indicação do vetor velocidade \vec{v} e vetor aceleração \vec{a} .



Em situações nas quais a partícula esteja se movendo na direção adotada negativa para o eixo da coordenada de deslocamento, o sinal algébrico positivo da aceleração indica que a partícula se desloca com velocidade cada vez menor no sentido negativo da trajetória de deslocamento, como representado na Figura 1.4(b). E, se o sinal da aceleração for negativo, indica que a partícula ganha velocidade no sentido negativo [representado na Figura 1.4(d)].



Exemplificando

Quando analisamos o movimento de uma partícula sobre uma trajetória linear, podemos obter a representação da posição, velocidade e aceleração para diferentes instantes desse movimento. Desse modo, sabendo que uma partícula se move em uma trajetória linear e que a sua posição é definida pela equação $s = 5 + 8t + 4t^2 - 2t^3$.

Assim, podemos definir a velocidade e a aceleração da partícula ao longo da sua trajetória. Partindo pela determinação da velocidade, definimos que:

$$v = \frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}(5 + 8t + 4t^2 - 2t^3)$$

$$v = 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2t - 2 \cdot 3t^2$$

$$v = 8 + 8t - 6t^2.$$

E a aceleração é definida ao derivar a velocidade em função do tempo da seguinte forma:

$$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}(8 + 8t - 6t^2)$$

$$a = 0 + 8 \cdot 1 - 6 \cdot 2t$$

$$a = 8 - 12t.$$

Para analisar melhor o movimento da partícula, podemos ainda representar as equações em gráficos, de modo a adotar valores para o tempo, e assim analisarmos a posição, velocidade e aceleração

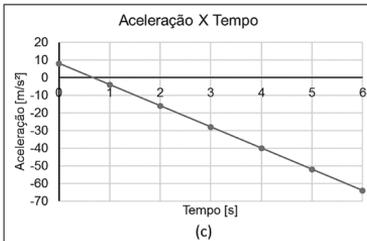
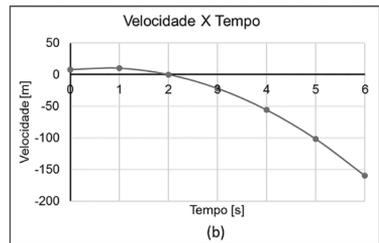
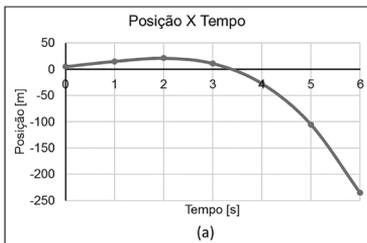
da partícula. Para isso é criada a Tabela 1.1 com a representação dos dados utilizados na construção dos gráficos apresentados na Figura 1.5.

Tabela 1.1 | Dados determinados para a posição, velocidade e aceleração da partícula para diferentes tempos.

Tempo [s]	Posição [m]	Velocidade [m/s]	Aceleração [m/s^2]
0	5	8	8
1	15	10	-4
2	21	0	-16
3	11	-22	-28
4	-27	-56	-40
5	-105	-102	-52
6	-235	-160	-64

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 1.5 | Gráficos da posição (a), velocidade (b) e aceleração (c) da partícula para em função do tempo.



Fonte: elaborados pelo autor.

Analisando a Figura 1.5 e a Tabela 1.1 concluímos que a partícula parte no instante de tempo igual a zero com velocidade de 8 m/s e aceleração de 8 m/s². O gráfico da aceleração indica que a partícula está inicialmente com aceleração positiva, depois chega a zero e então fica negativa.

A velocidade da partícula inicialmente aumenta, indicando um movimento acelerado de 0 a 1 segundo. De 1 segundo até 2 segundos, a partícula desacelera, já que a velocidade vai de 10 m/s a zero. E, a partir de 2 segundos, o valor da velocidade aumenta, mas com sinal negativo, indicando que está ganhando velocidade; porém, no sentido negativo da trajetória.

Analisando a posição da partícula, no início do movimento, o valor da posição é positivo, indicando que a partícula se move inicialmente no sentido positivo da trajetória; a partícula, porém, passa a mover-se no sentido negativo da trajetória, já que o valor da posição passa a ficar negativo.

Nem sempre são conhecidas as posições de uma partícula em diferentes instantes ao longo do seu movimento; nesses casos, as equações apresentadas até o momento não serão muito úteis. Em razão disso, acabamos analisando o movimento de uma partícula por meio de sua aceleração.

Portanto, para definirmos a posição de uma partícula qualquer em movimento retilíneo para um determinado instante, é necessário calcular duas integrais em sequência, a partir da aceleração. Em uma situação na qual a aceleração é uma função qualquer dependente do tempo, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \therefore \quad d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t) \cdot dt .$$

Integrando ambos os membros da equação:

$$\int d\mathbf{v} = \int \mathbf{a}(t) \cdot dt .$$

Definindo os parâmetros iniciais do movimento, saímos das integrais indefinidas para integrais definidas, e assim determinamos os valores quando $t = 0$, de modo que $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$ e $\mathbf{s}(t = 0) = \mathbf{s}_0$,

sendo então possível construir a integral definida com os limites inferiores e superiores:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a(t) \cdot dt, \quad v - v_0 = \int_0^t a(t) \cdot dt$$

Assim chegamos a uma relação da velocidade em termos do tempo.

Vamos observar o que ocorre no caso particular de um movimento com aceleração constante (\mathbf{a}_c). Ao considerar que, quando $t = 0$, a velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ conseguimos definir a relação da velocidade em função do tempo:

$$a_c = \frac{dv}{dt} \quad \therefore \quad dv = a_c \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c \cdot dt$$

$$v - v_0 = a_c \cdot (t - 0), \quad v = v_0 + a_c \cdot t.$$

Em que obtivemos a tradicional equação do movimento uniformemente acelerado.

Podemos definir também uma relação da posição em função do tempo, considerando que, para $t = 0$, partimos da relação em que $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \therefore \quad ds = v \cdot dt$$

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v \cdot dt.$$

Para o caso particular da aceleração constante, obtém-se a conhecida equação

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_c \cdot t^2}{2}.$$

Outra equação que conseguimos obter é aquela que relaciona a velocidade v com a posição s , tal como demonstrado a seguir:

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Voltando para a equação da aceleração $a = dv/dt$, e substituindo dt chegamos à relação:

$$a = v \frac{dv}{ds}, \quad a \cdot ds = v \cdot dv.$$

Assim, chegamos a uma relação da velocidade em função da posição sem a influência do tempo. No caso particular da aceleração constante, e definindo que a velocidade inicial tenha valor v_0 e a posição inicial seja s_0 , obtemos:

$$\int_{v_0}^v v \cdot dv = \int_{s_0}^s a_c \cdot ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a_c \cdot (s - s_0).$$

Um exemplo de aplicação dessa equação é no caso de corpos em queda livre, uma vez que, ao desprezar a resistência do ar, a aceleração atuando sobre o corpo em queda livre é a aceleração da gravidade, que tem valor aproximado de $9,81 \text{ m/s}^2$.



Assimile

Um erro comumente encontrado nas análises de movimentos retilíneos é aplicar as equações para situações com movimento retilíneo uniformemente acelerado que envolvem aceleração variável. É importante sempre analisar cada situação como um todo e definir seu comportamento para que as análises sejam adequadamente representativas do movimento em questão, lembrando que, em casos com aceleração variável, devemos aplicar a relação em que $a = dv/dt$ e $v = ds/dt$.

O sentido do movimento continua indicado pelos sinais algébricos positivo ou negativo, e devemos definir a trajetória linear do movimento de modo a marcar um ponto de origem sobre o eixo da trajetória; na sequência definimos um sentido positivo, e assim podemos analisar o sinal positivo ou negativo da aceleração, velocidade inicial e posição inicial, conforme as Figuras 1.2, 1.3 e 1.4.



Pesquise mais

Aprofunde o conhecimento lendo o subcapítulo 11.3 das páginas 611 e 612 e para complementar acompanhe o desenvolvimento do Problema Resolvido 11.1 da página 613 do livro *Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica*, referência Beer (2012), disponível em sua biblioteca virtual.

Em situações nas quais a aceleração não seja constante devemos fazer uso das equações fundamentais para a aceleração e para a velocidade, sendo que a partir delas e de cálculos diferenciais e integrais conseguimos definir a posição, velocidade e aceleração instantânea de uma partícula. Portanto, nessas situações com aceleração variável, devemos trabalhar essencialmente com as equações:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}; \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{ds}$$



Refleta

Por que as equações $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ e $\mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/ds$ são consideradas equações fundamentais e devem ser utilizadas quando a aceleração não é constante?

É importante lembrar que as equações do movimento retilíneo uniforme e do movimento retilíneo uniformemente variado são apenas casos particulares na análise do movimento, uma vez que, por meio do cálculo diferencial e integral, somos capazes de analisar situações muito mais gerais e abrangentes, que é o nosso objetivo.

Sem medo de errar

Prezado aluno, no início desta seção você foi colocado no lugar de um engenheiro que precisa analisar o movimento de um amortecedor veicular. Sensores fixados no sistema amortecedor do veículo indicaram que a aceleração sofrida por ele foi de $\mathbf{a} = -(0,65 + \text{sen}(s))$, sendo a a aceleração e s a posição do êmbolo em relação ao curso do pistão. Os sensores também indicaram que, quando a posição do êmbolo está 10 mm para baixo da posição, situação em que o veículo está em repouso ($s = 10$ mm), a velocidade é 2 m/s.

Precisamos apresentar a equação representativa da velocidade do pistão, para depois definir a velocidade do amortecedor quando este sofre a compressão máxima de 340mm. E você também deve plotar as curvas de movimento do pistão em gráficos de velocidade por deslocamento e de aceleração por deslocamento. No papel do engenheiro responsável pela análise do amortecedor, como começaria a resolver essa situação? Já partiria diretamente para a análise da aceleração, ou iniciaria analisando melhor o movimento do pistão?

Uma boa ideia para começar é compreender toda a situação para então começar a resolver o que foi solicitado; portanto, é importante analisar muito bem o enunciado e a Figura 1.1. Na sequência, para desenvolver a equação da velocidade, devemos levar em conta a relação da aceleração com a velocidade, de modo que:

$$a = v \frac{dv}{ds} = -(0,65 + \text{sen}(s)),$$

como $\mathbf{a} = -(0,65 + \text{sen}(s))$, relacionamos então a velocidade com a aceleração:

$$a = v \frac{dv}{ds} = -(0,65 + \text{sen}(s))$$

$$v \cdot dv = -(0,65 + \text{sen}(s)) \cdot ds$$

$$\int_2^v v \cdot dv = \int_{10}^s -(0,65 + \text{sen}(s)) \cdot ds.$$

Calculando a integral para ambas as igualdades e convertendo 10 mm para 0,01 m, obtemos:

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_2^v = -[0,65 \cdot s - \cos(s)]_{0,01}^s$$

e substituindo os valores para v e para s , obtemos:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{2^2}{2} = -[0,65 \cdot s - \cos(s) - 0,65 \cdot 0,01 + \cos(0,01)]$$

$$v = (-1,3 \cdot s + 2 \cos(s) + 2)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, definimos a equação representativa da velocidade do pistão partindo da relação que tínhamos em função da aceleração; as análises, porém, não acabam neste ponto, pois foi solicitado também que seja definida a velocidade do amortecedor quando este sofre a compressão máxima de 340 mm, e as curvas representativas do movimento do pistão em gráficos de velocidade por deslocamento e de aceleração por deslocamento.

E agora, como prosseguimos para definir a velocidade do pistão quando este atinge a compressão máxima? Analisando a Figura 1.1, como ficou definido que o deslocamento positivo é no sentido para baixo, o deslocamento máximo do pistão é então representado como $s = +340 \text{ mm} = 0,34 \text{ m}$; assim, aplicando a equação da velocidade e substituindo s por 0,34 m, obtemos:

$$v = (-1,3 \cdot 0,34 + 2 \cos(0,34) + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = 1,86 \text{ m/s}.$$

Para finalizar o que foi solicitado devemos então plotar as curvas de movimento do pistão em gráficos de velocidade por posição e de aceleração por posição. Inicialmente, construímos uma tabela com vários valores para a velocidade e a aceleração em relação a várias posições partindo do zero até o curso máximo do amortecedor

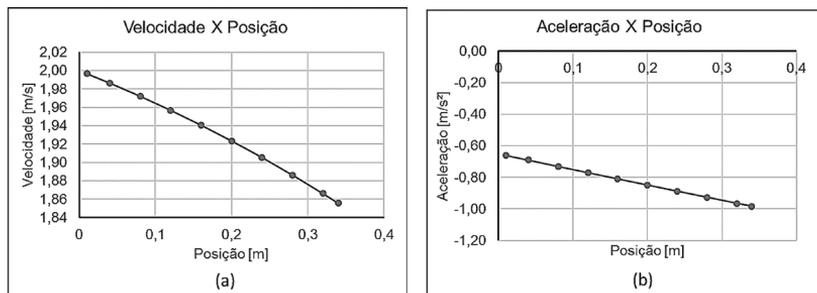
de 0,34 m, como representado na Tabela 1.2. E, com base nesses dados, construímos os gráficos da Figura 1.6.

Tabela 1.2 | Dados determinados para a posição e velocidade do pistão em diferentes posições.

Posição [m]	Aceleração [m/s^2]	Velocidade [m/s]
0,01	-0,66	2,00
0,04	-0,69	1,99
0,08	-0,73	1,97
0,12	-0,77	1,96
0,16	-0,81	1,94
0,2	-0,85	1,92
0,24	-0,89	1,91
0,28	-0,93	1,89
0,32	-0,96	1,87
0,34	-0,98	1,86

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.6 | Gráficos da posição (a) e velocidade (b) do pistão em função da posição



Fonte: elaborados pelo autor.

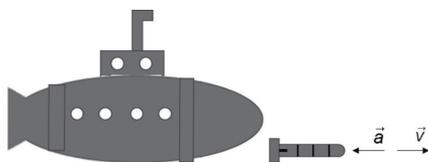
Ao desenvolver a análise do movimento do amortecedor, conseguimos extrair informações relevantes, como as grandezas básicas posição, velocidade instantânea e aceleração instantânea, que são necessárias para a elaboração de seu relatório.

Análise do movimento de um torpedo no oceano

Descrição da situação-problema

As Forças Armadas Brasileiras estão projetando um conjunto de novos armamentos para equipar as embarcações atuais da sua frota. Você trabalha para uma empresa que foi contratada para fazer as análises de deslocamento de um torpedo que será utilizado em um modelo de submarino, uma vez que velocidades baixas de deslocamento do torpedo produzem um impacto que não é suficiente para acionar a carga explosiva do armamento. A tarefa que lhe foi solicitada é determinar o tempo gasto para o torpedo atingir a velocidade de 25 m/s, que é a velocidade mínima aceitável para o dispositivo explodir com o impacto.

Figura 1.7 | Representação do submarino lançando o torpedo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os dados de projeto desse torpedo indicam que ele parte do submarino com velocidade máxima de 85 m/s e que a resistência da água causa uma desaceleração neste torpedo igual $a = -2 \cdot v^2/1000$, sendo v a velocidade do torpedo nas unidades do SI.

Resolução da situação-problema

Para que você analise esse movimento do torpedo, é importante refletir sobre toda a situação, a fim de interpretar de forma correta o que está ocorrendo. Analisando o movimento do torpedo pela Figura 1.6, representado como sendo disparado da esquerda para a direita, podemos considerar positivo esse sentido.

Para determinar a posição do torpedo, como a equação da posição é em função da velocidade ($v = ds/dt$), primeiramente precisamos determinar a equação da velocidade.

Como a desaceleração está descrita em uma função da velocidade $\mathbf{a} = \mathbf{a}(v)$, precisamos definir a equação que relaciona a velocidade em função do tempo $\mathbf{v} = \mathbf{f}(t)$, e para isso aplicamos a equação $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, que relaciona as três variáveis velocidade, aceleração e tempo, e definimos a condição inicial conhecida, com velocidade inicial de 85 m/s e tempo inicial 0:

$$a = \frac{dv}{dt} = -2 \cdot v^2 / 1000$$

$$\frac{dv}{-0,002 \cdot v^2} = dt.$$

Para obter a equação em função da velocidade e do tempo, integramos esta última equação em relação à velocidade inicial de 85 m/s e tempo inicial 0, de modo que:

$$\int_{85}^v \frac{dv}{-0,002 \cdot v^2} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{0,002} \cdot \left(-\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{v} \right) \Big|_{85}^v = (t) \Big|_0^t,$$

substituindo os valores para a velocidade e o tempo, obtemos:

$$-\frac{1}{0,002} \cdot \left(-\frac{1}{1} \right) \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{85} \right) = (t - 0)$$

$$t = \frac{1}{0,002} \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{85} \right).$$

Para determinar o tempo para atingir a velocidade de 25 m/s, substituímos v por 25 m/s:

$$t = \frac{1}{0,002} \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{85} \right) = 14,12 \text{ s}.$$

Portanto, o tempo que o torpedo leva para atingir a velocidade de 25 m/s após ser lançado pelo submarino é 14,12 segundos. Chegando a esse resultado, você cumpriu a tarefa que lhe foi proposta.

Faça valer a pena

1. Quando uma partícula que está em movimento retilíneo, que nada mais é que um movimento em linha reta, apresenta uma posição específica em variados instantes de tempo. Em uma situação específica na qual a aceleração é constante ao longo de todo o movimento de um corpo, diz-se que este corpo está em movimento uniformemente acelerado. Partindo dessa ideologia de aceleração constante para movimentos retilíneos, obtêm-se equações definidas para determinar a velocidade v , posição s , aceleração a e o tempo t .

Em relação às equações definidas para a velocidade v , posição s , aceleração a e o tempo t de uma partícula em movimento uniformemente acelerado, analise as assertivas e assinale a alternativa que corresponda à sequência correta de verdadeira (V) ou falsa (F).

- I. A equação que representa a velocidade final de uma partícula em movimento uniformemente acelerado para um determinado intervalo de tempo é $v_0 + a_c \cdot t$.
- II. A equação que representa a posição final de uma partícula em movimento uniformemente acelerado para um determinado intervalo de tempo é $s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_c \cdot t^2}{2}$.
- III. A equação que representa a velocidade final de uma partícula em movimento uniformemente acelerado sem levar em conta o intervalo de tempo é $\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a_c \cdot (s - s_0)}$.
- IV. As equações do movimento uniformemente acelerado são utilizadas para partículas com movimentos que apresentam aceleração variável, assim como para partículas que estão em movimentos com acelerações constantes.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) I-V; II-V; III-F; IV-F. | d) I-V; II-V; III-F; IV-V. |
| b) I-F; II-V; III-V; IV-F. | e) I-F; II-F; III-F; IV-V. |
| c) I-V; II-V; III-V; IV-F. | |

2. Em muitos problemas relacionados à cinemática de partículas, a equação que relaciona a posição e o tempo do movimento para partículas que apresentam movimento retilíneo não é conhecida de quem analisa o movimento, e assim se faz necessário determinar essa relação de função entre a coordenada de posição e tempo por meio da integração sucessiva da aceleração. Com base nessa analogia, é possível expressar a aceleração em relação à posição, ao tempo e à velocidade, ou até mesmo uma relação

que expresse a aceleração com todas essas outras grandezas; para isso, devemos partir das equações fundamentais do movimento retilíneo:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Um sistema de combate a incêndio está instalado em uma planta industrial de modo que, ao ser acionado, a água sai pressurizada da tubulação desse sistema até atingir um tanque de armazenamento de combustível inflamável. Pelo projeto desse sistema de combate de incêndio, sabe-se que a água que sai da tubulação apresenta velocidade definida por $v = (0,8/s) \text{ m/s}$ (sendo s a posição da partícula de água saindo da tubulação) e que a distância da saída da tubulação até o tanque é de 6 metros. A partir das informações fornecidas pelo texto, considere as assertivas a seguir:

- I. O tempo gasto por uma partícula de água do sistema de combate de incêndio até o tanque de combustível é 22,5 segundos.
- II. A aceleração de uma partícula de água ao atingir o tanque de combustível é $0,01 \text{ m/s}^2$.
- III. A distância horizontal entre o sistema de combate a incêndio e o tanque de combustível é 6 metros.
- IV. O movimento que uma partícula de água saindo do sistema de combate a incêndio está submetida até atingir o tanque de combustível é do tipo movimento retilíneo uniformemente acelerado.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta **correta**:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e IV estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas as afirmativas I, II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas II, III e IV estão corretas.

3. Em uma simulação física, constatou-se que, para um certo instante de tempo, uma partícula vinda do espaço entra na atmosfera da Terra com uma velocidade definida pela equação:

$$v = v_0 \left[2,5 - \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot t}{Y} \right) \right],$$

sendo Y uma constante que varia conforme a distância da partícula em relação à superfície da Terra.

Determinar a posição da partícula para a condição em que ela parte da origem v_0 para um tempo de movimento equivalente a $t = 12Y$.

- a) $v_0 \cdot 30Y$.
- b) $v_0 \cdot Y$.
- c) $v_0 \cdot 25$.
- d) $v_0 \cdot 5Y$.
- e) $22v_0 \cdot Y$.

Seção 1.2

Movimento retilíneo tridimensional

Diálogo aberto

Na seção anterior foram apresentados conceitos de posição, velocidade e aceleração para partículas, desde movimentos simples com velocidade constante até movimentos com velocidade e aceleração instantânea pela relação de derivadas.

Na presente seção veremos que uma condição largamente estudada para comparar o movimento de dois elementos diferentes é a análise do movimento de dois ou mais corpos considerados partículas ao longo de uma mesma trajetória. Nessa condição, pode-se analisar inicialmente o movimento de cada partícula isoladamente, para então analisar o movimento de todas as partículas envolvidas. Na prática, isso significa que você, aluno, estudará movimentos de roldanas que se deslocam em conjunto, ou poderá comparar o movimento de dois componentes de uma máquina, e com esses conhecimentos estará apto, por exemplo, para trabalhar em empresas de projetos de movimentação de cargas, assim como analisar o deslocamento de cargas em pontes rolantes e guindastes.

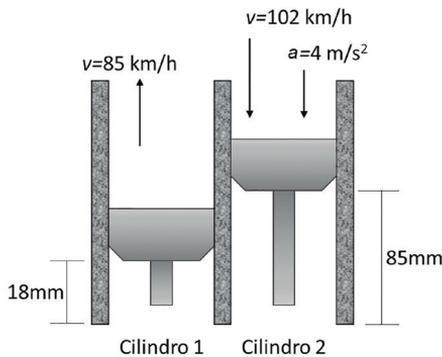
Vamos retomar que você, aluno, na presente Unidade, está no papel do engenheiro responsável pela obtenção dos dados de um novo modelo de veículo que será lançado no mercado. Como já definiu os parâmetros para o amortecedor, agora precisa determinar os dados solicitados pela montadora para a condição de trabalho do motor desse veículo.

Para que seja possível uma análise do tempo correto de funcionamento do motor do veículo, a montadora solicitou que seja determinado o momento em que o pistão do primeiro cilindro do motor estará na mesma altura do pistão do segundo cilindro. A montadora passou a informação de que se trata de um conceito de motor de alta *performance*, no qual os pistões estão conectados no virabrequim por bielas; há, porém, um virabrequim

para cada pistão, de modo que os movimentos dos pistões não são necessariamente dependentes, o que justifica a necessidade de realizar essa análise.

Em um determinado instante, o pistão do cilindro 2 está a 85 mm da base do motor, com velocidade de movimento de descida 102 km/h e aceleração constante 4 m/s^2 , enquanto o pistão do cilindro 1 se desloca de baixo para cima em direção ao pistão do cilindro 2, à velocidade constante 85 km/h, em uma distância de 18 mm da base do motor, como indicado na Figura 1.8.

Figura 1.8 | Representação dos cilindros do motor analisado.



Fonte: elaborada pelo autor.

Como engenheiro responsável em apresentar os resultados das solicitações da montadora, chegou a hora de trabalhar na segunda atividade solicitada. Você precisa analisar o motor do veículo, apresentando o momento em que os pistões vão estar na mesma altura dentro do motor, e qual será a distância entre a base do motor e os pistões.

Para a conclusão dessa tarefa é importante analisar o problema como um todo e identificar as condições para a resolução. Inicialmente se fazem alguns questionamentos: Como deve ser analisado o movimento de cada pistão? Considera-se que ambos estejam ligados ou não?

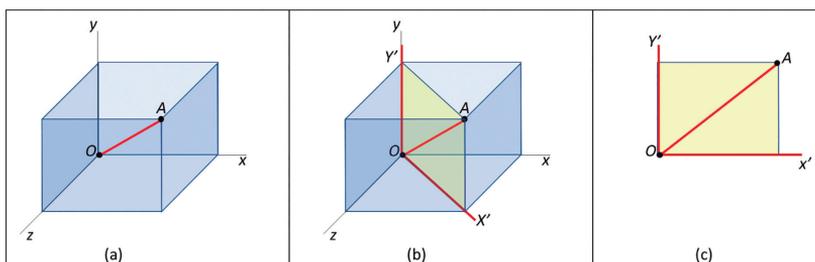
Para desenvolver a análise do motor e conquistar o conhecimento para análises de movimentos dependentes de partículas de modo geral, a fim de conseguir analisar várias outras situações, vamos ao estudo desta seção.

Não pode faltar

Prezado aluno, nesta unidade vamos continuar com o estudo da cinemática do movimento de partículas que se deslocam em trajetória linear; agora faremos, porém, uma analogia ao movimento retilíneo tridimensional para então avançarmos em análises do movimento de partículas que formam um sistema.

No movimento tridimensional de partículas continuamos a analisar os vetores responsáveis pelo movimento, como o vetor da velocidade e aceleração; vamos fazer, porém, a análise dos vetores em três direções, e para isso utilizamos o sistema referencial de coordenadas cartesianas. A Figura 1.9 mostra esse eixo de coordenadas cartesianas com a representação do movimento de uma partícula que sai da origem O e se desloca até o ponto A , executando assim um movimento no sentido da diagonal do cubo.

Figura 1.9 | Representação do movimento de uma partícula da origem O ao ponto A : (a) com movimento tridimensional, (b) representação do plano do movimento e (c) representação plana do movimento tridimensional.



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Como os vetores da velocidade e da aceleração devem ser representados em casos de movimento retilíneo tridimensional? Devem ser representados seguindo o eixo x , o eixo y , o eixo z ou seguindo a linha do deslocamento?

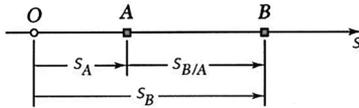
Analisando a Figura 1.9 percebemos como o movimento retilíneo, mesmo que em uma condição inicial tridimensional, pode ser representado em uma condição bidimensional. Podemos ainda considerar um eixo exatamente sobre a direção da origem O

ao ponto A, o que vai resultar em uma representação ainda mais simples para o movimento dessa partícula.

Tratando agora do estudo do movimento retilíneo de várias partículas, é importante poder definir a mesma origem do movimento para todas as partículas analisadas, assim como definir o mesmo instante inicial de tempo.

Podemos ainda definir a posição relativa de uma partícula em analogia a outra, como no movimento de duas partículas A e B longo de uma linha (situação representada na Figura 1.10).

Figura 1.10 | Movimento de duas partículas em uma mesma linha.



Fonte: adaptado de Beer (2012, p. 622).

Com base na Figura 1.10 podemos definir a posição relativa $s_{B/A}$ da partícula B em relação à partícula A através das coordenadas s_A e s_B , da seguinte forma:

$$s_B = s_A + s_{B/A} \rightarrow s_{B/A} = s_B - s_A.$$

Considerando o sentido positivo do movimento sobre o eixo s representado na Figura 1.10 podemos definir que, se $s_{B/A}$ for positivo, significa que a partícula B está à frente de A (ou seja, B está à direita de A), mas se $s_{B/A}$ apresentar um sinal negativo, significa que é a partícula A que está à frente de B, (ou seja, B está à esquerda de A).

Analisando a equação $s_B = s_A + s_{B/A}$ que acabamos de definir, e lembrando da seção anterior em que definimos a velocidade como $v = ds/dt$, podemos definir a taxa de variação da posição $s_{B/A}$ como a velocidade relativa da partícula B em relação à partícula A da seguinte forma:

$$s_{B/A} = s_B - s_A \rightarrow ds_{B/A} = ds_B - ds_A$$

$$ds_{B/A} = ds_B - ds_A,$$

e como $v = ds/dt$ e $ds = v \cdot dt$, chegamos à relação da velocidade:

$$v_{B/A} \cdot dt = v_B \cdot dt - v_A \cdot dt$$

$$v_{B/A} = v_B - v_A \rightarrow v_B = v_A + v_{B/A}.$$

De maneira direta, obtemos que a velocidade relativa da partícula B em relação à partícula A equivale a $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. E, analisando o sinal de $\mathbf{v}_{B/A}$, definimos que, se for positivo, significa que a partícula B se desloca no sentido positivo em relação a A, e se o sinal for negativo, significa que a partícula B se desloca no sentido negativo da trajetória, quando observado a partir da partícula A.

Seguindo a analogia que fizemos para definir a velocidade por meio da posição, podemos agora definir então a aceleração, uma vez que temos a relação da velocidade. Assim, considerando que a taxa de variação da velocidade é definida por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, e relacionando-a com a equação da velocidade $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ que acabamos encontrar, chegamos à relação de que, derivando a velocidade, determinamos a aceleração do seguinte modo:

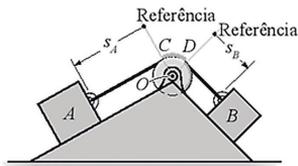
$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \rightarrow d\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{v}_B - d\mathbf{v}_A \rightarrow \mathbf{a}_{B/A} \cdot dt = \mathbf{a}_B \cdot dt - \mathbf{a}_A \cdot dt$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \rightarrow \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Essas relações que acabamos de definir são úteis quando analisamos partículas que se movimentam em uma linha reta e que não dependem umas das outras; podemos nos deparar, porém, com casos em que as partículas analisadas formem um sistema no qual o movimento de uma partícula dependa de outra, ou ainda, uma partícula gere o movimento de outra.

Esse movimento de partículas ligadas umas às outras é denominado movimento dependente, e precisamos fazer novas observações para podermos descrevê-lo. Um exemplo clássico dessa condição é o caso de elementos conectados por cordas inextensíveis, como representado na Figura 1.11.

Figura 1.11 | Representação de partículas (apresentadas como pesos) presas uma a outra por um cabo.

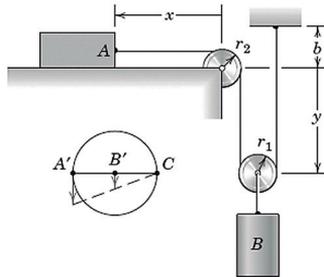


Fonte: Hibbeler (2011, p. 63).

Se analisarmos outra situação na qual há relação de roldanas por onde o cabo passa, alguns casos são um pouco mais complexos. No caso da Figura 1.12, ao compararmos os movimentos dos blocos

A e B, percebemos que o bloco A tem movimento duas vezes mais rápido que o do bloco B, já que este último está fixo em uma polia na qual o cabo que passa por ela o movimenta tanto do lado esquerdo quanto do lado direito da polia; já o bloco A está preso na extremidade do cabo, e assim qualquer movimento no cabo causa movimento de mesma intensidade no bloco A.

Figura 1.12 | Representação de duas partículas (pesos) ligados por meio de um cabo em uma relação de polias.



Fonte: Meriam (2009, p. 73).

Analisando agora apenas o cabo, e definindo o seu comprimento por meio das notações apresentadas na Figura 1.12, podemos fazer a relação de que seu comprimento L equivale a:

$$L = x + l_{r_2} + y + y + l_{r_1} + b,$$

em que l_{r_2} equivale ao valor do comprimento do cabo que passa pela polia de raio r_2 , e l_{r_1} equivale ao valor do comprimento do cabo que passa pela polia de raio r_1 .

Sabemos que o comprimento b , l_{r_2} e l_{r_1} são constantes, e lembrando que $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, derivando uma vez a equação do comprimento do cabo uma vez conseguimos definir a relação da velocidade, e com a segunda derivada da relação do comprimento do cabo definimos a relação para a aceleração, como segue.

$$L = x + l_{r_2} + 2y + l_{r_1} + b \rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dl_{r_2}}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dl_{r_1}}{dt} + \frac{db}{dt}$$

$$0 = v_x + 0 + 2v_y + 0 + 0 \rightarrow v_x = -2v_y.$$

Derivando agora a velocidade (ou seja, a segunda derivada da relação do comprimento), definimos a aceleração.

$$v_x = -2v_y \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -2\frac{dv_y}{dt} \rightarrow a_x = -2a_y,$$

sendo v_x e a_x respectivamente a velocidade e a aceleração do bloco A em relação ao bloco B. Da mesma analogia, v_y e a_y representam respectivamente a velocidade e a aceleração do bloco B em relação ao bloco A.

Nesse sistema, representado pela Figura 1.12, conhecendo-se apenas uma variável, x ou y , é suficiente para determinar as posições da outra variável, e assim definimos que se trata de um sistema com apenas um grau de liberdade.

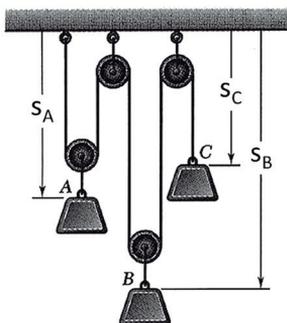


Pesquise mais

Alguns casos de análises do movimento dependente de partículas dependem de sabermos duas variáveis para poder definir as posições das outras partes do sistema. Para compreender melhor esta outra condição, leia o item "Dois graus de liberdade", do Capítulo 2/9 do livro Mecânica para Engenharia: Dinâmica, de Meriam (2009), páginas 73 e 74.

Continuando com o movimento dependente de partículas (representadas como blocos), consideremos agora a analogia de sistemas que apresentem três blocos, como mostrado na Figura 1.13.

Figura 1.13 | Representação de 3 partículas ligadas por um cabo inextensível.



Fonte: adaptado de Beer (2012, p.623).

Analisando a Figura 1.13, como as distâncias da parede ao centro das polias, das polias aos blocos e o comprimento do cabo que passa ao redor das polias serão sempre os mesmos, podemos desconsiderá-los, ao analisar o comprimento do cabo, mas devemos ter consideração especial aos comprimentos s_A , s_B e s_C .

Os comprimentos s_A e s_B são medidas para o cabo nos dois lados das polias A e B respectivamente, enquanto o comprimento s_C é uma medida apenas do lado direito da polia C; assim, o comprimento do cabo é representado pela equação:

$$s_A + s_A + s_B + s_B + s_C = \text{constante}.$$

$$2s_A + 2s_B + s_C = \text{constante}.$$

Continuando a análise de sistemas em que a relação do movimento é linear, através da derivada primeira e da derivada segunda da relação dos comprimentos que acabamos de definir chegamos nas relações:

$$2v_A + 2v_B + v_C = 0 \text{ e } 2a_A + 2a_B + a_C = 0.$$



Assimile

Sempre que analisamos um cabo que passa por polias, devemos primeiramente identificar quais partes desse cabo apresentam movimento e quais terão comprimento constante ao longo da análise.

Sempre a parte do cabo que passa pela polia terá comprimento constante, uma vez que o diâmetro da polia não muda ao longo da análise. O mesmo ocorre para o cabo que prende uma polia a um apoio.

Portanto, o ponto principal para análise de partículas que estejam ligadas é identificar o que será constante ao longo do movimento para sabermos o que considerar e o que não considerar ao montar a equação que represente a situação.

Pode ser necessário analisar, ainda, uma situação na qual partículas não apresentem deslocamento regular em todo seu movimento, de modo que não podemos utilizar apenas uma equação matemática para descrever sua velocidade, aceleração e deslocamento. Em casos como esses fazemos uso de gráficos para representar o movimento de uma partícula, uma vez que as equações fundamentais da velocidade e aceleração têm relações geométricas com os gráficos que as representam.

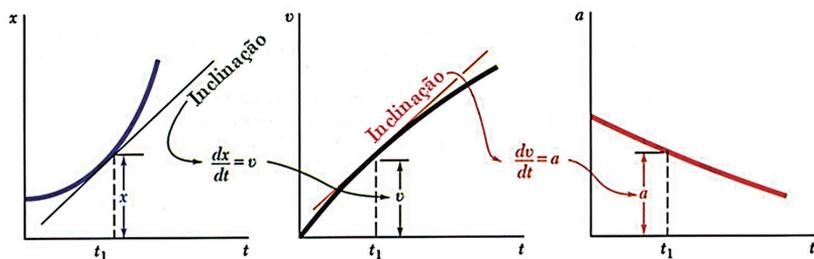
Outro fator que nos leva a análise gráfica do movimento de partículas é o fato de muitos resultados de análises experimentais e reais produzirem gráficos, normalmente por meio de sensores; assim, não são aplicadas equações, e então relacionamos esses

gráficos com as equações que o representam para diferentes instantes de tempo do movimento do objeto em análise.

Uma analogia inicial que podemos definir é a relação direta existente entre os gráficos que possam representar o movimento de uma partícula, uma vez que, a partir de um gráfico do movimento de uma partícula que represente ao menos duas das variáveis de deslocamento – velocidade, aceleração e tempo –, outros gráficos podem ser desenvolvidos, relacionando-se outras duas variáveis até conseguir todas as variáveis do movimento da partícula, já que estas se relacionam pelas equações fundamentais: $v = \frac{dx}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt}$.

A equação $v = dx/dt$ nos leva à verificação que a velocidade representa a inclinação da curva do movimento obtida pelo gráfico do deslocamento em função do tempo para cada instante de tempo, como representado na Figura 1.14.

Figura 1.14 | Relação gráfica entre as variáveis deslocamento, velocidade, aceleração e tempo



Fonte: Beer (2012, p. 634).

Essa relação de gráficos é muito útil quando analisamos uma partícula que apresenta diferentes condições de movimento, de modo que, em certos intervalos de tempo, apresenta uma diferente condição de deslocamento, velocidade e aceleração. Assim, não precisamos de uma grande quantidade de equações definidas para representar esse movimento, e sim gráficos que, como vimos, se relacionam, e assim definimos apenas as equações para o trecho de movimento que se faz necessário.

Já pela equação $a = dv/dt$ podemos definir que a inclinação da curva gerada pelo gráfico da velocidade em função do tempo agora representa a aceleração da partícula (relação também apresentada na Figura 1.14).

Se continuarmos a relacionar as equações fundamentais com gráficos do movimento de uma partícula, podemos tirar mais algumas conclusões em relação às áreas desses gráficos, de modo que, se integramos a equação fundamental da velocidade

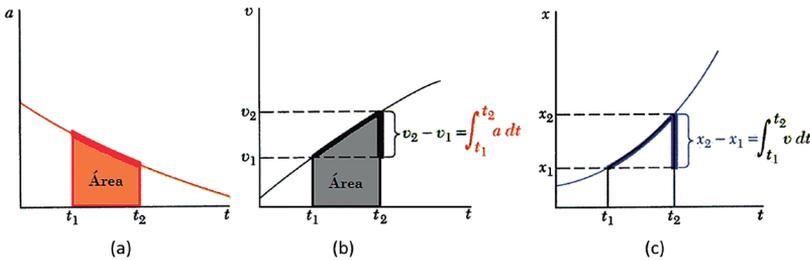
$$dx = v \cdot dt \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt ,$$

definimos que, para um determinado tempo específico, a área sob a curva do gráfico da velocidade em função do tempo representa a variação do deslocamento da partícula em análise, como está representado na Figura 1.15 (c). Utilizando essa mesma analogia para a equação fundamental da aceleração, chegamos na seguinte integral:

$$dv = a \cdot dt \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt \rightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt .$$

e essa relação representa a área sob a curva do gráfico da aceleração

Figura 1.15 | Representação da relação das áreas dos gráficos com as integrais das equações fundamentais do movimento retilíneo.



Fonte: Beer (2012, p. 634).

e tempo para um determinado intervalo de tempo específico variando de t_1 a t_2 .

Como todas as variáveis deslocamento, velocidade, aceleração e tempo estão relacionadas, ao partir do gráfico da aceleração em função do tempo definimos o gráfico da velocidade em função do tempo, que, por sua vez, nos dá a opção de obter o gráfico do deslocamento em função do tempo, como na sequência (a), (b) e (c) da Figura 1.15.

Apesar da representação gráfica ser bastante útil e prática, devemos atentar que a área sob a curva do gráfico da velocidade em

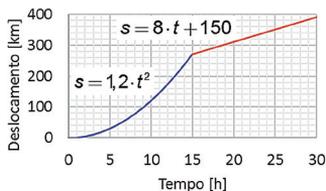
função do tempo está relacionada com a variação do deslocamento, e não com seu valor escalar, ou seja, essa área representa o quanto a partícula se deslocou para um determinado momento, e não o ponto final do seu deslocamento. E uma segunda analogia para o eixo do tempo nos gráficos também se faz necessária, de modo que, quando analisamos áreas acima desse eixo que representa o tempo, analisamos uma partícula que apresentou um movimento com deslocamento positivo ou velocidade positiva, mas se a área estiver abaixo do eixo do tempo, significa que o movimento da partícula apresentou um decréscimo do deslocamento ou da velocidade.



Exemplificando

Uma embarcação tem monitorado constantemente seu deslocamento ao longo da trajetória que percorre entre um porto e outro. Como o deslocamento varia em função da correnteza marítima, os sensores que registam o deslocamento da embarcação produziram o gráfico apresentado na Figura 1.16, sendo que, a partir dos dados desse gráfico, é necessário determinar o gráfico da aceleração em função do tempo para uma melhor análise do deslocamento da embarcação.

Figura 1.16 | Representação gráfica do deslocamento de uma embarcação durante 30 horas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do gráfico da Figura 1.16, como são conhecidas as equações que representam as duas condições do deslocamento, precisamos definir as equações para a velocidade e posteriormente definir as equações para a aceleração, e então obter seu gráfico.

Pela relação $v = ds/dt$ derivamos as equações do deslocamento para definirmos as equações da velocidade.

Assim, de 0 a 15 horas:

$$v = \frac{d}{dt}(1,2 \cdot t^2) \rightarrow v = 2,4 \cdot t \text{ [km/h];}$$

E de 15 a 30 horas:

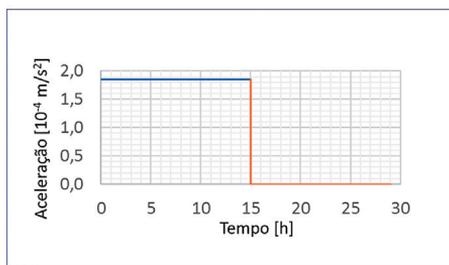
$$v = \frac{d}{dt}(8 \cdot t + 150) \rightarrow v = 8 \text{ km/h} = 2,22 \text{ m/s.}$$

Para definirmos as equações da aceleração, derivamos as equações da velocidade, uma vez que $a = dv/dt$; mas, como para o caso do tempo entre 15 a 30 horas a derivada vai ser zero, consideramos a aceleração apenas para o trecho de 0 a 15 horas, de maneira que:

$$a = \frac{d}{dt}(2,4 \cdot t) \rightarrow a = 2,4 \text{ km/h}^2 = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

Portanto, o gráfico da aceleração é representado na Figura 1.17.

Figura 1.17 | Representação gráfica da aceleração ao longo do movimento da embarcação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sem medo de errar

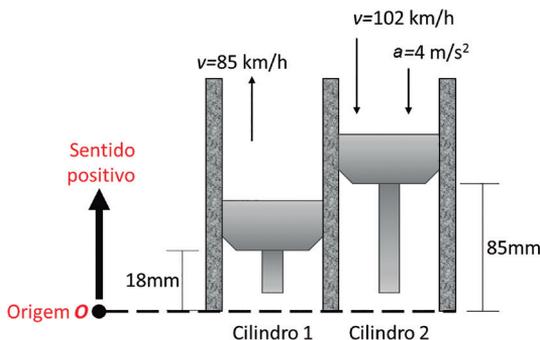
Caro aluno, lembrando da situação que foi proposta a você, na qual está no papel do engenheiro responsável em apresentar os resultados das solicitações de uma montadora de veículos, nesta seção você ficou responsável em analisar o movimento dos pistões de um motor de modo que deve determinar o momento em que o pistão do primeiro cilindro do motor estará na mesma altura do pistão do segundo cilindro, e, nessa condição, a que distância da base do motor os pistões vão estar.

Um bom método para parametrização da situação é esboçá-la, indicando as condições iniciais de posição, velocidades e tempo, definindo a origem da posição, o sentido positivo do deslocamento e qual pistão está na condição de tempo zero referencial.

Pelas informações do motor passadas pela montadora sabe-se que, em um determinado instante, os pistões dos cilindros 1 e 2 estão nas condições apresentadas na Figura 1.18. E podemos iniciar

o esboço da situação definindo a origem O na base do motor e o sentido positivo sendo de baixo para cima, como indicado também na Figura 1.18.

Figura 1.18 | Representação da origem O e do sentido positivo para a análise dos pistões do motor.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A posição vertical inicial s_0 do Pistão 2 é de 85 mm (ou 0,085 m); sua velocidade inicial v_0 é -102 km/h ou $-28,33$ m/s (o sinal é negativo, pois o vetor da velocidade tem sentido contrário do que foi definido como positivo), e a aceleração a é -4 m/ s^2 (o sinal da aceleração é negativo, pois a aceleração neste caso aumenta a velocidade; assim, seu vetor tem mesmo sentido da velocidade, de cima para baixo, ou seja, sentido negativo, por estar contrário do adotado como positivo na Figura 1.18).

