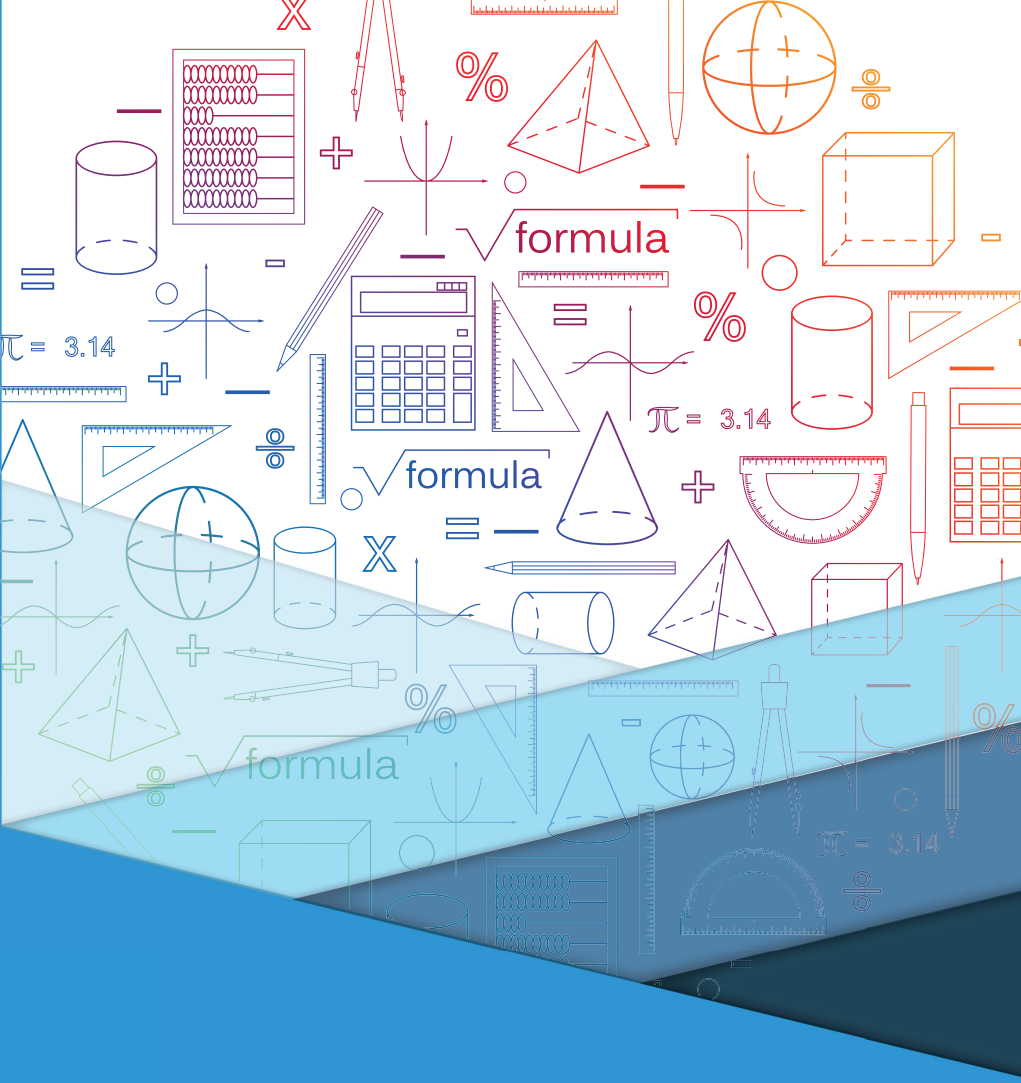


Geometria espacial

Geometria espacial

Leonardo de Alcântara Moreira
Jonas Borsetti Silva Santos
Lilian Aparecida Teixeira
Vanessa Cadan Scheffer

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Gabriela Faria Barcelos Gibim
Patricia Teles Mendonça
Vanessa Cadan Scheffer

Editorial
Camila Cardoso Rotella (Diretora)
Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Moreira, Leonardo de Alcântara
M835g Geometria espacial / Leonardo de Alcântara Moreira et al.
– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
208 p.

ISBN 978-85-522-0677-4

1. Geometria. I. Moreira, Leonardo de Alcântara.
II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Unidade 1 | Elementos básicos da geometria espacial 7

Seção 1.1 - Conceitos primitivos e postulados 9
Seção 1.2 - Paralelismo no espaço 24
Seção 1.3 - Ortogonalidade 38

Unidade 2 | Poliedros, prismas e pirâmides 53

Seção 2.1 - Definições e elementos de poliedros e prismas 55
Seção 2.2 - Prismas especiais e propriedades 71
Seção 2.3 - Pirâmides 86

Unidade 3 | Cilindros, cones e esferas 103

Seção 3.1 - Cilindros 105
Seção 3.2 - Cones 119
Seção 3.3 - Esferas 134

Unidade 4 | Inscrição, circunscrição e superfícies de revolução 151

Seção 4.1 - Áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de esferas, cones e cilindros 153
Seção 4.2 - Áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de poliedros 171
Seção 4.3 - Superfícies e sólidos de revolução 186

Palavras do autor

Caro aluno!

Seja muito bem-vindo à disciplina de Geometria espacial. Sabemos que a Matemática é a ciência mais antiga que existe, sendo o estudo da geometria espacial tão antigo quanto.

A Matemática começou seu desenvolvimento na Babilônia e no Egito, com a geometria prática, com tábuas matemáticas e com a introdução dos sistemas de numeração antigo. Já a geometria espacial originou-se com os povos antigos da Mesopotâmia, avançando ao longo da história com a contribuição de vários matemáticos, dentre os quais, Pitágoras, Platão, Arquimedes e, principalmente, Euclides, os quais fizeram significativas contribuições. Desses grandes matemáticos, Euclides (2009) nos presenteou com seu consagrado trabalho intitulado *Os elementos*. Sua obra é considerada até hoje umas das maiores da Matemática, uma vez que seus postulados, axiomas e definições são utilizados para embasar a construção do que chamamos de geometria euclidiana.

Procuramos com este livro preparar você para que consiga visualizar os elementos geométricos que aparecem em nosso dia a dia, associando-os ao aprendizado adquirido aqui. As habilidades desenvolvidas por meio do estudo da geometria espacial irão proporcionar-lhe uma ampliação da noção espacial, permitindo que você perceba e represente a realidade por meio de figuras geométricas.

Ao apreender esses conhecimentos, você aperfeiçoará seu senso de localização e poderá contribuir em diferentes projetos, por exemplo, de construção de edifícios e pontes. Para a execução destes projetos, além do desenho técnico, é preciso calcular os volumes de areia, cimento, água, entre outros elementos.

A geometria também está presente na criação de carros, estradas, aviões, moldes de costura, navegação marítima e aérea. Enfim, a abrangência da Matemática e da geometria espacial pode desafiar nossa criatividade.

Para sua evolução nessa área do conhecimento, na primeira unidade, trataremos de assuntos elementares, inerentes à geometria espacial, como os axiomas e as definições. Estudaremos também as posições relativas entre retas e planos, paralelismo e ortogonalidade. Na segunda unidade, começaremos a tratar dos objetos geométricos: poliedros, prismas e pirâmides, que são construídos segundo os elementos básicos aprendidos na Unidade 1. Já na terceira unidade, estudaremos os cilindros, os cones e as esferas. Por fim, na última unidade, trataremos da inscrição, circunscrição e das superfícies de revolução em torno de um eixo.

Para que todos esses assuntos sejam compreendidos, são imprescindíveis a leitura e interpretação dos elementos, assim como dedicação e empenho na resolução das propostas apresentadas. Pronto para começar?

Bons estudos!

Elementos básicos da Geometria espacial

Convite ao estudo

Prezado aluno, bem-vindo à primeira unidade de estudo da geometria espacial. Nesta unidade, exploraremos os elementos básicos que compõem a geometria espacial. Em Geometria, temos três "entes" matemáticos para os quais não temos definição: ponto, reta e plano. Toda a base da geometria, tanto plana quanto espacial, está fundamentada nesses três "entes". Vale destacar aqui o importante papel do matemático grego Euclides para a geometria (não à toa é conhecido como o pai da geometria). Euclides (2009), na obra *Os elementos*, descreve e compila, de modo organizado e formal, todas as noções matemáticas já conhecidas em sua época (300 a.C.), como também faz algumas demonstrações usando tal alicerce.

Vamos começar nosso trabalho? Então, vamos tomar como base que você é um professor que acabou de se formar, e encontra como desafio desenvolver a noção da geometria espacial com seus alunos. E aí? Como podemos fazer isso? E, principalmente, como podemos explicar esses tópicos, de modo a tornar a geometria espacial, e a Matemática em si, mais atrativa aos alunos?

Esses são alguns questionamentos que devemos fazer não só enquanto estudamos, durante a nossa formação universitária, mas, também, no nosso cotidiano de professor. Devemos mexer com a imaginação dos alunos, fazendo com que eles enxerguem a geometria espacial como uma ferramenta que os ajudará no seu desenvolvimento social e profissional.

Com esse propósito, algumas questões serão levantadas ao longo desta unidade, a fim de nos fazer refletir e imaginar

soluções para os problemas inerentes à disciplina e cotidianos. Para cada um desses questionamentos, você irá levantar soluções e sintetizá-las ao final de cada seção, usando os planos de aula que norteiam a aplicação desse conteúdo nas turmas do Ensino Médio.

Dando início ao conteúdo desta unidade, na primeira seção, serão apresentados os postulados inerentes à geometria espacial, as posições relativas entre duas retas no espaço e a interseção entre planos. Na segunda seção, nosso enfoque será o paralelismo, as posições relativas entre plano e reta e entre planos. Por fim, na terceira seção, abordaremos a ortogonalidade e a projeção ortogonal sobre um plano.

Esperamos que você fique cada vez mais apaixonado pela Matemática, conseguindo compreender e enxergar toda a beleza que existe na geometria, em especial, no espaço. Vamos, então, ao nosso trabalho?

Bons estudos!

Seção 1.1

Conceitos primitivos e postulados

Diálogo aberto

Caro aluno, bem-vindo à primeira seção da nossa caminhada pela geometria espacial. Neste primeiro contato, você aprenderá conceitos de ponto, reta e plano, assim como os postulados da geometria espacial. E ainda conhecerá as posições relativas entre retas e planos no espaço. Iniciamos com os entes matemáticos ponto, reta e plano. Onde enxergamos a geometria espacial no nosso dia a dia? Onde podemos ver retas no espaço na nossa vida diária?

Destacamos que, em *Os elementos*, Euclides (2009) explica esses três entes. Tais definições são vagas, não possuem um teor matemático apurado. Porém, para Euclides (2009), tais definições eram importantes, pois consistiam na base de todo seu trabalho.

Sabendo, então, que tais entes não têm definição, são aceitos como verdades universais. Agora, imaginemos retas no espaço. Você se recorda que, no convite ao estudo, foi-lhe proposto, como professor de Matemática atuante no Ensino Médio, o desafio de ensinar a geometria espacial aos seus alunos? Será que conseguimos propor aos nossos alunos um modo de identificar duas retas paralelas no espaço? E duas retas reversas? E, principalmente, você é capaz de sugerir uma maneira de mostrarmos isso aos seus alunos? Alcançamos o objetivo de tornar a geometria espacial mais atrativa aos nossos alunos?

Não nos esqueçamos de que, ao final da seção, devemos elaborar nosso plano de ensino.

Não pode faltar

Ponto, reta, plano e espaço

Neste momento, você está olhando para um livro impresso ou para a tela de um computador. Em qualquer um dos casos, você vê só isso ou enxerga: um pouco para baixo, para cima e para frente dos objetos? Nossa visão é tridimensional, assim como nossas percepções sensoriais, e esses mecanismos podem ser associados

e descritos pela geometria espacial. Para entendermos nossa área de estudo, vamos nos remeter às definições dos termos "geometria" e "espaço". Segundo o Dicionário Aulete Digital (2017), geometria é "a matemática das propriedades, medida e relações dos pontos, linhas, ângulos, superfícies e sólidos [...]". Ainda segundo a mesma fonte, espaço é "extensão ilimitada, infinita, que contém todos os seres e objetos existentes ou possíveis [...]".

Apoiando-nos nessas definições, fica claro que estudaremos certos elementos dentro de um espaço que é ilimitado e infinito.

Todos esses elementos, pontos, linhas, ângulos, superfícies, sólidos e espaço têm como origem um elemento em comum, o ponto. Este foi definido por Euclides (2009) como aquilo que não tem partes ou o que não tem grandeza nenhuma.

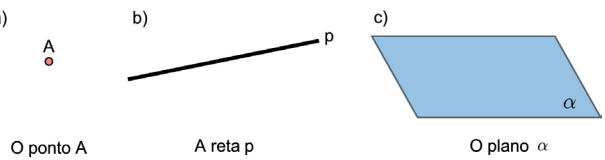
Além do ponto, para que Euclides (2009) conseguisse criar toda sua teoria, ele definiu mais dois elementos:

- reta (ou linha): é aquilo que tem comprimento, mas não tem largura;
- plano: é aquilo que tem comprimento e largura.

Você percebe que essas definições são bem abstratas? Diz-se que, na época de Euclides, tudo deveria ser definido ou demonstrado. Por esse motivo, ele criou tais definições.

A Figura 1.1 ilustra esses elementos primitivos. Perceba que sempre representaremos os pontos, as retas e os planos por, respectivamente, letras latinas maiúsculas, letras latinas minúsculas e letras gregas.

Figura 1.1 | Elementos primitivos da geometria euclidiana



Fonte: elaborada pelo autor.

Atualmente, não se usam mais definições para esses elementos primitivos. Eles são aceitos verdadeiramente como entes matemáticos, ou seja, são elementos que todos conhecem e, por esse motivo, não precisam de uma definição formal.

Perceba que, como dito anteriormente, tais definições são vagas, não possuem rigor matemático e formal. Contudo, elas são aceitas como verdadeiras e embasam toda a teoria escrita e compilada por Euclides (2009).

Postulados da geometria espacial

Tendo definido os elementos primitivos, Euclides (2009) pode, então, enunciar seus postulados. Mas, o que é um postulado? Conhecido também como axioma, é uma proposição (afirmação) admitida como verdade, sem necessidade de comprovação. Além dos postulados, temos na geometria os teoremas. Estes, ao contrário dos axiomas, precisam de uma demonstração formal, que é feita com base nos postulados. Perceba a importância da hierarquia dos elementos feita por Euclides (2009). Primeiro, ele determinou os elementos primitivos; com base neles, enunciou seus postulados e, por fim, tais proposições foram e são usadas para demonstrar os teoremas.

Reflita

Agora, você já sabe que toda a geometria que conhecemos e aprendemos na escola é a euclidiana, sendo ela embasada em elementos primitivos e postulados. O que aconteceria se tais elementos fossem desconstruídos por uma nova teoria?

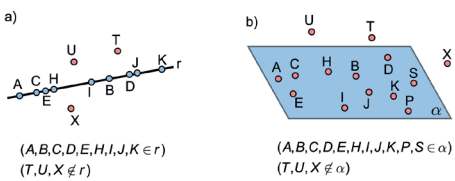
Pronto para conhecer três famosos postulados de Euclides (2009) e algumas definições?

1. Postulado da existência. Neste primeiro postulado, Euclides (2009) enunciou a existência da reta e do plano. Veja como foi feito:

a) Existe reta, e nela, bem como fora dela, existem infinitos pontos (Figura 1.2 (a)).

b) Existe plano, e nele, bem como fora dele, existem infinitos pontos (Figura 1.2 (b)).

Figura 1.2 | Representação gráfica do postulado da existência



$(A,B,C,D,E,H,I,J,K \in r)$
$(T,U,X \notin r)$

$(A,B,C,D,E,H,I,J,K,P,S \in \alpha)$
$(T,U,X \notin \alpha)$

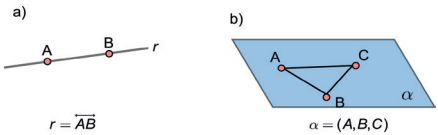
Fonte: elaborada pelo autor.

2. Postulado da determinação. Neste postulado, Euclides (2009) determinou a relação entre dois pontos e uma reta, além de estabelecer a relação entre três pontos e um plano.

a) Dois pontos distintos determinam uma única reta, que passa por eles. Veja, na Figura 1.3 (a), que pelos pontos *A* e *B* passa uma única reta: *r*.

b) Três pontos não colineares determinam um único plano, que passa por eles (Figura 1.3 (b)).

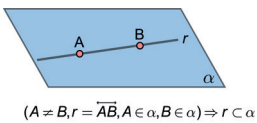
Figura 1.3 | Representação gráfica do postulado da determinação



Fonte: elaborada pelo autor.

3. Postulado da inclusão. Neste axioma, Euclides (2009) faz a comparação entre uma reta e um plano da seguinte maneira: se uma reta possui dois pontos distintos que também estão em um plano, então a reta está contida no plano. Na Figura 1.4, os pontos *A* e *B* são distintos e estão contidos no plano α. Pelo postulado da determinação, vimos que entre dois pontos passa uma única reta, logo a reta *r* que passa pelos pontos *A* e *B* também está contida no plano.

Figura 1.4 | Representação gráfica do postulado da inclusão

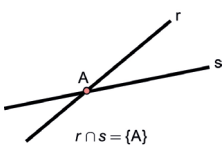


Fonte: elaborada pelo autor.

4. Definição de retas concorrentes. Duas retas são chamadas de concorrentes quando possuem um único ponto em comum.

Observe que, na Figura 1.5, nas duas retas distintas *r* e *s*, existe um único ponto *A* que pertence tanto à reta *r* quanto à reta *s*.

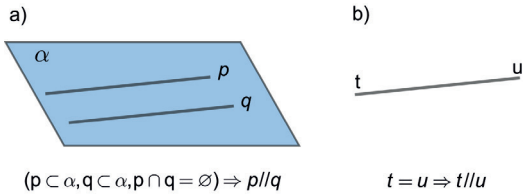
Figura 1.5 | Representação gráfica de retas concorrentes



Fonte: elaborada pelo autor.

5. Definição de retas paralelas. Duas retas são paralelas se, e somente se, elas não possuírem nenhum ponto em comum e estiverem no mesmo plano – retas coplanares – (Figura 1.6 (a)), ou se tiverem todos os pontos em comum, sendo denominadas, neste caso, coincidentes (Figura 1.6 (b)).

Figura 1.6 | Representação gráfica de retas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor.

Diante desses postulados e definições iniciais, temos uma base para começar a desenvolver a geometria espacial.

Determinação de um plano

Já que conhecemos os elementos primitivos e os axiomas referentes à existência da reta, podemos estender nosso conhecimento para os planos. Analisaremos, então, como determinar a existência de um plano a começar por pontos e retas.

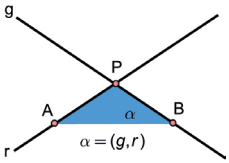
Na verdade, uma já foi dada, no postulado da determinação (item 2, Figura 1.3 (b)). Porém, existem mais três formas diferentes de fazermos isso, a saber:

2º modo: uma reta e um ponto fora dela determinam um plano (Figura 1.9). Tal fato é fácil de se verificar, porque se uma reta é determinada por dois pontos (vide postulado da determinação), então teremos três pontos que determinam um plano. Mais adiante, teremos uma formalização desse postulado.

3º modo: duas retas concorrentes determinam um plano. Para verificarmos tal fato, consideraremos as duas retas concorrentes da Figura 1.7. As retas *r* e *g* têm um ponto em comum (*P*). Além disso, sendo retas, elas são formadas por infinitos pontos. Tomando-se o ponto de interseção entre essas retas (*P*) e mais um ponto distinto

de cada uma das outras retas $(A \in r, B \in g)$, teremos os três pontos que determinam um plano.

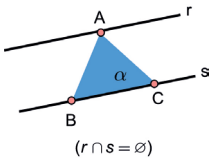
Figura 1.7 | Plano determinado por retas concorrentes



Fonte: elaborada pelo autor.

4º modo: duas retas paralelas distintas determinam um plano. Tal verificação pode ser feita da seguinte forma: a definição de paralelismo garante que não existem pontos comuns entre as retas *r* e *s* na Figura 1.8. Tome o ponto *A* na reta *r*, e os pontos *B* e *C* na reta *s* e teremos, então, os três pontos que determinam um plano.

Figura 1.8 | Plano determinado por retas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

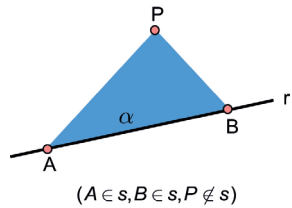
Conhecer esses modos sobre a determinação de um plano é extremamente importante, uma vez que, por meio deles, podemos definir um plano. Em muitas demonstrações e exercícios, conhecer esses postulados nos leva a um caminho mais fácil. Além disso, você já se perguntou por que uma mesa de quatro pernas, algumas vezes, não fica estável? A explicação está no postulado da determinação, pois um plano é determinado por três pontos. Como a mesa tem quatro pernas, uma delas pode ficar fora do plano determinado pelas outras três, o que faz com que ela não tenha estabilidade.

A demonstração desses teoremas deve ser feita de maneira formal, com linguagem e rigor matemáticos.

Faremos aqui a demonstração do 2º modo, as demais podem ser verificadas em Dolce e Pompeo (2013).

Lembremos que em uma reta temos infinitos pontos. Considere a reta *s* na Figura 1.9. Se tomarmos os pontos A e B $(A \notin s, B \in s, A \neq B)$, e o ponto $P \notin s$, teremos os três pontos que determinam um plano, conforme o postulado da determinação.

Figura 1.9 | Dois pontos em uma reta e um ponto fora dela



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos demonstrar de modo formal, usando a notação matemática, a determinação de um plano por uma reta e um ponto fora dela.

Partimos da hipótese: $P \notin r$, e devemos chegar à tese: $\exists \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$ (DOLCE; POMPEO, 2013).

1ª parte – Existência:

Tomamos em *r* dois pontos distintos, *A* e *B*, e um ponto *P* no espaço, tal que $P \notin r$.

Os pontos *A*, *B* e *P*, não sendo colineares, determinam um plano α.

Vamos agora provar que α é o plano de *r* e *P*.

$$\alpha = (A,B,P) \Rightarrow P \in \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = (A,B,P) \\ A \neq B; A,B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano α construído por *r* e *P*.

2ª parte – Unicidade:

Vamos provar que α é o único plano determinado por *r* e *P*. Supondo que existam dois planos α e α' por *r* e *P*, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ é o plano determinado por } r \text{ e } P \Rightarrow \alpha = (A,B,P) \\ \alpha' \text{ é o plano determinado por } r \text{ e } P \Rightarrow \alpha' = (A,B,P) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais do que um plano determinado por *r* e *P*.

Reflita

Como mencionado anteriormente, a demonstração de um teorema na Matemática deve ser feita de maneira formal, com rigor. Apresentamos a demonstração formal do 2º modo de determinação de um plano. Os 3º e 4º modos não tiveram esse formalismo. Podemos mudar essas demonstrações, a fim de deixá-las com mais rigor matemático? Será que você consegue fazer o mesmo com os 3º e 4º modos?

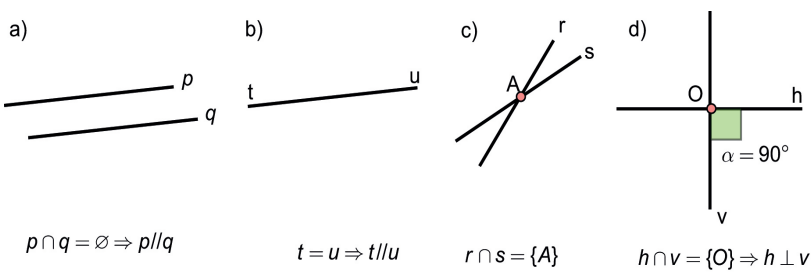
Posições relativas de duas retas

Agora que entendemos os elementos primitivos e como determinamos um plano, vamos estudar as posições relativas entre duas retas no espaço. Já aprendemos em geometria plana que há três posições relativas entre retas no plano: concorrentes, paralelas ou coincidentes. Ampliando esses conhecimentos para o espaço, teremos, então:

- Retas paralelas no espaço: são retas coincidentes ou coplanares e não possuem nenhum ponto em comum (Figura 1.10 (a-b)).

- Retas concorrentes no espaço: são retas que possuem um único ponto em comum, ou seja, elas se cruzam (Figura 1.10 (c-d)). Vale destacar que as retas perpendiculares são um caso particular de retas concorrentes, uma vez que formam um ângulo reto.

Figura 1.10 | Posições relativas de duas retas



Fonte: elaborada pelo autor.

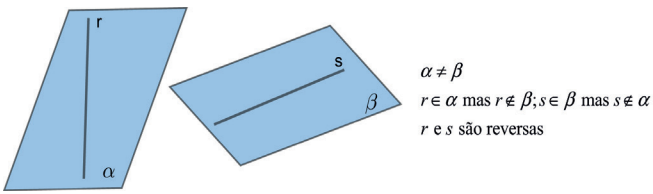
Como já abordamos, as retas perpendiculares são um caso especial das retas concorrentes, quando o ângulo formado entre elas é reto (ângulo de 90°). Usamos o símbolo $\perp$ para indicar a perpendicularidade entre duas retas.

Assimile

Euclides (2009) elencou três entes (ponto, reta e plano) que não possuem uma definição matemática, sendo aceitos intuitivamente. Com base nesses elementos, ele apresenta proposições primitivas, ou axiomas, ou, ainda, postulados, que são aceitos como verdades, sem demonstração matemática formal. A definição de retas paralelas estabelece uma das posições possíveis entre duas retas em um espaço. Nesse postulado, é definido que as retas coincidentes são um caso particular das retas paralelas.

Existe um último caso de posições relativas entre retas, específico do espaço, que são as retas reversas (Figura 1.11). Neste caso, não existe um plano que contenha as duas retas ao mesmo tempo, ou seja, as retas não são coplanares. Chamamos dois elementos de coplanares quando existe um plano que os contém.

Figura 1.11 | Retas reversas



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.11, os planos são distintos, ou seja, não possuem pontos em comum. Além disso, a reta *r* pertence a um plano, e a reta *s* pertence ao outro plano.

Exemplificando

Se pensarmos em uma única reta, quantos planos passam por ela?

Dica: pense nos pontos no espaço que estão fora dessa reta.

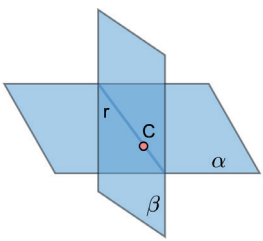
Resolução: são infinitos planos que passam por uma reta. Tomando uma reta ***r*** qualquer e um ponto ***A*** fora dela, existe um plano α que passa por essa reta e pelo ponto ***A***. Levando em conta a mesma reta ***r*** e um ponto ***B*** que não está no plano α determinado anteriormente, teremos, então, um plano β. Prosseguindo, podemos formar infinitos planos que passam por essa reta.

Interseção de planos

Por fim, estudaremos a interseção entre dois planos (Figura 1.12), que foi definida por Euclides (2009) no postulado da interseção: "se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 11).

Do postulado da interseção dos planos, deriva um teorema: "se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por esse ponto" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 11). Usando o teorema da interseção, também podemos afirmar que esses planos são secantes.

Figura 1.12 | Interseção de dois planos



$$C \in \alpha, C \in \beta, \alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r, C \in r$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

A demonstração do teorema da interseção pode ser encontrada em: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar** – Geometria espacial: posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.

Indicamos também o seguinte *site* que contém as definições do Livro I da obra *Os elementos*, de Euclides (2009):

UNIVERSIDADE de Coimbra – Departamento de Matemática. **Livro I dos elementos de Euclides** – Definições. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html>. Acesso em: 5 jan. 2018.

Nesse *site*, você também poderá consultar os outros livros de Euclides (2009), que trazem várias proposições e postulados interessantes para a nossa formação.

Sem medo de errar

Você se lembra de ter identificado retas paralelas e reversas no espaço? Olhe, então, a sua volta...! Consegue "enxergar" essas retas? É possível observarmos que na sala de aula há retas, e estas estão no espaço, não é mesmo? Elas existem em outros lugares, por exemplo, nas formas das mesas, nas cadeiras, nos formatos dos prédios, nos carros, enfim, para onde olharmos, encontraremos retas no espaço.

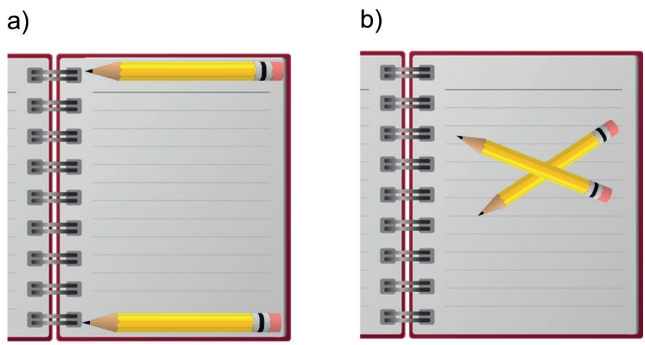
Vamos construir retas paralelas, concorrentes e reversas?

Para construirmos as retas paralelas, usaremos uma folha de papel, que servirá como nosso plano.

Sobre essa folha, mais precisamente rente às bordas, posicionaremos, por exemplo, dois lápis, a fim de obtermos as retas paralelas (Figura 1.13 (a)).

Seguindo esse raciocínio, podemos proceder da mesma maneira para obter as retas concorrentes (Figura 1.13 (b)). Vale notar que essa construção não exige tanto rigor, pois basta que os lápis se cruzem em um ponto.

Figura 1.13 | Lápis representando retas paralelas e concorrentes

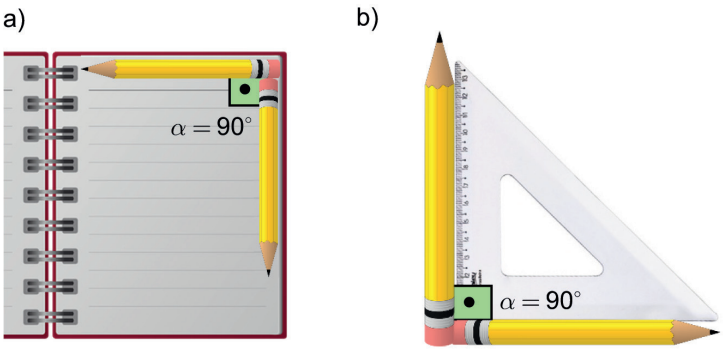


Fonte: adaptada de Pixabay (2017, [s.p.]).

Como vimos no texto, ao montarmos esse esquema com um ângulo de 90° entre as retas, temos retas perpendiculares. Para esboçar esse caso, precisamos nos atentar à regra que garante a perpendicularidade (ângulo = 90°). Utilizando somente o lápis

e o caderno, podemos colocar um na borda superior e outro na lateral direta, conforme a Figura 1.14 (a). Essa construção também pode ser feita com o auxílio de um esquadro; neste caso, cada lápis deve ficar em um dos lados que formam o ângulo reto, na Figura 1.14 (b).

Figura 1.14 | Lápis representando retas paralelas



Fonte: adaptada de Pixabay (2017, [s.p.]).

Por fim, para as retas reversas, usaremos duas folhas de papel, cada uma representando um plano (Figura 1.15). Ao colocarmos uma caneta em cada plano, podemos observar as retas reversas. É importante notarmos que o posicionamento dessas canetas deve ser feito de modo a não termos um plano que possa conter essas duas canetas, tornando-as paralelas.

Figura 1.15 | Canetas representando retas reversas

Fonte: elaborada pelo autor.

Feitas as ilustrações, agora é hora de você organizar os registros e preparar seu plano de aula para seus alunos do Ensino Médio. Bom trabalho!

Avançando na prática

Quadrilátero reverso

Descrição da situação-problema

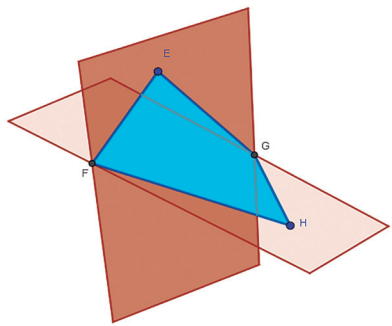
Imaginemos agora a seguinte situação: queremos mostrar um quadrilátero reverso. Primeiramente, como os alunos definiriam um quadrilátero reverso, já sabendo o que são retas reversas? Depois, como podemos representar um quadrilátero reverso? Essas figuras estão presentes no nosso cotidiano?

Resolução da situação-problema

Para começar, faça com que seus alunos tentem definir um quadrilátero reverso.

Quadrilátero reverso é aquele em que seus quatro vértices não estão contidos em um único plano. Veja a Figura 1.16:

Figura 1.16 | Quadrilátero reverso



Fonte: elaborada pelo autor.

Construiremos um quadrilátero reverso com o auxílio de duas folhas de papel, que formarão os planos. Marcaremos os quatro vértices nessas duas folhas: três vértices em uma folha e o restante na outra. Depois, basta unirmos esses vértices, a fim de formarmos o quadrilátero. Perceba que os pontos *E*, *F* e *G* são coplanares, e *H* não está no plano que contém esses três pontos.

Podemos escrever matematicamente como segue:

$E,F,G \in \alpha$, $H \notin \alpha$, então *EFGH* é um quadrilátero reverso.

Faça valer a pena

1. De acordo com o teorema da interseção de dois planos, quando há uma interseção entre tais planos, sempre encontraremos uma reta resultante. Com relação a essa afirmação, devemos imaginar que uma reta é composta de infinitos pontos, assim como um plano é formado de infinitos pontos. Obviamente, tal reta pertence aos dois planos.

Considere as afirmações a seguir e escolha a opção correta.

I. Dois planos distintos que têm uma reta em comum são secantes.

II. Se dois planos têm uma reta em comum, então eles são secantes.

III. Dois planos secantes têm infinitos pontos em comum.

IV. Se dois planos têm um ponto em comum, eles têm uma reta em comum.

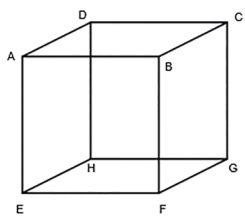
V. Duas retas reversas têm um ponto em comum.

a) Todas as alternativas estão corretas.
b) Somente as alternativas I, III, IV e V estão corretas.
c) Somente as alternativas I e II estão corretas.
d) Somente as alternativas II e III estão corretas.
e) Somente as alternativas IV e V estão corretas.

2. Um cubo é uma figura espacial que contém oito lados, chamados de arestas. Uma figura espacial limitada por polígonos é chamada de poliedro. Um poliedro é formado pelas arestas, faces (polígonos) e vértices (os "bicos").

Observe o cubo *ABCDEFGH* da Figura 1.17 e observe suas arestas.

Figura 1.17 | Cubo *ABCDEFGH*



Fonte: elaborada pelo autor.

Os segmentos *AB* e *FG* representam retas:

a) paralelas.
b) concorrentes.
c) reversas.
d) perpendiculares.
e) coincidentes.

3. Em Matemática, existem vários símbolos que são usados na escrita.

Por exemplo, $\cap$ significa interseção, $\varnothing$ simboliza vazio, $\cup$ representa união e // significa paralelas. Tais símbolos são usados para demonstração de teoremas, escrita de exercícios ou mesmo para a definição de elementos matemáticos.

Qual das alternativas está correta do ponto de vista da escrita matemática por meio de símbolos, assim como da teoria das retas no espaço?

a) $r \cap s = \varnothing \Rightarrow$ r e s são reversas.

b) $r \cap s = \varnothing \Rightarrow$ r e s são paralelas.

c) Para que duas retas r e s sejam reversas, basta termos $r \cap s = \varnothing$.

d) Para que duas retas r e s sejam paralelas, basta termos $r \cap s = \varnothing$.

e) Se r e s são reversas, então $r \cap s = \varnothing$.

Seção 1.2

Paralelismo no espaço

Diálogo aberto

Caro aluno!

O que achou da nossa primeira seção? Sentiu-se empolgado? Esperamos que sim!

Nesta segunda seção, estudaremos com detalhes o paralelismo de retas e planos no espaço, além de explorarmos as posições relativas entre retas e planos e somente entre planos.

Aproveitaremos o tema para aprender um pouco mais sobre a história de Euclides e sua obra *Os elementos*. Alguns historiadores estimam que Euclides viveu entre 325 a.C. e 265 a.C., na Alexandria. Infelizmente, nenhum livro dessa época chegou a nós. O que temos é uma revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria, que viveu quase 700 anos após a época de Euclides. Aqui cabe uma curiosidade: até 1808 essa era a mais antiga edição de *Os elementos* de que se tinha notícia. Em 1808, Napoleão ordenou que todas as obras encontradas em bibliotecas italianas fossem levadas para Paris. Em razão desse fato, foi encontrada, em uma biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X da referida obra de Euclides. Vários estudos dessa obra foram feitos e concluiu-se que, nas revisões, muito do material introdutório de *Os elementos* sofreu alteração, porém as demonstrações e os teoremas, salvo alguns acréscimos, permaneceram inalterados.

Nessa obra, Euclides (2009) nos apresenta seus cinco grandes postulados que são a base da conhecida geometria euclidiana. Na seção anterior, já aprendemos alguns dos postulados de Euclides (2009). Agora, nos concentraremos em um novo postulado, o postulado das paralelas. No decorrer do desenvolvimento da Matemática e da geometria, esse postulado foi confrontado por alguns matemáticos. Tal confronto deu origem ao que conhecemos por geometria não euclidiana.

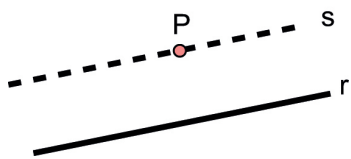
Então, caro aluno, continuando com a sua missão de professor do Ensino Médio lecionando a disciplina de geometria espacial, você tem como desafio apresentar aos seus alunos como seria a negação do postulado das paralelas. Existe uma única negação desse postulado? E onde podemos observar essa(s) negação(ões)?

Não pode faltar

Na seção anterior, vimos que duas retas são consideradas paralelas no espaço se elas estiverem contidas no mesmo plano e não possuírem nenhum ponto em comum. Além dessa definição, analise o seguinte teorema sobre retas paralelas que está ilustrado na Figura 1.18.

"Dados uma reta *r* e um ponto *P* fora de *r* (isto é, $P \notin r$), então existe uma reta *s* passando por *P* e paralela a *r*" (MACHADO, 2012, p. 75).

Figura 1.18 | Representação do teorema das retas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor.

Esse teorema apresenta a unicidade de retas paralelas, estando embasado pelo postulado das paralelas enunciado por Euclides:

> **"caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos" (EUCLIDES, 2009, p. 98).**

Como sabemos, os postulados foram reescritos ao longo do tempo, então, para melhor entendermos o postulado das paralelas, veja a definição de Machado (2012, p. 79): "dada uma reta, por cada ponto que não lhe pertence passa, no máximo, uma reta paralela a ela".

Segundo Sachs (2016), vários matemáticos durante a história tentaram demonstrar o postulado das paralelas e transformá-lo em uma proposição, porém, todas as demonstrações fracassaram. Então, no século XIX, em vez de fazerem a demonstração do postulado das paralelas, três matemáticos propuseram sua negação. Sobre isso, leia o trecho a seguir:

> (...) Notou-se que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado – de fato tratava-se de um postulado –, poderia ser negado, sem que contradições ocorressem. Três matemáticos merecem grande destaque nesse episódio: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (...) (SACHS, 2016, p. 22).

