# Mecânica dos fluidos

# Mecânica dos fluidos

Luis Eduardo Zampar Filho

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**
Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**
Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**
Roberto Mac Intyer Simões
Ana Paula Mattos

**Editorial**
Camila Cardoso Rotella (Diretora)
Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Zampar Filho, Luis Eduardo
F26m Mecânica dos fluidos / Luis Eduardo Zampar Filho. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
208 p.

ISBN 978-85-522-0740-5

1. Engenharia. 2. Mecânica. I. Zampar Filho, Luis Eduardo. II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

*2018*
*Editora e Distribuidora Educacional S.A.*
*Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza*
*CEP: 86041-100 — Londrina — PR*
*e-mail: editora.educacional@kroton.com.br*
*Homepage: http://www.kroton.com.br/*

# Sumário

**Unidade 1 | Conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos** 7

Seção 1.1 - Métodos de análise e classificação dos movimentos de fluidos 9
Seção 1.2 - Leis básicas para um sistema 24
Seção 1.3 - Relação entre sistema e volume de controle 37

**Unidade 2 | Equações básicas na forma integral para um volume de controle** 51

Seção 2.1 - Conservação de massa para um volume de controle 53
Seção 2.2 - Quantidade de movimentos linear e angular para um volume de controle 67
Seção 2.3 - Primeira e segunda leis da termodinâmica para um volume de controle 84

**Unidade 3 | Análise diferencial dos movimentos dos fluidos e o escoamento incompressível de fluidos não viscosos** 101

Seção 3.1 - Análise diferencial dos movimentos dos fluidos e a conservação de massa 103
Seção 3.2 - Equação diferencial da quantidade de movimento 118
Seção 3.3 - Equações de Euler e equação de Bernoulli 134

**Unidade 4 | Escoamentos interno e externo viscosos e incompressíveis** 153

Seção 4.1 - Escoamento interno viscoso e incompressível 155
Seção 4.2 - Medidores de vazão de restrição para escoamentos internos 174
Seção 4.3 - Escoamento externo viscoso e incompressível 188

# Palavras do autor

Caro aluno!

A disciplina Mecânica dos fluidos trata de uma das principais ciências da Engenharia, uma vez que apresenta aplicações importantes em diversas áreas. Os engenheiros mecânicos utilizam princípios de mecânica dos fluidos para os projetos de bombas, compressores, turbinas, equipamentos de calefação e resfriamento. Já os engenheiros químicos e de petróleo aplicam essa ciência para projetar equipamentos usados na filtragem, no bombeamento e na mistura de fluidos. Além da área de Engenharia, os princípios da mecânica dos fluidos são usados na biomecânica e na meteorologia etc.

Neste livro didático, o nosso objetivo é que você compreenda os principais conceitos fundamentais em mecânica dos fluidos, mediante o uso das equações básicas na forma integral aplicadas em um volume de controle e da análise diferencial dos movimentos dos fluidos. Esperamos também que você saiba aplicar a conservação de massa, a equação da quantidade de movimento e a equação de Bernoulli, assimilando os conceitos de escoamento interno e externo viscoso e incompressível.

Na Unidade 1, estudaremos os principais conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos, como as equações básicas, os métodos de análise, a descrição e a classificação dos movimentos de fluido e a relação entre sistema e volume de controle. Essa unidade vai lhe dar a base necessária para aprofundar seus conhecimentos nas próximas unidades.

Na Unidade 2, enfocaremos a conservação de massa, o princípio da quantidade de movimento linear e angular e a primeira e a segunda lei da termodinâmica, a fim de aplicá-las em um volume de controle.

Na Unidade 3, realizaremos uma análise diferencial dos movimentos dos fluidos por meio da conservação de massa e da quantidade de movimento. Estudaremos também o escoamento incompressível de fluidos não viscosos, utilizando, para isso, as equações de Euler e a equação de Bernoulli.

Por fim, na Unidade 4, aprenderemos sobre o escoamento interno e externo viscoso e incompressível, introduzindo conceitos importantes, como a região de entrada e o escoamento completamente desenvolvido em tubos e dutos, os métodos de medição de vazão, a camada-limite e as forças de arrasto e sustentação.

Todos esses assuntos têm como objetivo levá-lo a se apropriar de conhecimentos que são vistos como essenciais aos estudos no campo da mecânica dos fluidos, constituindo-se, portanto, em um ponto de partida para que você busque um aprendizado mais amplo e aprofundado sobre o assunto, além de estar apto a resolver diversos problemas da realidade profissional dessa área.

Bons estudos!

# Conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos

**Convite ao estudo**

Caro aluno, nesta unidade, estudaremos os conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos. O conhecimento de princípios básicos assume um papel importantíssimo para você compreender os diversos problemas da Engenharia envolvendo fluidos. Quando trabalhamos com fluidos, não estamos interessados apenas no comportamento de uma única partícula, mas, sim, de um conjunto de partículas que os compõem. Dessa maneira, é necessário descrever esses tipos de problemas de forma correta, utilizando métodos de análise adequados para cada tipo em questão. Saber classificar os tipos de escoamento é vital para apontarmos a direção que devemos seguir para cálculos em fluidos, uma vez que cada escoamento admite determinada simplificação do problema.

Nesta unidade, você, aluno, deve compreender os conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos, a fim de aplicá-los na resolução de problemas teóricos e práticos. Para isso, você deve assimilar o que é um fluido, o que estuda a mecânica dos fluidos, além de conhecer as equações básicas, os métodos de análise, a descrição e classificação dos escoamentos e a relação entre sistema e volume de controle.

Nesta unidade, trataremos de uma empresa multinacional, no ramo da mecânica dos fluidos, que concluiu um processo de *trainee* no qual você, aluno, obteve êxito e foi selecionado para realizar um *job rotation*, nas diversas áreas da empresa. No cargo de *trainee*, você terá de solucionar alguns problemas de Engenharia, utilizando o seu raciocínio crítico.

Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

1. Descrever e classificar um escoamento de fluido através de um bocal cônico, utilizado em processos da indústria química.

2. Estimar o comprimento de pista e o tempo mínimo necessários, para que uma aeronave atinja sua velocidade de decolagem.

3. Utilizar o teorema do transporte de Reynolds, a fim de deduzir a equação de conservação de massa para um volume de controle.

Para isso, serão tratados nas seções desta unidade os métodos de análise e classificação dos movimentos de fluidos, as leis básicas aplicadas a um sistema, a relação entre as derivadas do sistema e a formulação para o volume de controle e o teorema de transporte de Reynolds.

Está preparado para esses grandes desafios? Vamos lá!

# Seção 1.1

## Métodos de análise e classificação dos movimentos de fluidos

### Diálogo aberto

Os aspectos teóricos e práticos da mecânica dos fluidos são fundamentais para a solução de diversos problemas encontrados na Engenharia, tanto nas atividades diárias, relacionadas ao escoamento de água por uma mangueira de jardim ou à chuva que escoa pelos telhados das casas, quanto no projeto de sistemas modernos de Engenharia, tais como motores de combustão interna, sistemas de propulsão a jato, bombas hidráulicas e turbinas eólicas. Por isso, é muito importante que você, futuro engenheiro, compreenda os referidos princípios, visando aprimorar esses conceitos para aplicá-los na resolução de problemas teóricos e práticos que aparecerão durante sua jornada profissional.

Lembre-se de que você foi aprovado no processo de *trainee* de uma empresa multinacional no ramo da mecânica dos fluidos, sendo selecionado para realizar um *job rotation* nas diversas áreas dessa empresa. No cargo de *trainee*, você será desafiado a solucionar alguns problemas de Engenharia, utilizando o seu raciocínio crítico.

Nesta seção, imagine-se alocado na área de escoamentos em tubulações industriais, em que seu superior solicita-lhe a resolução do seguinte dilema:

Em um processo da indústria química, o tetracloreto de carbono a $20\ °C$ escoa através de um bocal cônico de diâmetro de entrada $D_e = 50\ mm$ para um diâmetro de saída $D_s$. A área varia linearmente com a distância ao longo do bocal e a área de saída é $\frac{1}{5}$ da área de entrada. O comprimento do bocal é $250\ mm$ e a vazão é $Q = 2\ L/min$. Para o processo, é importante que o escoamento na saída seja turbulento. Isso realmente acontece? Em caso afirmativo, a partir de

que ponto, ao longo do bocal, o escoamento torna-se turbulento? Entregue a análise para o seu superior, na forma de apresentação aos gestores da área.

Para solucionar esse desafio, você deve compreender o que é e o que estuda a mecânica dos fluidos, conhecer as equações básicas em mecânica aplicáveis e os métodos de análise de movimentos de fluidos, além de saber descrever e classificar os movimentos de fluidos, com base em características em comum.

Está preparado para esse desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Escopo da mecânica dos fluidos

Caro aluno, a mecânica dos fluidos é uma ciência, ou seja, o conhecimento profundo de algo ou o estudo do mundo natural, baseado em fatos aprendidos por meio de experimentos ou observações. Dentro da Ciência, encontramos a Biologia, a Química, a Física, a História, e todas as outras áreas do conhecimento. A Matemática, nesse contexto, pode ser inserida como uma ferramenta criada pelo homem para auxiliar na compreensão de todas as demais.

A mecânica dos fluidos está inserida na Física clássica, que contempla quase todas as disciplinas estudadas no curso de Engenharia. A Física clássica é dividida em mecânica, termodinâmica e eletromagnetismo. A mecânica, por sua vez, subdivide-se em cinemática, estática e dinâmica.

Vamos, então, relembrar os conceitos dessas três últimas. A cinemática estuda o movimento, sem se preocupar com as forças atuantes ou com a massa do corpo. A estática trata das forças atuantes em corpos em repouso, ou seja, corpos em equilíbrio estático. Este acontece quando a força resultante que atua no sistema (somatório das forças aplicadas) é igual a zero. A dinâmica também aborda os corpos em movimento, mas leva em conta as suas causas, genericamente forças aplicadas em determinada massa.

Finalmente, definimos a mecânica dos fluidos como o ramo da Ciência que estuda os fluidos em repouso ou em movimento. Logo,

o estudo da mecânica dos fluidos é dividido basicamente em dois ramos: a hidrostática e a hidrodinâmica. A hidrostática (ou estática dos fluidos) versa sobre a força exercida por e sobre fluidos em repouso, já a hidrodinâmica (ou dinâmica dos fluidos) enfoca a geometria do movimento do fluido, considerando as forças que nele atuam.

**Assimile**

A mecânica dos fluidos desempenha um papel principal no projeto e análise de aeronaves, embarcações, submarinos, foguetes, motores a jato, turbinas eólicas, dispositivos biomédicos, refrigeração de componentes eletrônicos e sistemas de transporte de água, óleo e gás natural. Diversos fenômenos naturais como ciclo de chuvas, padrões de clima, ventos e ondas dos oceanos também são governados pelos princípios da mecânica dos fluidos, segundo Çengel e Cimbala (2015, p. 5).

### Equações básicas de mecânica de fluidos

Para a análise de qualquer problema da mecânica dos fluidos, é fundamental que você, aluno, conheça as leis básicas que governam seu movimento. As leis básicas aplicáveis a qualquer fluido são:

1. A conservação da massa.

2. O princípio da quantidade de movimento linear (segunda lei de Newton).

3. O princípio da quantidade de movimento angular.

4. A primeira lei da termodinâmica;

5. A segunda lei da termodinâmica.

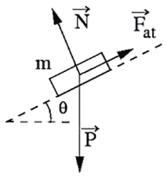
Não são necessárias todas essas leis básicas para resolver um problema qualquer, algumas vezes, apenas uma lei ou a combinação de duas leis é suficiente para solucioná-lo. Contudo, em muitos problemas, é preciso buscar relações adicionais que descrevam o comportamento dos fluidos sob determinadas condições.

Essas leis básicas são as mesmas utilizadas na mecânica e na termodinâmica. Nesse contexto, nossa tarefa será formulá-las de modo adequado, voltadas para a resolução de problemas envolvendo escoamento de fluidos e, então, aplicá-las a uma grande variedade de situações.

## Métodos de análise de movimentos de fluido

O primeiro passo na resolução de qualquer problema de Engenharia é definir o sistema que está sendo analisado. Na mecânica básica, utilizamos de forma intensa o Diagrama de Corpo Livre (DCL), que consiste na representação gráfica de todas as forças agindo sobre determinado corpo rígido. Para refrescar sua memória, um exemplo de DCL é apresentado na Figura 1.1.

**Figura 1.1** | Exemplo de um DCL




Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.1 traz um problema no qual um corpo de massa $m$ descola-se em um plano com inclinação $\theta$, em que são representadas todas as forças atuantes no corpo: a força peso, a força normal e a força de atrito, que tem sentido oposto ao deslocamento.

Na mecânica dos fluidos, não estamos interessados no comportamento de um corpo rígido, mas, sim, no escoamento do fluido através de tubulações, bombas e turbinas, asas de avião etc. É importante, então, delimitar uma região no espaço para o estudo. Isso pode ser feito por meio da definição de um sistema ou um volume de controle.

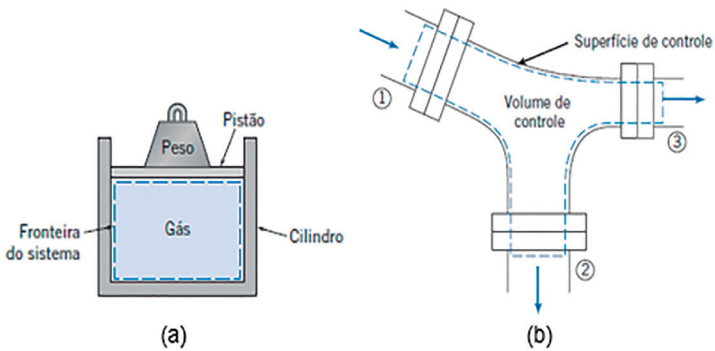
**Assimile**

Lembre-se de que fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetida à aplicação de uma força de cisalhamento, não atingindo, portanto, uma condição de equilíbrio estático.

Sistema é uma quantidade de massa fixa que escolhemos como objeto de estudo. Esta quantidade de matéria é delimitada por uma fronteira do sistema por meio da qual não há fluxo de massa; já o volume pode variar. No clássico exemplo do conjunto pistão-cilindro, ilustrado na Figura 1.2(a), o gás dentro do cilindro é o sistema. Você pode notar que o volume do gás pode variar.

Volume de controle, por sua vez, é uma quantidade de volume que escolhemos como objeto de estudo. Esta quantidade de volume é delimitada por uma superfície de controle por meio da qual há fluxo de massa, energia e demais quantidades associadas ao escoamento. A Figura 1.2(b) mostra um exemplo de volume de controle selecionado através do escoamento de um fluido por uma junção de tubos.

**Figura 1.2** | (a) O sistema pistão-cilindro e (b) Escoamento de um fluido através de uma junção de tubos




Fonte: adaptado de Fox, Pritchard e McDonald (2014, p. 8-9).

É muito importante que se tenha cuidado na escolha de um sistema ou de um volume de controle, bem como na delimitação da superfície de controle, porque esse procedimento influencia bastante a formulação matemática (diferencial ou integral) que será utilizada.

**Pesquise mais**

Procure por livros de termodinâmica para relembrar e aprimorar seus conhecimentos sobre sistema e volume de controle. Uma boa opção é:

MORAN, Michael J. et al. **Princípios de termodinâmica para Engenharia**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. cap. 1, p. 2-5.

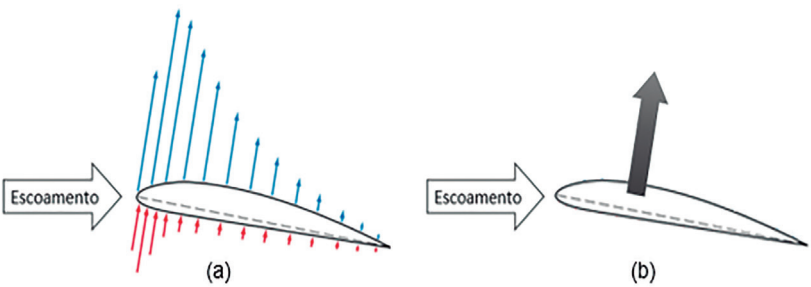
Tanto em sistemas quanto em volumes de controle, podemos aplicar as equações na forma diferencial ou na forma integral. Na formulação diferencial, trabalhamos com sistemas ou volumes de controle infinitesimais; já na formulação integral, os sistemas e volumes de controle são finitos. Em ambas as situações, a formulação matemática será diferente, daí a importância de saber escolher qual utilizaremos para cada tipo de problema.

Na formulação diferencial, utilizamos as equações diferenciais, cuja solução nos fornece um comportamento detalhado do escoamento. Um bom exemplo para entender essa definição é a distribuição de pressão sobre a superfície de uma asa, mostrada na Figura 1.3(a).

A formulação diferencial é utilizada quando desejamos conhecer ponto a ponto de determinado escoamento. No exemplo anterior, sabemos a pressão aplicada em cada ponto desse perfil de asa. Em muitos casos, não queremos obter o comportamento detalhado do escoamento, mas, sim, o do todo, no qual utilizamos a formulação integral.

Na formulação integral, empregamos equações na forma de integrais, cuja solução nos fornece um comportamento global do escoamento. Continuando com o mesmo exemplo do escoamento ao redor de um perfil de asa, mas, agora, com a formulação integral, obtemos a força resultante aerodinâmica, representada pela Figura 1.3(b).

**Figura 1.3** | (a) Distribuição de pressão em um perfil de asa e (b) Resultante aerodinâmica em um perfil de asa




Fonte: elaborada pelo autor.

**Reflita**

O cálculo diferencial e integral, também conhecido como cálculo infinitesimal, ou apenas cálculo, surgiu graças à Geometria e à Álgebra. Por meio dele, podemos estudar taxas de variações de uma grandeza ou acumulação de uma quantidade, por exemplo. Você é capaz de relembrar quais são as principais regras e propriedades de derivadas e integrais?

O estudo do escoamento dos fluidos é, em geral, realizado por um dos seguintes métodos clássicos de descrição: o método de Lagrange ou o método de Euler. O método de Lagrange, também chamado de lagrangiano, descreve o movimento de cada partícula, acompanhando-a em sua trajetória real. As características do escoamento são descritas pela especificação dos parâmetros necessários em função do tempo. Esse método apresenta grande dificuldade nas aplicações práticas da mecânica dos fluidos, uma vez que é impraticável acompanhar todas as partículas de um fluido durante um intervalo de tempo suficientemente grande.

O método de Euler ou euleriano consiste em adotar um intervalo de tempo, escolher uma seção ou volume de controle no espaço e considerar todas as partículas que passam por este local. As características do escoamento são descritas pela especificação dos parâmetros necessários em função das coordenadas espaciais, além do tempo. Esse método é preferencial para estudar o movimento dos fluidos, porque coleta informações sobre o escoamento por meio de pontos fixos em instantes diferentes, sem se preocupar com o movimento realizado por partícula.

**Exemplificando**

Imagine que você queira medir a temperatura dos gases de exaustão de uma chaminé industrial. Utilizando o método de Lagrange, um termômetro teria que ser instalado em cada uma das partículas que saem pela chaminé, e o valor de sua temperatura registrado ao longo de seu movimento seria algo impensável de se obter.

Ainda pensando no exemplo da chaminé, porém, desta vez, utilizando o método de Euler, agora um termômetro seria instalado perto da abertura e indicaria a temperatura de diversas partículas em instantes diferentes. Assim, seria obtida a variação da temperatura nesse ponto, em função de suas coordenadas espaciais e do tempo. Vários termômetros instalados em pontos fixos do escoamento forneceriam seu campo de temperatura.

## Descrição e classificação dos movimentos de fluido

Você já sabe que a mecânica dos fluidos é a ciência que estuda o comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento. Existe uma grande variedade de tipos de problemas sobre o escoamento de fluidos que abrangem do escoamento do ar ao redor de uma

bola de futebol até o escoamento da água, através das turbinas de uma grande hidroelétrica, por exemplo. Cada tipo de problema exige uma visão adequada; dessa maneira, é conveniente dividir os escoamentos em grupos, com base em características em comum.

- **Escoamento uni, bi e tridimensional**

Imagine uma partícula de fluido movendo-se com velocidade $\vec{V}$ em um escoamento qualquer. Em um dado instante, a velocidade dessa partícula será uma função das coordenadas espaciais e do tempo. Selecionando um volume de controle para o estudo e utilizando o método de descrição Euleriano, obtemos o campo de velocidade do escoamento $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$.

Um escoamento é uni, bi ou tridimensional em função do número de coordenadas espaciais necessárias para especificar o campo de velocidade. Se o campo de velocidade depender apenas de uma coordenada espacial para ser especificado, o escoamento será unidimensional. Se o campo de velocidade depender de duas coordenadas espaciais, o escoamento consistirá em bidimensional. Por fim, se o escoamento for especificado utilizando-se as três coordenadas espaciais, esse escoamento será tridimensional.

- **Escoamento estacionário e não estacionário**

Os termos estacionário e não estacionário são bastante utilizados na mecânica dos fluidos, sendo muito importante compreender seus significados. Essa classificação ocorre em função da dependência ou não do tempo na variação pontual das suas propriedades (massa específica, velocidade, temperatura etc.). No escoamento estacionário, não há mudança das propriedades, ao longo do tempo; dizemos que o escoamento está em regime permanente. Se houver alguma mudança no decorrer do tempo, esse escoamento será não estacionário.

É muito importante salientar que, em regime permanente, qualquer propriedade pode variar de ponto para ponto, porém, todas as propriedades permanecem constantes com o tempo em cada ponto. Em outras palavras, as propriedades podem variar com as coordenadas espaciais, mas devem permanecer constantes com o tempo.

- **Escoamento interno e externo**

O escoamento é classificado como interno quando ocorre em um espaço confinado, isto é, quando o fluido está inteiramente limitado por superfícies sólidas. É o caso do escoamento em tubulações ou dutos ou através de bombas ou turbinas.

O escoamento externo é um escoamento não confinado de um fluido sobre uma superfície. Corpos imersos em um fluido estão sujeitos a esse tipo de escoamento. O escoamento do ar sobre seu carro durante uma viagem enquadra-se nessa classificação.

- **Escoamento viscoso e não viscoso**

Conforme você já aprendeu, a viscosidade é uma medida da resistência do fluido em se movimentar, relacionando-se com as forças de atrito no seu interior, as quais impedem diferentes porções dos fluidos de escorregarem entre si livremente. Não existe fluido com viscosidade nula, mas existem situações em que esta pode ser desconsiderada.

Escoamentos viscosos são aqueles em que os efeitos da viscosidade são significativos. Quando esse efeito se torna desprezível, classificamos esse escoamento como não viscoso ou invíscido. Em um primeiro momento, você pode pensar ao contrário, mas existem inúmeros problemas nos quais podemos adotar o fluido como invíscido, o que simplifica bastante a análise sem perder a precisão da solução.

- **Escoamento compressível e incompressível**

Esta classificação depende da variação da massa específica do fluido durante o escoamento. Se a variação da massa específica for desprezível, ou seja, se a massa específica do fluido permanecer aproximadamente constante ao longo do tempo, esse escoamento será incompressível. Contudo, quando a variação da massa específica não for desprezível, o escoamento será denominado compressível.

A massa específica dos líquidos é essencialmente constante. Por isso, os líquidos são chamados de substâncias incompressíveis.

Consequentemente, todo escoamento de líquidos é considerado incompressível. Por outro lado, os gases são altamente compressíveis, entretanto, em geral, eles também podem se comportar como fluidos incompressíveis, desde que a velocidade do escoamento seja pequena em relação à velocidade do som. Os efeitos de compressibilidade para os gases podem ser desprezados para velocidades abaixo de $100\ m/s$.

- **Escoamento laminar e turbulento**

No escoamento laminar, as partículas do fluido movem-se em camadas ou lâminas, ao longo do escoamento, em trajetórias bem definidas e ordenadas. No escoamento turbulento, as partículas do fluido rapidamente se misturam, enquanto se movimentam ao longo do escoamento, descrevendo trajetórias irregulares e desordenadas. Existe ainda um outro tipo de escoamento, o transitório, que se altera entre laminar e turbulento.

No caso do escoamento de fluidos incompressíveis em dutos (escoamento interno), sua natureza é determinada pelo valor do número de Reynolds ($Re$), adimensional, definido pela expressão:

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu},$$

na qual $\rho\left[kg/m^3\right]$ é a massa específica do fluido; $V\left[m/s\right]$ é a velocidade média de escoamento do fluido dentro do duto; $D\left[m\right]$ é o diâmetro do duto; $\mu\left[N\cdot s/m^2\right]$ é a viscosidade dinâmica ou absoluta do fluido e $\nu\left[m^2/s\right]$ é a viscosidade cinemática do fluido.

O número de Reynolds no qual o escoamento torna-se turbulento é chamado de crítico, $Re_{cr}$. O valor deste é diferente para cada geometria e condição de escoamento. Para o escoamento interno em um tubo circular, o valor geralmente aceito é $Re_{cr} = 2300$. Certamente, são desejáveis valores precisos do número de Reynolds laminar, de transição e turbulento, mas isso não acontece na prática. Na maioria das situações, o escoamento é laminar quando $Re < 2300$, transitório quando $2300 \leq Re \leq 4000$ e turbulento quando $Re > 4000$.

## Sem medo de errar

Lembramos que, nesta seção, estamos analisando uma empresa multinacional, no ramo de mecânica dos fluidos, que concluiu um processo de *trainee* no qual você, aluno, obteve êxito e foi selecionado para realizar um *job rotation*, nas diversas áreas da empresa. No cargo de *trainee*, você terá de solucionar alguns problemas de Engenharia, utilizando o seu raciocínio crítico.

Nesta seção, você foi alocado na área de escoamentos em tubulações industriais, onde seu superior solicita-lhe a resolução do seguinte dilema:

Em um processo da indústria química, tetracloreto de carbono a $20\ °C$ escoa através de um bocal cônico de um diâmetro de entrada $D_e = 50\ mm$ para um diâmetro de saída $D_s$. A área varia linearmente com a distância ao longo do bocal, e a área de saída é $\frac{1}{5}$ da área de entrada; o comprimento do bocal é $250\ mm$ A vazão é $Q = 2\ L/min$. Para o processo, é importante que o escoamento na saída seja turbulento. Isso realmente acontece? Em caso afirmativo, a partir de que ponto, ao longo do bocal, o escoamento torna-se turbulento?

Podemos combinar as equações do número de Reynolds e de vazão volumétrica para encontrar uma expressão de Reynolds, em termos do diâmetro e da vazão:

$$\left.\begin{array}{l} Q = V \cdot A \\ Re = \dfrac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} \end{array}\right\} Re = \frac{\rho \cdot D}{\mu} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{\rho \cdot D}{\mu} \cdot \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} \rightarrow Re = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D}.$$

Sabemos que a área de saída do bocal é $\frac{1}{5}$ da área de entrada, então:

$$A_s = \frac{A_e}{5} \rightarrow \frac{\pi D_s^2}{4} = \frac{\pi D_e^2}{4} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow D_s = \frac{D_e}{\sqrt{5}}.$$

Assim:

$$D_s = \frac{50mm}{\sqrt{5}} = 22{,}4mm.$$

Calculamos, agora, o valor do número de Reynolds na entrada e na saída do bocal, adotando $Re_{cr} = 2300$ como referência, por se tratar de um escoamento interno de seção circular:

$$\text{Entrada: } Re_e = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D_e}$$

$$\text{Saída: } Re_s = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D_s}$$

Para isso, precisamos dos valores da massa específica e da viscosidade absoluta para o tetracloreto de carbono a $20\,°C$. De acordo com Fox, Pritchard e McDonald (2014), $\mu = 10^{-3}\, N \cdot s/m^2$. Assim, obtemos que a densidade relativa do tetracloreto de carbono é 1,595, ou seja, $\rho = 1595\, kg/m^3$.

Portanto:

$$\text{Entrada: } Re_e = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D_e} = 1354 \rightarrow LAMINAR$$

$$\text{Saída: } Re_s = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D_s} = 3027 \rightarrow TURBULENTO$$

Como adotamos $Re_{cr} = 2.300$ $Re_{cr} = 2300$ como referência, o escoamento na saída é turbulento, conforme desejado.

Para encontrar o ponto ao longo do bocal onde o escoamento torna-se turbulento, primeiro calculamos o diâmetro:

$$Re_{cr} = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot D_{cr}} \rightarrow D_{cr} = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot \mu \cdot 2300} = 29{,}4mm.$$

A área varia linearmente com a distância ao longo do bocal. Dessa forma:

$$\frac{L_{cr}}{L} = \frac{D_{cr} - D_e}{D_s - D_e} \rightarrow L_{cr} = L\frac{D_{cr} - D_e}{D_s - D_e} = 186mm$$

Finalmente, a informação obtida foi entregue ao seu superior, na forma de apresentação, que será feita aos gestores da área, de maneira que o desafio foi concluído com êxito.

## Avançando na prática

### Descrição e classificação de um escoamento fluido

#### Descrição da situação-problema

Imagine que você trabalha em uma empresa que instala tubulações em ambientes industriais, e parte de seu trabalho inclui analisar, classificar e descrever escoamentos. Um cliente solicitou uma tubulação com diâmetro constante de $200\ mm$ e comprimento $100\ m$, por onde irá escoar água a $20\ °C$, em regime permanente, com velocidade de $10 m/s$. Como proceder para classificar esse escoamento?

#### Resolução da situação-problema

O escoamento é interno porque ocorre dentro de uma tubulação. Como o fluido em questão é um líquido, esse escoamento é incompressível.

A água escoa em regime permanente, ou seja, suas propriedades são constantes ao longo do tempo. Dessa forma, o escoamento é estacionário.

Por se tratar de um escoamento estacionário em uma tubulação de diâmetro constante, a velocidade permanece a mesma ao longo do tubo, variando apenas em relação ao seu raio. Assim, esse escoamento é unidimensional.

Para saber se o escoamento é laminar ou turbulento, devemos calcular o número de Reynolds. As propriedades da água podem ser encontradas no livro **Introdução à mecânica dos fluidos** – Tabela A.7 de Fox, Pritchard e McDonald (2014, p. 793).

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{10\,\frac{m}{s} \times 0{,}2m}{1{,}01 \times 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 1{,}98 \times 10^6$$

Portanto, o escoamento é turbulento.

Para essa questão, por se tratar de um escoamento por uma longa tubulação, devemos levar em conta os efeitos da viscosidade que geram perdas de carga. Por isso, esse escoamento é viscoso.

Dessa forma, o escoamento foi completamente descrito e você solucionou com sucesso mais esse desafio.

## Faça valer a pena

**1.** Na mecânica dos fluidos, não estamos interessados no comportamento de um corpo rígido, mas, sim, no escoamento do fluido através de tubulações, bombas, turbinas, asas de avião etc. É importante, então, delimitar uma região no espaço para o estudo, o que pode ser feito por meio da definição de um sistema ou um volume de controle.

Complete as lacunas da sentença a seguir:

Sistema é uma quantidade de _____ que escolhemos como objeto de estudo. Esta quantidade de matéria é delimitada por uma fronteira do sistema, por meio da qual _____ fluxo de massa e o volume _____ variar. Volume de controle, por sua vez, é uma quantidade de volume que escolhemos como objeto de estudo. Esta quantidade de volume é delimitada por uma superfície de controle, por meio da qual _____ fluxo de massa, energia e demais quantidades associadas ao escoamento.

Agora, assinale a alternativa correta.

a) massa fixa – não há – pode – há.

b) massa variável – há – pode – há.

c) massa fixa – há – não pode – não há.

d) massa variável – há – não pode – não há.

e) massa fixa – não há – não pode – não há.

**2.** Existe uma grande variedade de tipos de problemas sobre o escoamento de fluidos e cada um deles requer uma visão adequada. Dessa forma, é conveniente saber descrevê-los e classificá-los.

Considere o escoamento descrito: ar, a 20 °C $\left(\nu = 1{,}5 \times 10^{-5}\ m^2/s\right)$, escoa em regime permanente, com velocidade de 20 *m/s*, por uma tubulação com diâmetro constante de $100\ mm$

Sobre esse escoamento, avalie as afirmações a seguir.

I. O escoamento é incompressível.

II. O escoamento é estacionário.

III. O escoamento é laminar.

É correto o que se afirma em:

a) I, apenas.

b) II, apenas.

c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

**3.** Na mecânica dos fluidos, não estamos interessados no comportamento de um corpo rígido, mas, sim, no escoamento do fluido através de tubulações, bombas, turbinas, asas de avião etc. É importante, então, saber descrever cada tipo de escoamento.

Avalie o trecho a seguir.

Este método consiste em adotar um intervalo de tempo, escolher uma seção ou volume de controle no espaço e considerar todas as partículas que passam por esse local. As características do escoamento são descritas pela especificação dos parâmetros necessários em função das coordenadas espaciais, além do tempo.

Assinale a alternativa que apresenta o método de descrição ao qual o trecho se refere.

a) Método de Lagrange.
b) Método de Euler.
c) Método de Newton.
d) Método de Reynolds.
e) Método de Bernoulli.

# Seção 1.2

## Leis básicas para um sistema

### Diálogo aberto

Caro aluno!

Na seção anterior, estudamos os métodos de análise de problemas em Engenharia, para sua correta abordagem. Dessa maneira, aprendemos a descrever e classificar corretamente os tipos de escoamentos de fluido. Agora, nesta seção, abordaremos sobre as leis básicas aplicadas para um sistema.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2012), a Física envolve o estudo do movimento dos objetos, incluindo a aceleração, que é a variação de velocidade, a causa da aceleração e a energia associada ao movimento. A causa da aceleração é sempre uma força, definida como o agente físico capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento uniforme de um corpo. A velocidade de um objeto muda quando uma força age sobre ele. Por exemplo: na largada de uma prova de Fórmula 1, uma força exercida pela pista sobre os pneus traseiros provoca a aceleração dos veículos. Quando um carro colide com um poste, uma força exercida pelo poste faz com que o carro pare bruscamente.

As revistas de Ciência, Engenharia, Direito e Medicina estão repletas de artigos sobre as forças a que estão sujeitos os objetos, entre os quais podem ser incluídos os seres humanos. Como todos sabem, nenhum movimento pode ser iniciado sem algum tipo de energia. Para atravessar o Oceano Pacífico a bordo de um avião, precisamos de energia. Para transportar um computador para o último andar de um edifício ou para uma estação espacial em órbita, precisamos de energia. Gastamos verdadeiras fortunas para obter e utilizar energia. Na verdade, nossa civilização depende da sua obtenção e do seu uso eficiente.

Lembre-se de que, nesta unidade, você foi aprovado no processo de *trainee* de uma empresa multinacional no ramo da mecânica dos fluidos, sendo selecionado para realizar um *job rotation*, nas diversas áreas dessa empresa. Nessa nova fase, você, aluno, foi

transferido para a área de projetos de aeronaves e deparou-se com o seguinte desafio: um novo jato comercial está sendo projetado pela equipe da qual você faz parte e, neste momento, é necessário estimar o comprimento de pista e o tempo mínimo necessário para que essa aeronave atinja sua velocidade de decolagem. Cabe a você essa responsabilidade, portanto, esperamos que desenvolva o seu raciocínio crítico para a solução de problemas. Quais são as variáveis relevantes para esses cálculos? Quais as considerações necessárias para a simplificação do problema? Quais equações básicas devemos utilizar?

Para isso, você deve conhecer e saber trabalhar com as leis básicas aplicadas em sistemas, tais como: a conservação de massa; o princípio da quantidade de movimento linear; o princípio da quantidade de movimento angular; a primeira lei da termodinâmica e a segunda lei da termodinâmica.

Está preparado para este novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Leis básicas para um sistema

Todas as leis da mecânica são escritas para um sistema, que é definido como uma quantidade de massa de identidade fixada. Tudo o que for externo a esse sistema recebe o nome de vizinhança, sendo o sistema separado de suas vizinhanças pela sua fronteira. Essas leis estabelecem, então, o que ocorre quando há interação entre o sistema e suas vizinhanças.

As leis básicas aplicáveis aos fluidos devem ser escritas para um volume de controle, e são fundamentais para a análise de qualquer sistema envolvendo mecânica dos fluidos. Vamos, na sequência desta seção, compreender cada uma delas, listadas a seguir:

1. A conservação da massa.
2. O princípio da quantidade de movimento linear.
3. O princípio da quantidade de movimento angular.
4. A primeira lei da termodinâmica.
5. A segunda lei da termodinâmica.

Para transformar essas leis aplicadas em sistemas em equações equivalentes que possam ser aplicadas em volumes de controle, devemos expressar cada uma das leis citadas como uma equação de taxa, utilizando o conceito de derivada.

**Assimile**

A derivada representa a taxa de variação instantânea de uma função, um exemplo típico é a velocidade que representa a taxa de variação da função espaço no tempo.

Nosso objetivo, portanto, é relacionar a taxa de variação de uma propriedade arbitrária, $N$, do sistema com quantidades associadas ao volume de controle. Da definição de derivada, a taxa de variação de $N$ é dada por:

$$\frac{dN}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{t_0+\Delta t} - N_{t_0}}{\Delta t}.$$

Vamos, na sequência, trabalhar com cada uma das leis básicas e expressá-las como uma equação de taxa.

### Conservação de massa

Você já aprendeu que um sistema é uma quantidade de massa fixa que escolhemos como objeto de estudo. Dessa definição, $M$ é constante em todo o tempo. Para expressar essa relação como uma equação de taxa, escrevemos:

$$\frac{dM}{dt} = 0,$$

em que a massa total do sistema é definida em termos de sua massa específica $\rho$ e do seu volume $\forall$, da seguinte forma:

$$M = \int_{Sistema} dm = \int_{Sistema} \rho \, d\forall.$$

**Reflita**

A lei da conservação de massa é tão óbvia em problemas de mecânica dos sólidos que, frequentemente, a esquecemos. Por que em mecânica dos fluidos precisamos prestar atenção à conservação de massa e analisá-la para que ela seja satisfeita?

## Princípio da quantidade de movimento linear e angular

O produto da massa e da velocidade de um corpo é chamado de quantidade de movimento linear ou apenas quantidade de movimento.

A segunda lei de Newton, também conhecida como princípio fundamental da dinâmica, estabelece que a força resultante, $\vec{F}$, agindo sobre um sistema de referência inercial, é igual à taxa de variação temporal da sua quantidade de movimento linear $\vec{P}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

$\vec{V}dm$ é a quantidade de movimento linear de uma partícula com massa $dm$. Dessa forma, o momento linear total do sistema é dado por:

$$\vec{P} = \int_{Sistema} \vec{V}\, dm = \int_{Sistema} \vec{V}\, \rho\, d\forall.$$

**Assimile**

Um referencial inercial é aquele para o qual a primeira lei de Newton é válida. Em outras palavras, para o referencial inercial, se uma partícula não está sujeita a nenhuma força, então ela está parada ou movimentando-se em linha reta e com velocidade constante.

A força resultante, $\vec{F}$, inclui todas as forças de campo, $\vec{F}_c$, e de superfície, $\vec{F}_s$, atuando sobre o sistema:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s.$$

As forças de superfície, como o próprio nome já sugere, agem sobre as superfícies do sistema, como, por exemplo, a força de compressão, de cisalhamento e de fricção. A força de superfície também é chamada de força de contato, pois, neste caso, existe o contato entre a força e o corpo. Por sua vez, as forças de campo agem em todo o volume do sistema, como, por exemplo, a força peso, a força de Coriolis e as forças de natureza eletromagnética. São forças de longo alcance, também chamadas de força de volume, porque atuam no volume do corpo como um todo. Em geral, essas forças são provenientes das ações dos campos gravitacional, elétrico e magnético.

## Pesquise mais

O efeito de Coriolis ou a força de Coriolis é um sistema com referencial em rotação uniforme, em que os corpos em movimentos lineares, quando vistos por um observador no mesmo referencial, aparecem sujeitos a uma força perpendicular à direção do seu movimento. O vídeo a seguir explica de maneira simples o efeito de Coriolis. Vale a pena conferir!

MELLO, Diego. **Aceleração e efeito de Coriolis**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=_Fn4_LTcZP0>. Acesso em: 6 jan. 2018. (Vídeo do Youtube)

## Exemplificando

Uma partícula de massa 10 *kg* move-se horizontalmente com velocidade de 5 *m/s*, quando se choca com uma parede vertical e ricocheteia com velocidade de 2 *m/s*. Sabendo que a colisão durou apenas 0,2 segundo, qual o módulo da força causada por esse impacto?