Como o Pistão 2 tem aceleração constante, seu movimento é uniformemente acelerado; assim, definimos o deslocamento da seguinte maneira:

$$s_{P2} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0,085 + (-28,33) \cdot t + \frac{(-4) \cdot t^2}{2} = 0,085 - 28,33 \cdot t - 2t^2.$$

A velocidade também é definida pela relação do movimento uniformemente acelerado:

$$v_{P2} = v_0 + a \cdot t = -28,33 - 4 \cdot t.$$

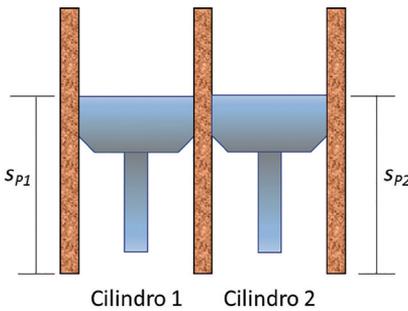
Analisando o Pistão 1, como seu movimento apresenta velocidade constante, deduzimos que seu movimento é então do tipo uniforme, e considerando a mesma origem e sentido adotado positivo na

análise do movimento do Pistão 2, observamos que a posição vertical inicial s_0 do Pistão 1 é 18 mm (ou 0,018 m) e que sua velocidade constante v_{P1} é 85 km/h, ou seja, 23,61 m/s. Aplicando as relações para o movimento uniforme, definimos para o Pistão 1:

$$s_{P1} = y_0 + v_{P1} \cdot t = 0,018 + 23,61 \cdot t$$

Agora que já definimos as equações dos movimentos dos dois pistões, devemos relacionar esses movimentos para definir quando os pistões estarão à mesma altura e a que distância da base do motor os pistões estarão. A Figura 1.19 representa essa condição.

Figura 1.19 | Representação da condição em que os pistões estão na mesma posição.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando a Figura 1.19 percebemos que, no instante em que os pistões estão na mesma altura $s_{P1} = s_{P2}$; assim, substituindo os valores de s_{P1} e s_{P2} que já definimos anteriormente:

$$s_{P1} = s_{P2} \rightarrow 0,018 + 23,61 \cdot t = 0,085 - 28,33 \cdot t - 2 \cdot t^2$$

$$2t^2 + 51,91t - 0,067 = 0,$$

a partir dessa equação do segundo grau, aplicamos a fórmula de Bhaskara para chegarmos nos valores de t :

$t = \frac{-68,06 \pm 68,063938}{4}$ e resolvendo para os sinais positivo e negativo da raiz:

$$t_+ = 0,003938s \text{ e } t_- = -34,030984s.$$

Como analisamos os movimentos a partir do tempo inicial 0, o momento em que os pistões estarão na mesma altura dentro do motor é $t = 0,003938$ s.

Já para definirmos a que distância da base do motor os pistões estarão, devemos utilizar o tempo em que os pistões estão na mesma altura e substituir em uma das equações de posição do pistão. Aplicando a equação obtida anteriormente do deslocamento para o Pistão 1, obtemos:

$$s_{p1} = 0,018 + 23,61 \cdot t = 0,018 + 23,61 \cdot 0,0013$$

$$s_{p1} = 0,0487 \text{ m}$$

Assim concluímos a análise para o movimento dos pistões deste motor. Concluímos então a segunda tarefa solicitada pela montadora e contribuimos com mais uma análise do veículo.

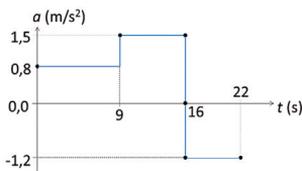
Avançando na prática

Análises gráficas da velocidade e posição de um drone em movimento retilíneo

Descrição da situação-problema

Um novo drone com massa de apenas 0,4 kg é testado em um campo aberto e foi programado de modo que, após atingir a altitude de 10 metros, ele deveria movimentar-se em linha reta horizontalmente sobre essa região por 0,5 km. Analisando-se somente o movimento horizontal do drone sobre o campo aberto, sabe-se que ele partiu com velocidade inicial de 7 m/s e, com apenas 22 segundos de voo, parou de deslocar-se horizontalmente e aterrissou. A fim de determinar se o drone percorreu 0,5 km na horizontal, ou se aterrissou antes devido a algum equívoco de programação, você deve analisar o gráfico da aceleração do drone enquanto estava em movimento horizontal acima do campo aberto (Figura 1.20) para construir as curvas de $v-t$ e $s-t$ para o tempo de 22 segundos e apresentar ao líder do projeto do drone esses gráficos e a conclusão se o drone conseguiu percorrer 0,5 km no movimento horizontal.

Figura 1.20 | Representação gráfica da aceleração do drone enquanto este se deslocava em linha reta e horizontal acima do campo aberto.



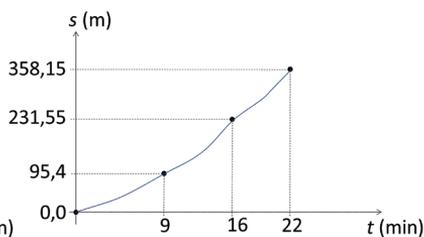
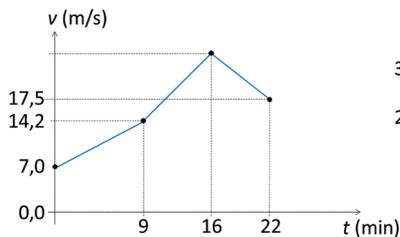
Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

De condição inicial temos $t = 0$ e $v = 7 \text{ m/s}$. Para montar o gráfico v - t devemos determinar a área das regiões da aceleração no gráfico da Figura 1.20, enquanto para montar o gráfico s - t devemos determinar a área sob a curva do gráfico v - t partindo do deslocamento inicial zero.

Figura 1.21 | Representação das tabelas e gráficos obtidos a partir do gráfico inicial da aceleração.

Tempo	Área sob a curva a - t (velocidade estimada)	Área sob a curva v - t (posição estimada)
0s	$v_0 = 7 \text{ m/s}$	$s_0 = 0 \text{ m}$
0 a 9s	$\Delta s = v_f - v_o$ $\Delta v = 0,8(\text{m/s}^2) \cdot 9(\text{s}) = 7,2 \text{ m/s}$ $v = 14,2 \text{ m/s}$	$\Delta s = [7(\text{m/s}) \cdot 9(\text{s}) + \frac{7,2(\text{m/s}) \cdot 9(\text{s})}{2}] = 95,4 \text{ m}$ $s = 0 + 95,4 = 95,4 \text{ m}$
9 a 16s	$\Delta v = 1,5(\text{m/s}^2) \cdot 7(\text{s}) = 10,5 \text{ m/s}$ $v = 14,2 + 10,5 = 24,7 \text{ m/s}$	$\Delta s = [14,2(\text{m/s}) \cdot 7(\text{s}) + \frac{10,5(\text{m/s}) \cdot 7(\text{s})}{2}] = 136,15 \text{ m}$ $s = 95,4 + 136,15 = 231,55 \text{ m}$
16 a 22s	$\Delta v = -1,2(\text{m/s}^2) \cdot 6(\text{s}) = -7,2 \text{ m/s}$ $v = 24,7 - 7,2 = 17,5 \text{ m/s}$	$\Delta s = [17,5(\text{m/s}) \cdot 6(\text{s}) + \frac{7,2(\text{m/s}) \cdot 6(\text{s})}{2}] = 126,6 \text{ m}$ $s = 231,55 + 126,6 = 358,15 \text{ m}$



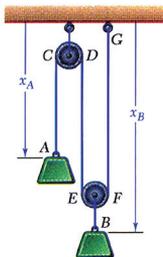
Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo gráfico $s-t$ da Figura 1.21, o drone percorreu apenas 358,15 m; assim, não atingindo 500 m como esperado, indicando que ocorreu algum equívoco na sua programação.

Faça valer a pena

1. As análises para a solução de situações em que partículas apresentam o movimento retilíneo uniforme é útil para casos em que seja analisada uma única partícula ou casos em que duas ou mais partículas têm movimentos dependentes entre si, como representado na Figura 1.22. Portanto, independentemente de analisar o movimento de um sistema com várias partículas ou de apenas uma partícula, utilizam-se as equações de velocidade e de aceleração para compreensão do comportamento das variáveis do deslocamento, velocidade, aceleração e tempo, e o que diferencia a análise de uma partícula da análise de um sistema de partículas com movimento dependente é que neste último caso é necessário relacionar os movimentos, uma vez que uma partícula causa o movimento de outra.

Figura 1.22 | Relação de dependência entre dois blocos ligados por um cabo inextensível.



Fonte: Beer (2012, p. 623).

- I. Para o caso da análise do sistema em que dois blocos (considerados partículas) apresentados na Figura 1.22 apresentam relação entre as coordenadas de posição de maneira linear, uma relação direta entre as velocidades e acelerações podem ser definidas como $v_A + 2v_B = 0$ e $a_A + 2a_B = 0$.

PORQUE

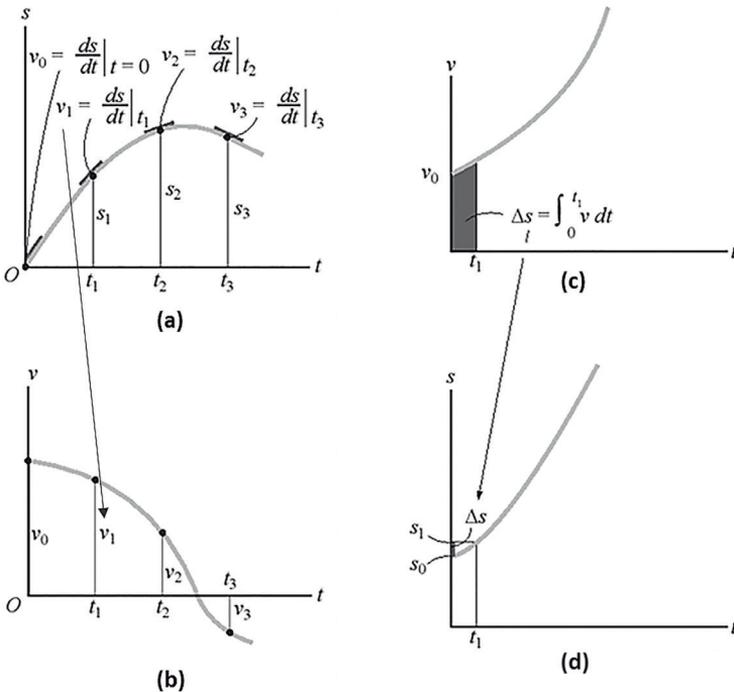
- II. Ao analisar a Figura 1.22 percebe-se que uma relação para o comprimento das regiões do cabo que sofrem variação de comprimento quando um dos blocos se movimenta, define-se a relação $x_A + 2x_B = \text{constante}$. Portanto para definir a relação da aceleração a partir dessa relação dos comprimentos, deve-se derivar uma vez a relação do movimento, enquanto a equação que estabelece a relação das velocidades é definida derivando-se duas vezes a relação dos comprimentos.

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- e) As asserções I e II são proposições falsas.

2. Os movimentos retilíneos de partículas podem ser representados através de gráficos; assim, podem-se utilizar técnicas gráficas para a resolução de problemas sob movimento retilíneo. Essas técnicas gráficas podem ser utilizadas desde a resolução completa de um caso que envolve um movimento retilíneo, e também podem ser utilizadas para ajudar uma solução analítica, ou simplesmente para ajudar a compreender o movimento de uma determinada partícula.

Em relação às técnicas gráficas para analisar um movimento retilíneo, como o da Figura 1.23, são realizadas as afirmações abaixo.

Figura 1.23 | Representação dos gráficos para o deslocamento e velocidade de uma partícula com indicação de suas relações.



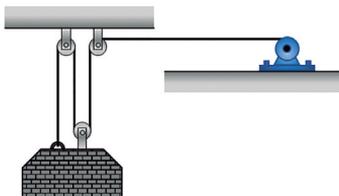
Fonte: Adaptado de Hibbeler (2011, p. 13-14).

- I. A aceleração em um instante de tempo t_1 representa a inclinação da curva *velocidade por tempo*.
- II. A velocidade em um instante de tempo t_1 representa a inclinação da curva *aceleração por tempo*.
- III. A área sob uma curva *velocidade por tempo* entre dois instantes de tempo representa a variação da posição para o mesmo intervalo de tempo.
- IV. A área sob uma curva *aceleração por tempo* entre dois instantes de tempo representa a variação da velocidade para o mesmo intervalo de tempo.
- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

3. Alguns problemas que os engenheiros precisam analisar envolvem situações em que os movimentos de determinados elementos são dependentes, como o que ocorre com o movimento de pesos conectados por cabos passando por polias. Quando há situações em que o movimento de uma partícula depende do movimento de outra partícula devido à restrição imposta por um cabo que as conecta, é necessário que a análise considere essas restrições para que então seja possível determinar o movimento de cada partícula envolvida.

A Figura 1.24 apresenta um bloco preso por um cabo que em um determinado instante se movimenta para baixo com velocidade de 5 mm/s. No instante de tempo de 3 segundos após o início da análise do movimento do bloco, o cabo foi desenrolado em 80 mm do tambor preso ao motor elétrico. Assim, determine a variação da posição do bloco após 5 segundos.

Figura 1.24 | Representação da movimentação de um bloco preso a um motor elétrico por meio de um cabo inextensível.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) 73,3 mm.
- b) 46 cm.
- c) 51,123 mm.
- d) 57,375 mm.
- e) 68,9 cm.

Seção 1.3

Movimento curvilíneo tridimensional

Diálogo aberto

Nas duas últimas seções, estudamos o movimento retilíneo de partículas, nos aprofundamos em análises de posição, velocidade e aceleração instantânea com cálculo diferencial e integral, para, posteriormente, estudarmos movimentos retilíneos mais gerais, a independência e a dependência de movimentos e finalizarmos com as representações gráficas dos movimentos.

Como em muitos casos, o movimento de um elemento qualquer não segue uma simples trajetória linear. Passaremos, então, a estudar partículas com movimentos que seguem uma trajetória curvilínea. Para tais casos, é de grande importância conseguirmos descrever os vetores relacionados ao movimento, como o vetor da posição, o vetor da velocidade e o vetor da aceleração, que são utilizados para prever a trajetória do movimento curvilíneo.

Nesta unidade, você, aluno, assumiu-se como o engenheiro que está prestando serviço à montadora "Racing", na qual vem pesquisando os parâmetros de um novo veículo que se encontra em fase de testes. Como última análise para esse veículo, agora você precisa verificar o movimento do amortecedor ao longo das irregularidades às quais o veículo foi submetido, a fim de determinar a velocidade máxima que o amortecedor atinge.

Os resultados de sensores fixados na suspensão do veículo forneceram equações do movimento do amortecedor nas direções horizontal e vertical, sendo $x = 0,2t^2 + 0,1t$ e $y = 0,67 - (\cos t)/1,5$, para o tempo de 3,2 segundos, o qual foi gasto pelo veículo para passar pela irregularidade da pista. As unidades seguem o SI.

Com base nas equações representativas do movimento do amortecedor ao passar pela irregularidade da pista (equações estas que indicam o movimento curvilíneo, uma vez que se apresentaram movimentos horizontal e vertical), deve-se determinar o valor da máxima velocidade que o amortecedor atingiu e os instantes de tempo, posição e direção correspondentes à velocidade.

E como esta será a última tarefa realizada para a montadora, todos os dados definidos para o veículo devem ser compilados e apresentados

em um relatório final a ser entregue para a montadora, terminando, assim, o serviço de consultoria pelo qual você estava responsável.

Vamos aos estudos dos conceitos que envolvem essa situação de análise de movimento curvilíneo.

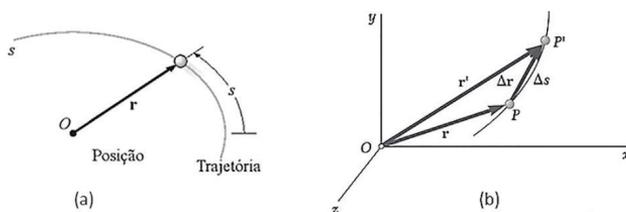
Não pode faltar

Em situações nas quais determinada partícula se desloca por uma trajetória curva, afirmamos que a partícula está em movimento curvilíneo, sendo este que começaremos a estudar.

Vale ressaltar que temos algumas distinções quanto aos conceitos de certos movimentos. Tais conceitos devem estar claros, de maneira a relacionarmos movimentos retilíneos com aqueles que as partículas fazem quando se deslocam em linha reta; movimentos circulares com o deslocamento de partículas ao longo de uma trajetória circular de raio constante, e movimentos curvilíneos com o deslocamento que segue determinada curva, nos quais as partículas percorrem apenas parte de uma trajetória circular.

A Figura 1.25(a) representa o movimento curvilíneo de uma partícula. Em algumas situações, o movimento curvilíneo pode ser observado em três dimensões e, assim, as análises da posição, velocidade e aceleração da partícula são realizadas por meio de vetores nas três dimensões, representados pelos eixos x , y e z (Figura 1.25(b)).

Figura 1.25 | Representação: (a) do movimento curvilíneo de uma partícula e (b) do movimento curvilíneo tridimensional



Fonte: (a) adaptada de Hibbeler (2011, p. 23) e (b) adaptada de Beer; Johnston, Jr.; Cornwell (2012, p. 645).



Assimile

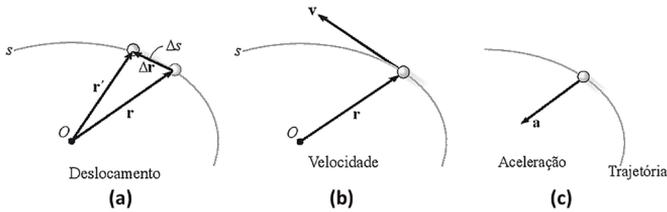
Lembre-se de que, nas seções anteriores, abordamos o movimento retilíneo de partículas, que é realizado em linha reta; agora, passamos ao estudo do movimento curvilíneo de partículas, que é efetuado em uma trajetória curva ou circular, e não mais em uma simples reta.

Analisando a Figura 1.25, observamos que a posição da partícula em movimento curvilíneo é definida pelo vetor de posição \vec{r} , sendo que este vetor depende do tempo. Assim:

$$\vec{r} = r(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}.$$

Para um determinado intervalo de tempo, essa partícula movimenta-se na trajetória curvilínea com deslocamento $\Delta\vec{r}$, definido como $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$, sendo representado na Figura 1.26.

Figura 1.26 | Movimento curvilíneo de uma partícula, com destaque para: (a) vetor da posição r , (b) vetor da velocidade v e (c) vetor da aceleração a

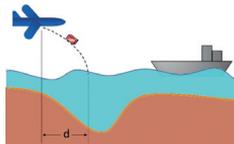


Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 24).

Exemplificando

Uma aeronave precisa descarregar um contêiner no mar para que a embarcação próxima o receba, porém é necessário que o contêiner caia no local exato, pois como na região o mar não é profundo, o alvo do contêiner é a área mais profunda, como indicado na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Representação da aeronave no momento da descarga do contêiner no mar



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a aeronave está a 100 m do mar e que sua velocidade é de 83,5 m/s, a qual distância d o contêiner deve ser solto da aeronave para atingir a região profunda do mar?

O contêiner apresenta um movimento curvilíneo, de modo que podemos representar o seu vetor de posição \vec{r} por meio das coordenadas em x e y :

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}.$$

Analisando, inicialmente, o movimento vertical y do contêiner, definimos que é uniformemente acelerado, devido à aceleração da gravidade, e o movimento horizontal x , uniforme, pelo fato de a aeronave apresentar velocidade constante. Logo:

$$\vec{r} = (x_0 + v_{0x}t)\hat{i} + \left(y_0 + v_0t - \frac{at^2}{2}\right)\hat{j}.$$

Já a componente y , separadamente, define o tempo para o contêiner atingir o mar:

$$y = y_0 + v_0t - \frac{at^2}{2} \Rightarrow -100 = 0 + 0t - \frac{9,81t^2}{2} \Rightarrow t = 4,515\text{s}.$$

Por meio do movimento horizontal x , definimos a distância d como:

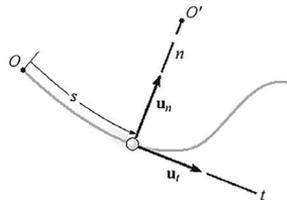
$$x = x_0 + v_{0x}t \Rightarrow x = 0 + 83,5 \cdot 4,515 \Rightarrow d = 377\text{m}.$$

Assim, o contêiner deve ser solto da aeronave no instante em que estiver a 377 m da região profunda do mar e com altitude de 100 m , de modo que o vetor de posição \vec{r} do contêiner, nessa condição inicial, seja:

$$\vec{r} = (377\text{ m})\hat{i} + (100\text{ m})\hat{j}.$$

Para situações nas quais conhecemos a trajetória do movimento curvilíneo de uma partícula, podemos analisar este movimento da partícula utilizando um eixo de coordenadas que atua nos sentidos tangente e normal à trajetória, a fim de termos o eixo u e t com a origem na partícula, como representado na Figura 1.28.

Figura 1.28 | Representação dos eixos u e t (eixo normal e eixo tangente, respectivamente) com origem na partícula para uma trajetória curvilínea conhecida



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 40).

Como vimos, o vetor da velocidade de uma partícula em movimento curvilíneo sempre será tangente a esta trajetória curvilínea, com intensidade escalar definida pela relação $\mathbf{v} = ds/dt$. Dessa maneira, o vetor da velocidade é definido, em relação ao eixo t , como:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t,$$

sendo \vec{u}_t um vetor unitário no eixo t .



O que o componente \vec{u}_t na equação $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$, representação do vetor da velocidade em relação ao eixo t na Figura 1.28, demonstra quanto à direção do vetor da velocidade?

O vetor da aceleração pode ser relacionado com a taxa de variação temporal da velocidade da partícula ($\vec{a} = d\vec{v}/dt$). Considerando a relação $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$, o vetor da aceleração é definido como:

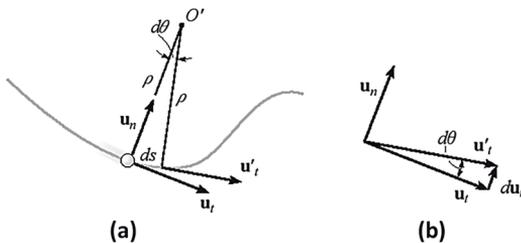
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Já que passaremos a estudar equações com várias derivadas, podemos descrever de maneira mais simples a derivada temporal, usando a representação das derivadas como um ponto sobre a variável (como no seguinte exemplo da velocidade instantânea: $v = ds/dt \Rightarrow v = \dot{s}$). Com esta analogia da representação da derivada por meio de um ponto sobre a variável, podemos demonstrar a equação que acabamos de definir para o vetor da aceleração como:

$$\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{v} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \dot{\vec{u}}_t$$

Nessa relação para o vetor da aceleração, temos a derivada temporal $\dot{\vec{u}}_t$ que ainda não analisamos. Para analisá-la, precisamos levar em conta o movimento da partícula por um segmento ds , como representado na Figura 1.29.

Figura 1.29 | Representação do movimento da partícula em uma trajetória curvilínea, sendo (a) representa o movimento global e (b) detalhe dos vetores \vec{u}_t e $\dot{\vec{u}}_t$



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 40).

Em analogia à Figura 1.29, observamos que o segmento de arco diferencial ds é originado como um segmento do círculo com raio ρ e origem em O' . E, para definirmos a derivada temporal $\dot{\vec{u}}_t$, devemos

analisar a relação entre \vec{u}_t e \vec{u}'_t . Vale ressaltar ainda que \vec{u}'_t representa um novo vetor da posição da partícula, após determinado tempo t de movimento, no qual esta se movimentou de \vec{u}_t para \vec{u}'_t .

Pela analogia de que $d\mathbf{s} = \rho d\theta$, na Figura 1.5(a), resultou $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$. Logo, obtemos:

$$\dot{\vec{u}}_t = \dot{\theta}\vec{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\vec{u}_n = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n.$$

Substituindo os fatores $\dot{v} = \mathbf{a}_t$ e $\dot{\vec{u}}_t = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n$, na equação $\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \dot{\vec{u}}_t$, determinamos que:

$$\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \dot{\vec{u}}_t = \mathbf{a}_t \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n.$$

Por esta analogia de que $\vec{a} = \mathbf{a}_t \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$, podemos afirmar que o vetor da aceleração \mathbf{a} depende de outros dois componentes perpendiculares entre si, que podemos definir como \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_n , sendo $\mathbf{a}_t = \dot{v}$ e $\mathbf{a}_n = v^2/\rho$, como representado na Figura 1.30.

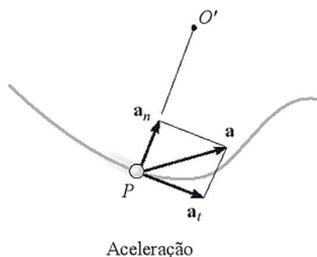


Pesquise mais

Para aprofundar os seus conhecimentos quanto à dedução dos componentes tangencial e normal que representam o vetor da aceleração, consulte a página 669, item 11.13, do livro indicado a seguir:

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON, JR., E. Russel; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

Figura 1.30 | Representação da aceleração decomposta de uma partícula com movimento curvilíneo



Aceleração

Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 41).

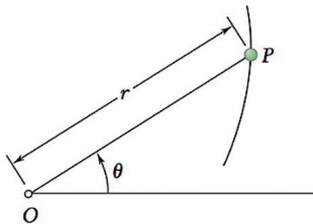
Analisando \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_n na Figura 1.30, definimos ainda que $\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}_t^2 + \mathbf{a}_n^2}$.

Para uma partícula que esteja movimentando-se em trajetória curvilínea, é possível estabelecer as coordenadas n e t , com origem na partícula, de modo que a coordenada t agirá sempre na direção do movimento, porém tangente à curvatura da trajetória, e a coordenada n estará em direção ao centro da curvatura do movimento.

Já em relação à velocidade da partícula, ela seguirá no sentido da componente tangente à curvatura da trajetória, tendo intensidade $\mathbf{v} = ds/dt$.

Ao analisarmos o movimento curvilíneo de uma partícula, podemos nos deparar com alguma situação em que é conhecido um ponto de referência O próximo à partícula (como representado na Figura 1.31), e não o seu trajeto curvilíneo.

Figura 1.31 | Representação de uma partícula em movimento curvilíneo, com um ponto referencial O conhecido



Fonte: adaptada de Beer, Johnston Jr. e Cornwell (2012, p. 672).

Observando a partícula da Figura 1.31, conseguimos definir a sua posição pela coordenada radial r , que é disposta da origem O até a partícula P , e pela coordenada transversal θ , que representa o ângulo entre a linha de referência horizontal e o eixo r .

O vetor de posição r define a posição da partícula. Assim:

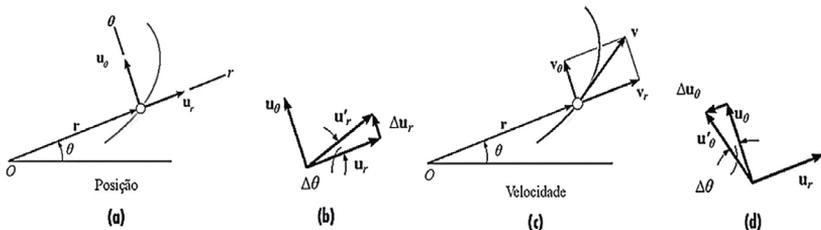
$$\vec{r} = r\vec{u}_r.$$

A fim de determinarmos a velocidade da partícula, devemos montar a derivada temporal para \vec{r} da seguinte forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}.$$

Notamos que, na Figura 1.32(a), para determinado tempo Δt , uma variação no ângulo θ ($\Delta\theta$) altera a direção \vec{u}_r , gerando \vec{u}'_r , (como indicado na Figura 1.32(b)), o que resulta em: $\vec{u}'_r = \vec{u}_r + \Delta\vec{u}_r$.

Figura 1.32 | Movimento curvilíneo de uma partícula P em relação a um ponto referência O , com: (a) representando o movimento geral, (b) representando a variação em \vec{u}_r , (c) representando os vetores da velocidade e (d) representando a variação em \vec{u}_θ



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 53).

Reescrevendo a equação da velocidade, temos:

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta,$$

como representado na Figura 1.32(c).

Ainda com relação à Figura 1.32(c), podemos afirmar que o componente radial da velocidade (\vec{v}_r) representa a taxa de aumento ou redução da coordenada radial r , enquanto o componente transversal (\vec{v}_θ) representa a variação no movimento da partícula por um raio r , sendo chamada de velocidade angular.

E, para definirmos o valor da velocidade escalar de \vec{v} , que, como demonstrado na Figura 1.32(c), será tangente à trajetória do movimento curvilíneo da partícula, devemos montar a relação escalar da resultante de \vec{v}_r e \vec{v}_θ deste modo:

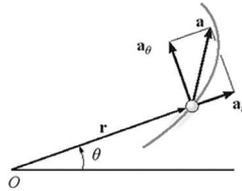
$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Pela relação de que $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}$, conseguimos definir a aceleração

instantânea dessa partícula em movimento curvilíneo como $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Como analisamos anteriormente, o vetor da aceleração no movimento curvilíneo apresenta dois componentes perpendiculares entre si que estão representados na Figura 1.33.

Figura 1.33 | Vetores da aceleração para o movimento curvilíneo de uma partícula P em relação a um ponto de referência O



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 53).

Pela Figura 1.33, obtemos a relação da aceleração instantânea da partícula:

$$\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta.$$

Com a equação da velocidade $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, definimos a aceleração em relação à velocidade da seguinte forma:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta.$$

Com o passar do tempo Δt no movimento da partícula, $\Delta\theta$ faz com que \vec{u}_θ passe a ser \vec{u}'_θ , como indicado na Figura 1.32(d), sendo $\vec{u}'_\theta = \vec{u}_\theta + \Delta\vec{u}_\theta$.

Voltando à relação de que $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$, conseguimos definir ainda as equações correspondentes de a_r e a_θ , como:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \text{ e } a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.$$

E, agora, podemos definir o valor da aceleração como igual a:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2}.$$



Pesquise mais

Para aprimorar seus conhecimentos sobre a dedução do vetor da velocidade e da aceleração para partículas com coordenadas polares de componentes radial e transversal para partículas em movimento curvilíneo, consulte a página 672, item 11.14, do livro indicado a seguir:

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON, JR., E. Russel; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

Com todas essas analogias para o movimento curvilíneo, definimos as relações básicas para determinar os valores da aceleração e da velocidade de partículas que estejam deslocando-se nesse tipo de movimento.

Sem medo de errar

Caro aluno!

No início desta seção, você assumiu o papel do engenheiro que deve analisar o movimento do amortecedor de um veículo, ao passar por uma irregularidade na pista. Por isso, você deve determinar o valor da velocidade máxima que o amortecedor atingiu e os instantes de tempo, posição e direção correspondentes a tal velocidade.

Por meio de sensores fixados na suspensão do veículo, obtemos as equações do movimento do amortecedor: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (0,2t^2 + 0,1t)\hat{i} + (0,67 - (\cos t/1,5))\hat{j}$, com as unidades no SI. E o movimento do amortecedor é de 3,2 segundos.

Podemos iniciar esta resolução determinando a equação que representa a velocidade em x e y , como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} = (0,2t^2 + 0,1t)\hat{i} + (0,67 - (\cos t/1,5))\hat{j} \\ \vec{v} &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = (0,4t + 0,1)\hat{i} + \left(\frac{\text{sent}}{1,5}\right)\hat{j}.\end{aligned}$$

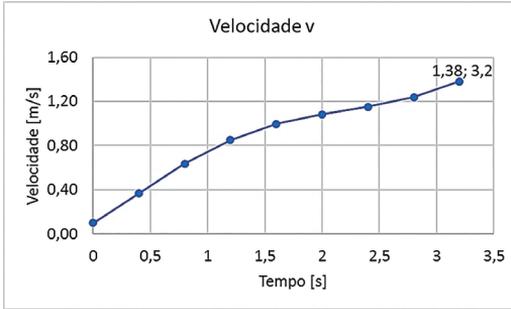
Para determinarmos a velocidade resultante das coordenadas x e y , fazemos:

$$\begin{aligned}v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (0,4t + 0,1)^2 + \left(\frac{\text{sent}}{1,5}\right)^2 \\ v &= \sqrt{\frac{(\text{sent})^2}{2,25} + 0,16t^2 + 0,08t + 0,01}.\end{aligned}$$

Ao calcularmos o valor máximo da velocidade na equação anterior, devemos analisar os seus termos e definir a situação que gera o maior resultado, ou, simplesmente, montamos um gráfico

para essa equação da velocidade e verificamos o ponto de maior valor, como esquematizado na Figura 1.34.

Figura 1.34 | Gráfico para a velocidade no intervalo de tempo de zero a 3,2 segundos



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Pela análise desse gráfico, notamos que o valor máximo da velocidade é obtido para o tempo de 3,2 segundos, ou seja, a velocidade máxima é de 1,38 m/s.

Os instantes de tempo, posição e direção correspondentes a essa velocidade máxima do amortecedor também devem ser determinados. Como já definimos o tempo em que a velocidade é máxima, para estabelecermos a posição, devemos utilizar as equações de x e y indicadas pelos sensores e já apresentadas. Assim:

$$\vec{r} = (0,2t^2 + 0,1t)\hat{i} + (0,67 - (\cos t/1,5))\hat{j}$$

$$\vec{r} = (0,2 \cdot 3,2^2 + 0,1 \cdot 3,2)\hat{i} + \left(0,67 - \frac{\cos 3,2}{1,5}\right)\hat{j}$$

$$\vec{r} = (2,368)\hat{i} + (1,335)\hat{j} \text{ m.}$$

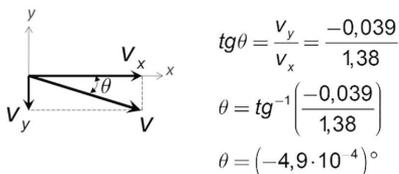
Para obtermos a direção do vetor da velocidade, devemos determinar os valores de v_x e v_y , para, então, conseguirmos definir a direção do vetor v. Portanto, calculamos as componentes da velocidade do seguinte modo:

$$\vec{v} = (0,4 \cdot 3,2 + 0,1)\hat{i} + \left(\frac{\sin 3,2}{1,5}\right)\hat{j}$$

$$\vec{v} = (1,38)\hat{i} + (-0,039)\hat{j} \text{ m/s.}$$

Analisando os vetores v_x e v_y , conseguimos determinar a direção da velocidade pela representação desses vetores, como indicado na Figura 1.35.

Figura 1.35 | Representação da direção do vetor \vec{v}



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a determinação do ângulo θ , definimos o vetor resultante da velocidade. Logo:

$$v = 1,38 \text{ m/s} \searrow.$$

Como esta é a última tarefa realizada, todos os dados obtidos para o veículo devem ser compilados e apresentados em um relatório final, no formato de um memorial de cálculo, a ser entregue para a montadora, terminando, assim, o serviço de consultoria pelo qual você era responsável.

Ao desenvolver essa situação na qual você, aluno, esteve no papel do engenheiro responsável em analisar o movimento de um amortecedor, finalizou o estudo com toda a análise do movimento geral de uma partícula (nesse caso, a partícula é uma representação do amortecedor). Além disso, você conseguiu extrair como informações relevantes as grandezas básicas: posição, velocidade instantânea e aceleração instantânea.

Avançando na prática

Frenagem de uma locomotiva em curva

Descrição da situação-problema

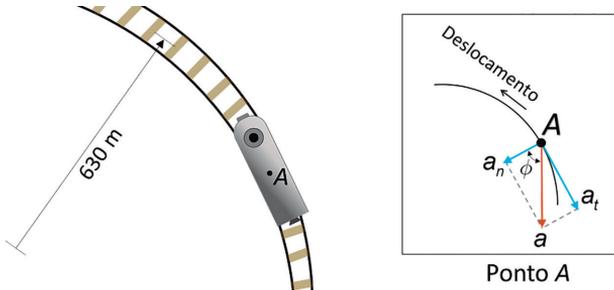
Uma locomotiva está percorrendo um trecho sinuoso, com velocidade de 20 m/s , até que, em uma curva, o maquinista percebe algo sobre os trilhos e decide acionar os freios. A locomotiva, então, começa a diminuir sua velocidade de forma constante. Sabe-se que essa curva tem raio de 630 m e que, após 5 s , a velocidade escalar da locomotiva passou a ser de $11,5 \text{ m/s}$, porém o maquinista

queixou-se de que a locomotiva não reduziu a velocidade suficientemente rápido, como costuma fazer. Você, como engenheiro responsável pela manutenção das locomotivas, em posse de todas essas informações do momento da frenagem, precisa determinar a aceleração que a locomotiva apresentou logo após os freios terem sido acionados, a fim de determinar se realmente houve algum problema com a frenagem do trem, ou se a desaceleração estava dentro do esperado, que é de $1,8 \text{ m/s}^2$.

Resolução da situação-problema

Como a análise da frenagem da locomotiva foi feita em uma curva, temos uma situação de movimento curvilíneo, que é representada na Figura 1.36.

Figura 1.36 | Representação do movimento curvilíneo da locomotiva



Fonte: elaborada pelo autor.

Já que a velocidade da locomotiva diminui a uma taxa constante, a aceleração é constante. Assim, a componente tangencial da aceleração (\vec{a}_t) pode ser expressa como a aceleração média, enquanto a componente normal da aceleração (\vec{a}_n) pode ser determinada pela relação de que, imediatamente após a frenagem, a velocidade escalar da locomotiva ainda é de 20 m/s . A aceleração da locomotiva, portanto, equivale a:

$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \vec{u}_t + \left(\frac{v^2}{\rho} \right) \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = \left(\frac{11,5 - 20}{5} \right) \vec{u}_t + \left(\frac{20^2}{630} \right) \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = (-1,7 \text{ m/s}^2) \vec{u}_t + (0,63 \text{ m/s}^2) \vec{u}_n$$

Com as duas componentes da aceleração (\mathbf{a}_t e \mathbf{a}_n), conseguimos definir a aceleração resultante como:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow \vec{a} = \sqrt{(-1,7)^2 + (0,63)^2},$$

portanto, $a = 1,81 \text{ m/s}^2$, com direção $\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1,7}{0,63}\right) = 69,7^\circ$.

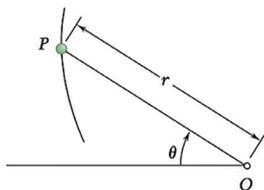
Ao obtermos esse resultado, determinamos que o valor da desaceleração da locomotiva estava dentro do esperado e que os freios funcionaram de forma correta.

Faça valer a pena

1. O movimento curvilíneo é usualmente descrito por medidas realizadas em componentes tangentes e normais da trajetória de uma determinada partícula que está sob este movimento. Estes componentes tangentes e normais estão presentes ao longo de todo o movimento de uma partícula com trajetória curva e são extremamente úteis para a determinação da velocidade e da aceleração da partícula, uma vez que estas duas grandezas também apresentam componentes tangentes e normais ao movimento curvilíneo.

Analisando a partícula da Figura 1.37, conseguimos definir a sua posição pela coordenada _____ r , que é disposta da origem O até a partícula P , e pela coordenada _____ θ , que representa _____ entre a linha de referência horizontal e o eixo r .

Figura 1.37 | Representação de uma partícula em movimento curvilíneo, com um ponto referencial O conhecido



Fonte: adaptada de Beer; Johnston Jr.; Cornwell (2012, p. 672).

Agora, assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas:

- a) Radial, perpendicular, a distância.
- b) Transversal, radial, a velocidade.
- c) Transversal, radial, o ângulo.
- d) Perpendicular, transversal, a posição.
- e) Radial, transversal, o ângulo.

2. Pela análise de um movimento curvilíneo, o vetor da velocidade de uma partícula em movimento curvilíneo sempre será tangente a esta trajetória curvilínea, com intensidade escalar definida pela relação $\mathbf{v} = ds/dt$. Assim, o vetor da velocidade é determinado em relação ao eixo t como:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t,$$

sendo \vec{u}_t um vetor unitário no eixo t .

Já o vetor da aceleração é relacionado com a taxa de variação temporal da velocidade da partícula ($\vec{a} = d\vec{v}/dt$). Deste modo, a aceleração acaba

sendo representada por $\vec{a} = a_t \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$, o que nos leva a concluir que

o vetor da aceleração a depende de outros dois componentes perpendiculares entre si, os quais podemos definir como \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_n .

Com base nas informações fornecidas pelo texto, considere as assertivas a seguir:

- I. O vetor da aceleração para uma partícula em movimento retilíneo é definido da mesma forma para uma partícula em movimento curvilíneo.
- II. A velocidade da partícula em movimento curvilíneo não depende da trajetória curva da partícula.
- III. A aceleração de uma partícula em movimento curvilíneo depende de outros dois componentes, ou seja, depende de um componente tangencial e de outro normal.
- IV. Sempre que uma partícula estiver em movimento curvilíneo, significa que a determinação da sua velocidade e aceleração deve ser realizada, obrigatoriamente, como um deslocamento tridimensional.

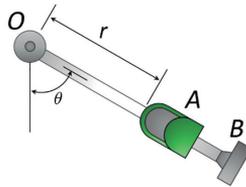
Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas a afirmativa III está correta.
- c) Apenas a afirmativa I está correta.
- d) Apenas as afirmativas I, II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas II, III e IV estão corretas.

3. Um parque de diversões montou um brinquedo que consiste em uma cadeira A presa em uma haste de metal, de modo que esta haste rotaciona em torno do ponto O medido por um ângulo θ , e a cadeira A movimenta-se na haste com uma distância r do ponto O . Esse brinquedo é representado na Figura 1.38.

A haste OB tem 5 m e rotaciona em torno do ponto O pela relação $\theta = 0,02t^3\text{ rad}$. A cadeira A desliza na haste por uma relação de distância ao ponto O por $r = 0,04t^2\text{ m}$. E, para evitar que se formem filas no brinquedo, ele deve movimentar-se durante 6 s a cada vez que é acionado.

Figura 1.38 | Representação do brinquedo



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta com os valores da velocidade e da aceleração da cadeira A para o tempo total de movimento do brinquedo.

- a) $v = 1,5\text{ m/s}$; $a = 6,2\text{ m/s}^2$.
- b) $v = 3\text{ m/s}$; $a = 12,3\text{ m/s}^2$.
- c) $v = 3,15\text{ m/s}$; $a = 7,33\text{ m/s}^2$.
- d) $v = 6,8\text{ m/s}$; $a = 4,15\text{ m/s}^2$.
- e) $v = 8\text{ m/s}$; $a = 5\text{ m/s}^2$.

Referências

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2011.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia: Dinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

Dinâmica da partícula

Convite ao estudo

Prezado estudante, na unidade anterior, aprofundamos o conhecimento do movimento instantâneo de partículas, definindo a posição, velocidade e aceleração instantânea por meio do cálculo diferencial e integral. Estudamos o movimento retilíneo geral em duas e três dimensões e finalizamos com a análise de partículas em movimento curvilíneo por meio de componentes tangencial e normal e de componentes radial e transversal para a velocidade e a aceleração.

Agora, na Unidade 2 deste livro didático, serão aprofundados conceitos referentes à segunda lei de Newton, para estudarmos as causas do movimento geral de uma partícula em termos das forças atuantes.

Vamos compreender o uso da segunda lei de Newton na análise dinâmica de uma partícula por meio de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, quando apropriado, e aplicaremos todo o estudo em análises voltadas a casos reais, como o movimento de veículos, o lançamento de projéteis, a análise de mecanismos formados por relação de roldanas, a movimentação de cargas e a aplicação para a Mecânica Espacial, na qual analisaremos o movimento de órbita para satélites, espaçonaves, planetas etc.

Dando continuidade ao desenvolvimento com visão prática, você, aluno, ao longo desta unidade, desempenhará o papel de um funcionário que trabalha em uma empresa aeroespacial, sendo responsável por todas as análises de cálculos técnicos para estabelecer condições de transporte e movimento das espaçonaves, após estarem construídas. Ao seguir todas as etapas que a espaçonave deverá seguir para entrar na órbita da Terra e depois voltar de forma segura, em um primeiro momento, você deverá analisar o transporte dela

para a plataforma de lançamento de forma que a espaçonave estimada em bilhões de reais não sofra nenhum dano em seu transporte e seja preparada para o lançamento. Após a movimentação dela, será lançada ao espaço. Desta forma, a sua segunda tarefa será definir a trajetória da espaçonave na órbita da Terra. Como a espaçonave deve voltar para a Terra após ficar em órbita, a sua tarefa final será calcular a trajetória dela após esta sofrer redução de velocidade para retornar de forma segura e esperada. Portanto, você deverá apresentar resultados em três diferentes condições da aeronave.

Na sequência desta unidade, serão apresentadas todas as informações para resolver essa situação. Na primeira seção, estudaremos como a segunda lei de Newton é aplicada em movimentos gerais de partículas e a relacionaremos com o equilíbrio dinâmico. Na segunda seção, analisaremos o movimento em coordenadas cilíndricas e esféricas, para, então, estudarmos, na terceira seção, o movimento de partículas sob efeito de forças centrais, relacionando-o à lei de Newton da gravitação, com aplicações para a Mecânica Espacial.

Você, estudante, receberá todas as informações para a resolução completa da situação que lhe foi atribuída. Será apto a trabalhar com conceitos que envolvam a segunda lei de Newton e perceberá que poderá utilizar os conhecimentos adquiridos para vários outros problemas que envolvam forças promotoras de acelerações e movimentos nos corpos.

Vamos aos estudos!

Seção 2.1

A segunda lei de Newton para movimentos gerais

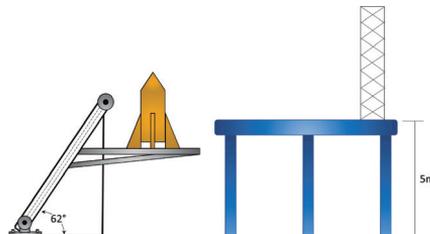
Diálogo aberto

Daremos continuidade, agora, considerando o efeito de forças para analisar o movimento de uma partícula em contextos mais gerais. As forças que estão atuando na partícula precisam ser analisadas, pois é a resultante delas que impõe o movimento. Determinaremos como a relação de forças e movimentos é apresentada pela segunda lei de Newton, por meio da relação básica de que a força equivale ao produto de uma massa por determinada aceleração.