Tal negação do quinto postulado possibilitou o surgimento das geometrias não euclidianas. De acordo com Sachs (2016), um dos grandes nomes das geometrias não euclidianas é o do russo Lobachevsky. Esse matemático dedicou-se a uma geometria que excluía o postulado das paralelas e, no ano de 1829, publicou seu primeiro artigo sobre uma nova geometria, inicialmente chamada de geometria imaginária e, posteriormente, propôs uma geometria que ficou conhecida por hiperbólica. Veja uma breve explicação sobre essa geometria:

> (...) O nome de geometria hiperbólica foi dado futuramente pelo matemático Felix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria, o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana (...) (TRUDEAU, 1987, p. 159 apud SACHS, 2016, p. 23).

Concluímos que hoje temos a geometria euclidiana, que é baseada em um grupo de cinco axiomas enunciados por Euclides (2009), e as geometrias não euclidianas, que surgiram assumindo um grupo de axiomas que excluem o postulado das paralelas de Euclides (2009).

Pesquise mais

Para saber mais sobre as tentativas de demonstração do postulado das paralelas e o surgimento das geometrias não euclidianas, consulte o seguinte artigo:

SACHS, Línlya. O quinto postulado de Euclides como história de problemas. **Hipátia:** Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, Campos do Jordão, v. 1, n. 1, p.11-29, dez. 2016. Disponível em: <http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/437>. Acesso em: 5 jan 2018.

Voltemos a nos concentrar na geometria euclidiana, estendendo o axioma das paralelas para o espaço: "Dada uma reta no espaço, por cada ponto que não lhe pertence passa, no máximo, uma reta paralela a ela" (MACHADO, 2013, p. 26). Devemos nos lembrar de que as retas devem pertencer a um mesmo plano, ou seja, elas devem ser coplanares, pois, caso contrário, serão reversas.

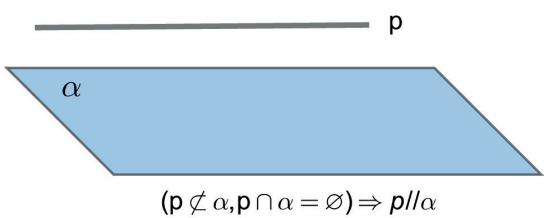
Posição relativa de uma reta e um plano

Na primeira seção do livro, estudamos as posições relativas entre duas retas (paralelas, secantes ou reversas). Agora, estudaremos as posições relativas entre uma reta e um plano.

Para o primeiro caso, considere a definição do paralelismo entre retas e planos: "Uma reta *r* e um plano α no espaço são paralelos, relação que será denotada por $r//\alpha$, se não possuem pontos em comum" (MACHADO, 2013, p. 35).

Na Figura 1.19, a reta *p* não pertence ao plano α; além disso, a reta e o plano não possuem nenhum ponto em comum.

Figura 1.19 | Reta paralela a um plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse contexto, podemos abordar a condição suficiente e necessária para a existência de retas paralelas a um plano.

Condição suficiente

"Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta desse plano, então ela é paralela ao plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 19). Com esse enunciado, temos uma condição que, por si só, já menciona o paralelismo entre reta e plano.

Demonstração da condição suficiente por absurdo:

Hipótese	Tese
$r \not\subset \alpha, r // s, s \subset \alpha$	$\Rightarrow r // \alpha$

Se $r // s$, então $r \cap s = \varnothing$. Assim, existe um plano β que contenha ambas as retas, ou seja, $\exists \beta \mid r, s \in \beta$.

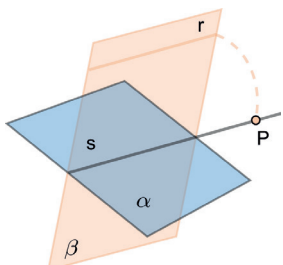
Se $s \subset \alpha, s \subset \beta, \alpha \neq \beta \Rightarrow s = \alpha \cap \beta$.

Se r e α tem um ponto P comum (Figura 1.20), decorre:

$P \in r, r \subset \beta \Rightarrow P \in \beta$.

Assim, com $P \in \beta$ e $P \in \alpha$, decorre $P \in s$. Então, $P \in r$ e $P \in s$, o que é absurdo, pois $r \cap s = \varnothing$. Logo, r e α não têm ponto em comum, isto é, $r // \alpha$.

Figura 1.20 | Demonstração por absurdo da condição suficiente



Fonte: elaborada pelo autor.

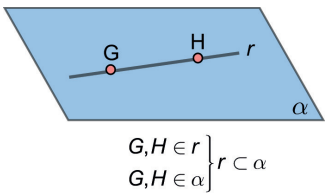
Condição necessária

"Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 19). Perceba que tal condição é obrigatória e necessária, porque, se não houver uma

reta no plano que seja paralela a essa reta fora dela, então essas retas serão reversas e não teremos um plano que as contenha. Vamos agora considerar as posições relativas entre retas e planos para os casos em que os elementos possuem pontos em comum.

a) Se eles apresentarem dois pontos em comum, então a reta estará contida no plano. Veja, na Figura 1.21, que os pontos *G* e *H* pertencem tanto à reta quanto ao plano, assim, a reta está contida no plano.

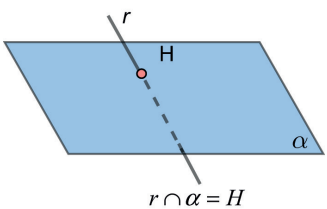
Figura 1.21 | Reta contida em um plano



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Se eles apresentarem um único ponto em comum, então a reta será secante ao plano. Observe, na Figura 1.22, que a reta e o plano possuem um único ponto em comum, o ponto *H*; por isso, a reta é secante ao plano α.

Figura 1.22 | Reta secante ao plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Vamos demonstrar a seguinte afirmação: Se duas retas paralelas são dadas e umas delas é paralela a um plano, então a outra é paralela ou está contida no plano.

Hipótese	Tese
$r//s$ e $r//\alpha$	$r//\alpha$ ou $r \subset \alpha$

Sejam as retas *r* e *s* paralelas e distintas determinando um plano β.

Se *r* e *s* forem concorrentes, e sendo *P*, tal que $s \cap \alpha = P$, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} P \in s, s \subset \beta \Rightarrow P \in \beta \\ s \cap \alpha = P \Rightarrow P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ t \,|\, \alpha \cap \beta = t \text{ e } P \in t$$

Logo: $s \cap t = P$.

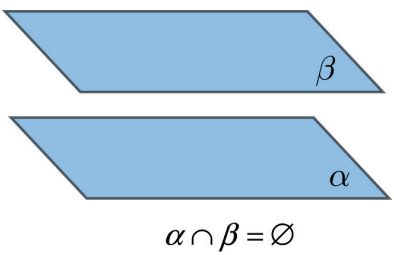
Em β, teríamos $r // s$ e *r* concorrente a *t*. Desse modo, *r* e *t* seriam concorrentes, o que é absurdo, pois $t \subset \alpha$ e $r \cap \alpha = \varnothing$, por hipótese.

Posições relativas entre planos

A posição relativa entre dois planos também pode ser analisada de acordo com os pontos que estes têm em comum.

Veja a definição de paralelismo entre planos: "Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm nenhum ponto em comum ou se não são iguais (coincidentes)" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 25). Essa definição está ilustrada na Figura 1.23.

Figura 1.23 | Planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Considere um plano α e um ponto *P* fora desse plano. Como podemos construir um plano β que seja paralelo a α usando apenas régua e compasso?

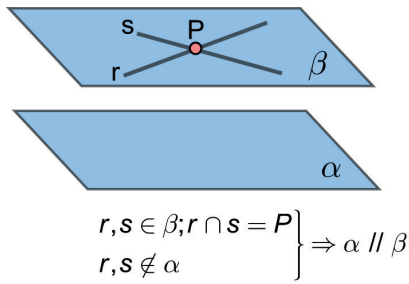
Como já conhecemos a definição de planos paralelos, qual seria a condição suficiente para que tais planos fossem paralelos? E qual

a condição necessária? E, por fim, qual seria a condição necessária e suficiente?

A condição suficiente para que dois planos sejam paralelos é a seguinte: "Se um plano contém duas retas concorrentes e ambas são paralelas a outro plano, então os planos são paralelos". (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 26).

Na Figura 1.24, temos uma demonstração da condição suficiente de paralelismo entre planos:

Figura 1.24 | Planos paralelos com retas concorrentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Hipótese Tese

$$(r \subset \beta, s \subset \beta; r \cap s = \{P\}; r // \alpha,\ s // \alpha) \Rightarrow \alpha // \beta$$

Os planos α e β são distintos. Vamos provar então que eles são paralelos.

Se existe uma reta *t*, tal que $t = \alpha \cap \beta$, teríamos:

$$r // \alpha, r \subset \beta, t = \alpha \cap \beta \Rightarrow r // t$$
$$s // \alpha, s \subset \beta, t = \alpha \cap \beta \Rightarrow s // t$$

O fato de *r* e *s* serem concorrentes e ambas paralelas a *t* é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas de Euclides (2009). Logo, α e β não têm ponto em comum, portanto: $\alpha // \beta$.

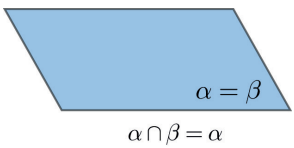
A condição necessária é imediata da condição suficiente: "Se dois planos distintos são paralelos, então um deles contém duas retas concorrentes que são paralelas ao outro" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 26).

Por fim, podemos afirmar que a condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é "que um deles contenha duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 26).

Para encerrar esta seção, veremos quais são as posições relativas entre dois planos quando estes possuem pontos em comum. Dados dois planos α e β, eles podem ser:

a) Coincidentes (ou iguais), quando α e β têm mais de uma reta em comum (Figura 1.25).

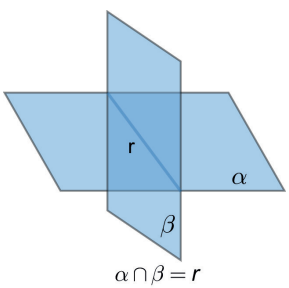
Figura 1.25 | Planos coincidentes



Fonte: elaborada pelo autor.

b) Secantes, quando α e β têm uma única reta em comum (Figura 1.26).

Figura 1.26 | Planos secantes



Fonte: elaborada pelo autor.

Assimile

As posições relativas entre duas retas, ou entre uma reta e um plano, ou, ainda, entre dois planos, dependem diretamente de quantos pontos tais elementos têm em comum. Assim, os elementos poderão ser: paralelos ou reversos, quando não possuírem nenhum ponto em comum; secantes, quando tiverem um ponto em comum; coincidentes, quando apresentarem todos os pontos em comum.

Pesquise mais

Deixaremos como dica a leitura do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Marcelo Carvalho Antunes, licenciado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

ANTUNES, Marcelo Carvalho. **Uma possível inserção das geometrias não euclidianas no Ensino Médio**. 2009. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/18218/000728046.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2018.

Esse trabalho traz as geometrias hiperbólica e elíptica, apresentando um modo de abordarmos esse assunto com os alunos do Ensino Médio.

Sem medo de errar

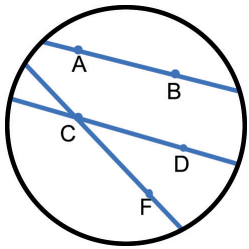
Olá, aluno, compreendeu um pouco mais sobre a geometria espacial? Você se lembra de que no início desta seção pedimos que como professor de Matemática do Ensino Médio, refletisse e elaborasse estratégias sobre a negação do postulado das paralelas?

O postulado das paralelas despertou o interesse de muitos matemáticos ao longo da história. Tal questionamento se deve ao fato de ter sido apresentado como um postulado, pois pensou-se que seria possível demonstrá-lo.

Alguns desses matemáticos, dentre os quais Lobachewski (1792--1856), Bolyai (1802-1860), Riemmann (1826-1866) e Klein (1849--1925), tentaram demonstrar esse postulado. Os inúmeros esforços de demonstrá-lo e os vários insucessos tornaram-se a base para que se produzissem argumentos a fim de fazer a negação do quinto postulado, em vez da demonstração. Esse caminho foi produtivo, o que levou à criação das geometrias não euclidianas. Os dois primeiros matemáticos citados criaram de maneira independente a geometria hiperbólica, que assume que "**por um ponto fora de uma reta existem, pelo menos, duas retas paralelas à reta dada**". Essa seria uma primeira negação para o questionamento apresentado no diálogo aberto. Perceba que, no plano, demonstrar isso é impossível, a menos que se crie um modelo, de modo que essa negação seja válida. Então, foi proposto o plano de Lobachewski, criado por Klein.

Tal modelo consiste em um círculo euclidiano, considerando-se apenas sua região interior, com duas retas paralelas a uma terceira reta pelo mesmo ponto. Observe na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Plano de Lobachewski



Fonte: elaborada pelo autor.

Os outros dois matemáticos descreveram o que chamamos de geometria elíptica, na qual o postulado das paralelas é: "**por um ponto fora de uma reta não existe nenhuma reta que seja paralela à reta dada**". Essa é a outra negação. Tais descobertas levaram a consequências importantíssimas, principalmente nos fundamentos da Matemática, uma vez que, com base nelas, puderam ser definidos elementos que não existem na geometria euclidiana. Um exemplo simples para observarmos a geometria elíptica é o globo terrestre (Figura 1.28), com seus meridianos. Perceba que, ao analisarmos qualquer meridiano (linhas que passam pelos polos), não notamos retas paralelas a ele.

Figura 1.28 | Globo terrestre

Fonte: Pixabay (2017, [s.p.]).

Agora, sintetize o postulado e as negações em um plano de aula para apresentar aos seus alunos. E não se esqueça de usar ilustrações para enriquecer o material.

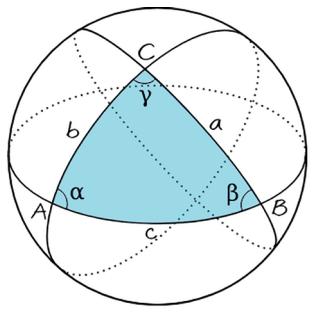
Avançando na prática

Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Descrição da situação-problema

Um triângulo esférico é aquele desenhado sobre uma superfície esférica (Figura 1.29). Esse triângulo faz parte da geometria elíptica, a geometria não euclidiana que assume que por um ponto fora de uma reta não há retas paralelas a essa reta. Assim, será que você consegue calcular quanto resulta a soma dos ângulos internos (α, β, γ) do triângulo esférico da Figura 1.29?

Figura 1.29 | Triângulo esférico



Fonte: Wikimedia (2017, [s.p.]).

Resolução da situação-problema

Considere um triângulo esférico específico no globo terrestre, em que dois meridianos seriam dois lados e um paralelo seria um terceiro lado. Observe na Figura 1.30.

Figura 1.30 | Triângulo no globo terrestre

Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que marcamos na Figura 1.30 três ângulos retos, o que resulta em uma soma de 270°. Então, em um triângulo esférico, diferentemente da geometria euclidiana plana, a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em um número maior do que 180°. Interessante, não? Que tal planejar para seus alunos do Ensino Médio uma aula para aprenderam sobre os triângulos esféricos e construírem um? E, ainda, que tal propor a eles a problematização da soma dos ângulos internos desse triângulo?

Faça valer a pena

1. Existem posições relativas entre retas e planos. Uma reta pode estar contida em um plano, uma reta pode ser secante (ou concorrente) a um plano, ou uma reta pode ser paralela a um plano. Lembre-se de que, para definirmos qual a posição relativa entre uma reta e um plano, basta observarmos os pontos que são ou não comuns entre as retas.

Em relação à posição relativa entre uma reta e um plano, qual a afirmativa correta?

a) Uma reta e um plano que têm pontos em comum são concorrentes.

b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta desse plano.

c) Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.

d) Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa a essa reta paralela.

e) Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

2. Estudamos sobre a posição relativa entre dois planos. Os planos podem ser coincidentes (ou iguais), quando possuem todos os pontos em comum; paralelos distintos, quando não têm nenhum ponto em comum, ou, ainda, secantes, quando a sua interseção resulta em uma reta.

Sobre a posição relativa entre dois planos, qual a afirmação correta?

a) Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro plano.

b) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro plano.

c) Dois planos paralelos distintos têm um ponto em comum.

d) Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um deles pode ser concorrente a uma reta do outro plano.

e) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro plano.

3. Sobre a posição relativa entre dois planos, precisamos saber: para que os planos sejam considerados paralelos, eles devem ser distintos. Esse entendimento também serve para retas, pois, assim, temos realmente retas (ou planos) paralelos. Caso não sejam distintos, eles serão coincidentes.

Sobre a posição relativa entre dois planos, escolha a afirmação correta:

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

b) Se dois planos são paralelos a uma reta, então são paralelos entre si.

c) Se um plano contém duas retas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

d) Se um plano contém duas retas distintas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

e) Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um e uma reta do outro são reversas ou paralelas.

Seção 1.3

Ortogonalidade

Diálogo aberto

Olá, aluno!

Como andam os estudos e a sua inserção na geometria espacial? Esperamos que esteja indo bem!!

Até o momento, você aprendeu que, para classificar a posição relativa de retas e planos, temos que saber se estes têm ou não pontos em comum. Com essa informação, as posições das retas foram classificadas em paralelas ou reversas (sem ponto em comum) e concorrentes (com ponto em comum), e os planos classificados em paralelos ou secantes. Nesta seção, exploraremos novas posições de retas e planos no espaço. Veremos que, quando duas retas forem reversas, elas poderão receber um nome específico, dependendo do ângulo entre elas. Estudaremos também novas posições entre retas e planos e entre dois planos. Por fim, você aprenderá como fazer uma projeção sobre um plano e calcular distâncias geométricas.

No início da unidade, atribuiu-se a você a missão de pensar em estratégias para o ensino da geometria espacial aos alunos do Ensino Médio. Você, como professor atuante, deve elaborar um plano de aula com os passos necessários para o aluno desenhar um ângulo entre uma reta e um plano usando régua e compasso. Como o aluno poderia definir esse ângulo?

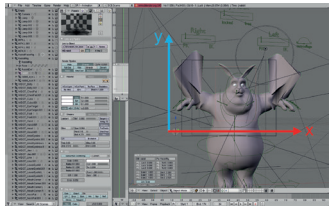
Bom trabalho!

Não pode faltar

A geometria espacial ganhou muita força com a evolução tecnológica, pois todas as formas de representação de imagens usando um meio eletrônico utilizam conceitos geométricos. A Figura 1.31 é uma imagem de um programa de modelagem em três dimensões. Observe a posição dos braços do personagem em relação ao eixo x. Devemos dizer que os braços são paralelos ou perpendiculares ou ortogonais em relação ao eixo x? Podemos projetar uma sombra do braço no chão? Como poderíamos medir a distância do braço até

o chão? Nesta seção, estudaremos os conceitos geométricos que nos permitirão classificar a relação entre elementos geométricos no espaço.

Figura 1.31 | Aplicação de geometria espacial



Fonte: adaptada de Wikimedia Commons (2010, [s.p.]).

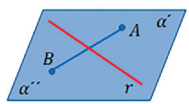
Para iniciarmos nosso estudo de ortogonalidade e perpendicularidade das retas e dos planos, precisamos acrescentar mais alguns postulados.

Postulado da separação dos pontos de um plano (Figura 1.32)

Uma reta *r* de um plano α separa este plano em dois subconjuntos α' e α'', de tal modo que:

- Todos os pontos de α estão contidos na união dos subconjuntos ($\alpha' \cup \alpha''$).
- $\alpha' \cap \alpha'' = r$.
- Dados dois pontos distintos *A* e *B* pertencentes ao plano α, tais pontos só estarão no mesmo semiplano se, e somente se, $\overline{AB} \cap r = \varnothing$.
- Dados dois pontos distintos *A* e *B* pertencentes ao plano α, tais pontos só estarão em semiplanos distintos se, e somente se, $\overline{AB} \cap r \neq \varnothing$.

Figura 1.32 | Ilustração do postulado da separação de um plano

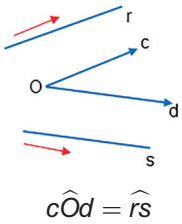


Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1.32, os dois subconjuntos α' e α'' são chamados de semiplanos ou, ainda, semiespaços. Perceba que esse postulado trata da divisão de um plano em dois semiplanos, sendo a reta *r* a origem (interseção) destes semiplanos. Além disso, observe que a interseção dessa reta *r* com a reta $\overline{AB}$ não é vazia, ou seja, cada um dos pontos que forma a reta *r* pertence a um semiplano de α.

Vamos agora definir o que é um ângulo de duas retas quaisquer: "Um ângulo é chamado de ângulo de duas retas orientadas quaisquer se, e somente se, ele tem vértice arbitrário e seus lados têm sentidos respectivamente concordantes com os sentidos das retas" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 31).

Figura 1.33 | Ângulo entre duas retas

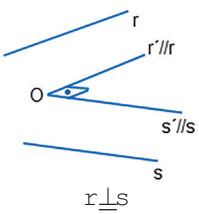


Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba, na Figura 1.33, que o ângulo plano $c\hat{O}d$ é o mesmo ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*. Assim, conseguimos definir que o ângulo entre duas retas reversas pode ser medido usando-se uma projeção paralela das retas. Nessa figura, a reta *c* é paralela à reta *r*, e a reta *d* é paralela à *s*.

Agora, sabendo a definição de ângulo entre duas retas reversas, podemos definir as retas ortogonais (Figura 1.34): "Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam um ângulo reto" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 40).

Figura 1.34 | Retas ortogonais



Fonte: elaborada pelo autor.

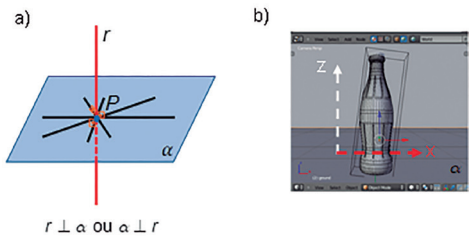
Assimile

Tanto as retas perpendiculares quanto as ortogonais formam um ângulo reto, porém, só podem ser classificadas como ortogonais quando, além do ângulo reto, estiverem em planos distintos, ou seja, forem reversas.

É importante notar o seguinte: todo par de retas ortogonal é perpendicular, mas nem todo par de retas perpendicular é ortogonal. Concluímos, então, que se duas retas *r* e *s* formam entre si um ângulo reto, elas são perpendiculares e/ou ortogonais. Para esse caso, usaremos um símbolo diferente: $r \perp s$.

Como já sabemos a definição de retas ortogonais, podemos partir para a definição de reta e plano perpendicular (Figura 1.35): "Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles têm um ponto em comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 35).

Figura 1.35 | Reta perpendicular ao plano



Fonte: adaptada de Wikimedia Commons (2012, [s.p.]).

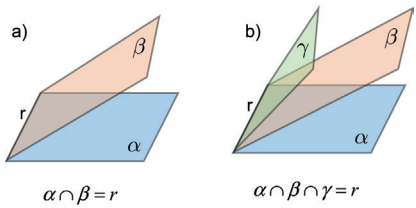
Na Figura 1.35(a), o ponto *P*, que é o ponto de interseção da reta *r* com o plano α, é chamado de pé da perpendicular. Consequentemente, da definição, temos o seguinte: "se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 35).

Observe, na Figura 1.35(b), que qualquer reta paralela ao eixo *z* será perpendicular às retas contidas no plano α. É importante ainda verificar que existe uma condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano: "se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 36). A demonstração desse teorema pode ser vista na mesma referência citada.

Em geometria espacial, além dos ângulos entre duas retas, podemos ter ângulos entre dois planos; neste caso, são chamados de diedros (Figura 1.36(a)). "Um diedro é a união de dois semiplanos com a mesma reta de origem. Dizemos que os semiplanos, que determinam o diedro são suas faces, e a reta comum aos semiplanos a sua aresta" (MACHADO, 2013, p. 59). Assim, estendendo a

definição, caso a interseção seja entre três planos, tem-se um triedro (Figura 1.36(b)).

Figura 1.26 | Ângulo entre planos: diedro (a) e triedro (b)

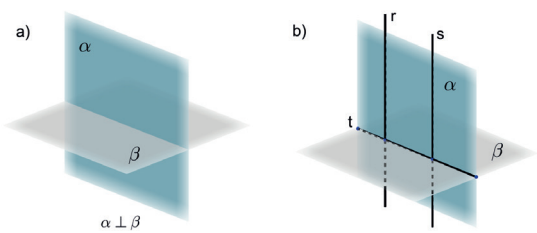


Fonte: elaborada pelo autor.

Observe, agora, a seguinte definição: "um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular à β" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 48). Indicamos por $\alpha \perp \beta$ (Figura 1.37(a)). Da definição, podemos concluir que se o ângulo formado entre os dois planos for reto, então os planos são perpendiculares. É importante notar que, pela definição, se uma reta for perpendicular a um plano qualquer, qualquer outro plano que contenha essa reta é perpendicular ao primeiro.

Para comprovar tal fato, vejamos o seguinte teorema: "se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro lado" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 48) (Figura 1.37(b)).

Figura 1.37 | Planos perpendiculares e reta perpendicular à interseção dos planos



Fonte: elaborada pelo autor.

Hipótese **Tese**

$$\alpha \perp \beta, t = \alpha \cap \beta, r \subset \alpha, r \perp t \Rightarrow r \perp \beta$$

Se $\alpha \perp \beta$, então α contém uma reta *s* perpendicular a β. Logo, essa reta *s* é perpendicular à *t*. Assim, em α, teremos: $s \perp t, r \perp t \Rightarrow s // r$.

Concluímos que se $s // r$ e $s \perp \beta$, então $r \perp \beta$.

Reflita

Sabendo agora que dois planos secantes são considerados perpendiculares quando formam entre si um ângulo reto, como poderíamos definir dois planos oblíquos?

Uma aplicação bastante comum na geometria é projetar um objeto sobre determinado plano. Por exemplo, dentro da computação gráfica, a criação de imagem com qualidade depende da posição da projeção de sua sombra, pois, se estiver mal posicionada, a imagem não produzirá o efeito visual esperado. Vamos agora conhecer as opções de projeção. Começaremos nosso estudo vendo como fazer a projeção de um ponto em um plano.

Projeção ortogonal é o nome dado a uma figura em um plano que foi formado a partir de uma imagem fora desse plano. Como a projeção é ortogonal, a imagem de origem deve ser perpendicular ao plano que receberá a projeção.

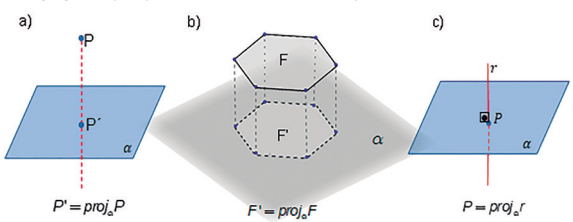
A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano é feita traçando-se um segmento de reta perpendicular ao ponto P e ao plano α, criando no plano um ponto $P' \in \alpha$ (Figura 1.38(a)). O plano será chamado de plano de projeção, e a reta de reta projetante do ponto.

Ampliando essa ideia, chamamos de projeção ortogonal de uma figura sobre um plano o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos dessa figura sobre o plano (Figura 1.38(b)).

Para a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano, temos dois casos distintos:

a) Se a reta for perpendicular ao plano, então sua projeção sobre o plano será o pé dessa reta, ou seja, será o traço da reta no plano (Figura 1.38(c)).

Figura 1.38 | Projeções perpendiculares sobre o plano

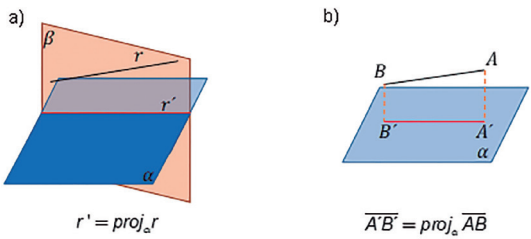


Fonte: elaborada pelo autor.

b) Se a reta não for perpendicular ao plano, teremos, então, a seguinte definição: chamamos de projeção ortogonal de uma reta *r*, não perpendicular a um plano α, sobre esse plano α, à reta que é a interseção de α e β, sendo β o plano que é perpendicular a α e que contém a reta *r* (Figura 1.39(a)).

Existe ainda a possibilidade da projeção de um segmento de reta. A projeção ortogonal sobre um plano α do segmento $\overline{AB}$, contido em uma reta não perpendicular à α, é chamada de segmento $\overline{A'B'}$, contido em α, em que $A' = proj_{\alpha} A$ e $B' = proj_{\alpha} B$ (Figura 1.39(b)).

Figura 1.39 | Projeção não perpendicular a um plano sobre o plano



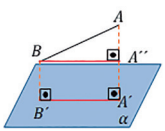
Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Vamos demonstrar na Figura 1.40 que a projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano sobre esse plano é menor do que o segmento.

Hipótese	Tese
$\overline{AB}$ oblíquo a α, $\overline{A'B'} = proj_{\alpha} \overline{AB}$	$\Rightarrow$ $\overline{A'B'} < \overline{AB}$

Figura 1.40 | Projeção de um segmento oblíquo a um plano sobre o plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Por *B* conduzimos uma reta paralela a $\overline{A'B'}$ que intercepta a reta projetante de *A* em A''. Perceba que o quadrilátero $B\,B'\,A'\,A''$ é um retângulo, assim: $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B}$. Além disso, o triângulo $A\,B\,A''$ é retângulo em A''. Dessa forma, o segmento $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo, então $\overline{A''B} < \overline{AB}$.

Portanto, como $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B}$, temos $\overline{A'B'} < \overline{AB}$.

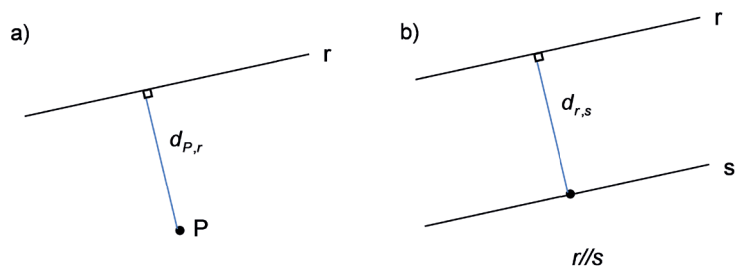
A geometria, tanto plana quanto espacial, fornece ferramentas para que distâncias entre objetos possam ser mensuradas. Veremos agora todas as opções de distâncias geométricas.

a) A distância entre dois pontos não é exclusiva da geometria espacial, pois também pode ser utilizada na plana. A distância entre dois pontos distintos *A* e *B* é chamada de segmento de reta $\overline{AB}$, sendo indicada por $d_{A,B}$. Se *A* = *B*, isso significa que a distância entre *A* e *B* é nula.

b) Distância entre um ponto e uma reta é a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto (Figura 1.41(a)). Indicamos por $d_{P,r}$. Veja que a definição da distância entre um ponto e uma reta não se aplica se considerarmos o ponto *P* e qualquer ponto da reta *r*, somente será válida para o ponto de *r* que é perpendicular à *P*.

c) Chamamos de distância entre duas retas paralelas à distância entre um ponto qualquer de uma delas à outra reta, quando os pontos são perpendiculares (Figura 1.41(b)). Indicamos por $d_{r,s}$.

Figura 1.41 | Distâncias geométricas: (a) ponto e reta, (b) retas paralelas



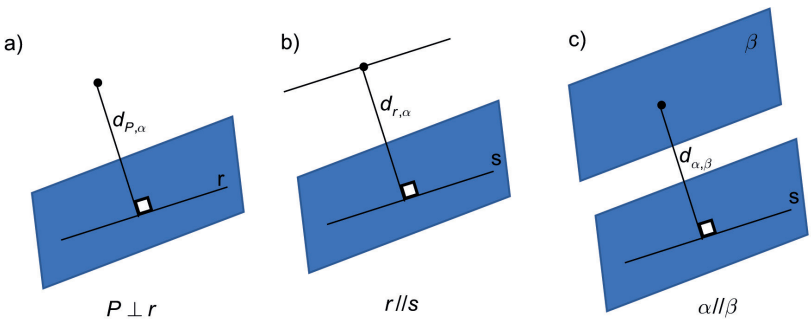
Fonte: elaborada pelo autor.

d) Os próximos itens são exclusivos da geometria espacial. A distância entre um ponto e o pé da perpendicular ao plano é chamada de distância entre ponto e plano e é indicada por $d_{P,\alpha}$ (Figura 1.42(a)). Perceba que existe somente um ponto na interseção do ponto *P* com o plano α, que resultará em um ângulo reto.

e) Chamamos de distância entre uma reta e um plano paralelos a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano, sendo indicada por $d_{r,\alpha}$ (Figura 1.42(b)).

f) Chamamos de distância entre dois planos paralelos a distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano, pois qualquer ponto tomado e o outro plano são equidistantes; indicamos por $d_{\alpha,\beta}$ (Figura 1.42(c)).

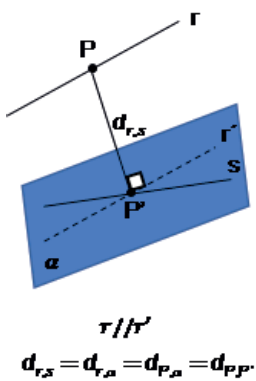
Figura 1.42 | Distância geométricas: (a) ponto e plano, (b) reta e plano, (c) planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor.

g) Chamamos de distância entre duas retas reversas a distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra reta e é paralelo à primeira reta. Na Figura 1.43, as retas *r* e *s* são reversas. Para calcular a distância $d_{r,s}$, precisamos tomar um plano α paralelo à reta *r* que contenha a reta *s* e uma reta *r'* paralela à *r*. Tomando um ponto *P* na reta *r*, e um ponto *P'*, paralelo a *P*, na reta *r'*, a distância entre os pontos é a distância entre as retas reversas *r* e *s* ($d_{r,s} = d_{P,P'}$).

Figura 1.43 | Distância entre retas reversas



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

O livro indicado a seguir apresenta de uma forma contínua e não muito complicada o universo da geometria analítica. Destacamos o capítulo 7, que trata do cálculo dessas distâncias usando a geometria analítica. Vale a pena conferir!

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Sem medo de errar

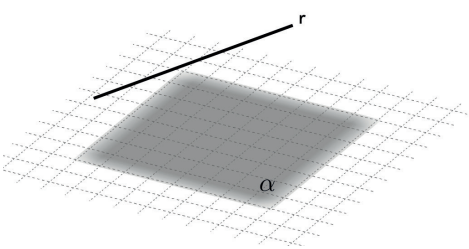
Olá, aluno!

Compreendeu a ortogonalidade e suas aplicações nas projeções e no cálculo das distâncias geométricas? No início desta seção, pedimos que você pensasse sobre como seria um ângulo formado por uma reta e um plano. E aí, será que conseguimos construir esse ângulo com régua e compasso?

O grande desafio é desenhar um ângulo entre uma reta e um plano (elementos da geometria espacial) em uma folha, que é um elemento plano, usando régua e compasso. Esse desafio é frequentemente confrontado pela computação gráfica, que trabalha com elementos tridimensionais (personagens, paisagens etc.), porém, tem que exibi-los em dispositivos bidimensionais (televisão, monitor, impressora etc.). Para resolver tal problema, devemos utilizar as projeções.

Vamos iniciar desenhando um plano α em uma folha, e uma reta oblíqua *r* fora do plano, conforme a Figura 1.44:

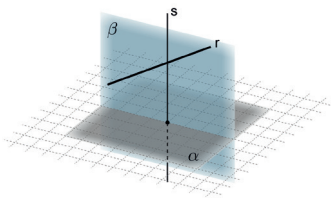
Figura 1.44 | Construção de um plano e uma reta fora do plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Nossos próximos passos são: (i) tomar um ponto *P* no plano α; (ii) traçar uma perpendicular a esse ponto (reta *s*); (iii) traçar pela perpendicular *s* um plano β que contenha a reta *r* e que, consequentemente, será perpendicular ao plano α, conforme a Figura 1.45:

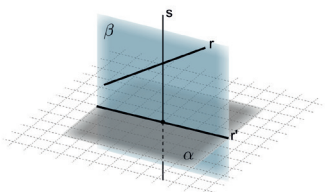
Figura 1.45 | Construção de um plano perpendicular a um plano dado



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, podemos fazer a projeção ortogonal da reta *r* no plano α, pois a projeção é a interseção dos planos α e β (reta *r'*). Veja a Figura 1.46:

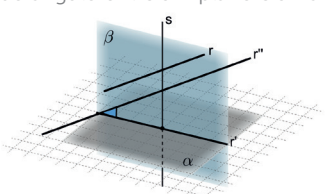
Figura 1.46 | Projeção ortogonal de uma reta em um plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, devemos escolher convenientemente uma paralela à reta *r* interceptando a reta *r'*, e formando um ângulo entre as duas retas. Tal ângulo é formado entre a reta *r* e o plano α. Acompanhe na Figura 1.47:

Figura 1.47 | Construção do ângulo entre um plano e uma reta fora do plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Não se esqueça de sintetizar sua construção em um plano de aula.

Avançando na prática

Distância entre um plano que passa pelo ponto médio de um segmento e as extremidades do segmento

Descrição da situação-problema

Vamos agora demonstrar o seguinte teorema: "Todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento é equidistante das extremidades do segmento". Neste caso, vale ressaltar que "equidistante" significa "que tem distância igual" (do grego *equi* = igual).

Resolução da situação-problema

Hipótese Tese

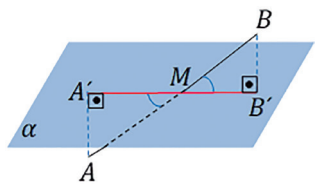
$\overline{AM} \equiv \overline{MB}, M \in \alpha \Rightarrow d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$

Temos três situações para este problema:

Se $\alpha \supset \overline{AB}$, então $\overline{AB} \subset \alpha$, e daí a distância $d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$ = distância nula. O símbolo $\supset$ significa "contém"; o símbolo $\subset$ significa "está contido".

Se $\overline{AB} \not\subset \alpha$ e α não é perpendicular a $\overline{AB}$, então procedemos como na Figura 1.48:

Figura 1.48 | Ângulo entre reta e plano



Fonte: elaborada pelo autor.

Conduzindo os segmentos AA' e BB' perpendiculares a α, sendo $A', B' \in \alpha$, observamos os triângulos $AA'M$ e $BB'M$. Percebemos, primeiramente, que esses triângulos são coplanares; além disso, eles são congruentes, pois:

- ângulo $A\widehat{A'}M \equiv B\widehat{B'}M$ (são retos);
- ângulo $A\widehat{M}A' \equiv B\widehat{M}B'$ (são opostos pelo vértice);
- segmento $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ (pois M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$).

Então, os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são iguais e, portanto, $d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$.

Por fim, a última situação seria se $\alpha \perp \overline{AB}$ por *M*. Neste caso, teríamos $d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$.

Faça valer a pena

1. Estudamos o que é a projeção ortogonal de alguns elementos matemáticos sobre um plano. Vale destacar que, em alguns casos, essa projeção ortogonal pode ser um ponto, uma reta ou uma figura. Tudo depende do ângulo que esse elemento forma com o plano.

Qual a afirmação correta em relação à projeção ortogonal?

a) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.

b) A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é sempre um segmento.

c) A projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano é sempre um triângulo.

d) Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.

e) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.