Solução:

Como a partícula possui massa constante, o módulo da variação do momento linear é calculado como:

$$\left|\Delta\vec{P}\right| = m \cdot \left|\vec{V}_{inicial}\right| - m \cdot \left|\vec{V}_{final}\right|,$$

em que $\left|\vec{V}_{inicial}\right| = 5\,m/s$ e $\left|\vec{V}_{final}\right| = -2\,m/s$ (sentido oposto).

Dessa forma:

$$\left|\Delta\vec{P}\right| = 10\,kg \cdot \left[5\,m/s - \left(-2\,m/s\right)\right] = 30\,kg \cdot m/s\,.$$

Portanto, o módulo da força causada pelo impacto é:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{P}\right|}{\Delta t} = \frac{30\,kg \cdot m/s}{0{,}2\,s} = 150\,N\,.$$

O princípio da quantidade de movimento angular é o equivalente à segunda lei de Newton para sistemas em rotação e afirma que o torque resultante, $\vec{T}$, agindo sobre o sistema, é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular $\vec{H}$:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt}\,.$$

Essa equação é válida para uma quantidade fixa de massa e um referencial inercial. A quantidade de movimento angular do sistema é o produto vetorial entre o vetor posição $\vec{r}$ e a quantidade de movimento linear $\vec{P}$ aplicado:

$$\vec{H} = \int_{Sistema} \vec{r} \times \vec{V}\, dm = \int_{Sistema} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho\, d\forall .$$

O torque, $\vec{T}$, pode ser produzido por forças de superfície e de campo e, também, por eixos que cruzam a fronteira do sistema:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \vec{r} \times \vec{F}_C + \vec{T}_{eixo}.$$

Se considerarmos apenas o campo gravitacional atuando no sistema, teremos:

$$\vec{F}_C = \vec{g}\, dm = \vec{g}\, \rho\, d\forall .$$

**Exemplificando**

Uma partícula sofre ação de dois torques em relação à origem, o primeiro tem módulo de $2{,}0\ N \cdot m$ e aponta no sentido positivo do eixo *x*, e o segundo tem módulo de $4{,}0\ N \cdot m$ e aponta no sentido negativo do eixo *y*. A taxa de variação da quantidade de movimento angular pode ser calculada como:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = (2{,}0N \cdot m)\hat{i} - (4{,}0N \cdot m)\hat{j}.$$

Portanto, o módulo do vetor $d\vec{H}/dt$ é:

$$\left|\frac{d\vec{H}}{dt}\right| = \sqrt{(2{,}0N \cdot m)^2 - (4{,}0N \cdot m)^2} = 4{,}5N \cdot m.$$

Logo, essa partícula sofre o torque total de 4,5 *N.m*.

### Primeira e segunda lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica é um enunciado do princípio da conservação de energia, que estabelece que a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante. De forma simplificada, a variação da energia, *E*, contida em um sistema é

expressa por meio da diferença entre a quantidade de calor, $Q$, trocada com o meio ambiente e o trabalho, $W$, realizado durante a transformação do sistema:

$$dE = \delta Q - \delta W.$$

Essa equação pode ser escrita na forma de taxa como:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W},$$

em que $\dot{Q}$ é a taxa líquida na qual a energia é transferida para dentro do sistema por transferência de calor no tempo $t$, e $\dot{W}$ é a taxa líquida na qual a energia é transferida para fora do sistema por trabalho no tempo $t$.

A energia total do sistema é dada por:

$$E = \int_{Sistema} e\,dm = \int_{Sistema} e\,\rho\,d\forall,$$

em que:

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz.$$

Nessa equação, $u$ é a energia interna específica, $V$, a velocidade e $z$, a altura de um sistema de massa $dm$.

Considerando a energia cinética $(E_c)$, a energia potencial $(E_p)$ e a energia interna $(U)$, a taxa temporal de variação da energia contida no sistema é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

**Assimile**

A taxa de transferência de calor $\dot{Q}$ é positiva quando o calor é adicionado ao sistema pela sua vizinhança, e negativa quando o calor é removido do sistema. A taxa de trabalho $\dot{W}$ é positiva quando o trabalho é realizado pelo sistema sobre sua vizinhança, e negativa quando o trabalho é realizado pela vizinhança.

A seguir, temos um exemplo prático que traz o cálculo da transferência de calor líquida em um processo.

**Exemplificando**

Um sistema cilindro-pistão contém 0,4 *kg* de um certo gás que se comporta como um gás ideal. Quando o sistema realiza um trabalho de 17,6 *kJ*, ocorre uma variação da energia interna específica de –55 *kJ/kg*. Sabendo que não há variação significativa da energia cinética ou potencial, qual é a transferência de calor líquida para esse processo?

Solução:

Um balanço de energia para o sistema adquire a forma:

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = Q - W,$$

na qual os termos das energias cinéticas e potencial tornam-se nulos. Então, reescrevendo $\Delta U$, em termos das energias internas específicas, o balanço de energia torna-se:

$$m \cdot \Delta u = Q - W.$$

Resolvendo para *Q*:

$$Q = m \cdot \Delta u - W = 0{,}4\,kg \cdot (-55\,kJ/kg) + 17{,}6\,kJ = -4{,}4\,kJ$$

Portanto, o sistema perde 4,4 *kJ* em forma de calor.

A segunda lei da termodinâmica expressa, de forma concisa, que a quantidade de entropia de qualquer sistema isolado termodinamicamente tende a aumentar com o tempo, até alcançar um valor máximo. Se uma quantidade de calor $\delta Q$ for transferida para um sistema à temperatura $T$, a variação de entropia $dS$ do sistema satisfará a relação:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Essa equação pode ser escrita na forma de taxa como:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{T},$$

em que a entropia total do sistema é dada por:

$$S = \int_{Sistema} s\,dm = \int_{Sistema} s\,\rho\,d\forall.$$

Não há apenas um enunciado da segunda lei que aborde cada um dos seus muitos aspectos. Três enunciados alternativos são citados por Moran et al. (2013) e apresentados a seguir.

i. **Enunciado de Clausius:** é impossível para qualquer sistema operar de tal maneira que o único resultado seja a transferência de energia sob a forma de calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.

ii. **Enunciado de Kelvin-Planck:** é impossível para qualquer sistema operar em um ciclo termodinâmico e fornecer uma quantidade líquida de trabalho para a sua vizinhança enquanto receber energia por transferência de calor de um único reservatório térmico.

iii. **Enunciado da entropia:** é impossível para qualquer sistema operar de uma maneira que a entropia seja destruída.

As deduções da segunda lei levam a muitas aplicações importantes, como: prever o sentido de processos; estabelecer condições de equilíbrio; determinar o melhor desempenho teórico de ciclos, motores e outros dispositivos e avaliar quantitativamente os fatores que impedem o alcance do melhor nível de desempenho teórico. Além da termodinâmica aplicada à Engenharia, a segunda lei e as deduções com base nela têm sido utilizadas na Economia, na Filosofia e em outras disciplinas.

**Pesquise mais**

Para saber mais sobre a segunda lei da termodinâmica e a utilização da entropia, sugerimos a leitura dos capítulos 5 e 6 do livro indicado a seguir:

MORAN, Michael J. et al. **Princípios de termodinâmica para Engenharia**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

Agora que já vimos as cinco leis básicas expressas como equações de taxa para um sistema, nosso trabalho é desenvolver expressões equivalentes que possam ser aplicadas em um volume de controle. Isso será feito na sequência deste livro.

## Sem medo de errar

Uma empresa multinacional, no ramo da mecânica dos fluidos, concluiu um processo de *trainee* no qual você, aluno, obteve êxito e foi selecionado para realizar um *job rotation*, nas diversas áreas da empresa. Neste momento, você foi transferido para a área de projetos de aeronaves e deparou-se com o seguinte desafio: um novo jato comercial está sendo projetado pela equipe da qual você faz parte, sendo necessário estimar o comprimento de pista e o tempo mínimo necessário para que essa aeronave atinja sua velocidade de decolagem. Cabe a você essa responsabilidade, portanto, esperamos que desenvolva o seu raciocínio crítico para a solução de problemas.

Para cumprir sua tarefa, considere a massa da aeronave totalmente carregada $m$, a força $F$ exercida pelas turbinas como constante, a velocidade de decolagem $V$ e toda resistência desprezível.

O princípio da quantidade de movimento linear dita que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\left(m \cdot \vec{V}\right)}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{V} + m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \xrightarrow{\text{eixo x}} F_x = \frac{dm}{dt} \cdot V_x + m \cdot \frac{dV_x}{dt}.$$

Tendo em vista que a massa da aeronave permanece constante durante a decolagem, temos $dm/dt = 0$. Assim:

$$F_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}.$$

Pela regra da cadeia, podemos, então, reescrever o princípio da quantidade de movimento linear da seguinte forma:

$$F_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt} = m \cdot \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot V_x \cdot \frac{dV_x}{dx}.$$

Portanto:

$$F_x = m \cdot V_x \cdot \frac{dV_x}{dx}.$$

Separando as variáveis dessa equação e integrando, obtemos o comprimento de pista mínimo, $x$, para decolagem:

$$F_x \cdot dx = m \cdot V_x \cdot dV_x \rightarrow \int_0^x F_x \cdot dx = \int_0^V m \cdot V_x \cdot dV_x \rightarrow x = \frac{m \cdot V_x^2}{2 \cdot F_x}.$$

Para o cálculo do tempo, retornamos à equação da quantidade de movimento linear:

$$F_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}$$

Separando as variáveis dessa equação e integrando, obtemos o tempo mínimo para decolagem:

$$F_x \cdot dt = m \cdot dV_x \rightarrow \int_0^t F_x \cdot dt = \int_0^V m \cdot dV_x \rightarrow t = \frac{m \cdot V_x}{F_x}.$$

Vale a pena salientar que as resistências aerodinâmicas e de rolamento iriam aumentar significantemente ambos os resultados.

Pronto! Com essas informações em mãos, você já pode reportar ao seu gestor a solução da tarefa que lhe foi concedida. Dessa forma, você finalizou com sucesso mais um desafio.

## Avançando na prática

### Cálculo do coeficiente de atrito

#### Descrição da situação-problema

Imagine que você trabalha em uma empresa que analisa a segurança no tráfego de automóveis. Sua tarefa rotineira é verificar o comportamento de veículos em curvas acentuadas. Para isso, um determinado veículo com massa $m$ é posto para trafegar com uma velocidade constante, $V$, por uma curva acentuada, de raio, $R$, uniforme. Qual deve ser o coeficiente de atrito, $\mu$, mínimo, entre o asfalto e os pneus do automóvel, antes da perda de tração?

#### Resolução da situação-problema

Aplicando o princípio da quantidade de movimento linear, temos:

$$F = \frac{dm}{dt} \cdot V + m \cdot \frac{dV}{dt}.$$

A massa do carro permanece constante durante todo o tempo, e a única aceleração envolvida é a centrípeta, assim:

$$F = m \cdot a_c = m \cdot \frac{V^2}{R}.$$

Para que o carro não perca tração, a força de atrito deve ser suficientemente grande para manter o carro na pista, portanto:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{V^2}{R}.$$

Finalmente, podemos encontrar o valor mínimo do coeficiente de atrito antes da perda de tração:

$$\mu = \frac{V^2}{R \cdot g}.$$

Por meio desses cálculos, são obtidos os valores do coeficiente de atrito para diversas velocidades e raios de curvatura. Com esses dados, você pode dar um *feedback* à montadora sobre a correta seleção dos pneus para a segurança apropriada dos veículos.

## Faça valer a pena

**1.** O conhecimento das leis básicas aplicáveis é fundamental para a análise de qualquer sistema envolvendo a mecânica dos fluidos.

Avalie o trecho a seguir.

"A força resultante que age sobre um sistema de referência inercial é igual à taxa de variação temporal da sua quantidade de movimento linear."

A lei básica a qual o trecho se refere é a:

a) Primeira lei de Newton.
b) Segunda lei de Newton.
c) Terceira lei de Newton.
d) Primeira lei da termodinâmica.
e) Segunda lei da termodinâmica.

**2.** Uma aeronave comercial de 10 toneladas viaja com uma velocidade de cruzeiro de 200 *m/s* à altitude de 10.000 *m*. Devido a uma falha momentânea dos motores, a aeronave perde altitude, chegando a 9.000 *m* de altura.

Qual será a velocidade do avião nessa nova altitude? Considere a aceleração da gravidade igual a $9{,}8 m/s^2$.

a) 203 *m/s*.
b) 244 *m/s*.
c) 298 *m/s*.
d) 312 *m/s*.
e) 354 *m/s*.

**3.** Uma massa de 10 *kg* percorre uma trajetória retilínea com velocidade de 5 *m/s*. Em determinado momento, uma força *F* age sobre ela no sentido contrário ao movimento, fazendo-a reduzir sua velocidade em 20% em 10 segundos.

O módulo da força *F*, para reduzir a velocidade da massa, é de:

a) 1 *N*.

b) 2 *N*.

c) 3 *N*.

d) 4 *N*.

e) 5 *N*.

# Seção 1.3

## Relação entre sistema e volume de controle

### Diálogo aberto

Grande parte do comportamento de um fluido é baseada na conservação de massa, no princípio da conservação da energia e no princípio da conservação da quantidade de movimento. Essas leis foram formuladas originalmente para uma partícula, de acordo com a abordagem lagrangeana. Contudo, para a aplicação na mecânica dos fluidos, precisamos obter um meio de converter essas leis da sua descrição lagrangeana para a euleriana. Essa conversão para um sistema de partículas é feita por meio do Teorema do Transporte de Reynolds. Nesta seção, formalizaremos esse teorema, uma vez que o usaremos na próxima unidade para desenvolver a equação da continuidade e as equações da energia e da quantidade de movimento aplicadas a um volume de controle, que são amplamente utilizadas tanto na resolução de problemas práticos e teóricos quanto no projeto de máquinas e equipamentos que trabalham com fluidos.

Lembre-se de que, nesta unidade, você foi aprovado no processo de *trainee* de uma empresa multinacional, no ramo de mecânica dos fluidos, sendo selecionado para realizar um *job rotation*, nas diversas áreas dessa empresa. Nesse cargo de *trainee*, você está passando agora pela última etapa do *job rotation*, na área de modelamento matemático de fluidos. Você já conhece as leis básicas para um sistema. Elas são fundamentais para a análise de qualquer sistema envolvendo mecânica dos fluidos, desenvolvendo o seu raciocínio crítico na solução de problemas.

Seu objetivo agora é utilizar o Teorema do Transporte de Reynolds, junto aos seus conhecimentos já adquiridos sobre as leis básicas, a fim de deduzir a equação geral de conservação de massa para um volume de controle inercial qualquer. O resultado dessa dedução poderá ser aplicado na resolução dos mais diversos tipos de problemas sobre fluidos. Como transformar uma lei aplicada a um sistema em uma equação equivalente aplicada a um volume de controle? Quais propriedades extensivas são importantes nesse caso? E quais suas respectivas propriedades intensivas? Feito isso, você terá finalizado com sucesso seu processo de *trainee*.

Para isso, você deve compreender como associar as equações aplicadas a um sistema com as equações para volume de controle, por meio da relação entre as derivadas do sistema e a formulação para volume de controle, utilizando o Teorema do Transporte de Reynolds.

Está preparado para este novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Relação entre as derivadas do sistema e a formulação para volume de controle

Caro aluno!

Na seção anterior, nós obtivemos as cinco leis básicas para um sistema expressas como equações de taxa. Nosso objetivo aqui é desenvolver uma expressão geral para converter essas equações de taxa, aplicadas a um sistema, em equações equivalentes aplicadas a um volume de controle.

Antes de continuarmos, precisamos relembrar dois conceitos importantes da Física: a propriedade intensiva e a propriedade extensiva. As propriedades intensivas são propriedades físicas que não dependem da extensão do sistema, ou seja, são independentes do tamanho ou da quantidade de matéria ou da massa, de um dado sistema. Como exemplos, podemos citar a velocidade, a temperatura e a pressão.

Por outro lado, as propriedades extensivas dependem da extensão do sistema; em outras palavras, variam de forma proporcional com o tamanho ou a quantidade de matéria ou a massa existente em um dado sistema. A massa, o volume e a quantidade de movimento são exemplos de propriedades extensivas.

Toda propriedade extensiva tem uma propriedade intensiva a ela correspondente. Dessa forma, podemos relacionar as propriedades da seguinte maneira: usaremos o símbolo $N$ para representar qualquer uma das propriedades extensivas do sistema e $\eta$ para sua propriedade intensiva correspondente. Portanto:

$$\eta = \frac{dN}{dm}.$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$N = \int_{Sistema} \eta \, dm = \int_{Sistema} \eta \, \rho \, d\forall .$$

**Exemplificando**

Analisando as leis básicas, podemos encontrar as propriedades extensivas e suas correspondentes propriedades intensivas. Essas propriedades são apresentadas na Tabela 1.1.

**Tabela 1.1** | Propriedades extensivas e intensivas

| Propriedade extensiva, $N$ | Propriedade intensiva, $\eta$ |
|---|---|
| $M[kg]$ | 1 |
| $\vec{P}\left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$ | $\vec{V}\left[\frac{m}{s}\right]$ |
| $\vec{H}\left[\frac{kg \cdot m^2}{s}\right]$ | $\vec{r} \times \vec{V}\left[\frac{m^2}{s}\right]$ |
| $E[J]$ | $e\left[\frac{J}{kg}\right]$ |
| $S\left[\frac{J}{K}\right]$ | $s\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$ |

Fonte: elaborada pelo autor.

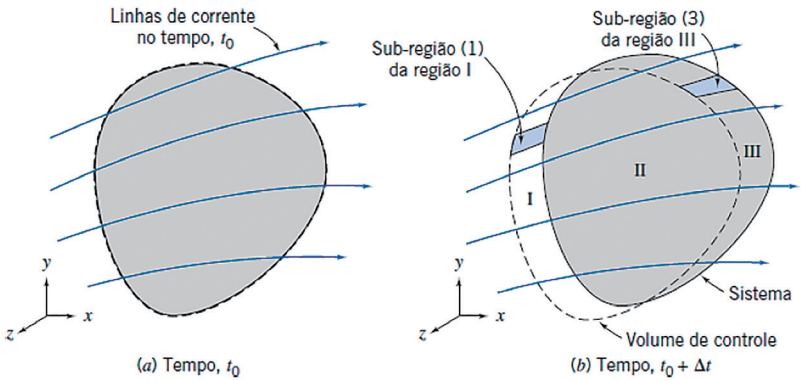
Como podemos, então, deduzir uma equação geral para descrever o comportamento de um volume de controle com base em um sistema?

Para tanto, selecionaremos uma porção arbitrária de um fluido em escoamento no tempo $t_0$, conforme ilustra a Figura 1.4(a). Nesse instante, o sistema ocupa exatamente todo o volume de controle, que é fixo no espaço em relação às coordenadas $xyz$. Decorrido um tempo infinitesimal $\Delta t$, o sistema terá se movido, devido ao escoamento, para uma nova posição no espaço em $t_0 + \Delta t$, continuando o volume de controle fixo na mesma região do espaço, conforme mostra a Figura 1.4(b).

Todas as leis básicas que nós discutimos até aqui se aplicam apenas ao sistema, tanto em $t_0$ como em $t_0 + \Delta t$. Por exemplo, a massa do sistema permanecerá constante, respeitando a conservação de massa.

Com base na geometria do par sistema-volume de controle, nos tempos $t_0$ e $t_0 + \Delta t$, e utilizando técnicas de derivação, podemos, então, obter as formulações das leis básicas para um volume de controle.

**Figura 1.4** | Configurações para sistema e volume de controle




Fonte: Fox, Pritchard e McDonald (2014, p. 102).

## Derivação do sistema

Vamos, agora, com base na Figura 1.5, compreender como obteremos a expressão geral para converter as equações de taxa para um sistema em equações equivalentes aplicadas a um volume de controle.

Observando a Figura 1.4(b), identificamos três regiões importantes, I, II e III. As regiões I e II juntas formam o volume de controle fixo, $VC$; as regiões I e II juntas também formam o sistema no tempo $t_0$, e as regiões II e III juntas compõem o sistema no tempo $t_0 + \Delta t$.

Da definição de derivada, a taxa de variação de uma propriedade extensiva em um sistema, $N_s$, é dada por:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_s)_{t_0+\Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t}.$$

Pela geometria da Figura 1.4:

$$N_s\big)_{t_0} = \left(N_{VC}\right)_{t_0}$$

e

$$N_s\big)_{t_0+\Delta t} = \left(N_{II} + N_{III}\right)_{t_0+\Delta t} = \left(N_{VC} - N_I + N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}.$$

Substituindo na definição de derivada, obtemos:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{VC} - N_I + N_{III}\right)_{t_0+\Delta t} - \left(N_{VC}\right)_{t_0}}{\Delta t}.$$

Lembrando que o limite da soma é igual à soma dos limites, podemos escrever:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{VC}\right)_{t_0+\Delta t} - \left(N_{VC}\right)_{t_0}}{\Delta t}}_{\text{Termo ( 1 )}} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{Termo ( 2 )}} - \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_I\right)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{Termo ( 3 )}}$$

Vamos, agora, avaliar os termos (1), (2) e (3) da equação anterior.

O termo (1) determina a taxa de variação com o tempo da propriedade extensiva dentro do volume de controle, e pode ser simplificado para:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{VC}\right)_{t_0+\Delta t} - \left(N_{VC}\right)_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta \rho \, d\forall.$$

O termo (2) calcula o fluxo da propriedade extensiva através da superfície de controle III, e pode ser escrito como:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Finalmente, o termo (3) calcula o fluxo da propriedade extensiva através da superfície de controle I, e pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_I\right)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\int_{SC_I} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

O vetor elemento de área $d\vec{A}$ tem módulo do elemento de área da superfície de controle, e seu sentido é o da normal à superfície para fora do elemento de área. O vetor velocidade $\vec{V}$ pode estar entrando ou saindo do volume de controle e sempre estará fazendo um ângulo qualquer com relação a $d\vec{A}$.

**Pesquise mais**

Para compreender a simplificação da equação:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(N_{VC})_{t_0+\Delta t}-(N_{VC})_{t_0}}{\Delta t}}_{\text{Termo (1)}} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{Termo (2)}} - \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(N_{I})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{\text{Termo (3)}}$$

para:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho\, d\forall\right)}_{\text{Termo (1)}} + \underbrace{\left(\int_{SC_{III}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{\text{Termo (2)}} - \underbrace{\left(-\int_{SC_I}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{\text{Termo (3)}},$$

sugerimos a leitura das páginas 202 a 204 do seguinte livro:

FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; McDONALD, Alan T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

Nesse livro, é mostrado passo a passo, com o auxílio de figuras, como obter cada um dos termos (1), (2) e (3) indicados.

## Teorema do Transporte de Reynolds

Podemos substituir os termos (1), (2) e (3), obtidos anteriormente, na equação da derivada do sistema:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho\, d\forall\right)}_{\text{Termo (1)}} + \underbrace{\left(\int_{SC_{III}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{\text{Termo (2)}} - \underbrace{\left(-\int_{SC_I}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{\text{Termo (3)}}.$$

Rearranjado os termos, ficamos com:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho\, d\forall + \int_{SC_I}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{SC_{III}}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

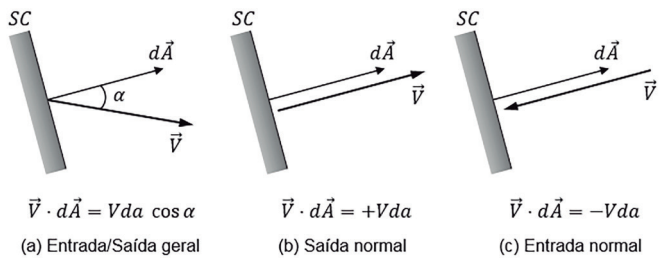
Avaliando a Figura 1.4(b), as superfícies de controle I e III, somadas, constituem a superfície de controle inteira. Dessa forma, as duas últimas integrais podem ser combinadas em uma única integral que representa a superfície de controle total, $SC$. Assim:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta \rho \, dV + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Finalmente, essa é a equação geral que buscávamos obter: a relação geral entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva, $N$, de um sistema e as variações dessa propriedade associadas a um volume de controle, conhecida como o Teorema do Transporte de Reynolds (TTR).

Ao utilizar a equação do Teorema do Transporte de Reynolds, você deve tomar muito cuidado na avaliação do produto escalar entre os vetores velocidade e área, $\vec{V} \cdot d\vec{A}$. Por definição, o vetor área é sempre perpendicular e direcionado para fora do volume de controle, já o vetor velocidade pode estar direcionado para fora ou para dentro do volume de controle. Essa diferença de direção faz com que o resultado do produto escalar seja positivo ou negativo, dependendo do caso em questão, como ilustrado na Figura 1.5, que demonstra ambas as situações.

**Figura 1.5** | Avaliação do produto escalar $\vec{V} \cdot d\vec{A}$




Fonte: adaptada de Fox, Pritchard e McDonald (2014, p.104).

**Assimile**

A multiplicação escalar entre dois vetores é calculada como o produto entre os módulos dos vetores e o cosseno do ângulo entre eles. Para o caso de uma saída normal, o ângulo entre os vetores é de 0°, e o produto assume um valor positivo. Para uma entrada normal, o ângulo entre os vetores é de 180°; por consequência, o produto escalar será negativo.

## Interpretação física dos termos do Teorema do Transporte de Reynolds

Com o auxílio do Teorema do Transporte de Reynolds, podemos converter as equações de um sistema para equações equivalentes aplicadas em um volume de controle. Para isso, basta substituirmos na equação do teorema os valores de $N$ e $\eta$ pela propriedade extensiva que se deseja estudar e sua respectiva propriedade intensiva. Por ser uma equação fundamental no estudo das leis básicas, ela será repetida a seguir, a fim de enfatizar a sua importância:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \eta\rho\, d\forall + \int_{sc} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Antes de você aplicar essa equação, vamos compreender o significado de cada termo.

$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s$

- Taxa de variação da propriedade extensiva $N$ do sistema.

Por exemplo, se $N = M$, obtemos a taxa de variação com o tempo da massa.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \eta\rho\, d\forall$

- Taxa de variação da propriedade extensiva dentro do volume de controle.

Por exemplo, se $N = \vec{H}$, então $\eta = \vec{r}\times\vec{V}$, $\int_{vc} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall$ calcula a quantidade total da quantidade de movimento angular dentro do volume de controle e $\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall$ calcula a taxa de variação dessa quantidade total.

$\int_{sc} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

- Taxa líquida de fluxo da propriedade extensiva através da superfície de controle.

Por exemplo, se $N = \vec{P}$, então $\eta = \vec{V}$ e $\int_{sc} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$ calcula a taxa líquida de fluxo de quantidade de movimento linear através da superfície de controle.

**Reflita**

Qual seria o significado de cada termo da equação do Teorema do Transporte de Reynolds para cada uma das leis básicas?

É importante destacar que a velocidade é sempre medida com relação ao volume de controle. Se o volume de controle é estacionário ou move-se com uma velocidade linear constante, ele constituirá um sistema inercial, e as leis básicas que já descrevemos poderão ser aplicadas sem nenhum problema. Para um volume de controle em aceleração, a segunda lei de Newton deve ser modificada antes de aplicada. Faremos isso mais adiante neste material.

## Sem medo de errar

Uma empresa multinacional no ramo de mecânica dos fluidos concluiu um processo de *trainee* no qual você, aluno, obteve êxito, sendo selecionado para realizar um *job rotation* nas diversas áreas da empresa. Você, no cargo de *trainee*, está passando agora pela última etapa do *job rotation*, na área de modelamento matemático de fluidos. Já conhecendo as leis básicas para um sistema, estas serão fundamentais para a análise de qualquer sistema envolvendo mecânica dos fluidos, desenvolvendo o seu raciocínio crítico na solução de problemas. Seu objetivo agora é utilizar o Teorema do Transporte de Reynolds, junto aos seus conhecimentos já adquiridos sobre as leis básicas, a fim de deduzir a equação geral de conservação de massa para um volume de controle inercial qualquer. O resultado dessa dedução será aplicado na resolução dos mais diversos tipos de problemas sobre fluidos.

Para transformar uma lei básica aplicada a um sistema em uma equação equivalente válida para um volume de controle qualquer, utilizamos o Teorema do Transporte de Reynolds.

Com base no Teorema do Transporte de Reynolds, temos:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

em que $N$ é uma propriedade extensiva e $\eta$ sua propriedade intensiva correspondente.

Devemos, então, substituir os valores de $N$ e $\eta$ pela propriedade extensiva de interesse e sua respectiva propriedade intensiva. Pela Tabela 1.1, verificamos que, para a conservação da massa $N = M$ e $\eta = 1$, substituindo obtemos:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Mas, pela definição de sistema, sabemos que a massa $M$ não varia com o tempo, portanto:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_s = 0.$$

Finalmente, a equação geral de conservação de massa para um volume de controle qualquer é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Com essa equação, modelamos qualquer problema em mecânica dos fluidos utilizando o conceito de volume de controle. Dessa forma, você retornou ao seu superior com a dedução correta e finalizou seu processo de *trainee* com êxito.

## Avançando na prática

### Aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds

#### Descrição da situação-problema

Você trabalha em uma empresa fabricante de bocais para mangueiras de incêndio e um dos principais problemas enfrentados pela sua equipe é a fixação desses bocais na saída da mangueira, visto que ela está sujeita a elevadas pressões. Seu gerente solicitou-lhe que encontrasse, então, uma expressão geral para o cálculo da força exercida sobre o bocal, a fim de ele seja projetado e fixado de maneira correta na mangueira. Como desenvolver esse equacionamento e encontrar a solução?

#### Resolução da situação-problema

Pelo Teorema do Transporte de Reynolds, temos:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \eta \rho \, d\forall + \int_{sc} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Devemos, então, substituir os valores de $N$ e $\eta$ pela propriedade extensiva de interesse e sua respectiva propriedade intensiva. Pela análise da Tabela 1.1, verificamos que, para o princípio da quantidade de movimento linear $N = \vec{P}$ e $\eta = \vec{V}$, substituindo obtemos:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\,\rho\,d\forall + \int_{SC}\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

A segunda lei de Newton, também conhecida como princípio fundamental da dinâmica, estabelece que a força resultante, $\vec{F}$, agindo sobre um sistema de referência inercial, é igual à taxa de variação temporal da sua quantidade de movimento linear $\vec{P}$, portanto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Finalmente, o princípio da quantidade de movimento linear para um volume de controle é expresso da seguinte forma:

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\,\rho\,d\forall + \int_{SC}\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Logo, é possível calcular a força exercida sobre os mais variados tipos de bocais produzidos pela empresa. Feito isso, você retornou ao seu gerente com a resposta e solucionou com sucesso mais esse desafio.

## Faça valer a pena

**1.** A respeito do Teorema do Transporte de Reynolds, analise as afirmações a seguir e julgue-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) O Teorema do Transporte de Reynolds é útil para transformar as equações de taxa de suas formas de volume de controle para suas formas de sistema.

( ) O Teorema do Transporte de Reynolds aplica-se apenas aos volumes de controle fixos.

( ) O Teorema do Transporte de Reynolds pode ser aplicado a quantidades escalares e vetoriais.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) F, V, V.
b) F, F, V.
c) V, F, F.
d) V, V, F.
e) F, F, F.

**2.** O Teorema do Transporte de Reynolds é utilizado para transformar as equações básicas aplicadas a sistemas em equações equivalentes que podem ser aplicadas a volumes de controle. O princípio da quantidade de movimento angular é o equivalente à segunda lei de Newton para sistemas em rotação. Tal princípio aborda que o torque resultante, $\vec{T}$, agindo sobre o sistema, é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular $\vec{H}$.

Qual a expressão equivalente para o cálculo do torque em um volume de controle?

a) $\vec{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

b) $\vec{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

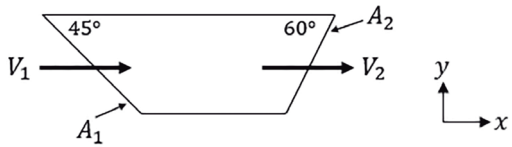
c) $\vec{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\,\vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\,\rho\vec{V}^2\cdot d\vec{A}$

d) $\vec{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

e) $\vec{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\cdot\vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\cdot\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

**3.** A Figura 1.6, a seguir, mostra uma região no espaço selecionada para o estudo do escoamento de um fluido qualquer. As áreas $A_1$ e $A_2$ são as áreas das superfícies de controle abertas por onde há fluxo de alguma propriedade extensiva, $\eta$; as demais superfícies de controle são fechadas.

**Figura 1.6** | Volume de controle selecionado para estudo




Fonte: elaborada pelo autor.

Se $V_2 = 10\,m/s$, qual a expressão para o fluxo de uma propriedade extensiva pela área $A_2$?

a) $-8{,}66\eta\rho A.$
b) $-7{,}07\eta\rho A.$
c) $8{,}66\eta\rho A.$
d) $7{,}07\eta\rho A.$
e) $5{,}00\eta\rho A.$

# Referências

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos:** fundamentos e aplicações. 3. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; McDONALD, Alan T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física** – Mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 1.

MORAN, Michael J. et al. **Princípios de termodinâmica para Engenharia**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

# Equações básicas na forma integral para um volume de controle

**Convite ao estudo**

Caro aluno, nesta unidade estudaremos as equações básicas na forma integral para um volume de controle. As quantidades de interesse para engenheiros podem, muitas vezes, ser expressas matematicamente por integrais. Por exemplo, a taxa de vazão em volume é dada pela integral da velocidade sobre uma área; a transferência de calor é representada pela integral do fluxo de calor sobre uma área; a força é obtida pela integral de uma tensão aplicada sobre uma área; massa é dada pela integral da massa específica sobre um volume; e a energia cinética é obtida como a integral de $V^2 / 2$ sobre cada elemento de massa em um volume. Existem, logicamente, outras quantidades integrais. Fazendas de turbinas eólicas estão sendo construídas ao redor do mundo para extrair energia cinética do vento e convertê-la em energia elétrica. Balanços de massa, de energia e de quantidade de movimentos linear e angular são utilizados na concepção desse projeto em questão, assim como no projeto de bombas e turbinas hidráulicas e motores a jato. O transporte de fluido por tubulações também exige uma análise de balanço de massa e da quantidade de movimento linear em seu projeto, para correto dimensionamento do sistema.

Nesta unidade, buscaremos compreender as equações básicas na forma integral, a fim de aplicá-las para um volume de controle na resolução de problemas práticos e teóricos. Para isso, você deve primeiramente saber selecionar o volume de controle adequado para, então, aplicar, de maneira correta, a conservação da massa, a quantidade de movimento

linear, a quantidade de movimento angular, a primeira lei da Termodinâmica e a segunda lei da Termodinâmica.

Como foco desta unidade, uma empresa fabricante de aeronaves contratou você como projetista. Você atuará na equipe de projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada futuramente no mercado brasileiro, desenvolvendo o raciocínio crítico e de solução de problemas.

Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

- calcular a velocidade dos gases de exaustão na saída de um motor a jato;

- estimar a vazão mássica de ar necessária e o empuxo produzido por um motor a jato;

- determinar a potência requerida pelo compressor de um motor a jato.

Para isso, nas seções desta unidade, serão estudadas a equação da conservação de massa e suas particularidades, a conservação da quantidade de movimentos linear e angular para volume de controles inercial e não inercial e as equações da primeira e segunda leis da Termodinâmica.

Está preparado para mais esses desafios? Vamos lá!

# Seção 2.1

## Conservação de massa para um volume de controle

### Diálogo aberto

O princípio da conservação de massa é um dos mais fundamentais da natureza. Todos o conhecemos e não é difícil entendê-lo. Não precisamos ser cientistas para calcular a quantidade de mistura que será formada quando juntamos 25 gramas de uma substância A com 25 gramas de uma substância B. Aliás, as reações químicas são balanceadas com base no princípio da conservação de massa. Tecnicamente, a massa não é exatamente conservada, pois a massa e a energia podem ser convertidas uma na outra, de acordo com a conhecida fórmula proposta por Albert Einstein (1879-1955), $E = mc^2$, em que $E$ é energia, $m$ a massa e $c$ é a velocidade da luz.

Todos os sistemas físicos e químicos apresentam interações de energia com seu entorno. Acontece que a quantidade de energia envolvida é equivalente a uma massa extremamente pequena, em comparação com a massa total do sistema. Dessa forma, para as análises de engenharia, consideraremos a massa e a energia como quantidades conservadas. Para os volumes de controle, a massa pode cruzar as superfícies de controle e, assim, devemos controlar a quantidade dela que entra neles e sai deles.

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa fabricante de aeronaves para atuar no projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada futuramente no mercado brasileiro. Nesse primeiro momento, temos que você é o projetista responsável pelo cálculo da velocidade dos gases de exaustão na saída do motor a jato que será utilizado no projeto dessa aeronave, desenvolvendo o raciocínio crítico e de solução de problemas. Esse cálculo, que será entregue ao seu gestor, deve ser realizado considerando diversas velocidades de voo e consumos de combustível. Quais são as variáveis relevantes para esse cálculo? Quais as considerações necessárias para simplificar o problema? Como selecionar o volume de controle de forma correta? Quais equações devemos utilizar?

Para isso, você deve, a princípio, saber selecionar, de maneira correta, o volume de controle para estudo e, então, aplicar a equação da conservação de massa para ele, devendo também compreender a aplicação dessa lei para o escoamento incompressível e para o escoamento estacionário.

Está preparado para este novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Equação da Conservação de Massa para um Volume de Controle

O princípio da conservação da massa declara que, dentro de uma região, fora de qualquer processo nuclear, a matéria não pode ser criada nem destruída. De um ponto de vista lagrangeano, a massa de todas as partículas em um sistema de partículas deverá ser constante com o tempo, portanto precisamos que a variação da massa no sistema seja igual a zero, ou seja,

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_s = 0.$$

Para desenvolver um enunciado semelhante, que seja relacionado a um volume de controle, devemos usar o teorema de transporte de Reynolds (TTR), que foi deduzido anteriormente na primeira unidade e é aqui apresentado novamente:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

**Reflita**

Você consegue se lembrar do significado físico de cada um dos termos da equação do teorema de transporte de Reynolds? É muito importante que você esteja seguro quanto às aplicações desse teorema para avançar seu estudo em Mecânica dos fluidos.

Aqui, a propriedade extensiva é $N = M$ e sua propriedade intensiva correspondente é $\eta = 1$. Substituindo os valores de $N$ e $\eta$ na equação do TTR, obtemos:

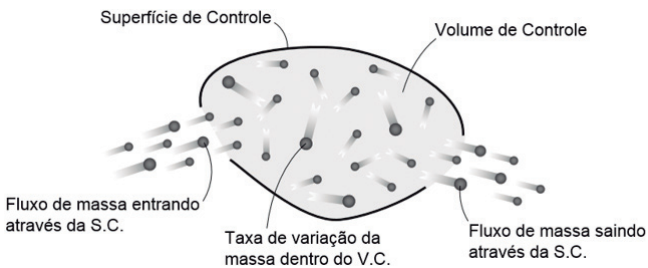
$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

mas, pela definição de sistema, sabemos que a massa $M$ não varia com o tempo, portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \int_{sc}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0.$$

Essa é a equação geral de conservação de massa para um volume de controle cuja aplicação é ilustrada na Figura 2.1. Seu primeiro termo representa a taxa de variação da massa dentro do volume de controle, enquanto o segundo termo da equação corresponde à taxa líquida de fluxo da massa através da superfície de controle.

**Figura 2.1** | Exemplo de aplicação da conservação da massa para um volume de controle.




Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.1, observamos que a taxa de variação da massa dentro do volume de controle é igual à taxa líquida de fluxo da massa através da superfície de controle. Em outras palavras, se o fluxo de entrada for maior que o fluxo de saída, haverá um acúmulo de massa no volume de controle. Por outro lado, se o fluxo de saída for maior que o fluxo de entrada, a massa no interior do volume de controle diminuirá. Temos, ainda, o caso em que os fluxos de entrada e saída são iguais, consequentemente a massa contida no volume de controle permanecerá constante.