Como a partícula pode se movimentar nos três planos do espaço, é necessário analisar as forças aplicadas sobre esta de forma tridimensional. Faz-se necessário também o uso de diagramas de corpo livre para determinar os vetores de forças atuantes nas partículas, para prever o seu movimento por meio do vetor da força resultante. Esses diagramas representam todas as forças presentes em um equipamento em determinado movimento e nos ajudam a indicar explicitamente todas as forças envolvidas, por exemplo, no funcionamento de guindastes ou no movimento de aeronaves.

Para a situação em que você se colocou como o responsável pelo transporte de uma espaçonave, a primeira tarefa será analisar o movimento para a posição de lançamento, que fica 5 metros acima do nível da base onde está sendo construída. O único equipamento disponível para levar a espaçonave para a plataforma é um elevador inclinado com a base alinhada com a horizontal, como consta na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Condição de transporte da espaçonave para a plataforma de lançamento



Fonte: elaborada pelo autor.

Esse elevador apresenta aceleração constante no início do movimento a partir do solo, mas, ao se aproximar da região superior, desacelera de forma constante, para evitar a parada brusca, posicionando a aeronave na plataforma de lançamento.

Pelo material da base de apoio da aeronave e pelo material da plataforma do elevador, sabendo que o fator de atrito estático é de 0,28, a sua função como engenheiro responsável pelo transporte da aeronave para a base de lançamento é determinar o valor de máxima aceleração e máxima desaceleração que podem ser impostas ao elevador para que a aeronave não escorregue da plataforma.

Mas como determinar as forças que agem na espaçonave e no elevador? Como aplicar o atrito na situação, a fim de verificar se a espaçonave não escorrega do elevador? As forças atuantes durante o movimento do elevador geram algum movimento na espaçonave? A espaçonave corre algum risco por ser transportada pelo elevador?

Para desenvolver a situação e responder aos questionamentos, vamos ao estudo desta seção.

Não pode faltar

Para uma partícula que apresenta aceleração durante seu movimento, podemos dizer que está sob efeito de uma força resultante explicada pela segunda lei de Newton, que especifica que uma força resultante atuando em uma partícula gera uma aceleração de intensidade, direção e sentido proporcionais à dessa força resultante.

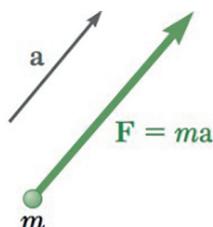
A segunda lei de Newton foi determinada experimentalmente, aplicando uma força resultante em determinada partícula e medindo a aceleração resultante. Segundo esse pressuposto, foram determinados novos experimentos aplicando outras forças e foi observado que sempre se mantém a proporcionalidade entre a força e a aceleração por uma constante m definida como massa, de forma que $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_n/a_n = m$.

Essa constante m é uma característica específica da partícula definida como massa m da partícula analisada. A relação da força resultante em uma partícula é definida como:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Equação esta que representa a segunda lei de Newton e é demonstrada pela Figura 2.2.

Figura 2.2 | Indicação da força resultante em uma partícula que gera sua aceleração



Fonte: Beer et al. (2012, p. 697).



Refleta

Sabendo que a aceleração pode ser representada por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e que a velocidade é $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$, como fica a equação da segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, em relação à posição e não mais em relação à aceleração?

Algumas conclusões podem ser tiradas dessa equação da segunda lei de Newton. Se a força resultante em uma partícula for nula (intensidade zero), a aceleração também será nula e, assim, a partícula manterá seu estado de movimento.

Em uma situação na qual a partícula esteja inicialmente em repouso, se nenhuma nova força for aplicada nela, conseguirá se manter em repouso, uma vez que não terá forças resultantes para promover a aceleração.

No caso de uma partícula inicialmente com velocidade v e que não esteja submetida a nenhuma força, esta se manterá com velocidade constante ao longo de todo o movimento de mesmo valor escalar da velocidade inicial e, assim, não terá aceleração, o que representa a primeira lei de Newton. Isso nos faz concluir que está conectada com a segunda lei de Newton.

Agora, ao analisar a massa na equação representativa da segunda lei de Newton, esta deve ser constante ao longo do movimento da partícula e, por conta disso, a relação da segunda lei de Newton não pode ser aplicada em casos em que se tem

variação da massa, como na análise de um foguete que possui massa reduzida ao longo do seu movimento, por estar eliminando quantidades consideráveis de combustível por meio de sua queima por todo o período de voo.

Como a aceleração de uma partícula equivale à derivada temporal da velocidade ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$), podemos relacionar a segunda lei de Newton com a velocidade da seguinte forma:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}).$$

Com base nessa relação, identificamos um novo vetor, o vetor $m \cdot \vec{v}$, que é comumente nomeado de quantidade de movimento linear de uma partícula e apresenta mesma intensidade e mesmo sentido do vetor velocidade da partícula.

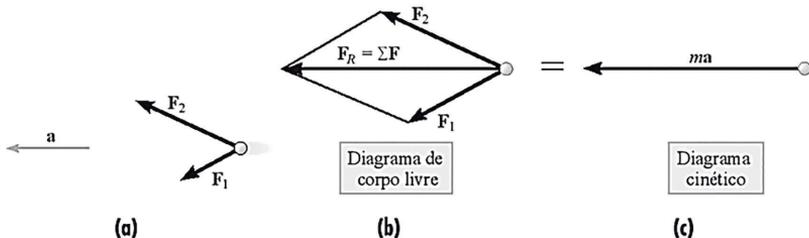
Ao definir que a quantidade de movimento linear de uma partícula seja representada como \vec{L} , ou seja, $\vec{L} = m \cdot \vec{v}$, equacionamos a segunda lei de Newton como:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{L}}.$$

Quando analisamos uma partícula que está sob a ação de várias forças resultantes, o vetor resultante dessas forças será o vetor representante da aceleração da partícula com massa m , como indicado na Figura 2.3 e definido por:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}.$$

Figura 2.3 | Representação de duas forças atuando em uma partícula, representado em a) as forças e a direção da aceleração; b) a resultante das duas forças; c) a representação do vetor da aceleração



Fonte: Hibbeler (2011, p. 85).

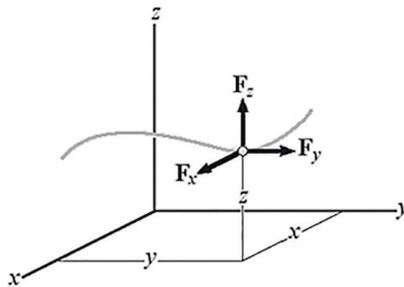


Para aprofundar seu conhecimento quanto à observação de acelerações para partículas, faça a leitura do item “Sistema de referência inercial” do subcapítulo 13.2, A equação do movimento, nas páginas 85 e 86 do livro indicado a seguir:

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. 12. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2011. Disponível em: <<http://pitagoras.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788576058144/pages/85>>. Acesso em: 29 nov. 2017.

Em algumas situações em que a partícula se movimenta devido a componentes de forças em três dimensões, como representado na Figura 2.4, pode ser mais simples trabalhar com equações considerando essas forças nas três dimensões, sem determinar uma única resultante logo no início da análise do movimento.

Figura 2.4 | Representação do movimento tridimensional de uma partícula de massa m



Fonte: Hibbeler (2011, p. 88).

Considerando os três eixos x , y e z de um movimento tridimensional da partícula, com as componentes \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} (Figura 2.4), definimos a relação da força como:

$$\Sigma(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}),$$

logo:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z.$$

Fazendo a relação de que $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{s}/dt^2 = \ddot{\mathbf{s}}$, temos:

$$\sum F_x = m\ddot{s}_x, \sum F_y = m\ddot{s}_y \text{ e } \sum F_z = m\ddot{s}_z.$$



Assimile

Para situações em que consideramos o movimento em apenas uma direção sobre um eixo linear, simplificamos a equação $\sum(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$ para apenas uma coordenada. Se considerarmos uma bola que é solta do alto de um edifício seguindo as componentes como indicado na Figura 2.3 e ignorando a resistência do ar, ficamos com o vetor da aceleração apenas no eixo z. Ao representarmos a aceleração como g e a força peso da bola como W , podemos deduzir uma equação para o movimento dessa bola segundo a relação da segunda lei de Newton, em que:

$$\sum F_x = m\ddot{s}_x = 0, \sum F_y = m\ddot{s}_y = 0 \text{ e } \sum F_z = m\ddot{s}_z = -W.$$

Se analisarmos apenas os componentes da aceleração, chegamos à relação:

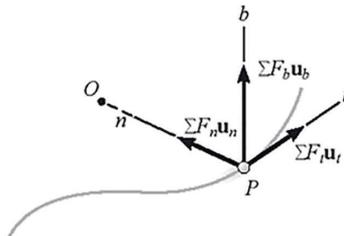
$$\ddot{s}_x = 0, \ddot{s}_y = 0 \text{ e } \ddot{s}_z = -g.$$

Com base nessas equações, podemos fazer uso de integrais para determinarmos a velocidade e a posição da bola em determinado instante.

Ao analisarmos um movimento curvilíneo que possui componentes da força resultante e, conseqüentemente, da aceleração em direções normal e tangencial ao movimento, como indicado na Figura 2.5, definimos uma nova relação entre força e aceleração:

$$\sum F_n = ma_n \text{ e } \sum F_t = ma_t.$$

Figura 2.5 | Representação do movimento curvilíneo com componentes nas direções normal e tangencial ao movimento



Fonte: Hibbeler (2011, p. 102).

Como vimos na Seção 3 da Unidade 1, em que $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho}$ e $\mathbf{a}_t = \dot{v}$, determinamos que:

$$\Sigma \mathbf{F}_n = m \frac{v^2}{\rho} \text{ e } \Sigma \mathbf{F}_t = m \dot{v}.$$

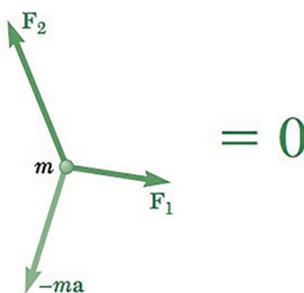
Outra forma de analisarmos uma partícula em movimento devido ao efeito da aceleração é por meio do equilíbrio dinâmico.

Segundo a equação $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, conseguimos obter a relação de que:

$$\Sigma \vec{\mathbf{F}} - m\vec{\mathbf{a}} = 0.$$

De acordo com essa relação, conseguimos definir uma condição em que, se adicionarmos o vetor da aceleração ($-m\vec{\mathbf{a}}$) em uma partícula com movimento, definimos um sistema de vetores no qual a soma resulta em zero e, segundo esse pressuposto, dizemos que a partícula está em equilíbrio dinâmico, como representado na Figura 2.6.

Figura 2.6 | Representação do diagrama de corpo livre para uma partícula em equilíbrio dinâmico devido à adição do vetor $-m\vec{\mathbf{a}}$



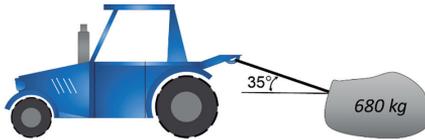
Fonte: Beer et al. (2012, p. 701).

Esse vetor $-m\vec{\mathbf{a}}$ é usualmente denominado vetor de inércia e, sempre que é adicionado a um sistema de vetores, podemos considerar que a partícula está em equilíbrio e, com essa consideração, é possível analisar a situação da partícula por meio de métodos definidos nos conceitos da Estática, em que o somatório das forças atuantes é igual a zero ($\Sigma \vec{\mathbf{F}} = 0$).



Imagine que um trator está preso a uma pedra de 680 kg, conforme é apresentado na Figura 2.7. Inicialmente, o trator está parado e, considerando que o atrito cinético (u_k) entre o solo e a pedra é de 0,36, qual deve ser o valor da força exercida pelo cabo, para movimentar a pedra com aceleração de $3,2 \text{ m/s}^2$ para a esquerda?

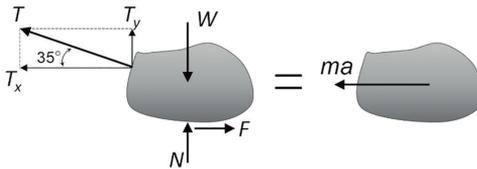
Figura 2.7 | Representação do trator posicionado para movimentar a pedra



Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação, um primeiro passo para ajudar a determinar as forças atuando no movimento da pedra é montar um diagrama de corpo livre para a pedra, como o representado na Figura 2.8.

Figura 2.8 | Diagrama de corpo livre da pedra em análise



Fonte: elaborada pelo autor.

A força peso da pedra é calculada como:

$$W = m \cdot g = 680 \cdot 9,81 \Rightarrow W = 6670,8 \text{ N.}$$

A Força F , devido ao atrito, é determinada pela relação:

$$F = u_k \cdot N = 0,36 \cdot N.$$

Pelo diagrama de corpo livre, para manter a relação do equilíbrio dinâmico, determinamos que o somatório das forças que atuam na pedra é equivalente à relação ma e, como a pedra deve ter aceleração de $3,2 \text{ m/s}^2$, definimos que:

$$\leftarrow \overset{+}{\sum} F_x = ma$$

$$T_x - F = ma$$

$$T \cos 35^\circ - 0,36 \cdot N = 680 \cdot 3,2$$

$$T \cos 35^\circ - 0,36 \cdot N = 2176$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$N - W + T_y = 0$$

$$N - 6670,8 + T \text{sen} 35^\circ = 0$$

$$N = 6670,8 - T \text{sen} 35^\circ$$

Como definimos a relação para N , podemos, agora, substituir N na relação para $\sum F_x$, de tal modo:

$$T \cos 35^\circ - 0,36 \cdot N = 2176$$

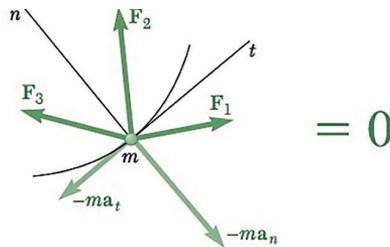
$$T \cos 35^\circ - 0,36 \cdot (6670,8 - T \text{sen} 35^\circ) = 2176$$

$$T = 7467,35 \text{ N.}$$

Portanto, a força necessária para movimentar a pedra pelo trator, com aceleração de $3,2 \text{ m/s}^2$, é de $7467,35 \text{ N}$.

Voltando a analisar movimentos curvilíneos, podemos fazer a analogia do equilíbrio dinâmico, estabelecendo dois novos vetores da aceleração, em vez de apenas um, de forma que definimos um vetor da aceleração para zerar a componente normal ($-\vec{m}\vec{a}_n$) e outro para zerar a componente tangencial ($-\vec{m}\vec{a}_t$), para que o somatório das forças nas duas direções seja zero, como representado na Figura 2.9.

Figura 2.9 | Representação do diagrama de corpo livre para uma partícula em movimento curvilíneo, com equilíbrio dinâmico devido à adição dos vetores $-\vec{m}\vec{a}_n$ e $-\vec{m}\vec{a}_t$.



Fonte: Beer et al. (2012, p. 702).

Sem medo de errar

Prezado aluno, no início desta seção você foi colocado no lugar do responsável pelo transporte de uma espaçonave. Neste primeiro momento, ficou a seu encargo movimentar a espaçonave para a posição de lançamento, porém a plataforma de lançamento fica a

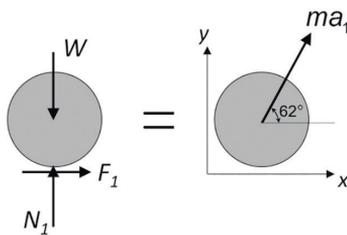
5 metros acima do nível da base e um elevador deverá ser utilizado para elevá-la até a plataforma de lançamento, como representado na Figura 2.1.

O elevador tem aceleração constante no início do movimento, mas, ao aproximar-se da região superior, desacelera de forma constante, para evitar uma parada brusca. Sabe-se que o fator de atrito estático entre a base da aeronave e a plataforma do elevador é de 0,28.

Com essas informações levantadas para o transporte da aeronave, é sua função determinar o valor da máxima aceleração e da máxima desaceleração que podem ser impostas ao elevador, para que a aeronave não escorregue da plataforma.

Começando pela aceleração a_1 da plataforma, quando esta começa a se movimentar, e levando em conta que não deve ocorrer o deslizamento da aeronave com a plataforma, podemos montar um diagrama de equilíbrio dinâmico para o caso apresentado, como definido na Figura 2.10.

Figura 2.10 | Diagrama de equilíbrio dinâmico para o movimento da aeronave no elevador, com a aeronave sendo representada como uma partícula



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que não pode ocorrer o escorregamento da aeronave na plataforma, definimos que $F_1 = \mu_s N_1 = 0,28N_1$ e $W = mg$.

Por meio do somatório das forças em y , chegamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_y &= ma_{1y} \\ N_1 - W &= ma_1 \cdot \text{sen}62^\circ \Rightarrow N_1 = W + ma_1 \cdot \text{sen}62^\circ \\ N_1 &= mg + ma_1 \cdot \text{sen}62^\circ \end{aligned}$$

Fazendo, agora, o somatório das forças em x:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ma_{1x}$$

$$F_1 = ma_1 \cdot \cos 62^\circ$$

$$0,28N_1 = ma_1 \cdot \cos 62^\circ$$

Nessa equação, substituindo o que definimos para N_1 no somatório das forças em y:

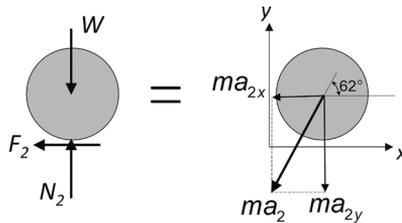
$$0,28(mg + ma_1 \cdot \text{sen}62^\circ) = ma_1 \cdot \cos 62^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{0,28g}{0,28\text{sen}62^\circ - \cos 62^\circ}$$

$$a_1 = 12,35 \text{ m/s}^2.$$

Considerando, agora, a segunda condição, na qual o elevador desacelera de forma constante ao se aproximar de sua parte superior, definimos um novo Diagrama de Equilíbrio Dinâmico para a desaceleração da plataforma, como representado na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Diagrama de equilíbrio dinâmico para o movimento desacelerado do elevador



Fonte: elaborada pelo autor.

Definimos a força F_2 como:

$$F_2 = \mu_s N_2 = 0,28N_2.$$

Por meio do somatório das forças em y e x, chegamos à relação:

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = ma_{2y}$$

$$N_2 - W = -ma_2 \cdot \text{sen}62^\circ \Rightarrow N_2 = mg - ma_2 \cdot \text{sen}62^\circ$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ma_{2x}$$

$$-F_2 = -ma_2 \cdot \cos 62^\circ \Rightarrow 0,28N_2 = ma_2 \cdot \cos 62^\circ.$$

Nessa equação, substituindo o que definimos para N_2 no somatório das forças em y .

$$0,28(mg - ma_2 \cdot \text{sen}62^\circ) = ma_2 \cdot \text{cos}62^\circ$$

$$a_2 = 3,83 \text{ m/s}^2.$$

Com os resultados das acelerações, definimos que o elevador deve ter aceleração máxima de $12,35 \text{ m/s}^2$ e desaceleração de, no máximo, $3,83 \text{ m/s}^2$. Assim, sua primeira tarefa foi concluída com êxito e o foguete foi transportado com segurança.

Avançando na prática

Velocidade segura para a curva de um autódromo

Descrição da situação-problema

Um autódromo está sendo projetado e sua tarefa como um dos encarregados pelo projeto é determinar a velocidade de segurança da primeira curva, que tem raio de 160 m e inclinação de 15° .

Resolução da situação-problema

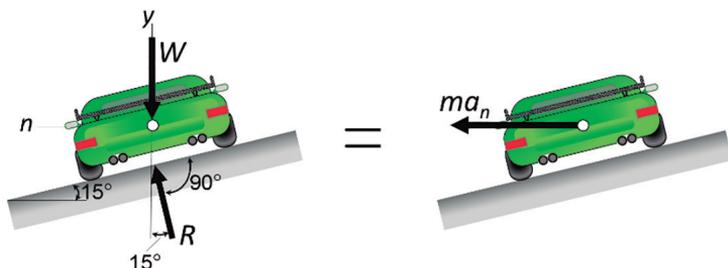
A velocidade de segurança para uma curva com inclinação representa a velocidade escalar máxima que um veículo pode passar pela curva, sem sofrer força de atrito lateral nos pneus.

Com base nessa definição, conseguimos analisar a situação proposta. Um veículo de corrida que passe pela curva estará em movimento curvilíneo, assim sofrerá a ação de uma aceleração normal \vec{a}_n , apontada para o centro da curva e sua intensidade será de $a_n = v^2/\rho$, sendo v a velocidade escalar do veículo em m/s e ρ o raio da trajetória curvilínea (o raio da curva). Como a força peso é representada por $W = mg$, definimos a massa do veículo como $m = W/g$.

Como o veículo que estiver passando pela curva na velocidade de segurança não deve ter nenhuma força de atrito lateral, a força de reação da pista no veículo será perpendicular à própria pista.

Assim, conseguimos definir o diagrama de equilíbrio dinâmico representado na Figura 2.12.

Figura 2.12 | Diagrama do equilíbrio dinâmico para o movimento do veículo na curva analisada



Fonte: elaborada pelo autor.

Por meio da segunda lei de Newton para o diagrama de equilíbrio dinâmico da Figura 2.12:

$$\uparrow \sum F_y = 0: \quad R \cos 15^\circ - W = 0 \Rightarrow R = \frac{W}{\cos 15^\circ}.$$

$$\uparrow \sum F_n = ma_n: \quad R \sin 15^\circ = \frac{W}{g} a_n.$$

Utilizando as duas equações que acabamos de definir e pela relação de $a_n = v^2/\rho$, temos que:

$$\frac{W}{\cos 15^\circ} \sin 15^\circ = \frac{W}{g} \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow v^2 = g \cdot \rho \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$$

$$v^2 = 9,81 \cdot 160 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \Rightarrow v = 20,51 \text{ m/s}.$$

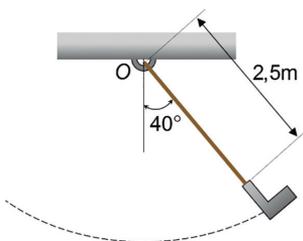
Portanto, a velocidade de segurança para a curva é de 20,51 m/s ou 73,83 km/h.

Faça valer a pena

1. Partículas que apresentam movimento acelerado estão se movimentando sob o efeito do vetor velocidade, no qual a direção ou a intensidade dessa velocidade sofrem alterações ao longo do movimento. Para determinar ou prever o movimento da partícula por meio das forças que estão atuando sobre essa partícula em análise, faz-se uso de conceitos previstos pela segunda lei de Newton.

soma do peso da pessoa e da estrutura do balanço, no momento em que o balanço está na posição de maior altura em relação ao solo, como representado na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Posição de movimento máximo do balanço



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nas informações do balanço e em relação à velocidade e às acelerações do balanço, quando este está na altura máxima em relação ao solo, como apresentado na Figura 2.11, são realizadas as seguintes afirmações:

- I. A aceleração normal, quando o balanço está na posição de 40° com a vertical, equivale a $21,9 \text{ m/s}^2$.
- II. A aceleração tangencial, quando o balanço está na posição de 40° com a vertical, equivale a $12,6 \text{ m/s}^2$.
- III. A velocidade do balanço, quando este está na posição de 40° com a vertical, é igual a $26,64 \text{ km/h}$.
- IV. O vetor da força de tração do cabo é direcionado para o ponto O no mesmo ângulo do cabo, para cada momento analisado.

Em relação a elas, é correto afirmar que:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

Seção 2.2

Movimento em coordenadas cilíndricas e esféricas

Diálogo aberto

Na seção passada, estudamos a aplicação da segunda lei de Newton para movimentos gerais de partículas e a associamos com o equilíbrio dinâmico. Nesta segunda seção da Unidade 2, estudaremos a segunda lei de Newton para partículas com movimentos que seguem trajetórias angulares, utilizando conceitos da Física, como a quantidade de movimento angular.

Esses conhecimentos nos permitirão analisar objetos que se movem ao redor de uma órbita, como a de ônibus espaciais e satélites nas proximidades de planetas ou estrelas, que exercem força gravitacional sobre eles, ou, ainda, de componentes que estejam próximos a campos magnéticos fortes, como os componentes de um transformador de energia elétrica.

Em relação a esses novos conceitos, recordaremos que você, aluno, na presente unidade, está no papel do funcionário de uma empresa aeroespacial, sendo responsável por todas as análises de cálculos técnicos para estabelecer condições de transporte e movimento de uma espaçonave, garantindo que não sofra danos e mantenha as condições especificadas.

Como você já analisou o transporte da espaçonave para a plataforma de lançamento, a sua tarefa, agora, é definir a trajetória da espaçonave na órbita da Terra, quando for lançada ao espaço.

No momento de análise da espaçonave, sua distância em relação à superfície da Terra é de 630 km com a linha do Equador, que apresenta órbita elíptica ao redor da Terra. Os computadores da espaçonave indicam que neste momento a velocidade é de 4.590 m/s e a distância máxima da superfície da Terra com o apogeu da trajetória é de 3.820 km.

Com essas informações da órbita da espaçonave, você acha que esta ultrapassará a velocidade crítica de 23.000 km/h? Você

consegue indicar os passos para determinar a velocidade da espaçonave? Quais são os conceitos que precisa considerar para determinar a velocidade ao longo de uma trajetória orbital?

Para esta análise da órbita da espaçonave, é necessário conhecer os conceitos de momento angular e a força central, para, então, conseguir esquematizar o problema e definir os parâmetros para sua solução.

Vamos aos estudos desses novos conceitos para, na sequência, aplicá-los em estudos práticos.

Não pode faltar

Ao analisarmos o movimento de partículas em trajetória curvilínea, devemos considerar as coordenadas normal e tangencial na partícula. Ao aplicarmos os conceitos da segunda lei de Newton no movimento com trajetória curvilínea, teremos três coordenadas para a aceleração imposta à partícula, como veremos na sequência.

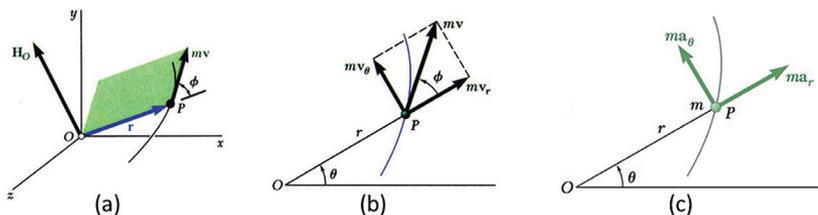


Refleta

Para situações nas quais conhecemos a trajetória do movimento curvilíneo de uma partícula, podemos analisá-lo nos sentidos tangente e normal à trajetória, de forma a termos as equações $\sum F_n = ma_n$ e $\sum F_t = ma_t$. Mas quais são as equações que representam as componentes a_n e a_t ?

Analisaremos o movimento curvilíneo de uma partícula P que tem massa m , como representado na Figura 2.14.

Figura 2.14 | Representação de uma partícula P em movimento curvilíneo em (a) tridimensional; (b) bidimensional, com destaque para os componentes radial e transversal de $m\vec{v}$; (c) coordenadas polares r e θ para as acelerações.



Fonte: adaptado de Beer et al. (2012, p. 725-727).

A quantidade de movimento linear de uma partícula é representada pelo vetor $m\vec{v}$ e, se analisarmos agora um momento para esse vetor $m\vec{v}$ em relação ao ponto de origem O do movimento curvilíneo da partícula P , definiremos a quantidade de movimento angular da partícula no instante analisado, representado pelo vetor \vec{H}_O na Figura 2.14(a), e que determinamos por meio dos vetores \vec{r} e $m\vec{v}$, de forma que o produto vetorial fica:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v},$$

em que o módulo de \vec{H}_O (vetor perpendicular ao plano de \vec{r} e $m\vec{v}$ da Figura 2.14) é, então, definido do produto vetorial como:

$$H_O = r \cdot mv \cdot \text{sen}\phi.$$

Se utilizarmos as coordenadas polares para esse movimento curvilíneo, passaremos a ter uma condição em que o movimento linear da partícula pode ser decomposto em componentes radial e transversal, como indicado na Figura 2.14(b).

A quantidade de movimento angular H_O da partícula pode, então, ser descrita pelas componentes radial e transversal da quantidade de movimento linear pela relação:

$$H_O = r \cdot mv \cdot \text{sen}\phi = r \cdot mv_\theta.$$

Como definimos anteriormente que $v_\theta = r\dot{\theta}$:

$$H_O = mr^2\dot{\theta}.$$

Analisando o movimento tridimensional da partícula P , ao definirmos a derivada temporal para a quantidade de movimento angular \vec{H}_O dessa partícula, por meio da regra da derivada de um produto vetorial (relação $\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$), a derivada em relação ao tempo t para todos os seus membros, ou seja, $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$, chegamos à relação:

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \quad \text{e} \quad \dot{H}_O = \dot{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Ao recordar que a segunda lei de Newton diz que o somatório das forças equivale à $m\vec{a}$ pela relação $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, obtemos a relação

para o segundo termo da equação de $\dot{\vec{H}}_O$ como $\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \Sigma \vec{F}$, porém $\vec{r} \times \Sigma \vec{F}$ equivale à soma de momentos. Então:

$$\Sigma M_O = \dot{\vec{H}}_O.$$

Agora, passaremos à análise bidimensional (em relação a um plano) da partícula P com movimento curvilíneo, ponto de referência O e coordenadas polares em relação a r e θ sob o efeito de forças externas, como representado na Figura 2.14(c).

Ao decompor as forças que atuam na partícula P da Figura 2.14(c), definimos duas relações:

$$\Sigma F_r = ma_r \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$

Como já determinamos na Unidade 1, Seção 3, que $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ e $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$:

$$\Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

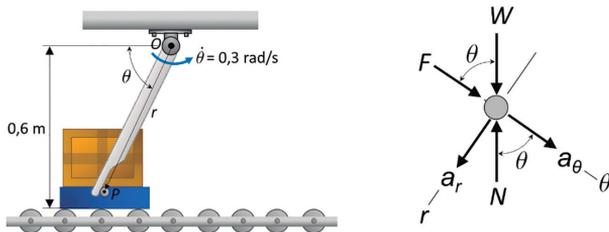
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}).$$



Exemplificando

Uma indústria utiliza uma barra que é forçada a girar com taxa constante de $\dot{\theta} = 0,3 \text{ rad/s}$ para movimentar uma caixa sobre um suporte, com ambos apresentando massa de 1,5 kg e movimentando-se sobre uma esteira de rolos, como ilustrado na Figura 2.15. A fim de analisar o pino em P , determine o valor da força que a barra aplica no suporte quando o ângulo θ é igual a 70° .

Figura 2.15 | Representação do equipamento para movimentação de caixas com destaque ao diagrama de corpo livre no pino P .



Fonte: elaborada pelo autor.

A força F no suporte atua perpendicularmente ao braço em rotação. Supõem-se os sentidos das acelerações \mathbf{a}_r e \mathbf{a}_θ . A força normal N fica apontada para cima e a força peso W fica apontada para baixo. Ao fazer a relação de somatório das forças:

$$+ \nearrow \sum F_r = ma_r,$$

$$W \operatorname{sen} \theta - N \operatorname{sen} \theta = ma_r \Rightarrow (1,5 \cdot 9,81) \operatorname{sen} \theta - N \operatorname{sen} \theta = 1,5a_r,$$

$$+ \searrow \sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow F + (14,715) \cos \theta - N \cos \theta = 1,5a_\theta.$$

Considerando r em relação a θ ($r = 0,6/\operatorname{sen} \theta$), definimos as derivadas temporais para r e θ :

$$\dot{\theta} = 0,3 \text{ rad/s e } \ddot{\theta} = 0 \text{ rad/s}.$$

Ao destacar que r não é o comprimento da barra na Figura 2.15, mas, sim, a distância do ponto O ao ponto P , percebemos que o comprimento r é uma função de θ , que é função do tempo. Assim, a derivada temporal de r :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{r} = 0,6 \frac{(-\cos \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \dot{\theta} = -0,18 \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Verificando, então, para o ângulo θ de 70° : $\dot{r} = -0,069$ e $\ddot{r} = 0,073$, e relacionando com as acelerações:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0,073 - 0,69 \cdot 0,3^2 = 0,0109 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0,069)0,3 = -0,0414 \text{ m/s}^2.$$

Com os resultados das acelerações, voltamos para as equações das forças:

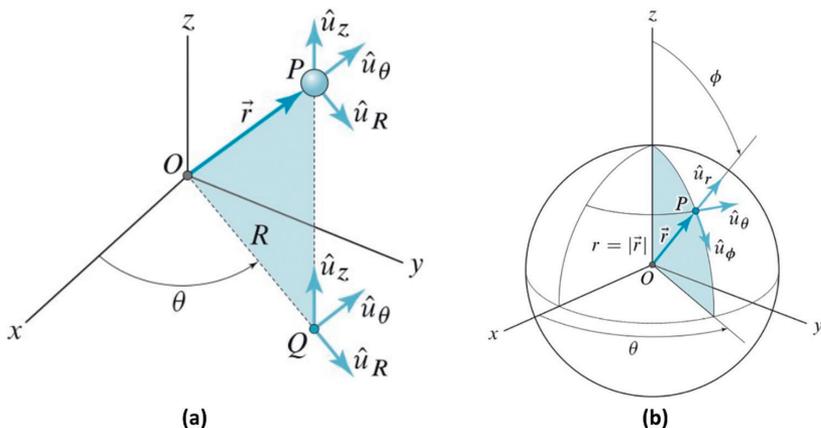
$$N = \frac{(14,715) \operatorname{sen} \theta - 1,5 \cdot a_r}{\operatorname{sen} \theta} = 14,7 \text{ N}$$

$$F = 1,5a_\theta - (14,715) \cos \theta + N \cos \theta = -10,12 \text{ N}.$$

Com os valores definidos para as forças, finalizamos a análise solicitada.

No estudo do movimento de partículas, muito provavelmente vamos nos deparar com situações nas quais o movimento ocorre em uma curva espacial, de modo que precisaremos analisar o movimento tridimensional da partícula. Ao analisarmos movimentos tridimensionais, levamos em conta três sistemas de coordenadas (Figura 2.16): coordenadas retangulares x, y, z ; coordenadas cilíndricas r, θ, z ; coordenadas esféricas R, θ, ϕ .

Figura 2.16 | Representação das coordenadas: (a) cilíndricas e (b) esféricas.



Fonte: adaptado de Gray et al. (2014, p. 154 e 156).

A coordenada cilíndrica é relacionada com a coordenada polar, que apresenta um eixo radial (definido como r) e outro transversal (definido como θ), conforme estudamos na Seção 1.3, porém, agora, adicionamos a coordenada z e a sua parcela das derivadas temporais. Assim, ao analisar, inicialmente, o vetor \vec{r} da partícula P em coordenada cilíndrica (Figura 2.16(a)), temos que:

$$\vec{r} = R\hat{u}_R + z\hat{u}_z.$$

Continuando com a relação de que a coordenada cilíndrica é relacionada com a coordenada polar, adicionando-se a parcela correspondente à direção do eixo z , definimos a velocidade:

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{u}_R + R\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{z}\hat{u}_z = v_R\hat{u}_R + v_\theta\hat{u}_\theta + v_z\hat{u}_z,$$

Portanto, $v_R = \dot{R}$, $v_\theta = R\dot{\theta}$, $v_z = \dot{z}$ e $v = \sqrt{v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$.

A equação da aceleração na coordenada cilíndrica é a derivada da equação de \vec{v} :

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{u}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{z}\hat{u}_z = a_R\hat{u}_R + a_\theta\hat{u}_\theta + a_z\hat{u}_z,$$

em que $a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2$, $a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$ são os componentes cilíndricos do vetor aceleração, de modo que $a = \sqrt{a_R^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$.

Partindo, agora, para a análise do movimento de partículas em coordenadas esféricas, percebemos que essa coordenada é útil quando a posição de uma partícula é definida por meio de uma distância radial (r) e dois ângulos (ϕ e θ), como indicado na Figura 2.16(b).

Analisando, então, o vetor \vec{r} , que relaciona a posição P da partícula em relação à origem O :

$$\vec{r} = r\hat{u}_R.$$

Já a velocidade em coordenadas esféricas fica:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\phi}\hat{u}_\phi + r\dot{\theta}\text{sen}\phi\hat{u}_\theta = v_r\hat{u}_r + v_\phi\hat{u}_\phi + v_\theta\hat{u}_\theta.$$

Finalmente, definimos a aceleração por meio da derivada temporal da velocidade, como:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\text{sen}^2\phi)\hat{u}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\text{sen}\phi\cos\phi)\hat{u}_\phi + (r\ddot{\theta}\text{sen}\phi + 2\dot{r}\dot{\theta}\text{sen}\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi)\hat{u}_\theta = a_r\hat{u}_r + a_\phi\hat{u}_\phi + a_\theta\hat{u}_\theta.$$



Pesquise mais

Para acompanhar melhor os passos da definição dos vetores de velocidade e aceleração em coordenadas cilíndricas, leia a seção "Posição, velocidade e aceleração em coordenadas esféricas" do livro indicado a seguir:

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., R. E.; CORNWELL, P. J. **Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

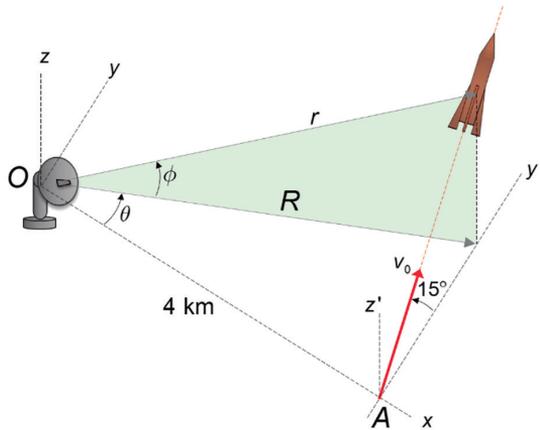


Exemplificando

Um míssil é lançado do ponto A, indicado na Figura 2.17, com velocidade de partida de 300 km/h e aceleração constante de 2,2 m/s², ganhando altitude em ângulo de 25° no plano y' - z' vertical.

Considerando que um radar distante em 4 km da posição de lançamento do míssil o está monitorando, determine as componentes da velocidade do míssil na posição P em 30 s após o seu lançamento em relação a: (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

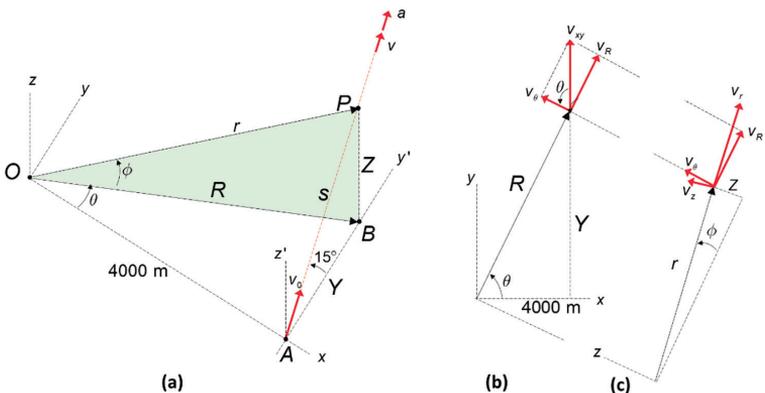
Figura 2.17 | Representação da trajetória tridimensional do lançamento de um míssil.



Fonte: elaborada pelo autor.

Antes de determinar os componentes da velocidade do míssil, precisamos estabelecer alguns parâmetros, como indicado na Figura 2.18.

Figura 2.18 | Representação (a) da trajetória tridimensional do lançamento do míssil; (b) projeção $x - y$; (c) plano $x - y$ (com indicação de z).



Fonte: elaborada pelo autor.

A velocidade inicial v_0 do míssil é $v_0 = 300 \text{ km/h} = 83,33 \text{ m/s}$.
Após 30 s: $v = v_0 + at = 83,33 + 2,2 \cdot 30 = 149,33 \text{ m/s}$.

A distância s de deslocamento que o míssil deve percorrer em 30 s é:

$$s = s_0 + v_0 t + 0,5at^2 = 0 + 83,33 \cdot 30 + 0,5 \cdot 2,2 \cdot 30^2 = 3489,9 \text{ m}.$$

Agora, conseguimos definir o valor da coordenada y pela Figura 2.18(a) e o ângulo θ pela Figura 2.18(b):

$$Y = 3489,9 \cos 15^\circ = 3371 \text{ m} \text{ e } \theta = \tan^{-1} \frac{3371}{4000} = 40,12^\circ.$$

Definimos o valor de r por meio da Figura 2.18(b), sendo:

$$R = \sqrt{4000^2 + 3371^2} = 5231,03 \text{ m}.$$

Podemos, finalmente, determinar as componentes da velocidade em relação à coordenada cilíndrica:

$$v_{xy} = v \cos 15^\circ = 149,33 \cdot \cos 15^\circ = 144,24 \text{ m/s}^2.$$

$$v_R = \dot{R} = v_{xy} \sin \theta = 144,24 \cdot \sin 40,12^\circ = 92,95 \text{ m/s}.$$

$$v_\theta = R\dot{\theta} = v_{xy} \cos \theta = 144,24 \cdot \cos 40,12^\circ = 110,3 \text{ m/s}.$$

$$v_z = \dot{z} = v \cdot \sin 15^\circ = 149,22 \cdot \sin 15^\circ = 38,62 \text{ m/s}.$$

Ao analisar a Figura 2.18(c), que destaca o plano $x - y$, conseguimos avaliar alguns dados que nos ajudarão a definir as coordenadas esféricas da velocidade, como:

$$z = y \cdot \tan 15^\circ = 3371 \cdot \tan 15^\circ = 903,26 \text{ m},$$

$$\phi = \tan^{-1}(z/R) = \tan^{-1}(903,26/5231,03) = 9,8^\circ.$$

Definimos, então, as componentes da velocidade do míssil em relação às coordenadas esféricas:

$$v_r = \dot{r} = 92,95 \cdot \cos 9,8^\circ = 91,6 \text{ m/s}$$

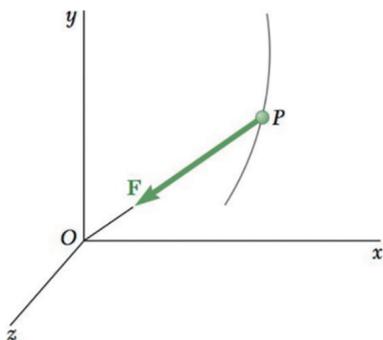
$$v_\phi = r\dot{\phi} = v_z \cos \phi - v_r \sin \phi$$

$$v_\phi = 38,62 \cdot \cos 9,8^\circ - 92,95 \cdot \sin 9,8^\circ = 22,23 \text{ m/s}$$

e v_θ é o mesmo que já determinamos para coordenada cilíndrica.

Temos, ainda, outro caso de movimento de partículas no qual o movimento é regido por meio de uma força central, como indicado pela Figura 2.19, no qual uma força \vec{F} em direção ao ponto de origem O é a responsável pelo movimento da partícula P . Essa força \vec{F} é denominada de força central, enquanto o ponto O é denominado de centro de força.

Figura 2.19 | Uma partícula P sob a ação de uma força central dirigida para o ponto fixo O .



Fonte: Beer et al. (2012, p. 727).

Ao observar que a força \vec{F} está em direção ao ponto O , temos uma condição em que essa força \vec{F} não gera momento em relação ao movimento da partícula. Assim, podemos dizer que para qualquer instante analisado:

$$\Sigma M_o = 0,$$

mas recordando que $\Sigma M_o = \dot{\vec{H}}_o$, temos a relação que $\dot{\vec{H}}_o = 0$ e, integrando em relação a t :

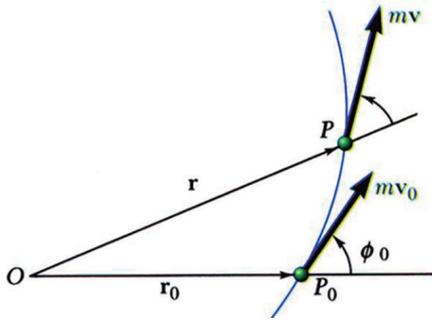
$$\begin{aligned} \int \dot{\vec{H}}_o dt &= \int 0 dt \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_o = \text{constante} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \vec{r} \times m\vec{v} &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Por meio dessa última relação, definimos que o vetor de posição \vec{r} é perpendicular a \vec{H}_o , indicando que o movimento dessa partícula ocorre em um plano perpendicular a \vec{H}_o .

Logo no início do movimento da partícula P , é possível relacionar o plano de movimento e o vetor \vec{H}_o por meio da posição de início

de \vec{r} , ou seja, \vec{r}_0 e o vetor da velocidade inicial \vec{v}_0 como representado pela Figura 2.20.

Figura 2.20 | Plano fixo e perpendicular a \vec{H}_O do movimento de uma partícula P sob o efeito de uma força central.



Fonte: Beer et al. (2012, p. 728).

Ainda em relação à Figura 2.20 recordando que partículas com movimento sob a ação de uma força central apresentam movimento angular \vec{H}_O constante, podemos fazer uma relação com a condição inicial que também é constante e não se altera ao longo do movimento:

$$r \cdot mv \cdot \text{sen } \phi = r_0 \cdot mv_0 \cdot \text{sen } \phi_0.$$

Quando analisamos o movimento de partículas submetidas à força central, podemos estabelecer algumas relações com situações reais, como é o caso da força gravitacional que o planeta Terra exerce em um satélite, força gravitacional essa que ocorre em direção à Terra, ou seja, uma força central atuando no satélite, que, para este exemplo, é considerado uma partícula.



Assimile

A força gravitacional está atuando entre dois corpos quaisquer, porém, apenas quando um deles tiver uma massa muito grande, é que ela terá valor suficiente para ter seu efeito perceptível.

A força gravitacional exercida por uma pessoa sobre outra não é perceptível, ao contrário da força gravitacional exercida pela Terra sobre uma pessoa.