2. Ao longo deste tema, pudemos compreender também sobre a perpendicularidade entre duas retas, entre uma reta e um plano e entre dois planos. Vale destacar que esse estudo depende muito de retas.

Qual a alternativa correta acerca da perpendicularidade?

a) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.

b) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

c) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.

d) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.

e) Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.

3. Aprendemos nesta seção sobre a distância geométrica. É importante lembrar que a distância geométrica deve ser calculada sempre em relação a perpendiculares, ou seja, por exemplo, para calcularmos a distância entre uma reta e um plano, estes devem ser paralelos, e a partir de um ponto qualquer da reta, calculamos a distância ao plano desse ponto.

Sobre a distância geométrica, é correto afirmar:

a) A distância entre um ponto e um plano é a distância entre o ponto e qualquer ponto do plano.

b) A distância entre um ponto e o plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.

c) A distância de um ponto *P* ao plano α é a distância de *P* ao ponto P' de interseção de α com a reta *r*, perpendicular a α por *P*.

d) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta.

e) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e um ponto qualquer do plano.

Referências

DICIONÁRIO Aulete Digital. **Definições de geometria e espaço**. Rio de Janeiro: Lexikon Editora Digital, 2017. Disponível em: <http://www.aulete.com.br/>. Acesso em: 23 out. 2017.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar** – Geometria espacial: posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2005.

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de geometria espacial**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2018.

_____ **Fundamentos de geometria plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

NOBRE, S.R. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas:** uma proposta pedagógica. Belém: SBHMRT, 2009.

RIBEIRO, Ricardo Silva. **Geometrias não euclidianas:** uma proposta de ensino através da geometria dinâmica. 2013. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/79482>. Acesso em: 5 jan. 2018.

SACHS, Línlya. O quinto postulado de Euclides como história de problemas. **Hipátia:** Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, Campos do Jordão, v. 1, n. 1, p. 11-29, dez. 2016. Disponível em: <http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/437>. Acesso em: 5 jan. 2018.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Poliedros, prismas e pirâmides

Convite ao estudo

Caro aluno!

Seja bem-vindo a mais uma unidade de Geometria espacial.

Este campo da Matemática está sempre presente na vida cotidiana. Os poliedros, os prismas e as pirâmides podem ser vistos em diversos contextos, portanto, é muito importante que compreendamos de maneira significativa as suas definições e aplicações, a fim de que consigamos utilizá-las para realizar tarefas que necessitam do conhecimento acerca desses objetos matemáticos.

Com base nesse estudo, você será capaz de avaliar as formas geométricas reais e associá-las aos poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, bem como apropriar-se das propriedades destas para poder mensurar áreas e volumes.

Nosso aprendizado se dará por meio da resolução de um problema da empresa Autodesign, que é uma multinacional especializada em modelar e fabricar equipamentos para o setor automobilístico. Seu ramo visa à produção de equipamentos internos dos automóveis, como os *boxes* que encapsulam os circuitos elétricos, nos painéis dos automóveis. O gerente de produção não estava satisfeito com os atuais *boxes* produzidos, porque ocupavam muito espaço e não propiciavam a dissipação do calor de forma eficiente. Diante desse problema, a Autodesign decidiu contratar um profissional com conhecimentos de geometria espacial, a fim de colaborar na modelagem de um novo *boxe* para o sistema elétrico.

Após passar pelo processo seletivo com vários profissionais, você foi selecionado para integrar a equipe do projeto de

modelagem. Atribuiu-se a você a missão de pesquisar entre os poliedros, os prismas e as pirâmides qual seria o melhor modelo para encapsular o circuito elétrico.

Para realizar essa tarefa, seu chefe dividiu-a em três partes. Na primeira etapa, ele solicitou-lhe a elaboração de um documento com as definições e os elementos que compõem os poliedros e os prismas. Esse documento será divulgado para toda a equipe de engenheiros, assim eles terão conhecimento teórico de geometria espacial. Após isso, você deverá modelar um paralelepípedo e apresentar os cálculos da área e do volume do modelo. Por fim, você irá propor um modelo inovador para tal sistema, apresentando-o em forma de pirâmide. Este deverá ser acompanhado pelos cálculos da área e do volume, além da comparação entre o volume total de um cubo e uma pirâmide de mesma base. Essas informações ajudarão os engenheiros a decidir qual modelo pode encapsular melhor o circuito elétrico.

Para ajudar-lhe, na primeira seção, trataremos das definições dos poliedros e prismas, apresentando os poliedros convexos, a relação de Euler, os poliedros de Platão, os poliedros regulares, os prismas, os seus elementos e secções, a classificação dos prismas e também as suas diagonais. Em seguida, na segunda seção, trabalharemos os prismas especiais e suas propriedades, como as áreas e as medidas das diagonais do paralelepípedo reto-retângulo e do cubo, além dos volumes destes, da área lateral e total dos prismas, do Princípio de Cavalieri e do volume de um prisma. Por fim, na terceira seção, estudaremos as pirâmides, vendo suas definições, seus elementos, secções, a pirâmide regular e o tetraedro, o volume, a área lateral e total da pirâmide e, também, do tronco de pirâmide.

Desejamos que você consiga atingir um ótimo aprendizado de todos os conceitos. Bons estudos!

Seção 2.1

Definições e elementos de poliedros e prismas

Diálogo aberto

Caro aluno, bem-vindo à primeira seção desta nova unidade! Aprenderemos aqui elementos que são exclusivos da geometria espacial, e tais objetos são utilizados largamente em várias áreas que envolvem modelagem de objetos, por exemplo, aviação, construção civil, jogos de computadores, desenhos animados em três dimensões etc.

Nosso estudo nesta seção estará embasado em conhecer os poliedros e os prismas, bem como suas propriedades. Seu aprendizado será mediado pelo desenvolvimento do seu trabalho na empresa Autodesign. Tal empresa é uma referência na criação de peças de automóveis, e você foi contratado a fim de integrar a equipe de modelagem designada para elaborar um novo *boxe* para o circuito elétrico dos carros. Sua primeira missão na equipe da Autodesign é elaborar um documento com as definições e os elementos que compõem os poliedros e os prismas. Tal documento deve ser claro e bem estruturado, uma vez que será utilizado como referência teórica para o restante da equipe. Você poderá elaborar uma apresentação digital com ilustrações dos poliedros de Platão, dos poliedros regulares e dos prismas.

Para ajudar no seu trabalho, veremos nesta seção o que são os poliedros convexos e como se dá a relação de Euler. Também estudaremos os poliedros de Platão e os poliedros regulares. Finalizaremos a seção aprendendo sobre os prismas, vendo seus elementos e sua classificação.

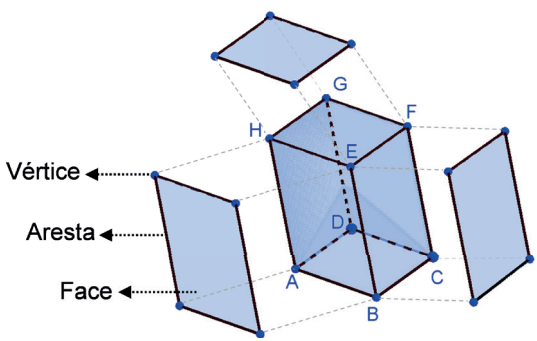
Não se esqueça de que seu empenho na leitura e no entendimento dos conceitos é crucial para que você possa desenvolver um documento de qualidade para toda a equipe da Autodesign. Bons estudos!

Não pode faltar

Na unidade anterior, você aprendeu que, quando tratamos de geometria espacial, além de ângulos entre retas, existem ângulos entre planos ou semiplanos. Vimos que há um diedro quando dois semiplanos possuem uma reta em comum. A ideia de diedro pode ser estendida agora, considerando *n* semiespaços: "nessas condições, ficam determinados *n* semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespaços é chamada poliedro convexo" (DOLCE; POMPEO, 2001, p. 130).

A palavra "poli" vem do grego *polys*, que significa "muito" ou "vários", e "edro" também vem do grego *hedra*, que quer dizer "face". Poliedro é, então, a figura de muitas faces. Assim como os polígonos são nomeados pelo seu número de lados, os poliedros são classificados pelo número de faces. Estudaremos isso mais adiante. Veja, na Figura 2.1, que se desmontarmos um poliedro, teremos na verdade um conjunto de *n* polígonos, consequentemente, os elementos de uma superfície poliédrica são: faces (polígonos), arestas, vértices e ângulos.

Figura 2.1 | Poliedro formado por *n* polígonos

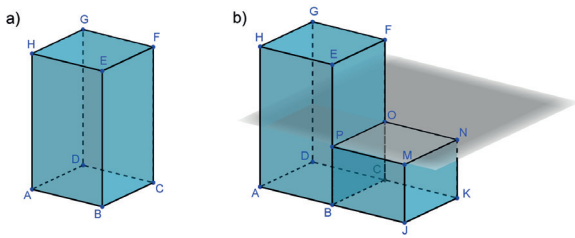


Fonte: elaborada pelas autoras.

Os poliedros podem ser classificados em convexos e não convexos (Figura 2.2). Nosso estudo se concentrará nos poliedros convexos. Para isso, temos que saber que uma superfície poliédrica convexa é formada por um número finito de polígonos planos e convexos, de forma que:

a) Dois polígonos não estão no mesmo plano.
b) Cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos.
c) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno.
d) O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade). (DOLCE; POMPEO, 2001, p. 123)

Figura 2.2 | Exemplos de poliedros: convexo (a) e não convexo (b)



Fonte: elaborada pelas autoras.

Observando a Figura 2.2(b), percebemos que a aresta $\overline{OP}$ faz parte dos polígonos formados pelos vértices *MNOP*, *BCOP* e *BCEF*, não satisfazendo o item *b* às condições para um poliedro ser convexo. Além disso, se tomarmos um plano coincidente com o polígono *MNOP*, tal plano divide o polígono *BCEF* em dois semiespaços, não satisfazendo o item *d*. Portanto, um poliedro convexo possui um número finito n $(n \geq 4)$ de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas).

Podemos verificar a congruência entre poliedros, estabelecendo uma correspondência entre os elementos de cada um deles. Tais objetos serão congruentes se, e somente se, for possível estabelecer correspondências entre seus elementos, de maneira que as faces e os ângulos de um poliedro sejam congruentes ao do outro.

O matemático Leonhard Euler criou uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de qualquer poliedro convexo. Tal relação nos permite determinar a quantidade de elementos que formam um poliedro:

$$V - A + F = 2,$$

em que V é o número de vértices, *A* o número de arestas e *F* o de faces.

Assimile

Demonstração

Considerando um polígono plano (duas dimensões), podemos provar, por indução finita referente ao número de faces: $V_a + A_a + F_a = 1$.

i) Considere, para os números de faces, o valor 1 ($F_a = 1$). Assim, a superfície fica reduzida a um polígono plano convexo com *n* lados. Em outras palavras, $V_a = n$ e $A_a = n$. Assim:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1.$$

Portanto, para $F_a = 1$, a relação está verificada.

ii) Considerando que a relação é verdadeira para uma superfície de F' faces e que possui V' vértices e A' arestas, provaremos que também vale para uma superfície de $F' + 1 = F$ a relação: $V' - A' + F' = 1$.

Se acrescentarmos uma face de *p* arestas e considerarmos que *q* destas arestas coincidem com as já existentes, obteremos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices, tais que:

$$F_a = F' + 1$$
$$A_a = A' + p - q \qquad (\text{q arestas que coincidem})$$
$$V_a = V' + p - (q + 1) \qquad (\text{q + 1 vértices coincidem})$$

Vamos considerar a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituir os valores pelas igualdades que obtivemos. Logo:

$$V_a - A_a + F_a = \underbrace{V' + p - (q+1)}_{V_a} - \underbrace{(A' + p - q)}_{A_a} + \underbrace{(F' + 1)}_{F_a}$$
$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1$$
$$= V' - A' + F$$

Assim, com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$, provamos que a expressão não se altera quando acrescentamos uma face à superfície. O mesmo fato vale se retirarmos uma face.

Agora, vamos partir para a segunda parte. Dado um poliedro convexo regular (com V vértices, A arestas e F faces). Se retirarmos uma de suas faces, ficaremos com uma superfície aberta com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces, para a qual vale a relação já demonstrada $V_a - A_a + F_a = 1$. Fazendo as seguintes equivalências:

$V_a = V, A_a = A, F_a = F - 1$, obtemos:

$V - A + (F - 1) = 1 \Rightarrow V - A + F = 2$. Dessa maneira, provamos a relação de Euler para os poliedros.

Os poliedros que satisfazem à relação de Euler são chamados de poliedros eulerianos. Tal relação vale para os convexos e não convexos. Devemos ainda ressaltar que todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo euleriano é convexo.

Exemplificando

Determine o número de faces de um poliedro convexo com 9 vértices, sabendo que de 4 vértices partem 3 arestas, e dos outros 5 vértices partem 4 arestas.

Solução:

Os vértices de 3 arestas cada um têm $4 \cdot 3 = 12$ arestas.

Os vértices de 4 arestas cada um têm $5 \cdot 4 = 20$ arestas.

Como as arestas são comuns a 2 vértices, elas foram contadas em dobro. Assim, o número de arestas é:

$$A = (12 + 20) \div 2$$
$$A = 16$$

E usamos a relação de Euler para calcular o número de faces:

$$V - A + F = 2$$
$$9 - 16 + F = 2$$
$$F = 9$$

(Adaptada de FILHO; SILVA, 2000).

Como já sabemos como identificar um poliedro pelas suas características e calcular seus elementos por meio da relação de Euler, iremos classificá-los. Alguns poliedros são chamados de poliedros de Platão, ou ainda, sólidos de Platão. Para que receba tal classificação, um poliedro deve obedecer às seguintes condições:

> **a) "Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.**
> **b) Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas,**
> **c) Vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$)" (DOLCE; POMPEO, 2001, p. 130).**

Os poliedros de Platão são divididos em cinco classes, veja a demonstração:

Demonstração

a) De acordo com o item (a) das condições necessárias para se classificar um poliedro como de Platão, temos que cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e como cada aresta está em 2 faces, deduzimos que:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \qquad (1)$$

b) Cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geq 3$), e como cada aresta tem 2 vértices:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \qquad (2)$$

c) $V - A + F = 2 \qquad (3)$

Substituindo (1) e (2) em (3), e depois dividindo por $2A$, temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad (4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. No entanto, se tivéssemos valores maiores do que 3 para m e n ao mesmo tempo, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

Isso contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo. Assim, nos poliedros de Platão, nunca teremos simultaneamente n e m maiores do que 3. Portanto, um poliedro de Platão possui, de forma obrigatória, um triedro ou um triângulo:

I) Para $m = 3$ (com a suposição de que há triedro).

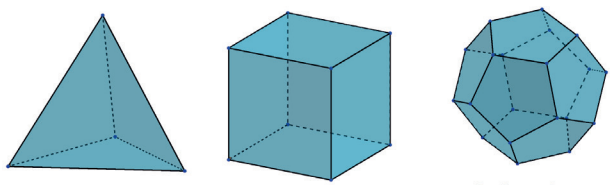
Em (4), temos:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

m	n
3	3
3	4
3	5

Concluímos que, para os poliedros com triedro, as arestas de cada face podem ser: $n = 3$ *ou* $n = 4$ *ou* $n = 5$, *ou seja*, faces triangulares, quadrangulares ou pentagonais. Na Figura 2.3, estão representados os sólidos de Platão para $m = 3$. Perceba que, independentemente do ângulo que você escolher para analisar, ele é formado partindo de 3 arestas.

Figura 2.3 | Sólidos de Platão com faces triangulares, quadrangulares e pentagonais



Fonte: elaborada pelas autoras.

II) Para $n = 3$ (com a suposição de que há triângulo).

Em (4), temos:

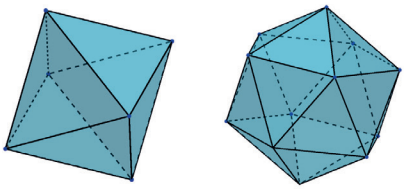
$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$$

m	n
3	3
4	3
5	3

Concluímos que, para os poliedros com triângulo nas faces, cada ângulo pode ser formado por: $m = 3$ *ou* $m = 4$ *ou* $m = 5$ arestas, ou seja, ângulos triédricos, tetraédricos ou pentaédricos.

Na Figura 2.4, estão representados os sólidos de Platão para $n = 3$. Perceba que são mostrados apenas dois sólidos, embora três se apliquem às condições. O terceiro sólido que se encaixaria é o tetraedro, o qual aparece na Figura 2.3, porque esse é comum aos sólidos, quando $m = 3$.

Figura 2.4 | Sólidos de Platão com ângulos tetraédicos e pentaédricos



Fonte: elaborada pelas autoras.

Encerrando a classificação dos poliedros de Platão, para sabermos o número de arestas, faces e vértices de cada poliedro de Platão, substituímos em (4) os valores de m e n que encontramos e depois trabalhamos com (1) e (2).

Os poliedros de Platão podem ser resumidos, conforme a Tabela 2.1:

Tabela 2.1 | Poliedros de Platão

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Fonte: elaborada pelas autoras.

Quando os poliedros de Platão possuem suas faces formadas por polígonos regulares e ângulos poliédricos congruentes, esses poliedros são ditos regulares.

Existem apenas 5 tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

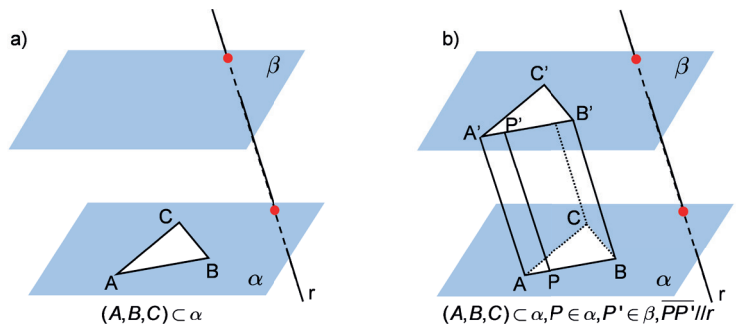
Reflita

Todo poliedro é formado pela intersecção de polígonos. Quando esses polígonos são regulares, dizemos que o poliedro, também, é regular. Podemos afirmar que todo poliedro de Platão é um poliedro regular? E o contrário: todo poliedro regular é um poliedro de Platão?

Prismas, seus elementos e suas secções

Consideremos um polígono convexo *ABC* situado em um plano α e uma reta *r* secante ao plano α (Figura 2.5). Para cada ponto pertencente ao polígono *ABC*, existe um segmento de reta saindo do ponto *P*, paralelo à reta *r*, que encontra um plano β em um ponto *P'*. O conjunto de todos esses segmentos denomina-se prisma.

Figura 2.5 | Representação gráfica da definição de um prisma



Fonte: elaborada pelas autoras.

Observe, na Figura 2.5, que o conjunto dos *P'*, no plano β, forma um polígono $\overline{A'B'C'}$ congruente ao polígono *ABC* que está contido no plano α. Com base no prisma formado, podemos definir seus elementos:

- Todo prisma possui 2 bases congruentes ($\overline{ABC} \cong \overline{A'B'C'}$);
- *n* faces laterais;
- *n* + 2 faces, pois, além das laterais, tem as faces das bases;
- *n* arestas laterais;
- 3*n* arestas, 3*n* diedros, 2*n* vértices e 2*n* triedros;
- altura, distância entre os planos que contêm as duas bases.

Vamos identificar tais elementos no prisma da Figura 2.6.

Faces = 4 laterais + 2 bases;

arestas = 4 laterais + 8 arestas das bases;

vértices = 8 (*A,B,C,D,E,F*);

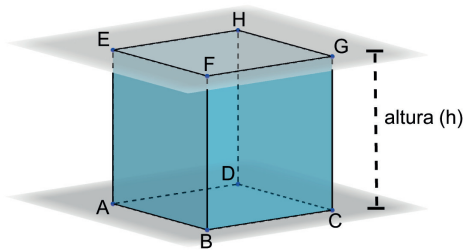
diedros = 12, pois cada aresta é a interseção entre dois planos;

triedros = 8, pois cada vértice é a interseção entre três planos;

altura = *h*.

Para qualquer prisma, a relação de Euler é válida: $V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$.

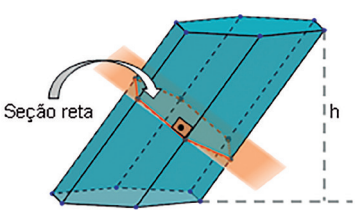
Figura 2.6 | Prisma quadrangular



Fonte: elaborada pelas autoras.

Além dos elementos essenciais da composição do prisma, existem as suas seções. "Uma seção é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as suas arestas laterais" (DOLCE; POMPEO, 2001, p. 146). Essa interseção forma um polígono que possui seus vértices localizados nas arestas laterais do prisma. Veja, na Figura 2.7, que a seção possui seus vértices nas arestas do prisma, e, além disso, forma um ângulo reto nessa interseção. Neste caso, diz-se que a seção é reta ou normal.

Figura 2.7 | Seção reta de um prisma



Fonte: elaborada pelas autoras.

Reflita

Seção é a intercepção de um plano com um prisma, na qual os vértices do polígono interceptam as arestas do prisma. Quando essa interseção forma um ângulo reto, diz-se que a seção é reta ou normal. E se o prisma for reto, podemos afirmar que a seção é paralela aos planos das bases?

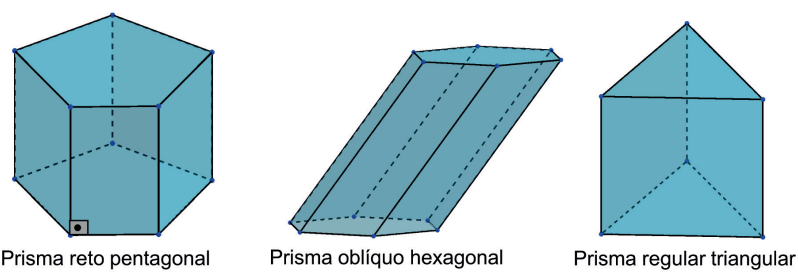
Podemos analisar a superfície de um prisma considerando somente a superfície lateral, que é a reunião de todas as faces laterais, ou ainda, a superfície total, que engloba, além das laterais, as bases.

Os prismas são classificados em três grupos (Figura 2.8):

- Prisma reto: quando suas arestas formam um ângulo reto com a base.
- Prisma oblíquo: quando suas arestas formam um ângulo diferente do reto com a base.
- Prisma regular: quando os polígonos das bases são regulares.

A classificação além desses grupos depende do número de arestas nos polígonos das bases. Se possuir 3 arestas, será um prisma triangular; se possuir 4 arestas, será um prisma quadrangular; se possuir 5 arestas, será um prisma pentagonal, e assim por diante.

Figura 2.8 | Exemplos de classificação de prismas

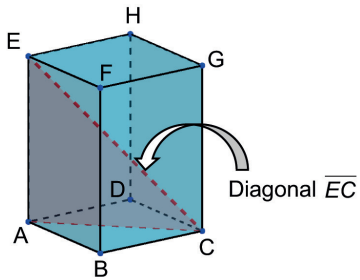


Fonte: elaborada pelas autoras.

O último elemento que veremos a respeito da composição de um prisma é a diagonal. Quando tratamos das diagonais de um prisma, não consideramos as diagonais das bases e das faces laterais.

Assim, sendo um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados, se unirmos um vértice de uma base aos vértices da outra base, teremos $(n - 3)$ diagonais – eliminamos 2 diagonais de face e 1 aresta. Portanto, como há n vértices na base que consideramos, o número total de diagonais do prisma é $\boldsymbol{n(n-3)}$. Na Figura 2.9, temos um prisma reto quadrangular, portanto $n = 4$. O vértice E forma 1 diagonal com o vértice da base oposta $(n - 3)$, e o total de diagonais desse prisma é 4.

Figura 2.9 | Diagonais de um prisma reto quadrangular



Fonte: elaborada pelas autoras.

Pesquise mais

Para aprofundar os conhecimentos adquiridos nesta seção e se preparar para os próximos, assista ao vídeo indicado a seguir e aproveite para solucionar as suas dúvidas.

PROCÓPIO, Rafael. Prismas – Área da superfície e volume. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=KYurjejHU_w>. Acesso em: 27 jan. 2018. (Vídeo do Youtube)

Sem medo de errar

Caro aluno, agora que você conhece os poliedros e os prismas, chegou o momento de preparar seu documento para que toda a equipe da Autodesign tenha acesso.

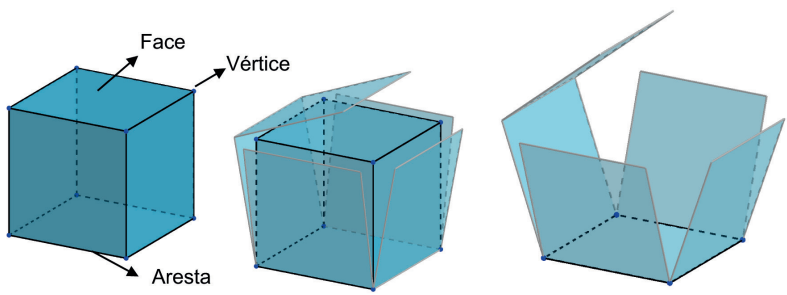
Como ferramenta para elaboração do material, você pode utilizar o editor de apresentação da suíte de aplicativos LibreOffice. Este *software* é gratuito e está disponível para *download* no endereço: <https://pt-br.libreoffice.org/>. Acesso em: 27 jan. 2018.

Existe outra opção para preparar apresentações digitais: o *software* chamado Prezi, que está disponível para teste, porém depois é necessário adquirir sua licença de uso. Esse programa permite apresentações personalizadas e modernas, e o seu site oficial é: <https://prezi.com/>. Acesso em: 27 jan. 2018.

Há ainda a plataforma WordPress, disponível em: <https://br.wordpress.org/>, acesso em: 27 jan. 2018, que serve para a construção e a divulgação do documento online. Essa ferramenta permite a criação de *sites* de maneira simples.

Após escolher o *software* que você usará para a construção do material de apoio, será o momento de organizar o conteúdo. Em primeiro lugar, é preciso que você defina os poliedros e apresente seus principais elementos. Uma imagem como a Figura 2.10 pode ajudar a esclarecer que um poliedro é formado pela interseção de *n* polígonos objetos da geometria plana.

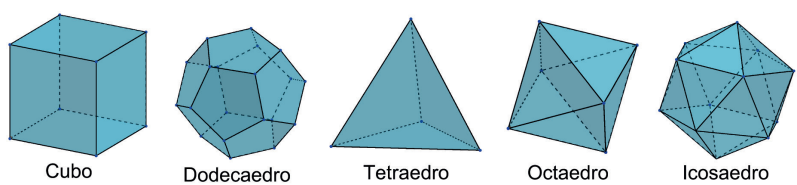
Figura 2.10 | Planificação de um poliedro



Fonte: elaborada pelas autoras.

Após apresentar os elementos de um poliedro, você deve mostrar as cinco classes dos poliedros de Platão, usando uma imagem como a Figura 2.11, sendo os 3 últimos poliedros com faces triangulares.

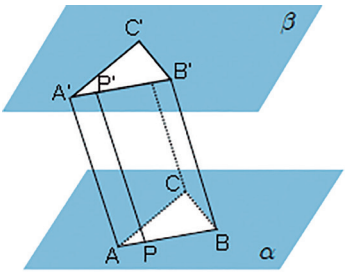
Figura 2.11 | Poliedros de Platão



Fonte: elaborada pelas autoras.

Seu próximo passo é formalizar a definição de prisma, que é um poliedro. Você pode utilizar uma imagem como a Figura 2.12 para explicar a definição.

Figura 2.12 | Construção de um prisma

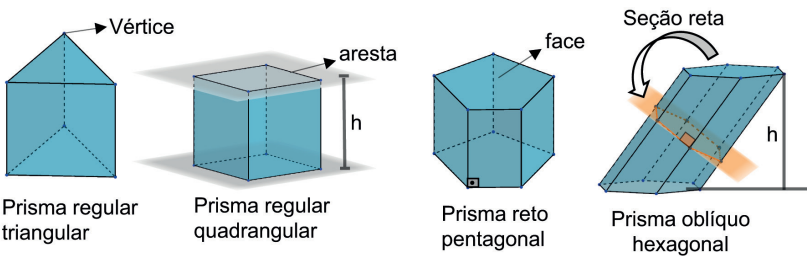


Fonte: elaborada pelas autoras.

Por fim, você deve apresentar os elementos de um prisma e como os prismas podem ser classificados de acordo com o polígono da base. Uma imagem como a Figura 2.13 pode ser usada para ilustrar.

- Todo prisma possui 2 bases congruentes;
- n faces laterais;
- $n + 2$ faces;
- n arestas laterais;
- $3n$ arestas, $3n$ diedros, $2n$ vértices e $2n$ triedros;
- altura (h);
- seção.

Figura 2.13 | Prismas e seus elementos



Fonte: elaborada pelas autoras.

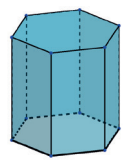
Avançando na prática

Aplicação de geometria espacial na construção civil

Descrição da situação-problema

Na construção civil, os engenheiros contam com duas técnicas: a alvenaria convencional, na qual a construção é feita por vigas e pilares, e a alvenaria estrutural, na qual ela é baseada em blocos pré-moldados. A equipe responsável por elaborar os blocos pré-moldados para a alvenaria estrutural é composta por engenheiros, arquitetos e outros profissionais de áreas afins. Você, como profissional que conhece geometria espacial, foi designado para trabalhar com a equipe de modelagem dos blocos pré-moldados, sendo a sua tarefa a de calcular a quantidade de cortes que a peça da Figura 2.14 poderia ter, levando em conta que os cortes serão feitos na diagonal da peça.

Figura 2.14 | Bloco pré-moldado para construção civil

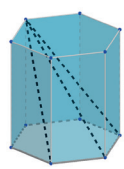


Fonte: elaborada pelas autoras.

Resolução da situação-problema

O bloco a ser utilizado é um prisma regular hexagonal, portanto sua base tem 6 arestas. A quantidade total de diagonais de um prisma é $n(n - 3)$, logo o bloco possui $6(6 - 3) = 18$ diagonais. Podemos escolher qualquer um dos vértices para iniciar o corte, uma vez que a base é um polígono regular. A quantidade de cortes está relacionada à de diagonais, então teremos 3 cortes possíveis para a peça, pois cada aresta possui $(n - 3)$ diagonais. A Figura 2.15 mostra as diagonais que marcariam o corte da peça pré-moldada.

Figura 2.15 | Diagonais de uma peça hexagonal



Fonte: elaborada pelas autoras.

Faça valer a pena

1. Poliedros são sólidos limitados por 4 ou mais faces planas e poligonais. Um poliedro é convexo quando:

> • Duas a duas de suas faces poligonais não são coplanares.
> • Cada lado da face poligonal é comum a duas, e somente duas, faces poligonais.
> • O plano que contém cada face poligonal divide o espaço de tal forma que todas as outras faces poligonais ficam num único semiespaço. (FILHO; SILVA, 2000, p. 470).

Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 2 faces quadrangulares e 8 faces triangulares.

a) 8 b) 24 c) 4 d) 10 e) 16

2. A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler é muito importante na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos.

De acordo com a relação de Euler, para todo poliedro convexo é válida a seguinte expressão:

$$V - A + F = 2,$$

na qual V é o número de vértices, A o número de arestas e F o de faces.

Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces tem de cada tipo, se a soma dos ângulos das faces é de 32 ângulos retos?

a) 1 quadrangular e 6 pentagonais.
b) 2 quadrangulares e 5 pentagonais.
c) 5 quadrangulares e 2 pentagonais.
d) 6 quadrangulares e 1 pentagonal.
e) 3 quadrangulares e 4 pentagonais.

3. O prisma é um sólido geométrico que faz parte dos estudos de geometria espacial.

É caracterizado por ser um poliedro convexo com 2 bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos).

Os elementos que compõem o prisma são: base, altura, arestas, vértices e faces laterais.

A prova de que a soma dos ângulos de todas as faces de um prisma de n faces laterais vale $S = (n-1)\cdot 4r$, em que $r = 90^\circ$, é verdadeira?

a) É falsa, pois vale $S = (n-1)\cdot 3r$.
b) É falsa, pois vale $S = (n-1)\cdot r$.
c) Sim, é verdadeira.
d) É falsa, pois vale $S = (n-1)\cdot 8r$.
e) É falsa, pois vale $S = (n-1)\cdot 9r$.

Seção 2.2

Prismas especiais e propriedades

Diálogo aberto

Caro aluno(a), bem-vindo a mais uma seção no estudo da geometria espacial. Nesta seção, daremos continuidade ao estudo dos sólidos geométricos, conhecendo alguns tipos de prismas especiais, bem como veremos como mensurar a área e o volume desses sólidos.

Existem vários itens do nosso dia a dia que são medidos por volume. Você já comprou uma caixa de suco de 350 ou 500 *ml*? E pedra ou areia, em uma loja de material de construção, em metros cúbicos? Ou, ainda, adquiriu uma piscina ou caixa d'água em litros cúbicos? Afinal, o que essas medidas significam? Com o nosso estudo, você entenderá o que significam o volume e a área de sólidos geométricos.

Dando continuidade ao seu trabalho na Autodesign, nessa etapa do projeto, você deverá apresentar um modelo para o *box* em forma de paralelepípedo. Esse modelo requer o cálculo da área e do volume desse prisma, pois tal informação ajudará o gerente da Autodesign a quantificar o espaço necessário para o *boxe*, além de verificar se é suficiente para encapsular o mecanismo. Apresente seu modelo em um desenho feito com lápis e papel, porque, somente depois de aprovado, será modelado computacionalmente.

Para a execução da segunda etapa do projeto, você aprenderá mais sobre a classificação dos prismas, conhecendo alguns tipos especiais. Saberá como medir a diagonal de um prisma, bem como sua área e seu volume. Quantificar o volume de qualquer prisma só é possível graças ao trabalho do matemático Cavalieri, que você conhecerá em breve.

Bons estudos!

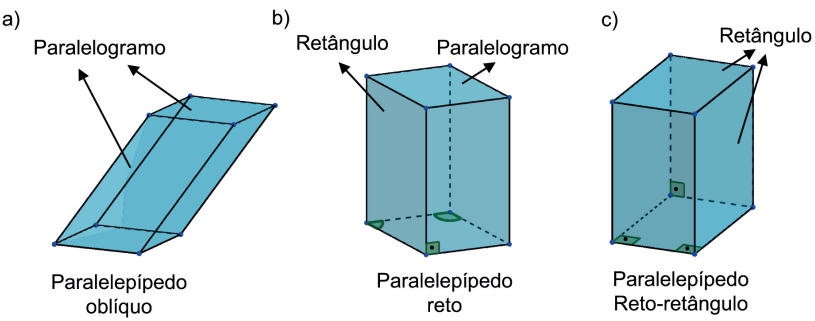
Não pode faltar

Classificação de prismas especiais

Como vimos na seção anterior, a natureza de um prisma depende do polígono da base, podendo formar prismas triangulares, quadrangulares etc. Considere um prisma cuja base possui quatro arestas, ou seja, um prisma quadrangular. Se esse polígono da base for um paralelogramo, teremos um prisma especial chamado paralelepípedo. "Um prisma é um paralelepípedo se sua base é um paralelogramo. Neste caso é fácil de verificar que todas as faces também são paralelogramos" (MACHADO, 2013, p. 80).

Sendo o paralelepípedo um prisma, este é oblíquo, quando as arestas laterais não fazem um ângulo reto com a base (Figura 2.16 (a)); reto, quando as arestas laterais formam um ângulo reto com a base (Figura 2.16 (b)), ou, ainda, reto-retângulo (também chamado de retângulo ou ortoedro). Neste último caso, além de as arestas laterais fazerem um ângulo reto, a base é um paralelogramo, com arestas formando ângulos retos (Figura 2.16 (c)).

Figura 2.16 | Classificação do paralelepípedo



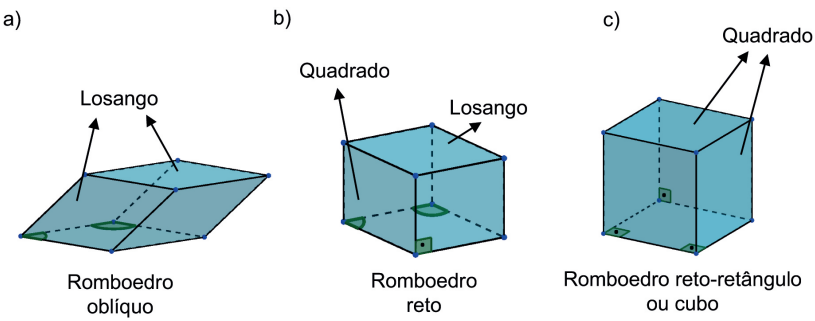
Fonte: elaborada pelas autoras.

Reflita

Os paralelepípedos são tipos especiais de prisma formados por paralelogramos. Quanto é a soma dos ângulos das faces de um paralelepípedo?

Se o paralelepípedo tiver todas arestas congruentes, ainda receberá uma nova nomenclatura, sendo chamado de romboedro. "Romboedro é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si" (DOLCE; POMPEO, 2001, p. 149). Dessa forma, podemos concluir que um romboedro sempre será formado por losangos ou quadrados. Dependendo do ângulo entre as arestas da base e das faces, ele é classificado como oblíquo, quando os ângulos entre as arestas das bases e das faces não são retos (Figura 2.17 (a)), ou como reto, quando os ângulos entre as arestas das bases e das faces são retos (Figura 2.17 (b)), ou, ainda, como reto-retângulo ou cubo, quando, além das arestas entre bases e faces, as arestas das bases também são retas entre si (Figura 2.17 (c)).

Figura 2.17 | Classificação do romboedro



Fonte: elaborada pelas autoras.

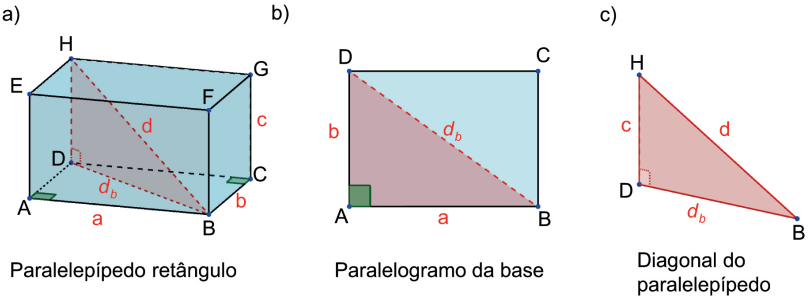
Medida da diagonal de um paralelepípedo

Aprenderemos agora como medir as diagonais do paralelepípedo reto-retângulo e do cubo. Todo prisma possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais distintas (sendo n o número de arestas da base), além das diagonais das bases e das faces. Um paralelepípedo tem 4 arestas nas bases, portanto possui 2 diagonais distintas.

Na Figura 2.18, a diagonal d é a diagonal do paralelepípedo retângulo, e d_b é a diagonal da base. Veja que a diagonal da base está diretamente associada ao cálculo da diagonal do prisma e vice-versa, e essa diagonal divide a base em dois triângulos congruentes (Figura 2.18 (b)). A secção diagonal do prisma, além de dividi-lo em

dois poliedros congruentes, forma um triângulo, usando uma das arestas do paralelepípedo e a diagonal da base (Figura 2.18 (c)).

Figura 2.18 | Diagonal do paralelepípedo retângulo



Fonte: elaborada pelas autoras.