**Exemplificando**

Um compressor de palhetas alimenta o reservatório de ar comprimido de uma indústria de pequeno porte. Sabe-se que esse compressor comprime ar a uma taxa de $200\,kg/s$, enquanto o consumo total de ar requerido pelos equipamentos dessa indústria é de $150\,kg/s$. Dessa

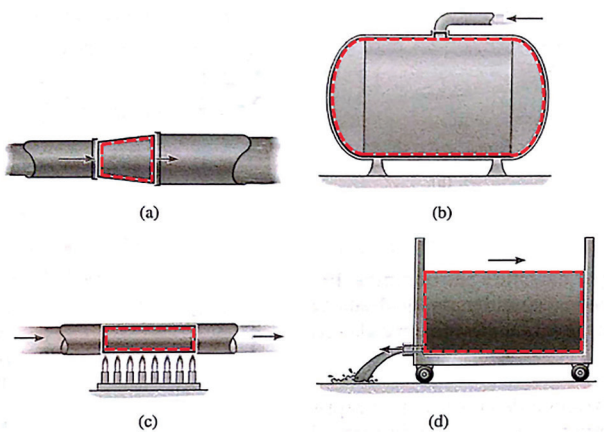
forma, o fluxo de massa que entra no reservatório é $200\,kg/s$, o fluxo de massa que sai do reservatório é de $150\,kg/s$ e a taxa de variação da massa dentro do reservatório é $50\,kg/s$. Portanto, fica evidente que a massa de ar dentro do reservatório está aumentando.

### Escolha de um volume de controle

Ao aplicar o teorema de transporte de Reynolds, é muito importante, e necessário, primeiramente, escolher o volume de controle adequado. Quando isso for feito, a taxa de variação das propriedades do fluido dentro do volume de controle, bem como os fluxos de entrada e saída dessas propriedades através da superfície de controle, poderá ser determinada.

Ao analisar a Figura 2.2, podemos visualizar alguns exemplos da escolha correta do volume de controle para os casos mais comuns em mecânica dos fluidos.

**Figura 2.2** | Exemplos de volumes de controle: a) escoamento em um difusor cônico de uma tubulação; b) enchimento de um tanque; c) escoamento através de uma região aquecida de uma tubulação; d) descarregamento de fluido em um carrinho em movimento.




Fonte: adaptada de Hibbeler (2016, p. 161).

A Figura 2.2(a) ilustra o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível pelo difusor cônico de uma tubulação. O volume de controle (VC) é, então, selecionado como sendo a própria geometria do difusor. Nesse caso, o VC é fixo e não haverá

variação da massa dentro dele, pois o regime é permanente, permanecendo a massa constante em todo o tempo. Os fluxos de massa ocorrem em cada uma das superfícies de controle abertas na entrada e na saída do difusor.

Na Figura 2.2(b), o ar está sendo bombeado para dentro de um tanque. O volume de controle é considerado o volume interno do tanque. Nesse caso, o VC é fixo, mas ocorre a variação da massa dentro dele, pois a massa de ar no tanque está aumentando com o tempo. Além disso, o fluxo de massa ocorre através da superfície de controle aberta, na conexão do tubo com o tanque.

O exemplo da Figura 2.2(c) mostra o ar escoando a uma taxa constante pela região aquecida de uma tubulação. Nesse caso, o volume de controle fixo é selecionado como a própria região da tubulação aquecida. Embora o aquecimento afete a densidade do ar, a massa dentro do volume de controle é constante, de modo que não haverá taxa de variação da massa com o tempo dentro do volume de controle. No entanto, a densidade será alterada, fazendo o ar expandir e a velocidade do ar aumentar na saída. Temos um escoamento não uniforme, ou seja, variável. Os fluxos de massa ocorrem na entrada e na saída, pois o ar está atravessando as superfícies de controle abertas.

Um líquido incompressível é descarregado para fora do carrinho em movimento na Figura 2.2(d). O volume de controle é escolhido como o próprio volume de líquido dentro do reservatório, delimitado pelas superfícies físicas e pela superfície livre do líquido. Nesse caso, o VC está se movendo e é deformável. Ocorre uma variação da massa dentro dele porque a massa está diminuindo com o tempo. O fluxo de massa ocorre na saída pela superfície de controle aberta. Para o caso da Figura 2.2(d), o volume de controle também poderia ser escolhido como uma região delimitada pela geometria interna do carrinho, assim o VC não se deformaria, mas continuaria a ocorrer variação da massa com o tempo.

**Pesquise mais**

Pesquise por mais exemplos de problemas envolvendo volumes de controle. Todos os livros de mecânica dos fluidos apresentam esse tipo de análise em questão. Uma boa dica de pesquisa são os livros citados nas referências desta seção. Neles, você pode encontrar muitos exercícios ao final de cada unidade e fazer uma análise sobre a escolha do volume de controle.

### Conservação de massa para escoamento incompressível

Para um escoamento incompressível, a massa específica $\rho$ permanece constante, não sendo uma função do tempo nem do espaço. Portanto, para fluidos incompressíveis, a equação geral de conservação de massa para um volume de controle pode ser escrita como:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Dividindo os termos por $\rho$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall + \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

A integral de $d\forall$ no primeiro termo é equivalente ao volume total do volume de controle. Assim, escrevemos:

$$\frac{\partial \forall}{\partial t} + \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Dessa forma, o volume de controle pode ser fixo ou variar no tempo.

**Exemplificando**

Para problemas envolvendo escoamento através de tubulações, podemos selecionar um trecho do tubo como volume de controle fixo. Já para estudos que abrangem taxas de enchimento ou drenagem de reservatórios, o volume de controle selecionado pode ser móvel, acompanhando a superfície livre do fluido.

Para casos em que o volume de controle é não deformável, ou seja, de forma e tamanho fixos, o volume $\forall$ permanece constante e a equação anterior se torna:

$$\int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

A integral de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ aplicada sobre uma seção de área $A$ do volume de controle é chamada de vazão em volume ou vazão volumétrica $Q$ $\left[m^3/s\right]$, dada por:

$$Q = \int_{A} \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

O módulo da velocidade média de $\vec{V}$ em uma seção de área $A$ é definido por:

$$\vec{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Quando as velocidades e as áreas são uniformes em cada entrada ou saída, a integral da superfície de controle se torna um somatório da seguinte forma:

$$\sum_{SC} \vec{V} \cdot \vec{A} = 0.$$

É importante lembrar que $\vec{V} \cdot \vec{A}$ é o produto escalar entre os vetores velocidade e a área. Conforme você já estudou, para entradas e saídas normais, os vetores área e velocidade possuem a mesma direção. Na entrada, o ângulo entre eles é de 180°, enquanto, na saída, o ângulo vale 0°. Assim, para entradas e saídas normais à área, a equação anterior se torna:

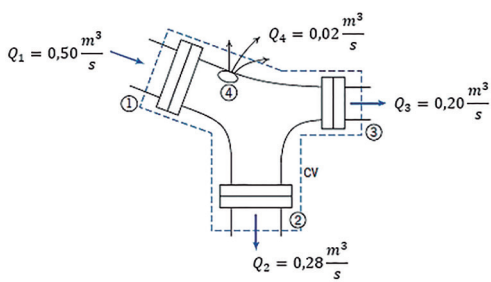
$$\sum_{Sai} (V \cdot A) - \sum_{Entra} (V \cdot A) = 0.$$

Logo, para um escoamento incompressível em um volume de controle fixo, a vazão volumétrica que entra no volume de controle é igual à vazão volumétrica que sai do volume de controle:

$$\sum_{Entra} Q = \sum_{Sai} Q.$$

A Figura 2.3 ilustra o escoamento permanente e incompressível de um fluido qualquer em uma junção de tubos através das seções 1, 2 e 3 e por um orifício de vazamento 4. Perceba que a vazão volumétrica se conserva.

**Figura 2.3** | Exemplo de aplicação da conservação da vazão volumétrica para um escoamento incompressível.




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 108).

### Conservação de massa para escoamento estacionário

Temos que no escoamento estacionário não há mudança das propriedades ao longo do tempo, portanto dizemos que o escoamento está em regime permanente. No entanto, observe que a massa específica pode variar no espaço, $\rho = \rho(x, y, z)$, sendo esse um escoamento compressível.

**Assimile**

É muito importante salientar que em regime permanente qualquer propriedade pode variar de ponto para ponto no espaço. Porém, todas as propriedades permanecem constantes em relação ao tempo em cada ponto. Em outras palavras, as propriedades podem variar com as coordenadas espaciais, mas devem permanecer constantes no tempo.

Dessa forma, a equação geral de conservação de massa para um volume de controle em regime estacionário se reduz a:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

A integral de $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ aplicada sobre uma área do volume de controle é chamada de vazão em massa ou vazão mássica $\dot{m}[kg/s]$, dada por:

$$\dot{m} = \int_{A} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Quando as velocidades e as áreas são uniformes em cada entrada ou saída, a integral da equação anterior se torna um somatório da seguinte forma:

$$\sum_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0.$$

Para entradas e saídas normais, temos que:

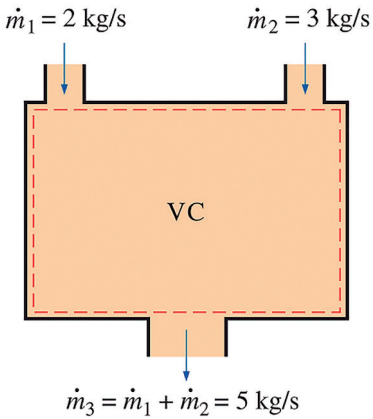
$$\sum_{Sai} (\rho \cdot V \cdot A) - \sum_{Entra} (\rho \cdot V \cdot A) = 0.$$

Portanto, para um escoamento permanente e compressível, a vazão mássica que entra no volume de controle é igual à vazão mássica que sai do volume de controle:

$$\sum_{Entra} \dot{m} = \sum_{Sai} \dot{m}.$$

A Figura 2.4 ilustra o enunciado da conservação de massa para um escoamento estacionário em um fluido compressível.

**Figura 2.4** | Exemplo de aplicação da conservação da massa para um escoamento estacionário.




Fonte: Çengel et al. (2015, p. 191).

**Reflita**

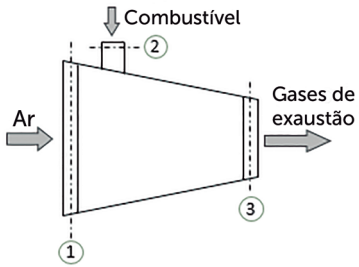
Para um escoamento incompressível, vimos que a vazão volumétrica é sempre constante. Assim, para um escoamento estacionário e compressível, a vazão em massa é constante. Qual é a relação entre $\dot{m}$ e $Q$?

## Sem medo de errar

Uma empresa fabricante de aeronaves contratou você para atuar na equipe de projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada no mercado. Nesse primeiro momento, você é o responsável pelo cálculo da velocidade dos gases de exaustão na saída do motor a jato que será utilizado no projeto dessa aeronave, desenvolvendo o raciocínio crítico e de solução de problemas. Esse cálculo, que será entregue ao seu gestor, deve ser realizado considerando diversas velocidades de voo e consumos de combustível. Quais são as variáveis relevantes para esse cálculo? Quais as considerações necessárias para simplificação do problema? Como selecionar o volume de controle de forma correta? Quais equações devemos utilizar?

Para resolver esse desafio, primeiramente faremos um desenho esquemático do funcionamento desse motor a jato e entenderemos como funciona. A Figura 2.5 mostra o ar entrando no motor com velocidade $V_1[m/s]$ através da seção 1, o consumo de combustível $\dot{m}_2[kg/s]$ pela seção 2 e os gases de exaustão deixando o motor com velocidade $V_3[m/s]$ pela seção 3.

**Figura 2.5** | Esquema representativo de um motor a jato.




Fonte: elaborada pelo autor.

Nosso próximo passo é selecionar corretamente o volume de controle. Nesse caso, o VC pode ser selecionado como a própria geometria do motor a jato, sendo, portanto, um volume de controle fixo com três superfícies de controle abertas por onde há fluxo de massa.

Agora, podemos aplicar a equação geral de conservação de massa para um volume de controle, que é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

e realizar as devidas simplificações.

Vamos considerar que o motor a jato está operando em regime permanente. Dessa forma, para um escoamento estacionário e compressível, a vazão mássica que entra no volume de controle é igual à vazão mássica que sai do volume de controle, ou seja:

$$\sum_{Entra}\dot{m} = \sum_{Sai}\dot{m} \quad \rightarrow \quad \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3.$$

Mas, $\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A$. Dessa forma:

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 + \dot{m}_2 = \rho_3 \cdot V_3 \cdot A_3,$$

Em que $\rho_1 \left[kg/m^3\right]$ é a massa específica do ar, $\rho_3 \left[kg/m^3\right]$, a massa específica dos gases de exaustão, $A_1 \left[m\right]$, a área da seção 1 e $A_3 \left[m\right]$, a área da seção 2.

Para encontrar uma expressão para o cálculo da velocidade dos gases de exaustão na saída do motor a jato, basta isolarmos esse termo, obtendo:

$$V_3 = \frac{\rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 + \dot{m}_2}{\rho_3 \cdot A_3}.$$

Com essa expressão, é possível calcular a velocidade dos gases de exaustão em função da velocidade de voo $V_1$ e do consumo de combustível $\dot{m}_2$, sendo conhecidas a geometria do motor a jato e as massas específicas do ar e dos gases de exaustão.

Agora, você já pode encaminhar para seu superior uma tabela contendo a velocidade dos gases de exaustão na saída do motor a jato, em função de diversas velocidades de voo e consumos de combustível.

## Avançando na prática

### Dimensionamento de dutos para um sistema de ventilação

### Descrição da situação-problema

Você foi recém-contratado por uma empresa de engenharia que atua na área de projeto de sistemas de ventilação. Em sua primeira semana de trabalho, você foi escalado para o primeiro projeto, descrito a seguir: normas para ventilação de ar em salas de aula especificam renovação do ar da sala com uma vazão de pelo menos 8,0 l/s de ar fresco por pessoa. Um sistema de ventilação para alimentar 6 salas com capacidade para 20 pessoas deve ser projetado. Nesse projeto, o ar entra através de um duto central de alimentação, de seção retangular, com ramificações curtas que chegam sucessivamente a cada sala. Sabe-se que ruídos de ventilação aumentam com a velocidade do ar. Fixando a altura $H$ do duto central de alimentação em 500 mm, determine a largura $L$ do duto que limitará a velocidade do ar a um valor máximo de 1,92 m/s.

### Resolução da situação-problema

De acordo com a norma de ventilação, o requisito mínimo de renovação de ar por pessoa, para salas de aula, é de 8,0 l/s. Dessa forma,

$$Q_{pessoa} = 8\frac{l}{s}$$

ou, utilizando o SI,

$$Q_{pessoa} = 8\times10^{-3}\frac{m^3}{s}.$$

Portanto, para uma sala de aula com 20 pessoas (alunos e professor), a vazão volumétrica é calculada como:

$$Q_{sala} = n_{pessoas}\cdot Q_{pessoa} = 20\cdot\left(8\times10^{-3}\frac{m^3}{s}\right) = 0{,}16\frac{m^3}{s}.$$

Para o cálculo da largura do duto central de alimentação, precisamos, primeiro, encontrar a vazão volumétrica total do sistema para alimentar as 6 salas de aula com 20 pessoas cada uma:

$$Q_{total} = n_{salas}\cdot Q_{sala} = 6\times0{,}16\frac{m^3}{s} = 0{,}96\frac{m^3}{s}.$$

Agora, determinamos a largura do duto da seguinte maneira:

$$Q_{total} = V_{máx}\cdot A = V_{máx}\cdot(H\cdot L)\rightarrow L = \frac{Q_{total}}{V_{máx}\cdot H}.$$

Como o ruído aumenta com a velocidade do ar, para uma velocidade do ar de 1,75 m/s, a largura do tudo será de:

$$L = \frac{Q_{total}}{V_{máx}\cdot H} = \frac{0{,}96\frac{m^3}{s}}{1{,}92\frac{m}{s}\cdot0{,}5m} = 1{,}0\,m.$$

Assim, conclui-se que você foi capaz de determinar a largura do duto central de alimentação e pode retornar ao seu superior com o valor correto, que deve ser especificado para o projeto do sistema de ventilação proposto.

## Faça valer a pena

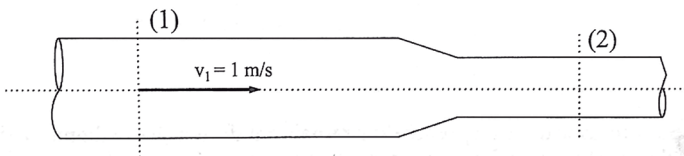
**1.** Uma sala para fumantes deve acomodar 40 pessoas que fumam bastante. Os requisitos mínimos de ar fresco para essas salas são especificados pela ASHRAE (American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers) como 30 l/s por pessoa. Determine a mínima vazão necessária de ar fresco que precisa ser fornecida à sala e o diâmetro do duto se a velocidade do ar não pode exceder os 8 m/s.

Determine o diâmetro do duto de alimentação, se a velocidade do ar não pode exceder os 8 m/s:

a) 0,123 m.
b) 0,224 m.
c) 0,376 m.
d) 0,437 m.
e) 0,518 m.

**2.** Na tubulação da Figura 2.6, escoa água em regime permanente. A seção (1) possui uma área de $10\,cm^2$, enquanto, na seção (2), a área é menor e vale $5\,cm^2$. Sabe-se ainda que a velocidade média do escoamento é de $1\,m/s$ na seção (1).

**Figura 2.6** | Desenho ilustrativo da questão.




Fonte: Brunetti (2008, p. 79).

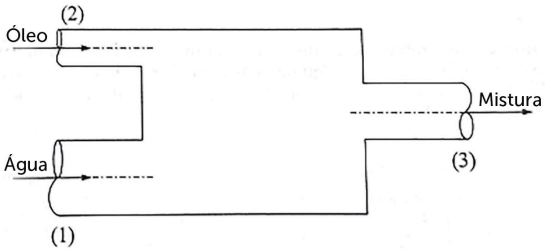
Determine a velocidade média do escoamento na seção (2):

a) 1 m/s.
b) 2 m/s.
c) 3 m/s.
d) 4 m/s.
e) 5 m/s.

**3.** Um tubo admite água $\left(\rho = 1000\,kg/m^3\right)$ em um reservatório com uma vazão de $20\ l/s$. No mesmo reservatório, é trazido óleo $\left(\rho = 800\,kg/m^3\right)$ por outro tubo com uma vazão de $10\ l/s$. A mistura homogênea formada

é descarregada por um tubo de descarga cuja seção tem uma área de $30\ cm^2$, conforme mostra a Figura 2.7.

**Figura 2.7** | Desenho ilustrativo do reservatório utilizado na questão.




Fonte: Brunetti (2008, p. 79).

Qual é a massa específica da mistura no tubo de descarga?

a) 721 $kg/m^3$.
b) 933 $kg/m^3$.
c) 1198 $kg/m^3$.
d) 885 $kg/m^3$.
e) 1029 $kg/m^3$.

# Seção 2.2

## Quantidade de movimentos linear e angular para um volume de controle

### Diálogo aberto

Os projetos de muitas estruturas e equipamentos hidráulicos, como comportas e barragens, bombas e turbinas, perfis aerodinâmicos e, até mesmo, um edifício, dependem das forças que o escoamento de um fluido exerce sobre eles. Um edifício precisa suportar a força dos ventos, ao mesmo tempo que uma turbina necessita remover energia da água que movimenta o seu rotor. Por isso, é importante conhecer as quantidades de movimento linear e angular em uma descrição euleriana.

Nesta unidade, lembre-se de que você foi contratado por uma empresa fabricante de aeronaves para atuar no projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada no mercado brasileiro.

Nesta fase do projeto, você ficou responsável por estimar o empuxo produzido pelo motor a jato que será utilizado para impulsionar a nova aeronave, auxiliado por alguns dados de testes já conhecidos que foram previamente coletados por sua equipe. Lembre-se de que um avião gera empuxo para a frente, quando o ar é empurrado na direção oposta ao voo. Cabe a você essa responsabilidade pelo dimensionamento, portanto, espera-se que desenvolva o raciocínio crítico e de solução de problemas. Quais são as variáveis relevantes para esses cálculos? Quais as considerações necessárias para a simplificação do problema? Quais equações básicas devemos utilizar? Com esse resultado em mãos, você deve elaborar um relatório técnico contendo o memorial de cálculo e encaminhá-lo ao seu gestor.

Você deve, portanto, conhecer, compreender e saber aplicar a equação da quantidade de movimento linear, também chamada de segunda lei de Newton, para um volume de controle, que é inercial (em repouso ou movendo-se com velocidade constante) ou não inercial (com aceleração retilínea). Tal conhecimento é necessário

para você quantificar as forças que atuam sobre o volume de controle, além de trabalhar com a quantidade de movimento angular para o correto cálculo do torque sobre ele.

Pronto para mais este desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Equação da quantidade de movimento linear para um volume de controle inercial

Caro aluno, já estudamos sobre a conservação de massa para um volume de controle e suas simplificações para escoamento incompressível e escoamento estacionário. Agora, abordaremos outras duas importantes leis básicas: a equação da quantidade de movimento linear e a equação da quantidade de movimento angular.

Lembre-se de que a segunda lei de Newton estabelece que a força resultante, $\vec{F}$, agindo sobre um sistema de referência inercial, é igual à taxa de variação temporal da sua quantidade de movimento linear $\vec{P}$:

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_s$$

em que a quantidade de movimento linear é dada por:

$$\vec{P} = \int_{Sistema} \vec{V}\, dm = \int_{Sistema} \vec{V}\, \rho\, d\forall,$$

e a força resultante, $\vec{F}$, agindo sobre o sistema, inclui todas as forças de campo e de superfície, ou seja:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s$$

**Assimile**

Na dedução do teorema de transporte de Reynolds, o sistema e o volume de controle coincidem no tempo $t_0$. Dessa forma, temos:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema} = \vec{F})_{sobre\ o\ sistema} = \vec{F})_{sobre\ o\ volume\ de\ controle}.$$

Para encontrarmos a formulação de volume de controle aplicável à segunda lei de Newton, recorremos ao teorema de transporte de Reynolds (TTR):

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\,\rho\,d\forall + \int_{SC} \eta\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Nesse caso, a propriedade extensiva é $N = \vec{P}$ e sua propriedade intensiva correspondente é $\eta = \vec{V}$. Ao substituir os valores de $N$ e $\eta$ na equação do TTR, obtemos:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\,d\forall + \int_{SC} \vec{V}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

mas, pela segunda lei de Newton, temos $\vec{F} = d\vec{P}/dt$. Portanto:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\,d\forall + \int_{SC} \vec{V}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Essa é a equação geral da quantidade de movimento linear para um volume de controle, que estabelece que a força externa resultante atuando sobre o volume de controle é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear dentro do volume de controle, somada aos fluxos de entrada e saída da quantidade de movimento linear através da superfície de controle.

Para os casos em que as velocidades e as áreas são uniformes em cada entrada e saída, podemos usar a equação:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\,d\forall + \sum_{SC} \vec{V}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

ou, ainda, lembrando a definição de vazão em massa,

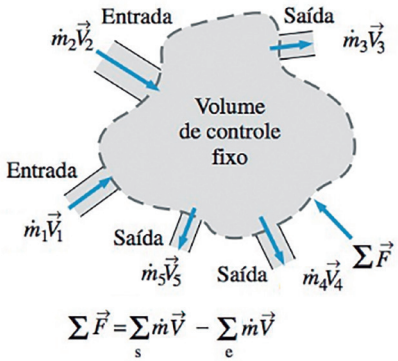
$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\,d\forall + \sum_{SC} \dot{m}\vec{V}.$$

Se o escoamento ocorre em regime permanente, o termo da derivada temporal desaparece e ficamos com:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \sum_{sai} \dot{m}\vec{V} - \sum_{entra} \dot{m}\vec{V}.$$

Essa equação confirma que a força resultante que age sobre o volume de controle durante o escoamento em regime permanente é igual à diferença entre os fluxos de quantidade de movimento linear na saída e na entrada, conforme ilustra a Figura 2.8.

**Figura 2.8** | Força resultante agindo sobre o volume de controle.




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 253).

Muitos problemas práticos envolvem apenas uma entrada e uma saída, de modo que a vazão em massa permanece constante. Dessa forma:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \dot{m}\left(\vec{V}_{sai} - \vec{V}_{entra}\right).$$

Observe que a equação da quantidade de movimento linear é vetorial e, portanto, cada termo deve ser tratado como um vetor. Além disso, as componentes dessa equação podem ser escritas em termos das coordenadas ortogonais *x*, *y* e *z*:

$$F_x = F_{Cx} + F_{Sx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\,d\forall + \int_{SC} u\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

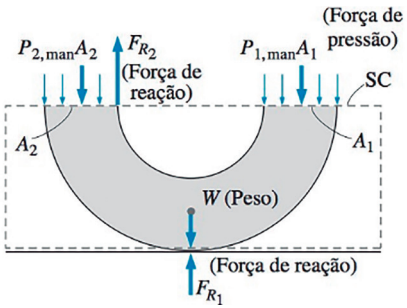
$$F_y = F_{Cy} + F_{Sy} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\,\rho\,d\forall + \int_{SC} v\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$F_z = F_{Cz} + F_{Sz} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\,\rho\,d\forall + \int_{SC} w\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Os termos *u*, *v* e *w* são, respectivamente, as componentes da velocidade $\vec{V}$, nas direções *x*, *y* e *z*.

Na maioria dos casos, a força $\vec{F}$ consiste em forças peso, de pressão e de reação (Figura 2.9). As pressões manométricas, medidas em relação à pressão atmosférica local, são usadas, uma vez que a pressão atmosférica se cancela em todos os lados da superfície de controle.

**Figura 2.9** | Forças atuantes em um cotovelo de $180°$ apoiado sobre o piso.




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 250).

**Reflita**

Você certamente já presenciou a aplicação da segunda lei de Newton, em um volume de controle, ao manusear uma simples mangueira de jardim. Quando a vazão de água na mangueira é baixa, a força necessária para segurá-la é pequena; por outro lado, quando aumentamos a vazão, uma força maior é necessária para manter a mangueira no lugar. Como você explica esse fato?

Para as aplicações da equação da quantidade de movimento linear apresentadas anteriormente, é extremamente importante salientar que as coordenadas do volume de controle (em relação às quais medimos todas as velocidades) são inerciais e estacionárias. Na sequência deste material, serão mostradas aplicações para o volume de controle movendo-se com velocidade constante e aceleração retilínea.

### Volume de controle movendo-se com velocidade constante

Vamos supor, agora, que o volume de controle se movimenta com velocidade constante em relação a um referencial estacionário *XYZ*. Esse volume de controle também é inercial, pois não está acelerando em relação à referência. Podemos, então, definir um

novo sistema de coordenadas *xyz* fixas a esse volume de controle, e todas as velocidades devem ser medidas em relação a ele. Dessa forma, a equação do movimento linear pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A},$$

na qual $\vec{V}_{xyz}$ é a velocidade medida em relação ao volume de controle, ou seja, a velocidade medida por um observador movendo-se junto ao volume de controle.

As componentes dessa equação podem ser escritas em coordenadas ortogonais *x*, *y* e *z*. Assim, temos:

$$F_x = F_{Cx} + F_{Sx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\, d\forall + \int_{SC} u\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$F_y = F_{Cy} + F_{Sy} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\,\rho\, d\forall + \int_{SC} v\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

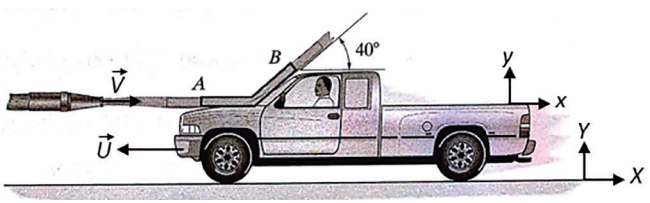
$$F_z = F_{Cz} + F_{Sz} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\,\rho\, d\forall + \int_{SC} w\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Observe, cuidadosamente, que só devemos considerar as componentes da velocidade $\vec{V}_{xyz}$, enquanto os termos da vazão mássica, $\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = \rho V_{xyz} dA = \dot{m}$, são escalares.

**Exemplificando**

A camionete da Figura 2.10 está movendo-se para a esquerda, com velocidade $\vec{U} = 10\,m/s$, contra um jato de água, com velocidade $\vec{V} = 2\,m/s$, que é desviado pelo para-brisa.

**Figura 2.10** | Volume de controle movendo-se com velocidade constante.




Fonte: adaptada de Hibbeler (2016, p. 267).

Dessa forma, a velocidade $\vec{V}_{xyz}$, medida em relação ao volume de controle, é dada por:

$$\vec{V}_{xyz} = \vec{V} - \vec{U} = 2\,m/s - (-10\,m/s) = 12\,m/s.$$

Analisando as velocidades nos pontos de interesse *A* e *B*, temos:

$$V_A = 12\,m/s,\ u_A = 12\,m/s \text{ e } v_A = 0\,m/s.$$

Como o escoamento é estacionário e incompressível e as áreas das seções são iguais nos pontos *A* e *B*, obtém-se $V_A = V_B = 12\,m/s$.

Portanto:

$$u_B = 12\cos 40°\,m/s = 9{,}2\,m/s \text{ e } v_B = 12\,\text{sen}\,40°\,m/s = 7{,}7\,m/s.$$

Concluímos que o motorista da camionete, que se move junto ao volume de controle, perceberá exatamente essas velocidades nos pontos *A* e *B*.

### Volume de controle movendo-se com aceleração retilínea

As deduções feitas anteriormente nesta seção assumem que o sistema de referência é inercial, isto é, em repouso ou movendo-se com velocidade constante. Em muitas aplicações, é conveniente utilizar um sistema de referência não inercial ou acelerado, como no lançamento de um foguete, que precisa acelerar para decolar. Para esses casos, a equação geral da quantidade de movimento linear é modificada e torna-se:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s - \int_{VC} \vec{a}_{rf}\,\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\,\rho\,d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\,\rho\,\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A},$$

em que $\vec{a}_{rf}$ é a aceleração retilínea do referencial não estacionário *xyz* em relação ao referencial estacionário *XYZ*.

Perceba que se o volume de controle não está acelerando em relação ao referencial estacionário *XYZ*, então $\vec{a}_{rf} = 0$. Portanto, a equação é reduzida para o caso em que o volume de controle se move com velocidade constante ou permanece estacionário.

### O princípio da quantidade de movimento angular

Você já viu que o princípio da quantidade de movimento angular é o equivalente da segunda lei de Newton para sistemas em rotação,

explicando que o torque resultante, $\vec{T}$, agindo sobre o sistema, é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular $\vec{H}$:

$$\vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_s .$$

Essa equação é válida para uma quantidade fixa de massa e um referencial inercial. A quantidade de movimento angular do sistema é o produto vetorial entre o vetor posição $\vec{r}$ e o vetor quantidade de movimento linear $\vec{P}$ aplicado nele.

$$\vec{H} = \int_{Sistema} \vec{r} \times \vec{P} = \int_{Sistema} \vec{r} \times \vec{V}\, dm = \int_{Sistema} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho\, d\forall .$$

O torque, $\vec{T}$, pode ser produzido por forças de superfície e de campo e também por eixos que cruzam a fronteira do sistema:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \vec{r} \times \vec{F}_C + \vec{T}_{eixo},$$

em que $\vec{r}$ é o vetor posição que localiza cada elemento de massa ou volume do sistema, com respeito ao sistema de coordenadas.

Para encontrarmos a formulação de volume de controle aplicável à equação da quantidade de movimento angular, recorremos ao teorema de transporte de Reynolds (TTR):

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Nesse caso, a propriedade extensiva é $N = \vec{H}$ e sua propriedade intensiva correspondente é $\eta = \vec{r} \times \vec{V}$. Substituindo os valores de $N$ e $\eta$ na equação do TTR, obtemos:

$$\left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Pela segunda lei de Newton $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ e anteposto que o sistema e o volume de controle coincidiam no estante $t_0$, $\vec{T}\Big)_{sobre\,o\,sistema} = \vec{T}\Big)_{sobre\,o\,volume\,de\,controle}$, portanto:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \vec{r} \times \vec{F}_C + \vec{T}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Essa é a equação geral da quantidade de movimento angular para um volume de controle, estabelecendo que o torque resultante que atua sobre o volume de controle é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular dentro do volume de controle, somada aos fluxos de entrada e saída de quantidade de movimento angular através da superfície de controle.

Para os casos em que as velocidades e as áreas são uniformes em cada entrada e saída, o volume de controle é fixo e o escoamento é realizado em regime permanente, o torque resultante pode ser obtido pela expressão:

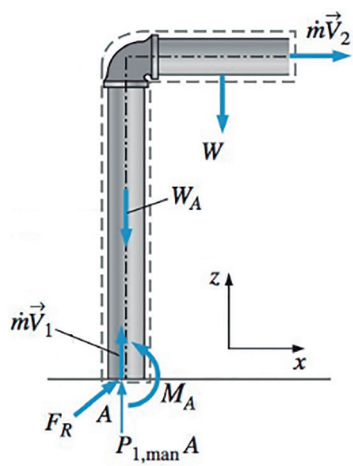
$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \vec{r} \times \vec{F}_C + \vec{T}_{eixo} = \sum_{sai} \left( \vec{r} \times \dot{m} \vec{V}_m \right) - \sum_{entra} \left( \vec{r} \times \dot{m} \vec{V}_m \right).$$

Essa equação mostra que o torque total que age sobre o volume de controle durante o escoamento em regime permanente é igual à diferença entre os fluxos de quantidade de movimento angular na saída e na entrada através da superfície de controle.

Se todas as forças e fluxos de movimento linear estão provocando momentos no mesmo plano e em relação ao mesmo eixo (Figura 2.11), o torque pode ser obtido na forma escalar como:

$$T = r \times F_S + r \times F_C + T_{eixo} = \sum_{s} \left( r \, \dot{m} V_m \right) - \sum_{e} \left( r \, \dot{m} V_m \right).$$

**Figura 2.11** | Torque total agindo sobre o ponto *A*.




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 270).

Observe que as forças que agem sobre o volume de controle consistem em forças de campo, como a gravidade, e em forças de superfície, como a pressão e as forças de reação. O torque total consiste nos momentos dessas forças, bem como nos torques aplicados ao volume de controle.

**Pesquise mais**

De forma detalhada, o vídeo a seguir explica o conceito da quantidade de movimento linear para um volume de controle inercial:

ME SALVA! Mecânica dos fluidos – Quantidade de movimento linear para um volume de controle inercial. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Utaj0R-nSxY&list=PLf1lowbdbFICGuf8AgDT9Dy9ulNwK7tVa&index=24>. Acesso em: 30 nov. 2017a. (**Vídeo do YouTube**)

Confira, também, na sequência, dois links bastante interessantes que trazem resoluções de exercícios aplicando o tema estudado:

ME SALVA! Mecânica dos fluidos – Exercício: força de reação em um duto em escoamento permanente uniforme. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=v0Oejhxa2Pk&index=25&list=PLf1lowbdbFICGuf8AgDT9Dy9ulNwK7tVa>. Acesso em: 30 nov. 2017b. (Vídeo do YouTube)

_____. Mecânica dos fluidos – Exercício: variação da quantidade de movimento. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=xqPIA_7Qjhg&list=PLf1lowbdbFICGuf8AgDT9Dy9ulNwK7tVa&index=26>. Acesso em: 30 nov. 2017c. (Vídeo do YouTube)

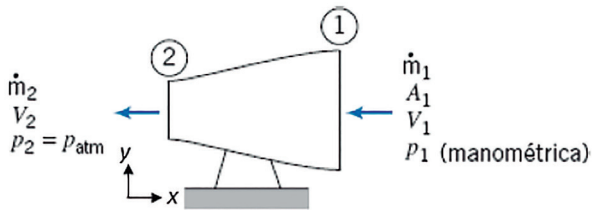
## Sem medo de errar

Uma empresa fabricante de aeronaves contratou você, aluno, para atuar na equipe de projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada no mercado brasileiro.

Nesta fase do projeto, você ficou responsável por estimar o empuxo produzido pelo motor a jato que será utilizado para impulsionar essa nova aeronave, auxiliado por alguns dados de testes já conhecidos, coletados previamente pela sua equipe. Lembre-se de que um avião gera empuxo para a frente, quando o ar é empurrado na direção oposta ao voo. Cabe a você essa responsabilidade, portanto, espera-se que desenvolva o raciocínio

crítico e de solução de problemas. As variáveis medidas pela sua equipe, bem como a ilustração do aparato experimental utilizado, são mostradas na Figura 2.12.

**Figura 2.12** | Desenho esquemático de uma máquina típica para testes experimentais de motores a jato.




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 158).

Para estimar a força de empuxo produzida pelo motor, devemos aplicar a equação geral da quantidade de movimento linear para o volume de controle em questão:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

A equação da quantidade de movimento linear é uma equação vetorial e, portanto, cada termo deve ser tratado como um vetor:

Eixo *x*: $F_x = F_{Cx} + F_{Sx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\, d\forall + \int_{SC} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

Eixo *y*: $F_y = F_{Cy} + F_{Sy} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\,\rho\, d\forall + \int_{SC} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$

Estamos interessados no empuxo que ocorre no sentido horizontal. Dessa forma, utilizaremos apenas a componente *x* da equação:

$$F_x = F_{Cx} + F_{Sx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\, d\forall + \int_{SC} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Para o eixo *x*, não existem forças de campo, uma vez que esse tipo de força depende da aceleração da gravidade que ocorre na vertical. Sendo consideradas apenas as forças de superfície que atuam sobre o volume de controle, temos:

$$F_{Sx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\, d\forall + \int_{SC} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Levando em conta que o regime de operação do motor é permanente durante os testes e que as velocidades e as áreas são uniformes em cada entrada e saída, podemos usar:

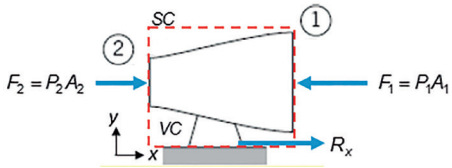
$$F_{Sx} = \sum_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

ou, ainda, lembrando a definição de vazão em massa:

$$F_{Sx} = \sum_{SC} u\,\dot{m} = u_2\,\dot{m}_2 - u_1\,\dot{m}_1.$$

As forças de superfície atuando sobre o volume de controle são provenientes das pressões $P_1$ e $P_2$ agindo sobre as áreas nas superfícies de controles 1 e 2, e da reação $R_x$, que tende a manter o motor a jato fixo na bancada de testes, conforme mostra a Figura 2.13.

**Figura 2.13** | Forças atuando sobre o volume de controle.




Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Portanto:

$$F_{Sx} = R_x - P_1A_1 + P_2A_2 = u_2\,\dot{m}_2 - u_1\,\dot{m}_1.$$

Além disso, $P_2 = 0$ (pressão manométrica), $u_1 = -V_1$ e $u_2 = -V_2$. Substituindo, obtemos:

$$R_x - P_1A_1 = V_1\,\dot{m}_1 - V_2\,\dot{m}_2.$$

A força de empuxo *E* possui o mesmo módulo do que a força de reação $R_x$, porém em direção oposta. Dessa forma, temos $E = -R_x$. Assim:

$$-E - P_1A_1 = V_1\,\dot{m}_1 - V_2\,\dot{m}_2.$$

Finalmente:

$$E = V_2\,\dot{m}_2 - V_1\,\dot{m}_1 - P_1A_1.$$

Após obtermos essa expressão, é possível estimar o empuxo produzido por esse motor a jato para diversos regimes de operação, sendo conhecidas as vazões mássicas (do ar na entrada e dos gases de exaustão na saída), as velocidades, as pressões e a geometria do motor.

## Avançando na prática

### Dinâmica do movimento para o lançamento de um foguete

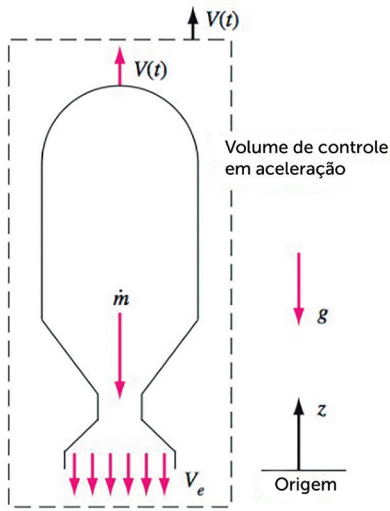
### Descrição da situação-problema

Uma nova empresa do setor aeroespacial está desenvolvendo um foguete e quer compreender a dinâmica do movimento deste para implementar em seu projeto. Para isso, essa empresa contratou você a fim de desenvolver um estudo preliminar e deduzir uma equação diferencial do movimento vertical do foguete da velocidade em função do tempo.

### Resolução da situação-problema

Seja a massa inicial $M_0$; assuma um fluxo de massa de escape permanente, com velocidade $V_e$ relativa ao foguete, como mostra a Figura 2.14. O padrão de escoamento dentro do motor do foguete pode ser considerado permanente e o atrito do ar é desprezado.