Com base nessas aplicações de forças gravitacionais é que Newton definiu a lei da gravitação universal, em que relacionou a força gravitacional exercida por duas partículas, uma de massa M e outra de massa m , distantes por um fator r , e que se atraem com forças \vec{F} e $-\vec{F}$, ou seja, forças de mesma intensidade, mas sentidos opostos, direcionadas sobre a linha que une essas duas partículas. Tais forças apresentam intensidade definida por:

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2},$$

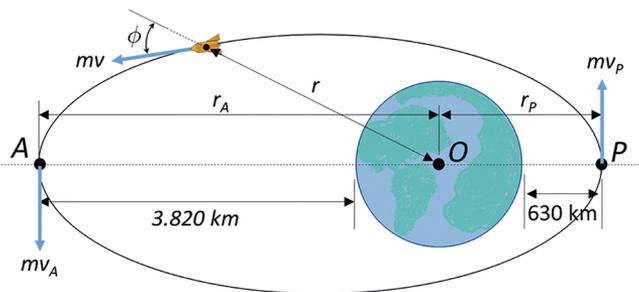
sendo G a constante de gravidade definida experimentalmente com intensidade de $(66,73 \pm 0,03) \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

Sem medo de errar

No papel do funcionário de uma empresa aeroespacial, você deve verificar se a espaçonave não ultrapassará a velocidade crítica de 23.000 km/h durante sua trajetória na órbita da Terra para a condição em que foi lançada paralelamente à superfície da Terra, indo para o ponto de perigeu da órbita elíptica com distância de 630 km e velocidade de 4.590 m/s (ou 16.524 km/h), a fim de atingir a distância de 3.820 km em relação à superfície da Terra no apogeu da trajetória.

Inicialmente, podemos esquematizar a situação de movimento orbital da aeronave com base nas informações do seu movimento como representado na Figura 2.21.

Figura 2.21 | Representação do movimento da espaçonave ao redor da Terra.



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que a aeronave entra em órbita elíptica devido a uma força central que é a gravidade exercida pela Terra. Essa força central fica voltada para o centro da Terra (ponto O na Figura 2.21),

portanto podemos afirmar que o momento angular dessa espaçonave se mantém constante de modo que:

$$H_o = r \cdot mv \cdot \text{sen}\phi.$$

Agora, utilizando a equação da conservação da quantidade de movimento angular para os pontos conhecidos P e A , conseguimos definir a velocidade da espaçonave para o ponto mais distante do início do movimento da espaçonave:

$$r_A \cdot mv_A \cdot \text{sen}90^\circ = r_P \cdot mv_P \cdot \text{sen}90^\circ$$

$$v_A = \frac{r_P \cdot v_P}{r_A},$$

e como o raio da Terra é de 6370 km:

$$v_A = \frac{r_P \cdot v_P}{r_A} = \frac{(630 + 6.370) \cdot 16.524}{(3.280 + 6.370)}$$

$$v_A = 11.986,32 \text{ km/h.}$$

A velocidade da espaçonave no ponto mais distante da superfície da Terra (ponto A do apogeu na trajetória elíptica) é, então, menor do que a velocidade no ponto mais próximo.

Ao analisar toda a situação de movimento da espaçonave na trajetória elíptica por meio da equação $H_o = r \cdot mv \cdot \text{sen}\phi$, percebemos que o valor mais alto para $\text{sen}\phi$ ocorre quando o ângulo $\phi = 90^\circ$ (uma vez que $\text{sen}90^\circ = 1$), ou seja, nos pontos de apogeu e perigeu.

Como foram exatamente esses dois pontos que analisamos e ambos apresentaram valores de r na equação $H_o = r \cdot mv \cdot \text{sen}\phi$ bastante diferentes, levando-nos a crer que já analisamos as duas condições que deveriam apresentar os resultados de velocidade mais relevantes, podemos concluir que a velocidade máxima da espaçonave deve ficar próxima da velocidade no ponto P , portanto a espaçonave não atingirá a velocidade crítica de 23.000 km/h para a trajetória analisada.

Desta forma, definimos que a espaçonave não atinge velocidade maior que a velocidade crítica estabelecida e finalizamos a análise do movimento de uma partícula sob o efeito de uma força central em movimento curvilíneo.

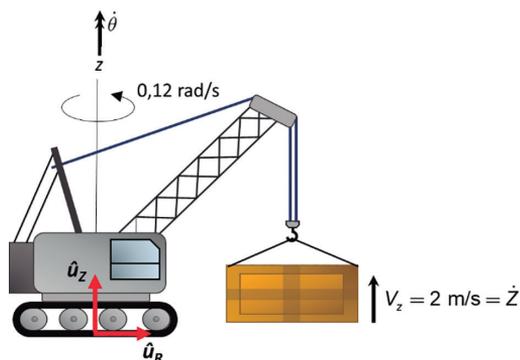
Avançando na prática

Análise de velocidade e aceleração por meio de coordenadas cilíndricas

Descrição da situação-problema

Um guindaste, como o representado na Figura 2.22, está içando uma caixa à taxa constante de 2 m/s, ao mesmo tempo que está girando à taxa constante de 0,12 rad/s.

Figura 2.22 | Esquema da calha por onde o caixote desliza até encontrar o vagão de transporte.



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que a caixa é distante do eixo de rotação do guindaste em 40 m, determine quais devem ser sua velocidade e aceleração, desconsiderando que existe oscilação na caixa.

Resolução da situação-problema

Analisando a situação em relação aos vetores unitários \hat{u}_R e \hat{u}_z em função de coordenadas cilíndricas, os vetores velocidade da caixa, \vec{v}_C , e aceleração da caixa, \vec{a}_C , são definidos seguindo a relação para coordenadas cilíndricas, como:

$$\vec{v}_C = \dot{R}\hat{u}_R + R\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{z}\hat{u}_z = v_R\hat{u}_R + v_\theta\hat{u}_\theta + v_z\hat{u}_z$$

$$\vec{a}_C = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{u}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{z}\hat{u}_z = a_R\hat{u}_R + a_\theta\hat{u}_\theta + a_z\hat{u}_z.$$

Como R corresponde à distância do eixo de rotação do guindaste até a caixa, $R = 40$ m, $\dot{R} = 0$, $\ddot{R} = 0$. Em relação à altura z , temos

que $\dot{\mathbf{z}} = 2 \text{ m/s}$ e $\ddot{\mathbf{z}} = 0$. Ao analisarmos o movimento de rotação em função do ângulo θ , obtemos que $\dot{\theta} = 0,12 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\theta} = 0$.

Com esses dados bem definidos, obtemos a velocidade \vec{v}_C :

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \dot{R}\hat{u}_R + R\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{\mathbf{z}}\hat{u}_z = 0\hat{u}_R + (40 \cdot 0,12)\hat{u}_\theta + 2\hat{u}_z = 4,8\hat{u}_\theta + 2\hat{u}_z \\ \vec{v}_C &= 4,8\hat{u}_\theta + 2\hat{u}_z \text{ m/s.}\end{aligned}$$

E a aceleração \vec{a}_C :

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{u}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{\mathbf{z}}\hat{u}_z = \\ &= (0 - 40 \cdot 0,12^2)\hat{u}_R + (40 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0,12)\hat{u}_\theta + 0\hat{u}_z \\ \vec{a}_C &= 0,576\hat{u}_R \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Com esse exemplo, percebemos que, quando bem definidas as componentes de um sistema de coordenadas, mesmo que tridimensional, como é o caso das coordenadas cilíndricas e esféricas, o desenvolvimento dos vetores se torna uma tarefa simples, apesar de merecer um cuidado extra, em razão da grande quantidade de vetores presentes.

Faça valer a pena

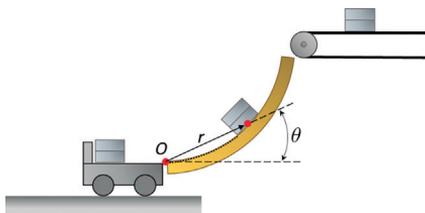
1. Com base nas aplicações de forças gravitacionais, Newton definiu a lei da gravitação universal, em que ele relacionou a força gravitacional exercida por duas partículas, uma de massa M e outra de massa m , distantes por um fator r e que se atraem com forças \vec{F} e $-\vec{F}$, ou seja, forças de mesma intensidade, mas sentidos opostos, e direcionadas sobre a linha que une essas duas partículas.

Com base no conceito da lei de gravitação universal, assinale a alternativa que apresenta a afirmação correta:

- Forças gravitacionais estão presentes para quaisquer dois corpos.
- A força gravitacional exercida por duas partículas, uma de massa M e outra de massa m , distantes por um fator r , apresenta intensidade definida por $F = G \cdot M \cdot m/r^2$, sendo G a velocidade da luz.
- Apenas quando um dos corpos tiver uma massa muito grande é que a força gravitacional existirá.
- Newton não chegou a definir a lei da gravitação universal, uma vez que ainda não tinha conhecimento de como as forças gravitacionais de dois corpos interagem.
- Forças gravitacionais estão presentes apenas para corpos que apresentam forma circular e massa muito grande.

2. Na posição do engenheiro responsável pela análise da linha de transporte de caixotes, você deve determinar a aceleração do caixote de 0,8 kg, quando este está deslizando por 1,3 s na calha e apresenta a relação $r = 900 + 300\cos(0,5\pi t)$ mm, $\theta = \pi(3t^2 - 9t)$ rad, em que t é o tempo em segundos. A Figura 2.23 representa a calha por onde o caixote desliza.

Figura 2.23 | Esquema da calha por onde o caixote desliza até encontrar o vagão de transporte.



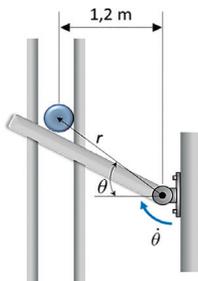
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo para as coordenadas polares da aceleração, quando o caixote está deslizando por 1,3 s na calha:

- a) $a_r = -10,52 \text{ m/s}^2$ e $a_\theta = 17,56 \text{ m/s}^2$.
- b) $a_r = -5,0 \text{ m/s}^2$ e $a_\theta = 15,6 \text{ m/s}^2$.
- c) $a_r = 10,9 \text{ m/s}^2$ e $a_\theta = -17 \text{ m/s}^2$.
- d) $a_r = 8,3 \text{ km/h}^2$ e $a_\theta = 5 \text{ km/h}^2$.
- e) $a_r = -11 \text{ km/h}^2$ e $a_\theta = 12 \text{ km/h}^2$.

3. Uma empresa que produz esferas de aço com massa de 1,2 kg, destinadas a moinhos de mineração, possui um sistema de linha de produção que, ao detectar alguma esfera fora dos padrões de qualidade, a direciona para um trilho de descarte, como representado na Figura 2.24.

Figura 2.24 | Sistema de transporte de esfera por meio de um trilho.



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que a esfera entra em contato apenas com um lado do trilho, como representado pela Figura 2.24, quando $\theta = 35^\circ$, com velocidade angular constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s, são realizadas as afirmações a seguir em relação à força normal do trilho e à força na haste que movimentam a esfera:

- I. A força normal do trilho na esfera deve ter valor aproximado de 41,91 N e seu vetor deve estar alinhado com a horizontal.
- II. A força gerada pela haste na esfera é aproximadamente igual a 83,4 N e seu vetor deve estar seguindo o sentido de r .
- III. A força gerada pela haste na esfera é aproximadamente igual a 62,4 N e seu vetor deve estar seguindo o sentido de r .
- IV. A força normal do trilho na esfera deve ter valor aproximado de 41,91 N e seu vetor deve estar alinhado ao eixo θ .

Agora, assinale a alternativa que apresenta as afirmações CORRETAS apenas:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

Seção 2.3

Dinâmica gravitacional para partículas

Diálogo aberto

Na seção anterior, analisamos o movimento de partículas em coordenadas cilíndricas e esféricas e exemplificamos com o movimento de partículas sob o efeito de forças centrais. Nesta seção, aprofundaremos esse último tema, considerando que as forças centrais regem movimentos de partículas sob o efeito de forças oriundas de campos gravitacionais e eletrostáticos. Isso nos permitirá também conhecer aplicações práticas da Mecânica Espacial.

Estão presentes nesta seção atributos de coordenadas polares e relações de seções cônicas, para que possamos estudar o movimento de partículas em trajetórias excêntricas, podendo estar no formato de círculos, elipses, parábolas ou hipérbolas.

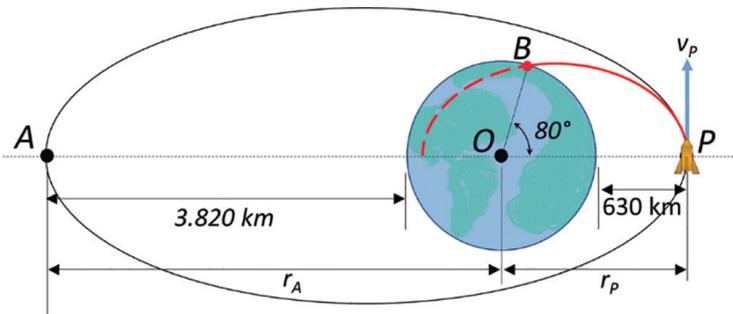
Portanto, veremos conceitos importantes para estudarmos a trajetória exata desenvolvida por um elemento em órbita e, até mesmo, verificar se este tende a sair da órbita ou se está em um movimento de colisão, o que é de extrema importância, por exemplo, na área aeroespacial.

Voltando à situação em que você, aluno, está analisando o movimento da espaçonave ao redor da Terra, para finalizar o que lhe foi solicitado, deve agora determinar o movimento da aeronave após a condição simulada de que os propulsores para redução da velocidade escalar da aeronave foram acionados, e a aeronave foi reposicionada em uma nova órbita, de modo a “colidir” com a Terra, representando, assim, a entrada da espaçonave na atmosfera da Terra para que possa pousar.

Os valores de velocidade, os pontos de perigeu e apogeu da órbita da espaçonave e os valores da distância desses pontos em relação à superfície da Terra foram obtidos no exercício anterior, agora é possível realizar essa última tarefa.

Partindo da órbita elíptica em que a espaçonave estava e considerando todos os dados obtidos, a simulação ocorre com a aeronave tendo a velocidade reduzida no ponto de perigeu da trajetória elíptica que vinha seguindo. Assim, você deve determinar em quanto é necessário que a velocidade escalar da aeronave seja reduzida para alcançar o ponto B na superfície da Terra, de modo que possa manobrar adequadamente e, assim, realizar o pouso. A representação do movimento da aeronave para o ponto B na Terra está indicada na Figura 2.25.

Figura 2.25 | Representação das órbitas simuladas pelas quais a aeronave deverá se movimentar



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao relembrar os dados obtidos para essa aeronave na situação-problema da seção anterior, temos que $v_A = 11.351,13 \text{ km/h}$, $r_A = 10.190 \text{ km}$, $v_P = 16.524 \text{ km/h}$, $r_P = 7.000 \text{ km}$ e o raio da Terra, $R = 6.370 \text{ km}$.

Para solucionar essa última tarefa e finalizar a análise de todo o movimento da espaçonave, é preciso utilizar os conceitos da Mecânica Espacial, como o formato da trajetória desenvolvida por uma partícula sob o efeito de uma força central e o tempo que a partícula leva para se movimentar ao longo de determinados pontos da trajetória.

Como essa é a sua última tarefa, na posição do engenheiro responsável por determinar o movimento da aeronave, de posse de todos os resultados, não se esqueça de compilá-los em um relatório no formato de memorial de cálculo, com a indicação de todas as situações e resultados determinados.

Não pode faltar

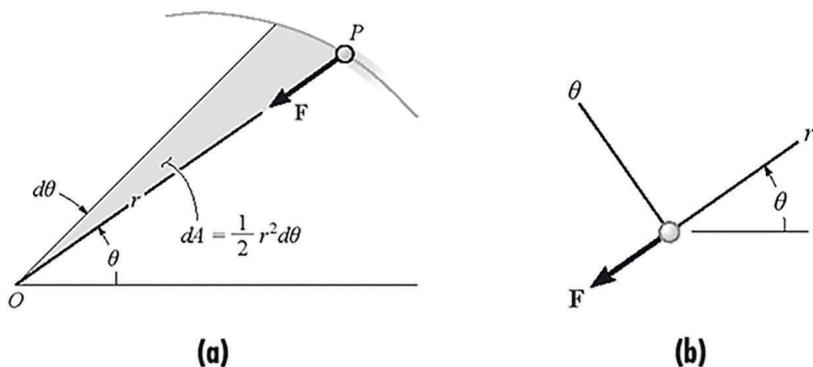
Nesta seção, aprofundaremos o estudo de partículas sob o efeito de forças centrais geradas por forças gravitacionais ou eletrostáticas. As forças centrais influenciam o movimento de partículas e apresentam linha de atuação sempre apontada para um ponto fixo que definimos como ponto de referência do movimento, representado na Figura 2.26.

Retomando a seção anterior, a força gravitacional definida por Newton, por meio da lei da gravitação entre duas partículas, é determinada pela relação:

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2},$$

sendo G a constante de gravidade, com intensidade de $(66,73 \pm 0,03) \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$; M e m as massas das partículas e r a distância entre ambas.

Figura 2.26 | (a) Movimento de uma partícula P de massa m sob o efeito da força central F e (b) diagrama de corpo livre para a partícula P



Fonte: Hibbeler (2011, p. 122).

Ao analisar a Figura 2.26, definimos que o sistema de coordenadas polares para o movimento bidimensional da partícula sob o efeito de uma força central é o mais conveniente a ser utilizado, uma vez que a força central será sempre no sentido negativo de r , e não há nenhuma força atuando na direção perpendicular ao plano.

Partindo do sistema de coordenadas polares, temos a relação das equações de movimento para o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 2.26 (b):

$$\begin{aligned} \sum F_r = ma_r \quad \Rightarrow \quad -F &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -G \frac{M \cdot m}{r^2} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad \Rightarrow \quad 0 = m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}) = m \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right].$$

Podemos, ainda, obter uma nova relação para a $\sum F_\theta = ma_\theta$, se a multiplicarmos pelo fator r/m , ficando equivalente a:

$$\frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = 0$$

Ao integrarmos essa relação, obteremos:

$$r^2 \dot{\theta} = h,$$

sendo h a constante da integração. Se eliminarmos a variável t da equação, obteremos a relação da trajetória do movimento da partícula ($r = f(\theta)$).

Ao partir das equações de somatório das forças para o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 2.26 (b), ao utilizar a regra da cadeia, considerando que $r^2 \dot{\theta} = h$ e utilizando a definição de que $r = 1/\chi$, de modo que após manipulações da derivada e segunda derivada no tempo de r e simplificações, obteremos a nova relação:

$$-GM\chi^2 = -h^2 \chi^2 \frac{d^2 \chi}{d\theta^2} - \frac{1}{\chi} h^2 \chi^2$$

$$\frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \chi = \frac{GM}{h^2},$$

que é igual a:

$$\frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \chi = \frac{F}{mh^2 \chi^2}.$$

Essa equação diferencial representa a trajetória do movimento da partícula sob a ação de uma força central F , de modo que a trajetória é obtida ao desenvolvermos a sua solução para χ como função de θ e calcularmos as constantes da integração indefinida, com a análise das condições iniciais conhecidas.

Vale ressaltar ainda que a força F é positiva, como descrita na equação, caso a força central realmente esteja apontando para o centro do movimento (ponto O), como representado na Figura 2.26 (a), indicando que a força F é de atração. Mas caso a força F esteja afastando-se do ponto O (força de repulsão), a força F na equação deverá ser negativa.



Pesquise mais

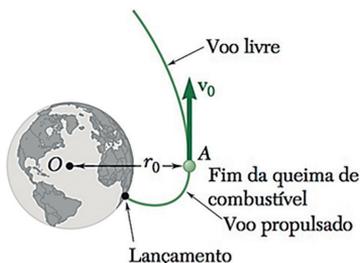
Para compreender melhor os passos que devem ser realizados a fim de obter a equação $\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \chi = \frac{F}{mh^2\chi^2}$, leia o capítulo 13.7 do livro indicado a seguir:

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. p. 122.

Vale ressaltar que o termo $1/r$ é representando aqui como χ , enquanto o material indicado para leitura utiliza a notação ξ para $1/r$.

Em alguns casos de análise do movimento de partículas, consideramos a força central sendo a gravidade, como nos casos de análises de satélites orbitando a Terra (Figura 2.27). Após o lançamento de um satélite, quando este fica em órbita, apenas a força gravitacional interfere no seu movimento. O mesmo fato ocorre com a Lua ao redor da Terra ou os planetas ao redor do Sol.

Figura 2.27 | Movimento de um satélite na órbita da Terra, logo após ser lançado



Fonte: Beer et al. (2012, p. 740).

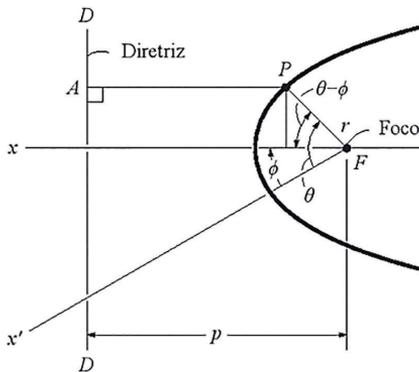
Ao voltar a analisar a equação diferencial de segunda ordem $\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \chi = \frac{GM}{h^2}$ definida anteriormente, observamos que a equação é não homogênea e o membro do lado direito é constante. Ao desenvolvermos essa diferencial de segunda ordem com base nas incógnitas representadas na Figura 2.28, devemos somar a solução particular ($\chi = GM/h^2$) à solução geral ($\chi = C \cos(\theta - \phi)$) da equação homogênea correspondente, que equivale ao membro direito quando igualado a zero (vale ressaltar que o termo C representa a constante da integração que deve ser realizada para resolvermos as derivadas). Ao fazer esses cálculos, chegamos à equação:

$$\chi = \frac{1}{r} = C \cos(\theta - \phi) + G \frac{M}{h^2}.$$

Essa equação é a representação da trajetória de movimento da partícula de massa m e indica uma seção cônica (podendo ter formato elíptico, parabólico ou hiperbólico) em coordenadas polares.

Para entender melhor o que significa uma equação representativa de uma seção cônica, analisaremos a Figura 2.28.

Figura 2.28 | Representação geométrica da equação de uma seção cônica



Fonte: Hibbeler (2011, p. 124).

Ao utilizar a Figura 2.28, definimos que a seção cônica representa o movimento de uma partícula em trajetória obtida pela relação de sua excentricidade e deve ser constante e estabelecida pela relação:

$$e = \frac{FP}{PA}.$$

Por meio da relação de excentricidade, chegamos a mais uma relação, agora para $1/r$:

$$FP = r = e(PA) = e[p - r \cos(\theta - \phi)] \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{P} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Manipulando essa equação e comparando com a equação $\chi = 1/r = C \cos(\theta - \phi) + G \frac{M}{h^2}$, relacionamos:

$$p = \frac{1}{C}$$

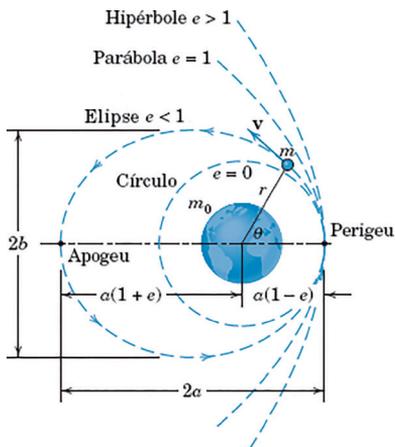
Ainda, por essa relação, definimos que a excentricidade pode, então, ser representada também como:

$$e = \frac{h^2 C}{GM}$$

Além disso, podemos definir o tipo da trajetória cônica do movimento da partícula pela equação da excentricidade, como segue (indicado na Figura 2.29):

- Se $e = 0$ → Trajetória circular.
- Se $e = 1$ → Trajetória parabólica.
- Se $e < 1$ → Trajetória elíptica.
- Se $e > 1$ → Trajetória hiperbólica.

Figura 2.29 | Representação geométrica da equação de uma seção cônica



Fonte: Meriam e Kraige (2009, p. 168).

Pelos tipos de trajetórias definidas pela relação da excentricidade, para trajetórias hiperbólicas, a partícula não retornará ao ponto inicial.

A trajetória parabólica é o limite a partir do qual a partícula não retorna ao ponto inicial, e a velocidade para que a partícula fique nesse tipo de trajetória é conhecida como velocidade de escape v_e , definida como:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$



Refleta

Pela comparação entre a velocidade de escape v_e e a velocidade inicial v_0 de uma partícula em movimento devido a uma força central, podemos relacionar se a trajetória será hiperbólica, parabólica ou elíptica pela mesma metodologia que definimos para a excentricidade. Como deve ser o formato da trajetória quando a partícula apresenta $v_e > v_0$, $v_e = v_0$ e $v_e < v_0$?

Quando estamos analisando a trajetória circular, a velocidade escalar v_c para que o satélite fique nessa trajetória é definida pela relação:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Ao considerar que o raio r_0 seja grande o suficiente para que o movimento da partícula não tenha atrito com uma possível atmosfera, como o satélite representado na Figura 2.29, deduzimos que essa equação para v_c representa o valor da velocidade mínima que a partícula deve ter para não colidir com a partícula de massa maior. Em outras palavras, para velocidades menores do que v_c , a partícula de massa m vai chocar-se à superfície da partícula de massa M , como no exemplo da trajetória de colisão da Figura 2.29, no qual a velocidade do satélite (partícula de massa m) é menor do que v_c .

Voltando à análise da Figura 2.28, se, em vez de analisarmos o ângulo θ em relação ao eixo \mathbf{x}' , analisarmos em relação ao eixo x ,

que é horizontal e de simetria da trajetória de seção cônica, o ângulo ϕ será zero e, assim, chegaremos à relação:

$$\chi = \frac{1}{r} = C \cos(\theta) + G \frac{M}{h^2}.$$

As incógnitas C e h são definidas ao analisarmos a velocidade e a posição da partícula quando se inicia o movimento de seção cônica, de modo que teremos a velocidade inicial \mathbf{v}_0 e a posição inicial \mathbf{r}_0 , como exemplificado pela Figura 2.27.

Para definir, então, a incógnita h , utilizamos a relação da velocidade inicial \mathbf{v}_0 , obtendo a equação:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \Rightarrow h = r_0^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$h = r_0 v_0.$$

Essa equação para h pode ser utilizada também para obtermos uma equação da relação GM/h , ao analisarmos o caso específico da Terra, de modo que:

$$GM = gR^2,$$

com R representando o raio da Terra e g , a aceleração da gravidade.

Já para definirmos a incógnita C , utilizamos a condição de que quando $r = r_0$, temos $\theta = 0^\circ$ e $h = r_0 v_0$ na equação

$\frac{1}{r} = C \cos(\theta) + G \frac{M}{h^2}$, obtendo:

$$C = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) \Rightarrow C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}.$$

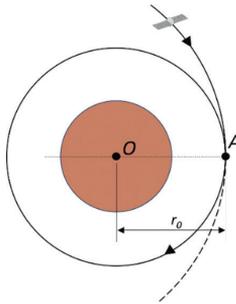
Por meio dessas equações para C e h , definimos a equação que representa a trajetória do movimento da partícula sob o efeito de uma força central, como:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) \cos(\theta) + G \frac{M}{r_0^2 v_0^2}.$$



Uma sonda espacial é enviada ao planeta Vênus para fotografá-lo, e, para que as fotografias fiquem na mesma perspectiva, a sonda deve entrar em órbita circular. A sonda aproxima-se de Vênus em uma trajetória parabólica, sendo sua velocidade, no ponto A , indicado na Figura 2.30, igual a 7.200 km/h . Analisando o movimento dessa sonda, determine sua distância até o centro do planeta Vênus e a velocidade que deve passar a ter para que a órbita seja circular, considerando que a massa de Vênus é de $4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e o seu raio, 6.052 km .

Figura 2.30 | Representação da trajetória elíptica e circular da sonda ao redor do planeta Vênus.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os dados da situação e recordando da seção anterior que a constante G equivale a $66,73 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, inicialmente, determinamos o valor da distância até o centro do planeta Vênus (o valor de r_0 na Figura 2.30), por meio da equação da velocidade para trajetórias elípticas de partículas em movimento sob a ação de uma força central com a velocidade em m/s :

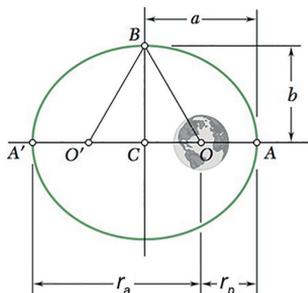
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \Rightarrow 7.200 \left(\frac{1000}{3600} \right) = \sqrt{\frac{2 \cdot (66,73 \cdot 10^{-12}) (4,87 \cdot 10^{24})}{r_0}}$$
$$r_0 = 1,62 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Para determinarmos a velocidade que a sonda deve ter para ficar em órbita circular, utilizamos a equação da velocidade para trajetória circular e o raio que acabamos de definir, de modo que:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{(66,73 \cdot 10^{-12}) (4,87 \cdot 10^{24})}{1,62 \cdot 10^8}}$$
$$v_c = 1416,34 \text{ m/s.}$$

Ao analisarmos a trajetória elíptica, definimos algumas particularidades como exemplificado na Figura 2.31, uma vez que a forma elíptica não é tão simples quanto a forma circular.

Figura 2.31 | Representação da trajetória elíptica de um satélite na órbita da Terra



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 742).

Analisando a trajetória elíptica de uma partícula que se movimenta devido à força central, definimos que a distância r_p equivale à distância do ponto de origem ao qual a força central é direcionada (ponto O na Figura 2.31) até o perigeu, por meio da condição em que $\theta = 0^\circ$. Assim:

$$r_p = r_0.$$

Já o valor da distância r_a é definido na condição em que $\theta = 180^\circ$ pela equação:

$$r_a = \frac{r_0}{\left(\frac{2GM}{r_0 v_0^2}\right) - 1}.$$

Ainda, podemos relacionar r_p e r_a pela equação:

$$\frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_a} = \frac{2GM}{h^2}.$$



Assimile

Para as partículas que estão em órbita elíptica, definimos que a maior e a menor distância até o foco da trajetória elíptica são chamadas de periapside e apoapside, respectivamente. Deste modo, as nomenclaturas perigeu e apogeu são utilizadas apenas para partículas que estão em trajetória elíptica na órbita da Terra.

O valor da distância a (meio comprimento do eixo maior da trajetória elíptica) da Figura 2.31 é definido como:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}.$$

A distância b é definida pela relação:

$$b = \sqrt{r_p r_a}.$$

Ainda, podemos definir o tempo que uma partícula leva para dar uma volta orbital (tempo este representado por T e chamado de período):

$$T = \frac{\pi}{h} (r_p + r_a) \sqrt{r_p r_a} = \frac{2\pi ab}{h}.$$

Sem medo de errar

Para finalizar todas as suas tarefas como engenheiro responsável por uma espaçonave, você deve, agora, determinar o movimento dela, após a condição simulada de que os propulsores para redução da velocidade escalar da aeronave foram acionados, e esta foi reposicionada em uma nova órbita, de modo a "colidir" com a Terra, representando, assim, a entrada da espaçonave na atmosfera da Terra para que possa pousar.

Com os dados da situação-problema da seção anterior (seção 2 da unidade 2), temos $v_A = 11.351,13 \text{ km/h}$, $r_A = 10.190 \text{ km}$, $v_P = 16.524 \text{ km/h}$, $r_P = 7.000 \text{ km}$ e o raio da Terra, $R = 6.370 \text{ km}$.

Para determinarmos em quanto a velocidade deve ser reduzida, iniciamos determinando o valor de h quando a espaçonave está indo do ponto P para B e, assim, definimos h como h_{PB} :

$$h_{PB} = r_P v_{PB}.$$

No perigeu da trajetória (ponto B), temos $\theta = 0^\circ$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= G \frac{M}{h^2} + C \cos(\theta) \Rightarrow \frac{1}{r_P} = G \frac{M}{h_{PB}^2} + C \cos(0^\circ) \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{r_P} - G \frac{M}{h_{PB}^2}. \end{aligned}$$

Para a situação da espaçonave entrando na atmosfera da Terra, $\theta = 80^\circ$ e r equivale ao raio R da Terra:

$$\frac{1}{R} = G \frac{M}{h_{PB}^2} + C \cos(80^\circ) \Rightarrow C = \frac{1}{\cos 80^\circ} \left(\frac{1}{R} - G \frac{M}{h_{PB}^2} \right)$$

$$\frac{1}{r_P} - G \frac{M}{h_{PB}^2} = \frac{1}{\cos 80^\circ} \left(\frac{1}{R} - G \frac{M}{h_{PB}^2} \right) \Rightarrow h_{PB}^2 = \frac{GM \left(\frac{1}{\cos 80^\circ} - 1 \right)}{\frac{1}{R \cdot \cos 80^\circ} - \frac{1}{r_P}}$$

$$h_{PB}^2 = \frac{(66,73 \cdot 10^{-12})(5,976 \cdot 10^{24}) \left(\frac{1}{\cos 80^\circ} - 1 \right)}{\frac{1}{(6.370 \cdot 10^3) \cdot \cos 80^\circ} - \frac{1}{(7.000 \cdot 10^3)}}$$

$$h_{PB} = 4,99 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$h_{PB} = r_P v_{PB} \Rightarrow v_{PB} = \frac{h_{PB}}{r_P} = \frac{4,99 \cdot 10^{10}}{7000 \cdot 10^3} = 7.128,57 \text{ m/s.}$$

Com o valor da velocidade para a espaçonave apresentar a trajetória de "colisão" com a Terra, conseguimos definir qual deve ser a redução da velocidade da espaçonave no ponto P para entrar na atmosfera:

$$\Delta v_P = v_{PB} - v_P = 7.128,57 - 16.524$$

$$|\Delta v_P| = 9.395,43 \text{ m/s.}$$

Com o resultado da redução da velocidade, você concluiu todos os cálculos solicitados, mas ainda não finalizou todas as tarefas. Agora, deve compilar todos os resultados e montar um relatório final, no formato de um memorial de cálculo, descrevendo as tarefas e os resultados obtidos. Tal memorial será apresentado ao supervisor da empresa aeroespacial para a qual você desenvolveu as análises da espaçonave.

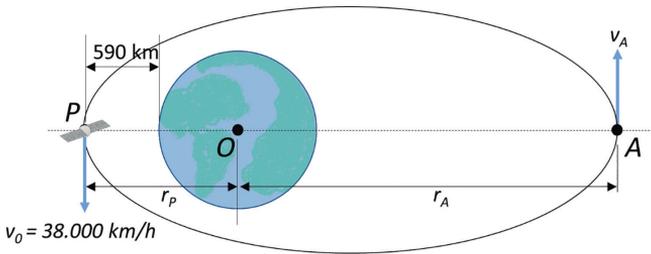
Avançando na prática

Previsão da velocidade e distância de um satélite em órbita elíptica

Descrição da situação-problema

A empresa de lançamento de satélites na qual você trabalha precisa colocar em órbita elíptica um novo satélite, o qual será lançado em direção ao ponto P , representado na Figura 2.32, com velocidade de 38.000 km/h a uma altitude em relação à superfície da Terra de 590 km . Determine se a órbita desse satélite realmente será elíptica, considerando que a massa e o raio da Terra equivalem, respectivamente, a $5,976(10^{24}) \text{ kg}$ e 6.378 km .

Figura 2.32 | Representação da trajetória elíptica do satélite na órbita da Terra



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Considerando que o satélite é lançado do ponto P , temos:

$$r_P = r_0 = 6378 + 590 = 6968 \text{ km} = 6.968.000 \text{ m}$$

$$v_0 = 38.000 \text{ km/h} = 10.555,56 \text{ m/s}$$

$$h = r_0 v_0 = r_P v_0 = 6.968.000 \times 10.555,56 = 7,3551 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Para a análise da órbita do satélite, precisamos definir a excentricidade da trajetória pela equação:

$$e = \frac{Ch^2}{GM}.$$

Como G é uma constante, M é a massa da Terra, h já definimos, precisamos, então, calcular o valor da constante C , que determinamos pela relação:

$$C = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) = \frac{1}{r_p} \left(1 - \frac{GM}{r_p v_0^2} \right) = \frac{1}{6.968.000} \left(1 - \frac{(66,73 \cdot 10^{-12})(5,976(10^{24}))}{6.968.000(10.555,56)^2} \right)$$

$$C = 6,9799 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}.$$

Consequimos, assim, obter o valor da excentricidade:

$$e = \frac{Ch^2}{GM} = \frac{6,9799 \cdot 10^{-8} (7,3551 \cdot 10^{10})^2}{(66,73 \cdot 10^{-12})(5,976(10^{24}))}$$

$$e = 0,947.$$

Como $e < 1$, temos a indicação da trajetória elíptica e, com isso, concluímos que a órbita desse satélite realmente será elíptica, finalizando a análise solicitada.

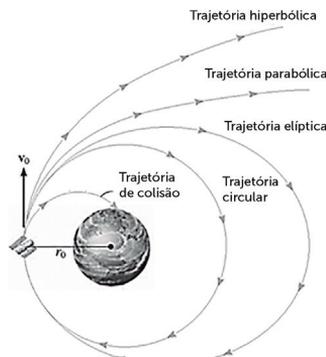
Faça valer a pena

1. Em alguns casos de análise do movimento de partículas sob efeito de uma força central, consideramos tal força sendo a gravidade, como nos casos de análises de satélites orbitando a Terra. Definimos que a seção cônica representa o seu movimento em trajetória obtida pela relação da excentricidade e , a qual deve ser constante e estabelecida por:

$$e = \frac{Ch^2}{GM}.$$

Trajетórias cônicas do movimento do satélite para diferentes resultados obtidos pela equação da excentricidade estão indicadas na Figura 2.33.

Figura 2.33 | Representações geométricas de diferentes resultados da equação de excentricidade e para um satélite



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 125).

Considerando que a seção cônica representa o movimento de uma partícula em trajetória definida pela relação da sua excentricidade e , são realizadas as afirmações a seguir:

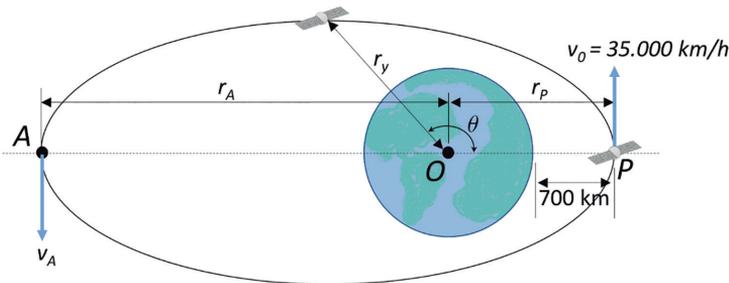
- I. Se $e = 0$, a trajetória do satélite será circular.
- II. Se $e = 1$, a trajetória do satélite será parabólica.
- III. Se $e < 1$, a trajetória do satélite será elíptica.
- IV. Se $e > 1$, a trajetória do satélite será hiperbólica.

Marque a alternativa correta em relação às afirmativas:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.
- e) As afirmativas I, II, III e IV estão corretas.

2. Um satélite será lançado em direção paralela à tangente da superfície da Terra (ponto P , na Figura 2.34), com velocidade de 35.000 km/h a uma altitude em relação à superfície da Terra de 700 km .

Figura 2.34 | Representação da trajetória elíptica do satélite na órbita da Terra



Fonte: elaborada pelo autor.

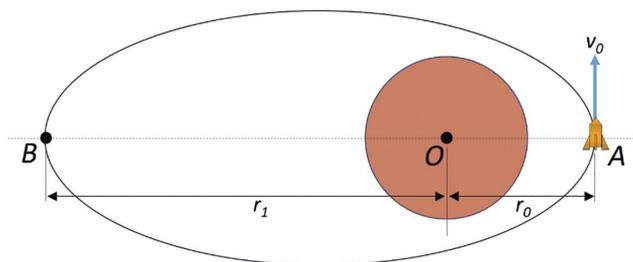
Considerando que a massa e o raio da Terra equivalem a $5,976(10^{24}) \text{ kg}$ e 6.378 km , respectivamente, são feitas as afirmações a seguir referentes ao correto valor da máxima distância d_{max} alcançada pelo satélite em relação à superfície da Terra e sua velocidade v_A , no apogeu da órbita.

- I. O valor da máxima distância que o satélite alcançará em relação à superfície da Terra é de $30.463,51 \text{ km}$.
- II. O valor da máxima distância que o satélite alcançará em relação à superfície da Terra é de $100.376,9 \text{ m}$.
- III. A velocidade, no apogeu da órbita, será de $1.867,84 \text{ m/s}$.
- IV. A velocidade, no apogeu da órbita, será de $1.867,84 \text{ km/h}$.

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

3. Uma sonda espacial é lançada em direção ao planeta Vênus, de modo que entre em uma trajetória elíptica, como indicado na Figura 2.35. Quando a sonda está no ponto A da trajetória, apresenta velocidade de 8.130 m/s e altitude de 280 km , em relação à superfície de Vênus.

Figura 2.35 | Representação da trajetória elíptica da sonda na órbita de Marte



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que a massa de Vênus é de $4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e seu raio R equivale a 6.052 km , assinale a alternativa que apresenta o período da sonda espacial na órbita do planeta Vênus:

- a) 10.430 s .
- b) 192 min .
- c) $2\text{h}34 \text{ min}$.
- d) $3,1 \text{ h}$.
- e) 8.002 s .

Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R.; CORNWELL, P. J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

GRAY, G. L.; COSTANZO, F.; PLESHA, M. E. **Mecânica para Engenharia: Dinâmica**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para Engenharia**. 12. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2011.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia: Dinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

NELSON, E. W. et al. **Engenharia Mecânica: Dinâmica**. Porto Alegre: Bookman, 2013. (Coleção Schaum).

Energia e momento linear e angular para a partícula

Convite ao estudo

Caro aluno, recordando nossos passos até agora, na Unidade 1, estudamos algumas condições instantâneas de partículas e analisamos os movimentos retilíneo e curvilíneo, enquanto na Unidade 2 enfocamos a segunda lei de Newton, o movimento em coordenadas cilíndricas e esféricas e a dinâmica gravitacional.

Nesta Unidade 3, vamos aprofundar nossos conhecimentos em Mecânica geral, compreendendo dois métodos que permitirão analisar o movimento sem a necessidade de determinar a aceleração do sistema. Vamos relacionar o conceito de trabalho de uma força com as análises de energia, assim como os conceitos de potência e eficiência. Veremos também como a conservação da quantidade de movimento pode ser aplicada em partículas.

Na prática, esses conceitos são úteis para determinar, por exemplo, o comportamento de um automóvel quando os freios são acionados, se sua velocidade em uma determinada curva é segura ou não. Será possível também descobrir como uma carga movimentada por relações de roldanas se comporta, especificar a potência para um motor elétrico movimentar uma carga e saber o comportamento de materiais em uma esteira da linha de produção, entre vários outros casos.

Na Seção 1, vamos tratar de conceitos relacionados com o trabalho de forças variáveis e conservativas, as energias envolvidas no movimento de partículas e o princípio de trabalho e energia. Na Seção 2, vamos voltar nossa atenção aos momentos linear e angular de partículas em movimento, o princípio de impulso e a conservação da quantidade de movimento. Finalmente, na Seção 3, daremos ênfase aos conceitos de impacto e colisões, tanto em movimentos com

sentido direto quanto oblíquo. Assim, aprofundaremos nossos conhecimentos anteriores, trabalhando situações mais realistas.

Ao longo desta seção, você estará no papel do consultor contratado por um parque de diversões para verificar a condição de operação de três brinquedos, pois o parque tem o projeto de aumentar a sua capacidade diária de visitantes, precisando, assim, incrementar também a capacidade e a atratividade dos brinquedos. Além de analisar as condições dos brinquedos por meio de conceitos da mecânica clássica, você deve dar atenção a aspectos quanto à segurança dos ocupantes dos brinquedos. Para tanto, você sempre deverá ser acompanhado por profissionais da área de segurança, antes da tomada final de decisões.

A sua função no papel do consultor será de analisar, inicialmente, os aspectos físicos e de segurança do brinquedo chamado de "descida forte", no qual um vagão sobre trilhos desce por uma rampa até ser parado por uma mola. Tal vagão pode transportar dois ocupantes e passará a transportar quatro ocupantes. Em um segundo momento, você deverá verificar a intensidade das forças exercidas em uma pessoa no brinquedo aquático denominado de "voo molhado", no qual uma pessoa desce por um tobogã e aterrissa sobre uma boia, sendo sua tarefa verificar as condições do impacto da pessoa com a boia e avaliar a segurança.

Por último, você deverá analisar as características do brinquedo "carro desgovernado". Nessa brincadeira, ocorre a colisão entre dois veículos, sendo sua função determinar a direção e a velocidade de cada veículo, para que a pista seja adaptada de acordo com o movimento destes, já que a velocidade máxima empregada deverá ser o dobro da atual. É importante aplicar o raciocínio crítico e de solução de problemas, assim como manter a persistência para obter o resultado preciso e satisfatório, ainda mais em condições que envolvem pessoas.

Nesta unidade, serão, então, apresentados conceitos e formulações para compreendermos como chegar às respostas dos questionamentos. Vamos aos estudos!

Seção 3.1

Trabalho e energia para a partícula

Diálogo aberto

Em algumas condições, é conveniente fazer o estudo do movimento de uma determinada partícula sem utilizar os métodos desenvolvidos até agora, em que considerávamos a aceleração. Essa condição de estudo do movimento ocorre pelo método de trabalho e energia, necessário sempre que forças não conservativas (como o atrito) estiverem presentes em uma análise, e devemos, então, considerar as energias cinética e potencial presentes no sistema.

Na análise de um movimento, conhecer de forma clara os conceitos de força, trabalho e energia permite prever e determinar o comportamento de veículos, cargas em movimento, elementos de máquinas etc. Como são questões práticas do dia a dia profissional, é de extrema importância conhecermos profundamente os aspectos envolvidos em análises de componentes de máquinas e condições de trabalho, a fim de passarmos confiança e certeza sempre que respondermos a questionamentos técnicos.

Para relacionar todos esses conceitos, você é colocado no papel do consultor contratado para avaliar o brinquedo de um parque de diversões, nomeado de “descida forte”. Nesse brinquedo, um vagão sobre trilhos para dois ocupantes é solto em uma rampa, com inclinação de 32° em relação ao horizonte. Tal vagão deve parar ao colidir com uma mola posicionada no final da rampa.