Vamos começar calculando a diagonal da base. Na Figura 2.18 (b), fica evidente que tal diagonal é a hipotenusa do triângulo *ABD*, portanto a diagonal da base é dada por: $d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$. Agora, definiremos como calcular a diagonal das outras duas faces do paralelepípedo. A face frontal é formada pelo paralelogramo *ABFE*; traçando a diagonal $\overline{EB}$, tal quadrilátero será dividido em dois triângulos.

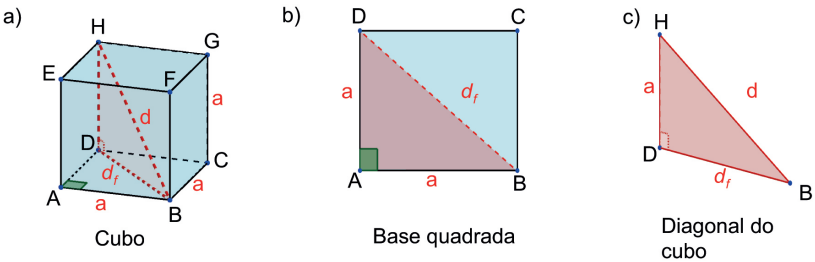
Considerando o triângulo *ABE*, temos que a diagonal da face frontal (d_{f1}) é dada por: $d_{f1} = \sqrt{a^2 + c^2}$ (tal face e tal diagonal são congruentes ao polígono *DCGH*). Já uma das faces laterais é formada pelo paralelogramo *BCGF*, portanto a diagonal dessa face é: $d_{f2} = \sqrt{b^2 + c^2}$ (tal face e tal diagonal são congruentes à outra face lateral *ADHE*).

Como as diagonais de todas as faces foram determinadas, veremos como se calcula a diagonal do prisma. Ao traçarmos a diagonal *d* no paralelepípedo da Figura 2.18, criamos o triângulo *DBH* (Figura 2.18 (c)), que tem como hipotenusa a diagonal do prisma, e como catetos a diagonal da base e uma das arestas, portanto a diagonal *d* é dada por: $d = \sqrt{{d_b}^2 + c^2}$.

Já vimos, porém, que a diagonal da base é calculada em termos dos lados *a*-*b*, portanto, fazendo a substituição de d_b, descobrimos que a diagonal *d* pode ser obtida por: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Com essa fórmula, conseguimos calcular a diagonal do paralelepípedo por meio dos valores das arestas.

A lógica para calcular a diagonal do cubo é análoga à do paralelepípedo retângulo, contudo, neste caso, todas as arestas apresentam o mesmo tamanho (Figura 2.19 (a)), assim, todas as diagonais das faces têm a mesma medida calculada por: $d_f^{\,2} = a^2 + a^2 \Rightarrow d_f = a\sqrt{2}$ (Figura 2.19 (b)). Por fim, a diagonal do cubo forma o triângulo *DBH* (Figura 2.19 (c)), e a diagonal *d* é: $d^2 = d_f^{\,2} + a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}$.

Figura 2.19 | Diagonal do cubo

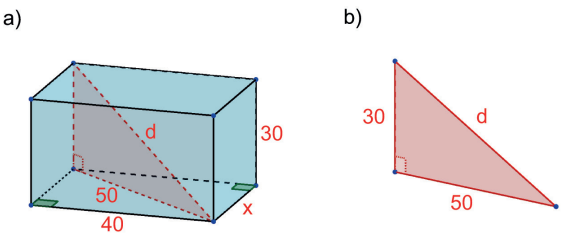


Fonte: elaborada pelas autoras.

Exemplificando

Considere uma peça modelada em forma de paralelepípedo com bases medindo 40 *cm* de comprimento, *x* de largura, e altura 30 *cm* (Figura 2.20). Tal peça precisa ser particionada na diagonal para que a impressora 3d consiga imprimir. Sabendo que a diagonal da base mede 50 *cm*, qual será o tamanho do corte feito na peça?

Figura 2.20 | Peça moldada



Fonte: elaborada pelas autoras.

Como não temos um dos valores das arestas da base, mas apenas o valor da diagonal da base, podemos calcular usando essas informações:

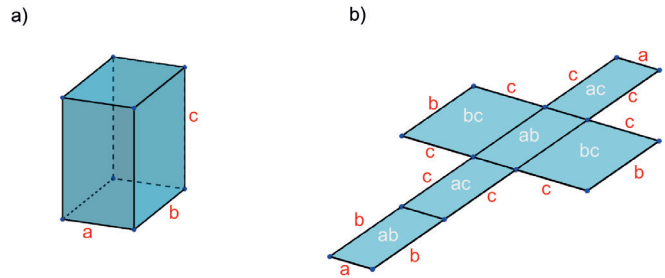
$$d = \sqrt{d_b^{\,2} + c^2} \Rightarrow d = \sqrt{50^2 + 30^2} \Rightarrow d = \sqrt{3400}.$$

Cálculo da área da superfície de um prisma

A área da superfície de um prisma será dada pela soma das áreas das superfícies dos polígonos que formam o prisma, portanto a área de um paralelepípedo reto-retângulo é a soma das áreas de 6 retângulos (Figura 2.21). No paralelepípedo reto-retângulo, os retângulos são congruentes 2 a 2 (2 bases + 2 faces laterais + 2 faces frontais), então para calcular sua superfície (S), devemos obter a área de 3 retângulos e dobrar o valor da área obtido. Logo, a área total do paralelepípedo reto-retângulo é:

$$S = 2ab + 2bc + 2ac \quad \Rightarrow \quad S = 2(ab + bc + ac).$$

Figura 2.21 | Área da superfície de um paralelepípedo retângulo



Fonte: elaborada pelas autoras.

De forma análoga, a área da superfície de um cubo é dada pela soma das áreas dos 6 quadrados. Logo,

$$S = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 \quad \Rightarrow \quad S = 6a^2.$$

E se o prisma não for um paralelepípedo reto-retângulo ou um cubo, como pode ser calculada a área da superfície? O princípio para o cálculo é o mesmo utilizado no paralelepípedo retângulo e no cubo, basta somarmos a área dos polígonos das faces, a qual chamaremos de área lateral (A_ℓ), com a área dos polígonos das bases, a qual denominaremos 2B. Vamos analisar as particularidades:

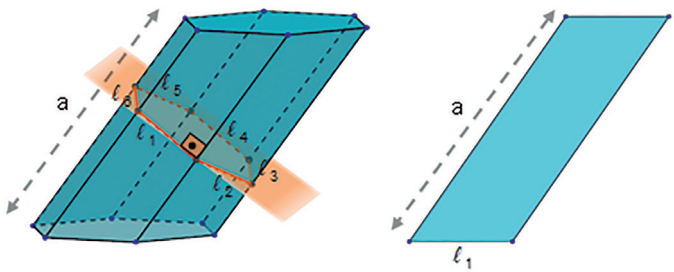
a) Área lateral e área total de um prisma oblíquo (Figura 2.22):

Para calcular a área lateral de um prisma oblíquo, temos que saber a medida de cada lado (ℓ) da seção reta desse prisma. A soma das arestas da seção reta é a medida do perímetro da seção reta, o qual denotaremos por *p*. Portanto, tem-se: $p = \ell_1 + ... + \ell_n$. Atenção: alguns autores utilizam a notação 2p para indicar o perímetro.

Cada face do prisma é um paralelogramo com arestas (a) e (ℓ), logo a área lateral do prisma (A_ℓ) é a soma das *n* áreas dos paralelogramos das faces, ou seja, o perímetro da seção reta multiplicado pela aresta lateral: $A_\ell = pa$.

Para a área total, soma-se o valor da área lateral com o das áreas das bases, obtendo-se: $A_t = pa + 2B$, em que *B* representa a área da base, que será calculada de acordo com o polígono correspondente aprendido em geometria plana (FREZZA; DIAS, 2017).

Figura 2.22 | Área de um prisma oblíquo



Fonte: elaborada pelas autoras.

b) Área lateral e área total de um prisma reto (Figura 2.23 (a)):

Como se trata de um prisma reto, a seção reta é paralela à base, portanto a soma das arestas da base é o perímetro do prisma. Além do perímetro, outra particularidade que tiramos de um prisma reto é sua altura (h), pois esse é o próprio valor da aresta lateral. Logo, temos: $p = \ell_1 + ... + \ell_n$ e $h = a$.

Concluímos que a área lateral (A_ℓ) de um prisma reto é: $A_\ell = ph$, e a área total é: $A_t = ph + 2B$.

c) Área lateral e área total de um prisma reto regular (Figura 2.23 (b)):

Neste caso, as particularidades já discutidas para o prisma reto também se aplicam ao prisma regular ($A_\ell = ph$), e ainda o polígono da base é regular, portanto a área da base é a soma dos *n* triângulos isósceles de base (ℓ), lados *c* e altura (apótema) *m*.

Vamos demonstrar que a área das bases é igual a: $2B = pm$, em que *p* é o perímetro da base, e *m* é a altura do triângulo equilátero (ou apótema).

Demonstração:

Da geometria plana, sabemos que a área de um polígono regular é obtida por:

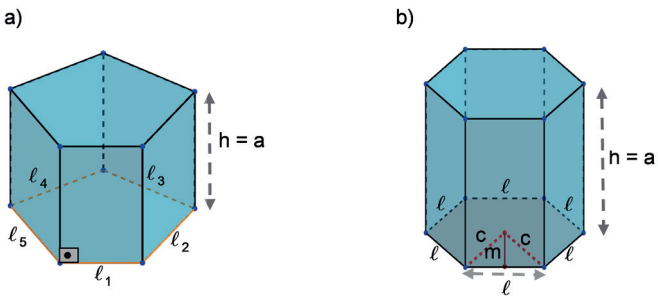
$A = n\left(\frac{\ell m}{2}\right) \Rightarrow A = \frac{(n\ell)m}{2}$, em que n é o número de triângulos nos quais se divide o polígono, (ℓ) a medida da base do triângulo e m a altura do triângulo (apótema).

Como $n\ell = p$, temos: $A = \frac{pm}{2}$. E já que existem duas bases congruentes no prisma regular, obtemos:

$2B = \frac{pm}{2} + \frac{pm}{2} \Rightarrow 2B = pm$.

Com essa demonstração, podemos definir que a área total de um prisma regular é dada por: $A_t = ph + pm \Rightarrow A_t = p(h + m)$.

Figura 2.23 | Área de um prisma: (a) reto, (b) regular



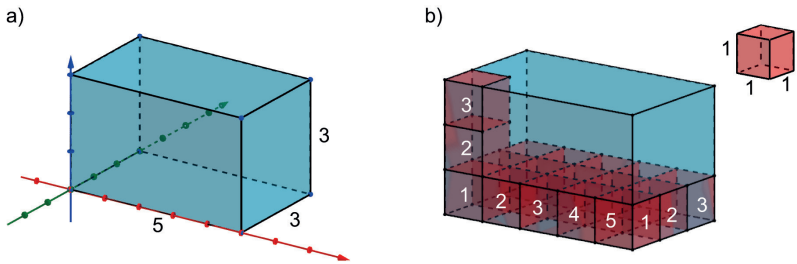
Fonte: elaborada pelas autoras.

Cálculo do volume de um prisma

Nosso último aprendizado nesta seção consiste no cálculo do volume de um prisma. Segundo Machado (2013), todo sólido ocupa um lugar no espaço, chamado de volume. Para entendermos como é calculado o volume de um sólido, começaremos analisando um paralelepípedo retângulo e um cubo. Na Figura 2.24 (a), temos um paralelepípedo com dimensões 5 *cm* de comprimento, 3 *cm* de largura e 3 *cm* de altura (5,3,3). Podemos dividir tal prisma em pequenos cubos, com arestas 1, 1, 1 (Figura 2.24 (b)). Neste caso, serão necessários 5 cubos para o comprimento, 3 para largura e

3 para altura, ou seja, 5 x 3 x 3 = 45 cubos de 1 *cm* de aresta. Consequentemente, dizemos que o paralelepípedo 5,3,3 possui um volume de $45\ cm^3$, lê-se 45 centímetros cúbicos.

Figura 2.24 | Volume de um paralelepípedo retângulo e cubo



Fonte: elaborada pelas autoras.

O volume de um paralelepípedo *P* (*a,b,c*), sendo *a*, *b*, *c* suas dimensões, é calculado em função de um cubo unitário (cubo de aresta 1), por meio da seguinte relação: $V = \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)} \Rightarrow \frac{a}{1}, \frac{b}{1}, \frac{c}{1}$. Multiplicando cada uma das dimensões, temos: $V = abc$. Logo, o volume de um paralelepípedo retângulo será a multiplicação de cada uma das suas dimensões. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em DOLCE e POMPEU (2001, p. 160). Podemos ainda escrever o volume do paralelepípedo como um produto entre a área da base pela altura: $V = A_{base} \cdot h$.

Se o paralelepípedo for um cubo, o volume poderá ser encontrado elevando a aresta à potência 3: $V = a^3$.

Mas, e se quisermos calcular o volume de um prisma qualquer? Para isso, precisamos entender o Princípio de Cavalieri. Na Figura 2.25, temos um lugar no espaço (volume) ocupado por uma pilha de moedas. Embora a pilha da direita esteja com as moedas deslocadas, o volume que ambas as pilhas ocupam é o mesmo, pois o volume depende das moedas, e não da forma. Se as moedas ficassem cada vez mais finas a ponto de se tornarem um polígono plano, o volume de ambas as pilhas seria o mesmo, se, e somente se, fossem empilhadas tantas moedas quantas necessárias para manter a altura original.

Essa foi a ideia do matemático Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que enunciou seu princípio da seguinte forma: "Dois

sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais" (DOLCE; POMPEU, 2001, p. 165).

Figura 2.25 | Volume de um objeto usando o Princípio de Cavalieri

Fonte: adaptada de Machado (2013, p. 88).

Com o Princípio de Cavalieri, podemos calcular o volume de qualquer prisma utilizando um prisma retângulo como referência, desde que os seguintes itens sejam satisfeitos:

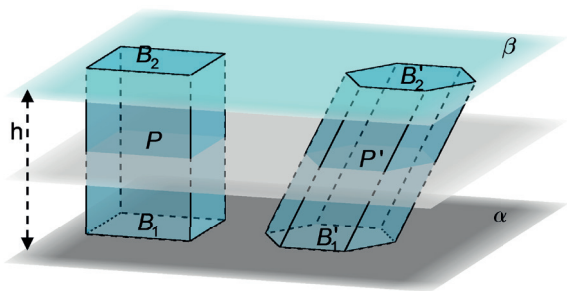
a) As áreas das bases dos prismas sejam congruentes $(B_1 B_2, B_3 = B)$ e $(B_1 = B_1', B_2 = B_2', B_3 = B_3')$.

b) As bases estejam no mesmo plano.

c) A altura seja a mesma para os dois prismas.

Veja, na Figura 2.26, que, dado um prisma qualquer com base congruente à base do paralelepípedo $(B_1 = B_1')$, contida no mesmo plano α, qualquer plano paralelo às bases interceptará os dois prismas, formando um polígono com mesma área.

Figura 2.26 | Esquema para volume de um prisma usando o Princípio de Cavalieri



Fonte: elaborada pelas autoras.

Pesquise mais

Por meio do Princípio de Cavalieri, é possível calcular o volume de qualquer prisma usando como base um paralelepípedo retângulo. Os links indicados a seguir trazem uma construção interativa do Princípio de Cavalieri. Aproveite para consultá-los e explorar tal princípio pela manipulação de objetos.

GEOGEBRA. **Cavalieri's Principle**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ePZXD5WD>. Acesso em: 27 jan. 2018a.

_____ **Princípio de Cavalieri**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/CZe68zVX>. Acesso em: 27 jan. 2018b.

Satisfeitas tais condições, o volume de um prisma qualquer pode ser calculado da mesma forma que um paralelepípedo retângulo, logo: $V = A_{base} \cdot h$.

Assimile

O matemático Cavalieri viveu entre 1598 e 1647, dedicando-se, entre outros assuntos, ao cálculo de volume. De acordo com os trabalhos de Cavalieri: Dado um sólido geométrico, ele pode ter sua forma alterada, sem perder volume, desde que não perca nem ganhe massa. Portanto, o volume depende da massa, e não da forma.

O Princípio de Cavalieri permite calcular o volume de qualquer prisma, usando como base um paralelepípedo retângulo.

Sem medo de errar

Chegou o momento de executar a segunda etapa do seu trabalho para a Autodesign. Você deverá apresentar a construção de um paralelepípedo usando lápis e papel, pois, somente depois de aprovado, o modelo será feito computacionalmente. Tal modelo deve estar acompanhado com o cálculo de sua área e volume, uma vez que esses dados ajudarão seu gerente a decidir se esse modelo é apropriado para o *boxe* do circuito elétrico. Veja os passos necessários para a construção:

1. Desenhe no papel, usando régua, compasso, transferidor ou esquadro, um retângulo com base 10 *cm* e altura 6 *cm*; renomeie os vértices do quadrilátero como *ABCD*.

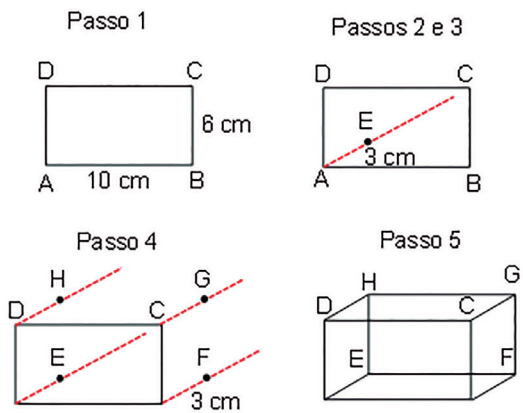
2. Trace uma bissetriz no vértice *A*.

3. Partindo do vértice *A*, marque sobre a bissetriz um ponto *E*, com 3 *cm* do vértice *A*.

4. Repita os passos 2 e 3 nos demais vértices, criando os pontos *FGH*.

5. Ligue todos os vértices com os pontos criados, formando o paralelepípedo *ABCDEFGH*, com dimensões da base: 10 *cm* e 3 *cm*, altura: 6 *cm*.

Figura 2.27 | Construção de um paralelepípedo



Fonte: elaborada pelas autoras.

Como o modelo já está representado, devemos calcular a área total. Para isso, somaremos a área dos seis paralelogramos: $A_t = ph + 2B$, portanto a superfície total é 216 *cm*. Por fim, $A_t = 26 \cdot 6 + 60$ calcularemos o volume do modelo, multiplicando a área da base pela altura: $V = A_{base} \cdot h$. Logo, o volume do prisma é $V = 30 \cdot 6$ $180\ cm^3$, pois seriam necessários 180 cubos de arestas 1 *cm* para preencher a mesma região no espaço.

Você poderia surpreender seu chefe e apresentar mais um modelo, só que em forma de um cubo, com aresta medindo 6 *cm*. Mostre-lhe a diferença entre a área e o volume desses dois modelos.

Avançando na prática

Usando a geometria espacial para estimar custos

Descrição da situação-problema

Um *designer* apresentou para sua cliente uma mesa de centro, conforme a Figura 2.28, oferecendo a ela cobrir o móvel com couro legítimo ou sintético. Sabendo que a mesa possui 1,5 *m* de comprimento, 1,1 *m* de largura e 40 *cm* de altura, e que o valor do couro legítimo é R$ 70,00 por m^2 e o sintético custa 1/3 desse valor, qual será o orçamento que o *designer* apresentará para a cliente?

Figura 2.28 | Geometria espacial e design

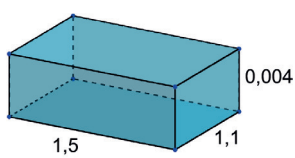
<https://www.istockphoto.com/br/foto/interior-da-sala-de-estar-moderna-gm135385307-24395543>. Acesso em: 27 jan. 2018.

Resolução da situação-problema

O primeiro passo para fazer o orçamento é descobrir quanto de couro será necessário para cobrir a área da superfície do móvel. Como o móvel tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões $a = 1{,}5$; $b = 1{,}1$; $c = 0{,}004$ (Figura 2.29), sua área pode ser calculada por: $S = 2(ab + bc + ac)$. Logo:

$$S = 2(1{,}5 \cdot 1{,}1 + 1{,}1 \cdot 0{,}004 + 1{,}5 \cdot 0{,}004)$$
$$S = 2(1{,}6604)$$
$$S = 3{,}3208 \text{ m}^2$$

Figura 2.29 | Modelagem do móvel para orçamento



Fonte: elaborada pelas autoras.

Sabendo a quantidade de couro necessário para cobrir a superfície, basta multiplicarmos a área obtida pelo preço de cada material:

Couro legítimo: Valor por m^2 R$ 70,00, portanto o custo ficará em R$ 232,40.

Couro sintético: Valor por m^2 1/3 de R$ 70,00, portanto o custo ficará em R$ 77,48.

Agora, basta o *designer* adicionar ao custo o seu trabalho!

Faça valer a pena

1. Paralelepípedos são tipos especiais de prismas formados por paralelogramos em suas faces e bases. Os paralelogramos podem ser regulares ou não, o que classificará o paralelepípedo em oblíquo, reto ou reto-retângulo ou, ainda, como um romboedro. Independentemente do tipo de paralelepípedo, todos terão sua área formada por paralelogramos, losangos ou quadrados.

Leia as asserções a seguir e escolha a opção correta.

I. A superfície total de um paralelepípedo reto sempre será a união de 6 retângulos.

II. A superfície total de um paralelepípedo reto-retângulo sempre será a união de 6 retângulos.

III. A superfície total de um romboedro é a união de 6 losangos.

a) Somente a alternativa I está correta.
b) Somente as alternativas I e II estão corretas.
c) Somente as alternativas I e III estão corretas.
d) Somente a alternativa II está correta.
e) Somente as alternativas II e III estão corretas.

2. Todo prisma é classificado de acordo com a quantidade de arestas na base; o ângulo entre aresta da face e aresta da base; o tamanho das arestas. O cubo é um tipo especial de prisma que possui 4 arestas na base, ângulo reto entre aresta da face e da base, e as 12 arestas são congruentes (por isso, ele é um romboedro).

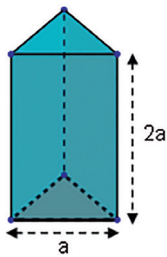
Sabendo que um cubo possui volume de 8 cm^3, qual opção corresponde ao tamanho da diagonal desse cubo?

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{13}$
c) $\frac{2}{3}$
d) 1
e) 3

3. Conhecer a área e o volume de sólidos geométricos é de grande importância e utilidade para diversas áreas. Na construção, o volume é utilizado para fazer elementos pré-moldados; na indústria, para quantificar produtos em embalagens; em design de personas, para criar personagens com proporções realistas, enfim, o seu emprego é amplo. E a geometria espacial fornece todas as ferramentas necessárias para tais cálculos.

Represente por expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas na Figura 2.30.

Figura 2.30 | Prisma triangular regular



Fonte: elaborada pelas autoras.

a) $A_\ell = 6a^2, A_t = a^2\dfrac{12\sqrt{3}}{2}, V = a^3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $A_\ell = a^2, A_t = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}, V = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $A_\ell = 3a^2, A_t = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}, V = a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

d) $A_\ell = 3a^2, A_t = a^2\dfrac{\sqrt{4}}{3}, V = a\dfrac{\sqrt{4}}{3}$

e) $A_\ell = 6a^2, A_t = a^2\dfrac{\sqrt{4}}{3}, V = a\dfrac{\sqrt{4}}{3}$

Seção 2.3

Pirâmides

Diálogo aberto

Estamos chegando ao final da segunda unidade do seu livro, a qual tratou dos poliedros e suas classificações. Na primeira seção, você conheceu os poliedros, bem como os elementos que os compõem; na segunda seção, vimos um tipo especial de poliedro, os prismas, e aprendemos a calcular sua diagonal, sua área e seu volume. Agora, vamos estudar mais um tipo de poliedro, as pirâmides.

O conteúdo desta seção lhe dará suporte para executar a terceira e última etapa do projeto para a Autodesign, na qual você decidiu apresentar um modelo inovador para o *boxe*. Visando à otimização do espaço que o *boxe* ocupa no painel do carro, você deverá propor um modelo em forma de pirâmide. Seu desenho precisará ser acompanhado do passo a passo para a construção usando o software GeoGebra, além do cálculo da área e do volume. E, para finalizar o projeto, você deverá apresentar um comparativo entre os volumes de um boxe em formato de cubo e outro em formato de pirâmide, com base quadrangular medindo 4 *cm*.

Para realizar tal tarefa nesta seção, você saberá o que é uma pirâmide e como é sua construção, além de aprender a calcular sua área e seu volume.

Bons estudos!

Não pode faltar

Quando mencionamos a palavra pirâmide, é inevitável imaginar as grandes construções do Egito, que, até os dias atuais, intrigam especialistas sobre sua forma de construção. Sendo a pirâmide um objeto da geometria espacial, como é feita sua construção geométrica (Figura 2.31)?

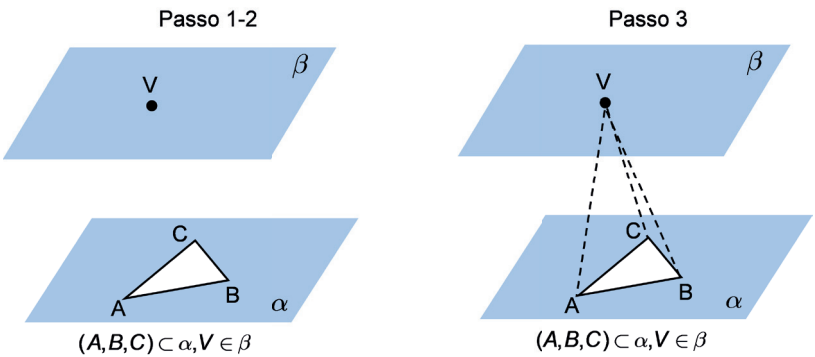
Passo 1 – Desenhe um polígono qualquer em um plano.

Passo 2 – Tome um ponto V fora do plano do polígono.

Passo 3 – Ligue todos os pontos do polígono contido no plano ao ponto V fora do plano.

A reunião de todas as semirretas com origem no ponto V que interceptam o polígono no plano é chamada de pirâmide, na qual V é o vértice ou cume da pirâmide (MACHADO, 2013).

Figura 2.31 | Construção de uma pirâmide



Fonte: elaborada pelas autoras.

Reflita

Vista a definição de pirâmide, podemos afirmar que ela é um prisma?

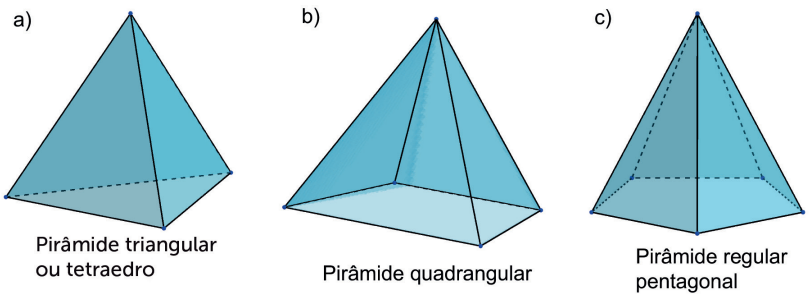
O polígono contido no plano é denominado base da pirâmide. Para cada vértice da base, há 1 aresta da pirâmide, portanto ela possui:

- 1 base com n vértices, assim a pirâmide apresenta $n + 1$ vértices.
- Para n vértices da base, existem n arestas laterais e $2n$ arestas totais, uma vez que existe uma relação direta entre o número de vértices da base e o número de arestas laterais da pirâmide.
- n faces laterais triangulares, portanto a pirâmide apresenta n faces triangulares e 1 polígono da base que pode ou não ser triangular.
- $2n$ diedros, n triedros e $n + 1$ ângulos poliédricos.

Para a pirâmide, é válida a relação de Euler: $V - A + F = (n+1) - 2n + (n+1) = 2$, logo: $V - A + F = 2$.

Uma pirâmide poderá ser convexa, se o polígono da base for convexo, ou não convexa, caso o polígono da base não seja convexo. O polígono da base determinará a natureza da pirâmide: se for um triângulo, será triangular, também chamada de tetraedro (Figura 2.32 (a)); se for um quadrilátero, será quadrangular (Figura 2.32 (b)); se for um pentágono, será pentagonal, e assim por diante. Ainda sobre o polígono da base, se for regular, a pirâmide será regular (Figura 2.32 (c)), portanto "as arestas laterais serão congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes" (DOLCE; POMPEU, 2001, p. 187).

Figura 2.32 | Natureza das pirâmides



Fonte: elaborada pelas autoras.

Além dos elementos já vistos, toda pirâmide possui seção transversal, que é a interseção da pirâmide (suas arestas) com um plano paralelo a sua base, e altura (h), que é dada pelo segmento que passa pelo seu vértice (cume) e é perpendicular ao plano da base (Figura 2.33 (a)).

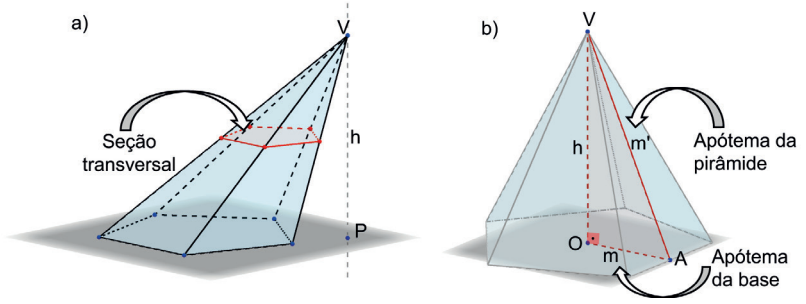
Sendo as pirâmides objetos da geometria espacial, estas também se dividem em retas e oblíquas. Se o polígono da base for regular e a projeção ortogonal do vértice (V) sobre o plano da base for o centro do polígono, então diz-se que a pirâmide é reta (neste caso, também regular). Caso uma das condições não seja satisfeita, a pirâmide é oblíqua.

Se a pirâmide for regular, então há algumas condições especiais:

(i) A altura coincidirá com a projeção ortogonal do vértice *V* no plano que contém a base, formando um ângulo reto com as arestas da base, inclusive com a apótema da base (*m*) (Figura 2.33 (b)). Esta, por sua vez, é o segmento de reta $(\overline{OA})$ na Figura 2.33 (b), que parte do centro da figura (ponto *O*) e é perpendicular a uma aresta da base.

(ii) Outro elemento da pirâmide regular é altura da face (*m'*), também chamada de apótema da pirâmide. Este elemento liga o vértice da pirâmide (*V*) ao ponto médio da aresta da base.

Figura 2.33| Elementos de uma pirâmide



Fonte: elaborada pelas autoras.

Reflita

Na seção anterior, você aprendeu que prismas podem ter seção reta; é possível que uma pirâmide também tenha seção reta?

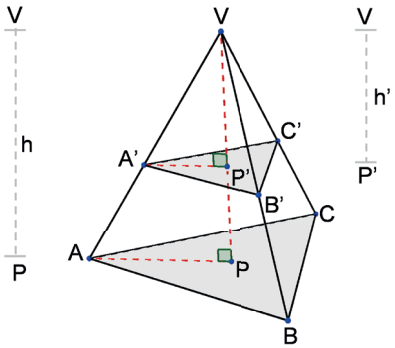
Área lateral, área total e volume da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces triangulares laterais e a área total é a soma das áreas laterais com a área da base: $A_t = A_{base} + A_{faces}$.

Antes de calcularmos o volume de um prisma, precisamos entender a relação entre seus elementos. Considere o seguinte teorema: "toda seção transversal de uma pirâmide triangular é uma região triangular semelhante à sua base, e a razão de semelhança entre seus lados é ρ" (MACHADO, 2013, p. 93). Portanto, usando como exemplo o tetraedro da Figura 2.34, a razão de semelhança

pode ser dada por: $\rho = \frac{h'}{h}$, em que h é a altura da pirâmide ($\overline{VP} \perp \alpha$), e h' é a distância do vértice (cume) até o plano da seção ($\overline{VP'} \perp \beta$).

Figura 2.34| Semelhança de triângulos



Fonte: elaborada pelas autoras.

Assimile

Demonstração: queremos mostrar que toda seção de uma pirâmide é semelhante à sua base $(\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC)$ por uma razão ρ; neste caso, temos: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h} = \rho$.

O primeiro passo é demonstrar que os triângulos formados pela altura (h) são semelhantes:

(i) $\triangle VA'P' \sim \triangle VAP$. Para isso, vamos utilizar o caso *AA* de semelhança de triângulos, os ângulos $\measuredangle A'VP' = \measuredangle AVP$ e $\measuredangle VP'A' = \measuredangle VPA$, portanto, os triângulos $\triangle VA'P'$ e $\triangle VAP$ são congruentes, logo: $\frac{VA'}{VA} = \frac{VP'}{VP} = \frac{h'}{h} = \rho$.

Agora, vamos verificar os triângulos da face:

(ii) $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$; como a base e a seção são paralelas, temos: $\overline{A'B'} // \overline{AB}$, portanto, pelo teorema das paralelas (Frezza; Dias, 2017), os ângulos $V\hat{A}'B' = V\hat{A}B$ e $A'\hat{V}'B' = A\hat{V}B$ são congruentes e, pelo caso *AA*, os triângulos são congruentes.

(iii) $\triangle VB'C' \sim \triangle VBC$; como a base e a seção são paralelas, temos: $\overline{B'C'} // \overline{BC}$, portanto, pelo teorema das paralelas (Frezza; Dias, 2017), os ângulos $V\hat{C}'B' = V\hat{C}B$ e $C'\hat{V}'B' = C\hat{V}B$ são congruentes e, pelo caso *AA*, os triângulos são congruentes.

(iv) $\triangle VA'C' \sim \triangle VAC$; como a base e a seção são paralelas, temos: $\overline{A'C'} // \overline{AC}$, portanto, pelo teorema das paralelas (Frezza; Dias, 2017), os ângulos $V\hat{C}'A' = V\hat{C}A$ e $C'\hat{V}'A' = C\hat{V}A$ são congruentes e, pelo caso *AA*, os triângulos são congruentes.

Sendo os triângulos semelhantes, temos como resultado de cada face da pirâmide:

$$(i) \Rightarrow \triangle VA'P' \sim \triangle VAP$$

$$(ii) \Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$(iii) \Rightarrow \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$(iv) \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VA'}{VA} = \frac{A'C'}{AC}$$

Combinando os resultados (*i*) (*ii*) e (*iii*), obtemos:

$$(v) \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC}.$$

Combinando os resultados (*ii*) (*iii*) (*iv*) e (*v*), temos:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h} = \rho.$$

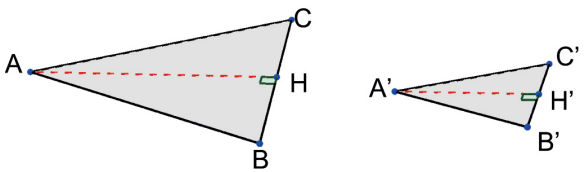
Assim, fica provada a semelhança entre a base e a seção da pirâmide $(\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC)$ pelo caso *LLL* $\left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}\right)$, sendo a razão dada por $\frac{h'}{h}$.

Como consequência dessa demonstração, temos um resultado importante que relaciona as áreas da base de uma pirâmide triangular com a área de uma seção transversal. "A razão entre as áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao

vértice" (DOLCE; POMPEU, 2001, p. 190). A distância de cada base ao vértice da pirâmide (cume) é a constante da semelhança dada por: $\frac{A_{seção}}{A_{base}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Demonstração:

Figura 2.35| Altura da base e da seção



Fonte: elaborada pelas autoras.

Como provamos que os triângulos são semelhantes $(\triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$, as alturas da base e da seção também são semelhantes: $\frac{A'H'}{AH} = \frac{h'}{h}$, portanto:

$$\frac{A_{seção}}{A_{base}} = \frac{(B'C')(A'H')\frac{1}{2}}{(BC)(AH)\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{B'C'}{BC}\frac{A'H'}{AH} \Rightarrow \frac{h'}{h}\frac{h'}{h}$$

$$\frac{A_{seção}}{A_{base}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ ou } A_{seção} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \cdot A_{base} \text{ ou } \frac{A_{seção}}{A_{base}} = \rho^2$$

A consequência dessa demonstração leva-nos a um novo teorema: "Se duas pirâmides têm a mesma altura e a área de suas bases também é a mesma, então as seções determinadas por um mesmo plano têm as mesmas áreas" (MACHADO, 2013, p. 96).

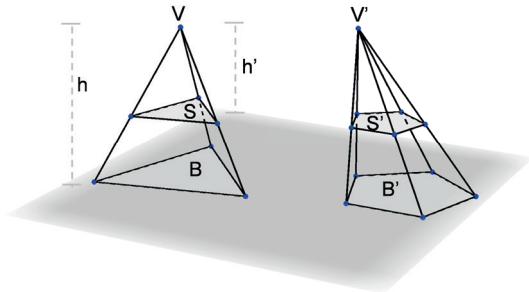
Demonstração:

Na Figura 2.36, há duas pirâmides com áreas das bases e altura congruentes, portanto, pelo resultado anterior, temos: $A(S) = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \cdot A(B)$ e $A(S') = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \cdot A(B')$.

Como $A(B) = A(B') \Rightarrow A(S) = A(S')$, e usando o Princípio de Cavalieri, podemos concluir que dadas duas pirâmides com áreas

das bases (coplanares) e alturas congruentes, o volume das pirâmides também é congruente.

Figura 2.36| Princípio de Cavalieri para pirâmides



Fonte: elaborada pelas autoras.

O Princípio de Cavalieri serve como ferramenta para calcular o volume de uma pirâmide, pois, dada uma pirâmide qualquer, o volume é um terço do volume de um prisma com base e altura congruentes à pirâmide. Portanto: $V = \frac{1}{3}A(B)\cdot h$.

Demonstração:

Considere um prisma triangular reto *ABCDEV* (Figura 2.37 (a)). Tal prisma pode ser dividido em três tetraedros congruentes *ABCV*, *ADEV* e *ABEV* (Figura 2.37 (b)).

Hipótese (a): as pirâmides *ABEV* e *ADEV* possuem o mesmo volume. Considerando os triângulos *AEB* e *ADE* bases das pirâmides, a projeção ortogonal do vértice *V* às bases *AEB* e *ADE* é a altura (*h*) de ambas as pirâmides. Nas arestas, temos: $\overline{AE} = \overline{AE}$, $\overline{AD} = \overline{BE}$ (são paralelos) e $\overline{DE} = \overline{AB}$ (são paralelos). Logo, sendo as bases e as alturas congruentes, podemos concluir que os volumes dos tetraedros também são congruentes $V(ABEV) = V(ADEV)$.

Hipótese (b): As pirâmides *ABCV* e *ADEV* possuem o mesmo volume. Considerando os triângulos *ABC* e *DEV* como bases das pirâmides, os triângulos escolhidos são as bases do prisma triangular (são congruentes). Além disso, a distância entre os planos que contêm as bases é a altura do prisma, portanto, a mesma altura das pirâmides escolhidas. Logo, sendo as bases e as alturas congruentes, podemos concluir que os volumes dos tetraedros também são congruentes: $V(ABCV) = V(ADEV)$.