**Figura 2.14** | Desenho esquemático do volume de controle em aceleração.




Fonte: White (2010, p. 179).

O volume de controle adequado, mostrado na Figura 2.14, engloba o foguete, corta o jato de saída e acelera-se para cima, com velocidade $V(t)$ do foguete. A equação da quantidade de movimento

linear para o volume de controle não inercial é aplicada apenas para o eixo *z*, tornando-se:

$$\text{Eixo z: } \vec{F}_z = \vec{F}_{Cz} + \vec{F}_{Sz} - \int_{VC} a_{rf}\,\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\,\rho\,d\forall + \int_{SC} w\,\rho\,\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}.$$

Observe, cuidadosamente, que só devemos considerar a componente *w* da velocidade $\vec{V}_{xyz}$, enquanto os termos da vazão mássica, $\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = \rho V_{xyz} dA = \dot{m}$, são escalares, portanto:

$$\vec{F}_z = \vec{F}_{Cz} + \vec{F}_{Sz} - \int_{VC} a_{rf}\,\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\,\rho\,d\forall + \sum_{sai} w\dot{m} - \sum_{entra} w\dot{m}.$$

Contudo, só existe um único fluxo saindo do volume de controle. Dessa forma:

$$\vec{F}_z = \vec{F}_{Cz} + \vec{F}_{Sz} - \int_{VC} a_{rf}\,\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\,\rho\,d\forall + w\dot{m}.$$

Como o regime é permanente, temos:

$$\vec{F}_z = \vec{F}_{Cz} + \vec{F}_{Sz} - \int_{VC} a_{rf}\,\rho d\forall = w\dot{m}.$$

A única força presente é a força peso, que possui direção contrária ao movimento, ou seja, $\vec{F}_z = \vec{F}_{Cz} = -mg$. A velocidade $V_e$ também possui direção oposta ao movimento, dessa forma: $w = -V_e$. Lembrando que $dm = \rho d\forall$, a equação anterior torna-se:

$$-mg - \int_{VC} a_{rf}\,dm = -V_e\,\dot{m}\,.$$

O termo $a_{rf} = dV/dt$ é a aceleração constante do foguete, portanto:

$$-mg - m\frac{dV}{dt} = -V_e\,\dot{m},$$

em que $m = m(t) = M_0 - \dot{m}t$.

Separando as variáveis e integrando, com $V = 0$ em $t = 0$:

$$\int_0^V dV = V_e\dot{m}\int_0^t \frac{dt}{M_0 - \dot{m}t} - g\int_0^t dt$$

ou:

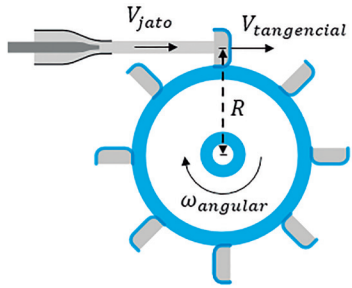
$$V(t) = -V_e \ln\left(1 - \frac{\dot{m}t}{M_0}\right) - gt\,.$$

Essa é uma formulação aproximada clássica da dinâmica do movimento de foguetes. Com base nela, é possível conhecer a velocidade do foguete em cada instante de tempo e saber se sua velocidade será capaz de vencer a aceleração da gravidade, para que possa, então, entrar em órbita.

## Faça valer a pena

**1.** As turbinas Pelton são turbinas de ação que recebem um jato de fluido proveniente de um injetor. Esse jato incide, tangencialmente, ao rotor em pás distribuídas ao longo de sua periferia, conforme ilustra a Figura 2.15.

**Figura 2.15** | Desenho esquemático da questão 1




Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a força aplicada nas pás é proporcional à variação da quantidade de movimento do fluido (segunda lei de Newton), avalie as afirmações a seguir:

I. Para uma mesma velocidade do fluido na saída do bocal do injetor, quanto maior o diâmetro do rotor, maior será a velocidade angular.

II. Para uma mesma velocidade do fluido na saída do bocal do injetor, quanto maior o diâmetro do rotor, maior será o torque.

III. Para um mesmo formato e tamanho de pás, quanto maior a velocidade do fluido na saída do bocal do injetor, maior será a força tangencial.

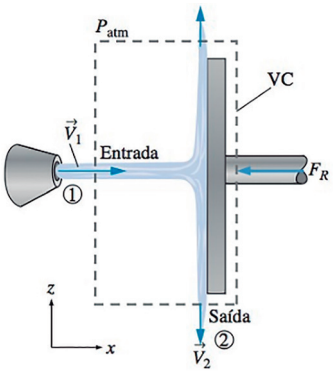
É correto o que se afirma em:

a) I, apenas.
b) III, apenas.
c) I e II, apenas.
d) II e III, apenas.
e) I, II e III.

**2.** Saber identificar os diversos tipos de forças e momentos que atuam sobre um volume de controle e determinar as forças associadas ao escoamento de fluidos é de suma importância no projeto e na resolução de exercícios que abrangem a mecânica dos fluidos.

Sabe-se que a água é acelerada por um bocal a uma velocidade média de 20 *m/s* e atinge uma placa vertical fixa com vazão de 10 *kg/s* e com velocidade normal média de 20 *m/s*. Após o choque, a corrente de água espalha-se igualmente em todas as direções do plano da placa, conforme mostra a Figura 2.16.

**Figura 2.16** | Desenho esquemático do aparato utilizado na questão 2.



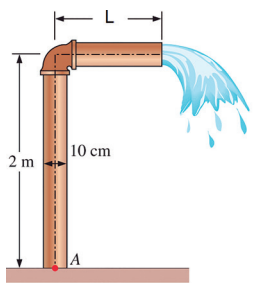

Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 257).

A força necessária para evitar que a placa se movimente horizontalmente, devido à corrente de água, é de:

a) 100 *N*.
b) 200 *N*.
c) 300 *N*.
d) 400 *N*.
e) 500 *N*.

**3.** Água subterrânea é bombeada através de um tubo com 10 *cm* de diâmetro, que consiste em uma seção vertical com 2 *m* de comprimento e uma seção horizontal de comprimento *L* que deve ser dimensionada, conforme mostra a Figura 2.17.

**Figura 2.17** | Desenho esquemático do aparato utilizado na questão 3.




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 270).

O tubo é ancorado no solo por uma base de concreto no ponto *A*. Sabendo que a água $\left(\rho = 1000\,kg/m^3\right)$ é descarregada para o ar atmosférico à velocidade de 3 *m/s*, e a massa da seção do tubo horizontal, quando preenchido com água, é de 12 *kg* por metro linear, o comprimento *L* necessário que tornaria nulo o momento no ponto *A* é de:

a) 1,24 metro.
b) 1,02 metro.
c) 1,55 metro.
d) 2,10 metros.
e) 1,73 metro.

# Seção 2.3

## Primeira e segunda leis da termodinâmica para um volume de controle

### Diálogo aberto

Muitos equipamentos que envolvem o movimento de fluidos exigem a utilização das equações da primeira lei da termodinâmica, muitas vezes chamada de equação da energia, e da segunda lei da termodinâmica, em seus projetos, a fim de dimensioná-los corretamente. Uma caldeira troca calor com sua vizinhança, sendo essencial conhecer essa energia trocada em forma de calor, ao mesmo tempo que um compressor, além de trocar calor com o meio externo, necessita de uma potência para seu acionamento, sendo necessário, neste caso, conhecer tanto a troca de calor com o meio quanto a energia recebida em forma de trabalho.

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa fabricante de aeronaves para atuar no projeto e no desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada futuramente no mercado brasileiro. Um novo projeto surgiu e, você, agora chefe da equipe de projetos, deve ser capaz de determinar a potência requerida pelo compressor de um novo motor a jato, que foi adquirido pela empresa para a utilização nessa aeronave. Para isso, você deve desenvolver o raciocínio crítico e de solução de problemas. Esse dimensionamento deve ser realizado considerando diversos cenários de operação, e, após alguns testes, sua equipe retornou com uma série de dados para você concluir sua tarefa com êxito. Quais dados são relevantes para esse cálculo? Quais as considerações necessárias para simplificação do problema? Como selecionar o volume de controle de forma correta? Quais equações devemos utilizar? Com os resultados em mãos, você deve encaminhar um relatório para o responsável que selecionará o melhor tipo e modelo de compressor para a aplicação requerida.

Para resolver o problema proposto, você deve conhecer, compreender e saber aplicar as equações da primeira e da segunda leis da termodinâmica para um volume de controle, bem como

relembrar os conceitos de entalpia e entropia já estudados, com o objetivo de quantificar todas as energias que atuam sobre o volume de controle, devendo também saber identificar e analisar os tipos de trabalhos aplicados no volume de controle ou sobre o volume de controle e o calor trocado por ele com sua vizinhança.

Pronto para mais este desafio? Bons estudos!

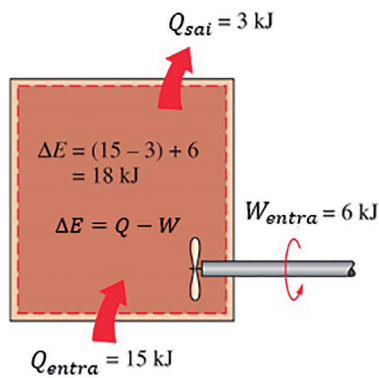
## Não pode faltar

### A primeira lei da termodinâmica

Caro aluno, na seção anterior, estudamos a equação da quantidade de movimento linear para um volume de controles inercial e não inercial e a equação da quantidade de movimento angular para um volume de controle inercial. Nesta seção, abordaremos as duas últimas, e também muito importantes, leis básicas: a primeira e a segunda leis da termodinâmica.

Conforme vimos, a primeira lei da termodinâmica é um enunciado do princípio da conservação de energia que estabelece que a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante. De forma simplificada, a variação da energia, $\Delta E$, contida em um sistema é expressa por meio da diferença entre a quantidade de calor líquida, $Q$, trocada com o meio ambiente e o trabalho líquido, $W$, realizado durante a transformação do sistema, conforme ilustra a Figura 2.18.

**Figura 2.18** | Variação da energia de um sistema.




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 215).

A variação de energia em um sistema pode ser expressa na forma de taxa como:

$$\left(\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt}\right)_s.$$

O ponto sobre as variáveis representa uma derivada em relação ao tempo, sendo $\dot{Q} = \dot{Q}_{entra} - \dot{Q}_{sai}$ a taxa de entrada de calor fornecida para o sistema (negativa, se for fornecida pelo sistema); $\dot{W} = \dot{W}_{sai} - \dot{W}_{entra}$ é a taxa de saída de trabalho, chamada de potência, realizada pelo sistema (negativa, se realizada sobre o sistema), e $dE/dt$ é a taxa de variação da quantidade total de energia do sistema.

A quantidade de energia total do sistema é dada por:

$$E = \int_{Sistema} e\,dm = \int_{Sistema} e\,\rho\,d\forall$$

e:

$$e = u + e_c + e_p = u + \frac{V^2}{2} + gz,$$

em que $u$ é a energia interna específica, $e_c = V^2/2$ é a energia cinética específica, $e_c = gz$ é a energia potencial específica, $V$, a velocidade, $g$, a aceleração da gravidade e $z$, a altura de um sistema de massa $dm$. A energia total é uma propriedade e seu valor não varia, a menos que o estado do sistema mude.

**Assimile**

Na dedução do teorema de transporte de Reynolds, o sistema e o volume de controle coincidem no tempo $t_0$. Dessa forma, temos que:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{sistema} = \left(\dot{Q} - \dot{W}\right)_{sobre\,o\,sistema} = \left(\dot{Q} - \dot{W}\right)_{sobre\,o\,volume\,de\,controle}.$$

Para encontrarmos a formulação de volume de controle aplicável à segunda lei de Newton, recorremos ao teorema de transporte de Reynolds (TTR):

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\,\rho\,d\forall + \int_{SC} \eta\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Neste caso, a propriedade extensiva é $N = E$ e sua propriedade intensiva correspondente é $\eta = e$. Substituindo os valores de $N$ e $\eta$ na equação do TTR, obtemos:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\,d\forall + \int_{SC} e\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A},$$

mas, como $\dot{Q} - \dot{W} = dE/dt$, temos, portanto:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\,d\forall + \int_{SC} e\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Essa não é a forma final usada na aplicação da primeira lei para volume de controle. Diferentemente de um sistema, um volume de controle pode envolver inúmeras formas de trabalho. Para obter uma formulação adequada, portanto, devemos examinar minuciosamente o termo de taxa de trabalho, $\dot{W}$.

### Taxa de trabalho realizado por um volume de controle

A taxa de realização de trabalho com o tempo, $\dot{W}[J/s]$, é chamada de potência, cuja unidade é o Watt $[W]$, sendo essa taxa, normalmente, subdividida em quatro classificações:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cisalhamento} + \dot{W}_{outros}.$$

Analisaremos cada termo separadamente.

**1. Trabalho de eixo:** um grande número de sistemas de escoamento de fluidos envolve a utilização de máquinas, como uma bomba, uma turbina, um ventilador ou um compressor. Para esses sistemas, o eixo atravessa a superfície de controle, fornecendo ou removendo trabalho do volume de controle.

A transferência de trabalho, associada a todos esses dispositivos, é chamada de trabalho de eixo $W_{eixo}$, e a potência transmitida por meio de um eixo giratório é:

$$\dot{W}_{eixo} = \omega \cdot T_{eixo},$$

em que $\omega$ é a velocidade angular em *rad/s* e $T_{eixo}$, o torque do eixo em $N \cdot m$.

Vale ressaltar que motores e turbinas produzem trabalho $\left(\dot{W}_{eixo} > 0\right)$; compressores, bombas e ventiladores consomem trabalho $\left(\dot{W}_{eixo} < 0\right)$.

**2. Trabalho realizado por tensões normais:** o trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ através de um deslocamento $d\vec{s}$ pode ser calculado como:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

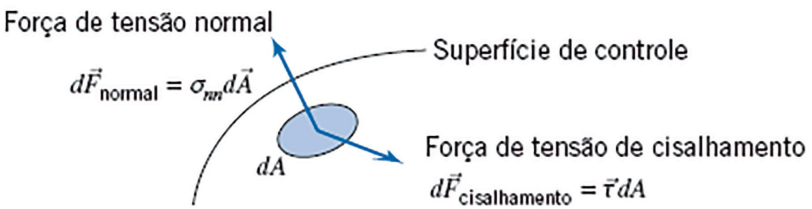
Para obtermos a taxa na qual o trabalho é realizado, basta dividirmos ambos os termos da equação anterior pelo incremento de tempo $dt$. Assim, a taxa de trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é dada por:

$$\frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} \rightarrow \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V}.$$

Podemos utilizar essa equação para calcular a taxa de trabalho realizado tanto para tensões normais como para tensões cisalhantes.

Considere a superfície de controle mostrada na Figura 2.19. Nela é destacada uma área elementar $d\vec{A}$, na qual atuam uma força de tensão normal e uma força de tensão cisalhante.

**Figura 2.19** | Forças de tensão normal e de cisalhamento.




Fonte: Fox et al. (2014, p. 144).

A força de tensão normal pode ser expressa como o produto entre a tensão normal $\sigma$ e o vetor do elemento de área $d\vec{A}$ (normal à superfície de controle e apontando para fora do volume de controle):

$$d\vec{F}_{normal} = \sigma \, d\vec{A}.$$

Então, a taxa de trabalho realizado sobre o elemento de área é:

$$\dot{W}_{normal} = \sigma \, d\vec{A} \cdot \vec{V}.$$

Como o trabalho realizado pelo volume de controle é o negativo do trabalho realizado sobre o volume de controle, a taxa total de trabalho realizada para fora do volume de controle devido às tensões normais é:

$$\dot{W}_{normal} = -\int_{SC} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

**3. Trabalho realizado por tensões de cisalhamento:** assim como o trabalho é realizado por tensões normais, pode ser realizado por tensões de cisalhamento, conforme mostra a Figura 2.20. A força de cisalhamento que atua sobre um elemento de área é dada por:

$$d\vec{F}_{cisalhamento} = \vec{\tau} \, dA,$$

em que o vetor tensão de cisalhamento $\vec{\tau}$ atua em alguma direção no plano de $dA$. Então, a taxa de trabalho realizado sobre o elemento de área é:

$$\dot{W}_{cisalhamento} = \vec{\tau} \, dA \cdot \vec{V}.$$

Uma vez que o trabalho realizado pelo volume de controle é o negativo do trabalho realizado sobre o volume de controle, a taxa total de trabalho realizado para fora do volume de controle devido às tensões cisalhantes é dada por:

$$\dot{W}_{cisalhamento} = -\int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dA.$$

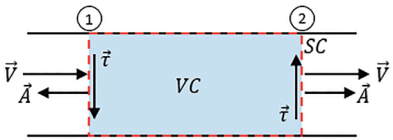
Esse termo será igual a zero, dependendo da escolha apropriada das superfícies de controle (daí a importância em saber selecionar corretamente o volume de controle adequado). Ao escolhermos uma superfície de controle que corte cada passagem perpendicularmente ao escoamento, então $\vec{\tau}$ será perpendicular a $\vec{V}$. Dessa forma,

$$\vec{\tau} \cdot \vec{V} = \tau V \cos(90°) = 0 \;\rightarrow\; \dot{W}_{cisalhamento} = 0.$$

## Exemplificando

Considere o escoamento de um fluido qualquer através de uma tubulação retilínea com diâmetro mostrado na Figura 2.20.

**Figura 2.20** | Tensões de cisalhamento atuando no *VC*.




Fonte: elaborada pelo autor.

Quando selecionamos a superfície de controle cortando cada passagem perpendicularmente ao escoamento, fica claro que, em ambas as seções 1 e 2, $\vec{\tau}$ será perpendicular a $\vec{V}$, de modo que o produto escalar entre ambos é nulo, sendo, portanto, $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$.

**4. Outros trabalhos:** além dos trabalhos realizados por eixos, forças normais e forças cisalhantes, o trabalho pode ser realizado por outras forças, como a força elétrica ou força magnética. Na maioria dos problemas, esse tipo de força é desprezado. Com a avaliação de todos os termos em $\dot{W}$, obtemos:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} - \int_{SC} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{cisalhamento} + \dot{W}_{outros}.$$

### A primeira lei da termodinâmica para um volume de controle

Podemos agora substituir a expressão para $\dot{W}$ na equação da primeira lei, obtida pelo teorema de transporte de Reynolds, resultando em:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} + \int_{SC} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Rearranjando a equação anterior, obtemos:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{SC} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

A massa específica, $\rho$, de um fluido é o inverso do seu volume específico, $v$. Dessa forma, $\rho = 1/v$ e $v\rho = 1$, então:

$$\int_{SC} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{SC} \sigma (v\rho) \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Dessa forma:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\, d\forall + \int_{SC} e\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} - \int_{SC} \sigma\, v\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Ao colocar os dois últimos termos dessa equação dentro da mesma integral, ficamos com:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\, d\forall + \int_{SC} (e - \sigma\, v)\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Para os escoamentos de interesse em Engenharia, a contribuição das tensões normais é igual ao negativo da pressão termodinâmica, ou seja, $\sigma = -P$.

Finalmente, ao substituir $e = u + V^2/2 + gz$ apenas no termo à direita, obtemos:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\ \rho\, d\forall + \int_{SC}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Na termodinâmica, usamos a definição de entalpia, $h = u + Pv$, dada em $kJ/kg$, na qual $u$ representa a energia interna específica do fluido e $Pv$, o trabalho do fluxo.

Essa é a equação mais geral de conservação de energia para um volume de controle, mas não é uma forma conveniente de resolver problemas práticos de Engenharia. É desejável, portanto, reescrevê-la para que se torne mais útil. Podemos, primeiramente, desconsiderar o termo $\dot{W}_{outros}$. Ao escolher superfícies de controle que cortem cada passagem perpendicularmente ao escoamento, temos $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$. Dessa forma:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\ \rho\, d\forall + \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

A integração deve ser executada sobre as superfícies de controle de saída e entrada. Considerando o escoamento uniforme, de modo

que todas as propriedades sejam constantes em cada entrada ou saída e lembrando a definição da vazão em massa $\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, podemos calcular:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \, \rho \, d\forall + \sum_{sai} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{entra} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right).$$

O uso dessa equação é limitado a volumes de controle fixos, escoamentos uniformes nas entradas e saídas e trabalho devido a outros efeitos e forças de cisalhamento considerados desprezíveis. No entanto, essas considerações não diminuem sua grande aplicabilidade em problemas práticos de Engenharia.

Para os casos em que o regime é permanente, nenhuma propriedade varia com o tempo. Assim:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \sum_{sai} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{entra} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right).$$

### A segunda lei da termodinâmica

Conforme já estudamos, a formulação da segunda lei da termodinâmica, para sistema, pode ser escrita como:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{T},$$

em que a entropia total do sistema é dada por:

$$S = \int_{Sistema} s \, dm = \int_{Sistema} s \, \rho \, d\forall.$$

Para encontrarmos a formulação de volume de controle aplicável à segunda lei de Newton, recorremos ao teorema de transporte de Reynolds (TTR):

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \, \rho \, d\forall + \int_{SC} \eta \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

Neste caso, a propriedade extensiva é $N = S$ e sua propriedade intensiva correspondente é $\eta = s$. Ao substituir os valores de $N$ e $\eta$ na equação do TTR, obtemos:

$$\left( \frac{dS}{dt} \right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} s \, \rho \, d\forall + \int_{SC} s \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

**Assimile**

Na dedução do teorema de transporte de Reynolds, o sistema e o volume de controle coincidem no tempo $t_0$. Dessa forma, temos:

$$\left(\frac{\dot{Q}}{T}\right)_{sistema} = \left(\frac{\dot{Q}}{T}\right)_{volume\ de\ controle} = \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA.$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} s\,\rho\, d\forall + \int_{SC} s\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \int_{SC} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA.$$

Ao considerar o escoamento uniforme, de modo que todas as propriedades sejam constantes em cada entrada ou saída e lembrando a definição da vazão em massa $\dot{m} = \int_A \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} s\,\rho\, d\forall + \sum_{sai} \dot{m}(s) - \sum_{entra} \dot{m}(s) \geq \sum_{SC} \frac{\dot{Q}}{T}$$

ou, ainda:

$$\frac{\partial S_{VC}}{\partial t} = \sum_{SC} \frac{\dot{Q}}{T} + \sum_{entra} \dot{m}(s) - \sum_{sai} \dot{m}(s) + \dot{\sigma}_{VC},$$

em que $\dot{\sigma}_{VC}$ representa a taxa temporal de geração de entropia devida à irreversibilidade no interior do volume de controle. O termo $\dot{Q}$ representa a taxa temporal de transferência de calor na posição da superfície de controle em que a temperatura instantânea é *T*.

Para um regime permanente, o balanço de entropia torna-se:

$$0 = \sum_{SC} \frac{\dot{Q}}{T} + \sum_{entra} \dot{m}(s) - \sum_{sai} \dot{m}(s) + \dot{\sigma}_{VC}.$$

A taxa pela qual a entropia é transferida para fora do volume de controle deve exceder a taxa pela qual a entropia é admitida, sendo essa diferença chamada de taxa de geração de entropia no interior do volume de controle.

**Reflita**

Para um escoamento em regime permanente, massa, energia e quantidade de movimento são grandezas que se conservam, mas a entropia não é conservada. Por qual motivo a entropia não se conserva?

**Pesquise mais**

Para saber mais sobre a aplicação da entropia para volumes de controle, sugerimos a leitura dos tópicos 6.9 ao 6.13, do livro indicado a seguir:

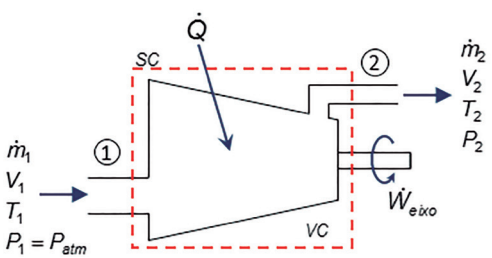
MORAN, Michael J. et al. **Princípios de termodinâmica para Engenharia**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. p. 240-258.

## Sem medo de errar

Uma empresa fabricante de aeronaves contratou você, aluno, para atuar na equipe de projeto e desenvolvimento de uma nova aeronave que será lançada no mercado. Um novo projeto foi iniciado, e você, agora chefe da equipe de projetos, deve ser capaz de determinar a potência requerida pelo compressor de um novo motor a jato que foi adquirido pela empresa para ser utilizado nessa nova aeronave, desenvolvendo, para isso, o raciocínio crítico e de solução de problemas. Esse dimensionamento deve ser realizado considerando diversos cenários de operação, e, após alguns testes, sua equipe retornou com uma série de dados para você concluir sua tarefa com êxito. Quais dados são relevantes para esse cálculo? Quais as considerações necessárias para simplificar o problema? Como selecionar o volume de controle de forma correta? Quais equações devemos utilizar?

Um desenho esquemático desse compressor é mostrado na Figura 2.21, destacando o volume de controle selecionado, bem como os dados medidos por sua equipe para vários cenários de operação.

**Figura 2.21** | Desenho esquemático do compressor.




Fonte: elaborada pelo autor.

Ao aplicar a equação geral da primeira lei da termodinâmica para o volume de controle mostrado na figura, temos:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\, d\forall + \int_{SC}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Para um regime permanente de operação e assumindo $\dot{W}_{outros} = 0$, ficamos com:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} = \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Note que $h = u + Pv$.

Ao escolhermos uma superfície de controle que corta cada passagem perpendicularmente ao escoamento, então $\vec{\tau}$ será perpendicular a $\vec{V}$. Dessa forma, $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$. Logo:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Considerando o escoamento uniforme, de modo que todas as propriedades sejam constantes em cada entrada ou saída e lembrando a definição da vazão em massa $\dot{m} = \int_A \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, obtemos:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \sum_{sai}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{entra}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right).$$

Pela conservação da massa $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$, portanto:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left[h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right)\right].$$

Ao assumir o ar como gás ideal e conhecendo seu calor específico $c_p$, a variação da entalpia pode ser calculada como $\Delta h = c_p \Delta T$. Dessa forma:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left[c_p\left(T_2 - T_1\right) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right)\right].$$

Ao desprezar a diferença $z_2 - z_1$, uma vez que as alturas são muito próximas, temos: $\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left[c_p\left(T_2 - T_1\right) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right]$.

Finalmente, a potência requerida pelo compressor é:

$$\dot{W}_{compressor} = -\dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left[c_p\left(T_2 - T_1\right) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right] - \dot{Q}.$$

O valor negativo indica que o trabalho de eixo está entrando no volume de controle, através da superfície de controle. No entanto, no dimensionamento do compressor, o valor da potência é sempre positivo.

Com essa expressão em mãos e conhecendo as variáveis de interesse para cada cenário de operação, você já pode encaminhar um relatório para o responsável que selecionará o melhor tipo e modelo de compressor para a aplicação requerida.

## Avançando na prática

### Cálculo da queda de pressão em uma turbina

#### Descrição da situação-problema

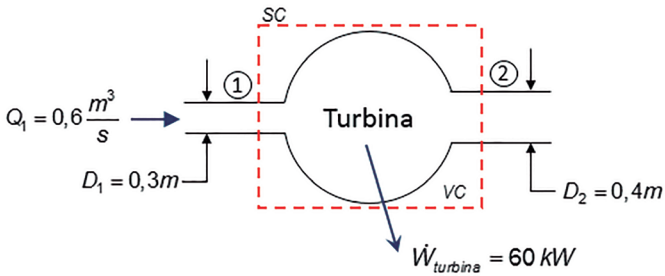
Uma empresa fabricante de turbinas hidráulicas contratou você como consultor para determinar qual a queda de pressão através de uma de suas turbinas. Ao analisar o projeto dessa turbina, você constatou que é alimentada com $0{,}6\,m^3/s$ de água por meio de um tubo com $0{,}3\,m$ de diâmetro. O tubo de descarga tem diâmetro de $0{,}4\,m$ e a turbina fornece a potência de $60\,kW$. Diante desses dados, você deve estimar a queda de pressão através dessa turbina e fornecer um relatório com o memorial de cálculo para o dono da empresa.

#### Resolução da situação-problema

Um desenho esquemático da turbina é mostrado na Figura 2.22, destacando o volume de controle, *VC*, delimitado pela superfície de

controle, *SC*, selecionada, bem como os dados disponíveis para a solução do problema.

**Figura 2.22** | Desenho esquemático do compressor.




Fonte: elaborada pelo autor.

Ao aplicar a equação geral da primeira lei da termodinâmica para o volume de controle mostrado, temos:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\,d\forall + \int_{SC}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Para um regime permanente de operação, sem troca de calor, $\dot{Q} = 0$, assumindo que $\dot{W}_{outros} = 0$ e selecionando uma superfície de controle que corte cada passagem perpendicularmente ao escoamento, de modo que $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$, então:

$$-\dot{W}_{eixo} = \int_{SC}\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Considerando o escoamento uniforme, de modo que todas as propriedades sejam constantes em cada entrada ou saída, e lembrando a definição da vazão volumétrica $Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A}$, obtemos:

$$-\dot{W}_{eixo} = \sum_{sai}\rho Q_1\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{entra}\rho Q_2\left(u + Pv + \frac{V^2}{2} + gz\right).$$

Pela conservação da massa para o escoamento incompressível, temos $Q_1 = Q_2 = Q$. Portanto:

$$-\dot{W}_{eixo} = \rho Q\left[u_2 - u_1 + v(P_2 - P_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right].$$

Ao assumir que a energia interna específica permanece constante, $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = 0$, e desprezando a variação de altura $z_2 - z_1$, ficamos com:

$$-\dot{W}_{eixo} = \rho Q\left[\upsilon(P_2 - P_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right].$$

Ao rearranjar a equação para $P_2 - P_1$, temos:

$$P_2 - P_1 = -\frac{1}{\upsilon}\left[\frac{\dot{W}_{eixo}}{\rho Q} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right].$$

Mas:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1}; V_2 = \frac{Q}{A_2}; A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}; A_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} \text{ e } \rho = \frac{1}{\upsilon}.$$

Finalmente,

$$P_2 - P_1 = -\rho\left[\frac{\dot{W}_{eixo}}{\rho Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D_2^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D_1^2}\right)^2\right].$$

Ou, ainda:

$$P_2 - P_1 = -\left[\frac{\dot{W}_{eixo}}{Q} + \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)\right].$$

Com os valores do projeto em mãos, você calculou a queda de pressão através dessa turbina e obteve o valor de:

$$P_2 - P_1 =$$

$$= -\left[\frac{60 \times 10^3 W}{0{,}6\, m^3/s} + \frac{8 \times 999\, kg/m^3 \times \left(0{,}6\, m^3/s\right)^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{(0{,}4m)^4} - \frac{1}{(0{,}3m)^4}\right)\right] =$$

$$= -75{,}4\, kPa.$$

Por fim, retornou ao fabricante com o relatório completo, finalizando com sucesso esse desafio.

## Faça valer a pena

**1.** Uma bomba centrífuga fornece uma vazão de $0{,}02\,m^3/s$. A pressão de sucção é $-26{,}7\,kPa$ e a pressão na descarga, $240\,kPa$, ambas manométricas. As tubulações de sucção e descarga possuem diâmetro de $0{,}1\,m$ e estão na mesma elevação.

Sabendo que a potência elétrica medida no motor da bomba é $6{,}75\,W$, determine a eficiência da bomba. Assinale a alternativa correta:

a) 53%.
b) 62%.
c) 68%
d) 79%.
e) 86%.

**2.** Uma turbomáquina aspira ar atmosférico a $15°C$. Na saída da turbomáquina, as condições são $500\,kPa$ (manométrica) e $130°C$. Na saída, a velocidade é de $100\,m/s$ e a vazão, de $0{,}8\,kg/s$. O escoamento é permanente e não há transferência de calor.

Determine a potência dessa turbomáquina. Assinale a alternativa correta:

a) 72 *kW*.
b) 75 *kW*.
c) 84 *kW*.
d) 96 *kW*.
e) 110 *kW*.

**3.** Ar entra em um compressor com velocidade de $75\,m/s$ e temperatura de $288\,K$ e sai com velocidade de $125\,m/s$ e temperatura de $345\,K$. A vazão é $1\,kg/s$ e a água de resfriamento que circula na carcaça do compressor remove $18\,kJ/s$ de calor.

Determine a potência requerida pelo compressor. Assinale a alternativa correta:

a) 70 *kW*.
b) 75 *kW*.
c) 80 *kW*.
d) 85 *kW*.
e) 90 *kW*.

# Referências


BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos:** fundamentos e aplicações. 3. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A.T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HIBBELER, R. C. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

MORAN, Michael J. et al. **Princípios de termodinâmica para Engenharia**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

WHITE, Frank M. **Mecânica dos fluidos**. 6. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2010.

# Análise diferencial dos movimentos dos fluidos e o escoamento incompressível de fluidos não viscosos

**Convite ao estudo**

Caro aluno, nesta unidade estudaremos as equações básicas da mecânica dos fluidos na forma diferencial, com o intuito de analisar com detalhes o escoamento dos fluidos. Estudaremos, também, a equação de Bernoulli, que é a equação mais conhecida na Mecânica dos Fluidos. De acordo com Potter et al. (2015), a conservação da massa, aplicada a um elemento infinitesimal, leva à equação diferencial de continuidade; relaciona os campos de densidade e de velocidade.

A segunda lei de Newton, que é uma relação vetorial, resulta em três equações diferenciais parciais, conhecidas como equações de Navier-Stokes; elas relacionam os campos de velocidade, pressão, densidade e introduzem a viscosidade e o vetor da gravidade em um escoamento. A equação da continuidade com as equações de Navier-Stokes formam um poderoso conjunto de equações diferenciais que são aplicadas no projeto dos mais diversos sistemas fluido-mecânicos, como no escoamento de líquidos e gases, nas máquinas hidráulicas, em sistemas de ventilação e ar-condicionado, na pneumática e hidráulica industrial, sendo também aplicadas na indústria aeroespacial e petroquímica.

Nesta unidade, realizaremos uma análise diferencial dos movimentos dos fluidos e compreenderemos como se dá o escoamento incompressível de fluidos não viscosos, a fim de aplicar esses conceitos na resolução de problemas práticos

e teóricos. Para isso, você deve primeiramente relembrar os conceitos de diferenciação, já estudados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, para, então, aplicá-los de maneira correta no desenvolvimento das equações básicas. Deverá também estar apto a realizar simplificações adequadas no tratamento dos escoamentos incompressíveis não viscosos.

O ponto central do nosso estudo é baseado em uma empresa de Consultoria em Engenharia que contratou você, aluno, para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, a fim de resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes.

Para atingir os objetivos deste desafio, você deverá utilizar a criatividade para solucionar os problemas e estar apto a:

- obter uma expressão para a variação da massa específica média como uma função do tempo, para um amortecedor a gás utilizado na suspensão de automóveis;

- utilizar a equação de Navier-Stokes para modelar o campo de escoamento de um líquido que escoa para baixo, sobre uma superfície plana, em um filme laminar, permanente e completamente desenvolvido de uma mesa inclinada utilizada para deposição de líquidos;

- determinar a vazão volumétrica de ar em um duto plano e retilíneo de uma seção de aquecimento de um secador industrial, utilizando um medidor de Venturi.

Para isso, serão estudadas nas seções desta unidade a equação da continuidade e suas particularidades, a equação diferencial da quantidade de movimento, que dará origem à equação de Navier-Stokes, e a equação de Bernoulli aplicada sobre os escoamentos incompressíveis não viscosos.

Está preparado para mais esses desafios? Vamos lá!

# Seção 3.1

## Análise diferencial dos movimentos dos fluidos e a conservação de massa

### Diálogo aberto

A análise diferencial, de acordo com Çengel e Cimbala (2015), envolve a aplicação de equações diferenciais de movimento do fluido em todos os pontos no campo de escoamento, sobre uma região chamada por eles de **domínio de escoamento**. Você pode pensar na técnica diferencial como sendo a análise de milhões de minúsculos volumes de controle empilhados lado a lado e uns sobre os outros, ocupando todo o campo de escoamento. No limite, à medida que o número de minúsculos volumes de controle tende ao infinito e o tamanho de cada volume de controle se aproxima de um ponto infinitesimal, as equações de conservação se simplificam, tornando-se um conjunto de equações diferenciais parciais e válidas em qualquer ponto no escoamento. Ao serem resolvidas, essas equações diferenciais fornecem detalhes sobre a velocidade, massa específica, pressão etc., em cada ponto de todo o domínio do escoamento, como a distribuição de pressão ao longo do perfil da asa de um avião, as velocidades de todas as partículas que percorrem o rotor de uma bomba centrífuga, ou, ainda, a variação da massa específica do ar que é comprimido por um turbo compressor.

Lembre-se de que na presente unidade você foi contratado por uma empresa de Consultoria em Engenharia para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Como primeiro trabalho, você deverá utilizar a criatividade para obter uma expressão para a variação da massa específica média como uma função do tempo, para um amortecedor a gás (que se comporta como um dispositivo pistão-cilindro) utilizado na suspensão de automóveis. Essa informação é muito importante para seu cliente dimensionar corretamente esse amortecedor e dar início à produção em série dessa nova suspensão veicular. Quais são as variáveis relevantes para esse cálculo? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para simplificar o problema? Quais equações devemos utilizar? Com o resultado

final em mãos, você deverá elaborar um relatório técnico contendo todo o memorial de cálculo e hipóteses adotadas, que deverá ser entregue diretamente para o cliente em questão.

Para isso, você deve, a princípio, compreender a análise diferencial dos movimentos dos fluidos, para, então, aplicar os conceitos de diferenciação na equação de conservação de massa, obtendo, assim, a equação da continuidade, que é amplamente utilizada em Mecânica dos Fluidos.

Está preparado para esse novo desafio? Bons estudos!

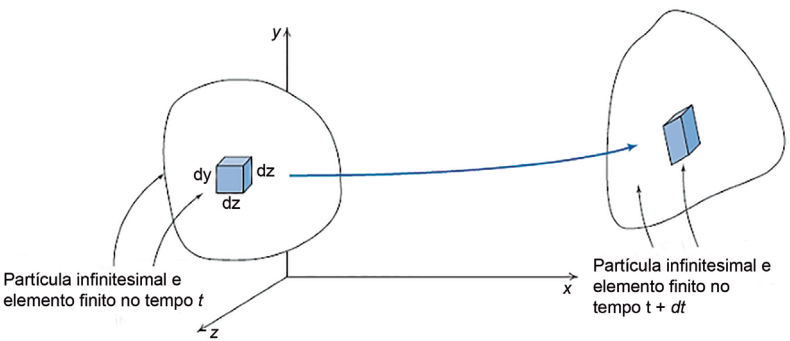
## Não pode faltar

### Movimento de uma partícula fluida: Cinemática

Na unidade anterior, desenvolvemos equações básicas na forma integral para um volume de controle. A formulação integral nos permitiu avaliar o comportamento global de um campo de escoamento. Para o conhecimento detalhado do escoamento, devemos aplicar as equações de movimento dos fluidos em suas formas diferenciais.

Antes de desenvolvermos equações diferenciais para a conservação da massa e para a segunda lei de Newton, devemos compreender como uma partícula fluida se movimenta em um campo de velocidade. A Figura 3.1 mostra uma partícula infinitesimal de massa $dm$ e volume inicial $dxdydz$, no tempo $t$ e, posteriormente, mostra essa mesma partícula após um intervalo de tempo $dt$.

**Figura 3.1** | Representação do movimento de uma partícula de fluido




Fonte: Fox et al. (2014, p. 184).

Durante esse intervalo de tempo, o elemento se moveu, alterando sua forma e orientação. Podemos decompor o movimento de uma partícula em quatro componentes descritos a seguir e representados na Figura 3.2.

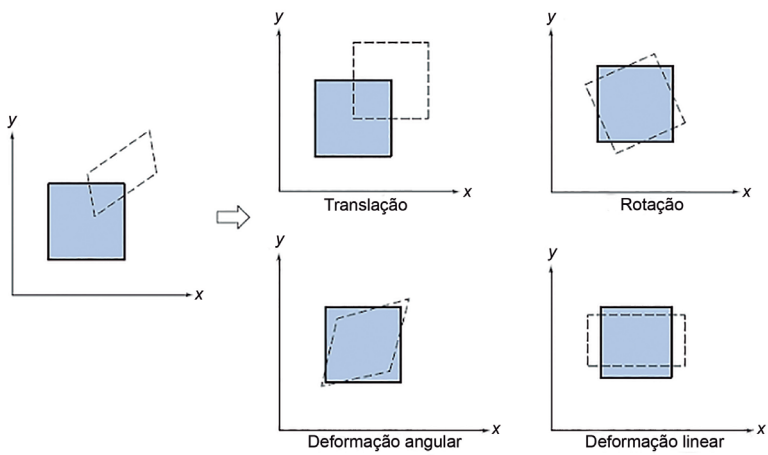
• Translação: a partícula se desloca de uma posição no espaço para outra.