Sabe-se que o coeficiente de atrito entre o vagão e a mola é de 0,31. A nova massa máxima do vagão, cuja capacidade que era de duas pessoas passou para quatro pessoas, é de 380 kg. A mola no final da rampa tem constante de mola igual a 38 kN/m e fica previamente comprimida em 0,2 m. Na distância de 10 m da mola, o vagão pode apresentar a velocidade máxima de 21 km/h.

O seu papel como consultor será determinar a deformação máxima total sofrida pela mola para parar o vagão no caso mais crítico de utilização desse brinquedo. Dessa maneira, você poderá definir se será necessário comprar uma nova mola, ou se a mola atual, que apresenta deformação máxima de 0,8 m, pode parar o vagão com a nova capacidade.

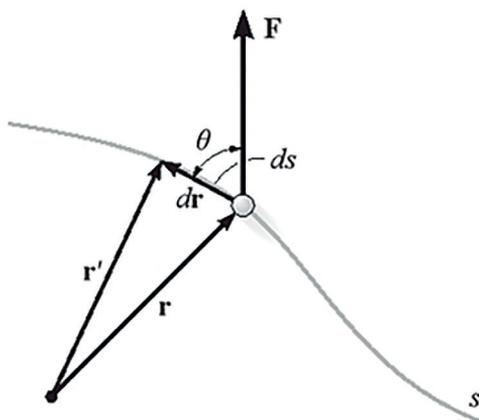
Ao analisarmos a interação entre o vagão e a mola, ficam os questionamentos: como a mola se comporta ao ser atingida pelo vagão? Como a energia está relacionada a todo o processo? Conceitos de trabalho também devem ser levados em conta nessa situação?

Vamos, então, aos estudos para desenvolvermos essa situação.

Não pode faltar

Vamos iniciar o estudo pelo conceito infinitesimal de trabalho e energia voltado à análise do movimento instantâneo da partícula representada na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Movimento da partícula P em relação à força \vec{F} que gera trabalho



Fonte: Hibbeler (2011, p. 133).

Uma força atuando no movimento da partícula gera trabalho apenas quando o movimento realmente segue o sentido da força. Na Figura 3.1, a força \vec{F} é a responsável por movimentar a partícula

pela trajetória espacial s da posição \vec{r} para \vec{r}' , com deslocamento infinitesimal $d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ na trajetória ds , de modo que o trabalho da força \vec{F} fica:

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow dU = F \cdot ds \cdot \cos\theta.$$

Considerando que a partícula esteja movimentando-se ao longo de uma trajetória tridimensional, ficamos com a equação do trabalho definida para as direções x , y e z como segue:

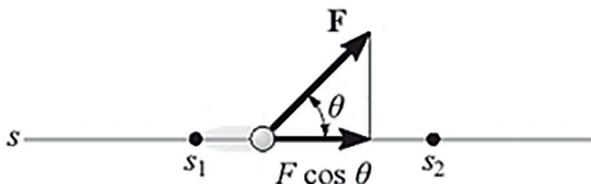
$$dU = F_x \cdot ds_x + F_y \cdot ds_y + F_z \cdot ds_z.$$

No caso de a partícula P deslocar-se por determinado comprimento finito da trajetória \vec{r}_1 para \vec{r}_2 , podemos determinar o trabalho da força \vec{F} que rege o deslocamento por meio da integração:

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot \cos\theta \cdot ds.$$

Se considerarmos que a força \vec{F} é constante ao longo do movimento com trajetória linear para a partícula P , a intensidade da força poderá ser definida como \vec{F}_C , em direção a um ângulo θ também constante, como representado na Figura 3.2. Assim, resulta em uma componente de força constante \vec{F}_C , no sentido do movimento com intensidade $F_C \cdot \cos\theta$.

Figura 3.2 | Movimento da partícula P em relação à força \vec{F} que gera trabalho



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 134).

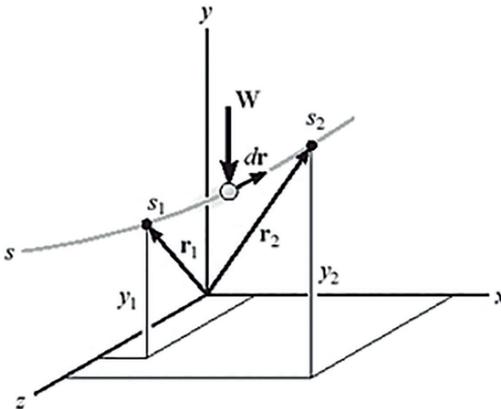
Podemos, então, determinar o trabalho realizado pela força \vec{F}_C quando a partícula se movimenta de S_1 para S_2 pela equação:

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot \cos\theta \cdot ds = F_C \cdot \cos\theta (S_2 - S_1).$$

Para uma partícula com peso \vec{W} que esteja movimentando-se em uma trajetória tridimensional, para um certo ponto do movimento, seu deslocamento é definido por $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Ao considerarmos que o movimento é para cima, como representado na Figura 3.3, definimos o trabalho da força que provoca o movimento como:

$$\begin{aligned}
 U_{1-2} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-W\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} (-W) \cdot (dy) = -W \cdot (y_2 - y_1).
 \end{aligned}$$

Figura 3.3 | Movimento tridimensional da partícula P de peso \vec{W}

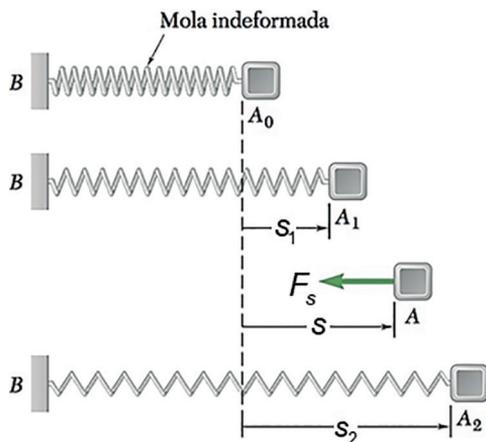


Fonte: Hibbeler (2011, p. 135).

Ao analisarmos uma partícula presa a uma mola e que esteja movimentando-se no sentido de alongar a mola por um comprimento ds , percebemos que a força F_s aplicada pela mola na partícula gera um trabalho negativo na partícula ($dU = -F_s ds$), pois a força F_s está no sentido oposto ao deslocamento ds (indicado na Figura 3.4). Sabendo que a força F_s aplicada pela mola pode ser relacionada pela sua constante de deformação por meio da relação $F_s = ks$ e que a partícula apresenta movimento de s_1 a s_2 , definimos o trabalho da força F_s como:

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} (-ks) \cdot ds = -\left(\frac{ks_2^2}{2} - \frac{ks_1^2}{2}\right).$$

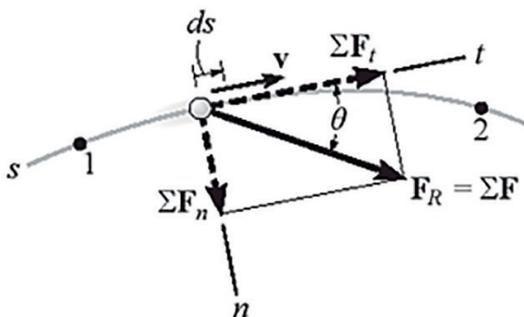
Figura 3.4 | Movimento da partícula presa à mola



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 763).

Vamos, agora, analisar o movimento da partícula da Figura 3.5, que apresenta trajetória definida no sistema de coordenadas inercial.

Figura 3.5 | Movimento da partícula seguindo uma trajetória em coordenadas inercial



Fonte: Hibbeler (2011, p. 137).

Consideremos a partícula da Figura 3.5 de massa m submetida a uma força resultante \vec{F}_R , que equivale ao somatório de todas as forças atuando no seu movimento, ou seja, $\vec{F}_R = \sum \vec{F}$. Ao analisarmos o vetor do movimento na direção tangencial da trajetória, observamos a relação $\sum F_t = ma_t$. Sabendo que $a_t = v \cdot ds/dt$, podemos montar uma relação para o trabalho dessa força \vec{F}_R ao

considerarmos que a partícula partiu de \mathbf{s}_1 com velocidade \mathbf{v}_1 , indo para \mathbf{s}_2 com velocidade \mathbf{v}_2 pela equação:

$$\sum \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1}^{s_2} (m\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v} = \left(\frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} \right)$$

$$\sum U_{1-2} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2.$$

Essa última equação que definimos é conhecida por representar o princípio do trabalho e energia da partícula, e os termos $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2$ e $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2$ representam a energia cinética final e a inicial, respectivamente. Assim, a energia cinética inicial é representada pela equação:

$$T_1 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2.$$

Uma relação importante que devemos ter em mente é que a energia cinética sempre é positiva, diferenciando-se do trabalho, que pode ser positivo ou negativo. Podemos expressar a relação das energias cinéticas, nos pontos 1 e 2 do movimento da partícula com o trabalho, como:

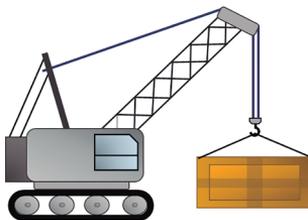
$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2.$$



Exemplificando

Durante o içamento de um contêiner, com massa de 3.500 kg , um guindaste *derrick* aplica uma força de intensidade $F = (40 + 2,5s^2) \text{ kN}$, como representado na Figura 3.6. Com bases nessas informações, determine o tempo para que o contêiner atinja a altura de 5 m .

Figura 3.6 | Representação do guindaste *derrick* içando um contêiner



Fonte: elaborada pelo autor.

Como estamos analisando uma situação que envolve força, velocidade e deslocamento, podemos utilizar o princípio de trabalho e energia para chegarmos à solução.

Inicialmente, devemos determinar se a força F para a posição na qual o contêiner esteja no chão é suficiente para erguê-lo, ou seja, deve ser maior do que a força W do contêiner. Para $s = 0$, portanto:

$$F = (40 + 2,5 \cdot 0^2) \text{ kN} > W = 34,33 \text{ kN}.$$

Utilizando, então, o princípio de trabalho e energia:

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \int_{s_1}^{s_2} \sum F \cdot ds = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}m0^2 + \int_0^s (F - W) \cdot ds = \frac{1}{2}mv^2$$

$$0 + \int_0^s [(40 + 2,5s^2)10^3 - (3,5 \cdot 9,81)10^3] ds = \frac{1}{2}(3,5 \cdot 10^3)v^2$$

$$40s + 0,833s^3 - 34,334s = 1,75v^2 \Rightarrow v = \sqrt{3,238s + 0,476s^3}.$$

Quando $s = 5$:

$$v = \sqrt{3,238 \cdot 5 + 0,476 \cdot 5^3} = 8,7 \text{ m/s}.$$

Agora, definimos o tempo pela relação $v = ds / dt$:

$$\sqrt{3,238s + 0,476s^3} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow t = \int_0^5 \frac{dt}{(3,238s + 0,476s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$t = 2,06 \text{ s}.$$



Pesquise mais

Para aprimorar seus conhecimentos sobre os assuntos aqui tratados, leia o tópico "Trabalho de atrito causado por deslizamento", que se inicia na página 138 do livro indicado a seguir:

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

Como já estudamos o conceito de trabalho gerado por forças presentes no movimento de partículas, vamos abordar o conceito de potência.

A potência é um parâmetro amplamente utilizado para determinar, por exemplo, um modelo de motor que gere determinada quantidade de trabalho em um tempo específico, e a equação que representa a potência P para essa quantidade de trabalho dU gerada em um intervalo de tempo dt é:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

sendo \vec{v} a velocidade da partícula sob a ação da força \vec{F} .

Outro parâmetro largamente difundido na mecânica e que está relacionado com o trabalho é a eficiência mecânica, que pode ser calculada pela relação entre a potência útil produzida e a potência fornecida por dado equipamento. A eficiência também pode ser relacionada com a energia, se essa for fornecida ao mesmo tempo que a máquina a consome. Estabelecemos, então, as seguintes relações para a eficiência:

$$\varepsilon = \frac{P_{saída}}{P_{entrada}} = \frac{\text{Energia de saída}}{\text{Energia de entrada}}.$$

Definimos a energia como uma medida da capacidade de um equipamento em realizar trabalho. Dessa maneira, podemos relacionar a energia em duas condições: na primeira, a partícula está em repouso e aplica-se energia para fazê-la movimentar-se, ou seja, aplica-se energia necessária para colocar a partícula em movimento com determinada velocidade v , denominada energia cinética, sendo relacionada ao trabalho por $\sum U_{1-2} = T_2$. Logo, a energia cinética é igual ao trabalho para movimentar uma partícula partindo do repouso.

Na segunda condição, quando analisamos a energia para a partícula movimentar-se de um dado ponto até outro, estamos analisando a energia potencial, que representa a quantidade de trabalho de uma força conservativa aplicada na partícula para o movimento de um ponto a outro. Portanto, a força potencial é bastante útil para definirmos o trabalho da força peso ou da força gerada por uma mola elástica aplicada nas partículas.

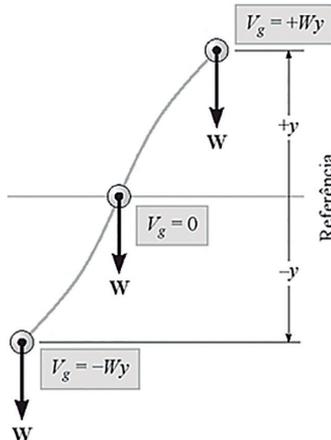


Nas forças conservativas, os trabalhos gerados por estas não dependem da trajetória do movimento da partícula, sendo relacionados apenas com as posições inicial e final. Assim, o peso das partículas ou a força gerada por uma mola são forças conservativas, uma vez que o trabalho gerado pela força peso depende apenas do deslocamento vertical, e o trabalho da força da mola está relacionado apenas com a compressão ou o alongamento da mola.

Um exemplo de força não conservativa é a força gerada pelo atrito, pois o atrito gerado durante o movimento de uma partícula sobre uma superfície será maior quanto maior for a trajetória. Consequentemente, maior será também o trabalho quanto maior a trajetória.

No caso apresentado na Figura 3.7, a partícula movimenta-se acima da linha de referência (sentido de $+y$) e em direção a essa linha de referência, o que faz a força peso \vec{W} gerar energia potencial gravitacional V_g positiva, que podemos definir por $V_g = +W \cdot y$, produzindo, assim, trabalho positivo.

Figura 3.7 | Destaque da força peso W na partícula, com movimento acima e abaixo do eixo de referência



Fonte: Hibbeler (2011, p. 158).

No caso de a partícula movimentar-se abaixo da linha de referência (sentido de $-y$) e em direção à referência, a força peso \vec{W} gerará energia potencial gravitacional V_g negativa, definida por $V_g = -W \cdot y$, produzindo, assim, trabalho negativo.



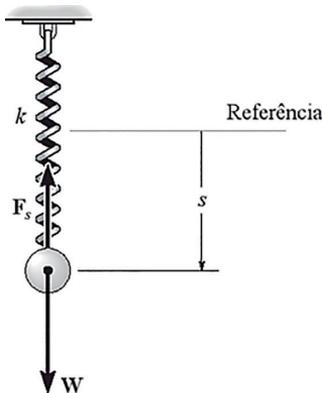
Se o movimento de uma partícula que está acima da linha de referência for no sentido contrário ao sentido positivo do eixo de referência y , que é de baixo para cima, a energia V_g continuará sendo positiva? E o trabalho produzido pela força será positivo ou negativo?

Levando em conta uma partícula que esteja conectada a uma mola, passamos a analisar a energia potencial elástica V_e da mola, de modo que se a mola for comprimida ou alongada por um valor s em relação à sua condição não deformada, a mola gerará energia potencial elástica que fica armazenada até que volte à posição não deformada, como indicado na Figura 3.8. Essa energia potencial elástica é definida como:

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2.$$

Como a mola sempre exerce uma força para retornar à posição não deformada, o trabalho gerado sobre a partícula será positivo, portanto a energia V_e será positiva.

Figura 3.8 | Partícula sujeita às forças gravitacional e elástica simultaneamente



Fonte: Hibbeler (2011, p. 159).

Como a partícula está sob o efeito das forças gravitacional e elástica simultaneamente, como indicado na Figura 3.8, a partícula vai apresentar energia potencial resultante da soma algébrica da energia potencial gravitacional com a energia elástica:

$$V = V_g + V_e.$$

Analisando a energia potencial da partícula quando se movimentar no sentido negativo do eixo de referência s a partir da região não deformada, montamos a relação:

$$V = V_g + V_e = -Ws + \frac{1}{2}ks^2.$$

Tendo em vista que o trabalho realizado por forças conservativas é definido como a diferença das energias potenciais do ponto inicial para o ponto final do movimento pela relação $U_{1-2} = V_1 - V_2$, montamos a equação para o trabalho da partícula, representada na Figura 3.8 como:

$$\begin{aligned} U_{1-2} = V_1 - V_2 &= \left(-Ws_1 + \frac{1}{2}ks_1^2 \right) - \left(-Ws_2 + \frac{1}{2}ks_2^2 \right) = \\ &= W(s_2 - s_1) - \left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2 \right). \end{aligned}$$

Se analisarmos o movimento da partícula através de uma trajetória tridimensional, deveremos, então, considerar o deslocamento do ponto (x, y, z) para $(x + dx, y + dy, z + dz)$, de modo a ficarmos com a equação do trabalho para o movimento tridimensional, como:

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Para uma partícula que esteja submetida tanto a forças conservativas quanto a forças não conservativas, a parte do trabalho correspondente às forças conservativas é definida pela diferença entre as suas respectivas energias potenciais pela relação $(U_{1-2})_{cons.} = V_1 - V_2$. Assim, o princípio do trabalho e energia é representado pela equação:

$$T_1 + V_1 + (U_{1-2})_{\text{não cons.}} = T_2 + V_2.$$

Quando consideramos que o trabalho é gerado apenas pelas forças conservativas, definimos, então, o princípio do trabalho e energia pela equação:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Tal equação representa a conservação da energia mecânica, significando que a soma das energias potencial e cinética deve ser constante ao longo do movimento da partícula.

Se passarmos a analisar não mais uma única partícula, mas, sim, um conjunto de partículas, a relação da conservação da energia ficará:

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2.$$

Podemos afirmar que $\sum T + \sum V$ deve ser constante ao longo do movimento do conjunto de partículas.

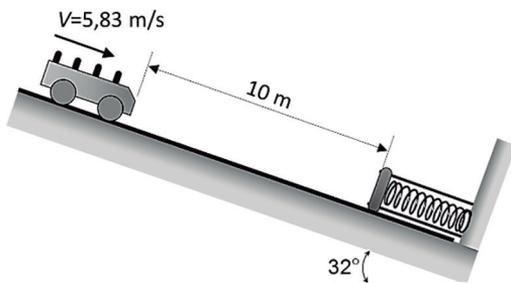
Sem medo de errar

No papel do consultor contratado para avaliar o brinquedo “descida forte” do parque de diversões, você deve determinar a deformação máxima total sofrida pela mola para parar o vagão no caso mais crítico. Dessa maneira, poderá definir se será necessário comprar uma nova mola, ou se a mola atual, que apresenta deformação máxima de $0,8 \text{ m}$, é suficiente para parar o vagão com capacidade para quatro pessoas.

O brinquedo é um vagão sobre trilhos que é solto em uma rampa, com inclinação de 32° em relação ao horizonte, e para ao colidir com uma mola, no final da rampa. O coeficiente de atrito entre o vagão e a rampa é de $0,31$. A nova massa máxima com a qual o vagão ficará é de 380 kg . A mola tem constante igual a 38 kN/m e fica previamente comprimida em $0,2 \text{ m}$. Na distância de 10 m da mola, o vagão apresenta a velocidade máxima de 21 km/h .

Com o propósito de facilitar a leitura da situação, esboçamos o movimento do vagão, como indicado na Figura 3.9.

Figura 3.9 | Partícula sujeita às forças gravitacional e elástica simultaneamente



Fonte: elaborada pelo autor.

Na análise do movimento do vagão, temos duas situações: a primeira é para o vagão situado a 10 m da mola, com esta comprimida

previamente em $0,2\text{ m}$, e a segunda situação ocorre quando a mola apresenta máxima compressão devido ao contato com o vagão.

Para a primeira situação, utilizando o princípio de trabalho e energia, chegamos à relação:

$$T_1 + V_1 + (U_{1-2})_{\text{não cons.}} = T_2 + V_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 380 \cdot 5,83^2 = 6457,9\text{ J}$$

$$V_{1g} = mgh_1 = 380 \cdot 9,81 \cdot (10 \cdot \text{sen}32^\circ) = 19754,33\text{ J}$$

$$V_{1e} = \frac{1}{2}ks_1^2 = \frac{1}{2}(38 \cdot 10^3)0,2^2 = 760\text{ J.}$$

Para a segunda posição, como o vagão deve parar na mola, a velocidade final v_2 é zero:

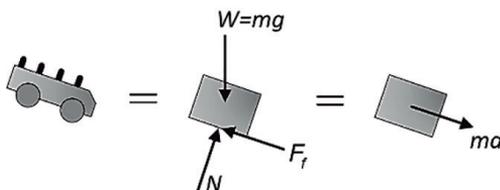
$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 380 \cdot 0^2 = 0\text{ J}$$

$$V_{2g} = mgh_2 = 380 \cdot 9,81 \cdot (-x \cdot \text{sen}32^\circ) = -1975,43x\text{ J}$$

$$V_{2e} = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(38 \cdot 10^3)(0,2 + x)^2 = 760 + 7.600x + 19.000x^2\text{ J.}$$

Para definirmos o valor da força de atrito, montamos um diagrama como o da Figura 3.10.

Figura 3.10 | Diagrama de corpo livre para o vagão



Fonte: elaborada pelo autor.

A força de atrito F_f é, então, definida como:

$$\sum F_n = 0$$

$$N - mg \cdot \cos 32^\circ = 0 \Rightarrow N = 380 \cdot 9,81 \cdot \cos 32^\circ = 3161,35\text{ J}$$

$$F_f = \mu_k N = 0,31 \cdot 3161,35 = 980,02\text{ N.}$$

Para obtermos o trabalho da força de atrito não conservativa, fazemos a sua relação com o deslocamento d do vagão:

$$U_{1-2} = -F_r d = -980,02 \cdot (10 + x) = -9800,2 - 980,02x.$$

Voltando ao princípio de trabalho e energia, definimos:

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 + (U_{1-2})_{\text{não cons.}} &= T_2 + V_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1 + (V_{1g} + V_{1e}) + (U_{1-2})_{\text{não cons.}} &= T_2 + (V_{2g} + V_{2e}) \\ 6457,9 + (19754,33 + 760) - 9800,2 - 980,02x &= \\ = -1975,43x + 760 + 7.600x + 19.000x^2 & \\ x = 0,772 \text{ m} \text{ e } x = -1,12 \text{ m}. & \end{aligned}$$

O sinal negativo de x indica que para parar o vagão seria necessário deformar a mola em $1,12 \text{ m}$, o que não representa uma situação física e, portanto, vamos utilizar o valor positivo de x como solução.

O valor da deformação que o vagão gerará na mola será de $0,772 \text{ m}$, e ao somá-lo com $0,2 \text{ m}$, que é o valor com o qual a mola fica previamente comprimida, definimos que a compressão da mola será de $0,972 \text{ m}$, o que é superior ao valor de máxima compressão da mola de $0,8 \text{ m}$, portanto é necessário trocar a mola.

Com essa resolução, relacionamos com uma situação real o movimento geral de uma partícula, com base nos conceitos de energia e trabalho, utilizando as leis de conservação, porém resta um questionamento: o brinquedo ficou seguro para os ocupantes?

A decisão da empresa com relação à configuração final do brinquedo exigirá a consulta de engenheiros e técnicos de segurança, mas de todo modo sua tarefa foi concluída com êxito.

Avançando na prática

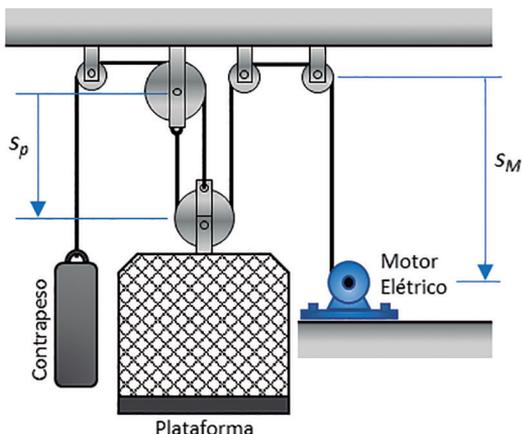
Especificação da potência para o motor elétrico de uma plataforma elevatória

Descrição da situação-problema

Como o responsável pela especificação dos componentes utilizados nos projetos de elevadores e plataformas elevatórias, a fim de dimensionar o motor elétrico que será comprado para

o projeto da plataforma elevatória da Figura 3.11, você deve determinar a potência necessária para o motor elétrico, com base nas informações a seguir.

Figura 3.11 | Representação da montagem da plataforma elevatória



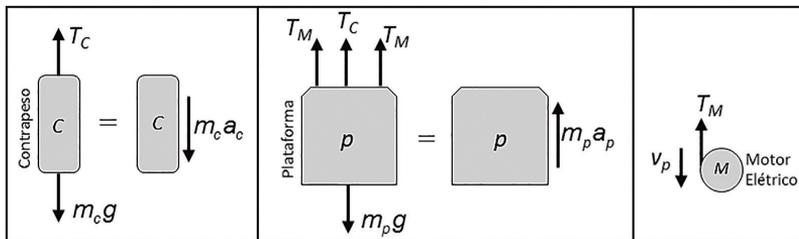
Fonte: elaborada pelo autor.

A plataforma terá massa de 2.000 kg quando estiver com capacidade máxima, enquanto o contrapeso possuirá massa de 850 kg . A condição mais crítica de solicitação do motor ocorre quando a plataforma está subindo e atinge a velocidade instantânea máxima de 3 m/s , com aceleração de 1 m/s^2 .

Resolução da situação-problema

Inicialmente, construímos o diagrama de corpo livre para os componentes da plataforma, como representado pela Figura 3.12, a fim de visualizarmos todas as forças envolvidas.

Figura 3.12 | Diagrama de corpo livre para os componentes da plataforma elevatória



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao fazer o somatório das forças para o contrapeso, temos:

$$+\uparrow \sum F = m_c a_c \Rightarrow T_c - m_c g = -m_c a_c \Rightarrow T_c = 850 \cdot 9,81 - 850 \cdot 1$$
$$T_c = 7488,5 \text{ N.}$$

Realizando, agora, o somatório das forças para a plataforma:

$$+\uparrow \sum F = m_p a_p \Rightarrow 2T_M + T_c - m_p g = m_p a_p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2T_M = -7488,5 + 2000 \cdot 9,81 + 2000 \cdot 1$$
$$T_M = 14131,5 \text{ N.}$$

Para determinarmos a potência do motor, devemos calcular a velocidade do cabo no motor. Então, é necessário fazer a analogia da relação do movimento gerado pelos cabos. Ao derivarmos essa relação, chegamos à analogia entre as velocidades, o que resulta na velocidade na parte do cabo conectado ao motor:

$$s_p + s_p = s_M \Rightarrow 2\dot{s}_p = \dot{s}_M \Rightarrow 2v_p = v_M$$
$$v_M = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m/s.}$$

Conseguimos determinar a potência do motor pela relação:

$$P = T_M \cdot v_M = 14131,5 \cdot 6 = 84789 \text{ J/s} = 84,789 \text{ kW.}$$

Logo, o motor elétrico necessário para a plataforma elevatória deverá fornecer uma potência superior a 84,8 kW, conforme a margem de segurança estabelecida pela empresa.

Faça valer a pena

1. O conceito de trabalho e energia voltado à análise do movimento da partícula representa uma força \vec{F} agindo no movimento de uma partícula, força esta que gera trabalho devido ao deslocamento $d\vec{r}$ no movimento. Define-se o trabalho da força \vec{F} como $dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, que, se for montada em relação ao produto escalar de vetores, fica $dU = F \cdot ds \cdot \cos\theta$, sendo θ o ângulo entre a força \vec{F} e o deslocamento $d\vec{r}$.

Com base no conceito de trabalho e energia voltado à análise do movimento de partículas, considere as assertivas a seguir:

- I. Energia potencial pode ser definida como a energia necessária para colocar a partícula em movimento, com determinada velocidade v , em situações nas quais a partícula se desloca em um plano horizontal.

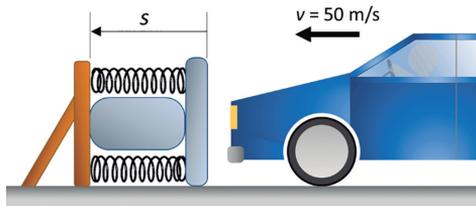
- II. A energia para a partícula movimentar-se entre dois pontos separados por uma altura h vertical representa a energia cinética.
- III. A potência é um parâmetro largamente utilizado para determinar, por exemplo, um modelo de motor que gere determinada quantidade de trabalho em um tempo específico.
- IV. A força F_s , aplicada pela mola, pode ser relacionada pela sua constante de deformação por meio da relação $F_s = ks$.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas a afirmativa III está correta.
- c) Apenas a afirmativa I está correta.
- d) Apenas as afirmativas I, II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas III e IV estão corretas.

2. Um novo sistema de barreiras em autódromos está sendo desenvolvido com força de resistência à deformação dada pela equação $F = 800s^{3,5}$ (força em N e distância s em m), e a velocidade máxima estimada com a qual um veículo colidirá com a barreira é de 50 m/s . A Figura 3.13 representa a disposição da barreira para suportar o impacto do veículo.

Figura 3.13 | Representação da barreira de proteção disposta em linha de colisão com um veículo



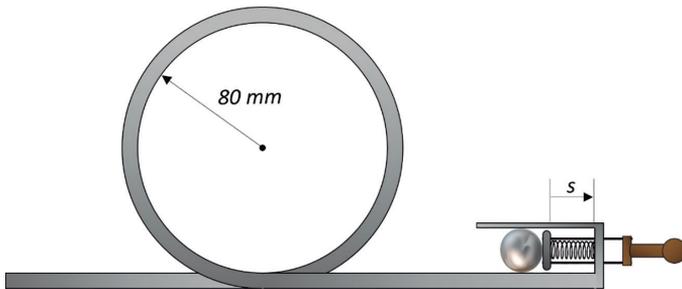
Fonte: elaborada pelo autor.

Antes de dar início à construção das novas barreiras, é preciso calcular a máxima distância com a qual um veículo vai amassar a barreira. Na colisão de um veículo com massa de 1.100 kg e velocidade de 50 m/s , a barreira resiste à deformação pela equação $F = 800s^{3,5}$. Assinale a alternativa com a resposta correta para o valor da deformação s na barreira:

- a) $5,63\text{ m}$.
- b) $7,32\text{ m}$.
- c) $8,80\text{ m}$.
- d) $6,31\text{ m}$.
- e) $1,15\text{ m}$.

3. Durante a reforma de um antigo brinquedo conhecido popularmente como Pinball, foi necessário trocar a mola de lançamento da esfera de aço, mola esta que é responsável por lançar a esfera para dentro do brinquedo. Como não é conhecido o valor da constante de mola da antiga mola, pretende-se comprar uma nova com constante $k = 720 \text{ N/m}$, porém fica o questionamento se o comprimento de 60 mm de deflexão da mola será suficiente para que lance a esfera com massa de 200 g por todo o laço, representado na Figura 3.14.

Figura 3.14 | Representação do componente com a esfera e o laço



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa com o valor da menor flexão da mola, para que a esfera possa circular por todo o laço da Figura 3.14, de modo que sempre fique em contato com o laço, desconsiderando o atrito:

- a) 33 mm .
- b) $0,2 \text{ m}$.
- c) $0,05 \text{ m}$.
- d) 60 mm .
- e) 50 mm .

Seção 3.2

Momento linear e angular para uma partícula

Diálogo aberto

Tendo em vista que os conceitos de trabalho, energia, potência e eficiência já foram analisados na seção passada, vamos aprofundar os estudos em conceitos de impulso e quantidade de movimento, os quais são métodos para a avaliação de movimentos das partículas empregados em condições relacionadas à velocidade, ao tempo, ao deslocamento e à força. Com tais conceitos, podemos fazer a análise dos movimentos de várias partículas envolvidas.

Esses conceitos podem ser utilizados na análise da velocidade de veículos e embarcações que estejam sendo rebocados, na especificação do transporte de cargas, indicando velocidades ideais que não gerem danos ao material transportado, na prevenção ou na análise de impactos durante um transporte, na determinação do deslocamento de veículos, na especificação do movimento angular para satélites em órbita, no movimento rotacional de brinquedos em parques de diversão, entre outros exemplos.

No papel do consultor prestando serviços para o parque de diversões, você está à frente do estudo de um tobogã nomeado de “voo molhado”. Antes de chegar à água da piscina, o tobogã termina, e a pessoa que estava descendo nele experimenta, por um curto espaço de tempo, a condição de voo livre, até atingir uma boia de uso individual posicionada sobre a água.

Como o novo tobogã deve sofrer alteração na sua inclinação, que será maior para gerar velocidades finais mais altas, a sua atribuição, então, é a de definir as condições de encontro da pessoa com a boia, ou seja, determinar o impulso e a energia perdida durante o contato entre a pessoa e a boia. Além disso, você deve analisar se o valor fica dentro do limite de **6 kN·s**, que é o valor de força de desaceleração estabelecido como limite para o corpo humano suportar em uma queda. Nessa nova montagem do tobogã, pretende-se deixá-lo com um ângulo de 60° com a horizontal; a

massa da boia é de 16 kg, e a massa máxima que o tobogã suporta, 160 kg, com a pessoa atingindo velocidade final de 4,2 m/s.

Para a análise desse brinquedo, precisamos responder a alguns questionamentos: como a inclinação da rampa altera a velocidade do que estiver deslizando sobre ela e como determinar essa velocidade? Como será o impacto da pessoa com a boia? O que precisamos considerar quando ocorre o impacto? Quais parâmetros devemos levar em conta para determinar a energia dissipada em condições de impacto?

Para resolver esse desafio, precisamos de novos conhecimentos.

Não pode faltar

Vamos iniciar os estudos desta seção com o princípio de impulso e momento linear (também conhecido como quantidade de movimento linear), que será de grande importância para analisarmos situações do movimento de partículas que envolvam força, tempo e velocidade.

Partindo da equação que já vimos para o movimento de uma partícula, $\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m(d\vec{v}/dt)$, ao integrarmos essa equação em relação aos limites de velocidade inicial \mathbf{v}_1 no tempo t_1 até a velocidade final \mathbf{v}_2 no tempo de t_2 , definimos:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1.$$

Tal equação representa o princípio do impulso e da quantidade de movimento linear para uma partícula em movimento.

O método do momento linear e da quantidade de impulso é bastante prático para determinar a velocidade final de uma partícula, quando a velocidade inicial é conhecida.

Por meio da equação $\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$, é usual nomearmos cada vetor da subtração como o momento linear \vec{L} , de modo que o momento linear é representado como:

$$\vec{L} = m\vec{v}.$$

Já a integral $\int \vec{F} dt$ é definida como o impulso linear, sendo representada por \vec{I} ; assim, o impulso linear é representado como:

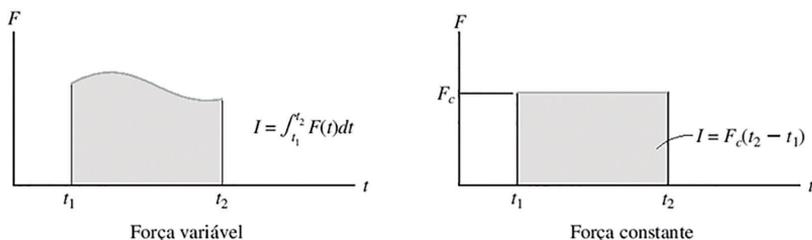
$$\vec{I} = \int \vec{F} dt \Rightarrow \dot{\vec{I}} = \vec{F}.$$

Se analisarmos possíveis casos em que a força seja constante (\vec{F}_c) e em função do tempo, definiremos o impulso como:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_c dt = \vec{F}_c (t_2 - t_1).$$

A Figura 3.15 indica a área representativa do impulso para o caso em que a força é viável ao longo do tempo (Figura 3.15a) e para o caso em que a força é constante (Figura 3.15b).

Figura 3.15 | Representação gráfica da área representativa da intensidade do impulso para o caso de: (a) uma força variável e (b) uma força constante



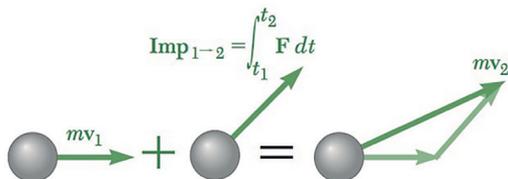
Fonte: Hibbeler (2011, p. 175).

Como o objetivo da aplicação da equação do princípio do impulso e do momento linear, na maioria das vezes, é o de determinar a velocidade final da partícula, definimos que:

$$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Podemos montar para essa equação um diagrama do impulso, como representado na Figura 3.16, e que tem o mesmo princípio do diagrama de corpo livre.

Figura 3.16 | Diagrama do impulso para uma partícula em movimento



Fonte: Beer et al. (2012, p. 811).



Refleta

O diagrama de corpo livre é realizado para que todas as forças que estão agindo em determinada partícula fiquem indicadas de forma prática, mas qual a diferença para um diagrama que represente o impulso como o exemplificado na Figura 3.16?

Analisando o diagrama de impulso, percebemos que os vetores podem indicar um movimento tridimensional para a partícula, de modo que devemos decompor os vetores em componentes x , y e z , assim definindo três equações escalares para o princípio do impulso e do momento angular como:

$$m(\mathbf{v}_x)_2 = m(\mathbf{v}_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

$$m(\mathbf{v}_y)_2 = m(\mathbf{v}_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt$$

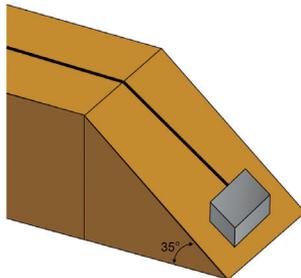
$$m(\mathbf{v}_z)_2 = m(\mathbf{v}_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$



Exemplificando

Uma caixa de 60 kg está sendo puxada em uma rampa com 35° de inclinação (como representado na Figura 3.17) por um motor que exerce força de $F = 30t^{1.5} \text{ N}$, com t em s . Considerando o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a rampa de $\mu_k = 0,3$ e que a velocidade da caixa quando está toda sobre a rampa equivale a $v_1 = 1,3 \text{ m/s}$, determine a velocidade da caixa quando esta termina de subir a rampa, sabendo que gasta o tempo de 12 s .

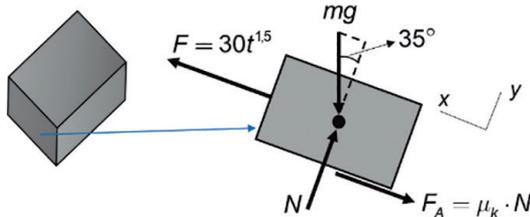
Figura 3.17 | Representação do movimento da caixa pela rampa



Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro passo, a fim de ajudar na análise da situação, é montar um diagrama de corpo livre, como representado na Figura 3.18.

Figura 3.18 | Diagrama de corpo livre para a caixa sendo arrastada, com destaque para uma das faces



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo princípio do impulso e do momento linear, definimos:

$$(+ \nearrow) \quad mv_2 = mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

$$mv_2 = mv_1 + \int_0^{12} 30t^{1.5} dt - F_A - mg \cdot \text{sen}35^\circ$$

$$60v_2 = 60 \cdot 1,3 + \int_0^{12} 30t^{1.5} dt - 0,3 \cdot N \cdot (12s) - 60 \cdot 9,81 \cdot \text{sen}35^\circ \cdot (12s)$$

$$60v_2 = 78 + 5986 - 3,6N - 4051,28$$

$$60v_2 = 2012,72 - 3,6N.$$

Aplicando a equação do equilíbrio na direção y , definimos o valor da força normal N :

$$+ \nearrow \sum F_y = 0$$

$$N - mg \cos 35^\circ = 0$$

$$N = 60 \cdot 9,81 \cdot \cos 35^\circ$$

$$N = 482,15 \text{ N.}$$

Com o valor de N , determinamos, finalmente, a velocidade da caixa no topo da rampa como:

$$60v_2 = 2012,72 - 3,6 \cdot 482,15$$

$$v_2 = 4,62 \text{ m/s.}$$

Em alguns casos, a soma dos vetores de impulsos agindo em uma partícula pode ser nula, assim teremos o conceito da conservação do momento linear, que é representado pela equação:

$$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1.$$

Conceito esse largamente utilizado em análises de partículas que interagem, como no caso de colisões, de modo que, além da análise do movimento de apenas uma partícula, poderemos analisar um sistema de partículas.

Contudo, uma análise cuidadosa deve ser feita para as forças que estão atuando em cada partícula analisada, uma vez que é importante definir as forças que criam o impulso, para que seja possível determinar a direção da conservação do momento linear.

Outro ponto de destaque é o de que precisamos estar certos das forças que realmente geram impulsos para que a análise do movimento da partícula seja correta. Uma força de intensidade relativamente pequena e que atue na partícula em um período de tempo curto pode ser desconsiderada do impulso causado na partícula, enquanto uma força de grande intensidade, mesmo que aplicada em um período de tempo curto, causará alterações na quantidade de movimento da partícula, assim devendo ser vista como uma força impulsiva.



Assimile

Para casos em que partículas são submetidas a forças impulsivas de grande intensidade, devemos verificar todas as forças envolvidas no movimento da partícula, para que sejam determinadas quais forças realmente devem ser consideradas na análise do impulso.

Até agora analisamos os movimentos lineares, mas também podemos analisar o movimento angular de partículas, no qual passamos a fazer uso do momento angular, que pode ser descrito como a quantidade de movimento de uma partícula ao redor de um ponto fixo O .

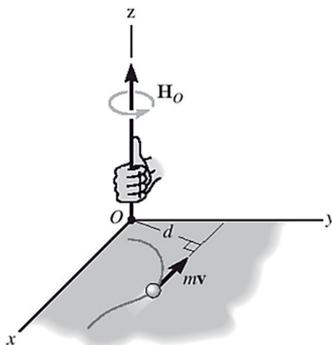
Analisando a partícula em movimento seguindo a trajetória curvilínea apresentada na Figura 3.19, chegamos à definição de que o momento angular (ou quantidade de movimento angular), \vec{H}_O ,

pode ser determinado para qualquer instante em relação ao eixo z , que passa pelo ponto O através da sua relação escalar:

$$(H_o)_z = (d)(mv),$$

sendo d a distância do ponto O à reta suporte de (mv) , como indicado na Figura 3.19.

Figura 3.19 | Representação do movimento angular de uma partícula no plano x - y



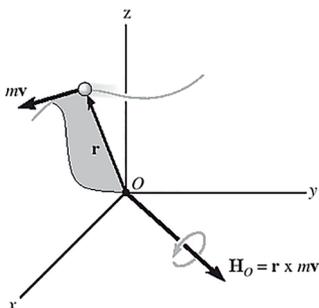
Fonte: Hibbeler (2011, p. 207).

Como podemos notar na Figura 3.19, a direção do momento angular \vec{H}_O pode ser determinada pela regra da mão direita.

Já em casos em que não conseguimos analisar o movimento da partícula bidimensionalmente, ou seja, a partícula esteja movimentando-se em uma trajetória espacial passando pelas coordenadas x , y e z , como na Figura 3.20, o momento angular \vec{H}_O é determinado por meio do produto vetorial:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Figura 3.20 | Representação do movimento angular tridimensional de uma partícula



Fonte: Hibbeler (2011, p. 208).

Ainda em relação ao movimento angular tridimensional de uma partícula, como o da Figura 3.20, podemos relacionar o momento angular com os momentos das forças atuando na partícula, por meio da equação do movimento, assim chegando à relação:

$$\Sigma \vec{F} = m\dot{\vec{v}}.$$

Conseguimos determinar os momentos das forças em relação ao ponto O de referência, realizando o produto vetorial de cada força pelo vetor \vec{r} . Para isso, precisamos fazer o produto vetorial para ambos os lados da equação:

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{M}_O = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}.$$

Realizando a derivada de $\vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{v}}) = \dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{v}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{v}} = \mathbf{0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{v}} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \Sigma \vec{M}_O,$$

lembrando sempre que o produto vetorial de um vetor, quando realizado por ele mesmo, vai ser zero, ou seja, $\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}} \times m\dot{\vec{v}} = \mathbf{0}$.

Se reescrevermos a relação $\dot{\vec{H}}_O = \Sigma \vec{M}_O$ como $\Sigma \vec{M}_O dt = d\vec{H}_O$ e considerando que, no intervalo de tempo de t_1 à t_2 , temos, respectivamente, $(\vec{H}_O)_1$ e $(\vec{H}_O)_2$, conseguiremos definir uma nova relação:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = (\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1,$$

$$(\vec{H}_O)_2 = (\vec{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt.$$

Tal equação final é conhecida como a representação do princípio de impulso e de momento angular.

O termo da equação $\Sigma \int \vec{M}_O dt$ é conhecido como impulso angular, e adotando $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, definimos o impulso angular como:

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{F}) dt.$$

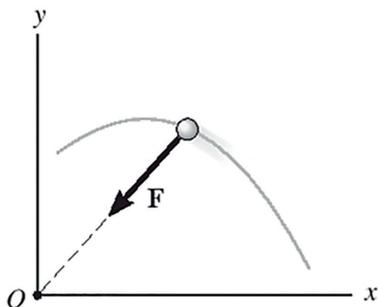
Pelo mesmo raciocínio com o qual definimos a conservação do momento linear, definimos que a conservação do momento angular ocorre quando todos os impulsos angulares na partícula são nulos para o intervalo de tempo analisado. Assim:

$$(\vec{H}_o)_2 = (\vec{H}_o)_1.$$

Apesar de inicialmente parecer que quando a conservação do momento angular ocorre, a conservação do momento linear também ocorre, esse fato não é verdadeiro para todos os movimentos.