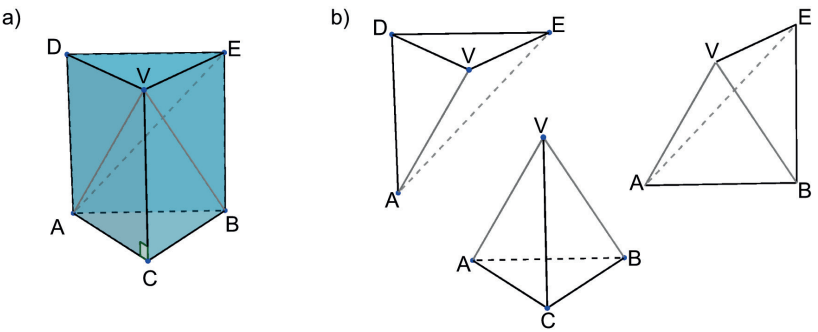
Provadas as hipóteses (*a*) e (*b*), podemos concluir que: $V(ABCV) = V(ADEV) = V(ABEV)$.

Aprendemos que o volume de um prisma é calculado multiplicando a área da base pela altura, portanto: $V(ABCDEV) = A_{base} \cdot h$. Também podemos calcular o volume do prisma somando o volume dos três tetraedros que provamos ser congruentes, logo:

$$V(ABCDEV) = V(ABCV) + V(ADEV) + V(ABEV)$$
$$V(ABCDEV) = 3 \cdot V(ABCV)$$
$$A_{base} \cdot h = 3 \cdot V(ABCV)$$

Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é dado por: $V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$, em que A_{base} é a área da base da pirâmide e *h* sua altura.

Figura 2.37| Decomposição de um prisma triangular



Fonte: elaborada pelas autoras.

Volume, área lateral e área total do tronco de pirâmide

Dada uma seção transversal em uma pirâmide, denomina-se tronco a parte entre a base e a seção transversal (Figura 2.38 (b)).

Para calcular o volume do tronco (V_t) da pirâmide, basta subtrairmos do volume total da pirâmide o volume da pirâmide menor:

$$V_t = V_{pirâmide} - V_{pirâmide-menor} \quad \Rightarrow \quad V_t = V(ABCV) - V(A'B'C'V).$$

Como $V(ABCV)=\frac{1}{3}A_b h$ e $V(A'B'C'V)=\frac{1}{3}A_s(h-h')$, em que $A_b = A_{base}$ e $A_s = A_{seção}$, temos:

$$V_t = \frac{1}{3}A_b h - \frac{1}{3}A_s(h-h')$$

$$V_t = \frac{1}{3}\left[A_b h - A_s(h-h')\right]$$

$$V_t = \frac{1}{3}\left[A_b h - A_s h + A_s h'\right]$$

$$V_t = \frac{1}{3}\left[h(A_b - A_s) + A_s h'\right] \qquad \text{(a)}$$

Vimos que existe uma relação entre as áreas da base e da seção transversal. Dessa maneira, podemos usar essa relação para calcular o volume do tronco:

Relação entre as áreas $\frac{A_b}{A_s}=\left(\frac{h}{h-h'}\right)^2$, logo:

$$\frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_s}} = \frac{h}{h-h'}$$

$$\sqrt{A_b}h - \sqrt{A_b}h' = h\sqrt{A_s}$$

$$h\left(\sqrt{A_b} - \sqrt{A_s}\right) = \sqrt{A_b}h'$$

$$h = \frac{\sqrt{A_b}h'}{\sqrt{A_b} - \sqrt{A_s}} \qquad \text{(b)}$$

Substituindo (b) em (a), temos:

$$V_t = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{A_b}h'}{\sqrt{A_b} - \sqrt{A_s}}(A_b - A_s) + A_s h'\right]$$

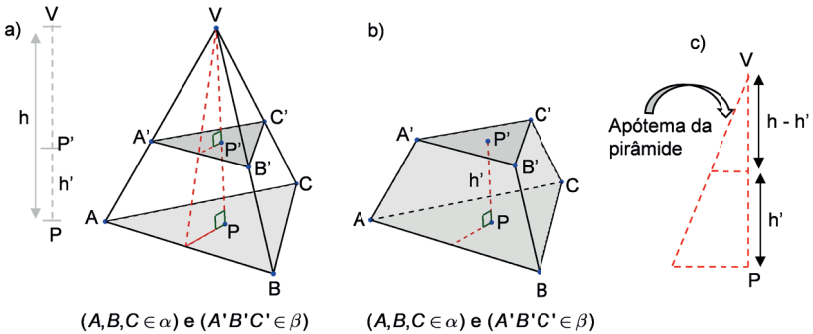
$$V_t = \frac{1}{3}\left[\frac{(A_b - A_s)}{\sqrt{A_b} - \sqrt{A_s}}\frac{\sqrt{A_b} + \sqrt{A_s}}{\sqrt{A_b} + \sqrt{A_s}}\sqrt{A_b}h' + A_s h'\right]$$

$$V_t = \frac{1}{3}\left[\frac{(A_b - A_s)\sqrt{A_b} + \sqrt{A_s}}{(A_b - A_s)}\sqrt{A_b}h' + A_s h'\right]$$

$$V_t = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{A_b} + \sqrt{A_s}\right)\sqrt{A_b}h' + A_s h'\right]$$

Podemos, portanto, calcular o volume do tronco usando: $V_t = \frac{1}{3}h'\left[A_b + \sqrt{A_b A_s} + A_s\right]$.

Figura 2.38| Tronco da pirâmide



Fonte: elaborada pelas autoras.

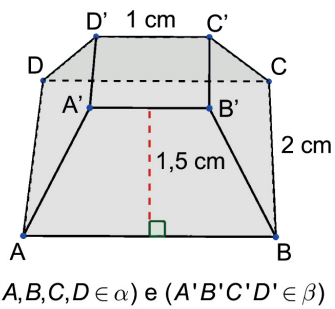
A área lateral de um tronco (A_ℓ) é a soma das áreas das faces laterais, que sempre serão trapézios.

A área total do tronco é a soma da área lateral com as áreas das duas bases, sendo a base maior a da pirâmide, e a base menor a da seção. Portanto: $A_t = A_\ell + A_b + A_s$.

Exemplificando

Vamos calcular as áreas lateral e total do tronco ilustrado na Figura 2.39.

Figura 2.39| Tronco da pirâmide quadrangular regular *ABCDV*



Fonte: elaborada pelas autoras.

Como a pirâmide é quadrangular regular, sua base maior tem área $4\ cm^2$ e sua base menor tem área $1\ cm^2$. Suas laterais são trapézios congruentes, portanto: $A_\ell = 4\left(\frac{2+1}{2}\right)1{,}5 \Rightarrow A_\ell = 9\ cm^2$. Logo, a área total é: $A_t = 14\ cm^2$.

Pesquise mais

Para complementar o conteúdo abordado nesta seção, assista ao vídeo do canal do professor Gui a respeito de pirâmides:

MATEMÁTICA EM EXERCÍCIOS. Geometria espacial – pirâmides. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Ogpvwh5vx8Q>. Acesso em: 27 jan. 2018. (Vídeo do Youtube)

Em seguida, assista a outro vídeo no mesmo canal, com exercícios resolvidos sobre pirâmides.

MATEMÁTICA EM EXERCÍCIOS. Exercícios resolvidos – pirâmides. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=IFkNpwOwtuA>. Acesso em: 27 jan. 2018. (Vídeo do Youtube)

Sem medo de errar

Chegou o momento de finalizar o projeto na Autodesign apresentando um modelo para o *boxe* em formato de pirâmide para a equipe. A pirâmide deverá ter base quadrangular com arestas medindo 4 *cm*, e seu documento conterá o passo a passo para a construção de tal sólido no software GeoGebra.

Passo 1: Na janela de entrada do software, digite: (0, 0).

Passo 2: Na janela de entrada do software, digite: Polígono ((0, 0), (4, 0), 4).

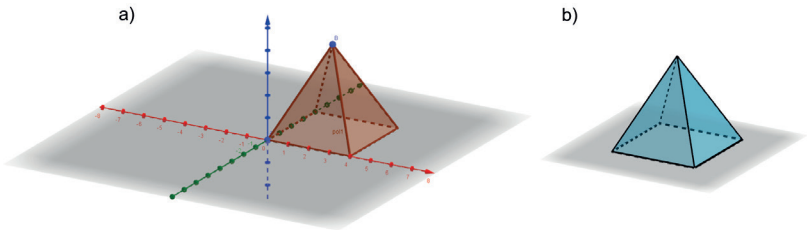
Passo 3: Na janela de entrada do software, digite: (2, 2, 4).

Passo 4: Vá até o menu exibir e escolha a opção para visualizar a janela 3D; nesse momento, a janela 2D pode ser fechada.

Passo 5: Na janela de entrada do software, digite: Pirâmide (pol 1, B).

A sua construção deverá ficar semelhante à Figura 2.40 (a). Clicando com o botão direito sobre os elementos e escolhendo "Propriedades...", é possível configurar cor e linhas. Trabalhe em seu modelo para que ele fique apresentável.

Figura 2.40| Modelo para boxe em forma de pirâmide



Fonte: elaborada pelas autoras.

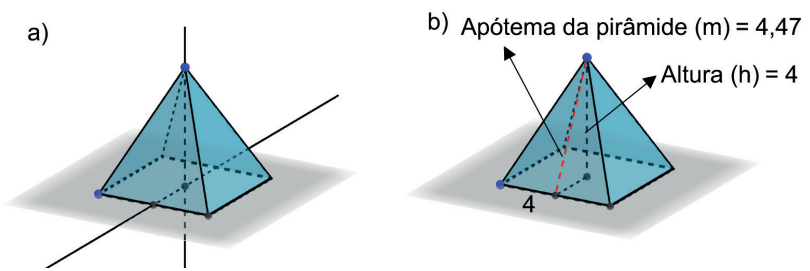
Passo 6: Utilizando a ferramenta de reta perpendicular, trace uma perpendicular ao vértice da pirâmide (cume).

Passe 7: Selecione a ferramenta de "ponto médio", escolha uma aresta da base e marque seu ponto médio. Em seguida, usando a ferramenta "reta perpendicular", trace uma perpendicular ao ponto médio da aresta da base.

Passo 8: Utilizando a ferramenta de "interseção de dois objetos", marque o ponto central (interceção entre as retas perpendiculares) (Figura 2.41 (a)).

Passo 9: Trace semirretas entre os pontos criados para conseguirmos algumas medidas (Figura 2.41 (b)). Utilize a janela de álgebra para anotar os valores da altura da pirâmide: 4 *cm*, aresta da base: 2 *cm* e apótema do prisma (altura da face): 4,47.

Figura 2.41| Medidas da pirâmide



Fonte: elaborada pelas autoras.

Basta realizar os cálculos pedidos:

Área total: $A_t = A_\ell + A_b \Rightarrow A_t = 4 \cdot 9{,}4 + 16 \Rightarrow A_t = 53{,}6 \text{ cm}^2$.

Volume: $V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} 16 \cdot 4 \Rightarrow V = 21{,}33 \text{ cm}^3$.

Por fim, vamos fazer uma comparação entre a pirâmide de base quadrangular e um cubo. Devemos ressaltar que ambos os sólidos possuem mesma base e mesma altura.

Área do cubo: $A_t = A_\ell + A_b \Rightarrow 6a^2 \Rightarrow A_t = 96 \text{ cm}^2$.

Volume do cubo: $V = a^3 \Rightarrow V = 64 \text{ cm}^3$.

Apresente os resultados obtidos em um documento para a equipe da Autodesign, comparando as áreas e os volumes dos sólidos.

Avançando na prática

Modelando novas embalagens

Descrição da situação-problema

Uma fábrica de chocolates decidiu criar embalagens no formato de pirâmides. O gerente solicitou que as pirâmides tenham diferentes naturezas (triangular, quadrangular etc.), porém é imprescindível que todas apresentem o mesmo volume. Seu trabalho é elaborar a construção de quatro modelos diversos para as embalagens, usando triângulo, quadrado, pentágono e hexágono como polígonos na base.

Resolução da situação-problema

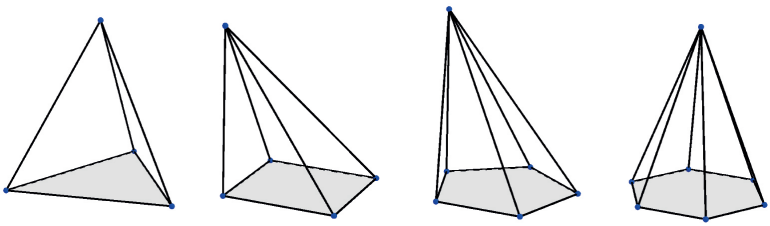
O primeiro passo para desenvolver as embalagens é criar uma das pirâmides, por exemplo, a de base triangular (Figura 2.42).

Após modelar a primeira embalagem, você obterá os valores dessa pirâmide (arestas, área da base, área da face, apótema da pirâmide e altura da pirâmide e da face).

Conhecida a área e a altura, você deve modelar as demais embalagens, pois, pelo Princípio de Cavalieri, se duas pirâmides possuem mesma área da base e mesma altura, estas também

apresentam o mesmo volume. Para construir polígonos de base com mesma área, utilize o resultado de geometria plana a respeito de polígonos regulares (FREZZA; DIAS, 2017).

Figura 2.42| Modelos para as embalagens



Fonte: elaborada pelas autoras.

Faça valer a pena

1. Quando pensamos no Egito, logo nos remetemos às grandes construções de alvenaria conhecidas como pirâmides. As três principais pirâmides do Egito estão localizadas na península de Gizé, e suas construções intrigam até hoje pesquisadores de diversas áreas.

Sabendo que as pirâmides são sólidos geométricos construídos a partir de uma base e um ponto fora dessa base, analise as seguintes asserções e escolha a alternativa correta.

I. Toda pirâmide é um poliedro, portanto toda pirâmide é um prisma.

II. A natureza de uma pirâmide é definida a partir do polígono da base; se for um triângulo, será triangular; se for um quadrado, será quadrangular, e assim por diante.

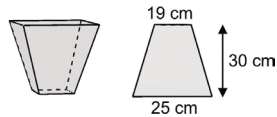
III. Um plano paralelo à base de uma pirâmide que corta suas arestas é conhecido como seção, podendo ser reta ou oblíqua.

a) Todas as alternativas estão corretas.
b) Somente as alternativas I e II estão corretas.
c) Somente as alternativas II e III estão corretas.
d) Somente as alternativas I e III estão corretas.
e) Somente a alternativa II está correta.

2. Muitos objetos do nosso cotidiano possuem formas de sólidos geométricos. Alguns são modelados usando software específico, como autocad, blender, 3D Studio Max, Maya, dentre outros. Qualquer sólido geométrico é construído partindo de partes planas, ou seja, a junção de elementos planos pode formar um objeto em três dimensões.

Uma cesta de lixo tem por faces laterais trapézios isósceles e por fundo um quadrado de 19 *cm* de lado. Qual a medida da aresta lateral da cesta? (Adaptado de DOLCE; POMPEO, 2001, p. 429).

Figura 2.43| Modelo geométrico do cesto de lixo

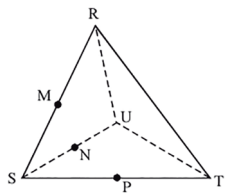


Fonte: elaborada pelas autoras.

a) $3\sqrt{101}$ *cm*
b) 30 *cm*
c) $3\sqrt{104}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $30\sqrt{19}$

3. "O projeto de construção de uma peça de artesanato foi realizado utilizando-se um software geométrico que permite interceptar um tetraedro regular com planos. A Figura 2.44 mostra o tetraedro *RSTU* e três pontos *M*, *N* e *P* do plano α de interseção" (CARDONA; AZAMBUJA; SANTOS, 2011, p. 48).

Figura 2.44| Tetraedro regular *RSTU*



Fonte: adaptada de Cardona; Azambuja; Santos (2011, p. 48).

Sabendo que *M*, *N* e *P* são pontos médios de *SR*, *SU* e *ST*, respectivamente, e que o tetraedro *RSTU* tem volume igual a 1, avalie as seguintes afirmações.

I. O volume da pirâmide *SMNP* é igual a 1/2.
II. A interseção do plano α com o tetraedro é um paralelogramo.
III. As retas que contêm as arestas *MP* e *RU* são reversas.
(CARDONA; AZAMBUJA; SANTOS, 2011, p. 48)

a) Todas as alternativas estão corretas.
b) Somente a alternativa I está correta.
c) Somente a alternativa II está correta.
d) Somente a alternativa III está correta.
e) Somente as alternativas I e II estão corretas.

Referências

CARDONA, Augusto Vieira; AZAMBUJA, Cármen Regina Jardim de; SANTOS, Monica Bertoni dos (Orgs.). **ENADE comentado 2008**: Matemática. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2011. 121 p. Disponível em: <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/enade/matematica2008.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2018.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar** – Geometria espacial: posição e métrica. 5. ed. São Paulo: Atual, 2001. v. 10.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática**: aula por aula. São Paulo: FTD, 2000.

FREZZA, Ednaldo Alves; DIAS, Junior Francisco. **Geometria plana**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017.

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de geometria espacial**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2018.

MANFIO, Fernando. **Fundamentos da geometria**. São Carlos: ICMC-USP, 2016.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Princípio de Cavalieri**. Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>. Acesso em: 27 jan. 2018.

Cilindros, cones e esferas

Convite ao estudo

Olá, aluno! Bem-vindo a esta nova unidade do nosso curso de Geometria Espacial! Estudaremos agora mais um importante assunto do campo geométrico: os *Corpos Redondos*. Como não poderia deixar de ser, tais figuras espaciais estão presentes com muita frequência em nosso cotidiano. Basta dar uma volta na cozinha de sua casa e se deparar com embalagens, potes, panelas e recipientes com formato cilíndrico. Diga-se de passagem, o cilindro, não por acaso, será o primeiro corpo redondo que estudaremos. E que tal se nos deliciarmos com um sorvete de "casquinha"? Essa casquinha possui o formato de um cone, corpo redondo que estudaremos na próxima seção. A famosa esfera é o principal objeto utilizado em várias modalidades esportivas, chamada de bola; esse corpo redondo, que é ainda mais peculiar, encerrará esta unidade.

Depois de seu trabalho bem-sucedido na empresa AutoDesign, você enfrentará um novo desafio profissional. Dessa vez, uma empresa especializada na produção de embalagens, a *Packing-Design*, encomenda-lhe uma pesquisa sobre o melhor tamanho para embalagens de sorvetes. A *Packing-Design* estuda oferecer um produto exclusivo para uma nova indústria de sorvetes que será lançada no mercado em breve. Para isso, sabe que precisa apresentar uma embalagem que, além de moderna e atrativa, seja econômica, a fim de que o preço final ao consumidor seja competitivo.

As embalagens a serem desenvolvidas destinam-se aos sorvetes vendidos em potes cilíndricos e também às embalagens de plástico que cobrem os sorvetes acondicionados em casquinhas com formato de cone. Assim como ocorreu na AutoDesign, a sugestão de trabalho de seu

novo chefe é uma apresentação teórica sobre os elementos de um cilindro, a fim de analisar qual é a melhor quantidade de sorvete a ser oferecido ao cliente, bem como o tamanho da embalagem em relação a sua altura e sua largura.

Para que possamos ajudá-lo nessa sua nova empreitada, em cada uma das três sessões desta unidade, exploraremos com detalhes os corpos redondos já mencionados.

Mais uma vez, renovamos os votos de que você atinja todas as aprendizagens propostas aqui. Bons estudos!

Seção 3.1

Cilindros

Diálogo aberto

Caro aluno, bem-vindo à primeira seção desta unidade de estudo! Neste primeiro momento, dedicaremos atenção à exploração dos conceitos sobre cilindros. O foco desta seção será a sua missão na renomada empresa de embalagens *Packing-Design*, a qual quer fechar um contrato de fornecimento de seu produto com uma promissora indústria de sorvetes que será inserida no mercado. No início, a nova indústria de sorvetes comercializará seu produto em potes cilíndricos de três tamanhos diferentes e em vários sabores. Como profissional especialista em Geometria Espacial, sua primeira missão é elaborar um documento escrito, apresentando os conceitos sobre cilindros, para que os proprietários da empresa possam entender melhor como envazarão os sorvetes. Além disso, você terá autonomia para apresentar algumas sugestões de embalagens, justificando se há possibilidade de haver embalagens mais rentáveis do que outras, por exemplo.

Mais uma vez, para desenvolver um trabalho dessa natureza, percebemos a importância da apropriação dos conceitos matemáticos sobre os sólidos geométricos, mais especificamente sobre o cilindro. Reiteramos, portanto, a necessidade da aprendizagem pautada no estudo teórico para o entendimento sobre o assunto.

Desejamos sucesso neste seu novo desafio. Bons estudos!

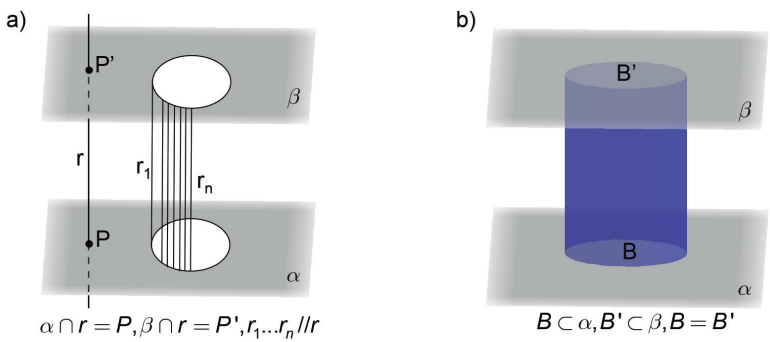
Não pode faltar

Depois do estudo dos poliedros, iniciaremos a exploração sobre os chamados "corpos redondos" (cilindro, cone e esfera). Ao final da exposição desses três importantes conceitos da Geometria Espacial, esperamos que você possa conhecer os principais elementos de um cilindro, um cone e uma esfera, fazendo comparações dessas figuras com os prismas.

Exploraremos agora os conceitos sobre cilindro. Para isso, veja a definição: dados dois planos paralelos, α e β, e um círculo contido em qualquer um dos planos, considere que uma reta r seja concorrente a ambos os planos. Chama-se cilindro a região dos infinitos segmentos paralelos a essa reta, com extremos no círculo e no plano paralelo ao que contém o círculo.

Para melhor entendermos a definição, considere, na Figura 3.1a, os planos α e β. Se tomarmos uma base circular contida no plano α e uma reta *r* concorrente a ambos os planos $(\alpha \cap r = P, \beta \cap r = P')$, a união de todos os segmentos de reta $(r_1 ... r_n)$, paralelos à reta *r* (e ao semento PP'), com origem nas extremidades da base e que interceptam o plano β no mesmo semiespaço formando uma nova base, é chamada de cilindro. Portanto, as bases B e B' são congruentes (Figura 3.1b).

Figura 3.1 | Cilindro segundo sua definição



$\alpha \cap r = P, \beta \cap r = P', r_1 .. r_n // r$

$B \subset \alpha, B' \subset \beta, B = B'$

Fonte: elaborada pelo autor.

Elementos e classificação de um cilindro

Como consequência de possuir base circular, todo cilindro apresenta um raio (r). Além do raio, também tem eixo (e), geratriz (g) e altura (h). Veja cada um desses itens:

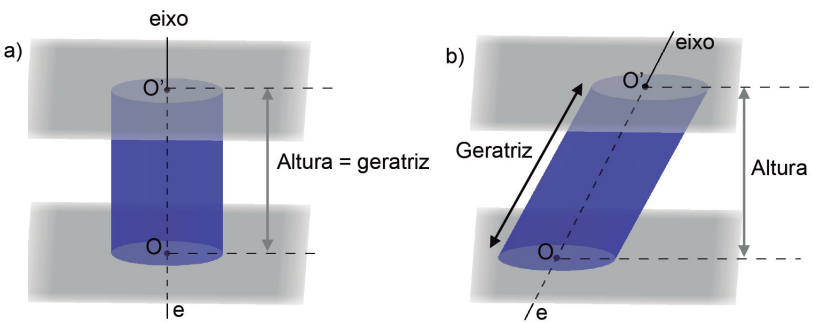
• Eixo: tomando os pontos *O* e *O'* como origem dos círculos da base (centro), a reta *e* que passa pelos pontos *O* e *O'* é chamada de eixo (Figura 3.2a). A classificação do cilindro deriva do eixo, pois se o eixo fizer um ângulo reto com a base, o cilindro será reto

(Figura 3.2a). Caso o ângulo entre o eixo e a base seja diferente de 90°, então se tem um cilindro oblíquo (Figura 3.2b).

• Geratriz: é o segmento de reta que une um ponto de uma circunferência (base 1) ao seu correspondente da outra circunferência da base (base 2), formando segmentos paralelos ao eixo de rotação. Podemos dizer, portanto, que o cilindro possui *n* geratrizes, pois tem *n* segmentos paralelos ao eixo que interceptam os planos nas bases. Alguns autores utilizam a geratriz para classificar o cilindro em reto ou oblíquo, o que nos leva à mesma explicação anterior, visto que a geratriz depende do eixo.

• Altura: a altura de um cilindro é a distância (*h*) entre as bases contidas em dois planos. Aqui temos uma particularidade: para os cilindros retos, a altura e a geratriz são coincidentes, ou seja, possuem a mesma medida (Figura 3.2a). Para os cilindros oblíquos, a altura e a geratriz não são coincidentes (Figura 3.2b).

Figura 3.2 | Elementos e classificação de um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Assista ao vídeo a seguir, que traz uma apresentação didática dos elementos do cilindro.

EQUACIONA MATEMÁTICA. Cilindro (aula ministrada pelo professor Paulo Pereira). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rpbFsCa7D4E&t=246s>. Acesso em: 8 fev. 2018 (vídeo do YouTube).

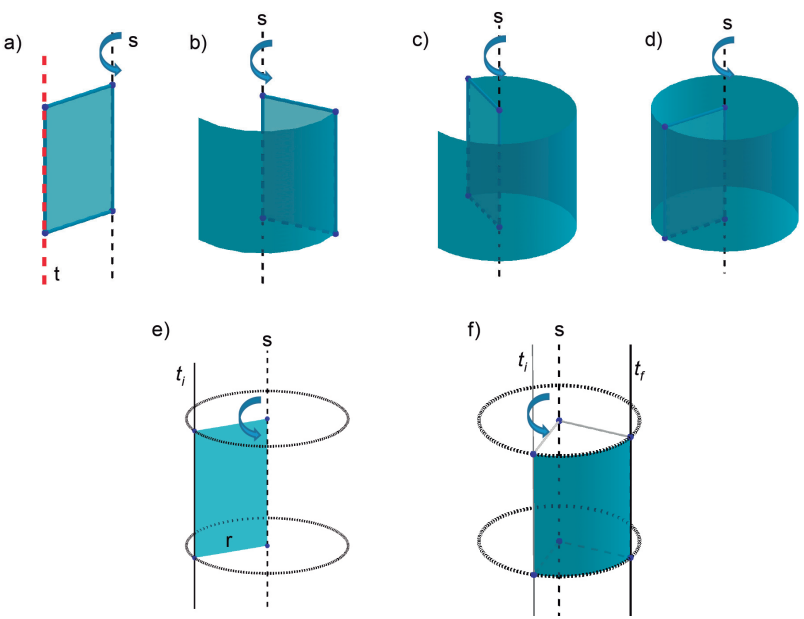
O cilindro é caracterizado como um sólido de revolução. Veja a definição a seguir: "Superfície cilíndrica de rotação é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta t em torno de uma reta s (eixo) fixa, sendo a reta t paralela e distinta da reta s" (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 216).

Para entendermos essa definição, vamos utilizar a Figura 3.3.

A partir de um eixo (*s*), vamos construir um retângulo (Figura 3.3a). Se rotacionarmos um pouco esse retângulo em torno do eixo na direção da esquerda para a direita, teremos a construção da Figura 3.3b. Se continuarmos rotacionando o retângulo em torno do eixo na mesma direção, teremos as Figuras 3.3c e d, na qual a última representa uma rotação completa de 360°, e, como consequência, podemos observar que o resultado é um cilindro reto, que também pode ser chamado de cilindro de revolução.

A superfície cilíndrica de revolução de eixo *s*, geratriz *t* e raio *r* é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada (*r*) de uma reta dada (*s*) (Figuras 3.3e e f).

Figura 3.3 | Superfície cilíndrica de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Apresentada essa definição sobre cilindro, você já é capaz de distinguí-lo de um prisma? Existem similaridades entre eles? Quais as principais diferenças?

Para ajudá-lo nesse processo de reflexão, utilize o *software* Geogebra para a construção desses sólidos. Os *links* a seguir trazem orientações em relação aos procedimentos:

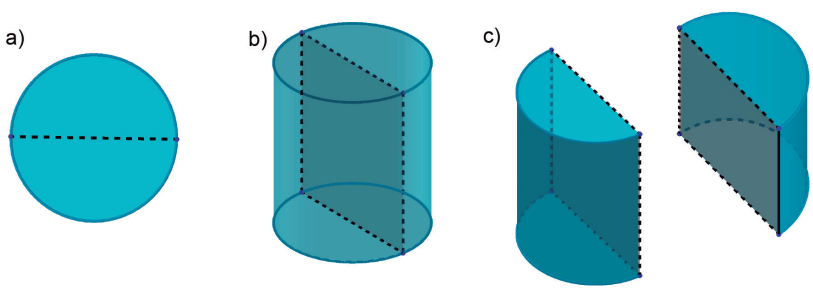
TAMBURINI, Ricardo. Construção do prisma com o uso do Geogebra 3D. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Yn4ezcGFsbg>. Acesso em: 8 fev. 2018

_____ Construção do cilindro usando o Geogebra 3D. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mVmSXxIFkZ4>. Acesso em: 8 fev. 2018

Secção meridiana

Conforme a representação da Figura 3.4, define-se como secção meridiana de um cilindro a interseção deste com um plano que contém o eixo. Em outras palavras, poderíamos dizer, informalmente, que a secção meridiana seria um "corte" (secção) exatamente ao meio do cilindro (Figura 3.4a/b), de modo que esse corte divide as duas bases em semicircunferências (Figura 3.4c). É importante ressaltar que a secção meridiana de um cilindro oblíquo é um *paralelogramo*. Já a secção meridiana de um cilindro reto é um *retângulo*.

Figura 3.4 | Representação de uma seção meridiana em cilindro reto

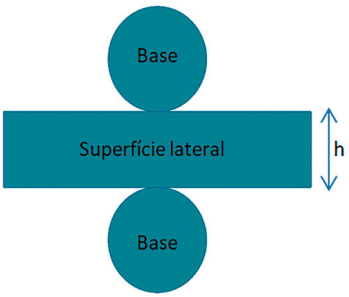


Fonte: elaborada pelo autor.

Área lateral do cilindro

Para compreender os conceitos a seguir, é importante que você conheça perfeitamente a estrutura da planificação de um cilindro.

Figura 3.5 | Planificação de um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Como observado na Figura 3.5, a superfície lateral do cilindro tem o formato de um retângulo de altura h (naturalmente, a mesma do cilindro) e base com comprimento igual ao tamanho do perímetro da base circular. Sabemos que o comprimento de uma circunferência qualquer é dado pela fórmula:

$$C = 2\pi r$$

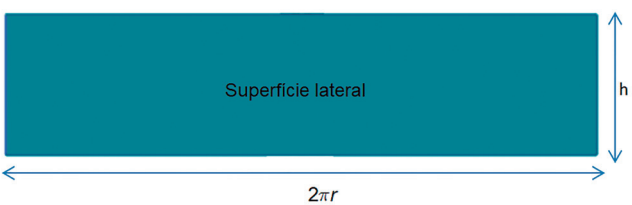
Lembre-se, também, de que a área de um retângulo é determinada pela fórmula:

$$A_R = b \cdot h$$

Portanto, a área da superfície lateral de um cilindro é:

$$A_\ell = 2\pi r \cdot h$$

Figura 3.6 | Representação da superfície lateral de um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Área da base de um cilindro

Reportando-nos mais uma vez à Figura 3.6 e também à definição sobre cilindro apresentada há pouco, devemos nos lembrar de que todo cilindro possui duas bases circulares. Da geometria plana, sabemos também que a área de um círculo é determinada pela fórmula:

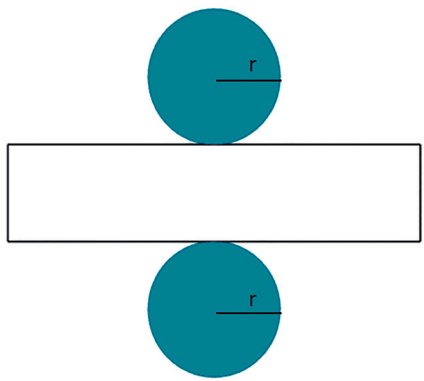
$$A_C = \pi r^2$$

Logo, a área das bases de um cilindro é dada por essa mesma fórmula:

$$A_b = \pi r^2$$

Para fins de cálculo da área total, naturalmente, devemos considerar ambas as bases do cilindro. Dessa forma, basta multiplicar a área da base por 2, já que, segundo a definição de cilindro, são iguais (Figura 3.7).

Figura 3.7 | Representação em destaque das bases de um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Área total

Dessa forma, a área total de um cilindro é dada pela soma da área da superfície lateral com a área da base:

$$A_t = A_\ell + A_b \Rightarrow A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 2\pi r(h + r)}$$

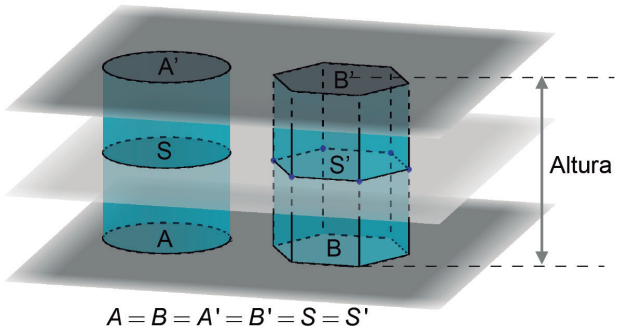
Volume do cilindro

Considere um cilindro com bases A e A' e um prisma hexagonal de bases B e B', tendo os dois sólidos bases e alturas congruentes; o princípio de

Cavalieri é válido para o cálculo do volume. Qualquer seção paralela à base também será congruente, portanto o volume do cilindro pode ser calculado conforme demonstrado para os prismas (Figura 3.8).

$$\boxed{V = A_b \times h} \text{ ou } \boxed{V = \pi r^2 \times h}$$

Figura 3.8 | Princípio de Cavalieri para cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Depois da apresentação das fórmulas, dos conceitos e dos elementos de um cilindro, vamos resolver este exercício para assimliar melhor as informações.

Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 5 m e a altura, 3 m.

Observação: não se esqueça de representar corretamente a unidade de medida de cada item.

Resposta:

I. $A_b = \pi r^2 \therefore A_b = 5^2\pi \therefore A_b = 25\pi \ m^2$

II. $A_\ell = 2\pi r \times h \therefore A_\ell = 2\pi \times 5 \times 3 \therefore A_\ell = 30\pi \ m^2$

III. $A_t = 2 \times A_b + A_\ell \therefore A_t = 2 \times 25\pi + 30\pi \therefore A_t = 80\pi \ m^2$

IV. $V = A_b \times h \therefore V = 25\pi \times 3 \therefore V = 75\pi \ m^3$

Pesquise mais

Para aprofundar os conhecimentos adquiridos nesta seção e preparar-se para as próximas, assista à videoaula indicada a seguir:

VESTIBULANDIA.COM. Geometria espacial métrica – Cilindros – Parte 1. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lCagHJ5BvOc>. Acesso em: 8 fev. 2018

Se possível, pesquise outros materiais didáticos, a fim de explorar o conteúdo estudado (cilindros).

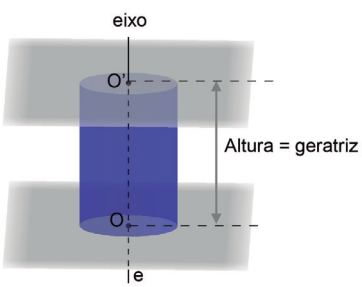
Sem medo de errar

Caro aluno, acabamos de conhecer os principais conceitos e elementos de um cilindro e, agora, você já tem condições de elaborar o documento para a Packing-Design sobre as embalagens que possuirão esse formato.

Para a elaboração e a organização de seus documentos, as sugestões de *softwares* apresentadas na unidade anterior (vide tópico "Sem medo de errar", da primeira seção da Unidade 2) também são válidas aqui. Muito embora você esteja tratando de um sólido geométrico diferente daquela ocasião, o desenvolvimento e o objetivo do trabalho são similares, além da compreensão das empresas contratantes sobre os principais conceitos dos sólidos em questão.

Escolhido o *software* para o trabalho, você deve definir o conceito sobre cilindros, apresentando seus principais elementos. Utilize uma imagem similar à Figura 3.9 para apresentar os elementos.

Figura 3.9 | Exemplo para apresentação dos elementos



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você está apresentando o projeto para "leigos" sobre o assunto, em sua explanação poderá anexar exemplos desses sólidos em nosso cotidiano (obviamente, por ser nosso objeto principal), mostrando produtos alimentícios que são armazenados em recipientes que tenham esse formato (Figura 3.10).

Figura 3.10 | Exemplos de embalagens em formato cilíndrico

Fonte: adaptada de: <http://www.publicdomainpictures.net/view-image.php?image=34228&picture=&jazyk=PT>; <https://pixabay.com/pt/estanho-pode-png-metal-cont%C3%AAiner-2549235/> e <https://pixabay.com/pt/tee-embalagem-ch%C3%A1-de-ervas-629229/>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Por fim, você deve a seu modo apresentar aos seus interlocutores como se calcula o volume de um cilindro, já que este é justamente o ponto que verdadeiramente lhes interessa. Apresente alguns exemplos comparando o tamanho de uma embalagem com a capacidade em quilogramas que ela suportaria. Eles precisam pensar quais quantidades de sorvete (volume) haverá em cada recipiente, qual o tamanho do pote, cálculos sobre empilhamento de caixas para estoque e transporte do produto. Lembre-se de que quanto mais detalhadas forem suas hipóteses e conjecturas abordando os conceitos sobre cilindros, mais você contribuirá, significativamente, com essa empresa.

Avançando na prática

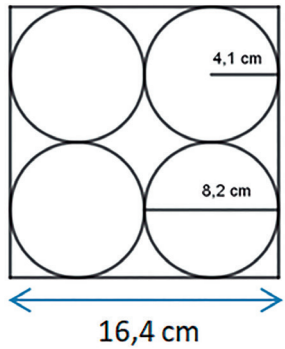
Empilhamento de caixas para transporte e armazenamento

Descrição da situação-problema

Uma empresa de logística recebeu uma encomenda de potes cilíndricos que armazenavam 500 mL de determinado produto. Ela, então, decidiu empacotar os potes, agrupando-os de 8 em 8, em caixas de papelão, de modo que fossem formados 4 pares de potes, ficando cada pote do par sobre o outro. A seguir, observe

uma ilustração sobre a visão da parte frontal da caixa, após os pares estarem empilhados (Figura 3.11).

Figura 3.11 | Ilustração das caixas de sorvetes empilhadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que os lados da caixa medem 16,4 *cm*, qual é a altura dessa caixa? (Considere $\pi = 3$.)

Resolução da situação-problema

Se o lado da caixa estocada mede 16,4 *cm*, então o diâmetro das tampas dos potes cilíndricos mede 8,2 *cm* e, por consequência, seu raio mede 4,1 *cm*.