• Rotação: a partícula sofre uma rotação que pode ocorrer em torno dos eixos $x$, $y$ ou $z$.

• Deformação linear: os lados da partícula se esticam ou se contraem.

• Deformação angular: os ângulos internos da partícula (que antes eram de $90°$) variam.

**Figura 3.2** | Representação esquemática das componentes do movimento de fluido




Fonte: Fox et al. (2014, p. 185).

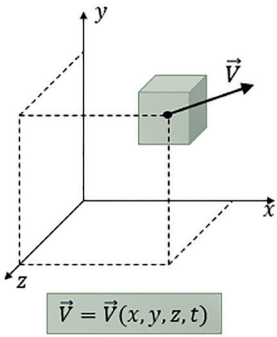
É possível analisar cada uma das componentes do movimento de uma partícula separadamente. No entanto, por ser de interesse e foco do nosso estudo, estudaremos apenas a translação de um fluido, preocupando-nos em conhecer a velocidade e a aceleração de uma partícula.

### Translação de um fluido: aceleração de uma partícula fluida em um campo de velocidade

A translação de uma partícula está relacionada com o seu campo de velocidade. A Figura 3.3 ilustra uma partícula se movendo com

velocidade $\vec{V}$ em um campo de velocidade, em um dado instante $t > 0$. Note que a velocidade dessa partícula será uma função das coordenadas espaciais $(x, y, z)$ e do tempo $(t)$.

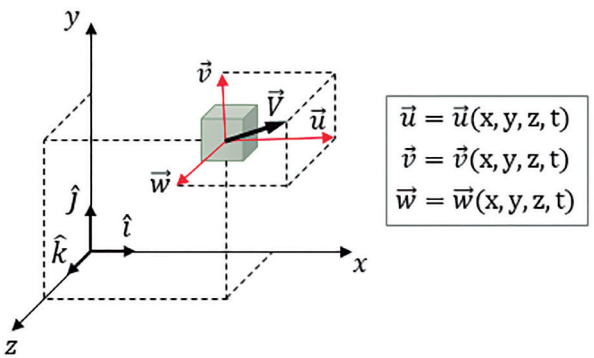
**Figura 3.3** | Representação de um campo de velocidade




Fonte: elaborada pelo autor.

A velocidade $\vec{V}$ da partícula pode ser decomposta em três componentes $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nas direções dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente, e cada componente também é uma função do espaço e do tempo, conforme mostra a Figura 3.4.

**Figura 3.4** | Representação das componentes de velocidade $\vec{V}$ de uma partícula




Fonte: elaborada pelo autor.

Definindo os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, podemos escrever a equação da velocidade $\vec{V}$ como:

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}.$$

**Assimile**

O **versor** é considerado um vetor unitário que apresenta a mesma orientação de um eixo, sendo a direção e o sentido os mesmos do eixo.

Agora que definimos a velocidade de uma partícula em um campo de velocidade, vamos nos preocupar em conhecer sua aceleração. Considere uma partícula em movimento em um campo de velocidade, e no instante $t$, a partícula está na posição $(x,y,z)$ e tem uma velocidade dada por:

$$\vec{V}_p\Big)_t = \vec{V}(x,\ y,\ z,\ t).$$

Após um intervalo de tempo $dt$, a partícula se desloca para uma posição $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ e passa a ter uma velocidade dada por:

$$\vec{V}_p\Big)_{t+dt} = \vec{V}(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt).$$

A variação na velocidade da partícula no intervalo de $t$ até $t+dt$ é dada pela regra da cadeia como:

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}dt.$$

A aceleração da partícula é, então, obtida dividindo-se todos os termos por $dt$, como segue:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t},$$

Mas

$$\begin{cases} \dfrac{dx_p}{dt} = u \\ \dfrac{dy_p}{dt} = v \\ \dfrac{dz_p}{dt} = w \end{cases},$$

portanto,

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

Por se tratar de uma derivada especial, a aceleração de uma partícula fluida em um campo de velocidade recebe o símbolo $D\vec{V}/Dt$, chamada de derivada substancial, derivada material ou derivada de partícula. Assim,

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

Vamos compreender o significado físico dos termos dessa equação:

$\frac{D\vec{V}}{Dt}$

- Aceleração total da partícula.

$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$

- Aceleração convectiva: componente da aceleração da partícula devida ao seu movimento dentro do escoamento; é uma função das coordenadas espaciais.

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$

- Aceleração local: componente da aceleração da partícula em determinado local do espaço; é uma função apenas do tempo.

**Assimile**

A aceleração de uma partícula em um escoamento em regime permanente não é necessariamente igual a zero. Mesmo em regime permanente, a partícula pode estar submetida a uma aceleração convectiva, que ocorre devido à geometria do seu escoamento.

É muito importante salientar que a aceleração da partícula é uma equação vetorial. Dessa forma, pode ser escrita em termos das três componentes escalares nos eixos *x*, *y* e *z*:

$$\text{Eixo } x: a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

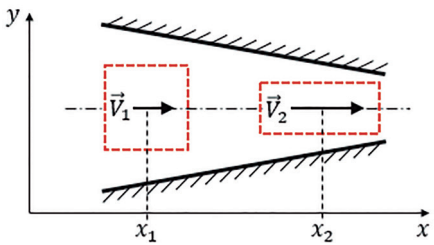
$$\text{Eixo } y: a_{yp} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\text{Eixo } z: a_{zp} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

## Exemplificando

Para compreendermos melhor o que é a aceleração convectiva, vamos analisar um exemplo prático. Considere o escoamento em regime permanente e incompressível através do canal plano convergente mostrado na Figura 3.5. Em um dado instante $t_0$, selecionamos um volume para estudo na posição $x_1$ e o acompanhamos por um intervalo de tempo $dt$ até a posição $x_2$.

**Figura 3.5** | Representação da aceleração convectiva em um canal plano convergente




Fonte: elaborada pelo autor.

Em $x_2$, o volume permanece constante, porém sua geometria é alterada, sofrendo uma expansão linear na direção do eixo *x* e uma contração linear na direção do eixo *y*. Isso ocorre porque as partículas na linha de centro se aceleram para que toda a massa seja capaz de atravessar a área de menor seção. Sendo o regime permanente, o volume em $x_1$ sempre terá a mesma geometria, pois, localmente, a aceleração é igual a zero, fato que se repete em $x_2$. Portanto, para o exemplo de aceleração convectiva, as partículas estão sujeitas a uma aceleração em relação ao espaço, independentemente do tempo.

### Análise diferencial da conservação de massa

Para descrever a equação diferencial da conservação de massa, vamos partir da equação da conservação de massa para um volume de controle em sua forma integral:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}_{1º\text{ termo}} + \underbrace{\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{2º\text{ termo}} = 0.$$

Precisamos, então, transformar cada um dos termos integrais dessa equação em termos diferencias. Considerando um volume de

controle constante, como um cubo infinitesimal com lados de comprimento $dx$, $dy$ e $dz$, temos que a integral do primeiro termo pode ser escrita na forma diferencial como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\rho\forall = \frac{\partial \rho}{\partial t}dx\,dy\,dz.$$

Para o segundo termo da equação, precisamos avaliar o fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial. Os detalhes dessa avaliação não são mostrados aqui por serem extensos e fugirem do nosso escopo. Com base nos fluxos de entrada e saída de massa através da superfície de controle, a integral do segundo termo pode ser escrita na forma diferencial como:

$$\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz.$$

**Pesquise mais**

A avaliação detalhada do fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial pode ser encontrada no capítulo 5 do livro indicado a seguir:

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

E no capítulo 9 do livro:

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial \rho}{\partial t}dx\,dy\,dz + \\ + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz = 0$$

Assim, depois de cancelar os termos $dx\,dy\,dz$, obtemos uma forma diferencial da lei de conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Essa equação é conhecida como **equação da continuidade**, extremamente importante na análise diferencial do escoamento de fluidos.

Posto que o operador diferencial del, representado por $\nabla$, em coordenadas retangular, é dado por:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}.$$

Então, temos que:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \nabla \cdot \rho\vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Essa é uma forma mais compacta de representar a equação da continuidade. Note que, nesta forma, o operador del age sobre $\rho$ e $\vec{V}$.

### Casos especiais da conservação de massa

Dois casos específicos de escoamento devem ser destacados. Para um fluido incompressível, a massa específica permanece constante, não sendo função nem das coordenadas espaciais nem do tempo. Assim, para um escoamento incompressível, a equação da continuidade dita que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Para um escoamento compressível em regime permanente, todas as propriedades não são dependentes do tempo e a massa específica varia apenas com as coordenadas espaciais. Dessa forma, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0.$$

**Reflita**

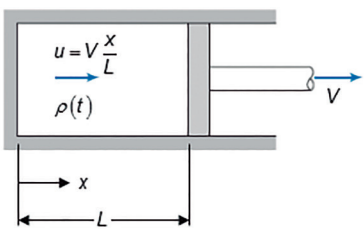
Como seriam as equações da continuidade para o escoamento incompressível e para o escoamento compressível em regime permanente, ambas escritas em função do operador del, $\nabla$?

## Sem medo de errar

Uma empresa de consultoria em engenharia contratou você, aluno, para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Como primeiro trabalho, você deverá utilizar a criatividade para obter uma expressão para a variação da massa específica média como uma função do tempo, para um amortecedor a gás (que se comporta como um dispositivo pistão-cilindro) é utilizado na suspensão de automóveis. Essa informação é muito importante para que seu cliente possa dimensionar corretamente esse amortecedor e dar início à produção em série dessa nova suspensão veicular.

Vamos considerar o amortecedor como um modelo simples de pistão-cilindro, como mostrado na Figura 3.6.

**Figura 3.6** | Desenho esquemático do modelo pistão-cilindro




Fonte: Fox et al. (2014, p. 176).

A velocidade do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fixa, ou seja, varia linearmente de zero, $u = 0$, na extremidade fixa, até $u = V$, no contato com o pistão móvel.

Para encontrarmos a variação da massa específica em função do tempo, para o gás que ocupa a câmara do amortecedor, utilizamos a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Em coordenadas retangulares, a equação da continuidade é escrita como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Uma vez que o escoamento é considerado unidimensional, temos que $u = u(x)$ e as derivadas parciais com relação a *y* e *z* são nulas. Dessa forma,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Então,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}.$$

Pela regra da derivada de um produto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Como a massa específica é supostamente uniforme em todo o volume, temos que:

$$\partial \rho / \partial x = 0$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Posto que a velocidade do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fixa,

$$u = V \frac{x}{L}$$

e sua derivada parcial é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V}{L},$$

Então,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{V}{L}$$

Contudo, note que $L = L_0 + Vt$, dessa forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{V}{L_0 + Vt}.$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \frac{V}{L_0 + Vt} dt$$

Portanto,

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + Vt}$$

Finalmente,

$$\rho(t) = \rho_0 \left( \frac{L_0}{L_0 + Vt} \right), \text{ ou, ainda, } \rho(t) = \rho_0 \left( \frac{1}{1 + Vt/L_0} \right).$$

Essa expressão permite observar o efeito de diferentes valores de $\rho_0$, $L$ e $V$ sobre a massa específica em função do tempo. Além disso, o tempo para o qual a massa específica atinge um valor prescrito também pode ser determinado. Depois, um relatório completo será encaminhado para o cliente, que poderá dimensionar de maneira correta o sistema de amortecimento das suspensões veiculares.

## Avançando na prática

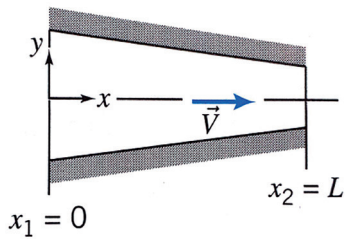
### Cálculo da aceleração de uma partícula fluida

### Descrição da situação-problema

Uma empresa fabricante de equipamentos médicos está desenvolvendo uma máquina para hemodiálise. Nesse tipo de projeto, é de suma importância conhecer detalhadamente a cinética do movimento do escoamento, pois as hemácias presentes no sangue são extremamente sensíveis e um escoamento muito turbulento pode vir a destruí-las, devido à sua alta aceleração. Dentro desse equipamento, existe um canal horizontal plano convergente, ilustrado na Figura 3.7, responsável por acelerar o fluxo sanguíneo. Medidas realizadas pela equipe de testes identificaram que a velocidade sobre a linha de centro horizontal do canal, em regime permanente, pode ser calculada como $\vec{V} = V_1 \left[ 1 + (x / L) \right] \hat{i}$, na qual $V_1$ é a velocidade de entrada no canal.

É aí que você entra! Você foi contratado com o objetivo de determinar uma expressão para a aceleração das partículas movendo-se ao longo da linha de centro, além de calcular sua aceleração no início e no final do canal, pois esses valores podem indicar a sobrevivência ou não das hemácias e o adequado funcionamento do equipamento.

**Figura 3.7** | Desenho esquemático do canal plano convergente




Fonte: Fox et al. (2014, p. 187).

## Resolução da situação-problema

Considera-se que o escoamento através do canal é permanente, bidimensional e incompressível. Portanto, a velocidade de todas as partículas pela linha de centro ao longo do canal pode ser calculada sobre o eixo *x* como:

$$\vec{V} = V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}.$$

A equação que governa a aceleração total de uma partícula fluida é:

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}.$$

Neste caso em questão, estamos interessados apenas na componente *x*, horizontal, da velocidade. Dessa forma:

$$a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Para o escoamento em regime permanente $\partial u/\partial t = 0$:

$$a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

No eixo *x*, temos que $v = w = 0$ e $u = V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)$, portanto:

$$a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} = V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{V_1}{L}$$

ou

$$a_{xp}(x) = \frac{V_1^2}{L}\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

Essa expressão fornece a aceleração de qualquer partícula que está no ponto *x*, em dado instante. Perceba que como o regime é permanente, a aceleração depende apenas da geometria do escoamento, ou seja, nesse caso, está presente apenas a aceleração convectiva.

Para encontrarmos as acelerações na entrada, $x = 0$, e na saída, $x = L$, do canal, basta substituirmos os valores de *x* na equação que obtemos para a aceleração, dessa forma:

$$\text{Entrada: } a_{xp}(x = 0) = \frac{V_1^2}{L}$$

e

$$\text{Saída: } a_{xp}(x = L) = 2\frac{V_1^2}{L}.$$

## Faça valer a pena

**1.** Dois escoamentos bidimensionais distintos são representados pelos conjuntos de equações mostradas a seguir:

- Escoamento 1: $\begin{cases} u = 2x^2 + y^2 - x^2y \\ v = x^3 + x\left(y^2 - 4y\right) \end{cases}$
- Escoamento 2: $\begin{cases} u = 2xy - x^2y \\ v = 2xy - y^2 + x^2 \end{cases}$

Sobre os escoamentos 1 e 2 citados no texto-base, assinale a alternativa correta:

a) Ambos os escoamentos são incompressíveis.

b) Ambos os escoamentos são compressíveis.

c) O escoamento 1 é compressível, enquanto o escoamento 2 é incompressível.

d) O escoamento 1 é incompressível, enquanto o escoamento 2 é compressível.

e) Não é possível determinar se os escoamentos são incompressíveis ou compressíveis.

**2.** Dado o campo vetorial de velocidades euleriano $\vec{V} = (3t)\hat{i} + (xz)\hat{j} + (ty^2)\hat{k}$, encontre a aceleração total de uma partícula que percorre esse campo.

Com base no texto apresentado, assinale a alternativa correta:

a) $\vec{a}_p = \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = (3)\hat{i} + (3tz + txy^2)\hat{j} + (y^2 + 2txzy)\hat{k}$.

b) $\vec{a}_p = \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = (3t)\hat{i} + (3t + xy^2)\hat{j} + (y^2 + 2tzy)\hat{k}$.

c) $\vec{a}_p = \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = (3t)\hat{i} + (3z + tx^2y)\hat{j} + (xy^2 + 2zy)\hat{k}$.

d) $\vec{a}_p = \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = (3)\hat{i} + (3tyz + xy)\hat{j} + (y + 2txy)\hat{k}$.

e) $\vec{a}_p = \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = (3)\hat{i} + (3txz + xyz)\hat{j} + (xy + txzy)\hat{k}$.

**3.** Analise os conjuntos de equações, para o campo de velocidade, representados a seguir:

I. $u = x^2t + 2y \; ; \; v = xt^2 - 2yxt$

II. $u = (2x + 4y)xt \; ; \; v = 3(x + y)yt$

III. $u = xy^2 + yt \; ; \; v = x^2 + y(x - x^2)$

Dentre os conjuntos de equações apresentados, qual deles representa o caso de um escoamento bidimensional incompressível?

a) I, apenas.

b) III, apenas.

c) I e II, apenas.

d) II e III apenas.

e) I, II e III.

# Seção 3.2

## Equação diferencial da quantidade de movimento

### Diálogo aberto

A descrição de qualquer escoamento de fluido requer que sejam satisfeitas as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade. No entanto, essas equações são muito complexas e podem ser solucionadas analiticamente apenas para casos simples, como escoamentos estacionários, unidimensionais e completamente desenvolvidos, o que, na maioria das situações reais dentro da engenharia, não ocorre na prática. Felizmente, o uso crescente de computadores e o aumento na capacidade de processamento estão possibilitando a utilização de métodos numéricos para resolver essas equações. Esse campo de estudo é conhecido como Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), ou CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*.

Atualmente, a DFC é amplamente utilizada para o projeto e a análise de vários tipos diferentes de problemas de escoamentos, como aqueles que envolvem bombas e turbinas, nas áreas aeronáutica e aeroespacial, equipamentos de ventilação, refrigeração e calefação, processos químicos, cargas de vento em prédios, modelagem atmosférica para previsão do tempo e até mesmo dispositivos de implante biomédico.

Lembre-se de que na presente unidade você foi contratado por uma empresa de consultoria em engenharia para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Como segundo trabalho, você deverá utilizar a criatividade para realizar a simplificação das equações da continuidade e de Navier-Stokes, a fim de modelar o perfil de velocidades do campo de escoamento de um líquido que escoa para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente e completamente desenvolvido. Essa informação é importante, pois seu cliente

busca compreender o mecanismo de transporte de fluido através da sua nova mesa inclinada, utilizada para deposição de líquidos na indústria alimentícia. Quais são as variáveis relevantes para esse cálculo? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para a simplificação do problema? Quais equações devemos utilizar? Com o resultado final em mãos, você deverá elaborar um relatório técnico contento todo o memorial de cálculo e as hipóteses adotadas, que deverão ser entregues diretamente para o cliente em questão.

Para isso, você deve relembrar os conceitos de análise diferencial dos movimentos dos fluidos, para, então, aplicar os conceitos de diferenciação na equação da quantidade de movimento, obtendo as equações de Navier-Stokes que, provavelmente, são o conjunto de equações mais famoso e estudado em Mecânica dos Fluidos.

Está preparado para mais esse desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Equação da Quantidade de Movimento

Caro aluno, já estudamos os movimentos de uma partícula fluida e desenvolvemos a análise diferencial da conservação de massa, que deu origem à equação da continuidade. Agora, aplicaremos a segunda lei de Newton também em uma análise diferencial e, com base nela, desenvolveremos a equação de Navier-Stokes.

Lembre-se de que a segunda lei de Newton estabelece que a força resultante, $\vec{F}$, agindo sobre um sistema de referência inercial, é igual à taxa de variação temporal da sua quantidade de movimento linear $\vec{P}$:

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_s,$$

em que a quantidade de movimento linear é dada por:

$$\vec{P} = \int_{Sistema} \vec{V}\, dm.$$

Dessa forma, podemos escrever a segunda lei de Newton para um sistema infinitesimal de massa $dm = \rho d\forall$ como sendo:

$$d\vec{F} = \rho d\forall \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_s,$$

em que $d\vec{V}/dt$ é a aceleração, $\vec{a}_p$, de uma partícula fluida infinitesimal em um campo de velocidades, descrita como uma derivada substancial $D\vec{V}/Dt$, na qual:

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

Portanto,

$$d\vec{F} = \rho d\forall \left(u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right).$$

Essa é uma equação vetorial, portanto pode ser escrita em termos das três componentes escalares nos eixos *x*, *y* e *z*:

$$\text{Eixo } x: \; dF_x = \rho d\forall \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\text{Eixo } y: \; dF_y = \rho d\forall \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\text{Eixo } z: \; dF_z = \rho d\forall \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Perceba que o lado direito dessas equações já apresenta uma formulação diferencial. Precisamos, agora, encontrar uma formulação adequada ao termo $d\vec{F}$ que atua sobre o elemento diferencial de massa $dm$.

### Forças atuando sobre uma partícula fluida

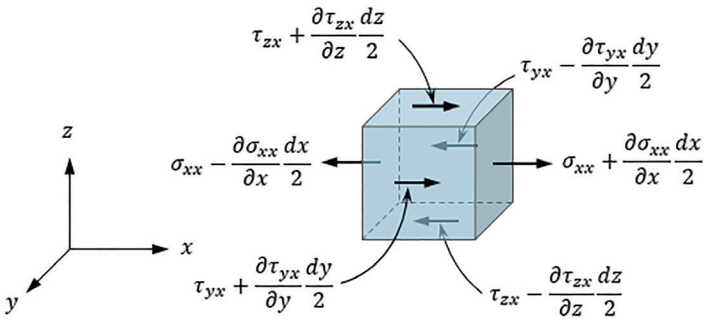
Um elemento de fluido pode experimentar dois tipos de forças: as forças de superfície $(F_S)$ e as forças de campo $(F_C)$. As forças de campo ocorrem devido às ações dos campos gravitacional, elétrico e magnético; as forças de superfície incluem as forças originadas das tensões normais $(\sigma)$ e as forças devido às tensões tangenciais ou de cisalhamento $(\tau)$.

Para encontramos a força resultante que atua sobre uma partícula fluida, vamos considerar primeiramente apenas a componente $x$ da força atuando em um elemento diferencial de massa $dm = \rho d\forall$ e volume $d\forall = dxdydz$. Dessa forma:

$$dF_x = dF_{Cx} + dF_{Sx}.$$

Considerando as tensões no centro de um elemento diferencial como $\sigma_{xx}$, $\tau_{yx}$ e $\tau_{zx}$, as tensões atuando na direção $x$ em cada face do elemento são obtidas por uma expansão em série de Taylor, conforme mostrado na Figura 3.8.

**Figura 3.8** | Desenho esquemático das tensões sobre um elemento diferencial de fluido na direção *x*




Fonte: elaborada pelo autor.

Continuando, devemos multiplicar cada tensão aplicada pela sua respectiva área, obtendo, assim, as forças de superfície na direção *x*, e somá-las, obedecendo à orientação do eixo *x*. Assim, procedendo:

$$\begin{aligned} dF_{Sx} = &\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz. \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy \end{aligned}$$

Simplificando, finalmente obtemos a força de superfície resultante na direção *x*:

$$dF_{Sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)d\forall.$$

**Reflita**

Como é realizada a simplificação de

$$dF_{Sx} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

para

$$dF_{Sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)d\forall \; ?$$

Quando a força da gravidade é a única força de campo atuante, a força de campo na direção *x* pode ser escrita como:

$$dF_{Cx} = dm\,g_x = \rho d\forall\, g_x$$

ou, ainda:

$$dF_{Cx} = (\rho g_x)d\forall.$$

Portanto, a força resultante que atua sobre uma partícula fluida na direção $x$ é:

$$dF_x = dF_{Cx} + dF_{Sx} = (\rho g_x)d\forall + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)d\forall.$$

Colocando o termo $d\forall$ em evidência, finalmente resulta em:

$$dF_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)d\forall.$$

De forma semelhante, podemos deduzir as equações da força resultante para as direções *y* e *z*:

$$dF_y = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)d\forall$$

$$dF_z = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)d\forall.$$

### Equação diferencial da quantidade de movimento

Acabamos de formular expressões para as componentes da força $d\vec{F}$ que atuam sobre um elemento de massa $dm$. Lembrando que:

$$d\vec{F} = \rho d\forall \left( u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)$$

e substituindo o valor de $d\vec{F}$ para cada componente, obtemos:

$$\text{Eixo } x: \left( \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) d\forall_x = \rho d\forall \left( u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\text{Eixo } y: \left( \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) d\forall = \rho d\forall \left( u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\text{Eixo } z: \left( \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) d\forall = \rho d\forall \left( u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right),$$

ou, ainda:

$$\text{Eixo } x: \ \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\text{Eixo } y: \ \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\text{Eixo } z: \ \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

Finalmente, essas são as equações diferenciais da quantidade de movimento de qualquer partícula fluida que satisfaça a hipótese do contínuo. Para a aplicação das equações diferenciais do movimento, é preciso conhecer os valores de todas as tensões atuantes na partícula fluida, no entanto isso é impraticável. Dessa forma, torna-se necessário deduzir expressões para as tensões em termos dos campos de velocidades e de pressão, pois é possível medir com precisão tanto a velocidade quanto a pressão do escoamento.

### Fluidos Newtonianos: Equação de Navier-Stokes

Para muitos fluidos, a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação angular. Os fluidos para os quais a taxa de deformação é linearmente proporcional à tensão de cisalhamento são chamados de **fluidos newtonianos**.

Em um escoamento tridimensional, as relações entre tensões e o campo de velocidades, por exemplo, são muito difíceis de serem obtidas. Para esse tipo de escoamento, necessitamos usar expressões mais complexas para a taxa de deformação angular. As tensões normais e cisalhantes podem ser expressas em termos de gradientes de velocidade, $\nabla \cdot \vec{V}$, pressões termodinâmicas locais, $p$, e viscosidade, $\mu$, como segue:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Substituindo os valores das tensões normais e cisalhantes nas equações diferenciais da quantidade de movimento e rearranjando os termos com cuidado, ficamos com:

$$\text{Eixo } x: \ \rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{V}\right)\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\text{Eixo } y: \ \rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\text{Eixo } z: \ \rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{V}\right)\right].$$

Essas equações são chamadas de **equações de Navier-Stokes**. São simplificadas quando aplicadas ao escoamento incompressível com viscosidade constante, reduzindo-se finalmente a:

$$\text{Eixo } x: \ \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{Eixo } y: \ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{Eixo } z: \ \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Ou, em termos vetoriais:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}.$$

**Exemplificando**

O laplaciano, $\nabla^2$, de um campo escalar qualquer é um operador diferencial de segunda ordem que corresponde ao divergente do vetor gradiente desse campo. O uso do operador $\nabla^2$ permite-nos obter imediatamente as componentes cartesianas do operador laplaciano.

Se um campo de velocidades é tal que:

$$\vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k},$$

então:

$$\nabla^2\vec{V}=\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\end{cases}.$$

As equações de Navier-Stokes não podem ser resolvidas analiticamente, exceto para casos muito básicos. Por isso, necessitamos de programas de computador de aplicação em Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) para a análise e resolução dessas equações.

## Assimile

Equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

> [...] esta forma das equações de Navier-Stokes é provavelmente o conjunto de equações mais famoso em mecânica dos fluidos e tem sido largamente estudado. Essas equações mais a equação da continuidade formam um conjunto de quatro equações diferenciais parciais não lineares acopladas a *u*, *v*, *w* e *p*. Em princípio, essas quatro equações descrevem muitos escoamentos comuns; as únicas restrições são que o fluido deve ser newtoniano (com uma viscosidade constante) e incompressível (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2014, p. 200).

Para o caso de escoamento sem atrito, $\mu = 0$, a equação de Navier-Stokes se reduz à equação de Euller, $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$, que será estudada na sequência deste material.

## Pesquise mais

A equação diferencial do movimento, conhecida também como equação de Cauchy, em homenagem ao engenheiro francês Augustin Louis de Cauchy (1789-1857), pode ser deduzida de outras duas formas, além da dedução usando a segunda lei de Newton aqui apresentada. Para conhecer os outros métodos para essa dedução, sugerimos a leitura da Seção 9-4 do livro indicado a seguir:

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. p. 459-464.

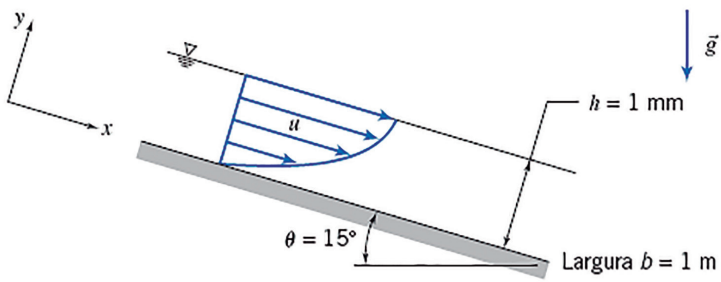
## Sem medo de errar

Uma empresa de consultoria em engenharia contratou você, aluno, para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Como segundo trabalho, você deverá utilizar

a criatividade para simplificar as equações da continuidade e de Navier-Stokes, a fim de modelar o perfil de velocidades do campo de escoamento de um líquido que escoa para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente e completamente desenvolvido. Essa informação é importante, pois seu cliente busca compreender o mecanismo de transporte de fluido através da sua nova mesa inclinada, utilizada para deposição de líquidos na indústria alimentícia.

A geometria e o sistema de coordenadas usados para modelar o campo de escoamento são mostrados na Figura 3.9.

**Figura 3.9** | Representação esquemática do modelo utilizado




Fonte: Fox et al. (2014, p. 200).

Note que é conveniente alinhar as coordenadas *x* com a direção do escoamento para baixo sobre a superfície plana.

As equações que governam o movimento de um escoamento incompressível com viscosidade constante são a equação da continuidade e as equações de Navier-Stokes, apresentadas na sequência:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Para simplificar essas equações, primeiramente, devemos realizar as devidas considerações listadas a seguir:

(1) Escoamento em regime permanente $(\partial/\partial t = 0)$;

(2) Escoamento incompressível $(\rho = \text{constante})$;

(3) Nenhum escoamento na direção $z$ $(w = 0 \text{ e } \partial/\partial z = 0)$;

(4) Escoamento completamente desenvolvido, logo nenhuma propriedade varia na direção $x$ $(\partial/\partial x = 0)$;

(5) Após a simplificação da equação da continuidade, tem-se que $\partial v/\partial y = 0$, mas também das considerações (3) e (4), temos que $\partial v/\partial z = 0$ e $\partial v/\partial x = 0$ portanto $v = \text{constante}$. Como $v$ é igual a zero na superfície sólida, então $v$ deve ser igual a zero em qualquer lugar.

Os termos cancelados para simplificar as relações básicas estão relacionados com as considerações que foram listadas, sendo o número disposto abaixo de cada termo a razão pela qual foi cancelado:

$$\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}} + v\underset{(5)}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}} + w\underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}} + \underset{(1)}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}\right) = \rho g_x - \underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}} + \mu\left(\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}\right)$$

$$\rho\left(u\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}} + v\underset{(5)}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}} + w\underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}} + \underset{(1)}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}} + \underset{(5)}{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}} + \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}}\right)$$

$$\rho\left(u\underset{(4)}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}} + v\underset{(5)}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}} + w\underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}} + \underset{(1)}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}\right) = \rho \underset{(3)}{\cancel{g_z}} - \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial z}}} + \mu\left(\underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}} + \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}} + \underset{(3)}{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}}\right)$$

As equações finais simplificadas são:

$$0 = \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Como $\partial u/\partial z = 0$ (consideração 3) e $\partial u/\partial x = 0$ (consideração 4), então temos que $u$ é uma função apenas de y. Portanto, a derivada parcial $\partial^2 u/\partial y^2$ pode ser escrita como uma derivada total $d^2u/dy^2$.

Portanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g_x}{\mu} = -\rho g \frac{\text{sen}\theta}{\mu}.$$

Separando as variáveis e integrando duas vezes, obtemos:

$$u = -\rho g \frac{\text{sen}\theta}{\mu} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2.$$

Para encontrarmos as constantes, devemos aplicar as condições de contorno adequadas:

(i) $u = 0$ em $y = 0$ (condição de não deslizamento na superfície sólida);

(ii) $\frac{du}{dy} = 0$ em $y = h$ (condição de tensão de cisalhamento zero na superfície livre).

Avaliando a condição (i), obtemos $c_2 = 0$, e avaliando a condição (ii), obtemos:

$$c_1 = \rho g \frac{\text{sen}\theta}{\mu} h.$$

Finalmente, substituindo as constantes $c_1$ e $c_2$, o perfil de velocidades é dado por:

$$u(y) = \rho g \frac{\text{sen}\theta}{\mu} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right).$$

Com esse resultado, é possível conhecer a velocidade em qualquer ponto do escoamento ao longo do eixo *y*. Depois, um relatório completo será encaminhado para o cliente, que poderá compreender detalhadamente como ocorre o escoamento ao longo da sua mesa inclinada.

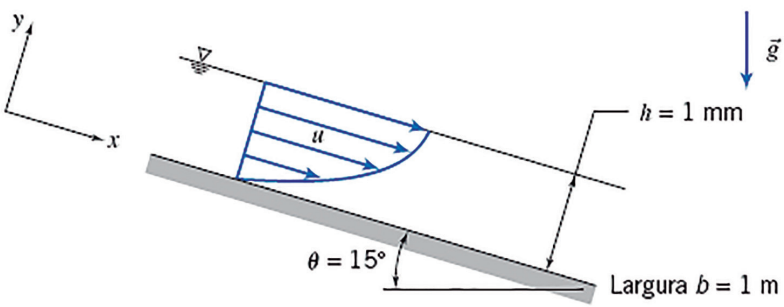
## Sem medo de errar

### Cálculo da vazão volumétrica e velocidade média do escoamento

#### Descrição da situação-problema

Você já encontrou o perfil de velocidades do campo de escoamento de um líquido que escoa para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente e completamente desenvolvido, da mesa inclinada (Figura 3.9), utilizada por seu cliente na indústria alimentícia, para deposição de líquidos. Não satisfeito com esse resultado, seu cliente solicitou conhecer, além do perfil de velocidades, a vazão volumétrica e a velocidade média desse escoamento, para, então, dar início à produção em série da mesa inclinada. Cabe a você solucionar mais esse desafio.

**Figura 3.9** | Representação esquemática da mesa inclinada




Fonte: Fox et al. (2014, p. 200).

#### Resolução da situação-problema

A vazão volumétrica é calculada como:

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A},$$

que, para o eixo $x$, se torna:

$$Q = \int_A u\,dA = \int_0^h u\,b\,dy,$$

em que $b$ é a largura da superfície na direção $z$ e $u = u(y)$ é o perfil de velocidades encontrado anteriormente. Lembrando que:

$$u(y) = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right).$$

Substituímos esse resultado na equação da vazão, obtendo:

$$Q = \int_0^h \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) b\,dy =$$

$$= \rho g\, b \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\int_0^h \left(hy - \frac{y^2}{2}\right) dy = \rho g\, b \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^h$$

$$Q = \rho g\, b \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\frac{h^3}{3}.$$

A velocidade média do escoamento é:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{b\,h},$$

Então,

$$\bar{V} = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\frac{h^2}{3}.$$

Se o fluido em questão fosse a água, um filme com $h = 1mm$ de espessura, sobre uma placa de largura $b = 1m$, inclinado em $\theta = 15°$, transportaria:

$$Q = 999\frac{kg}{m^3} \times 9{,}81\frac{m}{s^2} \times 1m \times \frac{\operatorname{sen}(15°)}{1{,}0 \times 10^{-3}\,\frac{N \cdot s}{m^2}} \times \frac{(0{,}001m)^3}{3} =$$

$$= 0{,}846 \times 10^{-3}\,\frac{m^3}{s} = 0{,}846\,\frac{L}{s},$$

com uma velocidade média de:

$$\bar{V} = \frac{0{,}846 \times 10^{-3}\,m^3/s}{1m \times 0{,}001m} = 0{,}846\,\frac{m}{s}.$$

Depois, um novo relatório será encaminhado para o cliente, que poderá compreender detalhadamente como ocorre o escoamento ao longo da sua mesa inclinada, sabendo qual a vazão fornecida e com qual velocidade média o fluido é depositado.

## Faça valer a pena

**1.** Um campo de escoamento bidimensional, incompressível e sem atrito, é dado por $\vec{V} = 2xy\hat{i} - y^2\hat{j}$. O fluido possui massa específica, $\rho$ constante e a gravidade pode ser desprezada.

Sabendo que o regime é permanente, a expressão para o gradiente de pressão, para o escoamento em questão, na direção *x* é:

a) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho 2xy$.

b) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho 2xy^2$.

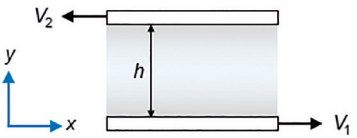
c) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho 2x^2 y$.

d) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho 2y^2$.

e) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho 2x^2$.

**2.** Considere duas placas paralelas compridas e horizontais com um fluido viscoso e incompressível entre elas. As duas placas movem-se em duas direções opostas com duas velocidades constantes diferentes, como mostrado na Figura 3.10. Considere que não há gradiente de pressão e a única força agindo deve-se à força peso.

**Figura 3.10** | Desenho esquemático do escoamento entre duas placas que se movem




Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo as equações de Navier-Stokes, a expressão para o perfil de velocidades para o escoamento laminar entre as duas placas é:

a) $u(y) = -\left(\frac{V_1 + V_2}{h}\right)y + V_1$.

b) $u(y) = -\left(\frac{V_1 - V_2}{h}\right)y + V_1$.

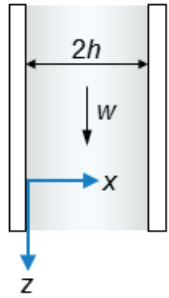
c) $u(y) = \left(\frac{V_1 + V_2}{h}\right)y + V_1$.

d) $u(y) = \left(\frac{V_1 - V_2}{h}\right)y + V_1$.

e) $u(y) = \left(\frac{V_1 + V_2}{h}\right)y - V_1$.

**3.** Um líquido viscoso de massa específica $\rho$ e viscosidade dinâmica $\mu$ constantes escoa com o efeito da gravidade entre duas placas planas separadas por uma distância $2h$, como mostra a Figura 3.11. O escoamento é totalmente desenvolvido com uma única componente de velocidade $w = w(x)$.

**Figura 3.11** | Desenho esquemático do escoamento vertical entre duas placas




Fonte: elaborado pelo autor.

Sabendo que não há gradientes de pressão aplicados e somente a gravidade está agindo, o perfil de velocidade, $w(x)$, entre as placas é:

a) $w(x) = \frac{\rho g}{\mu}\left(hx - \frac{x^2}{2}\right)$.

b) $w(x) = \frac{\rho g}{2\mu}\left(hx - x^2\right)$.

c) $w(x) = \frac{\rho g}{\mu}\left(hx^2 - \frac{x}{2}\right)$.

d) $w(x) = \frac{\rho g}{2\mu}\left(hx^2 - x\right)$.

e) $w(x) = \frac{\rho g}{\mu}\left(x - \frac{x^2 h}{2}\right)$.

# Seção 3.3

## Equações de Euler e equação de Bernoulli

### Diálogo aberto

A equação de Bernoulli diz respeito à conservação das energias cinética, potencial e de escoamento em uma corrente de fluido. Diz respeito também à conversão entre essas formas de energia nas regiões de escoamento em que o efeito das forças viscosas é desprezível e outras condições restritivas se aplicam. Apesar das restrições utilizadas em sua dedução, a equação de Bernoulli é comumente usada na prática na fase preliminar de projetos, por ser de fácil aplicação e boa acurácia. Pode ser utilizada, por exemplo, para determinar a altura que a água da mangueira de um bombeiro pode alcançar, para encontrar a pressão na superfície de um aerofólio em baixa velocidade, para achar a força do vento sobre a janela de uma casa, além de ser utilizada em equipamentos de medição de velocidade e vazão em escoamentos fluidos.

Lembre-se de que na presente unidade você foi contratado por uma empresa de consultoria em engenharia para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Como terceiro e último desafio nessa empresa, você deverá utilizar a criatividade para determinar uma expressão para a vazão volumétrica de ar aquecido, em uma tubulação que sai da fornalha e alimenta um secador de grãos. Para isso, deverá utilizar um medidor de Venturi. Essa informação é essencial para que seu cliente dimensione a vazão de ar adequada à secagem correta dos grãos. Quais são as variáveis relevantes para esse cálculo? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para simplificar o problema? Quais equações devemos utilizar? Com o resultado final em mãos, você deverá elaborar um relatório técnico contendo todo o memorial de cálculo e as hipóteses adotadas. Ele deverá ser entregue diretamente para o cliente em questão.