Imaginemos uma partícula movimentando-se sob o efeito de uma força central, como representado na Figura 3.21. Neste caso, o momento angular é conservado, porém o momento linear não, uma vez que a força central impulsiva \vec{F} sempre fica apontada para o centro do movimento, ou seja, o impulso angular gerado por essa força central \vec{F} é sempre zero, conservando o momento angular.

Figura 3.21 | Movimento de uma partícula devido à força central



Fonte: Hibbeler (2011, p. 211).

Outra condição com a qual podemos nos deparar, na análise do princípio de impulso e de momento linear, é a da interação de um sistema de partículas (Figura 3.22), que é determinado pela equação do movimento aplicada a todas as partículas do sistema:

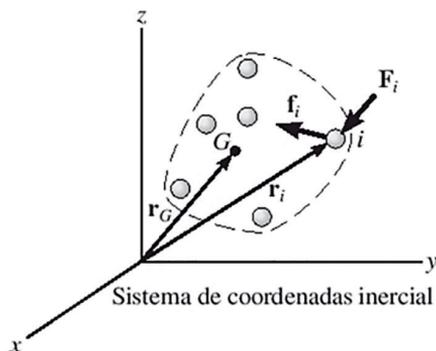
$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}.$$

Partindo dessa equação, ao multiplicarmos ambos os lados por dt e integrarmos entre os tempos de t_1 com velocidade $(\mathbf{v}_i)_1$ para t_2 com velocidade $(\mathbf{v}_i)_2$, obteremos a equação que representa o

princípio de impulso e de momento linear para um sistema de partículas:

$$\sum m_i (\vec{v}_i)_2 = \sum m_i (\vec{v}_i)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt.$$

Figura 3.22 | Sistema de partículas



Fonte: Hibbeler (2011, p. 178).



Pesquise mais

Para aprimorar seus conhecimentos sobre o uso do princípio de impulso e de momento, leia a seção “15.8 Escoamento estacionário de um fluido” (p. 220 a 226), do livro indicado a seguir:

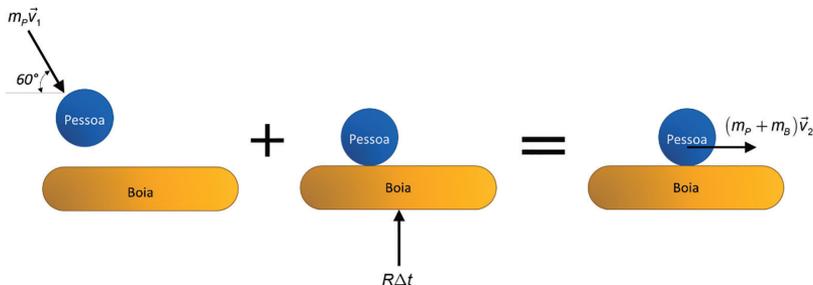
HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

Sem medo de errar

No papel de especialista prestando serviços para o parque de diversões, você deve verificar as condições de encontro da pessoa com a boia, ao descer no brinquedo “voo molhado”. Antes de chegar à água da piscina, o tobogã termina, e a pessoa que estava descendo nele experimenta a condição de voo livre, até atingir uma boia de uso individual posicionada sobre a água. Nessa nova montagem do tobogã, pretende-se deixá-lo com um ângulo de 60° com a horizontal; a massa da boia é de 16 kg , e a massa máxima que o tobogã suporta, 160 kg , com a pessoa atingindo velocidade final de $4,2 \text{ m/s}$. Com esses dados, deve ser verificado se o impulso exercido pela boia sobre a pessoa fica dentro do limite de $6 \text{ kN} \cdot \text{s}$.

Para a verificação do impulso que a pessoa receberá devido ao contato com a boia, determinamos, inicialmente, o diagrama da situação (Figura 3.23) para facilitar a análise da velocidade final da pessoa na boia, por meio do princípio de impulso e da quantidade de movimento.

Figura 3.23 | Diagrama para o conjunto pessoa e boia



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo princípio de impulso e da quantidade de movimento, montamos a relação:

$$m_p \vec{v}_1 + \sum \vec{I} = (m_p + m_B) \vec{v}_2.$$

É importante observarmos que a velocidade final alcançada por uma pessoa que utiliza o brinquedo representa a velocidade logo antes do seu contato com a boia, o que, na Figura 3.23, é representado por \vec{v}_1 ; assim, $\vec{v}_1 = 4,2 \text{ m/s}$.

Considerando o sentido positivo como \rightarrow , determinamos a intensidade de \vec{v}_2 na direção x :

$$m_p \vec{v}_1 + \sum \vec{I} = (m_p + m_B) \vec{v}_2 \Rightarrow m_p v_1 \cdot \cos 60^\circ + 0 = (m_p + m_B) \vec{v}_2$$

$$160 \cdot 4,2 \cdot \cos 60^\circ = (160 + 16) v_2$$

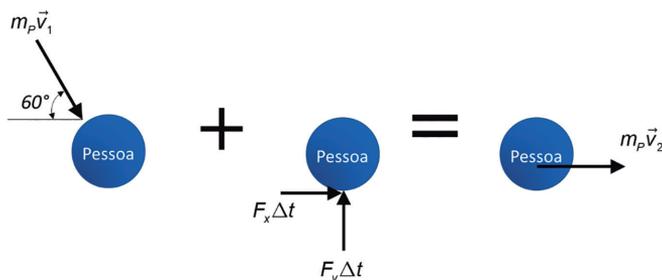
$$v_2 = 1,91 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = 1,91 \text{ m/s} \rightarrow.$$

Como definimos a velocidade \vec{v}_2 , conseguimos determinar a força exercida pela boia na pessoa devido ao impulso do contato. Por isso, é conveniente montarmos o diagrama apenas da pessoa,

para verificarmos todas as forças atuando, como representado na Figura 3.24.

Figura 3.24 | Diagrama para a pessoa



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo princípio de impulso e da quantidade de movimento para a pessoa, temos:

$$m_p \vec{v}_1 + \sum \vec{I} = m_p \vec{v}_2.$$

Logo, montamos duas condições para determinarmos os valores das forças, uma para as componentes em x e outra para as componentes em y , como segue:

\rightarrow componentes em x :

$$(m_p v_1)_x + \sum I_x = (m_p v_2)_x \Rightarrow 160 \cdot 4,2 \cdot \cos 60^\circ + F_x \Delta t = 160 \cdot 1,91$$

$$F_x \Delta t = -30,4 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$+$ \uparrow componentes em y :

$$-160 \cdot 4,2 \cdot \text{sen} 60^\circ + F_y \Delta t = 0$$

$$F_y \Delta t = 581,97 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

E a resultante de $\vec{F} \Delta t$ fica:

$$\vec{F} \Delta t = 582,7 \text{ N} \cdot \text{s} \angle -87^\circ.$$

Com esse resultado, obtivemos a resposta do valor do impulso segundo o princípio de impulso e a quantidade de movimento, resultado este que ficou bem menor do que o limite de $6 \text{ kN} \cdot \text{s}$ e, portanto, a modificação no brinquedo pode ser realizada.

Assim, respondemos aos questionamentos iniciais, já que analisamos a velocidade da pessoa descendo pelo tobogã, realizando com sucesso uma primeira análise da segurança do brinquedo.

Avançando na prática

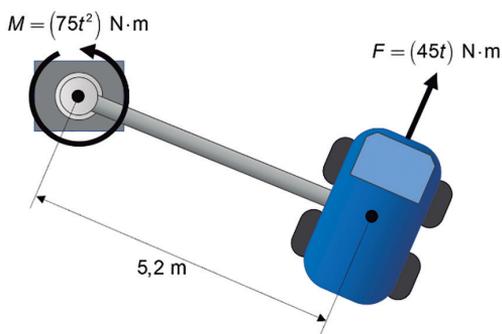
Aplicação do princípio de impulso e de momento angular em um equipamento para simulação de velocidade de voo

Descrição da situação-problema

Você está encarregado de determinar a velocidade de um veículo criado para simular a velocidade de aviões, a fim de treinar pilotos que participam do programa de aulas de voo em aviões a jato.

A sua tarefa é determinar a velocidade que o veículo de teste, representado na Figura 3.25, alcança, considerando que está preso em uma barra com massa desprezível e sujeito ao momento $M = (75t^2) \text{ N}\cdot\text{m}$ e que apresenta rodas que ajudam no movimento, cujo motor fornece força de tração às rodas de $F = (45t) \text{ N}$, com t em segundos. Sabe-se que a carga máxima do veículo e do ocupante não deve ultrapassar 200 kg , que o veículo parte do repouso e que o tempo de funcionamento do veículo, para cada teste, é de $t = 20 \text{ s}$.

Figura 3.25 | Desenho esquemático do veículo simulador de velocidade de voo



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Analisando a situação apresentada pela Figura 3.25, notamos que a força peso do veículo com o ocupante e a força normal exercida pelo solo são paralelas ao eixo, no ponto O de rotação, assim não produzem impulso angular nesse eixo.

Já a força \vec{F} e o momento \vec{M} geram impulsos, de modo que o princípio de impulso e de momento angular é definido como:

$$(\vec{H}_O)_2 = (\vec{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt,$$

$$r \cdot m \cdot v = 0 + \int_0^{20} (75t^2) dt + \int_0^{20} (45t)(r) dt$$

$$5,2 \cdot 200 \cdot v_2 = 200000 + 46800$$

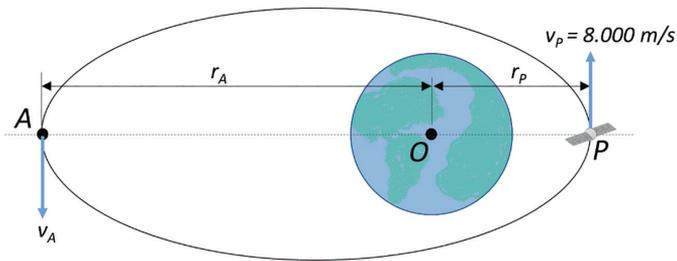
$$v_2 = 237,31 \text{ m/s}.$$

Portanto, o simulador atinge a velocidade de $237,31 \text{ m/s}$, ou seja, $854,3 \text{ km/h}$, no tempo de 20 s . Com esse resultado, concluímos a tarefa de determinar a velocidade para o simulador durante o seu tempo de operação.

Faça valer a pena

1. Um satélite que está na órbita da Terra, com trajetória elíptica (como representado na Figura 3.26), apresenta velocidade no ponto P equivalente a 8.000 m/s . Sabem-se também os valores de $r_P = 70 \cdot 10^3 \text{ km}$ e $r_A = 5500 \cdot 10^3 \text{ km}$.

Figura 3.26 | Desenho esquemático do veículo simulador de velocidade de voo



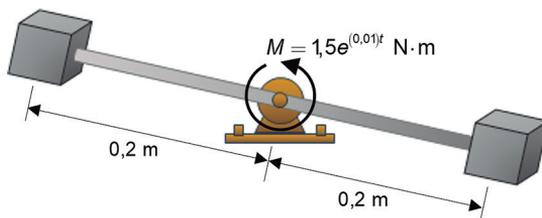
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa com a resposta correta para a velocidade do satélite na posição A :

- a) 150 km/h .
- b) $880,36 \text{ m/s}$.
- c) $82,90 \text{ km/h}$.
- d) 2.000 m/s .
- e) $101,82 \text{ m/s}$.

2. Um laboratório de análises químicas possui um misturador de soluções, como o representado na Figura 3.27.

Figura 3.27 | Representação básica do misturador de soluções químicas



Fonte: elaborada pelo autor.

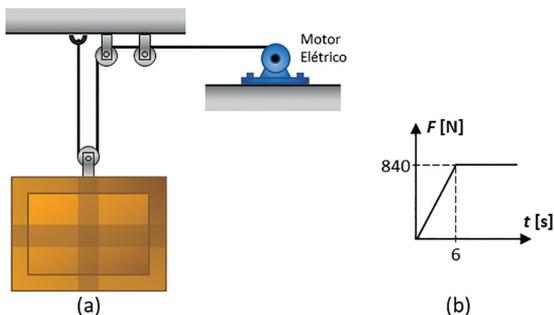
Há um cubo (que pode ser considerado partícula) em cada uma das extremidades da haste presa no motor central elétrico. Estas, quando cheias de solução, apresentam massa de 400 g, e o torque gerado pelo motor equivale a $M = 3e^{0,4t} \text{ N}\cdot\text{m}$, em que o tempo t é fornecido em segundos.

Assinale a alternativa correta para a velocidade de cada cubo nas extremidades do misturador para o tempo de 4 s:

- a) 38,3 m/s.
- b) 52,6 m/s.
- c) 90,8 km/h.
- d) 210,15 km/h.
- e) 22,56 m/s.

3. Um sistema de içamento é montado com um motor elétrico M , que enrola ou desenrola o cabo ligado a um conjunto de polias, como indicado na Figura 3.28a. A carga máxima de içamento para esse sistema é de 120 kg. O processo de içar as cargas sempre ocorre com a carga em repouso no solo, de modo que a tração inicial no cabo é nula. O motor elétrico apresenta rampa de força até atingir o valor máximo que fica constante, como destacado na Figura 3.28b.

Figura 3.28 | (a) Sistema de içamento de cargas e (b) gráfico da força do motor elétrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Para esse processo de içamento, são realizadas as seguintes afirmações:

- I. O motor elétrico não consegue içar a carga de 120 kg.
- II. A velocidade da carga após 9 s é de 16,33 m/s.
- III. O tempo necessário para que o motor comece a içar a carga é de 6 s.
- IV. A partir de 4,21 s do acionamento de motor, a carga apresentará velocidade para cima.

Assinale a alternativa que apresenta apenas as afirmações CORRETAS:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e IV estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

Seção 3.3

Impacto

Diálogo aberto

Analisando o conteúdo estudado nas duas seções anteriores, nas quais vimos os momentos linear e angular, a conservação desses momentos e a aplicação para o método de análise pelo impulso, ficou faltando desenvolvermos o estudo do comportamento de partículas quando duas delas se chocam e exercem forças de intensidades consideráveis uma contra a outra.

Para sanar essa carência de conhecimento, agora estudaremos conceitos de impacto cujo exemplo clássico consiste no jogo de bilhar, no qual podemos analisar o choque entre as bolas.

Inseridas no conceito de impacto, vamos estudar também duas condições específicas, o impacto direto e o impacto oblíquo, sendo o direto uma condição de impacto em que a velocidade de cada partícula está orientada seguindo a linha de impacto, e o oblíquo quando as velocidades das partículas estão com orientações diferentes.

Podemos perceber a importância real e prática do tema, uma vez que, em grande parte das análises de dinâmica, o movimento acaba apenas quando algum corpo ou partícula choca-se com outro, como quando um veículo colide com outro, no encontro de componentes mecânicos (como no sistema de bate-estaca), na análise de uma punção, entre outras aplicações.

Voltando à situação em que você recebeu a tarefa de analisar os brinquedos do parque de diversão, vamos agora trabalhar com o terceiro brinquedo, o nomeado “carro desgovernado”. Esse brinquedo proporciona uma disputa entre duas pessoas, as quais competem apertando um botão, de tal forma que, quanto mais rápido se consiga pressionar o botão, mais velocidade é aplicada em dois miniveículos que são impulsionados por uma pista e entram em colisão. Após a colisão, cada veículo vai para uma direção, e o que percorrer maior distância será o vencedor. A parte inicial da pista e os veículos foram escolhidos a fim de, praticamente, não apresentarem resistência ao movimento, podendo-se desconsiderar o atrito.

O veículo "A" parte de uma posição esquerda a 30° de uma linha referencial horizontal, com velocidade x , e o veículo "B" parte a 48° da mesma linha, com velocidade y , um em sentido ao outro. Os veículos são idênticos; o mais rápido sempre apresentará velocidade máxima de 20 km/h , e o outro terá velocidade 20% menor. O coeficiente de restituição para esses veículos é de 0,95, e após a colisão, os veículos passam para a pista que apresenta coeficiente de atrito cinético $\mu_k = 0,2$, para que suas velocidades diminuam até pararem.

Com as novas alterações no brinquedo, pretende-se atingir velocidade máxima de 20 km/h , e o veículo perdedor sempre sairá com velocidade 20% menor do que a do ganhador. O coeficiente de restituição para esses veículos é de 0,95.

É sua tarefa determinar a direção e a distância percorrida por veículo, sendo o coeficiente de atrito cinético na pista depois do impacto de 0,2.

Esta é a última atividade da Unidade 3, portanto mantenha o foco e estude esta seção. Dessa maneira, você vai adquirir o conhecimento necessário a fim de finalizar as três tarefas para o parque de diversão. Você ainda precisa terminar seu relatório técnico.

Não pode faltar

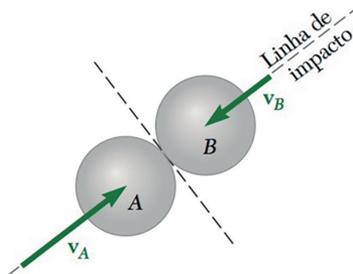
O termo impacto representa a colisão entre dois corpos que trataremos como partículas. Todo o conceito de impacto se resume às forças de contato geradas entre os corpos que se chocam, de modo que a força que cada corpo exerce no outro apresenta intensidade considerável, sendo aplicada em um espaço de tempo muito pequeno e alterando a trajetória que os corpos apresentavam antes do impacto.

Quando estudamos as colisões, uma infinidade de movimentos, tipos de colisões e trajetórias podem ocorrer. Por isso, para definir as trajetórias e o comportamento das partículas que se chocaram, vamos precisar analisar e compreender melhor alguns conceitos descritos ao longo desta seção.

Como é de se imaginar, o impacto é uma interação bastante complexa, uma vez que estão envolvidas propriedades de deformação, dissipação de energia, direção do contato inicial, assim como a velocidade e a aceleração de cada corpo.

Vamos iniciar nossos estudos com o conceito de impacto central direto, que ocorre quando os centros de massa dos dois corpos que colidirão estão deslocando-se na mesma linha (linha esta nomeada de linha de impacto), com a resultante da velocidade de deslocamento dos dois corpos também na mesma linha de deslocamento, como indicado na Figura 3.29.

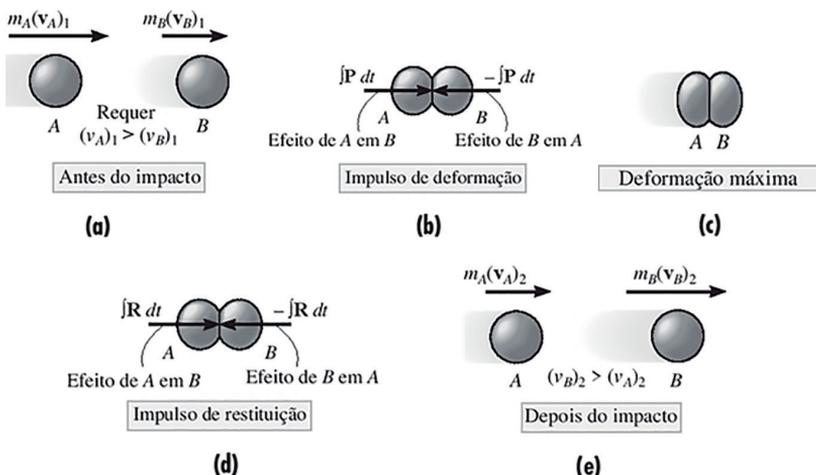
Figura 3.29 | Representação do caso de impacto central direto



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 825).

Analisemos um caso de colisão para duas partículas A e B , com os vetores de velocidades na mesma direção, porém com a partícula A apresentando intensidade de velocidade maior do que B , de modo que, em determinado momento, colidirão, como a representação da Figura 3.30.

Figura 3.30 | Exemplo da colisão de duas partículas deslocando-se sobre uma mesma linha de trajetória e mesmo sentido



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 195).

A partícula A , do exemplo da Figura 3.30, apresenta velocidade maior do que a partícula B , então colidirão, de modo que, no momento de máxima deformação (Figura 3.30c), as velocidades de ambas as partículas ficam iguais. Após o impacto, cada partícula apresentará uma velocidade distinta, ou permanecerão em contato, ambas com a mesma velocidade.



Assimile

Durante a colisão, ocorre a deformação das partículas, e, após esse período de deformação, observamos o processo de restituição dos corpos envolvidos, que definirá se as partículas vão recuperar a forma original ou vão ficar com deformação residual, ou ainda se vão manter o contato devido a essa deformação. Tudo dependerá da intensidade das forças de impacto e do material de cada corpo.

O nosso objetivo é verificar o movimento das partículas antes e após a colisão, e não descrever o processo de colisão em si. Não vamos focar análises de deformação dos corpos, pois a análise do período de colisão de corpos, devido à sua complexidade, é normalmente realizada por meio computacional, com simulações dinâmicas utilizando o método de elementos finitos.

Em razão de o processo de impacto não gerar novas forças resultantes nas partículas, já que as forças de contato são opostas e de mesma intensidade (as forças de contato durante uma colisão sempre serão opostas e de mesma intensidade, independentemente do fato de ambas as partículas estarem movimentando-se, uma estar parada, estarem indo uma em direção a outra, ou ambas em um mesmo sentido), o impacto é um processo que não gera forças impulsivas. Assim, concluímos que a quantidade de movimento linear total das partículas se conserva, de tal modo que definimos:

$$m_A (\mathbf{v}_A)_1 + m_B (\mathbf{v}_B)_1 = m_A (\mathbf{v}_A)_2 + m_B (\mathbf{v}_B)_2.$$

Pela definição dessa equação para a conservação da quantidade de movimento das duas partículas, perceberemos que se supõe que qualquer força atuando nas partículas, no período de impacto, pode ser desconsiderada, uma vez que apresenta intensidade muito menor do que a das forças internas geradas pela colisão. Além

disso, os centros de massa dos corpos não mudam de posição durante o impacto.

Por meio da equação $m_A(\mathbf{v}_A)_1 + m_B(\mathbf{v}_B)_1 = m_A(\mathbf{v}_A)_2 + m_B(\mathbf{v}_B)_2$, uma vez conhecidas as condições iniciais de movimento das partículas, ficamos com duas incógnitas a serem determinadas: $(\mathbf{v}_A)_2$ e $(\mathbf{v}_B)_2$. Assim, precisamos de mais uma equação para determinar a velocidade, após o impacto para as duas partículas envolvidas.

Uma nova equação pode ser definida pelo princípio de impulso e de quantidade de movimento de cada partícula, de modo que, para a partícula *A* no exemplo da Figura 3.30, utilizamos a condição de antes e durante a deformação para obtermos:

$$m_A \mathbf{v} = m_A (\mathbf{v}_A)_1 - \int_0^{t_0} P dt.$$

Para o período de restituição, após a deformação máxima, definimos que:

$$m_A (\mathbf{v}_A)_2 = m_A \mathbf{v} - \int_{t_0}^t R dt.$$

Podemos montar, então, uma razão entre as forças impulsivas para os dois períodos (restituição e deformação) que acabamos de analisar:

$$\mathbf{e} = \frac{\int_{t_0}^t R dt}{\int_0^{t_0} P dt} = \frac{m_A [\mathbf{v} - (\mathbf{v}_A)_2]}{m_A [(\mathbf{v}_A)_1 - \mathbf{v}]} = \frac{\mathbf{v} - (\mathbf{v}_A)_2}{(\mathbf{v}_A)_1 - \mathbf{v}}.$$

Esta razão \mathbf{e} é conhecida como coeficiente de restituição, representando a capacidade dos corpos que sofreram impacto de se recuperarem.

Determinamos o coeficiente de restituição para a partícula *B*, da mesma forma que fizemos para a partícula *A*, assim definindo:

$$\mathbf{e} = \frac{(\mathbf{v}_B)_2 - \mathbf{v}}{\mathbf{v} - (\mathbf{v}_B)_1}.$$



Utilizando o princípio de impulso e de quantidade de movimento para a partícula B , quais passos de manipulações devem ser realizados para obtermos o coeficiente de restituição construindo a razão entre as forças impulsivas para os períodos de restituição e deformação?

Utilizando as duas equações definidas para o coeficiente de restituição e isolando a variável \mathbf{v} , definimos uma nova equação para o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}.$$

Vale ressaltar que essa equação do coeficiente de restituição é utilizada corretamente quando há o cuidado de definir os sinais positivos e negativos para cada velocidade, seguindo o sentido de cada vetor das velocidades.

Quando estamos analisando o coeficiente de restituição de duas partículas que se chocam, observamos dois casos principais: em que $\mathbf{e} = 0$ e $\mathbf{e} = 1$. No caso em que $\mathbf{e} = 0$, dizemos que o impacto é perfeitamente plástico ou impacto inelástico, que representa uma condição na qual as partículas ficam juntas após o impacto, e então a equação para a conservação da quantidade de movimento linear será:

$$m_A (v_A)_1 + m_B (v_B)_1 = (m_A + m_B)(v)_2.$$

No caso em que $\mathbf{e} = 1$, temos a condição de impacto perfeitamente elástico, que representa a capacidade total de recuperação da forma inicial das duas partículas que entraram em choque. Assim, após o impacto, as partículas movem-se para longe uma da outra. Neste caso, também, tanto a quantidade de movimento total quanto a energia total se conservam.

Em casos reais, os impactos são, na sua maioria, acompanhados da perda de energia que podemos relacionar com a diferença de energia cinética das partículas antes e depois do impacto. Tal perda

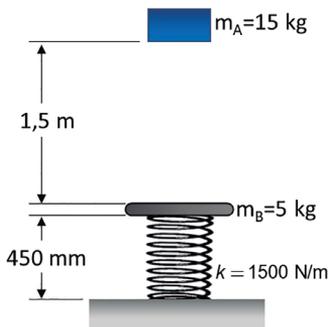
de energia ocorre devido à geração de calor durante o impacto, assim como à dissipação de energia sonora e a ondas de tensão elástica provenientes do interior dos corpos.



Exemplificando

Para o ensaio de uma mola, esta é acoplada abaixo de uma placa para receber o impacto de um peso A , com massa padrão de 15 kg , liberado a $1,5\text{ m}$ acima da placa B , como representado na Figura 3.31.

Figura 3.31 | Representação do sistema para ensaio de mola



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa acoplada sobre a mola tem massa de 5 kg , a mola apresenta compressão inicial de 10 mm devido a suporte de apoio da placa, uma vez que a mola apresenta 500 mm de comprimento não estendido e comprimento de 450 mm quando a placa é montada sobre ela. É conhecido também que a mola apresenta constante de $k = 1500\text{ N/m}$ e que o coeficiente de restituição entre o peso e a placa equivale a $e = 0,7$. A sua tarefa como responsável especialista pelo ensaio é a de determinar, por meio de cálculos, a compressão máxima da mola gerada pelo impacto entre o peso e a placa e as velocidades do peso e da placa logo após o impacto, a fim de que o técnico responsável pela operação do teste possa comparar os valores do ensaio com os do cálculo.

Para a resolução dessa situação, começamos analisando o ensaio da mola por meio da conservação da energia no movimento do peso que é liberado do repouso e atinge a placa sobre a mola, separados pela distância $s_1 = 1,5\text{ m}$, de acordo com a relação:

$$(T_A)_1 + (V_A)_1 = (T_A)_2 + (V_A)_2,$$

em que T representa a energia cinética e V , a energia potencial. Assim:

$$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + (V_{\text{gravidade}})_1 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + (V_g)_2$$

$$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + (m_A \cdot g \cdot s_1) = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + (m_A \cdot g \cdot s_2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 0^2 + 15 \cdot 9,81 \cdot 1,5 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (v_A)_2^2 + 15 \cdot 9,81 \cdot 0$$

$$(v_A)_2 = 5,425 \text{ m/s.}$$

Com o valor da velocidade do bloco A logo acima da placa e considerando que nenhuma das forças nesse sistema de impacto do peso com a placa e com a mola gera forças impulsivas, montamos a equação do momento linear, ao longo da linha de impacto vertical, para a condição de logo antes do impacto (condição 2), em relação ao momento logo após o impacto (condição 3):

$$(+ \downarrow) m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = m_A(v_A)_3 + m_B(v_B)_3$$

$$15 \cdot 5,425 + 5 \cdot 0 = 15 \cdot (v_A)_3 + 5(v_B)_3$$

$$3(v_A)_3 + (v_B)_3 = 16,275.$$

Aplicando o coeficiente de restituição para essa mesma situação que acabamos de analisar da condição 2 para 3, temos:

$$e = \frac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{(v_A)_2 - (v_B)_2} = \frac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{5,425 - 0} = 0,7$$

$$(v_B)_3 - (v_A)_3 = 3,8.$$

Utilizando as duas equações, $3(v_A)_3 + (v_B)_3 = 16,275$ e $(v_B)_3 - (v_A)_3 = 3,8$, que definimos para as velocidades da placa e do peso na condição 3, montamos:

$$3(v_A)_3 + (v_B)_3 = 16,275$$

$$3(v_A)_3 + [3,8 + (v_A)_3] = 16,275$$

$$(v_A)_3 = 3,12 \text{ m/s}$$

e

$$(v_B)_3 = 3,8 + (v_A)_3 = 3,8 + 3,12$$

$$(v_B)_3 = 6,92 \text{ m/s.}$$

Com esses valores de $(v_A)_3 = 3,12 \text{ m/s}$ e $(v_B)_3 = 6,92 \text{ m/s}$, determinamos as velocidades do peso A e da placa B , logo após o impacto como requisitado, porém ainda precisamos determinar a compressão máxima da mola nesse ensaio.

Sabemos que a compressão máxima da mola ocorre quando a placa B para de movimentar-se e, por isso, montamos uma nova relação da conservação de energia, agora para a placa, movimentando-se da condição 3 (logo após o impacto) para a condição 4, no fim do movimento da placa, lembrando que a mola já estava comprimida em 10 mm :

$$(T_B)_3 + (V_B)_3 = (T_B)_4 + (V_B)_4$$

$$\frac{1}{2} m_B (v_B)_3^2 + (V_{\text{gravidade}} + V_{\text{mola}})_3 = \frac{1}{2} m_B (v_B)_4^2 + (V_{\text{gravidade}} + V_{\text{mola}})_4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_B (v_B)_3^2 + \left(m_B \cdot g \cdot s_3 + \frac{1}{2} k (s_m)_3^2 \right)_3 = \\ = \frac{1}{2} m_B (v_B)_4^2 + \left(m_B \cdot g \cdot s_4 + \frac{1}{2} k (s_m)_4^2 \right)_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6,92^2 + \left(5 \cdot 9,81 \cdot s_{\text{max}} + \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot (0,5 - 0,45)^2 \right)_3 = \\ = 0 + \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1500 [s_{\text{max}} + (0,5 - 0,45)]_4^2 \right)_4 \end{aligned}$$

$$119,716 + (49,05s_{\text{max}} + 1,875) = 750 \left[(s_{\text{max}})^2 + 0,1(s_{\text{max}}) + 0,0025 \right]$$

$$119,716 + 49,05s_{\text{max}} + 1,875 = 750(s_{\text{max}})^2 + 75s_{\text{max}} + 1,875$$

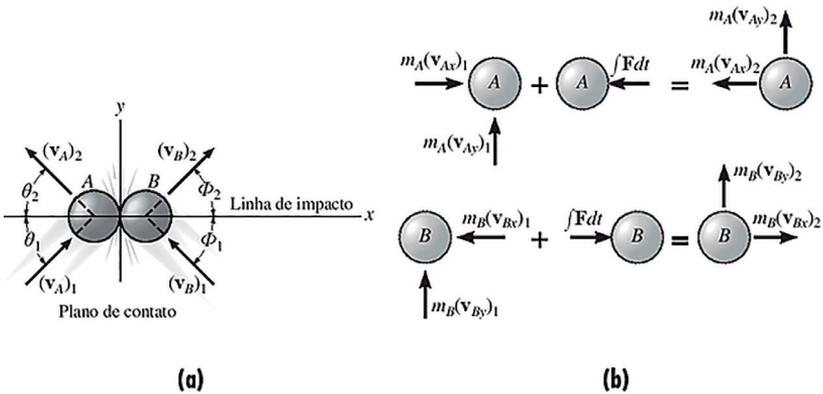
$$750(s_{\text{max}})^2 + 25,95s_{\text{max}} - 119,716 = 0$$

$$s_{\text{max}} = +0,383 \text{ m e } s_{\text{max}} = -0,417 \text{ m.}$$

Como apenas o resultado positivo da equação do segundo grau representa o deslocamento máximo da mola, terminamos a análise do ensaio especificando que a compressão máxima da mola será de $s_{\max} = 0,383 \text{ m}$.

Analisando uma condição de impacto entre duas partículas, no qual as velocidades iniciais e finais não são paralelas à linha de impacto, como representado na Figura 3.32, temos uma condição de impacto central oblíquo.

Figura 3.32 | Representação da condição de impacto central oblíquo



Fonte: Hibbeler (2011, p. 198).

Quanto ao impacto central oblíquo, desde que sejam conhecidas as condições iniciais do movimento de cada partícula, como suas velocidades iniciais, ficamos com quatro incógnitas a serem determinadas, ou seja, $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, θ_2 e ϕ_2 . Para determinarmos essas quatro incógnitas, precisamos de quatro equações.

Podemos afirmar que a quantidade de movimento do sistema, ao longo da linha de impacto (eixo x), se conserva, assim determinando a primeira equação:

$$m_A (v_{Ax})_1 + m_B (v_{Bx})_1 = m_A (v_{Ax})_2 + m_B (v_{Bx})_2.$$

Analisando agora o eixo y , podemos relacionar que a quantidade de movimento no eixo y , para cada partícula, é conservada, uma vez

que não se tem impulso na partícula nesse eixo, definindo, assim, mais duas equações:

$$m_A (v_{Ay})_1 = m_A (v_{Ay})_2$$

$$m_B (v_{By})_1 = m_B (v_{By})_2.$$

A quarta equação é determinada utilizando o coeficiente de restituição que relaciona as componentes de velocidade das duas partículas no eixo de impacto, ou seja, a direção x . Assim:

$$e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}.$$

Com essas últimas quatro equações, portanto, temos condições de determinar as variáveis das velocidades nas direções x e y para um impacto central oblíquo e, na sequência, os ângulos θ_2 e ϕ_2 .



Pesquise mais

Para aprofundar seus conhecimentos sobre os conceitos de impacto, energia e conservação do momento, leia o item "13.15 Problemas envolvendo energia e quantidade de movimento", que se inicia na p. 831 do livro indicado a seguir:

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

Sem medo de errar

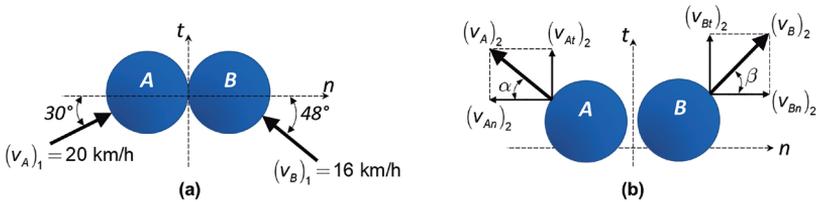
Voltando à situação em que você, aluno, é responsável pela análise do brinquedo nomeado "carro desgovernado", vamos analisar a situação para, então, determinarmos a direção, a intensidade das velocidades e a distância percorrida por veículo.

Inicialmente, sabemos que a pista praticamente não apresenta resistência ao movimento, podendo-se desprezar o atrito; que o veículo A parte de uma posição esquerda a 30° de uma linha referencial horizontal, com velocidade x , e o veículo B parte a 48° da horizontal, com velocidade y , um em sentido ao outro; que os veículos são idênticos com massa M ; que um veículo apresenta

velocidade máxima de 20 km/h e o outro terá velocidade 20% a menos; que o coeficiente de restituição para esses veículos é de 0,95 e que, após a colisão, os veículos passam para a pista que apresenta coeficiente de atrito cinético $\mu_k = 0,2$.

Com essas informações, desenvolvemos um desenho esquemático do movimento dos veículos, como representado na Figura 3.33.

Figura 3.33 | Representação do impacto central oblíquo dos veículos A e B para (a) logo antes do impacto e (b) logo após o impacto



Fonte: elaborada pelo autor.

Começamos a desenvolver essa tarefa definindo um dos veículos com a velocidade de 20 km/h e o outro com 20% a menos. Vamos adotar a velocidade de 20 km/h para o veículo A.

Como estamos analisando uma situação de impacto central oblíquo, precisamos decompor as velocidades em função das coordenadas t e n , de modo que:

$$(v_{An})_1 = (v_A)_1 \cos 30^\circ = 20 \cos 30^\circ = 17,32 \text{ km/h} = 4,81 \text{ m/s};$$

$$(v_{At})_1 = (v_A)_1 \text{sen} 30^\circ = 20 \text{sen} 30^\circ = 10 \text{ km/h} = 2,78 \text{ m/s};$$

$$(v_{Bn})_1 = -(v_B)_1 \cos 48^\circ = -16 \cos 48^\circ = -10,71 \text{ km/h} = -2,97 \text{ m/s};$$

$$(v_{Bt})_1 = (v_B)_1 \text{sen} 48^\circ = 16 \text{sen} 48^\circ = 11,89 \text{ km/h} = 3,3 \text{ m/s}.$$

Analisando os membros da velocidade no sentido do eixo tangente, como todas as forças de impulso são orientadas ao longo do eixo normal n na linha de impacto, a quantidade de movimento para cada veículo não se altera. Assim, a componente tangencial da velocidade fica:

$$(v_{At})_2 = 2,78 \text{ m/s} \text{ e } (v_{Bt})_2 = 3,3 \text{ m/s}.$$

Analisando as componentes em relação ao eixo normal n , consideramos as forças de impulso e como as quantidades de movimento dos veículos se conservam antes e após o impacto:

$$M_A(v_{An})_1 + M_B(v_{Bn})_1 = M_A(v_{An})_2 + M_B(v_{Bn})_2$$

$$M(4,81)_1 + M(-2,97)_1 = M(v_{An})_2 + M(v_{Bn})_2 \Rightarrow (v_{An})_2 + (v_{Bn})_2 = 1,84.$$

Utilizando a relação do coeficiente de restituição para o eixo n , definimos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{(v_{Bn})_2 - (v_{An})_2}{(v_{An})_1 - (v_{Bn})_1} \Rightarrow (v_{Bn})_2 - (v_{An})_2 = e[(v_{An})_1 - (v_{Bn})_1] = \\ &= 0,95[4,81 - (-2,97)] \\ (v_{Bn})_2 - (v_{An})_2 &= 7,39. \end{aligned}$$

Utilizando as duas relações para as componentes normais das velocidades, após o impacto:

$$\begin{aligned} (v_{An})_2 + (v_{Bn})_2 &= 1,84 \Rightarrow (v_{An})_2 + [7,39 + (v_{An})_2] = 1,84 \Rightarrow \\ \Rightarrow (v_{An})_2 &= -2,775 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

$$(v_{Bn})_2 - (v_{An})_2 = 7,39 \Rightarrow (v_{Bn})_2 = 4,615 \text{ m/s.}$$

Fazendo a soma vetorial de cada componente da velocidade logo após o impacto, temos:

$$(\vec{v}_A)_2 = 3,93 \text{ m/s, com ângulo } \alpha = 45,05^\circ \text{ e}$$

$$(\vec{v}_B)_2 = 5,67 \text{ m/s, com ângulo } \beta = 35,57^\circ.$$

Como já definimos as velocidades resultantes dos dois veículos logo após a colisão, precisamos agora definir o quanto os veículos vão se movimentar após essa colisão. Para tanto, utilizamos o princípio de trabalho e energia, de forma que:

$$T_2 = T_1 + \sum U_{1-2} \Rightarrow \frac{1}{2}M(v_A)_2^2 + (-F_a \cdot s_A) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot M \cdot 3,93^2 + (-\mu_k \cdot N \cdot s_A) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot 3,93^2 + (-0,2 \cdot M \cdot 9,81 \cdot s_A) = 0 \Rightarrow s_A = 3,936 \text{ m.}$$

Para o veículo B , definimos o deslocamento pela relação:

$$T_2 = T_1 + \sum U_{1-2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot M \cdot 5,67^2 + (-0,2 \cdot M \cdot 9,81 \cdot s_B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_B = 8,193 \text{ m.}$$

Com esse resultado final, definimos o quanto cada veículo vai movimentar-se seguindo a direção do vetor da velocidade após o impacto, porém a tarefa não está terminada, uma vez que adotamos a velocidade maior para o veículo A , mas e se tivéssemos adotado a velocidade maior de 20 km/h para o veículo B ? Agora, você, aluno, deve fazer essa nova análise com a velocidade de 20 km/h para o veículo B , e a velocidade de 16 km/h para o veículo A , determinando a distância que cada veículo vai percorrer após a colisão e seguindo os passos que acabamos de desenvolver.

Após obter todos os dados, você deve construir um relatório com o memorial de cálculo para as três tarefas que o parque de diversões lhe atribuiu, relatório este que será apresentado à gerência do parque. Com a resolução dessa última tarefa e o relatório final, conseguimos realizar todo o estudo de um movimento geral para partículas, com base nos conceitos de energia potencial, energia cinética e trabalho, utilizando as leis de conservação e os teoremas aplicáveis.

Avançando na prática

Ensaio para determinar o coeficiente de restituição para o impacto entre caixas sendo transportadas

Descrição da situação-problema

Em um certo momento na esteira industrial que faz o transporte de caixas, representada na Figura 3.34, a caixa com massa de 15 kg , movimentando-se com velocidade de 8 m/s , atinge a caixa com massa de 22 kg , que apresentava velocidade de 5 m/s . Após a colisão, os sensores da esteira marcaram que a caixa, com massa de 22 kg , apresentou velocidade de $6,8 \text{ m/s}$.

Figura 3.34 | Colisão entre duas caixas durante o transporte na esteira de rolos



Fonte: elaborada pelo autor.

Por conta desse choque entre as caixas, a gerência da empresa passou a você, que é o responsável pelas análises industriais, a tarefa de determinar o valor do coeficiente de restituição entre as caixas, para que, posteriormente, seja verificada uma forma de amenizar os estragos provocados pelos choques.

Resolução da situação-problema

Como as duas caixas continuam movimentando-se após o impacto, montamos a conservação do momento para as caixas como:

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$15 \cdot 8 + 22 \cdot 5 = 15(v_A)_2 + 22 \cdot 6,8$$

$$(v_A)_2 = 5,36 \text{ m/s.}$$

Com o valor de $(v_A)_2$, determinamos o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1} = \frac{6,8 - 5,36}{8 - 5}$$

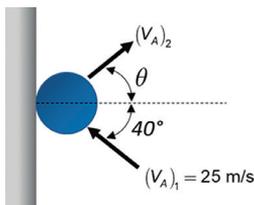
$$e = 0,48.$$

Portanto, o coeficiente de restituição entre as caixas é de 0,48, e, com esse resultado, escrevemos o relatório concluindo a tarefa.

Faça valer a pena

1. Em um ensaio de colisão, uma esfera com massa de 8 kg é arremessada contra um anteparo, com o objetivo de determinar o comportamento da esfera após o impacto. Sabe-se pelo ensaio que a esfera deve atingir o anteparo sem atrito com velocidade de 25 m/s, que o coeficiente de restituição é de 0,75 e que a esfera atinge o anteparo em um ângulo de 40° em relação à linha de impacto, como representado na Figura 3.35.

Figura 3.35 | Representação do ensaio de colisão para a esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Em relação aos valores calculados e esperados para a esfera no ensaio, são feitas as seguintes assertivas:

- I. A velocidade da esfera imediatamente após o impacto deve ser de $(\vec{V}_A)_2 = 24,7 \text{ m/s}$ ↗.
- II. O ângulo θ deverá ser de 38° .
- III. A componente da velocidade paralela ao anteparo, antes do impacto, deverá ser duas vezes maior do que a mesma componente após o impacto.
- IV. A componente da velocidade perpendicular ao anteparo, antes do impacto, deverá ser de mesmo módulo que a mesma componente após o impacto, uma vez que não se tem atrito entre o anteparo e a esfera.

Assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas a afirmativa III está correta.
- c) Apenas a afirmativa I está correta.
- d) Apenas as afirmativas I, II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas III e IV estão corretas.

2. Todo o conceito de impacto se resume às forças geradas de contato entre os corpos que se chocam, de modo que a força que cada corpo exerce no outro apresenta intensidade considerável, sendo aplicada em um espaço de tempo muito pequeno e alterando a trajetória que os corpos apresentavam antes do impacto.

Como é de se imaginar, o impacto é uma interação entre corpos bastante complexa, uma vez que estão envolvidas propriedades de deformação, dissipação de energia, direção do contato inicial, assim como a velocidade e a aceleração de cada corpo.

Considerando o contexto apresentado, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas:

- I. Ao analisar o coeficiente de restituição de duas partículas que se chocam, observa-se uma condição na qual as partículas ficam juntas após o impacto, condição essa representada pela equação da conservação da quantidade de movimento linear, como $m_A(\mathbf{v}_A)_1 + m_B(\mathbf{v}_B)_1 = (m_A + m_B)(\mathbf{v})_2$.

PORQUE

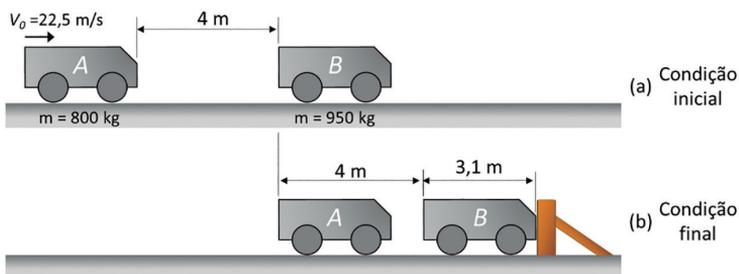
- II. O impacto perfeitamente elástico representa a capacidade total de recuperação da forma inicial das duas partículas que entraram em choque, em que tanto a quantidade de movimento total quanto a energia total se conservam.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- e) As asserções I e II são proposições falsas.