Lembrando que a fórmula do cálculo é:

$$V = A_b \times h$$
$$500 = 4{,}1 \times 4{,}1 \times 3 \times h$$
$$54{,}43h = 500$$
$$h \approx 9{,}92 \ cm$$

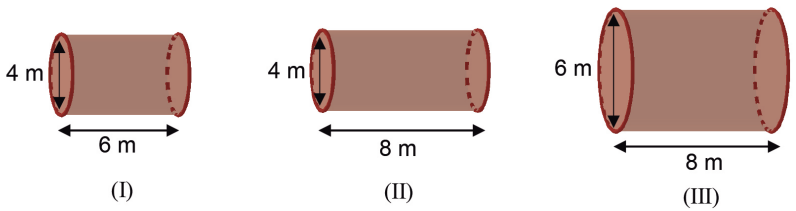
Se a altura do pote cilíndrico é de 9,92 *cm*, então a altura da caixa será o dobro desse valor, já que um pote está sobre o outro. Logo, a altura da caixa é de, aproximadamente, 19,84 *cm*.

Faça valer a pena

1. Na parte teórica desta seção, foram apresentadas, de maneira intuitiva, as fórmulas da área total (área da superfície lateral adicionada à área da base) e do volume de um cilindro. Neste primeiro problema, é exigida uma análise com base nesses conceitos para verificação de um contexto prático.

> Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas [na Figura 3.12]. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento (ENEM, 2010, p. 24).

Figura 3.12 | Modelos de tanques



Fonte: adaptada de ENEM (2010, p. 24).

Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \approx 3$.) (ENEM, 2010, p. 24)

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

2. O volume de um cilindro é um importante conceito matemático que apresenta diversas aplicações em nosso cotidiano. Como já sabemos, volume é uma medida de capacidade. O problema a seguir apresenta uma situação prática para a construção de uma cisterna cilíndrica que visa ao aumento do abastecimento de água.

Para resolver o problema de abastecimento de água, foi decidida, numa reunião de condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e

estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna, a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π. (ENEM, 2015, p. 21)

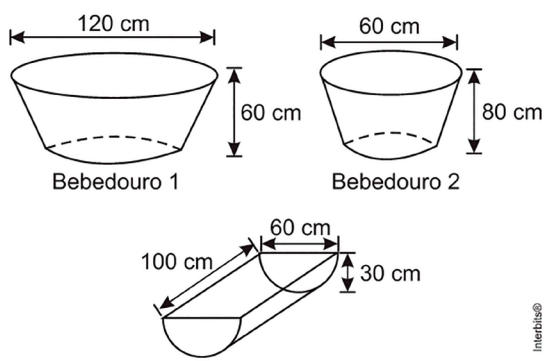
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5.
b) 1,0.
c) 2,0.
d) 3,5.
e) 8,5.

3. O semicilindro é uma figura que representa um cilindro seccionado ao meio. A parte superior de um bebedouro (como o apresentado neste exercício) representa bem a secção meridional estudada nesta seção. O conhecimento sobre planificação de um cilindro também será recordado agora. (Figura 3.13).

> Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura (ENEM, 2010, p. 20).

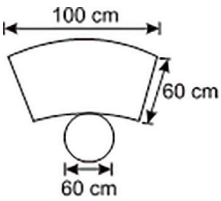
Figura 3.13 | Os três recipientes



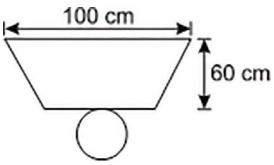
Fonte: ENEM (2010, p. 20).

Escolha a opção que representa a planificação para o bebedouro 3, sabendo que nenhum dos recipientes possui tampa:

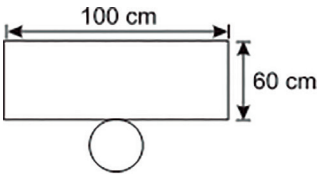
a)



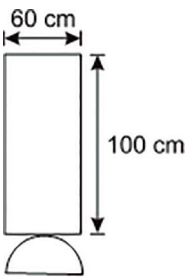
b)



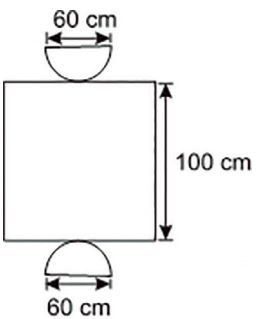
c)



d)



e)



Seção 3.2

Cones

Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo a mais uma seção de estudos do nosso curso de Geometria espacial! Desta vez, com foco na aquisição de conhecimento sobre cones. A aprendizagem a ser desenvolvida a partir de agora lhe dará condições para continuar exercendo com brilhantismo e competência as missões confiadas a você. Por falar nisso, a empresa *Packing-Design* conseguiu consagrar seu trabalho naquela promissora indústria de sorvetes que apresentamos na seção anterior. Naquele momento, a indústria havia anunciado que começaria a comercializar sorvetes em potes cilíndricos. Pois bem, a boa aceitação do público fez com que a empresa prosseguisse com seu projeto inicial, sendo o próximo passo o lançamento de sorvetes na sua forma mais tradicional, o sorvete de "casquinha"!

A massa do sorvete terá um volume de 75 *mL*, mas na embalagem constará o peso de 81 gramas, já que a casquinha em formato de cone é comestível. Mais uma vez pensando na estocagem, a *Packing-Design* sugere que as casquinhas sejam estocadas em caixas com bases retangulares.

Sabendo que o diâmetro da casquinha é de 5 *cm* e em cada caixa caberão 12 casquinhas, determine a altura da casquinha de sorvete. Para resolver essa situação, considere $\pi = 3$.

Após solucionar esse desafio, você pode sugerir outros tamanhos de casquinha para a *Packing-Design*, bem como outros formatos de embalagem. Lembre-se de que é também sua função tornar essa comercialização de sorvetes cada vez mais rentável.

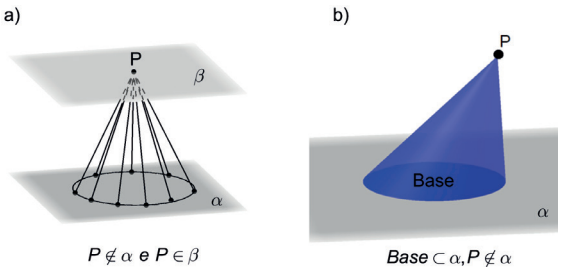
A fim de que você apresente uma ideia consistente à empresa para a qual está prestando serviços, é mais do que necessário o domínio do conteúdo envolvendo cones. Vamos iniciar, portanto, a parte teórica desta unidade, que apresenta os conceitos sobre esse sólido. Esperamos que essa explanação contribua para o bom desenvolvimento do seu trabalho na *Packing-Design*. Bons estudos!

Não pode faltar

Dando continuidade ao estudo sobre corpos redondos, analisaremos agora toda a parte teórica que abrange o conceito sobre cones. Como tem sido até o momento, iniciaremos nossos estudos com a formalização dos conceitos.

Definição: considere o plano α e um círculo contido nesse plano. Sendo *P* um ponto não pertencente ao plano α, chama-se cone a região delimitada pelos infinitos segmentos de reta, com extremos no círculo e no ponto *P* dado (Figura 3.14).

Figura 3.14 | Cone segundo sua definição

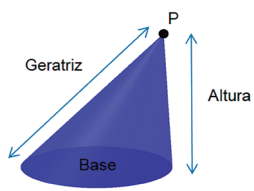


Fonte: elaborada pelo autor.

Elementos de um cone

Vamos agora conhecer os elementos que compõem os cones. Dois desses elementos ficam evidentes na própria definição. São eles: a base circular e um ponto que não pertença ao plano da base, que é o vértice do cone. Além desses dois elementos, fazem parte do cone as geratrizes, que são os segmentos com extremidades no ponto *P* e nos pontos da circunferência, e a altura, que é a distância entre o vértice (ponto *P*) e o plano da base. Lembre-se de que a altura de qualquer sólido é o segmento que forma um ângulo reto com o plano da base. Veja tais elementos representados na Figura 3.15.

Figura 3.15 | Elementos de um cone



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

Depois de apresentada a definição matemática sobre cone, você já é capaz de distingui-lo de uma pirâmide? Existem similaridades entre eles? Quais são as principais diferenças?

Mais uma vez, sugerimos o *software* Geogebra para ajudá-lo nessa reflexão, que pode ser pautada na construção de cada um desses sólidos. Os *links* a seguir dão orientações quanto aos procedimentos:

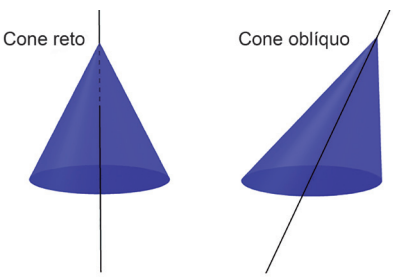
TAMBURINI, Ricardo. Construção da pirâmide com o uso do Geogebra 3D. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bfFPGZrfD8Y>. Acesso em: 9 fev. 2018

_____. Construção do cone usando o Geogebra 3D. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=43J_PzdDIGk>. Acesso em: 9 fev. 2018

Classificação dos cones

Assim como os poliedros vistos até o momento, os cones podem ser retos ou oblíquos. Tal classificação depende do ângulo que o eixo central faz com a base do cone (Figura 3.16).

Figura 3.16 | Classificação dos cones



Fonte: elaborada pelo autor.

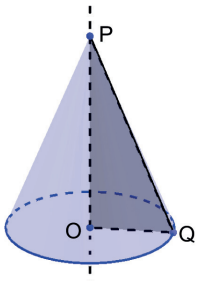
Se o eixo do cone for oblíquo em relação ao plano da base, será classificado como *cone oblíquo*. Entretanto, sendo o eixo perpendicular ao plano da base, a classificação passa a ser de *cone reto*.

Ao observar a Figura 3.16, perceba que, diferentemente do que ocorria no cilindro, quando o cone é reto, a altura e a geratriz desse corpo redondo não podem ser iguais, dadas as naturezas e as formas distintas desses sólidos. A geratriz de um cone sempre será oblíqua.

"O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos" (DOLCE; POMPEU, 2013, p. 237).

Veja, na Figura 3.17, que se girarmos o triângulo *OPQ* em torno do eixo central, o sólido resultante será um cilindro reto.

Figura 3.17 | Cone de revolução

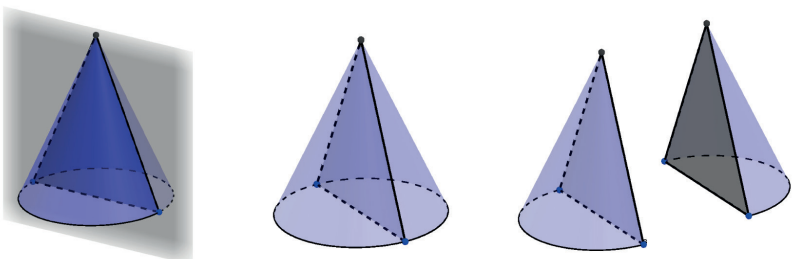


Fonte: elaborada pelo autor.

Secção meridiana

Secção meridiana do cone é definida pela intersecção de um plano com o seu eixo. Em outras palavras, tal intersecção passa pelo vértice do cone e, simultaneamente, pelo centro de sua base circular, dividindo o cone em dois sólidos congruentes (Figura 3.18).

Figura 3.18 | Representação de uma secção meridiana

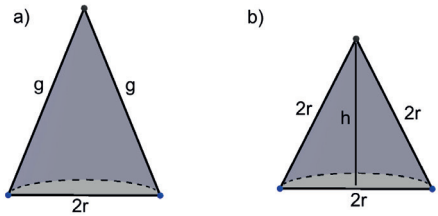


Fonte: elaborada pelo autor.

A secção meridiana de um *cone reto* é um triângulo isósceles (Figura 3.19a). Se a secção meridiana de um cone for um triângulo equilátero, poderemos chamar esse sólido de "*cone equilátero*" (Figura 3.19b). No cone equilátero, a altura do cone pode ser

calculada por: $h = r\sqrt{3}$, além disso a geratriz (g) tem como medida duas vezes o raio da base ($g = 2r$).

Figura 3.19 | Triângulos da secção meridiana

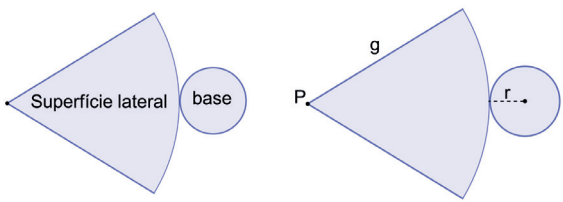


Fonte: elaborada pelo autor.

Área lateral do cone

Apresentaremos agora os principais conceitos algébricos sobre cone. No entanto, para você ter condições de desenvolver a plena compreensão dos temas a seguir, faz-se necessário o conhecimento da estrutura da planificação desse sólido.

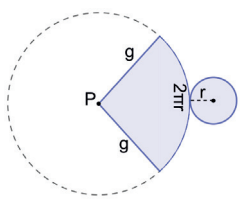
Figura 3.20 | Planificação de um cone



Fonte: elaborada pelo autor.

Como observado na Figura 3.20, a base do cone corresponde a um círculo de raio r. A superfície lateral de um cone circular reto de raio da base (r) e geratriz g corresponde à área de um setor circular de raio g e comprimento do arco de $2\pi r$ (Figura 3.21).

Figura 3.21 | Superfície total de uma circunferência e superfície de um cone (setor circular)



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, a área da superfície lateral de um cone pode ser encontrada por meio de uma "regra de três" simples, já que a área do setor circular e o comprimento do arco são, entre si, grandezas diretamente proporcionais. Antes do cálculo propriamente dito, consideremos:

- Dada uma circunferência com raio g (Figura 3.21), sua área é dada por πg^2.
- O comprimento dessa circunferência com raio g é 2π g.
- Se tomarmos um arco nessa circunferência usando o raio r da base de um cone, esse arco da superfície lateral terá comprimento $2\pi r$, já que r corresponde ao raio da base do cone.

Assim, concluímos que a área da superfície lateral de um cone (A_ℓ) é:

Área		Comprimento
πg^2	———	$2\pi g$
A_ℓ	———	$2\pi r$

$$A_\ell = \frac{2\pi r \times \pi g^2}{2\pi g} \therefore A_\ell = \frac{\cancel{2}\cancel{\pi} r \times \pi g^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{g}} \therefore \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Área da base de um cone

Observando novamente a Figura 3.20 e resgatando a definição sobre cones apresentada há pouco, devemos nos lembrar de que todo cone possui apenas uma base de formato circular.

Logo, a área da base de um cone é dada pela mesma fórmula da área de um círculo:

$$A_b = \pi r^2$$

Área total

A área total de um cone é dada pela soma da área da superfície lateral (setor circular) com a área da base:

$$A_t = A_\ell + A_b \therefore A_t = \pi r g + \pi r^2 \therefore \boxed{A_t = \pi r (g + r)}$$

Volume do cone

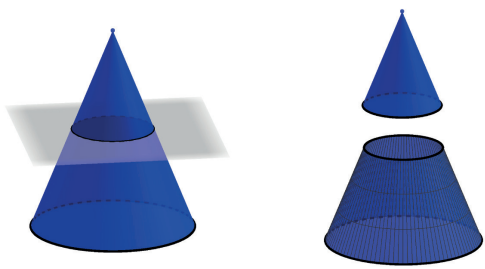
Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone será igual ao volume da pirâmide. Portanto:

$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3} A_b \times h} \text{ ou } \boxed{V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h}$$

Volume, área lateral e área total do tronco de um cone

Tomando uma secção transversal de um cone paralela à base, obtêm-se dois novos sólidos: um novo cone, com raio da base inferior ao original, e o chamado **tronco de cone** (gerado através da secção transversal) (Figura 3.22).

Figura 3.22 | Ilustração de um tronco de cone obtido da secção transversal

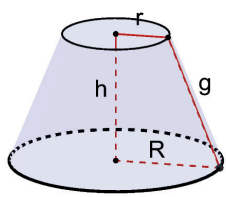


Fonte: elaborada pelo autor.

O tronco de cone possuirá uma nova geratriz (g), altura (h) e duas bases paralelas entre si, a maior de raio (R) e a menor de raio (r) (Figura 3.23). Dessa forma, podemos concluir que:

- A área da base menor de um tronco de cone é $A_b = \pi r^2$.
- A área da base maior de um tronco de cone é $A_B = \pi R^2$.

Figura 3.23 | Elementos do tronco



Fonte: elaborada pelo autor.

A área lateral do tronco de um cone é equivalente à área de um trapézio, sendo a base menor (*b*) igual a $2\pi r$ e a base maior (*B*) igual a $2\pi R$. A altura desse trapézio é a geratriz (*g*) do tronco. Logo:

$$A_{trapézio} = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

$$A_{\ell} = \left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right)g$$

$$A_{\ell} = \frac{2\pi Rg + 2\pi rg}{2}$$

$$A_{\ell} = \cancel{2}\pi g\left(\frac{R+r}{\cancel{2}}\right)$$

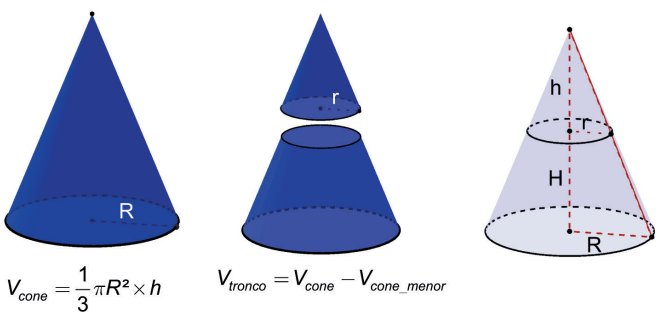
Logo, a área lateral é dada por: $\boxed{A_{\ell} = \pi g(r+R)}$.

Concluímos, então, que a área total do tronco de cone é a soma das áreas das bases (maior e menor) com a área lateral. Assim:

$$\boxed{A_t = A_b + A_B + A_{\ell}}.$$

Por fim, para calcular o volume do tronco, devemos subtrair do volume do cone original o volume do cone menor, formado a partir da secção transversal (Figura 3.24).

Figura 3.24 | Volume do tronco



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que o cone maior possui raio *R* e altura *H* e o cone menor tem raio *r* e altura h, podemos calcular o volume do tronco do seguinte modo: $\boxed{V_t = \frac{\pi.H}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$.

Demonstração:

Para demonstrar a fórmula do volume do tronco do cone, partimos da semelhança de triângulos, usando os elementos da Figura 3.24:

$$\frac{H+h}{h}=\frac{R}{r}$$
$$(H+h)r=hR$$
$$Hr+hr=hR$$
$$Hr=hR-hr$$
$$Hr=h(R-h)$$
$$h=\frac{Hr}{R-r} \qquad \boxed{1}$$

O volume do tronco de cone é encontrado pela diferença entre o volume do cone maior e o menor:

$$V_t=V_{maior}-V_{menor}$$
$$V_t=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h)-\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V_t=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+R^2h-r^2h\right)$$
$$V_t=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+h(R^2-r^2)\right) \qquad \boxed{2}$$

Substituindo 1 em 2, tem-se:

$$V_t=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+\frac{Hr}{R-r}(R^2-r^2)\right)$$
$$V_t=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+\frac{Hr}{\cancel{R-r}}\cancel{(R-r)}(R+r)\right)$$
$$V_t=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+HrR+Hr^2\right)$$

Logo: $V_t=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+rR+r^2\right)$, como queríamos demonstrar.

Exemplificando

Depois de apresentadas as fórmulas, os conceitos e os elementos de um cone e de tronco de um cone, vamos resolver este exercício para assimilar melhor as informações.

a. Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone circular reto, cujo raio da base mede 6 m e a geratriz, 10 m.

Obs.: relembramos a importância de representar corretamente a unidade de medida de cada item.

Resposta:

I. $A_l = \pi rg \therefore A_l = \pi \times 6 \times 10 \therefore A_l = 60\pi \ m^2$

II. $A_t = A_l + A_b \therefore A_t = 60\pi + 36\pi \therefore A_t = 96\pi \ m^2$

III. Por ser um cone reto, recordando a ideia de secção meridiana, a altura pode ser calculada da seguinte forma:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$10^2 = 6^2 + h^2$$
$$h^2 = 100 - 36$$
$$h^2 = 64$$
$$h = 8 \ m$$

IV. $V = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 \therefore V = \frac{36 \times 8}{3}\pi \therefore V = 96\pi \ m^3$

b. Considere que o raio da base menor e o raio da base maior de um tronco de cone meçam 5 m e 8 m, respectivamente. Sabendo que a altura referente a esse tronco é de 9 m, determine seu volume.

Resposta:

$$V = \frac{\pi.9}{3}(8^2 + 5^2 + 8.5)$$
$$V = 3\pi.(64 + 25 + 40)$$
$$V = 387\pi \ cm^3$$

Pesquise mais

Para ampliar os conceitos explorados nesta seção, assista à seguinte videoaula. Lembre-se de pesquisar outros materiais didáticos sobre cones, a fim de aprofundar os seus conhecimentos.

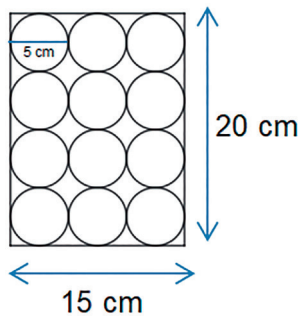
VESTIBULANDIA.COM. Geometria espacial métrica – Cones – Parte 1. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=g5GMIQYKQV4&t=434s>. Acesso em: 9 fev. 2018

Sem medo de errar

Chegou o momento de resolver o desafio da *Packing-Design* destinado a você. Você se lembra do problema das casquinhas proposto no início da seção? Diante de todo aprendizado até aqui adquirido, vamos resolvê-lo!

Sendo o diâmetro da casquinha igual a 5 *cm*, então o raio será igual à metade desse valor, ou seja, igual a 2,5 *cm*. Na Figura 3.25, há uma ilustração do fato apresentado no problema.

Figura 3.25 | Ilustração da caixa de sorvetes



Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação, devemos nos lembrar de que 1 *mL* é equivalente a 1 *cm*, portanto o volume da casquinha de 75 *mL* é equivalente a 75 *cm*. Tendo consciência dessas informações, basta recorrermos à fórmula do volume de um cone.

Logo:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$75 = \frac{2{,}5^2 . 3 . h}{3}$$

$$18{,}75h = 225$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

Como atividade complementar, sugerimos no enunciado que você ofereça, ao menos, mais uma sugestão de tamanho de casquinha, ou mesmo de caixas para estocagem do produto. Como as caixas têm formato de prismas, você tem condições de propor tamanhos distintos, utilizando-se dos conceitos já estudados.

Siga a mesma dinâmica para a construção de sua proposta utilizada na seção anterior. Dessa maneira, você está livre para usar diferentes *softwares* para elaborar seu documento, que deve ser sucinto e esclarecedor.

Avançando na prática

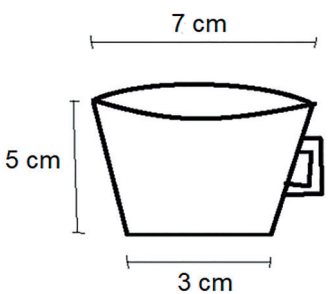
Xícara de café

Descrição da situação-problema

Depois da apresentação e do estudo dos conceitos sobre cones, você deve estar imaginando o quanto esse sólido é recorrente em nosso cotidiano. Pois bem, imagine a seguinte situação:

Uma empresa de cosméticos fará uma reunião com seus 12 distribuidores. Uma funcionária do serviço de cozinha ficou encarregada de servir uma xícara de café para cada um dos integrantes da reunião. Sabe-se que o café, após ser coado, rende uma porção de 800 *mL*. Se a cozinha dispõe de 12 xícaras, em formato de tronco de cone, iguais às do desenho a seguir, quantas vezes a funcionária precisará coar o café para servir todo mundo ao menos uma vez? (Considere $\pi = 3$.)

Figura 3.26 | Ilustração com dimensões para o cálculo



Fonte: adaptada de: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/download/file.php?id=5917>. Acesso em: 9 fev. 2018.

Resolução da situação-problema

Como comentado no enunciado da situação-problema e comprovado na ilustração da Figura 3.26, notamos que a xícara é um tronco de cone. Dessa maneira, para resolver tal situação, vamos recorrer à fórmula do volume do tronco de cone. Mas, antes disso, identificaremos os elementos do tronco em questão:

- Raio da base maior (R) é igual a 3,5 *cm*, já que o diâmetro superior da xícara é 7 *cm*.

- Raio da base menor (r) é igual a 1,5 *cm*, já que o diâmetro inferior da xícara é 3 *cm*.

- A altura (h) da xícara é igual a 5 *cm*.

Portanto:

$$V = \frac{\pi.h}{3}(R^2 + r^2 + R.r)$$
$$V = \frac{3.5}{3}(3,5^2 + 1,5^2 + 3,5.1,5)$$
$$V = 5.(12,25 + 2,25 + 5,25)$$
$$V = 5.19,75$$
$$V = 98,75 \text{ mL}$$

Ao dividir o total de café coado (800 *mL*) pelo volume da xícara, concluímos que a funcionária da cozinha precisará coar o café ao menos duas vezes. Observe que uma coada encheria 8 xícaras; duas coadas, 16. Como precisamos de pelo menos 12 xícaras cheias para servir os distribuidores, a funcionária do café precisará coá-lo, no mínimo, 2 vezes.

Faça valer a pena

1. O formato cônico está presente em diversas circunstâncias do nosso cotidiano. Na questão a seguir, é explorado por meio de uma nova tendência no mercado alimentício, as embalagens cônicas de batata frita. Para resolvermos essa questão, precisamos nos recordar do conceito de volume de um cone, aprendido nesta seção.

O consumo de batata frita no Brasil sempre teve números expressivos. O alimento é bem aceito pelo brasileiro e combina com diversas refeições, seja com hambúrgueres, pratos executivos ou mesmo sozinha, vendida

como opção das chamadas "porções" em bares e restaurantes. Para diversificar e deixar o produto ainda mais atrativo, alguns comerciantes de batata estão optando pela venda em cones de papelão, embalagens que já são tradicionais na venda de pipocas, por exemplo. Com um semicírculo de papelão decorado com diâmetro de 48 *cm*, um comerciante faz suas próprias embalagens, em formato de cone circular reto, para a venda da batata frita. Qual é o volume aproximado dessas embalagens? (Considere $\pi = 3$.)

a) 2.550 cm^3.
b) 2.780 cm^3.
c) 2.830 cm^3.
d) 2.950 cm^3.
e) 2.989 cm^3.

2. Depois de diversos exemplos sobre os cones em nosso cotidiano, apresentamos novamente o seu formato presente em um alimento. Desta vez, em um doce muito consumido por crianças, o guarda-chuva de chocolate. Embora bastante pequeno, é plenamente possível calcularmos o seu volume.

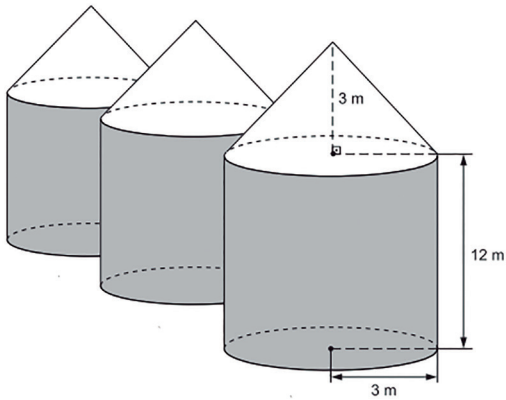
Joana é professora de Matemática, e uma das guloseimas que mais marcaram sua infância foram os pequenos guarda-chuvas de chocolate. Um dia no supermercado, Joana se deparou com esse chocolate e resolveu comprar uma caixa com 45 unidades. Sabendo que cada guarda-chuva tem 8 *cm* de altura e 4 *cm* de raio, qual foi a quantidade total, em volume de chocolate, que Joana comprou? (Considere $\pi = 3$.)

a) 128 cm^3.
b) 4.260 cm^3.
c) 5.760 cm^3.
d) 6.250 cm^3.
e) 6.600 cm^3.

3. A questão a seguir traz a representação de uma figura que é uma junção dos dois corpos redondos estudados até agora (cilindro e cone). Trata-se de um equipamento denominado silo, que serve para estocar variados tipos de grãos. O seu volume é facilmente calculado, se considerarmos as figuras de forma separada e, em seguida, somarmos os resultados.

> Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento (ENEM, 2016, p. 30)

Figura 3.27 | Modelo de silos para armazenamento



Fonte: Enem (2016, p. 30).

Utilize 3 como aproximação para π. O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

Seção 3.3

Esferas

Diálogo aberto

Caro aluno, esta seção finaliza o estudo sobre corpos redondos. Aprendemos até o momento sobre o cilindro e o cone, suas superfícies, seus elementos, suas classificações, bem como os cálculos de suas áreas e seus volumes. Nesta terceira fase nos dedicaremos ao estudo das esferas, a fim de que você conclua o seu último trabalho para a *Packing-Design*.

Esse último trabalho a ser concluído para a *Packing-Design* consiste em desenvolver uma embalagem esférica para armazenar bombons que possuem a forma de um cubo. O cliente solicitou três tamanhos de esferas, uma para armazenar 100 *g* de bombons, outra para 250 *g* e a última para 400 *g*. Então, seu trabalho é determinar os tamanhos corretos para cada embalagem. É importante destacar que o tamanho dos bombons não deve se alterar, apenas a quantidade necessária para cada embalagem, cuja aresta mede 2 *cm*.

Para concluir seu trabalho nesta seção, você conhecerá os elementos da esfera e aprenderá a calcular a área e o volume dela.

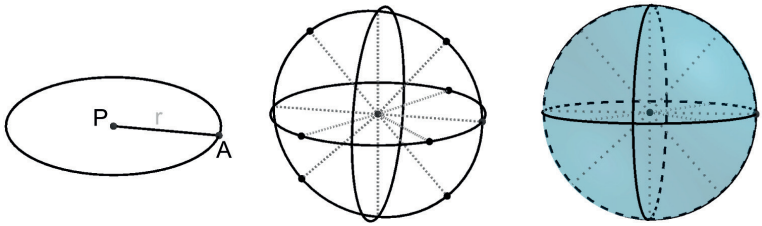
Bons estudos!

Não pode faltar

Nesta unidade do nosso curso de Geometria espacial, estudaremos os conceitos e as definições abrangidas sobre o último corpo redondo a ser apresentado: a esfera.

Definição: dados um ponto P (centro da esfera) e um ponto A quaisquer no espaço, chama-se esfera a união de todos os pontos no espaço cuja distância até P é menor que ou igual ao segmento $\overline{PA}$, denominado, em nosso exemplo, raio da esfera (Figura 3.28).

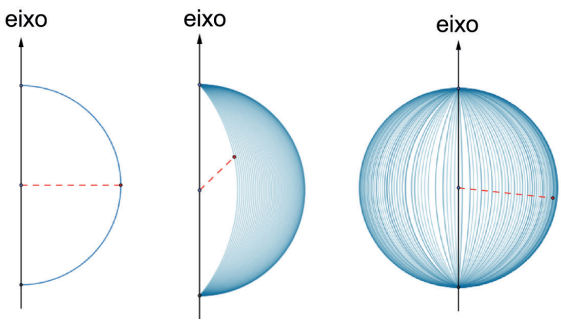
Figura 3.28 | Esfera segundo sua definição



Fonte: elaborada pelo autor.

Segundo Dolce e Pompeu (2013, p. 250), podemos igualmente pensar que: "A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro" (Figura 3.29). Dados um ponto *P* no espaço e um segmento de reta *r*, o conjunto de todos os demais pontos no espaço, com a mesma distância *r*, denomina-se superfície esférica. O ponto *P* é chamado de centro da esfera e o segmento *r*, raio.

Figura 3.29 | Sólido de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

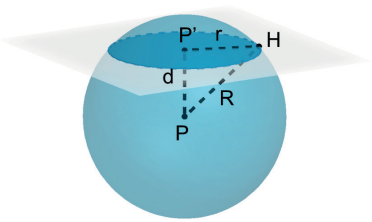
Secção

Pensemos agora na relação pitagórica existente na esfera, mas, antes disso, devemos nos lembrar de que uma esfera, assim como os demais sólidos, pode ser interceptada por um plano secante, criando uma secção que na esfera sempre será um círculo. Se essa secção passasse pelo centro da esfera, teríamos um círculo de raio máximo equivalente ao raio da própria esfera. Na Figura 3.30, apresentamos uma esfera de raio *R*, sendo *d* a distância do plano

secante ao centro e *r*, o raio da secção. Logo, a seguinte sentença é válida:

$$\boxed{r^2 = R^2 - d^2}$$

Figura 3.30 | Secção da esfera



$R^2 = d^2 + r^2$

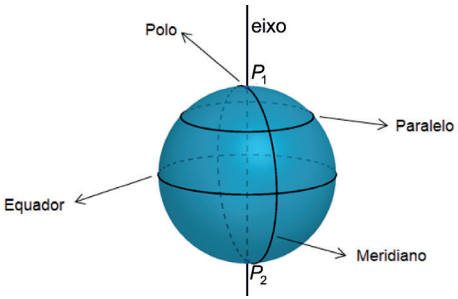
Fonte: elaborada pelo autor.

Elementos da esfera

Vamos agora conhecer os elementos que compõem a esfera. Conforme a representação da Figura 3.31, a esfera possui os seguintes elementos:

- Polos: são os pontos resultantes das interseções entre o eixo e a superfície esférica.
- Equador: é a circunferência de raio máximo, gerado por uma secção que passa pelo centro da esfera.
- Paralelo: qualquer circunferência gerada pela secção na superfície esférica que seja paralela ao equador.
- Meridiano: é uma secção na superfície esférica cujo plano passa pelo eixo da esfera.

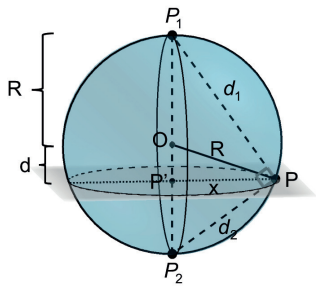
Figura 3.31 | Elementos da esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Definidos os elementos da esfera, veremos o que significa a distância polar. Se tomarmos um ponto *P* em um paralelo qualquer, a distância entre o ponto *P* e cada um dos polos será chamada de distância polar. Na Figura 3.32, temos a representação dessa distância, como consequência da definição de polos; para cada ponto escolhido no paralelo, existem duas distâncias (d_1, d_2).

Figura 3.32 | Distância polar



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular tais distâncias, podemos recorrer ao uso das relações trigonométricas. O triângulo $\triangle P_1PP_2$ pode ser dividido em dois novos triângulos: $\triangle P_1PP'$ e $\triangle P'PP_2$, dos quais obtemos as relações:

$$d_1^2 = (R+d)^2 + x^2$$

$$d_2^2 = (R-d)^2 + x^2 \quad (1)$$

Por meio de relações trigonométricas, também podemos escrever *x* como:

$$R^2 = d^2 + x^2$$

$$x^2 = R^2 - d^2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), resulta:

$$d_1^2 = (R+d)^2 + R^2 - d^2$$

$$d_2^2 = (R-d)^2 + R^2 - d^2$$

Logo, calculamos as distâncias polares por: $\boxed{d_1^2 = 2R(R+d)}$ e $\boxed{d_2^2 = 2R(R-d)}$, quando o ponto estiver localizado abaixo do centro da circunferência (abaixo do ponto de origem *O*), e $\boxed{d_1^2 = 2R(R-d)}$ e $\boxed{d_2^2 = 2R(R+d)}$, quando o ponto estiver localizado acima do centro da circunferência.

Reflita

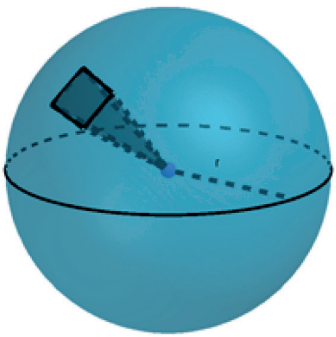
Nesta seção e, de forma geral nesta unidade, deparamo-nos diversas vezes com as figuras: círculo, circunferência e, mais recentemente, com a esfera. Elas possuem algo em comum? Você é capaz de diferenciá-las, imaginando ao menos um exemplo correlato para cada uma delas?

Que tal se utilizar o software Geogebra para representá-las e confirmar suas convicções matemáticas acerca do assunto?

Área da superfície esférica:

De maneira intuitiva, vamos deduzir a área da superfície esférica. Com base na Figura 3.33, imaginemos infinitas pirâmides com base na superfície da esfera e altura igual ao raio dela.

Figura 3.33 | Ilustração de uma pirâmide de base quadrada inscrita em uma esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, podemos concluir que a soma de todos os volumes de todas as pirâmides inscritas na esfera é igual ao volume da esfera. Assim:

$V_{esfera} = \frac{A_1 r}{3} + \frac{A_2 r}{3} + \frac{A_3 r +}{3} \ldots \frac{A_n r}{3}$, portanto:

$\frac{4}{3}\pi r^3 = r\left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{3} + \ldots \frac{A_n}{3}\right)$. Note que: $r\left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{3} + \ldots \frac{A_n}{3}\right)$ corresponde exatamente à área da superfície esférica (A_S). Logo:

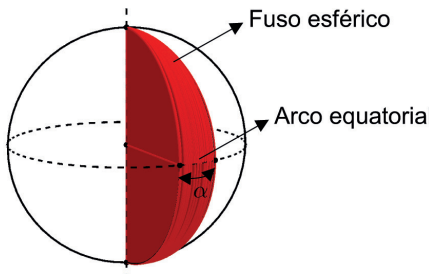
$\frac{4}{3}\pi r^3 = r\frac{A_s}{3} \therefore \not{r}\frac{A_s}{\not{3}} = \frac{4}{\not{3}}\pi r^{\not{3}} \therefore \boxed{A_s = 4\pi r^2}$.

Área do fuso esférico

Como nos lembram Dolce e Pompeu (2013, p. 254), fuso esférico "é a interseção da superfície de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica".

A Figura 3.34 apresenta os principais elementos a serem considerados no fuso esférico. Perceba que o ângulo α é medido na secção equatorial e reforça a ideia de que o fuso esférico corresponde a uma parte da área da superfície esférica.

Figura 3.34 | Ilustração de fuso esférico



Fonte: elaborada pelo autor.

Na área da superfície lateral de uma esfera, o ângulo correspondente à área total é o de 360°. Portanto, podemos calcular a medida do fuso da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \textit{Ângulo.....Área} \\ 360^\circ _____ 4\pi r^2 \\ \alpha _____ A_{fe} \end{array}$$

$$A_{fe}.360^\circ = 4\pi r^2.\alpha \therefore \boxed{A_{fe} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ}}$$

Caso o ângulo α esteja em radianos, utilizamos:

$$\begin{array}{l} 2\pi _____ 4\pi r^2 \\ \alpha _____ A_{fe}. \end{array}$$

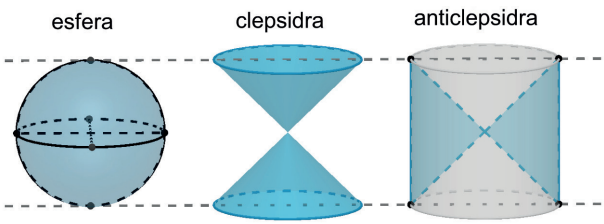
$$\boxed{A_{fe} = 2r^2\alpha}$$

Volume da esfera

A fórmula mais importante desta seção será demonstrada, mais uma vez, por meio do conceito do Princípio de Cavalieri. Para

desenvolvermos nosso raciocínio, considere os seguintes sólidos apresentados na Figura 3.35. Dado um cilindro equilátero, o sólido formado a partir das bases desse cilindro, com vértices no ponto médio da altura do cilindro, é chamado de clepsidra. Veja que o resultado são dois cones congruentes. Considerando o mesmo cilindro, quando excluirmos os dois cones (clepsidra), teremos um novo sólido chamado anticlepsidra.