Para isso, você deverá, a princípio, compreender como é obtida a equação de Bernoulli e quais são as restrições para a aplicação dessa equação, para, então, aplicá-la de maneira assertiva em problemas e projetos de mecânica dos fluidos.

Está preparado para esse novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### As equações de Euler

Caro aluno, na seção anterior, trabalhamos com o objetivo principal de obtermos as equações de Navier-Stokes, que, provavelmente, com a equação da continuidade, é o conjunto de equações mais famoso dentro da Mecânica dos Fluidos.

As equações de Navier-Stokes são aplicáveis apenas para fluidos newtonianos, em um escoamento incompressível. No entanto, esse conjunto de equações não pode ser resolvido analiticamente, exceto para casos muito básicos com geometrias simples. Em situações nas quais a simplificação das equações não é possível, são necessários o auxílio de ferramentas computacionais avançadas e um longo tempo de processamento para predizer o comportamento do escoamento.

Podemos contornar essa dificuldade considerando o fluido sem viscosidade. Embora, na realidade, não existam fluidos sem viscosidade, muitos problemas de escoamento podem ser analisados com sucesso com essa consideração. Nesta seção, simplificaremos as equações de Navier-Stokes a fim de obtermos as equações de Euler, que se aplicam a um escoamento sem atrito, em que modelaremos os fluidos com viscosidade igual a zero $(\mu = 0)$, além de obtermos a equação de Bernoulli, amplamente utilizada em Mecânica dos Fluidos.

A equação de Euler é obtida da equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}.$$

Para o caso de escoamento sem atrito, $\mu = 0$, a equação de Navier-Stokes se reduz à equação de Euller:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p,$$

que pode ser escrita em termos das três componentes escalares nos eixos *x*, *y* e *z*:

$$\text{Eixo } x: \ \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{Eixo } y: \ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\text{Eixo } z: \ \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}$$

A **equação de Euler** estabelece que, para um escoamento no qual não existem tensões viscosas, a variação da quantidade de movimento de uma partícula é causada pela força de campo e pela força líquida de pressão.

**Assimile**

A equação de Euler é aplicada tanto aos escoamentos sem viscosidade quanto aos movimentos de corpo rígido. Em um corpo rígido, as partículas estão agrupadas de forma que a distância entre as partes que constituem o corpo ou o sistema não sofram mudança, ou seja, o corpo não sofre deformação nem existem tensões viscosas, mesmo o corpo tendo viscosidade diferente de zero.

Comparada à equação de Navier-Stokes, a equação de Euler é matematicamente mais simples, porém sua solução ainda apresenta dificuldades consideráveis, pois é necessário não só o conhecimento detalhado do campo de velocidade e de aceleração das partículas do escoamento, mas também a resultante líquida da pressão.

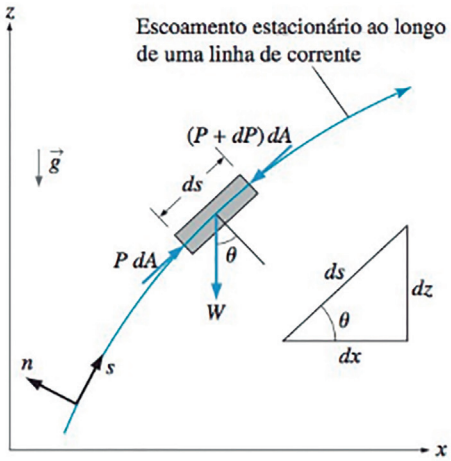
### A Equação de Bernoulli

A **equação de Bernoulli** é uma relação aproximada entre pressão, velocidade e altura de elevação do fluido e é válida para a resolução de problemas em que o escoamento pode ser considerado incompressível e estacionário e as forças de atrito, desprezadas. Apesar de sua simplicidade, essa equação provou ser uma ferramenta muito poderosa na Mecânica dos Fluidos.

Considere o movimento de uma partícula de fluido, com velocidade *V*, em um campo de escoamento estacionário e

incompressível ao longo de uma linha de corrente com direção *s*, como mostrado na Figura 3.12.

**Figura 3.12** | Forças atuantes em uma partícula de fluido ao longo de uma linha de corrente




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 200).

Aplicando a Segunda Lei de Newton, na direção *s*, para a partícula em questão, obtemos:

$$\sum F_s = ma_s,$$

em que:

$$a_s = \frac{DV}{Dt} = V\frac{\partial V}{\partial s}.$$

E $a_s$ é a aceleração da partícula, ao logo da linha de corrente, em um escoamento estacionário.

**Assimile**

Uma linha de corrente é uma curva tangente à direção do escoamento em cada ponto do campo. Como as linhas de corrente são tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do campo de escoamento, não pode haver fluxo de massa através delas. Dessa forma, para um escoamento em regime permanente, uma partícula localizada em determinada linha de corrente permanecerá sempre sobre esta.

Nas regiões de escoamento em que as forças de atrito são desprezíveis e não existem troca de trabalho e calor do fluido com o ambiente, as forças significativas na direção *s* são a pressão, *p*, (que age em ambos os lados da partícula) e a componente peso, *W*, na direção *s*. Dessa forma,

$$\sum F_s = pdA - (p + dp)dA - W\,\text{sen}\theta = mV\frac{dV}{ds},$$

em que $\theta$ é o ângulo entre a normal da linha de corrente e o eixo vertical *z*, sendo $\text{sen}\theta = dz/ds$, $m = \rho\forall = \rho\,dA\,ds$ e $W = mg = \rho g\,dA\,ds$. Portanto,

$$-dp\,dA - \rho g\,dA\,ds\frac{dz}{ds} = \rho\,dA\,ds\,V\frac{dV}{ds}.$$

Cancelando $dA$ de cada termo e dividindo todos os termos por $\rho$, ficamos com:

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + gdz = 0.$$

Essa equação nada mais é que a equação de Euler aplicada na direção *s*, em uma coordenada de linhas de corrente. Integrando a equação anterior ao longo da linha de corrente, obtemos:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante,$$

em que cada termo expressa:

- $\frac{p}{\rho}$ • **Energia do escoamento** por unidade de massa $[J/kg]$.
- $\frac{V^2}{2}$ • **Energia cinética** do fluido por unidade de massa $[J/kg]$.
- $gz$ • **Energia potencial** do fluido por unidade de massa $[J/kg]$.

Essa é a equação de Bernoulli, certamente a mais conhecida na Mecânica dos Fluidos. Nessa equação, o valor da constante pode ser calculado em qualquer ponto da linha de corrente em que a pressão, a massa específica, a velocidade e a elevação sejam conhecidas. No entanto, é muito importante conhecer e entender as restrições de sua aplicabilidade e observar as limitações de seu uso.

### Restrições para a aplicação da equação de Bernoulli:

- Escoamento em regime permanente;
- Escoamento incompressível;
- Escoamento sem atrito;
- Escoamento ao longo de uma linha de corrente;
- Escoamento sem troca de calor e trabalho.

> **Apesar das aproximações altamente restritivas utilizadas nessa dedução, a equação de Bernoulli é comumente usada na prática, pois uma variedade de problemas práticos de escoamento fluido pode ser analisada com exatidão razoável. Isso acontece porque muitos escoamentos de interesse prático para a engenharia são estacionários (ou pelo menos estacionários em média), os efeitos de compressibilidade são relativamente pequenos e as forças de atrito resultantes são desprezíveis nas regiões de interesse do escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 202).**

A equação de Bernoulli pode ser interpretada como uma equação de conservação de energia mecânica. Dessa forma, durante um escoamento incompressível, em regime permanente e sem atrito, as energias do escoamento, cinética e potencial do fluido são convertidas entre si, mas sua soma sempre permanece constante. Também pode ser escrita entre dois pontos quaisquer na mesma linha de corrente, sendo expressa como um balanço da energia mecânica entre eles:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2.$$

Portanto, não há dissipação de energia mecânica entre dois pontos quaisquer, pois não há atrito, que é responsável por converter a energia mecânica em dissipativa.

### Pressões estática, de estagnação e dinâmica

Para darmos continuidade ao nosso estudo, precisamos compreender os tipos de pressão envolvidos, quando utilizamos a equação de Bernoulli. Vimos que a energia mecânica, ao longo de uma linha de corrente, se conserva. Dessa forma, as energias cinética e potencial do fluido podem converter-se em energia de

escoamento, ou vice-versa, causando variações da pressão durante o movimento. A fim de facilitar a visualização desse fenômeno, vamos multiplicar a equação de Bernoulli, obtida anteriormente, por $\rho$, e analisar termo a termo:

$$p + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = constante$$

Note que, agora, todos os termos dessa equação têm unidade de pressão e, portanto, representam um tipo de pressão:

- $p$ • **Pressão estática** $[Pa]$: representa a pressão termodinâmica real do fluido;
- $\rho\frac{V^2}{2}$ • **Pressão dinâmica** $[Pa]$: está associada à velocidade do escoamento;
- $\rho gz$ • **Pressão hidrostática** $[Pa]$: representa os efeitos da altura.

A soma das pressões estática e dinâmica é chamada de **pressão de estagnação**. É obtida quando um fluido em escoamento é desacelerado até a velocidade zero, por meio de um processo isentrópico (sem atrito), e é expressa como:

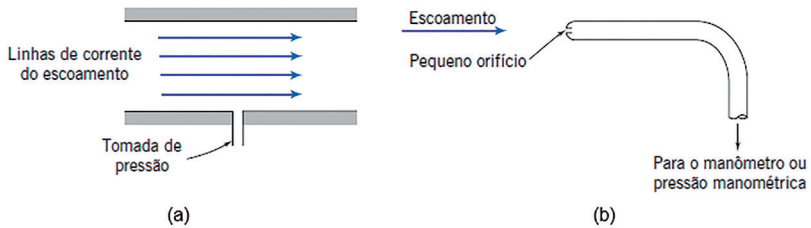
$$p_{estag} = p + \rho\frac{V^2}{2}.$$

> **Uma maneira de descrever as três pressões é imaginar o vento batendo contra a palma de sua mão em regime permanente: A pressão estática será a pressão atmosférica; a pressão maior que você sente no centro da palma da mão será à pressão de estagnação; e o acréscimo de pressão (em relação a pressão atmosférica) será a pressão dinâmica (FOX et al., 2014, p. 244).**

A questão agora é: como medimos as pressões estática, dinâmica e de estagnação de um fluido em movimento? A pressão estática é medida por meio de uma tomada de pressão estática, instalada na parede do duto. Temos que uma tomada de pressão é um orifício feito em uma parede da tubulação, de tal maneira que o plano do orifício seja paralelo às direções do escoamento e das linhas de corrente, como mostra a Figura 3.13a. Nesse orifício é, então, conectado o medidor de pressão.

Para medir a pressão de estagnação, é utilizado o tubo de Pitot. Esse equipamento é um pequeno tubo com a extremidade aberta alinhada perpendicularmente ao escoamento, como ilustra a Figura 3.13b. O fluido entra no tubo por um pequeno orifício e é desacelerado até a velocidade zero (ponto de estagnação); na saída dele é conectado um manômetro ou algum instrumento de medição de pressão para quantificar a pressão necessária para frear o fluido.

**Figura 3.13** | Medição de pressões (a) estática e (b) de estagnação



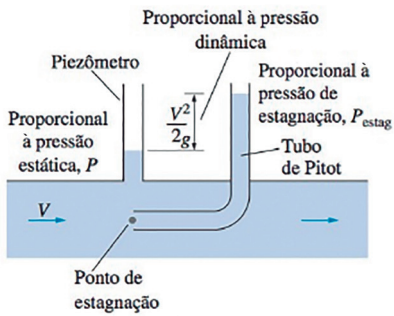

Fonte: Fox et al. (2014, p. 244-245).

Quando as pressões estática e de estagnação são medidas em um ponto do escoamento, a velocidade do fluido naquele local pode ser facilmente determinada pela equação:

$$V = \sqrt{\frac{2\left(p_{estag} - p\right)}{\rho}}.$$

A Figura 3.14 mostra as pressões estática, de estagnação e dinâmica medidas para um mesmo ponto. Perceba que a pressão dinâmica não é medida diretamente, pois representa a diferença entre a pressão de estagnação e a pressão estática.

**Figura 3.14** | Pressões estática, de estagnação e dinâmica




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 203).

### Linha de energia e linha piezométrica

Vimos até aqui que a equação de Bernoulli pode ser expressa em termos de energia mecânica por unidade de massa $[J/kg]$ ou em termos de pressão $[Pa]$. Frequentemente, é útil representar a energia mecânica graficamente, utilizando alturas para facilitar a visualização dos termos da equação de Bernoulli. Isso é feito dividindo-se cada termo da equação por *g*, obtendo-se, assim:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = constante,$$

sendo essa a sua forma mais utilizada.

Perceba que agora todos os termos dessa equação têm dimensão de comprimento e, portanto, representam um tipo de carga. A constante da equação é chamada de **carga total do escoamento**, escrita como *H*, dessa forma:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H.$$

Em que cada termo expressa:

$\frac{p}{\rho g}$ • **Carga de pressão** $[m]$: representa a altura de uma coluna de fluido que produz a pressão estática p.

$$p = \rho g h \rightarrow h = \frac{p}{\rho g}$$

$\frac{V^2}{2g}$ • **Carga de velocidade** $[m]$: representa a altura necessária para que um fluido atinja a velocidade V, durante uma queda livre sem atrito.

$$\Delta E_{mecânica} = 0 \rightarrow E_{potencial} = E_{cinética} \rightarrow$$

$$\rightarrow mgh = \frac{mV^2}{2} \rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

$z$ • **Carga de elevação**: representa a elevação em relação a um plano de referência arbitrário.

A **linha de energia** (*LE*) mostra a altura total de *H* (carga total) e pode ser medida usando um tubo de Pitot. Para um escoamento

sem atrito, a *LE* tem altura constante, pois não existe perda de energia mecânica. Portanto,

$$LE = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z.$$

A **linha piezométrica** (*LP*), também chamada de linha hidráulica, mostra a altura correspondente à elevação em relação a um plano de referência arbitrário somado à altura de pressão. A *LP* é medida utilizando-se uma tomada de pressão estática:

$$LP = \frac{p}{\rho g} + z.$$

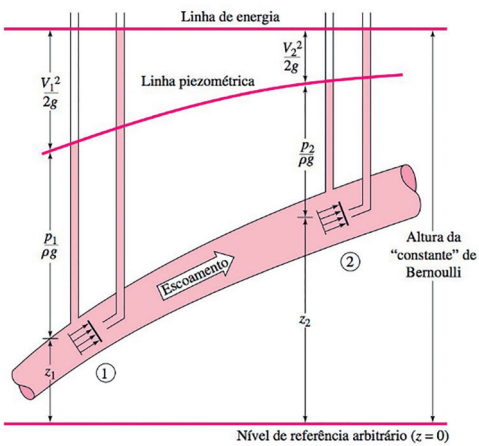
A difereça entre a *LE* e a *LP* é sempre igual à carga dinâmica:

$$LE - LP = \frac{V^2}{2g}.$$

**Exemplificando**

Podemos observar as linhas *LE* e *LP* para um escoamento sem atrito entre dois pontos no duto representado na Figura 3.15. Os tubos piezométricos determinam a altura de pressão estática (carga de pressão), representando a *LP*, enquanto os tubos de Pitot, a altura total (carga total) correspondente à *LE*.

**Figura 3.15** | Linhas piezométrica e de energia para o escoamento sem atrito em um duto




Fonte: White (2010, p. 199).

Nesse exemplo, a LE é constante, pois trata-se de um escoamento sem atrito. Por sua vez, a LP se eleva. Essa elevação ocorre por causa da elevação da altura em relação ao referencial e da diminuição da velocidade referente ao aumento da área da seção transversal (variações da velocidade somente ocorrem quando o diâmetro do duto varia).

É muito importante salientar que, em condições reais de escoamento, a LE não será constante. Temos que cairá em razão das perdas por atrito causadas pela viscosidade do fluido.

**Reflita**

Antes de partir para as atividades de aprendizagem desta seção, reserve um tempo para compreender a Figura 3.15. Como se relaciona com a equação de Bernoulli?

Mesmo com as restrições aplicadas, a equação de Bernoulli é amplamente utilizada na prática. Vimos que pode ser expressa em termos de energia mecânica por unidade de massa $[J/kg]$, em termos de pressão $[Pa]$ ou em termos de carga $[m]$, daí a importância de compreender sua aplicação e saber interpretá-la da maneira correta.

**Pesquise mais**

Para compreender mais sobre a aplicação da equação de Bernoulli, sugiro a leitura dos seguintes livros:

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. p. 245-250, exemplos 6.2 a 6.6.

ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. p. 208-214, exemplos 5.5 a 5.10.

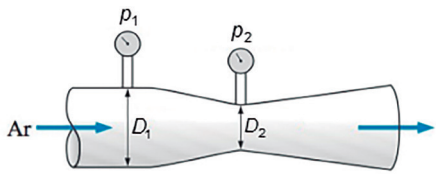
## Sem medo de errar

Uma empresa de consultoria em engenharia contratou você, aluno, para atuar na equipe especializada em projetos de mecânica dos fluidos, para resolver os mais diversos problemas enfrentados pelos seus clientes. Em seu último trabalho, você deverá utilizar a criatividade para determinar uma expressão para a vazão volumétrica

de ar aquecido, em uma tubulação que sai da fornalha e alimenta um secador de grãos. Para isso, você deverá utilizar um medidor de Venturi. Essa informação é essencial para que seu cliente dimensione a vazão de ar adequada à secagem correta dos grãos.

O ar escoa através de um medidor de Venturi com diâmetros $D_1$ e $D_2$, conhecidos, e pressões $p_1$ e $p_2$ medidas conforme mostra a Figura 3.16.

**Figura 3.16** | Desenho esquemático do medidor de Venturi




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 235).

O escoamento em questão é estacionário e incompressível (os efeitos de compressibilidade para os gases podem ser desprezados para velocidades abaixo de 100 m/s); os efeitos do atrito são insignificantes e não há troca de calor e trabalho, portanto a equação de Bernoulli pode ser aplicada.

O efeito da coluna de ar sobre a mudança de pressão é insignificante devido à sua baixa densidade. Portanto, a pressão pode ser considerada uniforme em cada seção transversal do medidor de Venturi.

Tomando o ponto 1 na seção de entrada e o ponto 2 na garganta, ambos ao longo da linha central do medidor de Venturi, note que os pontos 1 e 2 se encontram na linha central, portanto $z_1 = z_2$. Com isso, a aplicação da equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 se torna:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \rightarrow \quad p_1 - p_2 = \rho \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}.$$

O escoamento é assumido como incompressível e, portanto, a densidade é constante. Então, a relação de conservação de massa em regime permanente pode ser expressa como:

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad \rightarrow \quad A_1 V_1 = A_2 V_2 = Q \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2}.$$

Substituindo $V_1$ e $V_2$ na equação de Bernoulli,

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2}{2} \quad \rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{\rho Q^2}{2A_2^2}\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right).$$

Finalmente, resolvendo para $Q$, obtemos uma expressão para a vazão volumétrica de ar:

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}}.$$

Com esse resultado, é possível saber a vazão conhecendo a diferença de pressão, a geometria do medidor e a massa específica do ar. É muito importante lembrar que a massa específica é constante ao longo do escoamento, porém vale salientar que varia de acordo com a temperatura.

Pronto! Mais um desafio finalizado com sucesso. Agora, um relatório será encaminhado para o cliente, que poderá utilizar a vazão de ar adequada à secagem correta dos seus grãos.

### Discussão

Os medidores de Venturi são comumente usados como medidores de vazão de gases e líquidos. Isso é feito simplesmente medindo-se a diferença de pressão $p_1 - p_2$ por meio de um manômetro ou por transdutores de pressão. A vazão real será menor que o valor obtido pela equação devido às perdas de atrito ao longo das superfícies da parede em um escoamento real. Mas essa diferença pode ser tão pequena, que é inferior a 1% do valor da medida, em um medidor de Venturi bem projetado. Os efeitos do desvio do escoamento ideal de Bernoulli podem ser corrigidos pela expressão:

$$Q = C A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}},$$

em que $C$ é o coeficiente de descarga de Venturi, cujo valor é inferior a 1 (pode chegar a 0,99 para medidores de Venturi bem projetados em certos intervalos de vazão). Finalizando, temos que, para elevados valores de Reynolds ($Re_{D_1} > 2 \times 10^5$), o valor do coeficiente de descarga de Venturi é maior que 0,98.

## Avançando na prática

### Cálculo da pressão líquida de sustentação em uma asa

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa fabricante de pequenas aeronaves contratou você para atuar na equipe de projeto e dimensionamento do perfil das asas que serão utilizadas na sua mais nova aeronave que será lançada futuramente no mercado. Seu trabalho, como parte da equipe, é determinar a pressão líquida que o perfil da asa gera para cima, que dará origem à sustentação da aeronave durante o voo. Para isso, um modelo dessa asa, em escala real, foi testado em um túnel de vento com velocidade de 50 *m/s*; medidas realizadas nas superfícies superior e inferior da asa indicaram velocidades de 70 *m/s* e 35 *m/s*, respectivamente. Com esses dados em mãos e sabendo que a aeronave foi projetada para voar a uma altitude de 1000 m, você deve solucionar mais esse desafio.

#### Resolução da situação-problema

Para uma altitude de 1000 m, a temperatura da atmosfera-padrão é de aproximadamente 281 K e a velocidade do som é 336 *m/s*. Podemos calcular os efeitos da compressibilidade avaliando o número de Mach, *M*, do escoamento:

$$M = \frac{V}{c},$$

em que *V* é a velocidade do escoamento e *c* é a velocidade local do som. Para $M < 0{,}3$, a variação da massa específica é inferior a 5%; assim, os escoamentos de gases com $M < 0{,}3$ podem ser tratados como incompressíveis.

Chamando a superfície superior da asa de Ponto 1, sua superfície inferior de Ponto 2 e considerando o escoamento do ar em um ponto fora da asa, temos que:

$$M_{ar} = \frac{50\,m/s}{336\,m/s} = 0{,}148;\ M_1 = \frac{70\,m/s}{336\,m/s} = 0{,}208 \text{ e}$$

$$M_2 = \frac{35\,m/s}{336\,m/s} = 0{,}104.$$

Portanto, o escoamento pode ser considerado incompressível. Para um regime permanente, a equação de Bernoulli pode ser aplicada ao longo de uma linha de corrente:

$$\frac{p_{ar}}{\rho}+\frac{V_{ar}^2}{2}+gz_{ar}=\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2,$$

desprezando $\Delta z$, temos que:

$$\frac{p_{ar}}{\rho}+\frac{V_{ar}^2}{2}=\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}.$$

Os valores da pressão e da massa específica do ar, para uma altitude de 1000 m, podem ser encontrados na Tabela A.3 do livro Fox (2014). Consequentemente,

$$p_{ar}=8{,}96\times10^4\,\frac{N}{m^2}\ \text{ e }\ \rho=1{,}12\,\frac{kg}{m^3}.$$

Resolvendo a Equação de Bernoulli para a superfície superior da asa (Ponto 1), obtemos:

$$p_1=p_{ar}+\frac{1}{2}\rho\left(V_{ar}^2-V_1^2\right)$$

$$p_1=8{,}96\times10^4\,\frac{N}{m^2}+\frac{1}{2}\times1{,}12\,\frac{kg}{m^3}\left[\left(50\,\frac{m}{s}\right)^2-\left(70\,\frac{m}{s}\right)^2\right]$$

$$p_1=88{,}25\,kPa\,(\text{abs}).$$

Resolvendo a Equação de Bernoulli para a superfície inferior da asa (Ponto 2), obtemos:

$$p_2=p_{ar}+\frac{1}{2}\rho\left(V_{ar}^2-V_2^2\right)$$

$$p_2=90{,}31kPa\,(\text{abs}).$$

Finalmente, para esse teste em túnel de vento, a asa sofre uma diferença líquida de pressão para cima de aproximadamente $\Delta p=90{,}31kPa-88{,}25\,kPa=2{,}06\,kPa$, um efeito significativo. Dessa forma, você concluiu com êxito mais esse desafio.

### Discussão

Este problema fornece uma dica de como uma asa gera sustentação. O ar que atinge o bordo de ataque da asa possui

velocidade de 50 *m/s* e acelera para 70 *m/s* sobre a superfície superior. Isso conduz, por meio da equação de Bernoulli, a uma queda de pressão de $89{,}6\,kPa$ para $88{,}25\,kPa$. De forma análoga, o ar desacelera sobre a superfície inferior, conduzindo a um aumento da pressão de $89{,}6\,kPa$ para $90{,}31kPa$. Dessa forma, a asa sofre uma diferença líquida de pressão para cima.

## Faça valer a pena

**1.** Por uma tubulação industrial escoa óleo ($\gamma = 8.000N/m^3$). Em determinado ponto (1) dessa tubulação, localizado a 5 m acima do nível do solo, um manômetro indica pressão de $240$ kPa e uma sonda de velocidade mostra velocidade de 4 m/s. Em outro ponto (2) mais adiante, no nível do solo, outra sonda de velocidade apresenta um valor igual a 10 m/s.

Desprezando os efeitos do atrito, desconsiderando qualquer tipo de perda de energia e utilizando para os cálculos $g = 10\,m/s^2$, a pressão no ponto (2) é:

a) 55,4 *kPa*.
b) 110,8 *kPa*.
c) 167,7 *kPa*.
d) 201,3 *kPa*.
e) 246,4 *kPa*.

**2.** Um reservatório de grandes dimensões, aberto para a atmosfera, é drenado pela base por um orifício com 10 cm de diâmetro. Considerando o escoamento ideal, calcule a vazão aproximada, *Q*, no dreno quando o nível do reservatório é 2 m.

Com base no texto apresentado, assinale a alternativa correta:

a) $Q = 0{,}02\,m^3/s$.
b) $Q = 0{,}03\,m^3/s$.
c) $Q = 0{,}04\,m^3/s$.
d) $Q = 0{,}05\,m^3/s$.
e) $Q = 0{,}06\,m^3/s$.

**3.** Propõe-se que um campo de velocidade seja $u = 10y$, $v = -10x$ e $w = 0$. Sobre esse campo de velocidade, temos as afirmativas a seguir:

I. O escoamento é incompressível.
II. Para um escoamento sem atrito $\partial p/\partial x = 100\rho x$.
III. Para um escoamento sem atrito $\partial p/\partial y = 100\rho y$.
IV. Para um escoamento sem atrito $\partial p/\partial z = 0$.

Analisando as afirmativas mostradas no texto-base, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta:

a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
b) Apenas as afirmativas I e IV estão corretas.
c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
d) Apenas as afirmativas I, II e III estão corretas.
e) Apenas as afirmativas II, III e IV estão corretas.

# Referências

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

POTTER, M.; WIGGERT, D. C.; RAMADAN, B. H. **Mecânica dos Fluidos**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

WHITE, F. M. **Mecânica dos Fluidos**. 6. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

# Escoamentos interno e externo viscosos e incompressíveis

**Convite ao estudo**

Caro aluno, nesta unidade estudaremos os escoamentos interno e externo, viscosos e incompressíveis, com o intuito de entender como se desenvolvem, em que situações ocorrem e como são aplicados. Esses tipos de escoamento são amplamente estudados na Engenharia, pois tratam de escoamentos reais em tubulações ou ao redor de superfícies. O escoamento interno ocorre, comumente, em tubos e dutos, mas também é muito importante no estudo da lubrificação, como em mancais de deslizamento e no estudo da transferência de calor, como no projeto de trocadores de calor. No escoamento externo, os corpos estão imersos em um fluido e sobre eles podem atuar forças de sustentação e/ou de arrasto, e esse tipo de escoamento está diretamente relacionado com a aerodinâmica de uma aeronave ou de um automóvel, por exemplo.

Portanto, nesta unidade, vamos estudar os escoamentos interno e externo, viscosos e incompressíveis, com base na aplicação das teorias de escoamento em tubos e dutos, de medidores de vazão e de velocidade, do conceito de camada-limite e de forças de arrasto e de sustentação, para empregar esses conceitos na resolução de problemas práticos e teóricos da realidade profissional da área. Para isso, você deve primeiramente relembrar os conceitos de diferenciação e integração, já estudados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, para, então, aplicá-los de maneira correta no desenvolvimento das equações. Deverá também estar apto a realizar simplificações adequadas no tratamento dos escoamentos incompressíveis e viscosos.

O ponto central do nosso estudo é baseado em uma empresa de Engenharia e soluções em mecânica dos fluidos, que contratou você, aluno, como o especialista que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo tipo de projeto que envolva a aplicação de fluidos.

Para atingir os objetivos deste desafio, você deverá utilizar a criatividade para solucionar os mais diversos problemas e estar apto a:

- Determinar o comprimento de entrada, a máxima vazão, o gradiente de pressão, a velocidade média, a velocidade máxima e o perfil de velocidade para o qual é esperado um escoamento laminar em uma tubulação.

- Projetar uma placa de orifício que será utilizada para medir a vazão em tubulações industriais, dimensionando corretamente o diâmetro do orifício.

- Estimar a força e a potência requeridas para que um navio superpetroleiro vença a força de arrasto decorrente do atrito superficial com a água do mar.

Para isso, serão estudados nas seções desta unidade o escoamento interno viscoso e incompressível, os medidores de vazão de restrição para escoamentos internos e o escoamento externo viscoso e incompressível.

Está preparado para mais esses desafios? Vamos lá!

# Seção 4.1

## Escoamento interno viscoso e incompressível

### Diálogo aberto

Caro aluno, os escoamentos internos viscosos e incompressíveis são de extrema importância para os engenheiros. O escoamento em um tubo circular é, sem dúvida, o escoamento interno mais comum, sendo encontrado nos sistemas de saneamento e abastecimento de água, em sistemas de refrigeração e condicionamento de ar, em sistemas de automação industrial pneumática, em irrigação na agricultura, em tubulações industriais de uma refinaria de petróleo, nos sistemas hidráulicos de automóveis e de aeronaves e até mesmo no jato de tinta de uma impressora e nas veias e artérias do corpo humano. Além do escoamento em um tubo circular, existem outras situações em que o escoamento interno ocorre e que também são importantes, como no caso de vazamento por meio da folga anular entre um pistão e um cilindro e na lubrificação de mancais de deslizamento.

Na presente unidade, temos que uma empresa de engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo projeto que envolva a aplicação de fluidos. Como seu primeiro trabalho nessa empresa, você se deparou com o seguinte desafio: uma empresa fabricante de equipamentos farmacêuticos está desenvolvendo uma máquina enchedora de frascos para determinado medicamento líquido. Esse novo equipamento possui um tubo retilíneo de $5\ mm$ de diâmetro que liga o reservatório até a saída para o frasco e opera a $40°C$. Para seu correto funcionamento, o medicamento (fluido) deve ser transportado do reservatório até o frasco em um escoamento laminar. Sabe-se que, na temperatura de $40°C$, esse medicamento possui viscosidade dinâmica igual a $\mu = 5{,}3 \times 10^{-3}\ N \cdot s/m^2$ e massa específica igual a $\rho = 1225\ kg/m^3$. Seu objetivo como responsável por esse projeto é, utilizando-se de criatividade, determinar qual o comprimento de entrada, a máxima

vazão, o correspondente gradiente de pressão, a velocidade média, a velocidade máxima e o perfil de velocidade para o qual é esperado o escoamento laminar por toda a tubulação da máquina, além de calcular o tempo de enchimento para cada frasco de 20 ml, a fim de estimar sua produção por hora. Quais são as variáveis relevantes para a resolução desse problema? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para a simplificação do problema? Quais equações devemos utilizar? Com o resultado final em mãos, você deverá elaborar um relatório técnico contendo todo o memorial de cálculo e as hipóteses adotadas, que deverá ser entregue diretamente para o cliente em questão.

Para isso, você deve, a princípio, compreender como ocorre o escoamento interno viscoso e incompressível, além de saber identificar quando o escoamento é laminar ou turbulento, calcular o comprimento de entrada e entender o conceito de escoamento completamente desenvolvido, para, então, poder aplicar o equacionamento correto para cada modelo adotado na resolução do problema proposto.

Está preparado para este novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

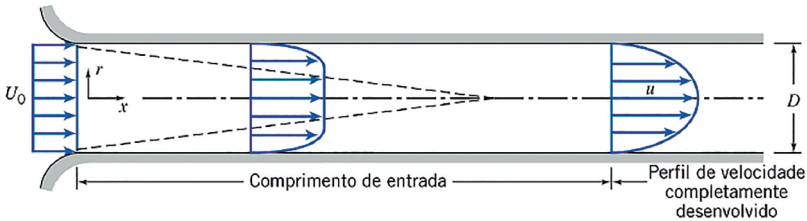
### A região de entrada para um escoamento interno

Caro aluno, temos que o escoamento é classificado como interno quando ocorre em um espaço confinado ou, em outras palavras, quando o fluido está inteiramente limitado por superfícies sólidas. É o caso do escoamento em tubulações, dutos, bocais, difusores, válvulas e acessórios. Esse tipo de escoamento pode ser laminar ou turbulento, classificação diretamente relacionada ao número de Reynolds, conforme já estudamos na Unidade 1.

Vamos considerar o escoamento laminar no interior de um tubo circular, no qual o fluido entra no tubo com uma velocidade uniforme $U_o$, conforme mostra a Figura 4.1. Quando o fluido entra em contato com a superfície, por causa da condição de não deslizamento, há o desenvolvimento de uma camada-limite com o aumento de $x$ que termina com a fusão das camadas-limite no eixo central do tubo.

Após essa fusão, o perfil de velocidade não mais se altera, tornando-se completamente desenvolvido e inteiramente viscoso.

**Figura 4.1** | Desenho esquemático do escoamento na região de entrada de um tubo




Fonte: Fox et al. (2014, p. 330).

A distância a partir da entrada até o local onde se inicia o escoamento completamente desenvolvido é chamada de **comprimento de entrada**. Tem-se que, para o escoamento laminar, o comprimento de entrada $L$ é uma função do número de Reynolds:

$$\frac{L}{D} \cong 0{,}06\frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \cong 0{,}06\,Re,$$

em que $\bar{V} = Q/A$ é a velocidade média do escoamento; neste caso, $\bar{V} = U_0$.

Como o escoamento laminar ocorre para números de Reynolds menores que 2300, o comprimento de entrada pode ser tão grande quanto $L = 138D$, ou aproximadamente 140 diâmetros do tubo. Para o escoamento turbulento, as camadas-limite crescem mais rapidamente devido à mistura intensa entre as camadas de fluido. Nesse regime de escoamento, o comprimento de entrada é da ordem de 25 a 40 diâmetros do tubo, segundo Fox et al. (2014).

Uma boa aproximação para o comprimento de entrada em um escoamento turbulento pode ser obtida por meio da relação:

$$\frac{L}{D} \cong 4{,}4\left(\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}\right)^{1/6} \cong 4{,}4\left(Re\right)^{1/6}.$$

É muito importante salientar que, na sequência desta seção, focaremos no que acontece depois da região de entrada, isto é, o foco do nosso estudo é na região de escoamento completamente desenvolvido.

## Escoamento laminar completamente desenvolvido

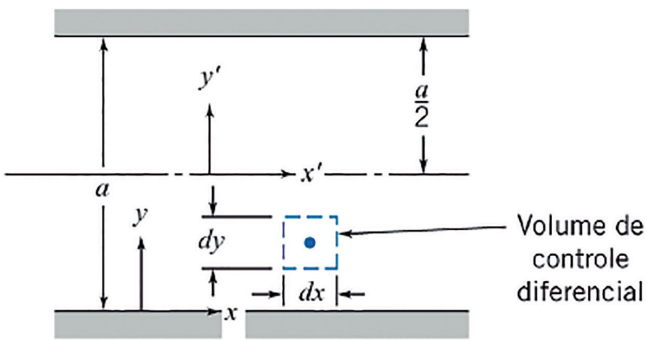
Vamos considerar três exemplos clássicos de escoamento laminar completamente desenvolvido: o escoamento entre duas placas paralelas estacionárias; o escoamento entre duas placas paralelas com a placa superior movendo-se com velocidade constante; o escoamento em um tubo.

Para cada um desses escoamentos, é muito importante conhecer o campo de velocidade, pois a partir dele é possível calcular a tensão de cisalhamento, a queda de pressão, a vazão e as velocidades média e máxima.

## Escoamento entre duas placas paralelas estacionárias

Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido, permanente e incompressível entre placas horizontais paralelas e estacionárias, separadas por uma distância *a* e com uma profundidade *l*, conforme mostra a Figura 4.2.

**Figura 4.2** | Desenho esquemático de um volume de controle diferencial para análise do escoamento entre placas paralelas




Fonte: adaptado de Fox et al. (2014, p. 332).

Uma vez que o escoamento é completamente desenvolvido, a velocidade não pode variar em *x*, dependendo apenas de *y*, ou seja, $u = u(y)$. Além disso, o escoamento ocorre na direção *x* e, dessa forma, não há componente de velocidade na direção *y* ou *z*, portanto $v = w = 0$. De fato, para escoamentos completamente desenvolvidos e viscosos, somente a pressão variará na direção *x*.

Utilizando as equações de Navier-Stokes em coordenadas retangulares, com a equação da continuidade, e aplicando as considerações adequadas, essas equações podem ser simplificadas e, em seguida, resolvidas usando as condições de contorno apropriadas ($u = 0$ em $y = 0$ e $u = 0$ em $y = a$), para, então, obtermos o perfil de velocidade do escoamento:

$$u = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right].$$

**Reflita**

Como é obtido o perfil de velocidade para o escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas planas estacionárias a partir das equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade? Esse perfil de velocidade é a chave para conhecermos outras propriedades do escoamento.

Podemos, agora, encontrar facilmente a distribuição da tensão de cisalhamento, $\tau_{yx}$, utilizando a lei de Newton da viscosidade para o escoamento unidimensional, descrita como:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy}.$$

Portanto, a distribuição da tensão de cisalhamento, é dada por:

$$\tau_{yx} = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right].$$

A vazão em volume, para uma profundidade $l$ é dada por $Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_0^a (ul)dy$. Então, a vazão volumétrica por unidade de profundidade $l$ é:

$$\frac{Q}{l} = -\frac{a^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

A velocidade média do escoamento pode ser obtida por meio da relação $\bar{V} = Q/A$, portanto:

$$\bar{V} = -\frac{a^2}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Para encontrarmos a velocidade máxima para esse escoamento, fazemos $du/dy = 0$ e resolvemos para o valor de $y$ correspondente. Assim, procedendo, obtemos:

$$u_{máx} = -\frac{a^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{3}{2}\bar{V}.$$

Como o escoamento é completamente desenvolvido e inteiramente viscoso, temos que a pressão decresce linearmente na direção $x$ ao longo de uma distância $L$, então:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L}.$$

Dessa forma, podemos, ainda, encontrar uma expressão para a vazão em volume como sendo uma função da queda de pressão:

$$\frac{Q}{l} = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L}.$$

**Exemplificando**

O escoamento entre placas paralelas estacionárias pode ser utilizado para modelar, por exemplo, um sistema hidráulico de alta pressão, tal como o sistema de freios de um automóvel. Nesse sistema, temos que o fluido hidráulico vaza através da folga anular entre um pistão e um cilindro, com frequência. Dessa forma, é possível calcular a taxa de vazamento segundo o conhecimento do campo de velocidade do escoamento.

### Escoamento entre duas placas paralelas com a placa superior movendo-se com velocidade constante

Caro aluno, esse escoamento é similar ao apresentado anteriormente e difere-se apenas na placa superior, que agora se move com uma velocidade constante, $U$, enquanto a placa inferior permanece parada.

Podemos novamente utilizar as equações de Navier-Stokes em coordenadas retangulares, com a equação da continuidade, e aplicar as considerações adequadas para simplificá-las e, em seguida, resolvê-las utilizando as condições de contorno ($u = 0$ em

$y = 0$ e $u = U$ em $y = a$), para, então, obtermos o perfil de velocidade do escoamento:

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right].$$

Perceba que se $U = 0$, essa equação se reduz à equação do perfil de velocidade entre as placas estacionárias. Um caso muito importante ocorre quando o gradiente de pressão é zero ($\partial p/\partial x = 0$). Quando isso acontece, a velocidade varia linearmente com *y*, e é chamado de **escoamento de Couette**.