3. Dois veículos são posicionados seguindo as características de um ensaio para determinar coeficientes de restituição, como indicado na Figura 3.36a. Para esse ensaio, é definido que o veículo A apresenta massa de 800 kg , já o veículo B tem massa de 950 kg , e ambos os veículos apresentam comprimento de $3,1\text{ m}$. O veículo A é lançado com velocidade de $22,5\text{ m/s}$ em direção ao veículo B, que, inicialmente, está em repouso sobre a pista, a qual apresenta coeficiente de atrito com os veículos de $\mu_k = 0,45$. Após o ensaio, foi constatado que o veículo A bateu no veículo B, que, por sua vez, deslocou por um determinado comprimento x .

Figura 3.36 | Ensaio de impacto entre os veículos



Fonte: elaborada pelo autor.

Com essas informações do ensaio de impacto, assinale a alternativa com a resposta correta para o coeficiente de restituição entre os veículos A e B:

- a) 0,2.
- b) 0,3.
- c) 0,4.
- d) 0,5.
- e) 0,6.

Referências

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para Engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia dinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

Sistemas de várias partículas

Convite ao estudo

Prezado aluno,

Na Unidade 1, estudamos as condições instantâneas de partículas e analisamos o movimento retilíneo e o curvilíneo; na Unidade 2, vimos as aplicações da segunda lei de Newton em diferentes coordenadas, e na Unidade 3, aprofundamos nossos conhecimentos em energia e momentos linear e angular para uma partícula.

Nesta unidade, vamos analisar o movimento de várias partículas, relacionando todos os conceitos que já estudamos para aplicação em situações realistas.

Na Seção 1, vamos estudar a segunda lei de Newton, a quantidade de movimento e sua conservação para sistemas de partículas. Isso permite analisar, por exemplo, uma explosão, na qual diversos fragmentos são lançados e sua trajetória deve ser determinada, ou mesmo o movimento individual dos componentes de um equipamento mecânico.

Na Seção 2, trataremos do princípio de trabalho e energia, o princípio de impulso e quantidade de movimento, sempre voltados para situações envolvendo sistemas com várias partículas. Isso permitirá, por exemplo, determinar a posição de veículos após uma colisão, prever o impacto de aeronaves, determinar a energia gerada sobre cargas frágeis durante seu transporte etc.

Por fim, na Seção 3, abordaremos os sistemas variáveis de partículas, o fluxo de partículas e os sistemas que ganham ou perdem massa, a fim de analisar, por exemplo, as forças devido a um fluxo de água ou ar atingindo uma barreira, o empuxo devido ao escoamento de ar de uma hélice, a força de propulsão de uma turbina, entre outros.

Com o objetivo de aplicar os conhecimentos adquiridos nesta unidade e de adquirir a persistência necessária para realizar análises e cálculos detalhados, você estará no papel do especialista sênior de uma empresa bélica, atuando como o responsável por desenvolver análises para outros departamentos, de acordo com as solicitações. Devido a um incidente no qual uma aeronave não tripulada da empresa explodiu durante o teste de voo, você ficou encarregado de, primeiramente, determinar o comportamento dos fragmentos que se soltaram dessa aeronave, após a explosão, para ser possível localizá-los.

Você deverá em outro momento determinar a energia perdida durante a linha de produção na qual uma célula de combustível é colocada rapidamente da esteira em um carro de transporte, verificando se a energia gerada fica dentro do limite aceitável para não danificar a célula de combustível.

Por fim, você deverá determinar o esforço na nova unidade de teste do propulsor de uma aeronave para garantir que a bancada de teste não sofra danos, preservando o propulsor.

Vamos, então, dar início ao estudo desta unidade.

Seção 4.1

Leis de Newton em sistema de partículas

Diálogo aberto

Esta seção aborda o estudo do movimento de várias partículas em interação. Dessa maneira, estudaremos as equações do movimento para sistemas de partículas, os conceitos da quantidade de movimentos angular e linear e a conservação da quantidade de movimento.

Com esses estudos, vamos fazer análises reais, como a determinação do movimento de componentes de um foguete espacial ao se desprender em várias partes, determinar onde destroços de um drone vão parar depois de uma explosão, saber o movimento de componentes de um equipamento mecânico após uma quebra, especificar a trajetória de equipamentos que comecem a movimentar-se juntos etc.

A fim de fortalecer os conceitos desta seção com a prática envolvendo a Mecânica Geral, consideramos que você, aluno, agora é um dos responsáveis por realizar análises encaminhadas por diversos setores de uma indústria bélica, recebendo, neste momento, a tarefa de analisar a explosão de uma aeronave não tripulada.

A aeronave não tripulada apresentava 145 kg e estava em velocidade de cruzeiro próxima a 230 km/h quando explodiu, gerando duas partes: a parte recuperada apresentou 60 kg , mas a outra parte ainda não foi localizada.

A tarefa que ficou sob sua responsabilidade é a de determinar a velocidade das duas partes da aeronave no instante exatamente após a explosão. Por meio da parte recuperada, foi possível determinar que se moveu a 43° da trajetória na qual a aeronave estava seguindo e a outra parte ainda não localizada seguiu a trajetória de 22° .

Antes de realmente partirmos para a execução da atividade, é necessário estudarmos os conceitos de movimento de sistemas com mais de uma partícula, de modo a compreender o momento linear de um sistema de partículas e o movimento de seu centro de massa.

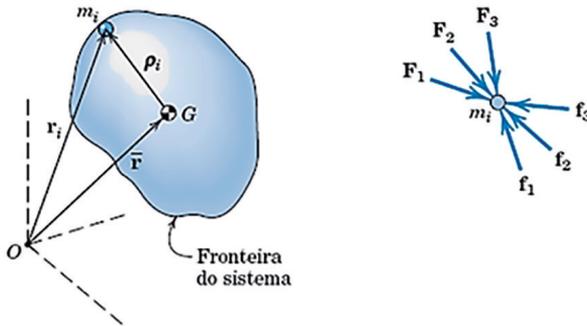
Como uma partícula interage com a outra? O movimento inicial do sistema interfere no movimento de cada partícula separadamente? Quais considerações devem ser realizadas nas equações das Leis de Newton para o movimento quando se trabalha com mais de uma partícula?

Vamos, então, iniciar os estudos para compreendermos como analisar sistemas de partículas e resolvermos essa tarefa.

Não pode faltar

Considerando um sistema composto de muitas partículas, podemos estudar uma determinada *i-ésima* partícula em seu interior, como representado na Figura 4.1. Essa partícula é sujeita a um conjunto de forças e definimos a força resultante interna como \vec{f}_i e a resultante das forças externas como \vec{F}_i .

Figura 4.1 | Representação de um sistema de partículas, com destaque para a *i-ésima* partícula sujeita à resultante das forças internas (\vec{f}_i) e à resultante das forças externas (\vec{F}_i)



Fonte: adaptada de Meriam e Kraige (2009, p. 196).

As forças internas que estão atuando sobre essa *i-ésima* partícula são geradas pelas outras partículas, enquanto as forças externas estão sendo aplicadas em todo o conjunto de partículas, como o caso de forças gravitacionais, de contato etc.

Podemos aplicar a equação do movimento para essa *i-ésima* partícula de forma a representar as forças que estão atuando em cada partícula:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{f}_i + \vec{F}_i = m_i\vec{a}_i \Rightarrow \Sigma \vec{f}_i + \Sigma \vec{F}_i = \Sigma m_i\vec{a}_i.$$

Nesse caso, como analisamos todas as partículas, o somatório das forças internas será igual a zero, pois o sistema de partículas se mantém constante, sem deformação ou alteração na quantidade de partículas. Assim, deduzimos que as forças ocorrem sempre em pares colineares de mesma intensidade, mas de sentidos opostos.

Podemos reescrever a equação do movimento para o sistema de partículas desconsiderando o somatório das forças internas, de tal modo que definimos, então, a equação como:

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i.$$



Pesquise mais

Para aprofundar seus conhecimentos sobre a análise do movimento de partículas, leia o tópico Movimento geral de sistemas de partículas, da página 114 a 117, do livro indicado a seguir:

SHAMES, I. H. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. v. 2.

Como o somatório das forças internas será igual a zero, podemos deduzir que o somatório dos momentos dessas forças também será igual a zero.

Voltando a observar a Figura 4.1, podemos, ainda, montar uma relação para o centro de massa do sistema de partículas, utilizando o vetor posição \mathbf{r}_G do centro de massa, no qual:

$$m\vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i,$$

sendo m a massa do sistema de partículas. A partir da derivação dupla em função do tempo desta relação $m\vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i$, chegamos à relação:

$$m\vec{a}_G = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum m\vec{a}_G.$$

Por se tratar de um sistema que pode estar deslocando-se por uma trajetória tridimensional, devemos considerar a decomposição em coordenadas retangulares dos vetores da aceleração \vec{a}_G e da posição \mathbf{r}_G , para, então, obtermos a aceleração e a posição do

centro de massa do sistema de partículas, em função das coordenadas x , y e z , como segue:

$$m\vec{a}_{Gx} = \sum m_i \vec{a}_{ix} \quad m\vec{a}_{Gy} = \sum m_i \vec{a}_{iy} \quad m\vec{a}_{Gz} = \sum m_i \vec{a}_{iz}$$

$$m\vec{r}_{Gx} = \sum m_i \vec{r}_{ix} \quad m\vec{r}_{Gy} = \sum m_i \vec{r}_{iy} \quad m\vec{r}_{Gz} = \sum m_i \vec{r}_{iz}$$

Levando em conta que o vetor de posição para essa i -ésima partícula é representado por \vec{r}_i , podemos definir a equação do movimento em função do momento das forças resultantes, em relação ao centro de origem O , como:

$$\Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i).$$



Reflita

Vimos que a resultante das forças internas atuando em cada partícula de um sistema de partículas é igual a zero, porém, se analisarmos o sistema solar, apesar de as forças gravitacionais que os planetas e o Sol exercem uns nos outros serem forças internas do sistema de partículas representativo do sistema solar, essas forças gravitacionais sozinhas são as responsáveis por promoverem os movimentos dos planetas. Assim, as forças internas geram efeitos que sempre devem ser desconsiderados?

Seguindo a mesma forma pela qual definimos o momento linear \vec{L} e o momento angular \vec{H}_O para uma partícula, na Seção 2 da Unidade 3, definimos o momento linear para o sistema de partículas por meio da equação do movimento $\Sigma \vec{F}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i$ como:

$$\vec{L} = \Sigma m_i \vec{v}_i,$$

ou ainda:

$$\dot{\vec{L}} = \Sigma m_i \vec{a}_i \Rightarrow \dot{\vec{L}} = \Sigma \vec{F}_i.$$

Já o momento angular para o sistema de partículas pode ser determinado por meio da equação do movimento $\Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)$ como:

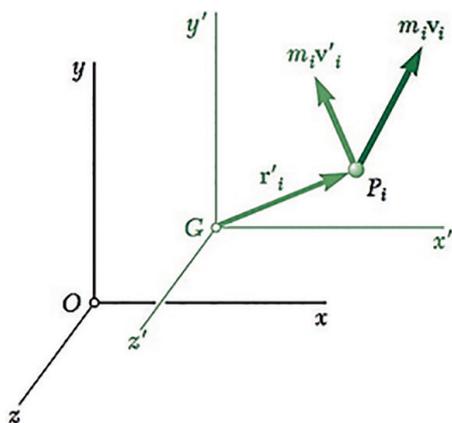
$$\vec{H}_O = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i).$$

Por meio desta equação do momento angular, podemos montar uma relação para a soma dos momentos $\Sigma \vec{M}_O$:

$$\vec{H}_O = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) = \Sigma \vec{M}_O.$$

Podemos nos deparar com situações nas quais o sistema de partículas apresente movimento de translação em relação a um ponto de origem definido por meio de um sistema de referência newtoniano, como representado na Figura 4.2.

Figura 4.2 | Indicação de um sistema de partículas, com centro de massa G e movimento de translação em relação ao ponto de origem O



Fonte: Beer et. al (2012, p. 867).

Analisando a Figura 4.2, podemos determinar o movimento da partícula P_i por meio do vetor de posição \vec{r}'_i e do vetor de velocidade \vec{v}'_i , para o sistema de referência $G_{x'y'z'}$, de modo que, pela equação do movimento angular $\vec{H}_O = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$ que definimos há pouco, obtemos a equação do momento angular para a referência do centro de massa G , sendo:

$$\vec{H}'_G = \Sigma(\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i).$$

Ao analisar o termo $m_i \vec{v}_i$ da Figura 4.2, definimos que o vetor \vec{v}_i é gerado pela soma vetorial $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}'_i$, sendo \vec{v} o vetor velocidade referente ao centro de massa do sistema de partículas para a referência $G_{x'y'z'}$, que é a posição do próprio centro de massa.

Assim, esse vetor \vec{v} acaba não tendo intensidade, ou seja, $\vec{v} = \mathbf{0}$, o que resulta em $\vec{v}_i = \vec{v}_i'$, ou seja:

$$\vec{H}_G = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i) = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') = \vec{H}'_G \Rightarrow \vec{H}_G = \vec{H}'_G.$$

Se derivarmos o momento angular \vec{H}'_G em função do tempo, chegaremos a uma relação para a aceleração da partícula P_i , sendo:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i').$$

Analisando a aceleração em função do sistema de referência newtoniano O_{xyz} da Figura 4.2, definimos que a aceleração resultante da partícula P_i pode ser obtida pela multiplicação vetorial da aceleração em relação ao sistema de referência $G_{x'y'z'}$, ou seja, \vec{a}_i' , pela aceleração do centro de massa G do sistema de partículas, que é \vec{a} . Logo, a aceleração resultante fica:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i' \times \vec{a}.$$

Partindo dessa relação das acelerações, deixamos \vec{a}_i' em evidência e substituímos na equação do momento angular $\dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i')$, resultando em:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i') - (\sum m_i \vec{r}_i') \times \vec{a}.$$

Ao analisarmos o termo $\sum m_i \vec{r}_i'$, podemos fazer uma relação com o centro de massa, no qual o somatório dos vetores de posição \vec{r}_i' representa o vetor posição do centro de massa \vec{r} . Como esse vetor de posição \vec{r} é referente ao centro de massa do sistema de partículas, para a referência $G_{x'y'z'}$, que é a posição do próprio centro de massa, o vetor \vec{r} acaba não tendo intensidade, ou seja, $\vec{r} = \mathbf{0}$, o que nos remete à equação:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i') - \mathbf{0} \times \vec{a}.$$

Analisando a relação $m_i \vec{a}_i'$, podemos perceber, pelo que vimos no início desta seção, que $\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i'$ e, portanto, a equação para a taxa de variação do momento angular em relação ao ponto de referência G torna-se:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times \sum \vec{F}_i) - \mathbf{0} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i).$$

Como $\sum(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i)$ representa o momento resultante $\sum M_G$ das forças externas que estão atuando no sistema de partículas em relação ao ponto do centro de massa G , podemos relacionar que:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum M_G$$

e como $\vec{H}_G = \vec{H}'_G$, definimos, ainda, que:

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum M_G = \dot{\vec{H}}_G.$$

Se um sistema de partículas não tiver nenhuma força atuando sobre ele, ou o somatório das forças externas for igual a zero, teremos a relação de que $\sum \vec{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum \vec{F} = \mathbf{0}$, ou seja, a taxa de variação do momento linear será igual a zero.

A mesma analogia pode ser desenvolvida para o momento angular, por meio da relação $\dot{\vec{H}}_O = \sum(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)$, de modo que:

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \mathbf{0}.$$

Determinamos, portanto, que ocorre a conservação dos momentos angular e linear para o sistema de partículas, uma vez que:

$$\dot{\vec{L}} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{H}_O = \text{constante}.$$



Assimile

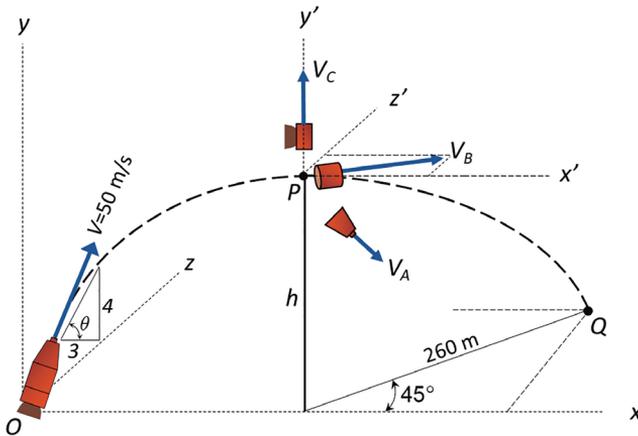
A relação da conservação dos momentos angular e linear para o sistema de partículas permite-nos afirmar que, para um sistema de partículas que não esteja sujeito a forças externas, como no caso de um foguete que, ao atingir o espaço, se separa em duas partes e cada uma delas vai para uma direção, sem a atuação de forças, o momento linear e o momento angular terão o mesmo valor para antes e depois da interação. Assim:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \text{ e } \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}.$$



No teste realizado em escala reduzida para uma sonda espacial que se divide em três partes, a sonda apresentava massa total de 48 kg e foi lançada a partir de um ponto referencial O , com velocidade de 50 m/s e com o vetor velocidade \vec{v} seguindo o plano xy , como na Figura 4.3.

Figura 4.3 | Trajetória da sonda com o movimento de cada parte após se separarem



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, o ponto P na Figura 4.3, a sonda divide-se em três partes; uma parte passa a movimentar-se com velocidade \vec{V}_A no plano xy , outra parte passa a movimentar-se com velocidade \vec{V}_B e a terceira parte, com velocidade \vec{V}_C , seguindo o eixo y' .

Foi possível determinar que a parte C , com massa de 20 kg e velocidade \vec{V}_C , atingiu a altitude máxima a 90 m acima do ponto de divisão P , e que a parte B , com massa de 15 kg e velocidade \vec{V}_B , movimentou-se por 260 m , no plano xz , até atingir o ponto Q . Porém, a parte A , com velocidade \vec{V}_A , apresentou defeito nos sensores, devido ao choque da queda e, por isso, não foi possível determinar seu deslocamento.

Portanto, para que não seja necessário fazer um novo teste, você deve determinar a velocidade \vec{V}_A da parte A , logo após a divisão da sonda.

Inicialmente, determinamos o tempo para a sonda alcançar a máxima altitude por meio da equação de movimento retilíneo com aceleração constante, considerando as componentes da velocidade no eixo y :

$$v = v_0 + at \quad \therefore \quad v_y = v \cdot \text{sen}\theta - gt$$

$$0 = 50 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) - 9,81 \cdot t \Rightarrow t = 4,08 \text{ s.}$$

Conseguimos determinar também a altitude máxima h alcançada pela sonda pela equação do movimento retilíneo, com aceleração constante:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \Rightarrow 0 = v^2 - 2gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{50^2}{2 \cdot 9,81} = 127,42 \text{ m.}$$

Com base nesses dados para o movimento da sonda, determinamos a velocidade das partes A , B e C após se separarem.

Começando pela componente C , sabendo que vai ganhar altitude até a velocidade final ser zero, definimos o módulo de sua velocidade como:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \Rightarrow 0 = v_c^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c = 42,02 \text{ m/s.}$$

Analisando a partícula B , o tempo que gastará para voltar será de 4,08 s, uma vez que, inicialmente, a velocidade dessa partícula não tem componente em z . Assim, sua velocidade, no plano xz , se mantém constante:

$$v_B = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{260}{4,08} = 63,72 \text{ m/s.}$$

Durante a separação das três partes da sonda espacial, o momento linear conserva-se. Por isso, afirmamos que o centro de massa para a sonda, antes da separação e para o sistema formado pelas partes A , B e C , deve seguir a mesma trajetória que a cápsula teria caso não ocorresse a separação:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow m\vec{v} = m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + m\vec{v}_C$$

$$48 \cdot 50 \frac{3}{5} \vec{i} = 13 \cdot \vec{v}_A + 15 \cdot \left[(63,72 \cdot \cos 45^\circ) \vec{i} + (63,72 \cdot \text{sen} 45^\circ) \vec{k} \right] +$$

$$+ 20 \cdot 42,02 \vec{j}$$

A velocidade da sonda, expressa na equação anterior, foi realizada apenas na direção de \vec{i} (eixo x), pois, logo antes da separação, a sonda está no topo da trajetória, posição em que o vetor \vec{v}_C fica na horizontal:

$$1440\vec{i} - 675,85\vec{i} - 840,4\vec{j} - 675,85\vec{k} = 13 \cdot \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_A = 58,78\vec{i} - 64,65\vec{j} - 51,99\vec{k} \Rightarrow v_A = \sqrt{58,78^2 + 64,65^2 + 51,99^2}$$

$$v_A = 101,67 \text{ m/s.}$$

Com o valor de \vec{v}_A , finalizamos a tarefa solicitada de determinar a velocidade da parte A da sonda logo após a separação.

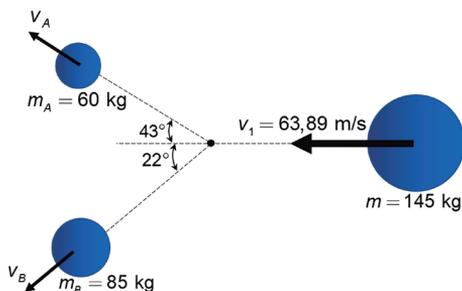
Sem medo de errar

Como um dos responsáveis por análises de uma indústria bélica, você deve determinar a velocidade das duas partes de uma aeronave não tripulada no instante exatamente após a sua explosão.

Sabe-se que essa aeronave não tripulada tinha massa de 145 kg e estava em velocidade de cruzeiro de 230 km/h quando explodiu, gerando duas partes: a parte recuperada apresentou 60 kg , mas a outra parte ainda não foi localizada. Por meio da parte recuperada, foi possível determinar que se moveu a 43° da trajetória na qual a aeronave estava seguindo e a outra parte ainda não localizada seguiu uma trajetória de 22° .

Um passo inicial que ajuda bastante a desenvolvermos essa tarefa é o de construir um esboço do ocorrido com a aeronave, seguindo o representado na Figura 4.4.

Figura 4.4 | Esboço do movimento da aeronave (a) antes da explosão e (b) depois da explosão



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando a situação da explosão da aeronave, podemos afirmar que o momento linear se conserva para a condição de antes e após a explosão, uma vez que não estão presentes forças externas alterando o movimento. Assim, montamos a relação para a conservação do momento linear:

$$m\vec{v}_1 = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B.$$

Levando em conta o eixo horizontal, escrevemos a relação:

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \leftarrow \end{array} \right) \quad 145 \cdot 63,89 = 60 \cdot v_A \cdot \cos 43^\circ + 85 \cdot v_B \cdot \cos 22^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_A = 211,12 - 1,8 \cdot v_B$$

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \uparrow \end{array} \right) \quad 0 = 60 \cdot v_A \cdot \text{sen} 43^\circ - 85 \cdot v_B \cdot \text{sen} 22^\circ \Rightarrow v_B = 1,285v_A$$

$$v_A = 211,12 - 1,8 \cdot (1,285v_A) \Rightarrow v_A = 63,725 \text{ m/s.}$$

$$v_B = 1,285v_A = 1,285(63,725) = 81,887 \text{ m/s.}$$

Definindo vetorialmente os valores das velocidades das duas partículas, obtemos:

$$\vec{v}_A = 63,725 \text{ m/s } \searrow 43^\circ$$

$$\vec{v}_B = 81,887 \text{ m/s } \nearrow 22^\circ.$$

Com esses valores das velocidades, finalizamos a tarefa solicitada pela empresa bélica de determinar a velocidade das duas partes de uma aeronave não tripulada no instante exatamente após a sua explosão, por meio do conceito de sistemas de muitas partículas. Com essa informação, será fácil localizar o ponto de queda da segunda parte e, portanto, a região onde as buscas pelo equipamento devem ser realizadas.

Avançando na prática

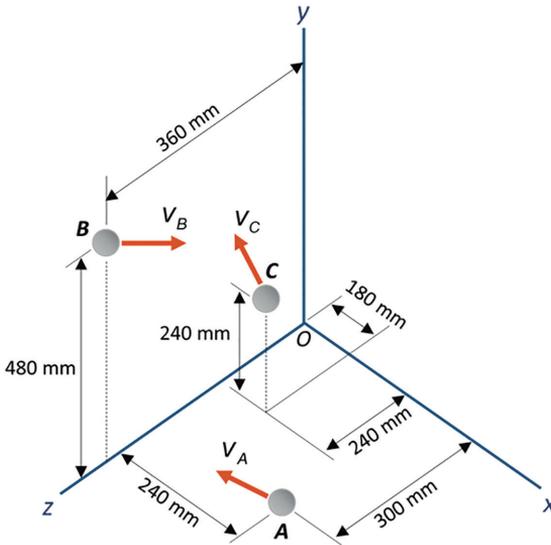
Análise da velocidade de partículas em um experimento de dispersão

Descrição da situação-problema

Após um experimento de análise da dispersão de partículas, o equipamento responsável em fazer a leitura da velocidade das

partículas apresentou erro e não emitiu o valor da velocidade de uma determinada partícula C. Você, como o especialista do laboratório, deve determinar as componentes da velocidade v_x e v_y dessa partícula C, para a condição conhecida de que o momento angular \vec{H}_O do sistema em relação ao ponto O se apresenta paralelo ao eixo z, seguindo a imagem do experimento de dispersão na Figura 4.5.

Figura 4.5 | Partículas A, B e C no experimento de dispersão, no momento analisado



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo resultado parcial do experimento, sabemos que as partículas apresentavam velocidade de $\mathbf{v}_A = -200\vec{i} + 200\vec{j} + 300\vec{k}$, $\mathbf{v}_B = 100\vec{i} - 300\vec{j} - 200\vec{k}$ e $\mathbf{v}_C = (v_x)\vec{i} + (v_y)\vec{j} + 200\vec{k}$, em m/s. A partícula A tem massa de $3 \cdot 10^{-25}$ kg, a de B é $4 \cdot 10^{-25}$ kg e C, $4,5 \cdot 10^{-25}$ kg.

Resolução da situação-problema

Para a resolução desta tarefa, iniciamos montando a equação que represente o momento angular \vec{H}_O do sistema em relação ao ponto O e paralelo ao eixo z:

$$\vec{H}_O = \vec{r}_A \times m_A \vec{V}_A + \vec{r}_B \times m_B \vec{V}_B + \vec{r}_C \times m_C \vec{V}_C.$$

em que: $\vec{r}_A = 0,24\vec{i} + 0,3\vec{k}$, $\vec{r}_B = 0,48\vec{j} + 0,36\vec{k}$ e $\vec{r}_C = 0,18\vec{i} + 0,24\vec{j} + 0,24\vec{k}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= (3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,24\text{m} & 0 & 0,3\text{m} \\ -200\text{m/s} & 200\text{m/s} & 300\text{m/s} \end{vmatrix} + \\ &+ (4 \cdot 10^{-25} \text{ kg}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,48\text{m} & 0,36\text{m} \\ 100\text{m/s} & -300\text{m/s} & -200\text{m/s} \end{vmatrix} + \\ &+ (4,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,18\text{m} & 0,24\text{m} & 0,24\text{m} \\ v_x & v_y & 200\text{m/s} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= (8,4 \cdot 10^{-24} - 1,08 \cdot 10^{-25} \cdot v_y) \vec{i} + (-4,14 \cdot 10^{-23} + 1,08 \cdot 10^{-25} \cdot v_x) \vec{j} \\ &+ (-4,8 \cdot 10^{-24} + 8,1 \cdot 10^{-26} \cdot v_y - 1,08 \cdot 10^{-25} \cdot v_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Agora, considerando que o momento angular seja paralelo ao eixo z, definimos:

$$H_{O_x} = 8,4 \cdot 10^{-24} - 1,08 \cdot 10^{-25} \cdot v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = 77,78 \text{ m/s}$$

$$H_{O_y} = -4,14 \cdot 10^{-23} + 1,08 \cdot 10^{-25} \cdot v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = 383,33 \text{ m/s.}$$

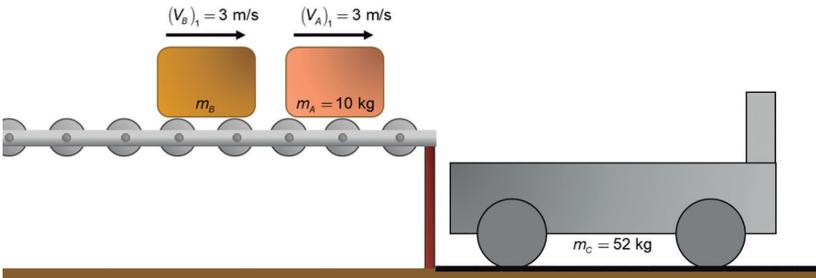
Com os valores de v_x e v_y que acabamos de determinar, finalizamos a tarefa de analisar as componentes desconhecidas da velocidade da partícula C no experimento de dispersão como solicitado.

Faça valer a pena

1. A esteira transportadora de uma planta industrial é representada na Figura 4.6. Ela transporta os materiais com velocidade de 3 m/s , de modo que, no final da esteira, esses materiais são impulsionados para o carro transportador que tem massa de 52 kg e que fica em repouso até receber dois materiais, que correspondem à sua capacidade de transporte. Por conta da velocidade com que os materiais são impulsionados no carro transportador, este passa a movimentar-se e deve chegar até o ponto de embarque dos materiais.

Em um transporte dos materiais, o carro transportador não apresentou a velocidade ideal, indicando que algum dos materiais apresentou massa maior da que deveria sair da linha de produção. Sabemos que a velocidade do carro de transporte, após receber os dois materiais, foi de $1,2 \text{ m/s}$ e que o primeiro material impulsionado no carro transportador apresentava a massa correta de 10 kg .

Figura 4.6 | Representação do processo de transporte de materiais em uma planta industrial



Fonte: elaborada pelo autor.

Com essas informações do transporte de materiais, assinale a alternativa com a resposta correta para o peso do segundo material que foi impulsionado no carro transportador:

- a) $10,55 \text{ kg}$.
- b) $10,55 \text{ N}$.
- c) $22,85 \text{ g}$.
- d) 18 kg .
- e) $24,67 \text{ kg}$.

2. Um sistema de partículas é a representação de uma determinada região fechada e que independe de como as partículas estão ligadas, e o sistema de partículas pode representar um sistema gasoso, líquido ou sólido. Porém, para cada sistema, devemos analisar como as partículas que o compõem estão movimentando-se.

Conforme o contexto apresentado, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas:

- I. No caso de um corpo rígido, cada partícula vai estar sempre a uma mesma posição em relação às outras partículas, porém, em sistemas onde as partículas se movimentam, uma em relação às outras, uma série de análises complexas deve ser realizada, para que seja possível determinar o movimento do sistema.

PORQUE

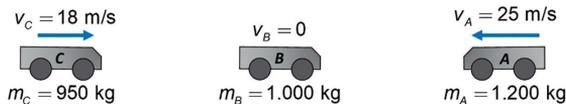
- II. A soma de todas as forças atuando externamente no sistema de partículas deve ser igual à soma das massas das partículas multiplicada pela aceleração do centro de massa desse sistema de partículas ($\sum \vec{F} = \sum m \vec{a}_G$).

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras e a II é uma justificativa da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira e a II é uma proposição falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa e a II é uma proposição verdadeira.
- e) As asserções I e II são proposições falsas.

3. O teste de impacto entre veículos com coeficiente de restituição de 0,75 (representado na Figura 4.7) foi realizado com o veículo A, de massa de 1.200 kg, movimentando-se a 25 m/s em direção ao veículo B, que tem massa de 1.000 kg e em repouso. O veículo C, com massa de 950 kg, também se movimentava em direção ao veículo B, sendo sua velocidade de 18 m/s. Sabemos ainda que, nesse teste, primeiramente, o veículo A colide com o veículo B, então ocorre a colisão do veículo C com o veículo B e, finalmente, ocorre outra colisão do veículo A com o veículo B.

Figura 4.7 | Representação das partículas A, B e C no experimento de dispersão, para o momento analisado



Fonte: elaborada pelo autor.

Para esse teste de impacto entre veículos, são realizadas as seguintes afirmações:

- I. A velocidade do carro A, após todas as colisões possíveis, foi de 8,375 m/s.
- II. A velocidade do carro B, após todas as colisões possíveis, foi de 4,341 m/s.
- III. A velocidade do carro C, após todas as colisões possíveis, foi de 16,865 m/s.

Assinale a alternativa que apresenta apenas as afirmações CORRETAS:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Todas as afirmativas estão corretas.

Seção 4.2

Impulso e quantidade de movimento em sistema de partículas

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos como as Leis de Newton são aplicadas em sistema de partículas e, agora, aplicaremos os conceitos de energia cinética, princípio de trabalho e energia e princípio de impulso e quantidade de movimento para um sistema de partículas.

Isso nos permitirá analisar situações práticas e importantes, como a análise da trajetória de projéteis lançados simultaneamente, a colisão entre vários veículos ou aeronaves, o comportamento do transporte de cargas em carros transportadores ou esteiras, entre outras.

Retornando à condição em que você trabalha em uma empresa bélica, agora sua tarefa é analisar o transporte da célula de combustível de uma aeronave não tripulada.

A energia à qual uma célula de combustível está sujeita deve ser controlada para evitar possíveis danos em sua estrutura. Assim, a sua tarefa é analisar a energia perdida durante a linha de produção na qual a célula de combustível é colocada rapidamente da esteira para o carro de transporte, a fim de verificar se a energia desse ato não ultrapassará 55 J , que é o valor máximo estabelecido de energia que a célula de carga pode suportar sem sofrer danos.

A massa da célula de combustível é de $27,5 \text{ kg}$ e a do carro de transporte é 45 kg . O carro está em repouso no momento em que a célula de carga o atinge e a velocidade com que a célula de carga sai da esteira de transporte em direção ao carro é de 5 m/s .

Para essa nova tarefa, podem surgir alguns questionamentos iniciais, como: qual é a interação entre a célula de carga e o carro de transporte? Como verificar a energia gerada devido ao contato de ambos? Como a velocidade deve ser relacionada nessa interação? Os princípios estudados para as análises de uma partícula aplicam-se ao sistema célula de carga e carro de transporte?

Para obter as respostas a esses questionamentos e conseguir o conhecimento necessário para resolver essa tarefa, vamos aos estudos!

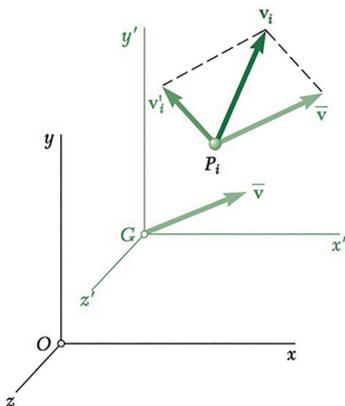
Não pode faltar

Ao analisar um sistema de partículas, podemos relacionar a energia cinética T desse sistema por meio da soma da energia de cada partícula. Assim, utilizando a equação representativa da energia cinética de cada partícula, definimos a energia cinética do sistema de partículas como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2.$$

Vamos analisar a partícula P_i de um sistema de partículas em relação à origem O , em um sistema de referência fixa O_{xyz} , e em relação ao sistema de referência móvel $G_{x'y'z'}$, posicionado sobre o próprio centro de massa, como exemplificado na Figura 4.8.

Figura 4.8 | Indicação dos eixos de referência de um sistema de partículas



Fonte: Beer et al. (2012, p. 877).

Analisamos, então, a partícula P_i do sistema de partículas representado na Figura 4.8. Podemos relacionar sua velocidade \vec{v}_i ao sistema de referência fixa O_{xyz} , as velocidades \vec{v}'_i ao sistema móvel $G_{x'y'z'}$, e a velocidade \vec{v} do centro de massa ao sistema O_{xyz} pela equação:

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}'_i.$$

Como v_i^2 equivale ao produto escalar $\vec{v}_i \times \vec{v}_i$, podemos montar uma nova equação da energia cinética em relação ao sistema de referência fixa O_{xyz} :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[(\vec{v} + \vec{v}'_i) \times (\vec{v} + \vec{v}'_i) \right].$$

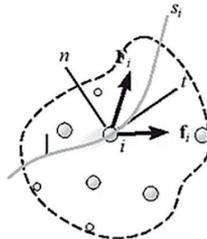
Ao fazer a simplificação dessa relação da energia cinética, definimos que:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2.$$

Essa equação representa como a energia cinética do sistema de partículas pode ser definida pela soma da energia cinética em relação ao centro de massa do sistema com a energia cinética em relação à referência móvel $G_{x',y',z'}$.

Partimos, agora, para a análise do princípio de trabalho e energia para um sistema de partículas, como o representado na Figura 4.9.

Figura 4.9 | Sistema de partículas com destaque para a trajetória s_i da partícula i



Fonte: Hibbeler (2011, p. 138).

A i -ésima partícula do sistema de partículas da Figura 4.9 está sob influência da força resultante externa \vec{F}_i e da força resultante interna \vec{f}_i , de modo que, ao considerarmos o princípio de trabalho e energia para essa partícula i e para todas as demais partículas do sistema de partículas, determinamos que a soma da energia cinética inicial de todas as partículas do sistema com o trabalho de todas as forças internas e externas equivale à soma da energia cinética final das partículas:

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1 \rightarrow 2} = \Sigma T_2.$$

Tal equação representa o princípio de trabalho e energia do sistema de partículas.



Mesmo as forças internas sendo iguais e opostas (como vimos na seção anterior), o trabalho delas não será necessariamente cancelado, uma vez que as partículas que realizam essas forças internas podem ter deslocamentos diferentes, quando o sistema de partículas não for um corpo rígido. Por isso, o trabalho $\sum U_{1 \rightarrow 2}$ deve ser visto como a soma do trabalho das forças internas com o das forças externas.

Ao lembrar a equação do movimento aplicada a um sistema de partículas, como visto na seção anterior, temos:

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \dot{\vec{L}}.$$

Ao multiplicarmos ambos os lados dessa equação por dt e integrarmos em t , de t_1 a t_2 , chegamos à relação:

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum m_i (\vec{v}_i)_2 - \sum m_i (\vec{v}_i)_1 = \vec{L}_2 - \vec{L}_1.$$

Para essa integral que acabamos de definir, podemos dizer que $\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt$ representa os impulsos lineares devido às forças externas aplicadas ao sistema de partículas e equivale à variação do momento linear desse sistema.



Para aprimorar seus conhecimentos sobre forças impulsivas em sistemas de partículas, leia o item Forças impulsivas, nas páginas 198 e 199, do livro indicado a seguir:

SHAMES, I. H. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. v. 2.

Ainda ao analisar as forças aplicadas nos sistemas de partículas, podemos fazer uma importante consideração para os casos nos quais as forças aplicadas se conservem ao longo do tempo. Nessa condição, ocorre a conservação de energia, pois as forças não estarão contribuindo com o movimento do sistema. Assim, a soma da energia cinética T inicial com a energia potencial V inicial será

igual à energia cinética T final somada à energia potencial V final do movimento do sistema de partículas, ou seja:

$$\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2.$$

A soma dos momentos para o sistema de partículas equivale à derivada do momento angular (ou quantidade de movimento angular) do sistema, ou seja, $\Sigma M_O = \dot{\vec{H}}_O$. Se multiplicarmos ambos os lados dessa equação por dt e integrarmos em t , de t_1 a t_2 , definiremos que:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1.$$

A integral $\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt$ representa a soma dos impulsos angulares do sistema de partículas em relação ao ponto de origem O que são gerados devido às forças externas e equivale à variação dos momentos angulares em relação ao ponto O do sistema.



Refleta

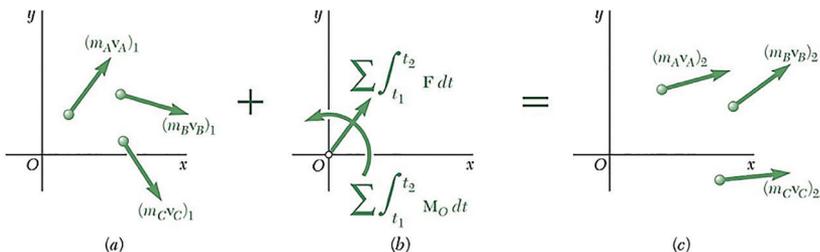
O momento angular com relação a determinado ponto depende de uma força (ou a resultante das forças) relacionada com sua distância perpendicular até o ponto. Contudo, como fica a representação vetorial do momento angular para uma partícula?

As duas equações para os impulsos são comumente apresentadas como seguem e estão representadas na Figura 4.10:

$$\Sigma m_i (\vec{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \Sigma m_i (\vec{v}_i)_2 \text{ ou } \vec{L}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \vec{L}_2$$

$$(\vec{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (\vec{H}_O)_2.$$

Figura 4.10 | Indicação do sistema de partículas seguindo as equações definidas para o impulso linear e o impulso angular em um sistema de partículas



Fonte: Beer et al. (2012, p. 879).

Em possíveis situações nas quais o sistema de partículas não apresenta nenhuma força externa agindo sobre ele, as integrais que definimos para o impulso linear e para o impulso angular resultarão no valor zero, o que nos levará a concluir que, nessas situações, sem forças externas aplicadas aos sistemas de partículas, o momento linear e o momento angular se conservam ao longo do movimento.

As equações resultantes dessas condições, com conservação do momento linear e do momento angular, ficam:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2.$$

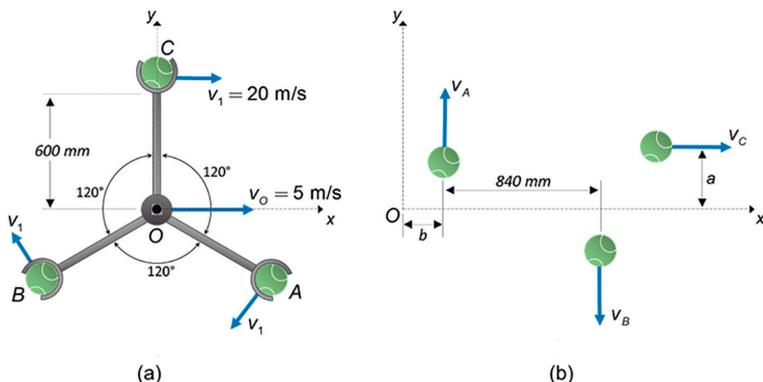


Exemplificando

Um sistema de lançamento de bolas desenvolvido para auxiliar três jogadores de tênis está sendo testado e você ficou encarregado de verificar alguns parâmetros para prever a funcionalidade do equipamento quando este estiver funcionando.

Uma imagem simplificada da vista superior desse equipamento está representada na Figura 4.11.

Figura 4.11 | Representação do equipamento de lançamento de três bolas de tênis simultaneamente



Fonte: elaborada pelo autor.

Esse equipamento de lançamento de bolas de tênis prende as bolas por meio de hastes com 600 mm de comprimento. O sistema com as bolas presas gira no sentido horário, de forma que cada bola apresente velocidade relativa de 20 m/s .

Todo o sistema apresenta ainda movimento no sentido do eixo x , com velocidade de 5 m/s para simular diferentes posições de lançamento.

Em um certo momento, esse equipamento libera as bolas de tênis que, então, passam a movimentar-se de forma independente, como indicado na Figura 4.11(b). Para o dado instante representado na Figura 4.11(b), deve-se determinar a velocidade de cada bola de tênis e a distância da bola C ao eixo x (distância representada pela letra a na Figura 4.11(b)).

Iniciamos a solução dessa tarefa analisando o momento linear antes de o sistema liberar as bolas de tênis para o seu centro de massa que, devido à simetria de montagem, é no ponto central onde as hastes estão presas. Assim, $\vec{L}_1 = \sum m(\vec{v})_1$, com \vec{v} representando a velocidade do centro de massa, o que resulta:

$$\vec{L}_1 = \sum m(\vec{v})_1 = 3m \cdot (5)\vec{i} = (15m)\vec{i} \text{ [m/s]}.$$

E o momento linear para depois do impacto fica:

$$(+\uparrow) \quad \vec{L}_2 = \sum m_i(\vec{v}_i)_2 = (mv_A)\vec{j} - (mv_B)\vec{j} + (mv_C)\vec{i}.$$

Pela conservação do momento linear, montamos a relação:

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &= \vec{L}_2. \\ (15m)\vec{i} \text{ [m/s]} &= (mv_A)\vec{j} - (mv_B)\vec{j} + (mv_C)\vec{i} = \\ &= m(v_A - v_B)\vec{j} + (mv_C)\vec{i}. \end{aligned}$$

Como $(v_A)\vec{j}$ e $(v_B)\vec{j}$ apresentavam a mesma velocidade inicial e estão movimentando-se na mesma direção \vec{j} , deduzimos que $v_A = v_B$. Assim:

$$\begin{aligned} (15m)\vec{i} \text{ [m/s]} &= m(v_A - v_B)\vec{j} + (mv_C)\vec{i} = m(0)\vec{j} + (mv_C)\vec{i} \\ \vec{v}_C &= 15\text{ m/s} \rightarrow \end{aligned}$$

Vamos partir para a análise do momento angular que, para o centro de massa do sistema, antes de liberar as bolas de tênis, considerando a massa de cada bola como M e adotando o sentido anti-horário positivo, é:

$$\left(\vec{H}_O\right)_1 = 3M \cdot l \cdot v_1 = 3M \cdot 0,6 \cdot 20 = 36M.$$

O momento angular para depois da liberação das bolas, considerando o sentido anti-horário positivo, fica:

$$\left(H_O\right)_2 = -M \cdot b \cdot v_A + M \cdot (b + 0,84) \cdot v_B + M \cdot a \cdot v_C$$

E como $v_A = v_B$:

$$\left(H_O\right)_2 = -M \cdot b \cdot v_A + M \cdot (b + 0,84) \cdot v_A + M \cdot a \cdot v_C$$

$$\left(H_O\right)_2 = M \cdot 0,84 \cdot v_A + M \cdot a \cdot v_C.$$

Montando a relação para a conservação do momento angular, definimos:

$$\left(\vec{H}_O\right)_1 = \left(\vec{H}_O\right)_2$$

$$36M = M \cdot 0,84 \cdot v_A + M \cdot a \cdot v_C \Rightarrow 36 = 0,84 \cdot v_A + a \cdot 15$$

$$a = 2,4 - 0,056 \cdot v_A.$$

Como ainda não conseguimos definir as velocidades das bolas A e B , nem a distância a , vamos analisar a energia desse sistema de lançamento de bolas de tênis.