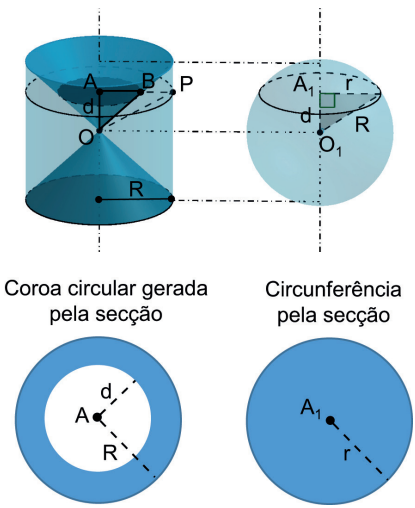
Figura 3.35 | Esfera, clepsidra e anticlepsidra



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere, agora, um plano β que secciona uma clepsidra inscrita em um cilindro equilátero com base de raio R e secciona também uma esfera de mesmo raio R. Na Figura 3.36, observe que a secção no cilindro gera uma coroa circular, enquanto na esfera gera um círculo.

Figura 3.36 | Secção de um plano β em uma esfera e um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Por definição, a área da secção na esfera (círculo) é: πr^2, mas, como visto na Figura 3.24, existe uma relação entre o raio da circunferência gerada pela secção (r), o raio da esfera (R) e a distância entre o plano da secção e o centro da esfera (d), portanto, pela relação pitagórica, temos $r^2 = R^2 - d^2$. Substituindo o raio r na área da secção na esfera, o cálculo pode ser efetuado da seguinte forma: $\pi(R^2 - d^2)$.

Já a área da secção no cilindro (coroa circular) pode ser determinada pela diferença entre as áreas da circunferência do cilindro e do cone, ambas geradas pela secção. O segmento *AP* se refere ao raio do cilindro, que é o mesmo raio da esfera, o triângulo formado pela secção e pelo cone é isósceles, pois *OA* = *d* e *AB* = *d*. Logo, temos como raios *R* para a circunferência externa e *d* para a circunferência interna. Concluímos que podemos escrever a área da coroa circular como: $\pi R^2 - \pi d^2 \Rightarrow \pi(R^2 - d^2)$.

Conforme fazemos essa diferença (área do cilindro – área do cone), ao longo de todo o sólido, o que resulta é exatamente a área da anticlepsidra. Sendo as áreas das duas secções iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, seus volumes também são. Dessa forma, podemos sistematizar a seguinte relação: $V_{esfera} = V_{anticlepsidra}$.

No entanto, devemos analisar que:

$$V_{anticlepsidra} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$$

$$V_{anticlepsidra} = \pi R^2.2R - 2.\left(\frac{1}{3}\pi R^2.R\right)$$

$$V_{anticlepsidra} = \pi R^2.2R - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$V_{anticlepsidra} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

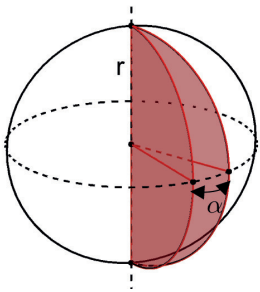
Então, obtemos:

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Volume da cunha esférica

Mais uma vez, reportamo-nos a Dolce e Pompeu (2013, p. 255), para definir cunha esférica, que é "a interseção de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera". A Figura 3.37 apresenta os principais elementos a serem considerados na cunha esférica. O ângulo α é medido na secção equatorial e reforça a ideia de que o fuso esférico corresponde a uma parte da área da superfície esférica.

Figura 3.37 | Ilustração de cunha esférica



Fonte: elaborada pelo autor.

No volume de uma esfera, o ângulo correspondente ao volume total, naturalmente, é o de 360°. Portanto, podemos calcular a medida da cunha da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \textit{Ângulo} & \textit{Volume} \\ 360^\circ & \dfrac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha & V_{ce} \end{array}$$

$$V_{ce}.360^\circ = \frac{4\pi r^3}{3}.\alpha \therefore \boxed{V_{ce} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ}}$$

Usando o ângulo α em radianos, tem-se:

$$\begin{array}{ll} 2\pi & \dfrac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha & V_{ce} \end{array}$$

$$\boxed{V_{ce} = \frac{2r^3\alpha}{3}}$$

Assimile

Sintetizando, podemos obter os valores referentes a uma esfera aplicando as seguintes fórmulas:

Área da superfície esférica: $\boxed{A_s = 4\pi r^2}$.

Volume da esfera: $\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Área do fuso esférico: $\boxed{A_{fe} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^o}}$.

Volume da cunha esférica: $\boxed{A_{ce} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^o}}$.

Exemplificando

Como já conhecemos as principais fórmulas sobre esfera e superfície esférica, vamos observar alguns exemplos:

a. Uma esfera tem 56 cm de diâmetro. Determine a área da superfície esférica e o volume:

I. $A_s = 4\pi r^2 \therefore A_s = 4\pi.28^2 \therefore A_s = 3136\pi\ cm^2$.

II $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore V_e = \frac{4}{3}.\pi.28^3 \therefore V_e = \frac{87808\pi}{3}\ cm^3$.

b. Uma esfera possui $4\pi\ cm^2$ de superfície. Qual é a área de um fuso de 30° pertencente a essa esfera?

$$A_{fe} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^o} \therefore A_{fe} = \frac{\pi.1^2.30^o}{90^o} \therefore A_{fe} = \frac{\pi}{3}\ cm^2.$$

Pesquise mais

Para ampliar os conceitos explorados nesta seção, assista à videoaula indicada a seguir:

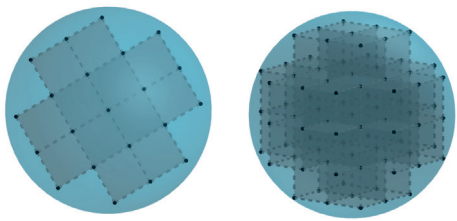
VESTIBULANDIA.COM. Geometria espacial métrica – Esferas e partes – Parte 1. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x9ojr7NBCk0>. Acesso em: 12 fev. 2018

Como de costume, recomendamos que você pesquise outros materiais didáticos que abordem o tema esferas, a fim de assimilar mais sobre tal conteúdo.

Sem medo de errar

Solicitaram-lhe determinar o tamanho de três embalagens esféricas para armazenar bombons que apresentam a forma de um cubo com aresta de 2 *cm*. A diferença entre as embalagens está exclusivamente no tamanho, pois uma deverá armazenar 100 *g*, outra, 250 *g* e a terceira com capacidade para 400 *g*. A Figura 3.38 representa o esquema para as embalagens.

Figura 3.38 | Esquema para embalagens de bombons

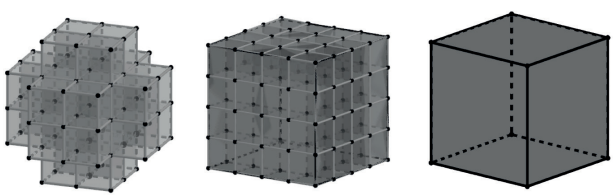


Fonte: elaborada pelo autor.

Como o bombom apresenta aresta de 2 *cm*, cada um ocupará o espaço de $8\ cm^3$ (volume). Considerando a unidade $g\ /\ cm^3$, adotaremos que cada bombom possui 8 *g*, portanto para a embalagem com 100 *g*, precisaríamos de 12,5 bombons. Como isso não é possível, o gerente determinou que poderiam ser usados 13 bombons. Para a embalagem de 250 *g*, o gerente determinou que poderiam ser usados 32 bombons, e para 400 *g*, 50 bombons.

Pelo Princípio de Cavalieri, aprendemos que o volume está associado à quantidade, e não à forma, portanto podemos considerar os bombons dentro da embalagem como se fossem um único cubo (Figura 3.39), no qual o volume corresponderia à soma do volume de cada cubo menor.

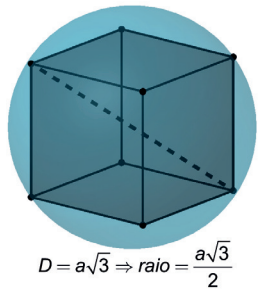
Figura 3.39 | Princípio de Cavalieri para os bombons



Fonte: elaborada pelo autor.

Após aplicar o Princípio de Cavalieri, teremos uma esfera para a embalagem, conforme a Figura 3.40, na qual a diagonal do cubo equivale ao diâmetro da esfera (D). Com base nessa informação, é possível realizar os cálculos.

Figura 3.40 | Esquema para embalagem após o Princípio de Cavalieri



Fonte: elaborada pelo autor.

- Embalagem de 100 *g* = 13 bombons:

Para essa quantidade de bombons, temos o volume de $104\ cm^3$. Logo, a aresta desse cubo é $\sqrt[3]{104} = 4{,}7\ cm$. A partir da aresta do cubo, calculamos o raio da esfera: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4{,}7\sqrt{3}}{2} = 4{,}07.$ Por fim, o volume da embalagem será:

$$v_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$v_1 = \frac{4}{3}\pi 4{,}07^3$$

$$v_1 = 282{,}5\ cm^3$$

- Embalagem de 250 *g* = 32 bombons:

Para essa quantidade de bombons, temos o volume de $256\ cm^3$. Logo, a aresta desse cubo é $\sqrt[3]{256} = 6{,}3\ cm$. A partir da aresta do cubo, calculamos o raio da esfera: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6{,}3\sqrt{3}}{2} = 5{,}45.$ Por fim, o volume da embalagem será:

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi 5{,}45^3$$

$$v_2 = 678\ cm^3$$

- Embalagem de 400 g = 50 bombons:

Para essa quantidade de bombons, temos o volume de $400\ cm^3$. Logo, a aresta desse cubo é $\sqrt[3]{400} = 7{,}4\ cm$. A partir da aresta do cubo, calculamos o raio da esfera: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7{,}4\sqrt{3}}{2} = 6{,}41.$ Por fim, o volume da embalagem será:

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$v_2 = \frac{4}{3}\pi 6{,}41^3$$
$$v_2 = 1103\ cm^3$$

Avançando na prática

Bolinhas de gude

Descrição da situação-problema

Depois da apresentação e do estudo dos conceitos sobre esferas, você deve estar imaginando o quanto esse sólido é recorrente em nosso cotidiano. Pois bem, imagine a seguinte situação:

As bolinhas de gude durante décadas fizeram parte da infância das crianças brasileiras. Em geral, eram vendidas em saquinhos em costura de náilon.

Suponhamos que um garoto tenha comprado dois saquinhos de bolinhas de gude. Embora as bolinhas em cada saquinho tivessem desenhos diferentes, possuíam exatamente o mesmo tamanho. Em um dos saquinhos, havia 30 bolinhas de raio de 1 *cm* e o outro saquinho continha 15 bolinhas de raio de 2 *cm*. Quando juntos, qual é o peso total dos saquinhos com as bolinhas? (Considere $\pi = 3$.)

Resolução da situação-problema

Saquinho 1: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \therefore V = \frac{4}{3}.3.1^3 \therefore V = 4\ cm^3$. Agora, recordemos que: $1\ cm^3 = 1\ mL = 1\ g$. Logo, ao fazermos essas conversões, obtemos: $V = 4\ mL \therefore V = 4\ g$.

Cada bolinha pesa, então, 4 *g*; portanto, um saquinho de 30 bolinhas pesa 120 *g*, uma vez que $4 \times 30 = 120\ g$.

Saquinho 2:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \therefore V = \frac{4}{3}.3.2^3 \therefore V = 32\ cm^3 \therefore V = 0{,}032\ \text{L} \therefore V = 32\ g.$$

Cada bolinha pesa, então, 32 *g*; portanto, um saquinho de 15 bolinhas pesa 480 *g*, uma vez que $32 \times 15 = 480\ g$.

Concluímos que os dois saquinhos pesam juntos 600 *g*.

Faça valer a pena

1. Hogenboom (2016) escreveu um artigo para a rede BBC no qual apresenta um questionamento de um norte-americano sobre a forma da Terra: plana ou redonda? Esse questionamento fez parte da história da evolução do ser humano. No livro *Sobre o céu*, Aristóteles desmistificou o fato de a Terra ser plana, afirmando ainda que ela é um círculo não muito grande.

Explorando o tamanho de duas esferas, qual é o raio de uma esfera mil vezes maior, em volume, do que uma esfera de raio 1 *cm*?

a) 1 *cm*.
b) 10 *cm*.
c) 100 *cm*.
d) 1.000 *cm*.
e) 10.000 *cm*.

2. As esferas de aço oferecem inúmeras funcionalidades nas indústrias. Devido ao seu formato, as embalagens para transporte dessas esferas necessitam de cálculos precisos em relação aos seus recipientes. O exercício a seguir traz um exemplo dessa situação.

"Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 *cm* de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a" (ENEM, 2009, p. 24):

a) 4.
b) 8.
c) 16.
d) 24.
e) 32.

3. Podemos observar os corpos redondos em diferentes objetos úteis no nosso dia a dia como as taças. Quando compreendemos o significado do volume na geometria espacial, tornamo-nos capazes de comparar diferentes produtos e até mesmo saber se o que uma embalagem diz é o que realmente consta dentro dela.

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém

um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Figuras 1 e 2 | Formato das taças de champanhe

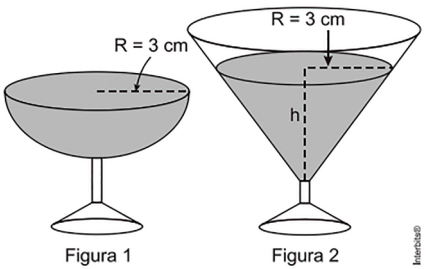


Figura 1 Figura 2

Considere: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Fonte: Enem (2010, p. 28).

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

a) 1,33.
b) 6,00.
c) 12,00.
d) 56,52.
e) 113,04.

Referências

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar** – Geometria Espacial: posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.

ENEM. **Prova de Redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias – Prova de Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Inep, 2010. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_Domingo_GAB.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018.

_____ **Prova de Redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias – Prova de Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Inep, 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_07_AZUL.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

HOGENBOOM, Melissa. Ainda duvida que a Terra é redonda? Veja como os gregos provaram isso há 2 mil anos. **BBC Brasil**, São Paulo, fev. 2016. Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2016/02/160130_vert_earth_terra_redonda_ml>. Acesso em: 12 fev. 2018.

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de geometria plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

_____ **Fundamentos de geometria espacial**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Inscrição, circunscrição e superfícies de revolução

Convite ao estudo

Prezado(a) estudante,

Bem-vindo(a) à nossa última unidade do curso de Geometria Espacial. Estudaremos a partir de agora mais um importante assunto do campo geométrico: as inscrições e circunscrições de sólidos geométricos.

Nas três primeiras unidades do nosso curso, investimos na aprendizagem dos sólidos geométricos. Analisamos suas propriedades e peculiaridades, bem como aprendemos a deduzir suas fórmulas de cálculo de área e volume. Nessa nova etapa de estudos, que encerrará nosso curso, investiremos nos estudos envolvendo dois sólidos de forma simultânea. Esse campo da Geometria Espacial recebe o nome de "inscrição" (quando o sólido está inserido dentro de outro) e "circunscrição" (quando determinado sólido tem outro inserido dentro de si).

Todo o conteúdo estudado nessas seções lhe dará suporte para resolver situações confiadas a você pela *Packing-Design*. Essa empresa cresceu muito com a sua ajuda e, agora, vem expandindo seus contratos de prestação de serviços. As embalagens produzidas para aquela multinacional de sorvetes, que foram desenvolvidas na unidade anterior, lhe deram uma visibilidade extraordinária no mercado. Os desafios aumentam a cada dia! No entanto, mais uma vez, você terá o embasamento teórico necessário para vencê-los.

Na primeira seção, você aprenderá sobre as áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de esferas, cones e cilindros. Na segunda seção, estenderemos

os conceitos e você verá áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de poliedros e finalizaremos nosso livro estudando as superfícies e sólidos de revolução.

Desejamos-lhe um excelente trabalho nesta unidade que consolidará seus conhecimentos em Geometria Espacial.

Bons estudos!

Seção 4.1

Áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de esferas, cones e cilindros

Diálogo aberto

Caro estudante, já vimos vários exemplos que ligam a geometria espacial ao nosso cotidiano e nesta seção não será diferente. Qualquer produto que você compre, seja alimento, roupa, equipamento, entre outros, vem dentro de uma embalagem, não é? Esses são exemplos clássicos de elementos inscritos e circunscritos, e a geometria espacial fornece as ferramentas necessárias para estabelecer: quantidade, tamanho, área e volume.

Após desenvolver um ótimo trabalho na *Packing-Design* na unidade anterior, você foi convidado a dar continuidade ao seu trabalho na empresa. Dessa vez, seu cliente é uma empresa de materiais esportivos infantis e deseja produzir embalagens para bolas de futebol (Figura 4.1). Portanto, seu trabalho é criar modelos de embalagens que sirvam para essa finalidade.

Figura 4.1 | Modelo de embalagem que a empresa deseja

Fonte: <http://wholesaler.alibaba.com/w/wholesale-football-packaging-box.html> Acesso em: 19 jan. 2018.

A bola estará sobre uma base que possui 2 cm de altura para lhe dar sustentação. Para que a embalagem fique simétrica, deverá ter uma distância de 2 cm entre cada face da caixa e a superfície da bola. Sabendo que a bola de futebol comercializada possui 11 cm de

raio, qual deve ser o volume dessa embalagem, que terá o formato de um cubo? A caixa será confeccionada em material reciclado; portanto, é necessário conhecer a quantidade necessária para cada embalagem. Não se esqueça de apresentar o comparativo entre a área e o volume do brinquedo e a embalagem.

Para realizar seu trabalho, você aprenderá nesta seção a determinar a área e o volume de certos sólidos geométricos inscritos e circunscritos. Apresentaremos a inscrição e circunscrição de esferas, cones e cilindros, explorando várias combinações entre esses sólidos.

Parabéns pelo seu trabalho até o momento e bons estudos!

Não pode faltar

Iniciaremos, agora, os estudos envolvendo inscrição e circunscrição dos sólidos geométricos estudados nas seções anteriores.

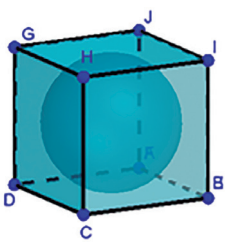
Esfera, cubo e octaedro

Iniciamos a abordagem envolvendo os principais conceitos do tema desta seção, estudando as principais situações possíveis para inscrições e circunscrições envolvendo esses três sólidos geométricos.

Esfera inscrita no cubo

Se a esfera está inscrita no cubo, significa que está "dentro" do cubo. Dessa forma, considere a esfera de raio *r* da Figura 4.2, inscrita num cubo ABCDJIHG de aresta *a*.

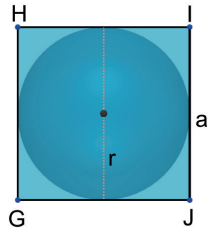
Figura 4.2 | Esfera inscrita num cubo



Fonte: elaborada pelo autor.

Seccionando transversalmente o cubo, notaremos, como indicado na Figura 4.3, que a esfera o tangencia, sendo o centro *O* da esfera exatamente o mesmo do cubo.

Figura 4.3 | Visão do cubo seccionado transversalmente



Fonte: elaborada pelo autor.

Notemos na Figura 4.3 que o círculo obtido com a secção possui diâmetro igual à aresta do cubo. Logo, obtemos a seguinte relação matemática:

$$diâmetro = 2r \Rightarrow 2r = a \therefore \boxed{r = \frac{a}{2}}.$$

Portanto, podemos construir uma circunferência inscrita em um cubo a partir da medida da aresta. Consequentemente, podemos calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera inscrita no cubo em função da aresta da seguinte forma:

$$A_{s_esfera} = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{A_{s_esfera} = \pi a^2}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

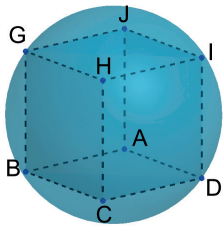
$$\boxed{V_{esfera} = \frac{1}{6}\pi a^3}$$

Esfera circunscrita ao cubo

Se a esfera está circunscrita ao cubo, significa que o cubo está "dentro" da esfera. A Figura 4.4 apresenta uma esfera de raio *r*,

circunscrita a um cubo ABCDJGHI de aresta *a*. Note que cada vértice do cubo toca em um único ponto da esfera, ou seja, esses vértices tangenciam a esfera.

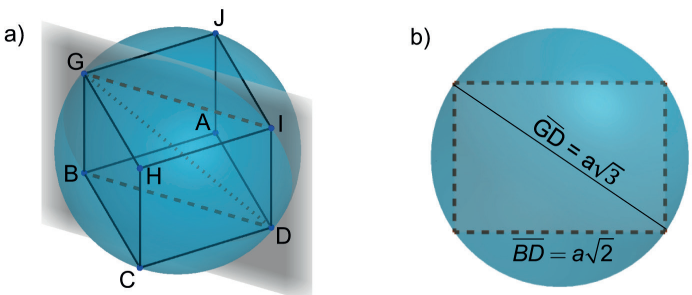
Figura 4.4 | Esfera circunscrita ao cubo



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao tomarmos uma secção pela diagonal do cubo, deparamo-nos com um sólido que contém tanto a diagonal da face da base do cubo quanto a diagonal do cubo. Por exemplo, na Figura 4.5(a), se tomarmos uma secção pela diagonal GD do cubo, obteremos a diagonal da face da base BD, que, pela relação pitagórica, possui medida $\overline{BD} = a\sqrt{2}$ e diagonal do cubo com medida $\overline{GD} = a\sqrt{3}$ (Figura 4.5(b)).

Figura 4.5 | Esfera circunscrita ao cubo e a imagem de sua secção



Fonte: elaborada pelo autor.

Como o cubo está circunscrito pela esfera, existe uma relação de equivalência entre a medida da diagonal do cubo com o diâmetro da esfera ($2r$): **Diagonal do cubo = Diâmetro da esfera**, logo:

$$2r = a\sqrt{3} \therefore \boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

A partir dessa relação, podemos deduzir a área e o volume da esfera em relação à aresta do cubo, ou, então, a área e o volume do cubo em função do raio.

Assimile

Área e volume da esfera circunscrita ao cubo a partir da aresta do cubo:	Área e volume do cubo inscrito na esfera a partir do raio da esfera:
$A_{esfera} = 4\pi r^2$ $A_{esfera} = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $\boxed{A_{esfera} = 3\pi a^2}$	$A_{cubo} = a^2$ $A_{cubo} = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2$ $\boxed{A_{cubo} = \frac{4}{3}r^2}$
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3$ $\boxed{V_{esfera} = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}}$	$V_{cubo} = a^3$ $V_{cubo} = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^3$ $\boxed{V_{cubo} = \frac{8}{9}r^3\sqrt{3}}$

Esfera circunscrita ao octaedro regular

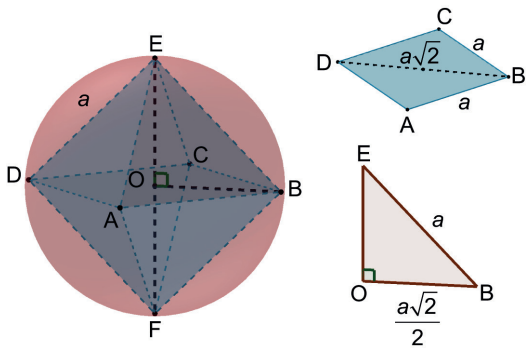
Dada uma esfera com raio *r* circunscrita a um octaedro regular de aresta *a*, a diagonal do octaedro equivale a duas vezes o raio da esfera. Considerando a nomenclatura adotada na Figura 4.6, a diagonal EF do octaedro equivale a 2r. Estabelecendo relações pitagóricas, podemos escrever o raio da esfera em função da aresta do cubo. Podemos calcular a diagonal *d* do polígono ABCD de arestas *a*, obtendo $d = a\sqrt{2}$. Com esse resultado, podemos calcular

a diagonal EF, que vale o dobro do cateto EO do triângulo EOB, que também por Pitágoras obtém-se $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, logo:

$$2r = 2\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Figura 4.6 | Esfera circunscrita ao octaedro regular



Fonte: elaborada pelo autor.

Após obter o raio da esfera circunscrita a partir da aresta do octaedro regular, podemos estabelecer a área e o volume da esfera também em função da aresta do octaedro:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

$$A_{esfera} = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\boxed{A_{esfera} = 2\pi a^2}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}}$$

Esfera inscrita ao octaedro regular

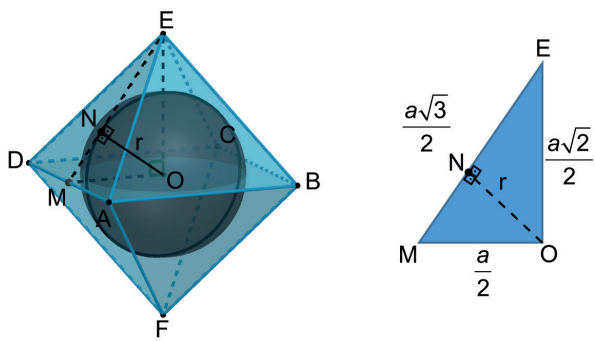
Considerando uma esfera de raio *r* inscrita em um octaedro regular de aresta *a*, para escrevermos o raio da esfera em função da aresta, temos que estabelecer algumas relações trigonométricas. Considere a nomenclatura adotada na Figura 4.7: o segmento EF é metade da diagonal do octaedro e vale $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; por Pitágoras, calculamos a hipotenusa do triângulo EOM e encontramos $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Por fim, considerando como base do triângulo EOM o segmento EM e como raio *r* a altura desse triângulo, podemos usar outra relação métrica para definir o raio em função da aresta: (hipotenusa x altura = produto dos catetos), logo:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}}$$

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

Figura 4.7 | Esfera inscrita ao octaedro regular



Fonte: elaborada pelo autor.

Após obter o raio da esfera inscrita a partir da aresta do octaedro regular, podemos estabelecer a área e o volume da esfera também em função da aresta do octaedro:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

$$A_{esfera} = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

$$\boxed{A_{esfera} = \frac{2}{3}\pi a^2}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{1}{27}\pi a^3\sqrt{6}}$$

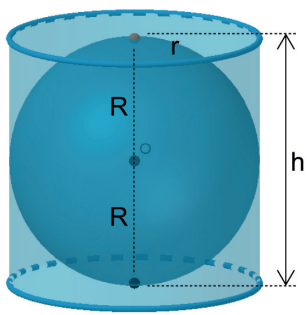
Esfera, cilindro e cone

Nesse momento, veremos as situações possíveis para inscrições e circunscrições envolvendo esses três sólidos geométricos.

Esfera inscrita no cilindro reto

A Figura 4.8 apresenta uma esfera de raio *R*, inscrita num cilindro de raio *r* e altura *h*.

Figura 4.8 | Esfera inscrita no cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a base do cilindro e a esfera possuem o mesmo raio *r*. Logo: r = R. Sendo a altura do cilindro o dobro do raio da esfera, temos a seguinte relação matemática: $\boxed{h = 2r}$.

Segundo Dolce e Pompeu (2013, p. 318), concluímos que "o cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero cujo raio da base é igual ao raio da esfera".

A área total de um cilindro pode ser calculada em função do raio da esfera da seguinte forma:

$$A_{cilindro} = 2\pi r(h + r)$$
$$A_{cilindro} = 2\pi r(2r + r)$$
$$\boxed{A_{cilindro} = 6\pi r^2}$$

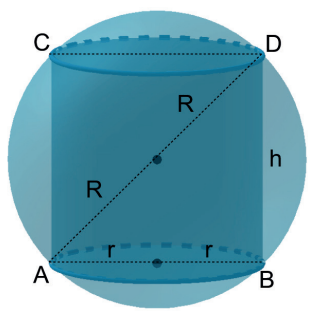
O volume do cilindro também pode ser calculado em função do raio:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$
$$V_{cilindro} = \pi r^2 2r$$
$$\boxed{V_{cilindro} = 2\pi r^3}$$

Cilindro reto inscrito numa esfera

Sendo *h* a altura e *r* o raio da base de um cilindro inscrito em uma esfera de raio *R*, ao seccionarmos o cilindro por um plano que contém seu eixo, logramos um retângulo ABCD conforme exposto na Figura 4.9. Dali, podemos, mais uma vez, inferir uma relação matemática pitagórica nos triângulos obtidos pelo diâmetro da esfera.

Figura 4.9 | Cilindro inscrito numa esfera



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo assim, teríamos como hipotenusa (AD) o valor $2R$ e os catetos sendo: AB = $2r$ e BD = h. Dessa forma, concluímos que:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2 \therefore \boxed{R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}}.$$

A área total e o volume de uma esfera circunscrita num cilindro podem ser calculados a partir do raio da base e da altura do cilindro da seguinte forma:

$$A_{esfera} = 4\pi R^2 \therefore A_{esfera} = 4\pi\left(\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^2 \therefore \boxed{A_{esfera} = 4\pi r^2 + \pi h^2}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \therefore \boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^3}$$

Reflita

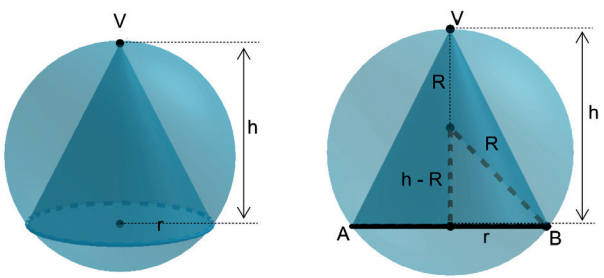
Tente descobrir as relações existentes entre a área lateral do cilindro equilátero e a superfície esférica, quando há inscrição e circunscrição simultaneamente.

E sobre o volume desses sólidos, há alguma generalização?

Esfera circunscrita a um cone reto

Considerando um cone que possui altura h e raio da base r, inscrito em uma esfera de raio R, ao seccionarmos a esfera por um plano que contenha o eixo do cone, deparamo-nos com um triângulo isósceles (ABV) de altura correspondente à altura do cone.

Figura 4.10 | Esfera circunscrita a um cone e representação da secção por um plano que contenha o eixo do cone



Fonte: elaborada pelo autor.

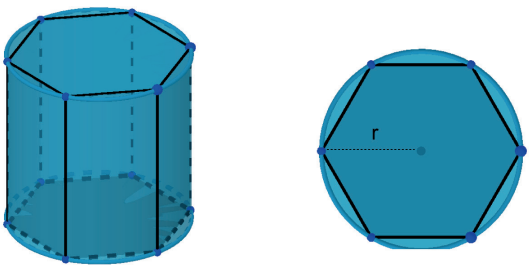
O triângulo pontilhado apresentado na Figura 4.10 é retângulo, portanto inferimos a seguinte relação matemática: $\boxed{R^2 = r^2 + (h-R)^2}$.

Prisma e cilindro

Prisma inscrito em um cilindro reto

Na Figura 4.11, temos um prisma de base hexagonal, inscrito num cilindro. Como suas alturas são iguais, dedicaremos atenção à base gerada pela inscrição.

Figura 4.11 | Prisma inscrito em cilindro e visão da base do sólido



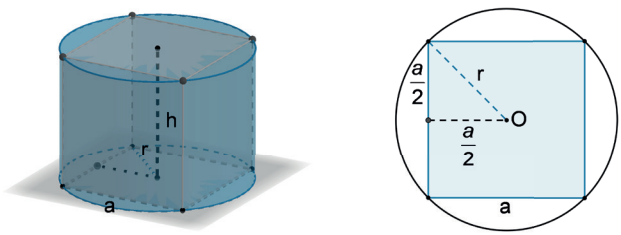
Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Determine a razão entre o volume de um prisma de base quadrada, com aresta a = 4 cm, inscrito em um cilindro com raio da base r e altura h = 4 cm.

$$\frac{Volume_{prisma}}{Volume_{cilindro}} = \frac{a^2 h}{\pi r^2 h}$$

Figura 4.12 | Prisma quadrangular inscrito no cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{Volume_{prisma}}{Volume_{cilindro}} = \frac{4^2.4}{\pi(2\sqrt{2})^2.4}$$

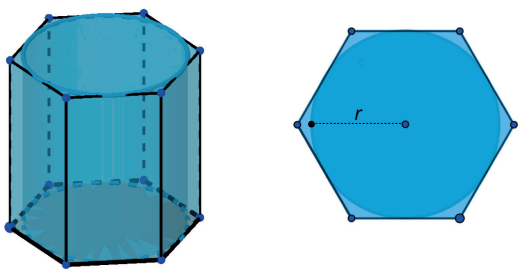
$$\frac{Volume_{prisma}}{Volume_{cilindro}} = \frac{2}{\pi}$$

Logo, "o raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma" (DOLCE e POMPEU, 2013, p. 310). Essa relação é válida independentemente da base que tenha o prisma e que este seja regular.

Cilindro inscrito em prisma

Na Figura 4.13, temos algo semelhante à Figura 4.11, mas na situação inversa, ou seja, dessa vez é o cilindro que se encontra inscrito no prisma.

Figura 4.13 | Cilindro inscrito em prisma e visão da base do sólido



Fonte: elaborada pelo autor.

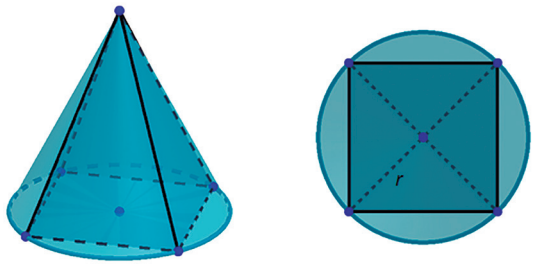
Logo, "o raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma" (DOLCE e POMPEU, 2013, p. 310).

Pirâmide e cone

Pirâmide de base quadrada inscrita num cilindro

Na Figura 4.14, temos uma pirâmide, inscrita num cilindro. Como suas alturas são iguais, dedicaremos atenção à base gerada pela inscrição.

Figura 4.14 | Pirâmide de base quadrada inscrita num cilindro e visão da base do sólido



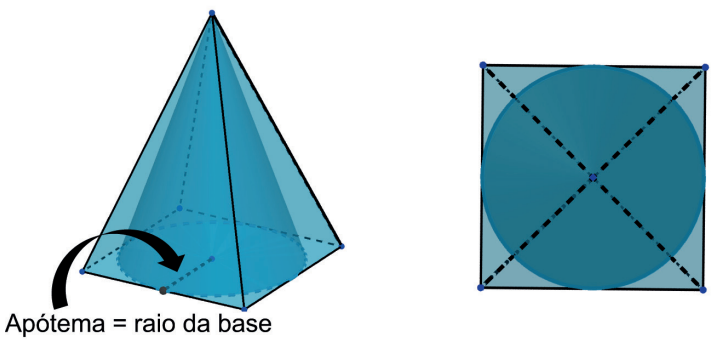
Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, "o raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide" (DOLCE e POMPEU, 2013, p. 312). Essa relação é válida independentemente da base que tenha a pirâmide e que esta seja regular.

Cone inscrito numa pirâmide

Na Figura 4.15, temos algo semelhante à Figura 4.11, mas na situação inversa, ou seja, dessa vez é o cone que está inscrito na pirâmide.

Figura 4.15 | Cone inscrito numa pirâmide de base quadrada e visão da base do sólido



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, "o raio da base do cone é o apótema da base da pirâmide. A geratriz do cone é o apótema da pirâmide" (DOLCE e POMPEU, 2013, p. 312).

Pesquise mais

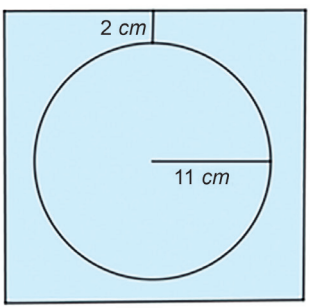
Para ampliar os conceitos explorados nesta seção, assista a essas videoaulas disponíveis no YouTube que abordam mais situações de inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. Mais uma vez, recomendamos que você pesquise outros materiais didáticos que abordem o tema em questão:

- Dois cilindros e um prisma – Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=-cmT14ymErg&list=PL-7DL7BmpqH-AvgkIJKyM9GR_1flBR6Kw&index=12>. Acesso em: 6 fev. 2018 (vídeo do YouTube).
- Esfera inscrita no cone – Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RwGZNO0dEnM&t=148s>. Acesso em: 6 fev. 2018 (vídeo do YouTube).
- Cilindro inscrito no cone – Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=IV-VxS3T7kw&t=246s>. Acesso em: 6 fev. 2018 (vídeo do YouTube).

Sem medo de errar

Agora que já sabemos estabelecer diversas relações de inscrição e circunscrição entre esferas, cones e cilindros, podemos concluir mais um trabalho para a *Packing-Desing*. Foi solicitado a você criar modelos de embalagens para um produto infantil cujas medidas e esquemas estão especificados na Figura 4.16. A embalagem guardará uma bola que possui diâmetro de 22 cm e estará a uma distância de 2 cm de cada borda da caixa.

Figura 4.16 | Ilustração da vista frontal da bola de futebol dentro da embalagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcularmos a medida da embalagem, precisamos somar o diâmetro da bola com os espaços de segurança, portanto a caixa com forma cúbica terá arestas de 26 cm. A partir desse valor, podemos calcular várias medidas para o modelo da caixa e o do brinquedo.

Para estimar a quantidade de material reciclado necessário para cada embalagem, devemos calcular a área da caixa: $A_{emb} = 6a^2$

$$A_{emb} = 6 \cdot 26^2$$

$$A_{emb} = 4056\ cm^2$$

Portanto, para cada embalagem, será utilizado $0{,}41\ m^2$.

A caixa terá um volume de:

$$V_{emb} = a^3$$

$$V_{emb} = 26^3$$

$$V_{emb} = 17576\ cm^3$$

Para determinar a quantidade de material necessário para confeccionar a bola, devemos calcular a área da superfície esférica, portanto:

$$A_{bola} = 4\pi r^2$$

$$A_{bola} = 4\pi 11^2$$

$$A_{bola} = 484\pi\ cm^2$$

Ao compararmos a área da superfície da bola com a da caixa, concluímos que a primeira gastará cerca de $\frac{1}{3}$ do material que a embalagem gastará:

$$A_{emb} = 4056$$

$$A_{bola} = 484\pi$$

$$\frac{A_{bola}}{A_{emb}} = \frac{1521}{4056} = 0{,}375$$

Já o volume que a bola ocupará será:

$$V_{bola} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{bola} = \frac{4}{3}\pi 11^3$$

$$V_{bola} = \frac{5324\pi}{3}\ cm^3$$

Ao compararmos o volume da bola com o volume da caixa, concluímos que a primeira ocupará cerca de $\frac{1}{3}$ do espaço que a segunda ocupará:

$$V_{emb} = 17576$$

$$V_{bola} = \frac{5324\pi}{3}$$

$$\frac{V_{bola}}{V_{emb}} = \frac{5575}{17576} = 0{,}32$$

Sabendo que o valor do material que será usado para a embalagem é R$ 2,00 o metro quadrado e o valor do material para a bola é R$ 1,00 o metro quadrado, complete seu trabalho apresentando o valor de custo do produto.