A distribuição da tensão de cisalhamento, $\tau_{yx}$, é encontrada utilizando-se a lei de Newton da viscosidade para o escoamento unidimensional:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right].$$

Por definição, a vazão volumétrica ou vazão em volume, para uma profundidade l, é dada por:

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{a^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

A velocidade média do escoamento pode ser obtida por meio da relação $\bar{V} = Q/A$, portanto:

$$\bar{V} = \frac{U}{2} - \frac{a^2}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Para encontrarmos a velocidade máxima para esse escoamento, fazemos $du/dy = 0$ e resolvemos para o valor de *y* correspondente. No entanto, para esse caso de escoamento, não existe uma relação simples entre a velocidade máxima e a velocidade média.

**Exemplificando**

O escoamento entre placas paralelas com a placa superior movendo-se com velocidade constante pode ser utilizado para modelar, por exemplo, um mancal de deslizamento, tal como os mancais do virabrequim do motor de um automóvel. Nesse tipo de mancal, um cilindro interno gira dentro do mancal estacionário, e ambos são

separados por uma fina camada de lubrificante. Para cargas leves, os dois centros coincidem e a folga é simétrica, de modo que $\partial p/\partial x = 0$. Dessa forma, é possível calcular o torque e a potência segundo o conhecimento do campo de velocidade do escoamento.

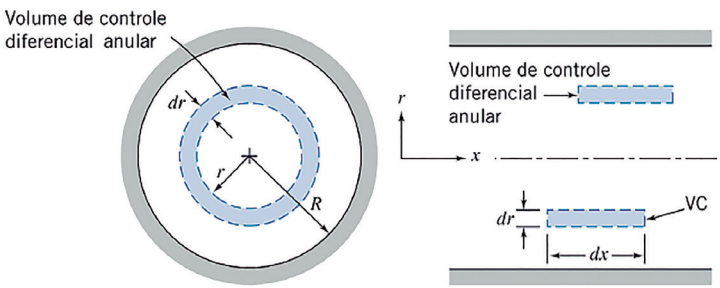
## Escoamento em tubos e dutos

Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo com raio *R*, conforme mostra a Figura 4.3. Esse escoamento é axissimétrico, ou seja, apresenta simetria em relação ao eixo *x*, de forma que é mais conveniente trabalhar as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas.

**Pesquise mais**

As equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ) podem ser encontradas no Apêndice B do livro de Fox et al. (2014, p. 795). É muito importante que você compreenda essas equações, pois serão utilizadas na sequência, a fim de determinarmos o perfil de velocidade do escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo.

**Figura 4.3** | Desenho esquemático de um volume de controle diferencial para análise do escoamento em um tubo




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 343).

Resolvendo as equações de Navier-Stokes e a da continuidade para o escoamento em questão, encontramos a solução geral do perfil de velocidade, dada como:

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{\mu}\ln r + c_2.$$

Para esse tipo de escoamento, temos apenas uma condição de contorno, que é $u = 0$ em $r = R$, no entanto, mesmo desconhecendo a velocidade na linha de centro do tubo, sabemos que deve ser finita em $r = 0$. O único modo de tornar essa condição verdadeira é fazer $c_1 = 0$.

Dessa forma, aplicando a condição de contorno, obtemos o perfil de velocidade:

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

A distribuição da tensão de cisalhamento, $\tau_{yx}$, é encontrada utilizando-se a lei de Newton da viscosidade para o escoamento unidimensional:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

A vazão em volume é dada por $Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_0^R (u2\pi r)\,dr$. Então, a vazão volumétrica em um tubo é:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

A velocidade média do escoamento pode ser obtida por meio da relação $\bar{V} = Q/A$, na qual $A = \pi R^2$, portanto:

$$\bar{V} = \frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Para encontrarmos a velocidade máxima para esse escoamento, fazemos $du/dr = 0$ e a resolvemos para o valor de *y* correspondente. Assim, procedendo, obtemos:

$$u_{máx} = U = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\bar{V}.$$

O perfil de velocidade pode ser escrito em termos da velocidade máxima, como:

$$\frac{u}{U} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Como o escoamento é completamente desenvolvido e inteiramente viscoso, temos que a pressão decresce linearmente na direção *x* ao longo de uma distância *L*, então $\partial p/\partial x = -\Delta p/L$. Dessa forma, podemos, ainda, encontrar uma expressão para a vazão em volume como sendo uma função da queda de pressão:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu L}.$$

Caro aluno, já desenvolvemos uma expressão para o cálculo da vazão em função da queda de pressão para um escoamento laminar completamente desenvolvido em uma tubulação. Podemos, então, rearranjar essa equação para deduzir teoricamente a queda de pressão:

$$\Delta p = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}.$$

Temos que, para o escoamento turbulento, essa dedução não pode ser feita analiticamente. Em vez disso, utilizamos aproximações teóricas e experimentais. Com exceção de escoamentos de fluidos muito viscosos em tubos de diâmetros muito pequenos, os escoamentos internos são, em geral, turbulentos. Como temos que no escoamento turbulento, diferentemente do escoamento laminar, não existe uma relação entre o campo de tensões e o campo de velocidade média, recorremos a dados experimentais.

O perfil de velocidade para escoamento turbulento completamente desenvolvido através de um tubo liso pode ser representado pela equação empírica da lei de potência:

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n},$$

em que $\bar{u}$ é a velocidade média temporal, $U$ é a velocidade na linha de centro, $y$ é a distância média a partir da parede ($y = R - r$) e $R$ é o raio do tubo. O expoente $n$ varia com o número de Reynolds, de acordo com a relação $n = -1{,}7 + 1{,}8 \log Re_U$, para $Re_U > 2 \times 10^4$, e $Re_U$ é o número de Reynolds calculado para a velocidade na linha de centro $U$.

A razão entre a velocidade média e a velocidade na linha de centro pode ser estimada por:

$$\frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

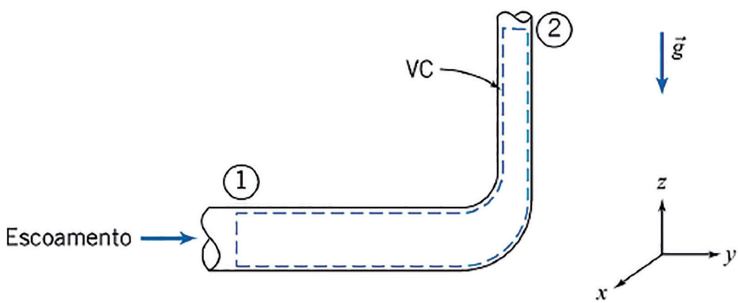
Temos que, quando o valor de $n$ aumenta, com o aumento do número de Reynolds, a razão $\bar{V}/U$ também aumenta, e o perfil de velocidade se torna mais rombudo, ou seja, sua inclinação se torna mais acentuada.

### Considerações de energia no escoamento em tubos

Para escoamentos viscosos, a velocidade em uma seção transversal não pode ser uniforme. Dessa forma, precisamos introduzir a velocidade média na equação de energia para seu correto dimensionamento. Para isso, definimos um coeficiente de energia cinética, $\alpha$, que nada mais é que um fator de correção que nos permite usar a velocidade média $\bar{V}$ na equação da energia, com o intuito de calcularmos a energia cinética em uma seção transversal do escoamento.

Considere o escoamento permanente e incompressível que ocorre através do cotovelo redutor mostrado na Figura 4.4. Temos que a superfície de controle (linha tracejada) é perpendicular ao escoamento nas seções 1 e 2 e coincide com as paredes internas do tubo nas demais partes.

**Figura 4.4** | Desenho esquemático do volume de controle selecionado para análise de energia




Fonte: Fox et al. (2014, p. 353).

Partindo da equação geral da energia, temos que:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cisalhamento} - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\, d\forall + \\ + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}.$$

Para a análise do volume de controle da Figura 4.4, temos que $\dot{W}_{eixo} = \dot{W}_{cisalhamento} = \dot{W}_{outros} = 0$. Considerando que a energia interna e a pressão são uniformes através das seções transversais 1 e 2 e utilizando a velocidade média, $\bar{V}$, a equação da energia se reduz a:

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m}\left(\alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2}\right).$$

Dividindo pela vazão mássica e rearranjando essa equação, obtemos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - \frac{\partial \dot{Q}}{\partial m}.$$

Temos que o termo $\left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)$ representa a energia mecânica por unidade de massa em uma seção transversal e o termo $(u_2 - u_1) - \frac{\partial \dot{Q}}{\partial m}$ é igual à diferença de energia mecânica por unidade de massa entre as seções 1 e 2, representada por $h_p$. Então:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_p.$$

Para o escoamento laminar em um tubo, temos que $\alpha = 2$. No escoamento turbulento em tubos, o perfil de velocidade é mais achatado e o coeficiente $\alpha$ é obtido pela relação:

$$\alpha = \left(\frac{U}{\bar{V}}\right)^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)}.$$

**Assimile**

O cálculo do coeficiente de energia cinética, $\alpha$, para o escoamento turbulento em um tubo, leva a uma expressão bastante complexa. Como resultado dessa expressão, temos que na faixa realista de $n = 6$ a $n = 10$, $\alpha$ varia de 1,08 a 1,03. Como o coeficiente é muito próximo de 1 para altos números de Reynolds, podemos usar a aproximação $\alpha = 1$ para os cálculos de escoamento em tubos.

## Sem medo de errar

Uma empresa de engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo projeto que envolva a aplicação de fluidos. Em seu primeiro trabalho nessa empresa, você se deparou com o seguinte desafio: uma empresa fabricante de equipamentos farmacêuticos está desenvolvendo uma máquina enchedora de frascos para determinado medicamento líquido. Esse novo equipamento possui um tubo retilíneo de $5\,mm$ de diâmetro que liga o reservatório até a saída para o frasco e opera a $40°C$. Para seu correto funcionamento, o medicamento (fluido) deve ser transportado do reservatório até o frasco em um escoamento laminar. Sabe-se que, na temperatura de $40°C$, esse medicamento possui viscosidade dinâmica igual a $\mu = 5{,}3 \times 10^{-3}\, N \cdot s/m^2$ e massa específica igual a $\rho = 1225\, kg/m^3$. Seu objetivo como responsável por esse projeto é determinar qual o comprimento de entrada, a máxima vazão, o correspondente gradiente de pressão, a velocidade média, a velocidade máxima e o perfil de velocidade para o qual é esperado o escoamento laminar por toda a tubulação da máquina, além de calcular o tempo de enchimento para cada frasco de $20\,ml$ e estimar sua produção por hora.

Temos que o escoamento laminar ocorre para $Re \leq 2300$.

Para calcular o comprimento de entrada, recorremos à equação:

$$\frac{L}{D} = 0{,}06\frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = 0{,}06\, Re.$$

Portanto, o maior comprimento de entrada possível para o escoamento laminar é:

$$L_{máx} = 0{,}06\, Re\, D = 0{,}06 \times 2300 \times 0{,}005 m = 0{,}69\, m$$

Podemos expressar o número de Reynolds em termos da vazão, como segue:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{Q}{A}\frac{\rho D}{\mu} = \frac{4Q}{\pi D^2}\frac{\rho D}{\mu} = \frac{4Q\rho}{\pi D \mu}.$$

Dessa forma, é possível determinar qual a vazão máxima permitida para $Re = 2300$:

$$Q_{máx} = \frac{\pi D \mu Re_{máx}}{4\rho} = \frac{\pi}{4} \times 0{,}005\,m \times 5{,}3 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \times \frac{1}{1225} \frac{m^3}{kg} \times 2300$$

$$Q_{máx} = 3{,}907 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s} = 39{,}07 \frac{ml}{s}$$

Uma vez conhecida a máxima vazão, podemos calcular o tempo de enchimento para cada frasco:

$$t = \frac{20\,ml}{38{,}14\,ml/s} = 0{,}52\,s.$$

Como cada frasco leva em torno de 0,52 segundo para encher e a produção da máquina é de aproximadamente 1.836 frascos por hora, desconsideramos o intervalo entre um frasco e outro.

O gradiente de pressão pode ser determinado pela equação:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Resolvendo para $\partial p/\partial x$, obtemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\mu Q}{\pi R^4} = -\frac{128\mu Q}{\pi D^4}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{128}{\pi(0{,}005m)^4} \times 5{,}3 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \times 3{,}907 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s} =$$

$$= -13489{,}9 \frac{N}{m^3}.$$

O sinal negativo indica que a pressão diminui ao longo do escoamento, como se esperava.

A velocidade média do escoamento pode ser obtida pela relação:

$$\bar{V} = \frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{D^2}{32\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$\bar{V} = \frac{(0{,}005m)^2}{32} \times \frac{1}{5{,}3 \times 10^{-3}} \frac{m^2}{N \cdot s} \times \left(13489{,}9 \frac{N}{m^3}\right) = 1{,}988 \frac{m}{s}.$$

Note que a velocidade média poderia também ser encontrada pela relação $\bar{V} = Q/A$.

Para encontrarmos a velocidade máxima para esse escoamento, fazemos $du/dr = 0$ e resolvemos para o valor de $y$ correspondente. Assim, procedendo, obtemos:

$$u_{máx} = U = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\bar{V} = 3{,}977\,\frac{m}{s}.$$

O perfil para escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo é dado pela equação:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

ou, ainda, em termos da velocidade máxima:

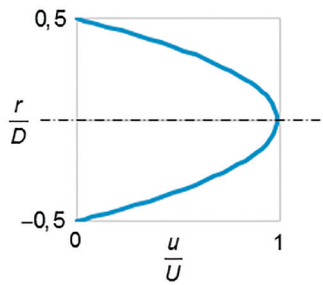
$$u(r) = 2\bar{V}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Finalmente,

$$u(r) = 3{,}997\left[1-\left(\frac{r}{0{,}0025}\right)^2\right]; \text{ com } -0{,}0025 \leq r \leq 0{,}0025.$$

Temos que o perfil da velocidade observado no interior do tubo possui a geometria mostrada na Figura 4.5.

**Figura 4.5** | Perfil da velocidade adimensionalizado do escoamento no interior do tubo




Fonte: elaborada pelo autor.

Com os resultados da sua análise em mãos, um relatório completo poderá ser encaminhado para o cliente, cumprindo, assim, seu objetivo nesse projeto com sucesso.

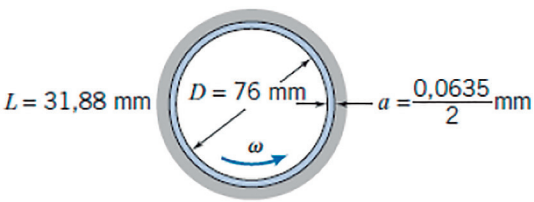
## Avançando na prática

### Cálculo do torque e da potência em um mancal de deslizamento

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa fabricante de mancais de deslizamento contratou você, aluno, para supervisionar a equipe de projetos. Um dos mancais produzidos pela empresa é utilizado no virabrequim de um motor a combustão interna que utiliza óleo SAE 30 como lubrificante a uma temperatura de $99°C$. Os dados geométricos desse mancal, mostrados na Figura 4.6, indicam que ele não está sobre carga, de modo que a folga é simétrica. O cliente que compra esse mancal para utilizá-lo em seus motores quer saber qual o torque e a potência dissipada pelo mancal e você é o responsável por responder a esse questionamento.

**Figura 4.6** | Desenho esquemático com os dados geométricos do mancal




Fonte: Fox et al. (2014, p. 339).

Considerar $L$ como o comprimento do mancal, $D$, o diâmetro interno do eixo e $a$, a folga entre o eixo e o mancal.

#### Resolução da situação-problema

Temos que o torque sobre o eixo girante decorre do cisalhamento viscoso na película de óleo. A largura da folga é pequena, de modo que o escoamento pode ser modelado como um escoamento entre placas paralelas.

Considerações:

(1) Escoamento laminar (essa hipótese deve ser confirmada).

(2) Escoamento completamente desenvolvido.

(3) Escoamento permanente.

(4) Escoamento incompressível.

(5) $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, pois o escoamento é simétrico.

A tensão de cisalhamento, $\tau_{yx}$, é encontrada pela expressão:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right].$$

Contudo, como o escoamento é simétrico, temos que:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{a} = \mu \frac{\omega R}{a} = \mu \frac{\omega D}{2a}.$$

Em que $\mu$ é a viscosidade dinâmica do óleo lubrificante, $U$ é a velocidade tangencial do eixo girante em $m/s$ e $\omega = 2\pi rpm/60$ é a rotação do eixo em $rad/s$.

Para o óleo SAE 30 a $99°C$, temos que, segundo a Figura A.2 do Apêndice A do livro de Fox et al. (2014, p. 790), $\mu = 9{,}6 \times 10^{-3}\, N \cdot s/m^2$.

Portanto,

$$\tau_{yx} = 9{,}6 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \times \frac{2\pi \times 3600}{60} \frac{rad}{s} \times \frac{76 \times 10^{-3} m}{2 \times 0{,}03175 \times 10^{-3} m} =$$

$$= 4331{,}6\, Pa.$$

A força total de cisalhamento é dada pela tensão de cisalhamento multiplicada pela área. É aplicada na superfície do eixo. Portanto, para o torque:

$$T = FR = \left(\tau_{yx} A\right) R = \tau_{yx} \left(\pi DL\right) \frac{D}{2} = \frac{\pi}{2} \tau_{yx} D^2 L$$

$$T = \frac{\pi}{2} \times 4331{,}6\, Pa \times \left(76 \times 10^{-3} m\right)^2 \times 31{,}8 \times 10^{-3} m = 1{,}25\, N \cdot m$$

A potência dissipada no mancal é:

$$\dot{W} = FU = FR\omega = T\omega$$

$$\dot{W} = 1{,}25\, N \cdot m \times \frac{2\pi \times 3600}{60} \frac{rad}{s} = 471\, Watts$$

Para assegurar que nossa hipótese de escoamento laminar é válida, vamos verificar o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} = \frac{\rho \omega R a}{\mu}$$

Da Tabela A.2 do apêndice A do livro de Fox et al. (2014, p. 786), temos que $\rho = 920\,kg/m^3$. Então,

$$Re = 920\frac{kg}{m^3} \times \frac{2\pi \times 3600}{60}\frac{rad}{s} \times \frac{1}{9{,}6 \times 10^{-3}}\frac{m^2}{N \cdot s} \times$$
$$\times 38 \times 10^{-3} m \times 0{,}03175 \times 10^{-3} m.$$
$$Re = 43{,}6$$

Portanto, temos que o escoamento é laminar, fato que valida a hipótese considerada.

## Faça valer a pena

**1.** Para condutos fechados, tem-se que o fluido entra nele com um perfil de velocidade uniforme e, a partir da entrada, devido ao princípio da aderência, temos o surgimento de uma camada-limite que cresce em relação ao comprimento do tubo e termina com a fusão das camadas-limite no eixo central do conduto.

Considere um tubo de 13 *mm* de diâmetro e 20 *m* de comprimento, que recebe água de um reservatório e a transporta com uma vazão de $0{,}3155 l/s$ e uma temperatura de $20°C$.

Para o escoamento descrito, o comprimento de entrada *L* é:

a) 13,4 cm.
b) 22,5 cm.
c) 31,2 cm.
d) 46,7 cm.
e) 52,8 cm.

**2.** Um viscosímetro simples e preciso pode ser feito com um tubo capilar. Se a vazão em volume e a queda de pressão forem medidas, e a geometria do tubo for conhecida, a viscosidade de um fluido newtoniano poderá ser calculada. O teste de certo líquido, cuja massa específica é similar à da água, em um viscosímetro capilar, forneceu os seguintes dados:

- Vazão em volume: 880 $mm^3/s$;
- Queda de pressão: 1,0 *Mpa*;
- Diâmetro do tubo: 0,50 *mm*;
- Comprimento do tubo: 1 *m*.

Com base nos dados obtidos do teste realizado, temos que a viscosidade do líquido é:

a) 1,74 $\times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$.

b) 1,98 $\times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$.

c) 2,54 $\times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$.

d) 3,12 $\times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$.

e) 3,77 $\times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$.

**3.** Um sistema hidráulico opera em uma pressão manométrica de $20\ MPa$ e a uma temperatura de $55°C$. O fluido hidráulico é óleo SAE 10 W. Uma válvula de controle consiste em um pistão com diâmetro de $25 mm$ e $15 mm$ de comprimento, introduzido em um cilindro com uma folga radial média de $0{,}005 mm$. Determine a vazão volumétrica de vazamento, se a pressão manométrica sobre o lado de baixa pressão do pistão for de 1,0 MPa.

A vazão volumétrica de vazamento, se a pressão manométrica sobre o lado de baixa pressão do pistão for de $1{,}0 MPa$, é igual a:

a) 26,3 $\frac{mm^3}{s}$.

b) 30,9 $\frac{mm^3}{s}$.

c) 43,1 $\frac{mm^3}{s}$.

d) 57,6 $\frac{mm^3}{s}$.

e) 68,2 $\frac{mm^3}{s}$.

# Seção 4.2

## Medidores de vazão de restrição para escoamentos internos

### Diálogo aberto

Caro aluno, os medidores de vazão são instrumentos usados para medir a taxa de escoamento, linear ou não linear, da massa ou do volume de um líquido ou um gás. Ao escolher um medidor de vazão, devem ser considerados fatores intangíveis, como a familiarização dos trabalhadores e sua experiência com calibração e manutenção, a disponibilidade de peças de reposição e o intervalo médio do histórico das falhas, entre outros fatores. Um dos erros mais comuns na medição de vazão é o seguinte: em vez de escolher um sensor capaz de operar adequadamente, tenta-se justificar o uso de um dispositivo mais viável economicamente. Essas aquisições "baratas" podem acabar custando muito mais caro.

Nesta unidade, lembre-se de que uma empresa de Engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista, que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo projeto que envolva a aplicação de fluidos. Em seu segundo trabalho, você se deparou com o seguinte desafio: uma empresa fabricante de medidores de vazão está desenvolvendo um medidor de restrição do tipo placa de orifício. Esse novo medidor deverá ser utilizado para medir a vazão de ar de $1 m^3/s$ em um tubo de 0,25 *m* de diâmetro e o manômetro disponível para a medição de pressão deve ter alcance máximo de 300 *mm* de água. Seu objetivo, como responsável por esse projeto, é determinar qual o diâmetro do orifício, $D_t$, que deve ser utilizado, a fim de que esse dispositivo funcione de maneira adequada. Quais são as variáveis relevantes para a resolução desse problema? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para a simplificação do problema? Quais equações devemos utilizar?

Com o resultado final em mãos, você precisará elaborar um relatório técnico contendo todo o memorial de cálculo e hipóteses adotadas, devendo ser entregue diretamente ao cliente em questão.

Para isso, a princípio, você deve compreender como é calculada a vazão para um medidor de restrição, além de saber identificar qual o tipo de medidor mais adequado. Com isso, é possível aplicar o equacionamento e as ideias corretas para cada modelo adotado na resolução dos problemas propostos nesta seção.

Está preparado para esse novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### Medidores de vazão de restrição para escoamentos internos

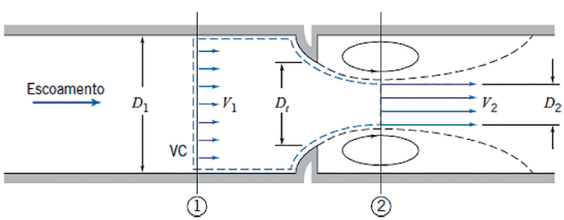
Caro aluno, na seção anterior, estudamos sobre os escoamentos internos e nos referimos com frequência à vazão e/ou à velocidade média do escoamento. Agora, vamos estudar como são medidas essas quantidades em um tubo, utilizando, para isso, os tipos de medidores de vazão disponíveis. Esses medidores são chamados de medidores de restrição, ou de redução de área, e utilizam o princípio da aceleração de uma corrente fluida através dessa redução de área, conforme mostrado, esquematicamente, na Figura 4.7. Respeitando o princípio de Bernoulli, a variação na velocidade leva a uma variação de pressão, que pode ser medida e convertida em velocidade média e, consequentemente, em vazão.

Esses medidores apresentam incertezas em suas medições, podendo operar em faixas de medidas adequadas. Sua seleção, portanto, é feita levando-se em conta essas características, além do custo, da facilidade de leitura e do tempo de vida.

**Reflita**

Todos os medidores de restrição causam uma perda de carga no escoamento. Por que um dispositivo de medição com grande perda de carga gera um elevado custo de operação?

**Figura 4.7** | Desenho esquemático do escoamento interno através de um bocal genérico




Fonte: Fox et al. (2014, p. 386).

Quando o fluido atravessa a restrição, ocorre a separação do escoamento que gera uma recirculação. A corrente principal continua a acelerar após atravessar a restrição, formando o que chamamos de *vena contracta*, na seção 2. A leitura da pressão é feita na região da *vena contracta*, pois, nela, a área do escoamento é mínima, as linhas de corrente são essencialmente retas, a pressão é uniforme e a velocidade é máxima. A vazão teórica é obtida pela aplicação das equações da continuidade e de Bernoulli, relacionando-se o diferencial de pressão entre as seções 1 e 2. A vazão teórica deve, em seguida, ser corrigida, aplicando-se um fator de correção empírico para encontrar a vazão real.

Ao observar o volume de controle mostrado na Figura 4.7 e aplicando a equação de Bernoulli, obtemos:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right].$$

Partindo da equação da continuidade, temos:

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \;\rightarrow\; \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Portanto,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right].$$

Resolvendo para a velocidade teórica $V_2$:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\left(p_1 - p_2\right)}{\rho\left[1 - \left(A_1/A_2\right)^2\right]}}.$$

Lembrando que a vazão em massa é dada por $\dot{m}_{teórico} = \rho V_2 A_2$, então:

$$\dot{m}_{teórico} = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(A_1/A_2\right)^2}}\sqrt{2\rho\left(p_1 - p_2\right)}.$$

Dessa forma, fica evidente que a vazão teórica é diretamente proporcional à raiz quadrada da queda de pressão entre as seções 1 e 2, detectadas pelas tomadas de pressão do medidor. A vazão real

é, então, ajustada pela definição de um *coeficiente de descarga* $C$, que é obtido empiricamente e depende do número de Reynolds e da razão de diâmetros $D_1/D_2$, de tal forma que:

$$\dot{m}_{real} = C\dot{m}_{teórico} = \frac{CA_2}{\sqrt{1-(A_1/A_2)^2}}\sqrt{2\rho(p_1-p_2)}.$$

Fazendo $\beta = D_1/D_2$, então $(A_1/A_2)^2 = \beta^4$. Logo:

$$\dot{m}_{real} = \frac{CA_2}{\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2\rho(p_1-p_2)}.$$

O termo $\sqrt{1-\beta^4}$ é chamado de *fator de velocidade de aproximação*. O coeficiente de descarga e o fator de velocidade de aproximação podem ser combinados em um único *coeficiente de vazão* $K$, definido como:

$$K = \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}}.$$

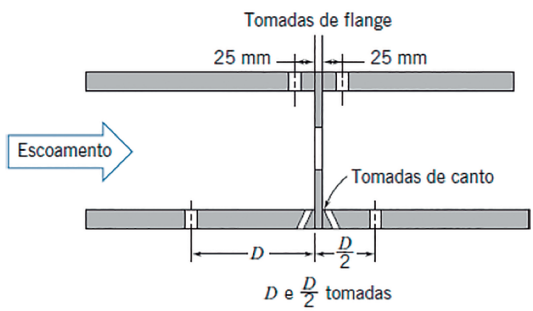
Finalmente,

$$\dot{m}_{real} = KA_2\sqrt{2\rho(p_1-p_2)}.$$

### A placa de orifício

A placa de orifício, mostrada na Figura 4.8, possui geometria simples, baixo custo e fácil instalação ou reposição. No entanto, sua utilização é limitada devido à elevada perda de carga decorrente da expansão não controlada a jusante do orifício.

**Figura 4.8** | Desenho esquemático de um medidor tipo placa de orifício




Fonte: Fox et al. (2014, p. 390).

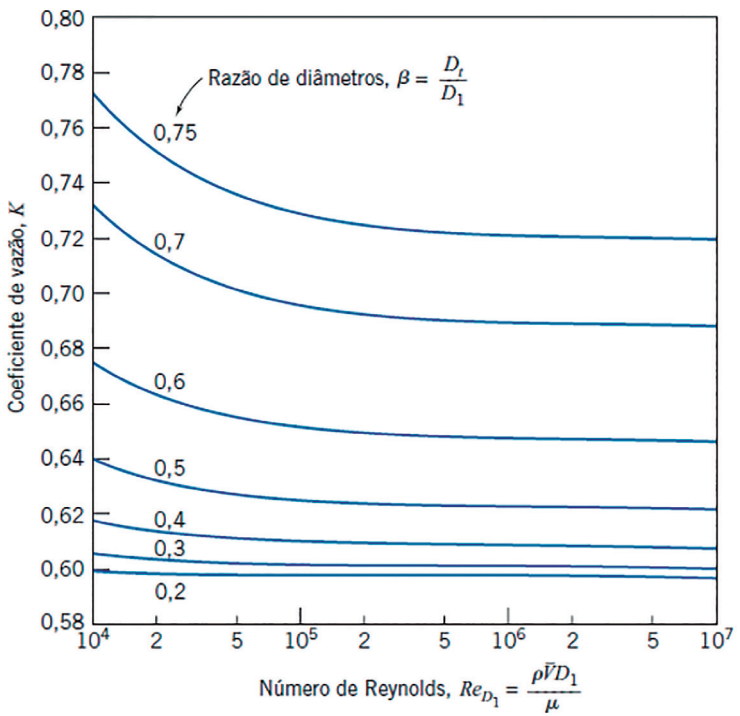
Observando a Figura 4.8, notamos que as tomadas de pressão podem ser colocadas em diversos locais. Dessa forma, os valores de $C$ ou $K$ são consistentes com a localização das tomadas e devem ser selecionados com o auxílio de manuais ou de normas. Uma equação de correlação para um orifício concêntrico é dada por Miller (1996) como:

$$C = 0{,}5959 + 0{,}0312\beta^{2{,}1} - 0{,}184\beta^{8} + \frac{91{,}71\beta^{2{,}5}}{Re_{D_1}^{0{,}75}}.$$

Essa equação prediz o cálculo do coeficiente de descarga com precisão de $\pm 0{,}6\%$ para $0{,}2 < \beta < 0{,}75$ e $10^4 < Re_{D1} < 10^7$.

Alguns coeficientes de vazão, para tomadas de canto (ilustradas na Figura 4.8), são apresentados na Figura 4.9.

**Figura 4.9** | Valores de coeficiente de vazão em função do número de Reynolds para orifícios concêntricos com tomadas de canto




Fonte: Fox et al. (2014, p. 391).

**Exemplificando**

Qual seria o coeficiente de vazão de uma placa de orifício com tomadas de canto para as razões de diâmetros $\beta = 0{,}75$ e $\beta = 0{,}2$?

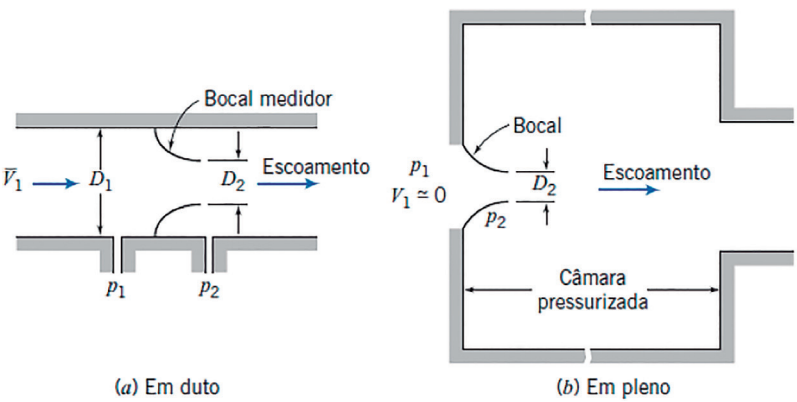
O coeficiente de vazão para tomadas de canto é uma função do número de Reynolds. Para elevados números de Reynolds e pequenas razões de diâmetro, esse valor é praticamente constante.

No exemplo em questão, quando $Re > 10^6$ e $\beta = 0{,}75$, temos $K \approx 0{,}73$. Ao mesmo tempo que para $\beta = 0{,}2$, $K \approx 0{,}6$ para toda faixa de $Re$.

## O bocal medidor

O bocal medidor, mostrado na Figura 4.10, pode ser instalado nas montagens em duto ou em câmaras pressurizadas, sendo essas últimas também chamadas de montagens em pleno.

**Figura 4.10** | Desenho esquemático de instalações típicas de bocais medidores




(*a*) Em duto (*b*) Em pleno

Fonte: Fox et al. (2014, p. 392).

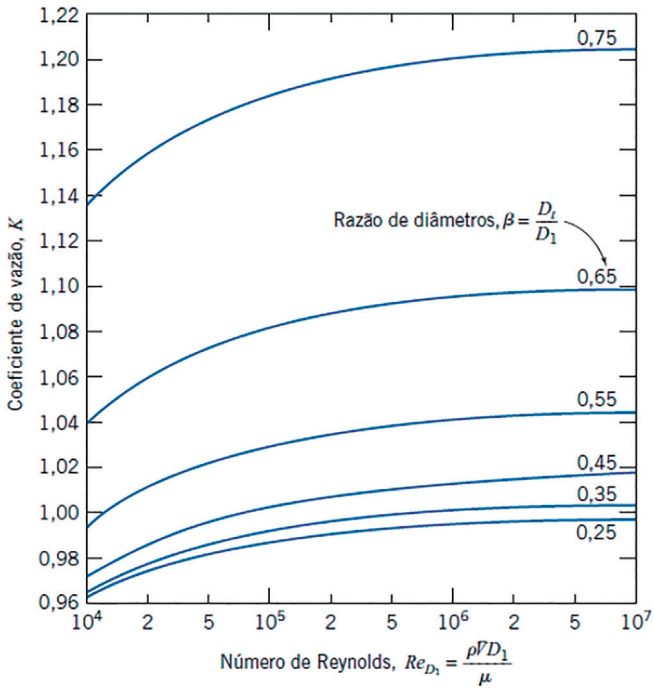
Uma equação de correlação para um bocal ASME é dada por Miller (1996) como:

$$C = 0{,}9975 - \frac{6{,}53\beta^{0{,}5}}{Re_{D_1}^{0{,}5}}.$$

Essa equação prediz o cálculo do coeficiente de descarga com precisão de $\pm 2\%$ para $0{,}25 < \beta < 0{,}75$ e $10^4 < Re_{D1} < 10^7$.

Alguns coeficientes de vazão para bocais ASME de raio longo e instalação em tubo são apresentados na Figura 4.11.

**Figura 4.11** | Valores de coeficiente de vazão em função do número de Reynolds para bocais ASME de raio longo

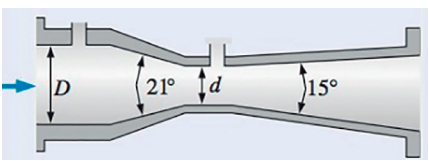



Fonte: Fox et al. (2014, p. 393).

## O tubo de Venturi

O tubo de Venturi, mostrado na Figura 4.12, é fabricado por usinagem, com tolerâncias mais apertadas, de modo a reproduzir o desempenho projeto-padrão. Esse tipo de medidor é pesado, volumoso, caro, no entanto fornece uma ótima recuperação de pressão, fazendo a perda de carga ser baixa.

**Figura 4.12** | Desenho esquemático de um tubo de Venturi




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 393).

De acordo com Miller (1996), o coeficiente de descarga para o tubo de Venturi varia de 0,980 a 0,995 para valores de número de Reynolds elevados ($Re_{D1} > 2 \times 10^5$). Por isso, $C = 0{,}99$ pode ser usado para a medição da vazão em massa, com cerca de $\pm 1\%$ de erro.

### Outros tipos de medidores de vazão

Os medidores de restrição possuem como desvantagem o fato de que a saída medida, ou seja, a queda de pressão não é linearmente proporcional à vazão. Outros tipos de medidores podem produzir medições diretamente proporcionais à vazão, sem a necessidade de medir a pressão diferencial.

Temos os seguintes tipos de medidores de vazão:

- **Medidor de área variável, ou de flutuador**: também chamado de rotâmetro, indica diretamente a vazão de fluidos. Em operação, a esfera ou outro flutuador é carregado para cima dentro do tubo cônico transparente pela ação do fluido em escoamento, até que a força de arrasto e o peso do flutuador se equilibrem.

- **Medidor de turbina**: um rotor com palhetas, livre para girar, é montado em uma seção cilíndrica de um tubo, e a taxa de rotação do rotor pode ser considerada, aproximadamente, proporcional à vazão em volume em uma ampla faixa.

- **Medidor eletromagnético**: nesse tipo de medidor, um campo magnético é criado transversalmente ao tubo. Quando um fluido condutor passa através do campo, uma tensão elétrica é gerada em ângulos retos em relação aos vetores de velocidade e de campo. Eletrodos colocados diametralmente opostos entre si são usados para detectar o sinal de tensão resultante. Este é proporcional à velocidade média axial quando o perfil é axissimétrico.

Em situações da prática profissional, como no manuseio de ar ou de equipamentos de refrigeração, pode ser impraticável ou mesmo impossível instalar medidores de vazão fixos. Em tais casos, é possível obter dados de vazão utilizando técnicas denominadas transversas. Para fazer uma medição de vazão pelo método

transverso, a seção transversal do duto é teoricamente subdividida em segmentos de áreas iguais. A velocidade é medida no centro de área de cada segmento por meio de um tubo de Pitot, um tubo de carga (pressão) total ou um anemômetro adequado.

**Assimile**

Os anemômetros térmicos usam elementos diminutos (elementos de fio quente ou de filme quente) aquecidos eletricamente. Circuitos eletrônicos sofisticados de retroalimentação são usados para manter a temperatura do elemento constante e para medir a taxa de aquecimento necessária para manter a temperatura requerida. A taxa de aquecimento é relacionada com a velocidade local do escoamento por calibração.

A vazão em volume para cada segmento é aproximada pelo produto da velocidade medida e da área do segmento. A vazão total no duto é a soma dessas vazões segmentais.

**Pesquise mais**

Para mais informações sobre os diversos tipos de medidores de vazão, pesquise a Parte C, páginas 472 a 486, do livro indicado a seguir:

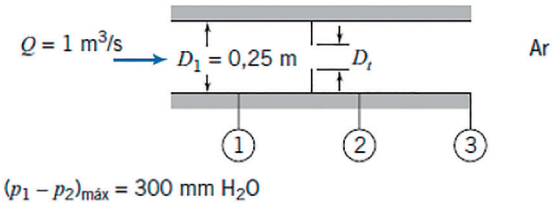
FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; McDONALD, Alan T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

## Sem medo de errar

Uma empresa de Engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista, que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo projeto que envolva a aplicação de fluidos. Em seu segundo trabalho, você se deparou com o seguinte desafio: uma empresa fabricante de medidores de vazão está desenvolvendo um medidor de restrição do tipo placa de orifício. Esse novo medidor, ilustrado na Figura 4.13, deverá ser utilizado para medir a vazão de ar de $1m^3/s$ em um tubo de 0,25 *m* de diâmetro e o manômetro disponível para a medição de pressão tem alcance máximo de 300 *mm* de água. Seu objetivo, como responsável por esse projeto, é determinar qual o diâmetro do

orifício, $D_t$, que deve ser empregado com tomadas de canto, a fim de que esse dispositivo funcione de maneira adequada.

**Figura 4.13** | Desenho esquemático do medidor tipo placa de orifício




Fonte: Fox et al. (2014, p. 394).