A energia cinética, antes do lançamento das bolas, é definida para o centro de gravidade do lançador e para as bolas de tênis por:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(3M)v_0^2 + 3\left(\frac{1}{2}Mv_1^2\right) = \frac{3}{2}M(v_0^2 + v_1^2) = \\ &= \frac{3}{2}M(5^2 + 20^2) \end{aligned}$$

$$T_1 = 637,5M.$$

Já a energia cinética, após o lançamento das bolas de tênis, é:

$$T_2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}M(15^2).$$

Pela conservação da energia, determinamos que:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 637,5M = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}M(15^2)$$

$$637,5 = \frac{1}{2}v_A^2 + \frac{1}{2}v_A^2 + \frac{1}{2}(15^2)$$

$$\vec{v}_A = 22,91 \text{ m/s} \quad \uparrow.$$

Como $v_A = v_B$,

$$\vec{v}_B = 22,91 \text{ m/s} \quad \downarrow.$$

Com a determinação dos valores de \vec{v}_A , \vec{v}_B e \vec{v}_C , fica faltando definirmos apenas o valor da distância a , que pode ser determinada pela equação $a = 2,4 - 0,056 \cdot v_A$ que já temos. Assim:

$$a = 2,4 - 0,056 \cdot v_A = 2,4 - 0,056 \cdot 22,91$$

$$a = 1,117 \text{ m}.$$

Com os valores da velocidade de cada bola de tênis e da distância a para a condição representada na Figura 4.11(b), concluímos a tarefa.

Sem medo de errar

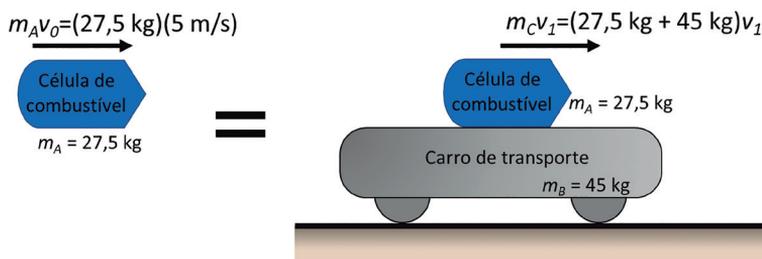
Você, aluno, como o profissional que atua em uma empresa bélica, analisando as especificações da produção de uma célula de combustível, tem a tarefa de verificar a energia perdida durante a linha de produção na qual a célula de combustível é colocada rapidamente da esteira para o carro de transporte, a fim de determinar se a energia gerada por esse ato não ultrapassa 55 J, que é a energia máxima à qual a célula de energia deve ser submetida para garantir que não ocorram danos em sua estrutura.

Sabe-se que a massa do carro de transporte é 45 kg e que a massa da célula de combustível é de 27,5 kg. O carro está em repouso no momento em que a célula de carga o atinge e a velocidade com que a célula de carga sai da esteira em direção ao carro de transporte é de 5 m/s.

Ao analisar essa situação na qual a célula de combustível é transposta para o carro de transporte, como não existem forças externas horizontais na célula de combustível nem no carro de transporte, definimos que o momento linear se conserva.

Para iniciarmos a solução dessa atividade, é conveniente montarmos uma imagem representativa da situação, como indicado na Figura 4.12.

Figura 4.12 | Representação do movimento da célula de carga antes e depois de atingir o carro de transporte



Fonte: elaborada pelo autor.

Partindo do que vimos ao longo da seção para o caso de conservação do momento linear, temos:

$$m_A v_0 = m_C v_1$$

$$27,5 \cdot 5 = (27,5 + 45) \cdot v_1$$

$$v_1 = 1,9 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_1 = 1,9 \text{ m/s} \rightarrow$$

Para estabelecer a energia gerada ao carregar o carro de transporte com a célula de energia, precisamos determinar a diferença da energia inicial para a energia final desse processo.

A energia cinética inicial equivale a:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_A v_0^2$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot 27,5 \cdot 5^2$$

$$T_0 = 343,75 \text{ J.}$$

Determinando a energia cinética final, temos:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_C v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (27,5 + 45) \cdot 1,9^2$$

$$T_1 = 130,86 \text{ J.}$$

Com os valores das energias cinéticas inicial e final, definimos a energia cinética resultante ao carregar o carro de transporte com a célula de combustível pela relação:

$$T = T_0 - T_1$$

$$T = 343,75 - 130,86$$

$$T = 212,89 \text{ J.}$$

Logo, a energia perdida durante a linha de produção na qual a célula de combustível é colocada rapidamente da esteira para o carro de transporte equivale a 212,89 J, valor esse muito acima dos 55 J, que é o valor limite da energia que pode ser aplicada à célula de combustível, antes de ser preparada para ir em uma aeronave não tripulada. Por isso, alterações devem ser aplicadas na própria célula ou no método de seu transporte.

Com essa conclusão, finalizamos a análise dessa tarefa que envolve uma situação com sistema de partículas, sistema esse formado pela célula de combustível e pelo carro de transporte.

Avançando na prática

Análise do acoplamento de três carros de passeio em uma montanha-russa

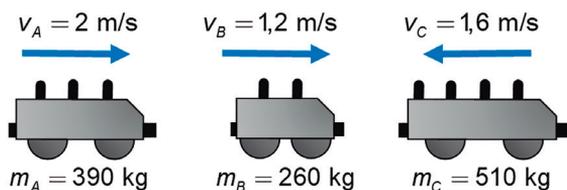
Descrição da situação-problema

No projeto da montanha-russa de um parque de diversões, após os três carros de passeio passarem por todo o percurso, os três devem entrar em contato para que ocorra o seu acoplamento e, assim, sejam movimentados para o embarque das pessoas de uma única vez.

Você, contratado para analisar o acoplamento desses carros de passeio, deve calcular a velocidade resultante v deles após o acoplamento e determinar a porcentagem de energia perdida n devido a esse acoplamento. O processo de acoplamento disponibilizado pelo parque de diversões está representado na Figura 4.13, assim como algumas informações adicionais. Suponha

que as forças externas de impulso atuando nesse contexto sejam desprezíveis.

Figura 4.13 | Desenho esquemático para o acoplamento dos carros de passeio da montanha-russa



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Como o processo de acoplamento dos carros de passeio não está sujeito a nenhuma força externa de impulso, ocorre a conservação do momento linear:

$$\sum m_i (\vec{v}_i)_1 = \sum m_i (\vec{v}_i)_2$$

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \rightarrow \end{array} \right) m_A (v_A)_1 + m_B (v_B)_1 + m_C (-v_C)_1 = m_A (v_A)_2 + m_B (v_B)_2 + m_C (v_C)_2$$

$$390 \cdot 2 + 260 \cdot 1,2 + 510(-1,6) = 390 \cdot v + 260 \cdot v + 510 \cdot v$$

$$\vec{v} = 0,238 \text{ m/s} \rightarrow.$$

Determinada a velocidade dos carros de passeio após o processo de engate, vamos calcular a porcentagem de energia perdida durante esse processo. Para tanto, precisamos, inicialmente, definir a energia cinética inicial (T_1) e a energia cinética final (T_2) desse processo de acoplamento:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (390 \cdot 2^2 + 260 \cdot 1,2^2 + 510 \cdot 1,6^2)$$

$$T_1 = 1620 \text{ J.}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B + m_C) v^2 = \frac{1}{2} (390 + 260 + 510) 0,238^2$$

$$T_2 = 32,8 \text{ J.}$$

Com os valores das energias, montamos a relação para porcentagem de energia perdida n devido ao processo de acoplamento:

$$n = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% = \frac{1620 - 32,8}{1620} \cdot 100\%$$
$$n = 98\%.$$

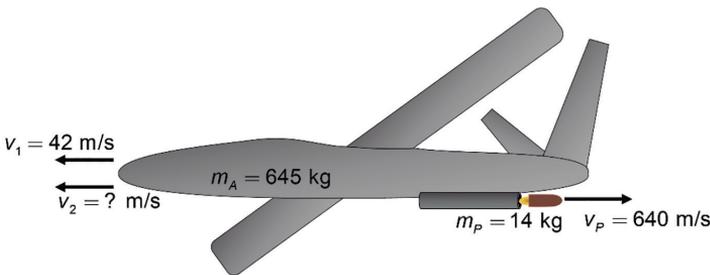
Com a velocidade do conjunto acoplado dos três carros de passeio e a porcentagem de energia perdida por esse processo de acoplamento, só falta montar o memorial de cálculo, a fim de ser entregue ao parque de diversões para concluir toda a tarefa.

Faça valer a pena

1. Uma aeronave não tripulada carrega um sistema de lançamento de projétil, como exemplificado na Figura 4.14.

A aeronave com massa $m_A = 645 \text{ kg}$ está inicialmente voando em trajetória horizontal, com velocidade de cruzeiro $v_1 = 42 \text{ m/s}$, e dispara um projétil de massa $m_p = 14 \text{ kg}$, com velocidade inicial $v_p = 640 \text{ m/s}$ em relação à aeronave.

Figura 4.14 | Representação da aeronave não tripulada no momento de disparo do projétil



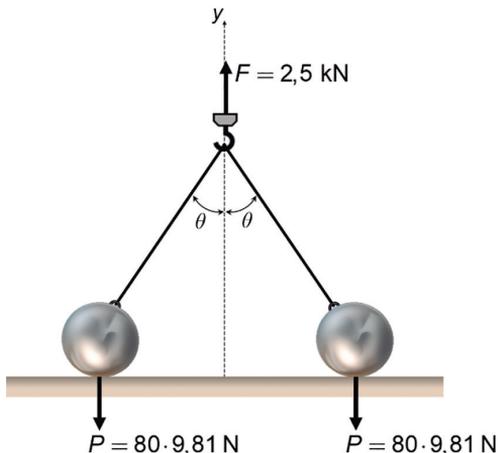
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta com o valor da velocidade v_2 da aeronave após o lançamento do projétil:

- a) 255 km/h.
- b) 182,5 m/s.
- c) 920,4 m/s.
- d) 55,6 m/s.
- e) 74,9 m/s.

2. O içamento de duas esferas é realizado por uma cinta presa às esferas, como representado na Figura 4.15. Uma força de $2,5 \text{ kN}$ é aplicada para içar as esferas que possuem massa de 80 kg cada uma.

Figura 4.15 | Representação do processo de içamento de duas esferas presas a uma cinta



Fonte: elaborada pelo autor.

Levando em conta a situação apresentada, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas:

- I. Ao analisar o processo de içamento das esferas, pode-se determinar a componente da aceleração de cada esfera no sentido do eixo y (componente vertical da aceleração), considerando o sistema como um todo, através do seu centro de gravidade.

PORQUE

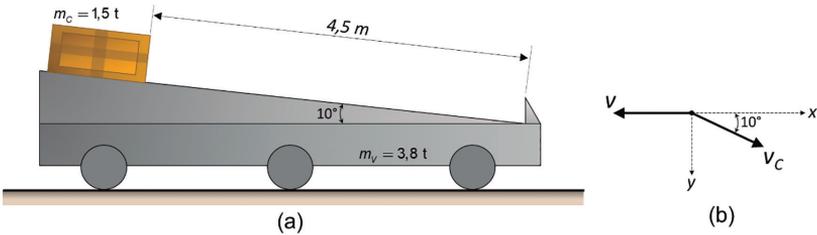
- II. No sistema de içamento das esferas, que pode ser visto como um sistema de partículas, a posição horizontal do centro de gravidade altera-se com o deslocamento no sentido da força F , uma vez que as esferas se movimentam de forma simétrica em relação ao eixo y ao serem içadas.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras e a II é uma justificativa da I.
b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
c) A asserção I é uma proposição verdadeira e a II é uma proposição falsa.
d) A asserção I é uma proposição falsa e a II é uma proposição verdadeira.
e) As asserções I e II são proposições falsas.

3. Um sistema de transporte de carga é realizado liberando a carga do repouso sobre um veículo de transporte, como exemplificado na Figura 4.16. O veículo de transporte em repouso fica sobre trilhos e apresenta massa $m_v = 3,8 \text{ t}$, já a carga que ele transporta tem massa de $m_c = 1,5 \text{ t}$, que é solta do repouso no início da rampa do veículo de transporte, de modo que, ao percorrer os $4,5 \text{ m}$, gera movimento no veículo de transporte.

Figura 4.16 | (a) Veículo de transporte com a carga posicionada no início da rampa e (b) vetores representativos da velocidade v do conjunto carga e veículo e o vetor v_c da velocidade da carga



Fonte: elaborada pelo autor.

Supondo que não haja atrito em nenhuma parte do sistema apresentado na Figura 4.16, assinale a alternativa com o valor correto para a velocidade do veículo com a carga, logo antes de a carga atingir o anteparo no final da rampa, tratando a carga e o veículo como um sistema de partículas:

- a) $v = 2,25 \text{ m/s}$.
- b) $v = 1,88 \text{ m/s}$.
- c) $v = 0,55 \text{ m/s}$.
- d) $v = 1,28 \text{ m/s}$.
- e) $v = 5,2 \text{ m/s}$.

Seção 4.3

Sistemas variáveis de partículas

Diálogo aberto

Nas duas últimas seções desta quarta unidade, vimos a aplicação das Leis de Newton para sistema de várias partículas, posteriormente analisamos situações que envolveram o impulso e a quantidade de movimento em sistema de partículas. Nesta terceira seção, vamos aplicar esses conceitos em casos em que o sistema está ganhando ou perdendo partículas. Será uma abordagem introdutória com foco nos conceitos de Mecânica Geral.

Os sistemas variáveis de partículas que vamos estudar ao longo desta seção representam, de forma prática, sistemas que estão perdendo ou ganhando massa, ou ainda sistemas em que ocorrem o ganho e a perda de massa simultaneamente. Portanto, vamos representar aqui situações como o funcionamento de uma turbina a jato em que ocorrem a sua alimentação com combustível e, posteriormente, a queima de combustível, ou seja, um sistema com fluxo de massa, assim como ocorre em turbinas hidráulicas, em motores de combustão de ciclo Otto e Diesel etc.

Vamos ver também situações com ganho de partículas (ganho de massa) ou somente a perda de partículas, como ocorre em propulsores de foguetes, no jato de água de um caminhão-pipa, um caminhão descarregando minério, o fluxo de ar na saída de um vaso de pressão etc.

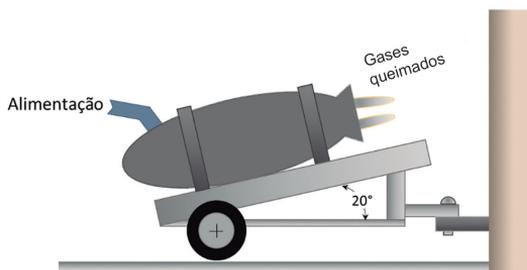
Você, caro estudante, no papel de especialista contratado pela empresa bélica, agora está encarregado de determinar o esforço na nova unidade de teste do propulsor da aeronave não tripulada. O propulsor da aeronave é disposto na bancada de teste sobre um suporte com inclinação de 20° em relação à horizontal como indicado na Figura 4.17.

Em uma extremidade do propulsor, está ocorrendo a sua alimentação na taxa de $0,8 \text{ kg/s}$ de combustível e na outra extremidade, estão sendo expelidos os gases queimados a uma

velocidade de 50 m/s, então você deve determinar a força horizontal exercida no apoio da bancada que fica preso na lateral direita para que esta não se movimente e o apoio mantenha-se alinhado.

O cálculo dessa força deve ser realizado para posterior análise com as propriedades do material do qual é feito a fim de garantir que essa força não gerará dano à estrutura.

Figura 4.17 | Disposição do propulsor na bancada de teste



Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação, podem surgir alguns questionamentos, como: o que deve ser levado em conta quando está ocorrendo o fluxo de partículas? A queima gera alguma condição específica nas partículas? As relações que vimos até agora nas seções passadas devem sofrer alguma alteração para serem utilizadas em casos com fluxo de partículas?

Vamos, então, iniciar os estudos para compreender como analisar sistemas de partículas e, em seguida, resolver a tarefa. Esta é a última atividade da Unidade 4; seja persistente e mantenha o foco para finalizar o relatório para a empresa.

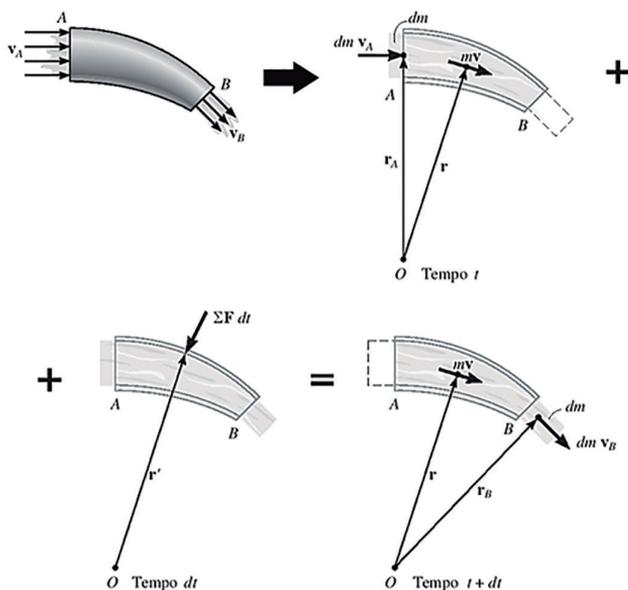
Não pode faltar

Vamos, agora, partir para o estudo de sistemas de partículas que apresentem o ganho ou a perda de partículas, ou seja, vamos estudar sistemas variáveis de partículas. Um exemplo prático desses sistemas é a propulsão de um foguete que está constantemente ejetando partículas de combustível. Podemos analisar, também, situações com ganho de partículas, como o abastecimento de um caminhão com soja ou, ainda, situações em que ocorram o ganho e a perda de partículas ao mesmo tempo, como o fluxo de água que escoo por uma tubulação.

Vamos iniciar nossos estudos em sistemas com fluxo permanente de partículas. Vamos, então, analisar situações nas quais um determinado montante de massa de partículas de um fluido que escoo para dentro de um volume de controle seja igual ao que escoo para fora, apresentando, então, fluxo permanente.

Definimos como volume de controle uma região na qual um fluido possa entrar e sair e que represente o meio pelo qual está escoando, como uma tubulação, uma turbina, uma bomba de água etc. Na Figura 4.18, temos a representação da massa de partículas de um fluido escoando por uma tubulação, na qual o volume de controle é representado pela carcaça do tubo.

Figura 4.18 | Representação do escoamento com fluxo permanente de um fluido no interior de um tubo



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 220).

Ao analisar a Figura 4.18, temos que uma massa dm com velocidade \vec{v}_A entra no tubo no tempo definido t e como ocorre o escoamento com fluxo permanente de fluido, no tempo $t + dt$ deve sair a mesma massa que entrou, dm , com velocidade \vec{v}_B , de modo que a quantidade de movimento de fluido que entra na tubulação deve ser $dm\vec{v}_A$, enquanto a quantidade de movimento que sai deve ser $dm\vec{v}_B$.

Analisando o que ocorre no tubo, a força de reação que o tubo exerce devido ao fluxo escoando em seu interior gera um impulso $\sum \vec{F} dt$, e ao aplicarmos a relação que vimos na seção passada do impulso e o momento linear, montamos:

$$dm\vec{v}_A + \sum \vec{F} dt = dm\vec{v}_B \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Por meio do princípio do impulso e momento angular em relação ao ponto de origem O da Figura 4.18, montamos:

$$\vec{r}_A \times dm\vec{v}_A + \vec{r}' \times \sum \vec{F} dt = \vec{r}_B \times dm\vec{v}_B \Rightarrow \sum \vec{M}_O = \frac{dm}{dt}(\vec{r}_B \times \vec{v}_B - \vec{r}_A \times \vec{v}_A),$$

em que \vec{r}_A , \vec{r}_B e \vec{r}' são vetores posições em relação ao ponto O , como indicado na Figura 4.18.

Para as duas equações acima, definimos que o termo dm/dt indica o fluxo constante de massa do fluido que escoo pelo tubo, ou seja, representa a taxa de variação de massa com o tempo.



Pesquise mais

Itens com descrições de aplicações práticas das análises de sistemas variáveis de partículas com fluxo permanente são apresentados nos tópicos Fluxo de fluido desviado por uma pá, Fluido que escoo por meio de um tubo, Motor a jato, Ventilador, Helicóptero, que iniciam na página 890 e finalizam na página 892 do livro *Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica* (BEER et al., 2012).

Se considerarmos que o tubo possui área da seção transversal de entrada definida como A_A e densidade do fluido de ρ_A , do mesmo modo que na saída, a área da seção transversal do tubo equivale a A_B e a densidade do fluido de ρ_B , como o fluido é incompressível, dm se torna $dm = \rho_A dV_A = \rho_A (ds_A A_A) = \rho_B dV_B$, em que V equivale ao volume, s , à distância e A , à área da seção do tubo. Ao utilizarmos a relação da velocidade $\mathbf{v} = ds/dt$, esta nos leva a concluir que para o tempo dt , temos que:

$$\frac{dm}{dt} = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B$$

Essa equação representa a Lei da Conservação de Massa e é analisada mais profundamente na área relacionada à mecânica dos fluidos.



Considerando que $dm/dt = \rho vA$ e que a velocidade multiplicada pela área (vA) equivale à vazão, montamos a nova relação:

$$\frac{dm}{dt} = \rho_A Q_A = \rho_B Q_B$$

Assim, podemos redefinir as equações para as relações do impulso com o momento linear e o momento angular:

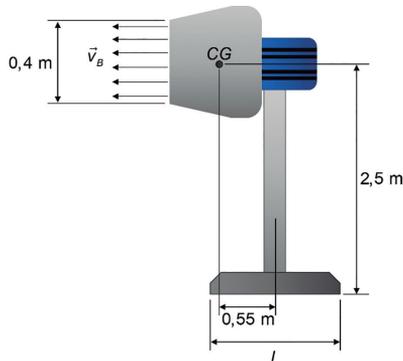
$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} dt &= \rho_B Q_B \vec{v}_B - \rho_A Q_A \vec{v}_A \\ \Sigma \vec{M}_O &= \rho_B Q_B (\vec{r}_B \times \vec{v}_B) - \rho_A Q_A (\vec{r}_A \times \vec{v}_A)\end{aligned}$$



Está sendo finalizado o projeto de um novo modelo de climatizador industrial e você foi encarregado de determinar o valor do menor diâmetro de sua base, que está especificada como L na Figura 4.19 esquemática desse climatizador. Os dados já estabelecidos para esse climatizador são:

- Massa total de 26 kg com o centro de gravidade no ponto CG indicado na Figura 4.19;
- Vazão de ar de $3 \text{ m}^3/\text{s}$;
- Peso específico do ar $\gamma_{ar} = 11,8 \text{ N/m}^3$.

Figura 4.19 | Climatizador industrial em desenvolvimento



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinarmos o menor diâmetro L da base do climatizador industrial, devemos montar a relação do princípio do impulso e momento angular em relação ao ponto de origem O , que deve ser em uma extremidade da base:

$$\sum \vec{M}_O = \frac{dm}{dt} (\vec{r}_B \times \vec{v}_B - \vec{r}_A \times \vec{v}_A)$$

Para utilizarmos a equação do momento angular, precisamos, antes, definir algumas variáveis.

Para determinarmos o valor da velocidade do ar no ponto B , utilizamos a relação:

$$v_B = \frac{Q}{A} = \frac{3}{\frac{\pi(0,4^2)}{4}} = 23,87 \text{ m/s}$$

Sabendo que o termo dm/dt indica o fluxo constante de massa do fluido que escoo pelo climatizador, montamos a relação:

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot v \cdot A = \rho_B Q_B$$

e a densidade (ou massa específica) é definida por:

$$\gamma = \rho \cdot g \Rightarrow \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{11,8}{9,81} = 1,203 \text{ kg/m}^3$$

Determinamos, então, o fluxo constante de massa do fluido que escoo pelo climatizador:

$$\frac{dm}{dt} = \rho_B Q_B = 1,203 \cdot 3 = 3,61 \text{ kg/s}$$

Agora, conseguimos aplicar a equação que montamos para o momento angular seguindo o diagrama do climatizador apresentado na Figura 4.20 e considerando $\vec{v}_A = \mathbf{0}$, pois antes de o ar sair do climatizador, estava em repouso:

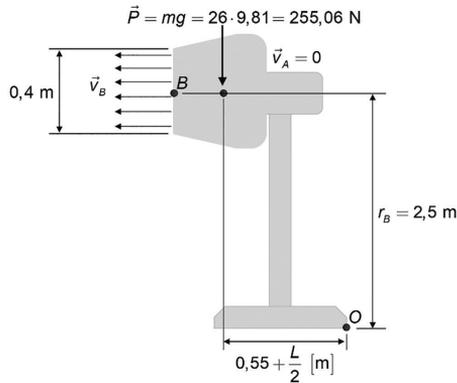
$$\sum \vec{M}_O = \frac{dm}{dt} (\vec{r}_B \times \vec{v}_B - \vec{r}_A \times \vec{v}_A)$$

$$P \left(0,55 + \frac{L}{2} \right) = 3,61 (2,5 \cdot 23,87 \cdot \text{sen}90^\circ - 0)$$

$$26 \cdot 9,81 \left(0,55 + \frac{L}{2} \right) = 3,61 (2,5 \cdot 23,87 \cdot 1 - 0)$$

$$L = 0,59 \text{ m}$$

Figura 4.20 | Diagrama do climatizador industrial em desenvolvimento para auxílio na montagem da equação do momento angular



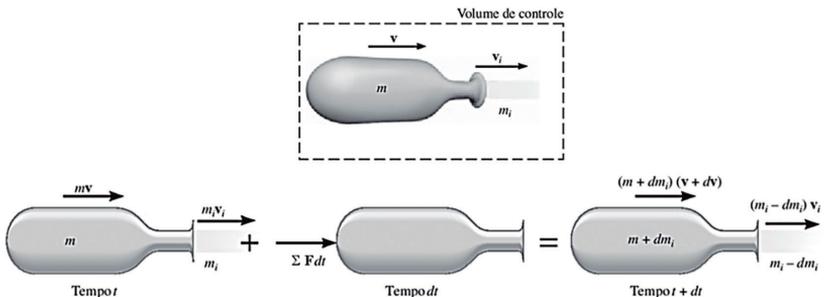
Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, a base do climatizador industrial deve ter ao menos 0,59 m de diâmetro para que o climatizador não tombe quando estiver em operação.

Vamos, agora, estudar sistemas que apresentam variação na massa de partículas, sistemas que podem estar ganhando ou perdendo massa pela variação de partículas.

Inicialmente, analisaremos um sistema variável de partículas que ganha massa devido à absorção contínua de partículas representado pela Figura 4.21.

Figura 4.21 | Indicação de um sistema variável de partículas que ganha massa



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 226).

Ao analisar o dispositivo que ganha massa na Figura 4.21, que pode ser, por exemplo, uma caixa que está enchendo de água, este apresenta inicialmente velocidade v , que o faz deslocar para a frente e com massa m e, devido ao movimento pela velocidade v , o dispositivo está recebendo partículas de massa m_i que apresentam velocidade v_i , que deve ser menor que a velocidade v do sistema ($v > v_i$) para que realmente ocorra ganho de massa.

Vale destacar também que o volume de controle para casos em que ocorre o ganho de massa deve ser considerado englobando o sistema de partículas e a massa que está recebendo (como indicado na imagem à esquerda da Figura 4.21).

Durante todo o processo de ganho de massa, temos que o impulso $\sum \vec{F} dt$ gerado pelas forças externas no sentido do movimento do sistema variável de partículas é responsável por aumentar a velocidade do sistema por dv mediante o incremento de massa dm_i para um específico intervalo de tempo dt .

Ao aplicar o princípio do impulso e o momento para o sistema representado na Figura 4.21:

$$\left(\begin{matrix} + \\ \rightarrow \end{matrix} \right) \quad (m\vec{v} + m_i\vec{v}_i) + \sum \vec{F} dt = (m + dm_i)(\vec{v} + d\vec{v}) + (m_i + dm_i)\vec{v}_i$$

Essa equação é simplificada por:

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{v}_i) \frac{dm_i}{dt}$$

Se considerarmos a velocidade relativa v_{ui} , que representa a velocidade com que as partículas são absorvidas pelo sistema, definimos que $\vec{v}_{ui} = \vec{v}_i - \vec{v}$ e fica no sentido contrário do vetor v , pois $\vec{v}_i < \vec{v}$. Montamos uma nova equação em relação à velocidade relativa \vec{v}_{ui} :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm_i}{dt} \vec{v}_{ui}$$

Como dv/dt equivale à aceleração a [m/s^2], conseguimos montar uma nova relação:

$$\sum \vec{F} + \frac{dm_i}{dt} \vec{v}_{ui} = m\vec{a}$$

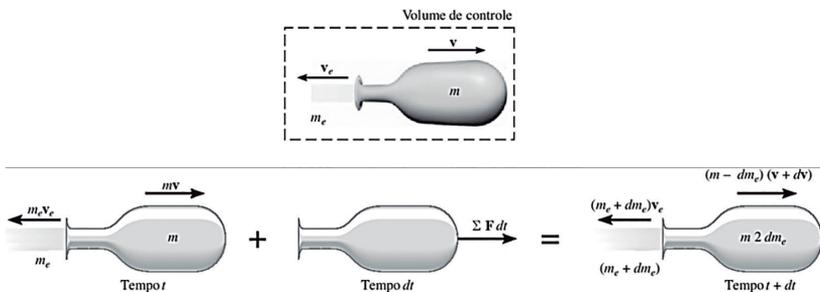
O termo $\frac{dm_i}{dt} \vec{v}_{ui}$ representa uma força que a massa injetada exerce sobre o dispositivo que ganha massa e é a representação da força de empuxo P , que acaba diminuindo o movimento do sistema, já que a velocidade \vec{v}_{ui} é contrária ao sentido do movimento. Essa força de empuxo é representada por:

$$\vec{P} = \frac{dm_i}{dt} \vec{v}_{ui}$$

Como já analisamos um sistema variável de partículas que ganha massa, vamos agora analisar um sistema que perde massa.

A Figura 4.22 representa um sistema que perde massa de tal modo que nesse caso a taxa de variação de massa (dm/dt) será negativa e o empuxo também será contrário ao que vimos para sistemas que ganham massa.

Figura 4.22 | Indicação de um sistema variável de partículas que perde massa



Fonte: adaptada de Hibbeler (2011, p. 224).

No sistema de partículas com perda de massa, temos que para um instante de tempo inicial, o sistema de massa m se desloca com velocidade \vec{v} para frente, enquanto uma determinada massa m_e é ejetada com velocidade \vec{v}_e .

Ao analisar os diagramas representativos de um sistema variável de partículas que expela massa da Figura 4.22, no qual para um valor de tempo dt a velocidade do sistema passa para $\vec{v} + d\vec{v}$, verificamos aumento em relação à velocidade inicial \vec{v} devido à massa ejetada.

Ao aplicar o princípio do impulso e o momento para esse sistema que perde massa, montamos a relação:

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \rightarrow \end{array} \right) \quad (m\vec{v} - m_e\vec{v}_e) + \sum \vec{F}dt = (m - dm_e)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m_e + dm_e)\vec{v}_e$$

$$\sum \vec{F}dt = md\vec{v} - \vec{v}_{ue}dm_e \Rightarrow \sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{v} + \vec{v}_e) \frac{dm_e}{dt}$$

A velocidade relativa \vec{v}_{ue} para essa situação com perda de massa passa a representar a velocidade com que as partículas são ejetadas pelo sistema e a definimos como $\vec{v}_{ue} = \vec{v}_e + \vec{v}$. Assim:

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{ue} \frac{dm_e}{dt}$$

com dm_e/dt indicando a taxa de ejeção de massa do sistema.



Refleta

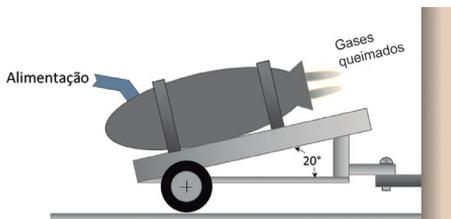
Para sistemas variáveis de partículas que ganham massa, a equação do impulso pode ser representada por $\sum \vec{F}dt = m \cdot d\vec{v} - dm_i \cdot \vec{v}_{ui}$, com $\vec{v}_{ui} = \vec{v}_i - \vec{v}$, porém, para sistemas variáveis de partículas que expelem massa, a equação do impulso é representada por $\sum \vec{F}dt = m \cdot d\vec{v} - \vec{v}_{ue} \cdot dm_e$ onde $\vec{v}_{ue} = \vec{v}_e + \vec{v}$.

Analisando as duas equações, qual o motivo de o impulso ($\sum \vec{F}dt$) ser igual a uma subtração em ambas, mesmo sendo de ganho um dos casos de massa e o outro de perda de massa?

Sem medo de errar

Como um dos responsáveis pelas análises das aeronaves de uma indústria bélica, você está analisando o propulsor de uma aeronave disposto na bancada de teste sobre um suporte com inclinação de 20° , como indicado na Figura 4.23.

Figura 4.23 | Disposição do propulsor na bancada de teste



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a alimentação de combustível do propulsor ocorre com taxa de 0,8 kg/s e os gases queimados são expelidos a uma velocidade de 50 m/s, você deve determinar a força horizontal exercida no apoio da bancada, que fica preso na lateral direita para que esta não se movimente a fim de garantir que essa força não gerará dano à estrutura.

Para desenvolvermos a solução dessa tarefa, primeiro precisamos determinar se o sistema variável de partículas é de fluxo constante ou se está tendo alguma variação de massa.

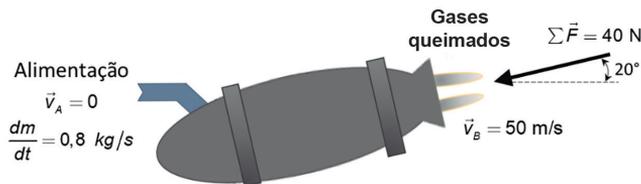
Como o propulsor está sendo abastecido com combustível e este está sendo queimado, temos um caso de sistema variável de partículas em que ocorre o fluxo permanente de partículas, pois partículas estão entrando como combustível e saindo como gases queimados.

Por meio da equação do impulso e do momento linear para fluxo permanente de partículas, montamos:

$$dm\vec{v}_A + \sum \vec{F}dt = dm\vec{v}_B \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Para auxiliar na montagem da equação acima com os dados da situação que estamos analisando, é interessante montarmos um diagrama de corpo livre como o da Figura 4.23, indicando as velocidades e as forças presentes.

Figura 4.23 | Diagrama para o propulsor desconsiderando a bancada de teste



Fonte: elaborada pelo autor.

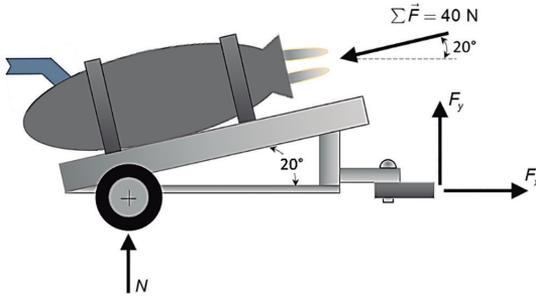
Analisando o diagrama na Figura 4.23, montamos a equação para a força que é proveniente do impulso como:

$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \Rightarrow \sum F = 0,8(50)$$

$$\sum F = 40 \text{ N}$$

Com o valor da força que acabamos de definir, montamos um novo diagrama com a representação das forças atuando na estrutura que apoia o propulsor, como indicado na Figura 4.24, para, então, conseguirmos definir o valor da força horizontal que atua no apoio da bancada.

Figura 4.24 | Diagrama para o propulsor na bancada de teste



Fonte: elaborada pelo autor.

Montando, então, o somatório das forças para o eixo x (eixo horizontal) e igualando-o a zero, uma vez que a bancada não deve ter movimento, definimos que:

$$\left(\begin{matrix} + \\ \rightarrow \end{matrix} \right) \Sigma F_x = 0$$

$$F_x - 40 \cos 20^\circ = 0$$

$$F_x = 37,59 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_x = 37,59 \text{ N} \rightarrow$$

Com o resultado da força F_x , finalizamos essa tarefa, mas como é a última das três tarefas que a empresa bélica lhe passou agora você deve montar um relatório contendo todos os resultados e os memoriais de cálculo para enviar à empresa e, assim, encerrar os trabalhos.

Avançando na prática

Velocidade máxima de uma plataforma movida por um motor a jato para lançamento de um avião planador

Descrição da situação-problema

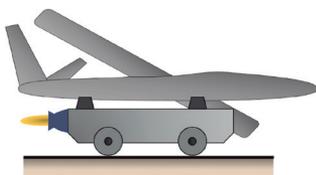
Como calculista da empresa de transportes de alta tecnologia, o seu supervisor indicou a você a tarefa de analisar a velocidade

de uma plataforma sobre trilhos, que será movida por meio de um motor a jato que deve atingir a velocidade mínima de 45 m/s, para lançar um avião planador como representado na Figura 4.25.

A fim de economizar com o projeto da plataforma, seu supervisor advertiu que a empresa já possui um motor a jato montado em um tanque de combustível e você deve verificar se esse conjunto tem condições de fazer com que a plataforma alcance a velocidade mínima de lançamento do planador e, assim, não seja necessário montar um novo conjunto de motor a jato e reservatório de combustível.

Sabe-se que a plataforma com o planador e o conjunto do motor a jato terá massa de 2 mg, que comporta até 100 kg de combustível, a exaustão na turbina ocorrerá a velocidade relativa em relação à plataforma de 920 m/s, a queima de combustível ocorrerá a taxa constante de 45 kg/s e a resistência do ar e do rolamento é $F_r = (12v^2)$ [N], com v sendo a velocidade do vagão em m/s.

Figura 4.25 | Representação do movimento do vagão com o motor a jato



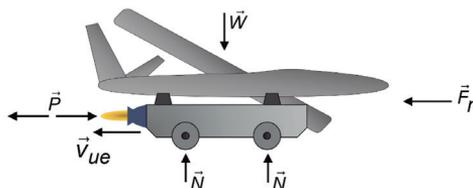
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, determinamos a massa da plataforma para qualquer instante, que fica $m = 2 \cdot 10^3 + 100 - 45t = 2100 - 45t$ (massa em kg).

Devido à alteração na massa, temos um sistema variável de partículas que perde massa, no qual representamos o diagrama de corpo livre na Figura 4.26.

Figura 4.26 | Diagrama de corpo livre para o conjunto da plataforma com o motor a jato e o avião planador



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando a Figura 4.26, vale destacar o significado dos vetores opostos indicados por \vec{P} . Como estamos analisando um motor a reação (neste caso, um motor a jato), devemos recordar que esse tipo de motor opera seguindo a Terceira Lei de Newton da ação e reação, em que os gases sendo expelidos em um sentido (no caso da Figura 4.26, são expelidos para trás da plataforma) representam a ação, o que provoca a reação, ou seja, o deslocamento do motor para frente, ou seja, no sentido contrário à expulsão dos gases. Por isso, temos dois vetores representados como \vec{P} e que se anulam.

Ao montar a relação proveniente do princípio de impulso para o eixo horizontal, temos:

$$\left(\begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right) \quad \Sigma F_{cv} = m \frac{dv}{dt} - v_{ue} \frac{dm_e}{dt} \Rightarrow -12v^2 = (2100 - 45t) \frac{dv}{dt} - 920 \cdot 45$$

$$\frac{dt}{2100 - 45t} = \frac{dv}{41400 - 12v^2}$$

O tempo para ocorrer toda a queima do combustível é

$$t = \frac{m_e}{\left(\frac{dm_e}{dt} \right)} = \frac{100}{45} = 2,22 \text{ s.}$$

Agora, integrando a equação $\frac{dt}{2100 - 45t} = \frac{dv}{41400 - 12v^2}$ para a velocidade máxima:

$$\int_0^{2,22 \text{ s}} \frac{dt}{2100 - 45t} = \int_0^{v_m} \frac{dv}{41400 - 12v^2}$$

$$-\frac{1}{45} \ln(2100 - 45t) \Big|_0^{2,22 \text{ s}} = \frac{1}{2\sqrt{41400 \cdot 12}} \ln \frac{\sqrt{41400} + \sqrt{12}v}{\sqrt{41400} - \sqrt{12}v} \Big|_0^{v_m}$$

$$1,527 = \ln \frac{\sqrt{41400} + \sqrt{12}v_m}{\sqrt{41400} - \sqrt{12}v_m} \Rightarrow e^{1,527} = \frac{\sqrt{41400} + \sqrt{12}v_m}{\sqrt{41400} - \sqrt{12}v_m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_m = 37,78 \text{ m/s}$$

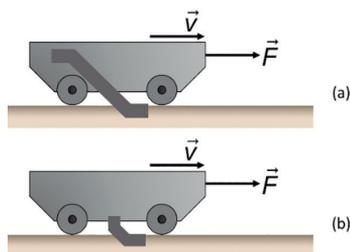
Portanto, a plataforma apresentará velocidade máxima de 37,78 m/s quando todo o combustível do motor a jato for queimado,

valor esse que fica abaixo do necessário para lançar o avião planador, que é de 45 m/s e, portanto, o sistema já configurado e montado do motor a jato que a empresa possui não será suficiente para atender às necessidades do projeto da plataforma.

Faça valer a pena

1. Dois veículos para coleta de areia estão sendo analisados para determinar qual apresentará a menor força \vec{F} para movimentar cada veículo, uma vez que cada veículo apresenta um formato diferente para o tubo coletor de areia como indicado na Figura 4.27.

Figura 4.27 | Representação dos dois modelos de veículos para coleta de areia



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando o contexto apresentado, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

I. Os dois veículos com o sistema de captação de areia representam um sistema variável de partículas que ganham massa, e utilizando o princípio de impulso e o momento linear, a força \vec{F} será a mesma para ambos, se a velocidade \vec{v} não sofrer alteração.

PORQUE

II. Para sistemas de partículas que ganham massa, a equação representativa da força \vec{F} é $\Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{v}_i) \frac{dm_i}{dt}$, que independe do formato do sistema de coleta de massa.

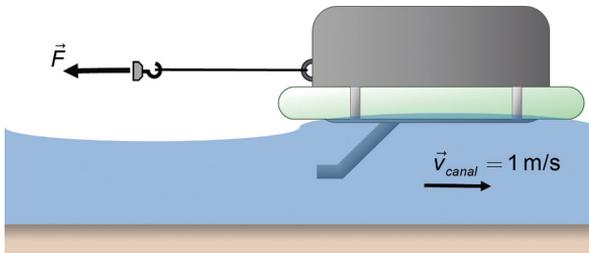
A respeito dessas asserções, assinale a opção correta:

- As asserções I e II são proposições verdadeiras e a II é uma justificativa da I.
- As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- A asserção I é uma proposição verdadeira e a II é uma proposição falsa.
- A asserção I é uma proposição falsa e a II é uma proposição verdadeira.
- As asserções I e II são proposições falsas.

2. Para fazer a captação de água, um trator movimentava-se sobre um estreito canal de água e puxa um tanque que faz a captação da água quando está em movimento. Esse tanque é preso a flutuadores para que não afunde e, assim, não apresente grande resistência ao movimento, como indicado na Figura 4.28.

Sabe-se que o riacho tem corrente que flui no sentido oposto ao movimento do tanque com velocidade de 1 m/s. A água entra no tanque com taxa de mesmo valor que a velocidade do tanque em relação à corrente no canal. Quando vazio, o tanque tem massa de 65 kg e a área de entrada de água é de 1650 mm².

Figura 4.28 | Representação do tanque captando água do canal



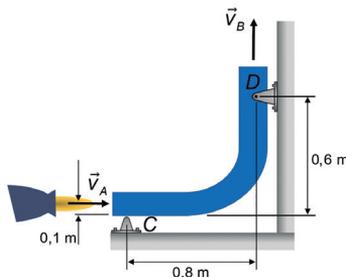
Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que em determinado instante o tanque apresente velocidade de 2,5 m/s, aceleração de 0,5 m/s², massa de água já coletada de 105 kg e que a densidade da água equivale a $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$, assinale a alternativa correta para qual deve ser o valor da força \vec{F} indicada na Figura 4.28:

- a) $\vec{F} = 72,35 \text{ N}$ ←.
- b) $\vec{F} = 105,21 \text{ N}$ ←.
- c) $\vec{F} = 1,5 \text{ kN}$ ←.
- d) $\vec{F} = 2,2 \text{ kN}$ ←.
- e) $\vec{F} = 162 \text{ N}$ ←.

3. Um sistema para direcionar os gases gerados na queima de combustível por uma turbina em teste é montado como indicado na Figura 4.29.

Figura 4.29 | Destaque para o sistema de escape utilizado no teste de uma turbina



Fonte: elaborada pelo autor.

A tubulação utilizada para direcionar os gases queimados apresenta seção transversal ao longo de todo seu comprimento no valor de $A = 0,1 \text{ m}^2$, a vazão de gases queimados gerados pela turbina é de $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ e sua densidade equivale a $\rho = 2,3 \text{ kg/m}^3$.

Para essa análise do sistema de direcionamento dos gases queimados pela turbina, são realizadas as seguintes afirmações:

- I. A força de reação horizontal no apoio C equivale a 5,2 kN.
- II. A força de reação vertical no apoio C equivale a 13,8 N.
- III. A força de reação horizontal no apoio D equivale a 14,72 N.
- IV. A força de reação vertical no apoio D equivale a 26,5 N.

Agora, assinale a alternativa que apresenta as afirmações CORRETAS apenas:

- a) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- d) Apenas a afirmativa I está correta.
- e) Todas as afirmativas estão corretas.

Referências

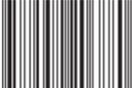
BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell; CORNWELL, Phillip J. **Mecânica vetorial para engenheiros**: dinâmica. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia**: dinâmica. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

SHAMES, I. H. **Dinâmica**: mecânica para Engenharia. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 2 v.

ISBN 978-85-522-0688-0



9 788552 206880 >