A vazão em massa real para um medidor de restrição pode ser obtida pela equação:

$$\dot{m}_{real} = KA_2\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}.$$

Como $A_t/A_1 = (D_t/D_1)^2 = \beta^2$, então:

$$\dot{m}_{real} = K\beta^2 A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}$$

ou

$$K\beta^2 = \frac{\dot{m}_{real}}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{\rho Q}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2(p_1 - p_2)}}.$$

Como o manômetro disponível para a medição da diferença de pressão tem alcance máximo de 300 *mm* de água, temos:

$$p_1 - p_2 = \rho_{água} g\Delta h$$

Portanto,

$$K\beta^2 = \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2\rho_{água} g\Delta h}}$$

$$K\beta^2 = 1\frac{m^3}{s} \times \frac{4}{\pi}\frac{1}{(0{,}25m)^2}\left[\frac{1}{2} \times 1{,}23\frac{kg}{m^3} \times \frac{s^2}{9{,}81m} \times \frac{m^3}{999\,kg} \times \frac{1}{0{,}30\,m}\right]^{1/2}$$

$$K\beta^2 = 0{,}295 \text{ ou } K = \frac{0{,}295}{\beta^2}.$$

Como $K$ é uma função de $\beta$ e de $Re_{D1}$ (Figura 4.9), devemos promover iterações para determinar $\beta$. O número de Reynolds no duto é:

$$Re_{D_1} = \frac{\rho \bar{V}_1 D_1}{\mu} = \frac{4Q}{\pi \nu D_1}$$

$$Re_{D_1} = \frac{4}{\pi} \times 1 \frac{m^3}{s} \times \frac{s}{1{,}46 \times 10^{-5} m^2} \times \frac{1}{0{,}25\, m} = 3{,}49 \times 10^5$$

Por se tratar de um cálculo iterativo, precisamos de um valor inicial. Portanto, utilizaremos $\beta = 0{,}75$ como "chute" inicial. Da Figura 4.9, $K$ deve ser 0,72. Calculando $K$, obtemos:

$$K = \frac{0{,}295}{\beta^2} = \frac{0{,}295}{0{,}75^2} = 0{,}524.$$

Assim, nossa primeira estimativa para $\beta$ é grande demais. Façamos agora $\beta = 0{,}70$. Da Figura 4.9, $K$ deve ser 0,69. Calculando novamente $K$, obtemos:

$$K = \frac{0{,}295}{\beta^2} = \frac{0{,}295}{0{,}70^2} = 0{,}602.$$

A nossa nova estimativa para $\beta$ continua grande demais. Façamos agora $\beta = 0{,}65$. Da Figura 4.9, $K$ deve ser 0,67. Calculando mais uma vez o valor de $K$, obtemos:

$$K = \frac{0{,}295}{\beta^2} = \frac{0{,}295}{0{,}65^2} = 0{,}698.$$

Continuando com as iterações, existe uma concordância satisfatória com $\beta = 0{,}66$.

Dessa forma,

$$\frac{D_t}{D_1} = \beta \quad \rightarrow \quad D_t = \beta D_1 = 0{,}66(0{,}25m) = 0{,}165\, m.$$

Portanto, o diâmetro do orifício, $D_t$, que deve ser empregado com tomadas de canto, para que esse dispositivo funcione de maneira adequada, é igual a 0,165 *m*.

Depois disso, um relatório completo será encaminhado ao cliente, cumprindo, assim, com sucesso, seu objetivo neste projeto.

## Avançando na prática

### Cálculo da vazão em um tubo de Venturi

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa fabricante de tintas adquiriu um novo tubo de Venturi, que foi instalado na tubulação que transporta água para um misturador, com o objetivo de medir a vazão. Você é responsável por manter o processo de mistura funcionando corretamente, sendo, para isso, necessário conhecer a vazão correta de água a $25°C$. Sabe-se que o tubo de Venturi possui 76 *mm* de diâmetro na garganta e foi instalado em uma tubulação de 152 *mm* de diâmetro. Durante o funcionamento em regime permanente do equipamento, a queda de pressão lida entre a tomada de montante e a garganta do tubo de Venturi é 305 *mm* de mercúrio. Com base nesses dados disponíveis, você deve calcular qual a vazão de água para o interior do misturador.

#### Resolução da situação-problema

A vazão em massa real para um medidor de restrição pode ser obtida pela equação:

$$\dot{m}_{real} = \frac{CA_2}{\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} = \frac{CA_2}{\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2\rho\Delta p}.$$

O coeficiente de descarga $C$ para o tubo de Venturi varia de 0,980 a 0,995 para valores de número de Reynolds elevados ($Re_{D1} > 2\times10^5$), por isso $C = 0{,}99$ pode ser usado para medir a vazão em massa com cerca de $\pm 1\%$ de erro.

O valor de $\beta$ é calculado como:

$$\beta = \frac{D_t}{D_1} = \frac{76mm}{152mm} = 0{,}5.$$

Além disso,

$$\Delta p = \rho_{Hg} g \Delta h = 13{,}6\rho_{H2O} g \Delta h.$$

Então,

$$Q = \frac{\dot{m}_{real}}{\rho_{H2O}} = \frac{CA_2}{\rho_{H2O}\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2\rho_{H2O}\left(13{,}6\rho_{H2O}g\Delta h\right)} =$$

$$= \frac{\pi C D_2^2}{4\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2\left(13{,}6g\Delta h\right)}$$

$$Q = \frac{\pi 0{,}99}{4\sqrt{1-0{,}5^4}} \times (0{,}076m)^2 \sqrt{2\left(13{,}6 \times 9{,}81\frac{m}{s^2} \times 0{,}305m\right)} = 0{,}0418\frac{m^3}{s}.$$

Consequentemente:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4}{\pi} \times 0{,}0418\frac{m^3}{s} \times \frac{1}{(0{,}152m)^2} = 2{,}3\frac{m}{s}.$$

Precisamos, então, verificar se a hipótese adotada de que $Re_{D1} > 2 \times 10^5$ é válida.

Na Tabela A.7 do apêndice A de Fox et al. (2014, p. 793), para $25°C$, $\nu = 8{,}96 \times 10^{-7}\, m^2/s$. Então,

$$Re_{D_1} = \frac{\bar{V}D_1}{\nu} = 2{,}3\frac{m}{s} \times 0{,}152m \times \frac{s}{8{,}96 \times 10^{-7} m^2} = 1{,}62 \times 10^2.$$

Logo, a hipótese inicial é válida e a vazão de água para o interior do misturador é igual a $0{,}0418\frac{m^3}{s}$.

## Faça valer a pena

**1.** Os medidores de restrição, ou redução de área, utilizam o princípio da aceleração de uma corrente fluida através dessa redução de área. A variação na velocidade leva a uma variação de pressão, que pode ser medida e convertida em velocidade média e, consequentemente, em vazão.

Sobre os medidores de vazão de restrição, analise as afirmativas a seguir:

I. Quando o fluido atravessa a restrição, ocorre a separação do escoamento que gera uma recirculação. A corrente principal continua a acelerar após a restrição, formando a *vena contracta*.

II. A leitura da pressão é feita na região da *vena contracta*, pois a área é mínima, as linhas de corrente são essencialmente retas e a pressão é uniforme.

III. A placa de orifício é o medidor mais utilizado por possuir geometria simples, baixo custo, fácil instalação e elevada perda de carga, o que facilita a leitura do diferencial de pressão.

IV. Para o bocal medidor instalado em tubo, *K* é, essencialmente, independente do número de Reynolds, para $Re_{D1} > 10^6$.

V. O tubo de Venturi é pesado, volumoso e mais caro do que os demais medidores de restrição; no entanto, fornece uma ótima recuperação de pressão, de modo que a perda de carga é baixa.

Com base na análise das afirmativas, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta:

a) Apenas as afirmativas I, II e III estão corretas.
b) Apenas as afirmativas II, III e IV estão corretas.
c) Apenas as afirmativas II, IV e V estão corretas.
d) Apenas as afirmativas I, II, IV e V estão corretas.
e) Apenas as afirmativas I, II, III e IV estão corretas.

**2.** Um orifício de borda-viva, com tomadas de canto, e um manômetro de coluna de água são usados para medir a vazão de água. Os seguintes dados estão disponíveis:

Diâmetro interno da tubulação: 150 *mm*

Diâmetro da placa de orifício: 100 *mm*

Temperatura da água: 25°C

Deflexão no manômetro: 750 *mm*$H_2O$

A vazão em volume de água, expressa em metros cúbicos por segundo, é:

a) 0,0104 $\frac{m^3}{s}$.
c) 0,0334 $\frac{m^3}{s}$.
e) 0,0551 $\frac{m^3}{s}$.
b) 0,0203 $\frac{m^3}{s}$.
d) 0,0450 $\frac{m^3}{s}$.

**3.** Água a 10°C escoa em regime permanente através de um tubo de Venturi. A pressão a montante da garganta é 200 *kPa* (manométrica). O diâmetro da garganta é 50 *mm* e o diâmetro a montante é 100 *mm*.

A máxima vazão que pode passar por esse dispositivo, sem que ocorra o fenômeno de cavitação, é:

a) $0{,}0123\ \frac{m^3}{s}$.
c) $0{,}0381\ \frac{m^3}{s}$.
e) $0{,}0552\ \frac{m^3}{s}$.
b) $0{,}0224\ \frac{m^3}{s}$.
d) $0{,}0492\ \frac{m^3}{s}$.

# Seção 4.3

## Escoamento externo viscoso e incompressível

### Diálogo aberto

Os escoamentos externos viscosos e incompressíveis são extremamente importantes em diversos projetos de Engenharia. Quando tratamos desse tipo de escoamento, certamente os exemplos mais conhecidos são o projeto de um aerofólio de um carro de fórmula 1 ou o estudo do perfil da asa de uma aeronave. Em ambos os casos, desejamos conhecer as forças de arrasto e de sustentação sob o corpo geradas pelo escoamento. A aerodinâmica de corpos está intimamente relacionada com o escoamento externo, sendo, portanto, uma ciência bastante complexa. No entanto, a aerodinâmica é um conceito aplicado no seu dia a dia e explica, por exemplo, como um avião consegue voar, qual o motivo de uma bola de golfe apresentar cavidades na superfície e por que um objeto em queda livre atinge uma velocidade terminal. Portanto, é muito importante, no projeto de automóveis, aeronaves, embarcações, edifícios, pontes ou qualquer outro corpo que esteja imerso em um fluido, o estudo da aerodinâmica desses corpos quando imersos em um escoamento.

Lembre-se de que, nesta unidade, uma empresa de Engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista, que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo projeto que envolva a aplicação de fluidos. Em seu último trabalho nessa empresa, você se deparou com o seguinte desafio: um navio superpetroleiro está sendo projetado por uma empresa multinacional do ramo. O novo navio terá 360 *m* de comprimento, 70 *m* de largura, um calado (altura da parte do casco que permanece submersa) de 25 *m* e velocidade de cruzeiro de 6,69 *m/s* em água do mar a uma temperatura média de $10°C$. Seu objetivo como responsável por esse projeto é, utilizando-se de criatividade, de raciocínio crítico e de solução de problemas, estimar a força e a potência requeridas para vencer o arrasto devido ao atrito superficial, uma informação crucial para o correto dimensionamento e a

seleção do sistema de propulsão do navio. Quais são as variáveis relevantes para a resolução desse problema? Como modelar esse problema? Quais as considerações necessárias para simplificar o problema? Quais equações devemos utilizar?

Com o resultado em mãos, você deverá elaborar um relatório técnico contendo todo o memorial de cálculo e hipóteses adotadas, entregando-o diretamente ao cliente em questão.

Para isso, você deve, a princípio, conhecer a camada-limite e compreender como esta se desenvolve, além de saber determinar o coeficiente de arrasto adequado, para, então, poder calcular a força de arrasto total exercida no modelo adotado na resolução do problema proposto.

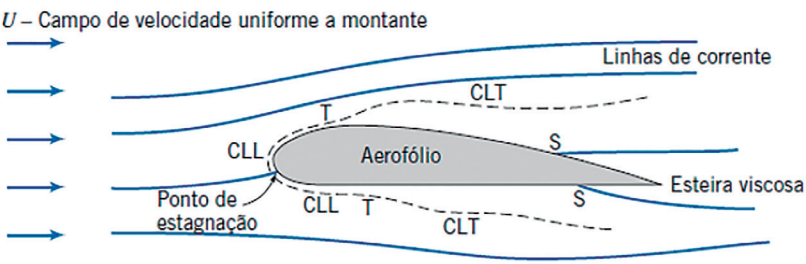
Está preparado para este novo desafio? Bons estudos!

## Não pode faltar

### O conceito de camada-limite hidrodinâmica

Caro aluno, na primeira seção desta unidade, estudamos os escoamentos internos viscosos e incompressíveis. Agora, vamos estudar os escoamentos externos, também viscosos e incompressíveis. O escoamento externo ocorre quando um corpo é imerso em um fluido e há movimento relativo entre eles. Dessa forma, uma série de fenômenos importantes ocorre por meio da interação entre o corpo e o fluido. A Figura 4.14 ilustra um escoamento viscoso com elevado número de Reynolds sobre um aerofólio.

**Figura 4.14** | Desenho esquemático com os detalhes do escoamento viscoso em torno de um aerofólio




Fonte: Fox et al. (2014, p. 421).

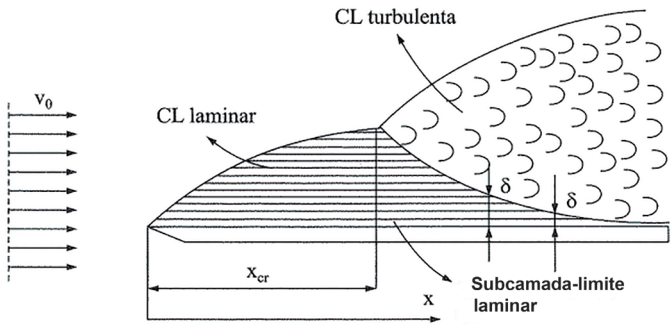
O escoamento da corrente livre com velocidade *U* choca-se com a parte frontal do aerofólio e divide-se no ponto de estagnação (ponto em que a velocidade é nula), circundando o corpo. De acordo com o princípio da aderência, o fluido em contato com a superfície adquire a velocidade do corpo. Dessa maneira, um gradiente de velocidade é gerado, dando origem à camada-limite hidrodinâmica. Conforme o escoamento avança sobre o corpo, a camada-limite aumenta de espessura. As camadas-limite formam-se em ambas as superfícies superior e inferior desse corpo. Inicialmente, o escoamento no interior da camada-limite é laminar, chamado de camada-limite laminar (CLL). A transição do escoamento laminar para o escoamento turbulento, ponto no qual se inicia a camada-limite turbulenta (CLT), ocorre em um ponto de transição T, que depende das condições da corrente livre, da rugosidade da superfície do corpo e do gradiente de pressão dentro da camada-limite. A CLT cresce rapidamente até o momento em que o escoamento se separa da superfície do corpo, no ponto de separação S. Devido à separação do escoamento, o fluido que estava em contato com o corpo se "desgruda", ou seja, perde o contato com a superfície, formando o que chamamos de esteira viscosa.

Na região externa à camada-limite, a velocidade do escoamento é igual a $U$, ou seja, é como se o escoamento não sofresse a influência da presença do aerofólio. Além disso, o efeito da viscosidade fora da camada limite é desprezível, sendo, portanto, o escoamento chamado de invíscido ou não viscoso.

Em uma placa plana, verifica-se que, para $Re_x < 5\times10^5$, sendo $Re_x$ o número de Reynolds calculado para a distância *x* a partir do bordo de ataque da placa, o regime do escoamento no interior da camada limite é laminar. Quando ultrapassamos esse valor, o escoamento passa a ser turbulento, sendo o ponto de transição chamado de ponto crítico, $x_{cr}$, conforme ilustra a Figura 4.15. Portanto, para o escoamento de um determinado fluido, com uma dada velocidade $U$, o ponto $x_{cr}$ em que ocorre a transição do regime laminar para o turbulento é calculado pela equação:

$$Re_{x,cr} = 5\times10^5 = \frac{\rho U x_{cr}}{\mu}.$$

**Figura 4.15** | Ponto crítico de transição da camada-limite em uma placa plana

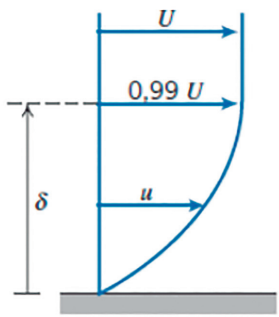



Fonte: Brunetti (2008, p. 166).

## Espessura da camada-limite hidrodinâmica

A camada-limite é usualmente definida como a distância da superfície, $\delta$, na qual a velocidade $u$ situa-se dentro de 99% da velocidade de corrente livre, ou seja, a velocidade $u$ que limita a espessura da camada limite é tal que $u \approx 0{,}99U$, conforme mostrado na Figura 4.16.

**Figura 4.16** | Desenho esquemático da espessura da camada-limite para uma placa plana




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 424).

A espessura da camada-limite laminar, para uma placa plana, cresce de acordo com $\sqrt{x}$ e possui forma parabólica. Pode ser facilmente calculada pela expressão adimensional:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U x}} = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}},$$

em que $x$ é a distância da borda frontal da placa até o ponto em questão que se deseja conhecer a espessura da camada-limite e $Re_x$ é o número de Reynolds calculado nesse ponto.

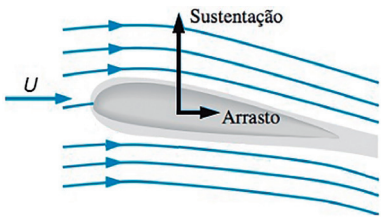
Para o escoamento turbulento sobre uma placa plana, a camada-limite cresce na razão de $x^{4/5}$, portanto esse crescimento é quase linear. A espessura da camada-limite turbulenta pode ser calculada pela expressão adimensional:

$$\frac{\delta}{x} = 0{,}382\left(\frac{\mu}{\rho U x}\right)^{1/5} = \frac{0{,}382}{Re_x^{1/5}}.$$

### Força resultante sobre corpos submersos

Ao passar por um corpo, o fluido provocará nele o aparecimento de uma força resultante, que pode ser decomposta em duas componentes, conforme ilustra a Figura 4.17: uma componente de resistência ao avanço, chamada de força de arrasto, paralela às linhas de corrente do escoamento, e uma componente normal ou perpendicular às linhas de corrente do escoamento, chamada de força de sustentação.

**Figura 4.17** | Forças de arrasto e sustentação




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 613).

### Força de arrasto

O arrasto é a componente da força sobre um corpo que atua paralelamente à direção do movimento relativo entre o corpo e o fluido e pode ser interpretado como uma força de resistência ao avanço do corpo. A força de arrasto pode ser decomposta em dois tipos, o arrasto de atrito e o arrasto de pressão, sendo o arrasto total a soma de ambos.

### Arrasto de atrito puro

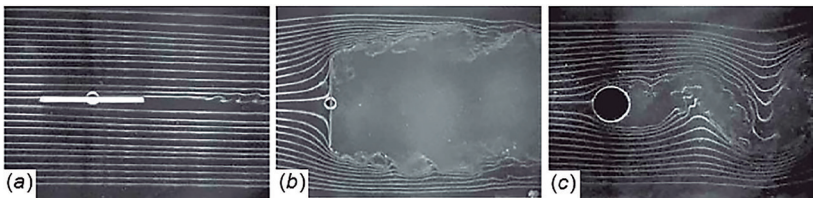
Esse tipo de arrasto ocorre em escoamentos sobre uma placa plana paralela ao escoamento, conforme mostra a Figura 4.18(a).

Nessa situação, o gradiente de pressão é igual a zero e o arrasto total é igual ao arrasto gerado pelo atrito devido à viscosidade do fluido. Logo, a força de arrasto $F_D$ é:

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 A,$$

em que $C_D$ é o coeficiente de arrasto (o termo "arrasto" vem do inglês *drag*), que é uma função apenas do número de Reynolds; $\rho$ é a massa específica do fluido; $V$ é a velocidade de corrente livre; $A$ é a área total da superfície em contato com o fluido (chamada de área molhada).

**Figura 4.18** | Escoamento sobre (a) uma placa plana paralela ao escoamento; (b) uma placa plana normal ao escoamento; (c) um cilindro




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 614).

Para uma placa plana paralela ao escoamento de comprimento *L* e largura *b*, o coeficiente de arrasto para escoamento laminar sobre toda placa, com velocidade de corrente livre *V*, é:

$$C_D = \frac{1{,}33}{\sqrt{Re_L}},$$

na qual $Re_L$ é o número de Reynolds calculado para o comprimento característico *L*.

Para um escoamento turbulento sobre toda a placa, o coeficiente de arrasto pode ser obtido pelas equações:

$$C_D = \frac{0{,}0742}{Re_L^{1/5}}, \text{ válida para } 5 \times 10^5 < Re_L < 10^7,$$

ou

$$C_D = \frac{0{,}455}{\left(\log Re_L\right)^{2{,}58}}, \text{ válida para } 5 \times 10^5 < Re_L < 10^9.$$

Se a camada-limite for inicialmente laminar e passar por uma transição em algum ponto da placa, o coeficiente de arrasto deverá ser calculado de forma a considerar ambos os regimes de escoamento. Assim:

$$C_D = \frac{0{,}0742}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L}, \text{ válida para } 5\times10^5 < Re_L < 10^7,$$

ou, ainda:

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} - \frac{1610}{Re_L}, \text{ válida para } 5\times10^5 < Re_L < 10^9.$$

No entanto, para valores de $Re_L > 10^7$, a contribuição do arrasto laminar é desprezível.

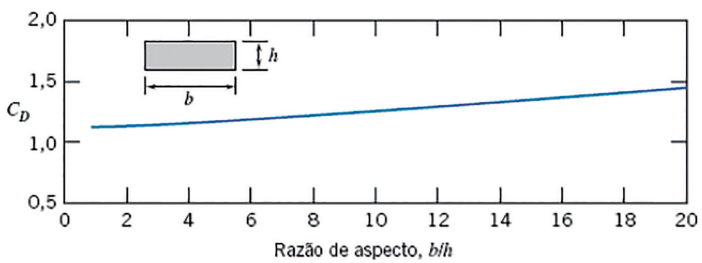
### Arrasto de pressão puro

Esse tipo de arrasto ocorre em escoamentos sobre uma placa plana normal ao escoamento, conforme mostra a Figura 4.18(b), e não pode ser determinado analiticamente.

Nessa situação, a tensão de cisalhamento não contribui para a força de arrasto, portanto o coeficiente de arrasto baseia-se em uma área frontal, ou área projetada, do objeto.

Para uma placa plana finita normal ao escoamento, para os casos de número de Reynolds (baseado na altura) maior do que 1.000, o coeficiente de arrasto depende da razão entre a sua largura, *b*, e a sua altura, *h*, conforme mostrado na Figura 4.19.

**Figura 4.19** | Variação do coeficiente de arrasto em função da razão $b/h$ para $Re_h > 1000$



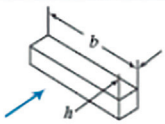
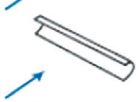

Fonte: Fox et al. (2014, p. 450).

**Assimile**

No arrasto de atrito puro, o coeficiente de arrasto é fortemente influenciado pelo número de Reynolds, enquanto no arrasto de pressão puro, o coeficiente de arrasto é essencialmente independente do número de Reynolds para valores maiores do que 1.000.

A Figura 4.20 apresenta os coeficientes de arrasto para outras geometrias selecionadas, para valores de $Re \geq 10^3$.

**Figura 4.20** | Coeficiente de arrasto para objetos selecionados, para valores de $Re \geq 10^3$

| Objeto | Diagrama | | $C_D(Re \gtrsim 10^3)$ |
|---|---|---|---|
| Prisma retangular |  | $b/h = \infty$<br>$b/h = 1$ | 2,05<br>1,05 |
| Disco | | | 1,17 |
| Anel | | | 1,20 |
| Hemisfério (extremidade aberta voltada para o escoamento) | | | 1,42 |
| Hemisfério (extremidade aberta voltada para jusante) | | | 0,38 |
| Seção em C (lado aberto voltado para o escoamento) |  | | 2,30 |
| Seção em C (lado aberto voltado para jusante) | | | 1,20 |

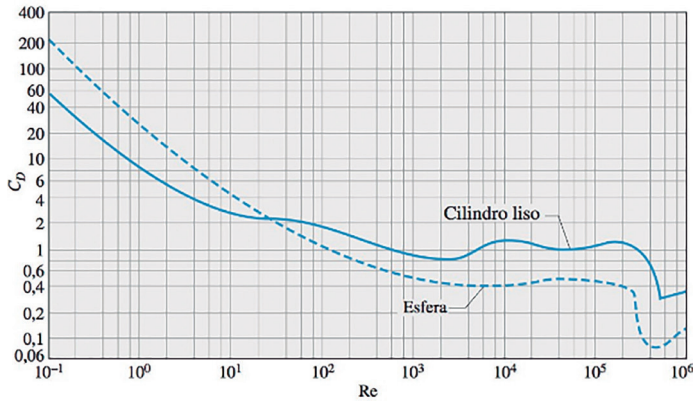
Fonte: Fox et al. (2014, p. 450).

## Arrasto total: arrasto de pressão e de atrito

Esse tipo de arrasto ocorre em escoamentos sobre uma esfera ou um cilindro, conforme mostra a Figura 4.18(c). Nesse caso, ambos os arrastos, de atrito e de pressão, contribuem para o arrasto total, que é determinado experimentalmente como uma função do número de Reynolds. A Figura 4.21 mostra o comportamento

do coeficiente de arrasto para escoamento transversal sobre um cilindro liso e uma esfera lisa em função do número de Reynolds.

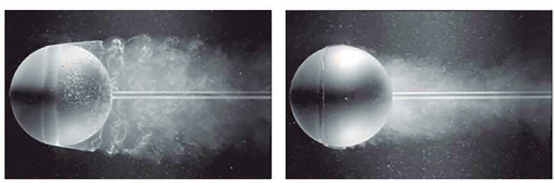
**Figura 4.21** | Coeficiente de arrasto para um cilindro e uma esfera lisa




Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 631).

A variação do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds apresenta as mesmas características observadas em ambos os escoamentos. Para ambos os casos, o coeficiente de arrasto diminui com o aumento do número de Reynolds. Para a faixa de $10^3 < Re < 3 \times 10^5$, o coeficiente de arrasto é, aproximadamente, constante. A partir de $Re > 3 \times 10^5$, o coeficiente de arrasto diminui abruptamente, devido ao fato de a transição da camada-limite ocorrer na porção frontal do corpo, tornando-se turbulenta, e o ponto de separação da camada-limite se deslocar para a jusante, diminuindo o tamanho da esteira. A Figura 4.22 exemplifica esse fenômeno e mostra o escoamento sobre a mesma esfera lisa para dois números de Reynolds distintos, valendo ressaltar que a esteira diminui drasticamente com o aumento da turbulência.

**Figura 4.22** | Escoamento sobre uma esfera lisa, com (a) $Re = 15.000$ e (b) $Re = 30.000$




Fonte: adaptada de Çengel e Cimbala (2015, p. 631).

**Assimile**

A ocorrência da camada-limite turbulenta é desejável no escoamento sobre um corpo rombudo (definido como aquele que tem forma esférica), porque a turbulência retarda a separação do escoamento, que, por sua vez, reduz o tamanho da esteira, diminuindo o arrasto de pressão e, consequentemente, a força de arrasto sobre o corpo.

Sobre esse assunto, veja o trecho a seguir:

> [...]
> **Em inúmeras situações de escoamentos reais, ocorrem interações com objetos ou superfícies vizinhas. O arrasto pode ser reduzido significativamente quando dois ou mais objetos, movendo-se um atrás do outro, interagem. Este fenômeno é bem conhecido dos adeptos do ciclismo e das corridas de automóvel, em que "seguir no vácuo" é uma prática comum. Reduções de arrasto de 80% podem ser alcançadas por meio de espaçamento ótimo [...]. O arrasto também pode ser aumentado significativamente quando o espaçamento não é ótimo [...] (Fox et al., 2014, p. 455).**

**Exemplificando**

Caro aluno, por que existem pequenas cavidades em uma bola de golfe? Essas pequenas cavidades existem para dissipar a camada-limite laminar, garantindo escoamento da camada-limite turbulenta por toda a esfera, de modo a reduzir o coeficiente de arrasto. De fato, uma bola de golfe pode atingir um alcance médio de quase duas vezes o alcance médio de uma esfera lisa.

### Força de sustentação

A sustentação é a componente da força sobre um corpo que atua perpendicularmente à direção do movimento relativo entre o corpo e o fluido. Esse tipo de força é extremamente importante no estudo da dinâmica do escoamento em aerofólios automotivos e em asas de aeronaves. O coeficiente de sustentação, $C_L$ (o termo "sustentação" vem do inglês *lift*), é definido como:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p},$$

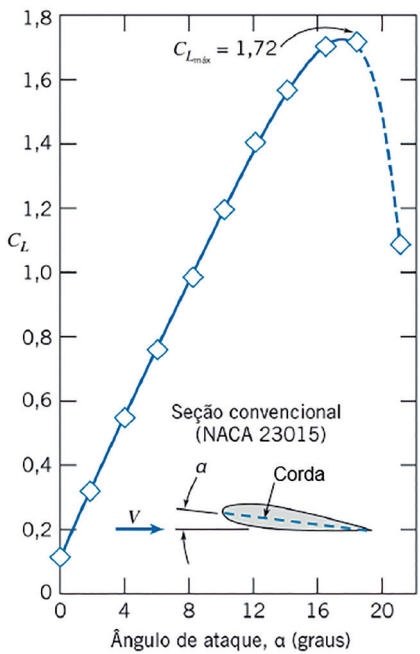
em que $F_L$ é a força de sustentação, $\rho$ é a massa específica do fluido, $V$ é a velocidade de corrente livre e $A_p$ é a área perpendicular ao escoamento (chamada de área planiforme).

Sobre os coeficientes de arrasto e de sustentação, veja o trecho a seguir:

> **Os coeficientes de arrasto e de sustentação para um aerofólio são funções do número de Reynolds e do ângulo de ataque $\alpha$ é o ângulo de ataque, $\alpha$, é o ângulo entre a corda do aerofólio e o vetor velocidade da corrente livre. A corda de um aerofólio é o segmento de reta ligando a extremidade da borda de ataque à extremidade da borda de fuga de um aerofólio (Fox et al., 2014, p. 459).**

A Figura 4.23 mostra o coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque para a seção convencional do aerofólio NACA 23015.

**Figura 4.23** | Variação do coeficiente de sustentação para um perfil NACA 23015




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 461).

**Pesquise mais**

Para aprofundar seus conhecimentos sobre a força de sustentação e o coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque, recomendamos a leitura do Tópico 9.8, na pág. 438, do livro indicado a seguir:

FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; McDONALD, Alan T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

A área perpendicular ao escoamento pode ser alterada em função do ângulo de ataque. Consequentemente, a área planiforme (a área projetada máxima da asa) é usada para definir os coeficientes de arrasto e de sustentação para um aerofólio.

**Reflita**

Como você explica o aumento do coeficiente de sustentação em função do aumento do ângulo de ataque? Existe um coeficiente de sustentação máximo, bem como um ângulo de ataque máximo permitido? O que acontece com a sustentação quando o ângulo de ataque ultrapassa o valor máximo permitido?

O fenômeno da sustentação aerodinâmica é comumente explicado pelo aumento da velocidade sobre a superfície superior (extradorso) do aerofólio, causando nessa região um decréscimo na pressão (o efeito Bernoulli), e pelo decréscimo da velocidade, causando um aumento de pressão ao longo da superfície inferior (intradorso) do aerofólio.

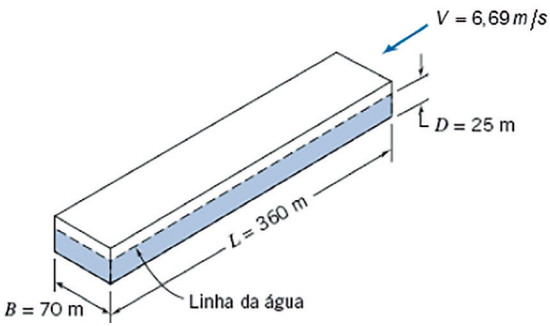
Sobre isso, leia o trecho a seguir:

> [...] À medida que o ângulo de ataque é aumentado, o $\Delta p$ entre as superfícies inferior e superior aumenta, fazendo com que o coeficiente de sustentação aumente suavemente até que um máximo seja alcançado. Aumentos adicionais no ângulo de ataque produzem um decréscimo súbito em $C_L$. Diz-se que o aerofólio estolou quando $C_L$ cai desta maneira [...] (Fox et al., 2014, p. 460).

## Sem medo de errar

Uma empresa de Engenharia e soluções em mecânica dos fluidos contratou você, aluno, como especialista, que atuará como líder responsável pelo desenvolvimento de todo o projeto que envolva a aplicação de fluidos. Um navio superpetroleiro está sendo projetado por uma empresa multinacional do ramo, com as seguintes especificações: 360 *m* de comprimento, 70 *m* de largura, um calado (altura da parte do casco que permanece submersa) de 25 *m* e velocidade de cruzeiro de 6,69 *m/s* em água do mar a uma temperatura média de $10°C$. Seu objetivo como responsável por esse projeto é estimar a força e a potência requeridas para vencer o arrasto devido ao atrito superficial. A Figura 4.24 ilustra a geometria adotada para o estudo do navio em questão.

**Figura 4.24** | Desenho esquemático da geometria do navio




Fonte: adaptada de Fox et al. (2014, p. 448).

Iniciando a resolução do problema, o casco do navio pode ser modelado como uma placa plana, de comprimento $L$ e largura $b = B + 2D$, em contato com a água.

A força de arrasto pode ser obtida pela equação:

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 A$$

e o coeficiente de arrasto $C_D$, determinado pela relação:

$$C_D = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} - \frac{1610}{Re_L},$$

válida para $5 \times 10^5 < Re_L < 10^9$.

A velocidade de cruzeiro do navio é 6,69 *m/s*, logo $V = 6{,}69\,m/s$. A viscosidade cinemática da água do mar é em torno de 5% maior do que a viscosidade da água pura. Dessa forma, do apêndice A, da tabela A.7, de Fox et al. (2014, p. 793), para $10°C$, temos que $\nu = 1{,}37 \times 10^{-6}\, m^2/s$. Então:

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = 6{,}69\frac{m}{s} \times 360m \times \frac{s}{1{,}37 \times 10^{-6}\, m^2} = 1{,}76 \times 10^9 .$$

Considerando válida a equação para o cálculo de $C_D$ no intervalo de $Re_L$:

$$C_D = \frac{0{,}455}{\left(\log 1{,}76 \times 10^9\right)^{2{,}58}} - \frac{1610}{1{,}76 \times 10^9} = 0{,}00147.$$

Portanto, a força de arrasto pode ser determinada por:

$$F_D = C_D \frac{1}{2}\rho V^2 A = 0{,}00147 \times \frac{1}{2} \times 1020\frac{kg}{m^3} \times \left(6{,}69\frac{m}{s}\right)^2 \times$$
$$\times (360m)(70 + 50)m$$
$$F_D = 1{,}45\,MN.$$

A potência correspondente é:

$$\mathrm{P} = F_D U = 1{,}45 \times 10^6 N \times 6{,}69\frac{m}{s}$$
$$\mathrm{P} = 9{,}70\,MW.$$

Concluindo a análise, notamos que a potência requerida é muito grande, porque, embora o coeficiente de arrasto seja pequeno, a tensão de atrito age sobre uma área muito grande.

Com base nessa análise, um relatório completo será encaminhado ao cliente, cumprindo, assim, com sucesso, seu objetivo neste projeto.

## Avançando na prática

### Cálculo do tempo de desaceleração de um veículo utilizando um paraquedas de arrasto

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa que prepara carros para competições de arrancada contratou você para supervisionar a equipe de projetos. O mais

novo carro preparado pela empresa pesa $7120\,N$ e atinge velocidade máxima de $396\,km/h$, que equivale a $110\,m/s$. O sistema de frenagem é composto de um paraquedas de arrasto, de área igual a $2{,}3\,m^2$, que, inicialmente, reduz a velocidade do veículo para $162\,km/h$ ($43\,m/s$), quando os freios mecânicos são, então, ativados. Com base nos dados disponíveis, você deve determinar o tempo necessário para que o paraquedas desacelere o veículo até a velocidade de $162\,km/h$, supondo o ar-padrão ($\rho = 1{,}227\,kg/m^3$ e $\nu = 1{,}46\times10^{-5}\,m^2/s$).

### Resolução da situação-problema

Supondo o carro como um sistema e escrevendo a segunda lei de Newton na direção do movimento, temos:

$$-F_D = ma = m\frac{dV}{dt}.$$

A força de arrasto $F_D$ é:

$$F_D = C_D\frac{1}{2}\rho V^2 A,$$

em que $C_D$ é o coeficiente de arrasto.

Substituindo na segunda lei de Newton, resulta:

$$-C_D\frac{1}{2}\rho V^2 A = m\frac{dV}{dt}.$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$-\frac{1}{2}C_D\rho\frac{A}{m}\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V_f}\frac{1}{V^2}dV$$

$$-\frac{1}{2}C_D\rho\frac{A}{m}t = -\left(\frac{1}{V_f}-\frac{1}{V_0}\right) = -\frac{V_0 - V_f}{V_f V_0}.$$

Finalmente, resolvendo para o tempo:

$$t = \frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0}\frac{2m}{C_D\rho A} = \frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0}\frac{2}{C_D\rho A}\frac{W}{g}.$$

O paraquedas de frenagem pode ser modelado como um hemisfério (com a extremidade aberta voltada para o escoamento). Da Figura 4.20, observamos que $C_D = 1{,}42$ (supondo $Re > 10^3$). Assim, substituindo os valores numéricos:

$$t = \frac{(110-45)m/s}{45m/s \times 110m/s} \times \frac{2 \times 7120N}{1{,}42 \times 1{,}227kg/m^3 \times 2{,}3m^2 \times 9{,}81m/s^2}.$$

Portanto, obtemos $t = 4{,}76$ *s*.

Verificando a hipótese sobre o número de Reynolds, temos:

$$Re = \frac{DV}{\nu} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}\frac{V}{\nu} = \sqrt{\frac{4 \times 2{,}3m^2}{\pi}} \times 45\frac{m}{s} \times \frac{s}{1{,}46 \times 10^{-5}m^2} = 5{,}27 \times 10^6.$$

Concluímos, então, que a hipótese inicial é válida.

## Faça valer a pena

**1.** Sobre as forças de arrasto e de sustentação, considere as afirmativas a seguir:

I. O arrasto de atrito puro ocorre em escoamentos sobre uma placa plana paralela ao escoamento, nos quais o gradiente de pressão é igual a zero e o arrasto total é devido às tensões viscosas.

II. No arrasto de pressão puro, a tensão de cisalhamento não contribui para a força de arrasto e o coeficiente de arrasto baseia-se na área projetada do objeto.

III. O escoamento de camada-limite turbulenta não é desejável sobre um corpo rombudo, uma vez que a turbulência aumenta o arrasto de pressão e, consequentemente, a força de arrasto sobre o corpo.

IV. Ambos os coeficientes de arrasto e de sustentação para um aerofólio são funções do ângulo de ataque e da corda do aerofólio.

V. O fenômeno da sustentação aerodinâmica é comumente explicado pela diminuição da velocidade sobre a superfície superior do aerofólio e pelo acréscimo da velocidade ao longo da superfície inferior do aerofólio.

Analisando as afirmativas apresentadas no texto-base, assinale a alternativa que apresenta a resposta correta:

a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
b) Apenas as afirmativas III e IV estão corretas.
c) Apenas as afirmativas IV e V estão corretas.
d) Apenas as afirmativas I e V estão corretas.
e) Apenas as afirmativas I, II e V estão corretas.

**2.** Um tubo com diâmetro externo de 2,2 *cm*, utilizado para transporte de água tratada, deve atravessar um rio em um ponto em que a largura do rio é igual a 30 *m*, ficando completamente imerso na água. A velocidade média do escoamento da água do rio é 4 *m/s* e a temperatura é $15°C$.

Sabendo que a densidade e a viscosidade dinâmica da água a $15°C$ são $\rho = 999{,}1 kg/m^3$ e $\mu = 1{,}138 \times 10^{-3}\ kg/m \cdot s$, respectivamente, determine a força de arrasto exercida sobre o tubo pelo rio e assinale a alternativa correta:

a) 4.321 *N*.
b) 5.275 *N*.
c) 6.789 *N*.
d) 7.132 *N*.
e) 8.904 *N*.

**3.** Um aeroplano leve, com massa $M = 1000 kg$, tem uma seção convencional NACA 23015 de asa e área planiforme $A_p = 10 m^2$.

Considerando que a massa específica do ar é $\rho = 1{,}23 kg/m^3$, determine o ângulo de ataque da asa para uma velocidade de cruzeiro $V = 63 m/s$ e assinale a alternativa correta:

a) 3 graus.
b) 6 graus.
c) 8 graus.
d) 11 graus.
e) 15 graus.

# Referências


BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos**: fundamentos e aplicações. 3. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P.J.; McDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

MILLER, Richard W. **Flow measurement engineering handbook**. 3. ed. New York: McGraw Hill, 1996.

WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos**. 6. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

ISBN 978-85-522-0740-5