Não se esqueça de sistematizar o seu trabalho em uma apresentação de *slides* para apresentar a seu gerente.

Avançando na prática

Bolinhas de tênis

Descrição da situação-problema

Uma empresa de materiais esportivos comercializará bolinhas de tênis. Para economizar no preço do produto, ela compra um grande número de unidades de seu distribuidor, que as entrega soltas em caixas de papelão. No entanto, essa empresa deseja entregar um produto de melhor qualidade para seu consumidor e resolveu comprar embalagens cilíndricas de modo que caibam 4 bolinhas (uma sobre a outra) em cada uma delas. Sabendo que as bolinhas possuem 3,25 cm de raio, quais devem ser as dimensões mínimas dessa embalagem?

Resolução da situação-problema

Como as bolinhas possuem 3,25 cm de raio, seu diâmetro será igual a 6,5 cm. Para que as bolinhas caibam perfeitamente dentro da embalagem, a altura do cilindro (h) deverá, então, ser superior a 4 vezes esse valor, logo h > 26 cm.

Já o raio desse cilindro deverá ser superior ao raio da bolinha. Portanto:

$$A_b > \pi r^2 \therefore A_b > 10{,}56\pi$$

O cilindro pedido deverá ter um pouco mais de 26 cm de altura e área da base também um pouco maior que $10{,}56\pi\ m^2$, para que as bolinhas caibam perfeitamente dentro da embalagem.

Faça valer a pena

1. Dois ou mais sólidos geométricos podem estar inscritos ou circunscritos e por meio de relações métricas é possível calcular a área de um sólido com base nas informações do outro. Esse recurso é importante à medida que se deseja calcular a área e o volume e não se tem todas as informações disponíveis.

> **"Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada. Qual é a profundidade, em metros, desse poço?" (ENEM, 2015, p. 30).**

a) 1,44.
b) 6,00.
c) 7,20.
d) 8,64.
e) 36,00.

2. No caso de cubos inscritos em esferas, existe uma relação direta entre a diagonal do cubo e o diâmetro da esfera. A diagonal do cubo pode ser calculada mediante uma relação pitagórica usando a face da base do cubo e, com base nesse resultado, pode ser calculada por meio de outra relação pitagórica.

Sabendo que um cubo de aresta igual a 6 cm está inscrito numa esfera, determine a razão entre a área da esfera e o cubo:

a) $\frac{\pi}{2}$.
b) $\frac{\pi}{3}$.
c) $\frac{3\pi}{2}$.
d) $\frac{2}{\pi}$.
e) $\frac{5\pi}{3}$.

3. Um octaedro pode ser construído a partir de uma base quadrangular e duas pirâmides congruentes com vértices V e –V. A diagonal do octaedro (distância entre os dois vértices) equivale ao diâmetro da esfera que o circunscreve, portanto por meio do valor da diagonal do octaedro é possível determinar o tamanho do raio necessário para uma esfera circunscrevê-lo.

Determine o valor da aresta de um octaedro regular inscrito numa esfera de volume igual a $36\pi\ cm^3$:

a) $2\sqrt{2}$ cm.

b) $\sqrt{2}$ cm.

c) $2\sqrt{3}$ cm.

d) $3\sqrt{2}$ cm.

e) $5\sqrt{2}$ cm.

Seção 4.2

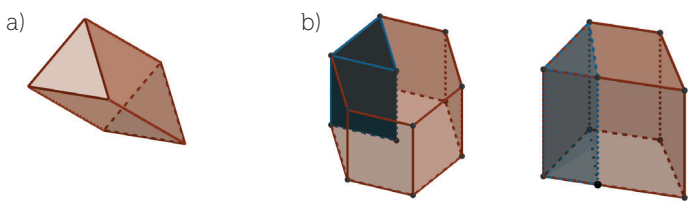
Áreas e volumes determinados por inscrição e circunscrição de poliedros

Diálogo aberto

Caro estudante, bem-vindo a mais uma seção na qual daremos continuidade ao estudo de sólidos geométricos inscritos e circunscritos. Na seção anterior, vimos algumas combinações de inscrição e circunscrição envolvendo esferas, cones e cilindros. Agora, exploraremos outros elementos geométricos.

Dando continuidade ao seu trabalho na Packing-Design, seu novo desafio é modelar duas embalagens para uma empresa de chocolates. A maior característica dos chocolates dessa empresa é o formato de prisma triangular (Figura 4.17[a]). O fabricante encomendou dois modelos para as embalagens: o primeiro em formato de prisma hexagonal e o segundo seria a metade dessa embalagem, que resulta em um prisma de base trapezoidal (Figura 4.17[b]).

Figura 4.17 | Formato dos chocolates (a) – **Modelos para embalagens** (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

O chocolate será modelado por um prisma triangular, no qual as arestas medem 2,0 cm, e determinou-se que cada barra deverá ter 15 g, sendo $1\,g\,/\,cm^3$. Seu trabalho é criar uma apresentação em *slides* contendo todas as informações pertinentes ao produto e às embalagens que lhe foram designados. É preciso mensurar o chocolate, determinar a quantidade em cada embalagem, para, posteriormente, estabelecer as medidas para cada embalagem. Acrescente em sua apresentação duas previsões de peso para as embalagens (pois dependerá da quantidade de chocolates que você especificar para cada uma).

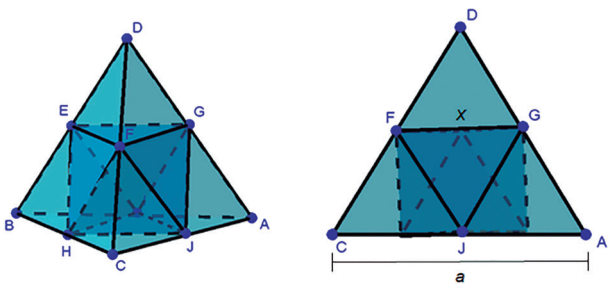
Para realizar seu trabalho, você aprenderá nesta seção a determinar a área e o volume de certos sólidos geométricos inscritos ou circunscritos. Apresentaremos a inscrição e a circunscrição de poliedros, explorando várias combinações entre esses sólidos.

Não pode faltar

Nesta seção, as inscrições e circunscrições que realizaremos serão pautadas nos poliedros. Comecemos nosso estudo explorando a inscrição de um octaedro em um tetraedro.

Na Figura 4.18, apresentamos um octaedro regular inscrito em um tetraedro regular. Veja que os vértices (HJGE) da base do octaedro tangenciam os segmentos BC, CA, AD, DB. Além disso, os vértices D e C tangenciam os segmentos CD, AB. Chamando a aresta do tetraedro de (*a*) e a aresta do octaedro inscrito de (*x*), percebemos que a aresta do octaedro equivale exatamente à metade da aresta do tetraedro.

Figura 4.18 | Octaedro regular inscrito em um tetraedro regular



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando a face ACD do tetraedro, obtemos um triângulo equilátero, que se divide em outros quatro triângulos equiláteros (CJF; JAG; FGJ; FGD), quando consideramos as arestas do octaedro como vimos anteriormente. Dessa forma, percebemos que:

- *F* é o ponto médio de $\overline{CD}$;
- *J* é o ponto médio de $\overline{AC}$;
- *G* é o ponto médio $\overline{AD}$.

Como os triângulos são equiláteros, $\overline{FG} = \overline{CJ}$; logo, concluímos que $\boxed{x = \frac{a}{2}}$.

Portanto, de acordo com essa relação, podemos calcular a área e o volume de um octaedro inscrito em um tetraedro. Observe:

Área do octaedro inscrito no tetraedro

$A_{octaedro} = 2x^2\sqrt{3}$. Sendo $x = \frac{a}{2}$, por consequência:

$$A_{octaedro} = 2.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

$$\boxed{A_{octaedro} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}}$$

Volume do octaedro inscrito no tetraedro

$V_{octaedro} = \frac{1}{3}x^3\sqrt{2}$. Sendo $x = \frac{a}{2}$, por consequência:

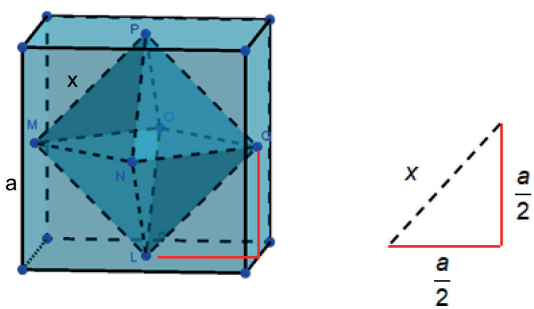
$$V_{octaedro} = \frac{1}{3}.\left(\frac{a}{2}\right)^3 .\sqrt{2}$$

$$\boxed{V_{octaedro} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}}$$

Octaedro inscrito em um cubo

Na Figura 4.19, apresentamos um octaedro regular inscrito em um cubo. Vamos considerar mais uma vez (*a*), correspondendo à aresta do cubo e (*x*), à aresta do octaedro. Além disso, cada vértice do octaedro toca o centro de cada face do cubo. Com essa figura, construiremos um triângulo retângulo. Observe:

Figura 4.19 | Octaedro inscrito em um cubo



Fonte: elaborada pelo autor.

Repare que os catetos desse triângulo equivalem à metade da aresta do cubo, já que partem do centro da face do cubo e tocam a aresta do cubo. Já a hipotenusa do triângulo em questão mede exatamente o mesmo valor da aresta do octaedro. Isso posto, vamos utilizar o teorema de Pitágoras para relacionar as figuras:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Portanto, de acordo com essa relação, podemos calcular a área e o volume de um octaedro inscrito emum cubo. Observe:

Área do octaedro inscrito no cubo

$A_{octaedro} = 2x^2\sqrt{3}$. Sendo $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, por consequência:

$$A_{octaedro} = 2.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

$$\boxed{A_{octaedro} = a^2\sqrt{3}}$$

Volume do octaedro inscrito no cubo

$V_{octaedro} = \frac{1}{3}x^3\sqrt{2}$. Sendo $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, por consequência:

$$V_{octaedro} = \frac{1}{3}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 .\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^3.\sqrt{8}.\sqrt{2}}{8}$$

$$V_{octaedro} = \frac{1}{3}.\frac{a^3.\sqrt{16}}{8}$$

$$V_{octaedro} = \frac{1}{3}.\frac{a^3.4}{8}$$

$$\boxed{V_{octaedro} = \frac{1}{6}a^3}$$

Assimile

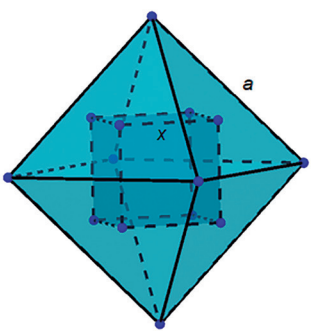
Dado um octaedro inscrito em um cubo, cujas vértices tangenciam as faces do cubo, podemos estabelecer as seguintes relações:

Área e volume do octaedro a partir da aresta do tetraedro	Área e volume do octaedro a partir da aresta do cubo
$A_{octaedro} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$A_{octaedro} = a^2\sqrt{3}$
$V_{octaedro} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$	$V_{octaedro} = \frac{1}{6}a^3$

Cubo inscrito em um octaedro

Agora vamos considerar a situação oposta, ou seja, o octaedro circunscrito ao cubo. Na Figura 4.20, chamamos de (*a*) a aresta do octaedro e de (*x*) a aresta do cubo. Repare, também, que os oito vértices do cubo tocam o baricentro das oitos faces triangulares do octaedro, pois as faces de um octaedro regular são triângulos equiláteros.

Figura 4.20 | Cubo inscrito em um octaedro

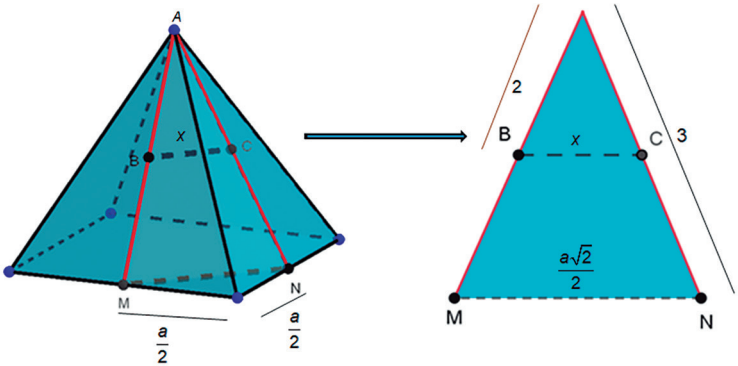


Fonte: elaborada pelo autor.

Para enterdermos melhor a relação que apresentaremos agora, vamos considerar apenas uma parte do octaedro, conforme a Figura 4.21. A partir daí, vamos desenhar um triângulo com dois vértices nos pontos médios de duas arestas quaisquer e o outro vértice sendo comum ao vértice do octaedro, formando o triângulo AMN. Vamos desenhar, também, um segundo triângulo com dois vértices sendo os

baricentros dos triângulos das faces do octaedro e outro vértice sendo o vértice do octaedro formando o triângulo ABC.

Figura 4.21 | Construção de um triângulo a partir do baricentro da face triangular do octaedro



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo M e N os pontos médios das arestas, por meio da relação pitagórica, podemos concluir que o segmento $\overline{MN}$ equivale a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vamos relembrar que a distância do baricentro até o ponto médio da base do triângulo equilátero (face do octaedro) equivale a $\frac{1}{3}$ da altura desse triângulo e que a distância do baricentro até o vértice do triângulo equivale a $\frac{2}{3}$ da altura, conforme ilustrado na Figura 4.21. Logo, por semelhança de triângulos e sabendo que MN e BC são paralelos, temos:

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{3}}$$

Portanto, a partir dessa relação, podemos calcular a área e o volume de um cubo inscrito em um octaedro. Observe:

Área do cubo inscrito em um octaedro:

$A_{cubo} = 6x^2$. Sendo $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, por consequência:

$$A_{cubo} = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\boxed{A_{cubo} = \frac{4}{3}a^2}$$

Volume do cubo inscrito em um octaedro

$V_{cubo} = x^3$. Sendo $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, por consequência:

$$V_{cubo} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3$$

$$\boxed{V_{cubo} = \frac{2}{27}a^3\sqrt{2}}$$

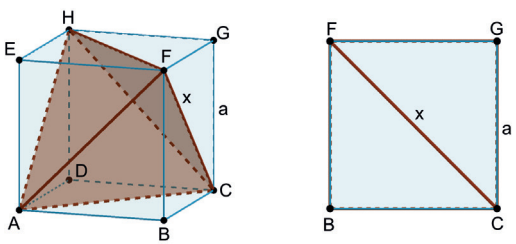
Reflita

As relações matemáticas vistas até agora se manteriam caso os poliedros envolvidos nas inscrições e circunscrições não fossem regulares?

Tetraedro inscrito no cubo

Na Figura 4.22, apresentamos um tetraedro regular de aresta (*x*) inscrito em um cubo de aresta (*a*). Repare que os vértices do octaedro tocam exatamente 4 vértices do cubo. Observe também que se considerarmos uma aresta qualquer do tetraedro, esta passará exatamente pela diagonal de uma das faces do cubo.

Figura 4.22 | Tetraedro inscrito em um cubo



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, podemos estabelecer a seguinte relação matemática:

$$x = a^2 + a^2 \therefore \boxed{x = a\sqrt{2}}$$

Portanto, de acordo com a relação, podemos calcular a área e o volume de um tetraedro inscrito em um cubo. Observe:

Área do tetraedro inscrito no cubo:

$A_{tetraedro} = x^2\sqrt{3}$. Sendo $x = a\sqrt{2}$, por consequência:

$$A_{tetraedro} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 .\sqrt{3}$$

$$\boxed{A_{tetraedro} = 2a^2\sqrt{3}}$$

Volume do tetraedro inscrito no cubo:

$V_{tetraedro} = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$. Sendo $x = a\sqrt{2}$, por consequência:

$$V_{tetraedro} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3\sqrt{8}.\sqrt{2}}{12}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3\sqrt{16}}{12}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{4a^3}{12}$$

$$\boxed{V_{tetraedro} = \frac{a^3}{3}}$$

Exemplificando

Dado um tetraedro, que possui 8 cm de aresta e está inscrito em um cubo, determine a razão entre a aresta do cubo e a do tetraedro.

Resolução

Sabendo que a aresta do tetraedro equivale à medida da diagonal do cubo, podemos, dessa forma, identificar quanto vale a aresta do cubo.

Logo, $8 = a\sqrt{2} \therefore a = \frac{8}{\sqrt{2}} \therefore a = 4\sqrt{2}\ cm$.

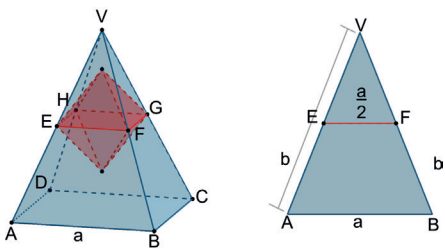
Logo:

$$\frac{a_{cubo}}{a_{tetraedro}} = \frac{4\sqrt{2}}{8} \therefore \frac{a_{cubo}}{a_{tetraedro}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Octaedro inscrito na pirâmide

Vamos estabelecer uma relação matemática entre uma pirâmide regular quadrangular circunscrita a um octaedro regular. Dada uma pirâmide de base quadrangular ABCD, com arestas da base medindo *a* e arestas laterais medindo *b*, ao tomar os pontos médios das arestas, obtêm-se dois triângulos semelhantes (Figura 4.23): $\triangle ABV \sim \triangle EFV$. Como os pontos *E* e *F* são pontos médios, o segmento EF vale metade da aresta da base da pirâmide.

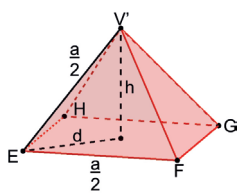
Figura 4.23 | Octaedro inscrito na pirâmide



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos construir a base do octaedro usando o quadrilátero regular formado pelos pontos médios das arestas da pirâmide, portanto precisamos construir um octaedro com arestas medindo a/2. Para isso, devemos calcular a distância (*h*) entre a base do octaedro e a do seu vértice, conforme ilustrado na Figura 4.24.

Figura 4.24 | Octaedro inscrito na pirâmide



Fonte: elaborada pelo autor.

Começamos calculando a metade da diagonal da base (d):

$$d^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

Agora podemos escrever a altura (h) em função da aresta da base da pirâmide:

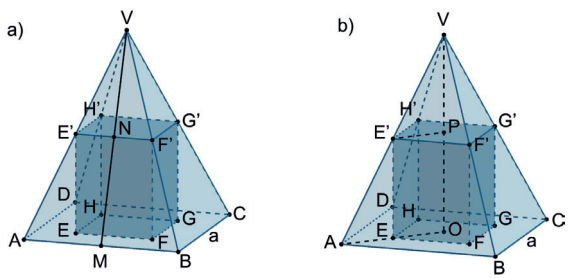
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a}{4}\sqrt{2}$$

Portanto, podemos construir um octaedro regular com arestas $a/2$ inscrito em uma pirâmide regular quadrangular, com arestas da base medindo a, a partir do quadrilátero formado pelos pontos médios das arestas laterais da pirâmide.

Prisma inscrito na pirâmide

De forma análoga às demais inscrições e circunscrições entre sólidos geométricos, ao considerar um prisma inscrito em uma pirâmide, podemos extrair diversas relações trigonométricas. Vamos considerar um paralelepípedo inscrito em uma pirâmide regular quadrangular, conforme ilustra a Figura 4.25.

Figura 4.25 | Prisma inscrito na pirâmide



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao dividirmos os sólidos em triângulos, podemos escrever as semelhanças:

a) $\triangle AMV \sim \triangle E'NV$
$\triangle ABV \sim E'F'V$

$\triangle AOV \sim E'PV$

b) $\triangle AOV \sim AEE'$
$\triangle E'PV \sim AEE'$

Reflita

Sabendo que a aresta da base da pirâmide na Figura 4.25 vale (*a*), quais seriam as implicações caso os pontos E'F'G'H' fossem o ponto médio da aresta lateral da pirâmide?

Pesquise mais

Depois da explanação desse conteúdo, deixamos o *link* de um exercício prático sobre inscrição de um octaedro em um cubo, para explorar melhor o assunto. Assista ao vídeo e faça o exercício proposto. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Sxt1_941QR8>. Acesso em: 1 fev. 2018.

Sem medo de errar

Agora que você entende a inscrição e a circunscrição entre poliedros regulares, pode concluir o trabalho que lhe foi designado pela Packing-Design. Foi solicitada a modelagem de duas embalagens para chocolates, uma em forma de um prisma hexagonal e outra com a forma da metade da primeira embalagem, conforme ilustrado na Figura 4.17(b). Outra informação que lhe foi dada é que o chocolate possui a forma de um prisma triangular, com arestas medindo 2 cm e cada barra tem o peso de 15 gramas, sendo $1\ g\ /\ cm^3$.

O primeiro passo é determinar a altura de cada barra de chocolate. Podemos calcular usando o volume da barra:

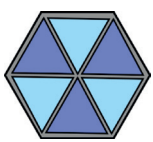
$$V_{barra} = A_{base} \cdot h$$

$$15 = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$h = 5\sqrt{3}\ cm$$

Para a embalagem em forma de prisma hexagonal, você pode propor utilizar 6 barras de chocolate conforme ilustrado na Figura 4.26.

Figura 4.26 | Visão plana da embalagem hexagonal



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a aresta de cada chocolate é 2 cm, o hexágono regular da base do prisma precisará ter aresta um pouco maior que a do chocolate, portanto você pode propor um hexágono com 2,1 cm de arestas.

Como essa medida, a área da base da embalagem terá:

$$A_{base} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base} = \frac{3 \cdot 2{,}1^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base} = 11{,}46\ cm^2$$

Sabendo que a altura do chocolate é $5\sqrt{3}$, a embalagem poderá ser $5{,}1\sqrt{3}$, portanto o volume dela será:

$$V_{emb1} = A_{base} \cdot h$$

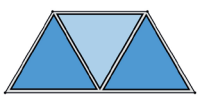
$$V_{emb1} = 11{,}46 \cdot 5{,}1\sqrt{3}$$

$$V_{emb1} = 101{,}23\ cm^3$$

A embalagem em forma de prisma hexagonal deverá apresentar a informação que contém 90 gramas de chocolate.

A partir de agora, você deve realizar os cálculos pertinentes à embalagem em forma de prisma trapezoidal. Na Figura 4.27, está ilustrada a embalagem com os chocolates.

Figura 4.27 | Visão plana da embalagem trapezoidal



Fonte: elaborada pelo autor.

Após todos os cálculos, organize os dados em uma apresentação de *slides*.

Avançando na prática

Calculando móveis pré-moldados

Descrição da situação-problema

Um escritório de arquitetura foi contratado para elaborar o projeto a um cliente que gostaria de criar uma sala com uma estante

pré-moldada conforme a Figura 4.28. Você foi contratado para calcular as dimensões necessárias para inserir uma lareira e uma TV, pois esses objetos possuem formas geométricas e como se trata de uma peça pré-moldada, não pode haver erros de dimensionamento.

Um designer de interiores afirma que a parede deve ter, no mínimo, um volume três vezes maior que a soma dos volumes da lareira e da TV para que, além de tudo, o ambiente fique esteticamente bonito. Sabendo que a TV possui a forma de um prisma retangular com medidas 1033 x 685 x 90 mm e a lareira possui dimensões de 50 x 85 x x 60 cm, qual será o volume mínimo dessa parede?

Figura 4.28 | Ilustração da estante pré-moldada

Fonte: <https://casaeconstrucao.org/decoracao/sala-com-lareira/> Acesso em: 31 jan. 2018.

Resolução da situação-problema

Para a TV, fazendo a conversão de mm para cm, temos o seguinte cálculo:

$$V_{tv} = 103{,}3 \times 68{,}5 \times 9 \therefore V_{tv} = 63.684{,}45 \text{ cm}^3$$

Para a lareira, temos o seguinte volume:

$$V_{lareira} = 50 \times 85 \times 60 \therefore V_{lareira} = 255.000 \text{ cm}^3$$

Dessa forma, o volume mínimo da parede, segundo estabelecido no enunciado, será:

$$3.(V_{tv} + V_{lareira}) = 3.(63.684{,}45 + 255.000) = 956.053{,}35 \text{ cm}^3$$

Faça valer a pena

1. Tendo dois sólidos geométricos inscritos ou circunscritos entre si, consegue-se, por meio das medidas de um deles, determinar as do outro. Dessa forma, é possível também, a partir de suas relações, determinar seus respectivos volumes.

"Considere um cubo cuja aresta mede 10 cm. O sólido, cujos vértices são os centros das faces do cubo, é um octaedro regular cujas faces são triângulos equiláteros congruentes. Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular e o volume dele" (UNICAMP, 2003, p. 3).

a) $\sqrt{2}cm$ e $\frac{500}{3}cm^3$, respectivamente.

b) $55cm$ e $585cm^3$, respectivamente.

c) $5\sqrt{3}cm$ e $\frac{500}{3}cm^3$, respectivamente.

d) $5\sqrt{2}cm$ e $\frac{700}{9}cm^3$, respectivamente.

e) $5\sqrt{2}cm$ e $\frac{500}{3}cm^3$, respectivamente.

2. Tendo dois sólidos geométricos inscritos ou circunscritos entre si, consegue-se, por meio das medidas de um deles, determinar as do outro. Dessa forma, é possível também, a partir de suas relações, determinar suas respectivas áreas.

Um tetraedro que possui 6 cm de aresta está inscrito em um cubo. Qual é a área desse cubo?

a) $98\ cm^2$.

b) $54\ cm^2$.

c) $108\ cm^2$.

d) $102\ cm^2$.

e) $128\ cm^2$.

3. Por meio da inscrição e circunscrição de sólidos geométricos, consegue-se identificar inúmeros padrões matemáticos entre as figuras e, com isso, deduzir matematicamente diversas generalizações matemáticas, isto é, válidas para o caso em questão, independentemente das medidas dos sólidos.

Dado um cubo inscrito em um octaedro regular, determine a razão entre o volume do cubo e o volume do octaedro:

a) $\frac{2}{9}$.

b) $\frac{9}{2}$.

c) $\frac{1}{9}$.

d) $\frac{2}{7}$.

e) $\frac{2}{5}$.

Seção 4.3

Superfícies e sólidos de revolução

Diálogo aberto

Caro estudante, bem-vindo à última seção do livro de Geometria espacial. Tivemos uma longa caminhada até aqui, aprendendo vários elementos dessa área do conhecimento. Nas duas últimas seções, dedicamo-nos a estudar a inscrição e circunscrição de figuras geométricas. Nesse último passo nos dedicaremos ao estudo dos sólidos de revolução.

Finalizaremos o trabalho na Packing-Design com um projeto que visa à produção de canecas decorativas, segmento que vem ganhando muito espaço no mercado brasileiro. Como de costume, você elaborará uma apresentação de *slides* contendo todos os detalhes sobre o investimento, com o objetivo de se analisar a rentabilidade do novo negócio. Nessa apresentação, você poderá sugerir opções de como as imagens serão gravadas no objeto em questão. Em sua apresentação, você deve também explicar, teoricamente, o processo de construção dessa caneca por meio da revolução de um determinado polígono. Para a construção teórica, a alça pode ser desconsiderada e vamos considerar $\pi = 3{,}14$.

Em uma pesquisa de mercado realizada de antemão pela empresa, apontou-se que os consumidores preferem as canecas que possuem volume em torno de 500 ml; portanto, esse será o volume adotado para o projeto.

As sugestões de altura para as canecas são de 9 cm e 10 cm. Então, em sua apresentação, indique o raio que as canecas terão, levando em consideração essas medidas.

Para finalizar a missão, veremos a definição de superfície de revolução, bem como a área e o volume de cilindro, cone, tronco de cone e esfera de revolução.

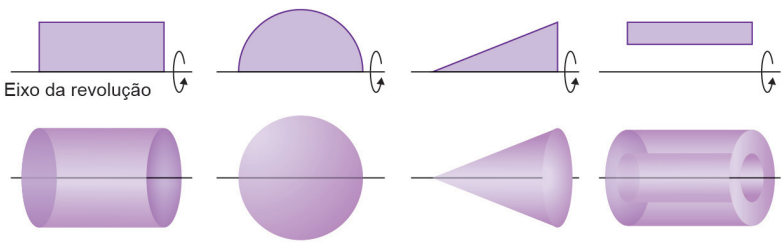
Bons estudos!

Não pode faltar

Finalizando o nosso curso de Geometria Espacial, estudaremos a partir de agora os conceitos e definições abrangidos sobre os corpos redondos, também conhecidos como superfícies de revolução ou sólidos de revolução.

Definição: define-se como superfície de revolução a superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo que se situa no mesmo plano da curva. Na Figura 4.29, podemos observar alguns exemplos desse fenômeno.

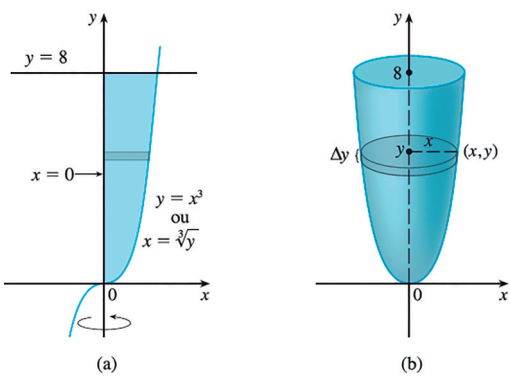
Figura 4.29 | Algumas superfícies de revolução



Fonte: adaptada <https://goo.gl/Q1Mfm8>. Acesso em: 26 jan. 2018.

A área e o volume de sólidos podem ser calculados a partir da rotação de uma região. Veja na Figura 4.30(a), dada uma região no espaço, ao rotacionarmos em torno do eixo *y*, obtém-se a Figura 4.30(b).

Figura 4.30 | Rotação de uma região em torno do eixo y



Fonte: Stewart (2010, p. 392).

O cálculo da área e do volume do sólido gerado a partir da rotação de uma região no espaço nos remete ao cálculo diferencial e integral. Dado um sólido em uma região no espaço, para calcular sua área, podemos particionar esse sólido em *N* figuras planas, calcular a área de cada uma dessas partes e, ao somar as áreas, tem-se a área do objeto. De forma análoga, podemos calcular o volume do sólido particionando em *N* sólidos com medidas Δx e Δy e a soma do volume de cada parte resultará no volume total.

A área da superfície de qualquer sólido de revolução pode ser calculada por: $A_s = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Veja que existem tanto derivada ($f'(x)$) quanto integral no cálculo.

Pesquise mais

Assista a uma videoaula sobre o cálculo da área da superfície de revolução disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=_jWZcVYdduA> Acesso em: 6 fev. 2018.

Vamos calcular o volume do sólido da Figura 4.30(b). Para isso, devemos nos atentar que a altura mínima do sólido é 0 e a máxima é 8 (variação no eixo *y*). Como o sólido foi gerado a partir da rotação de uma região em torno do eixo *y*, é conveniente "cortá-lo" em torno do mesmo eixo de origem da rotação. Ao fazermos o corte paralelo ao eixo *x*, obtemos uma área circular de raio *x*. O raio da área circular varia conforme "subimos" ou "descemos" no eixo das ordenadas, pois o sólido foi gerado a partir da rotação da função $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Sabemos que para calcular a área circular, utilizamos πr^2, logo a área da seção transversal em *y* será $A(y) = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Rightarrow \pi y^{2/3}$. Para calcular o volume de um sólido, vimos que basta multiplicarmos a área da base pela altura, portanto o volume de cada disco originado pelo "corte" será $V(y) = \pi y^{2/3}\Delta y$. Como o sólido tem altura variando entre 0 e 8, devemos somar o

volume de todos os discos intermediários; como o objeto é contínuo, devemos utilizar uma integral: $V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy$. Para resolver uma integral definida, existem técnicas específicas. Vamos utilizar a seguinte regra: $\int x^n dx \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Aplicaremos a regra e efetuaremos a diferença entre os limites superiores e inferiores:

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy$$

$$V = \pi \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^8$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{3}{5} \cdot 8^{5/3} \right) - \left(\frac{3}{5} \cdot 0^{5/3} \right) \right]$$

$$v = \frac{96}{5} \pi$$

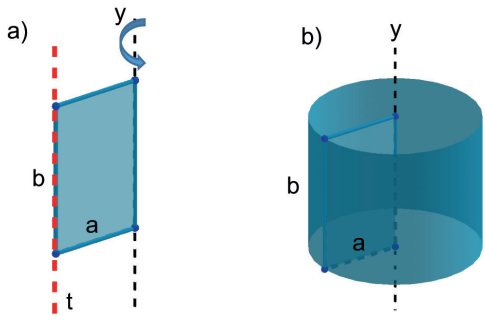
Assimile

Para calcularmos a área e o volume de um sólido de revolução, gerado a partir de uma região resultante de uma função, devemos recorrer ao cálculo diferencial e integral. Por meio das técnicas de integração, é possível calcular a área e o volume de qualquer sólido.

Vamos, agora, analisar outro sólido de revolução. Observe a Figura 4.31(a). Ao rotacionar a região em torno de um eixo vertical *y*, obtém-se o sólido da Figura 4.31(b). Vimos que para calcular a área e o volume, basta particionarmos o sólido em figuras planas e outros sólidos geométricos e utilizarmos o cálculo diferencial e integral. Entretanto, ao particionarmos o sólido da Figura 4.31(b), notamos que o raio da região circular não se altera ao longo do eixo *y* (Figura 4.32). Para esse caso, para calcular a área e o volume, basta utilizarmos os conceitos já aprendidos. A área da superfície esférica será $A_t = 2\pi a(b + a)$ e para obter o volume, multiplicamos a área da base pela altura: $V = \pi a^2 b$. Nesse caso, não foi preciso recorrer às integrais.

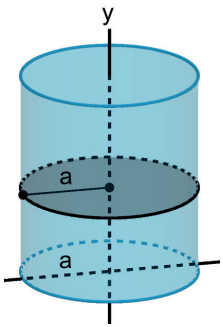
Isso se deve ao fato de o sólido da Figura 4.32 ter sido gerado a partir da rotação de um retângulo.

Figura 4.31 | Superfície cilíndrica de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.32 | Figura plana gerada a partir de um sólido de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

Reflita

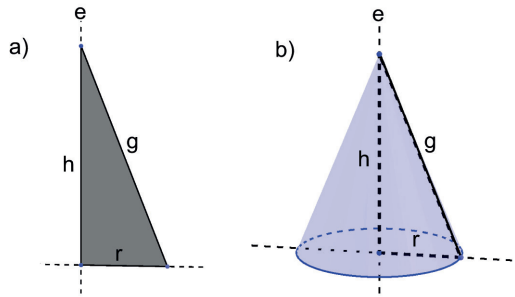
Qualquer figura plana pode gerar um sólido de revolução? Que tal utilizar o Geogebra para buscar uma resposta a essa pergunta?

Área e volume do cone de revolução

Os cones são gerados a partir de uma figura plana também conhecida: o triângulo retângulo. Dado um triângulo retângulo com base medindo *r* e altura *h*, ao rotacionar o retângulo em torno de um eixo *e*, o resultado será um sólido de revolução em forma de cone (Figura 4.33).

Podemos calcular a área da superfície cônica de revolução usando os cálculos aprendidos neste livro: $A_t = \pi r(g + r)$. O volume, como já vimos, é calculado de forma análoga ao da pirâmide: $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$.

Figura 4.33 | Superfície cônica de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

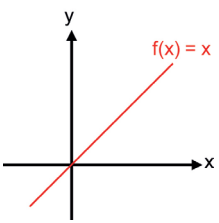
Vamos calcular o volume de sólido de revolução gerado a partir de um triângulo retângulo com catetos medindo 4. Como os catetos são congruentes, o volume do sólido será:

$$V = \frac{1}{3}\pi 4^2 \times 4$$

$$V = \frac{64}{3}\pi$$

Vamos verificar esse resultado recorrendo ao cálculo diferencial e integral. Consideremos a função f(x) = ax + b, com a = 1 e b = 0, cujo gráfico está representado na Figura 4.34.

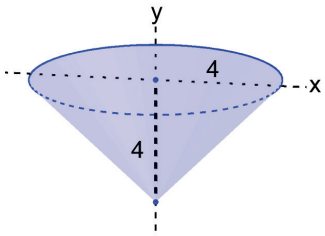
Figura 4.34 | Gráfico da função linear f(x) = x



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos estabelecer como domínio e imagem da função o limite [0,4]. Rotacionando a função f(x) em torno do eixo *y*, obtém-se um cone conforme a Figura 4.35. O raio da base (valor no eixo *x*) e a altura máxima (valor no eixo *y*) do cone valem 4, porém, ao tomarmos uma seção paralela à base, o raio varia conforme a altura. Nesse caso, utilizamos a integral para calcular o volume.

Figura 4.35 | Cone gerado a partir da função f(x)



Fonte: elaborada pelo autor.

Usando a mesma técnica de integração apresentada anteriormente, tem-se:

$$V = \int_0^4 \pi y^2 dy$$

$$V = \pi \frac{y^3}{3}\Big|_0^4$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{4^3}{3} \right) - \left(\frac{0^3}{3} \right) \right]$$

$$v = \frac{64}{3}\pi$$

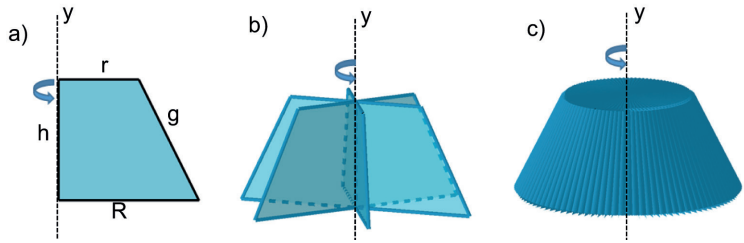
Com o resultado obtido, demonstramos que podemos usar as fórmulas já conhecidas para efetuar cálculos com os sólidos de revolução.

Área e volume do tronco de cone de revolução

Se em vez de considerar todo o cone, nós tomarmos apenas uma parte entre a base e a altura? Estamos falando do tronco do cone, cujo sólido é formado pela rotação de um trapézio em torno de um eixo. Dado um trapézio com bases de raio *R* e *r*, altura *H* e

geratriz *g* (Figura 4.36[a]), rotacionando 360° em torno do eixo *y*, obtém-se o sólido da Figura 4.36(c).

Figura 4.36 | Superfície de um tronco de cone gerado pela revolução de um trapézio retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

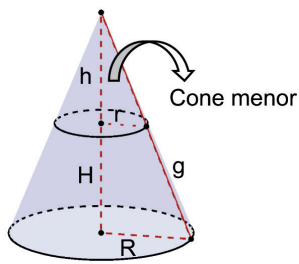
Para calcular a área da superfície de revolução, temos que usar as áreas das duas bases somadas à área da superfície lateral, portanto:

$$A_t = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi g(r+R)$$
$$A_t = \pi(r^2 + R^2) + \pi g(r+R)$$
$$A_t = \pi\left[(r^2 + R^2) + g(r-R)\right]$$

Vimos na Unidade 3 que para calcular o volume do tronco de um cone, temos que conhecer o cone por completo, pois devemos subtrair do volume do cone maior o volume do menor (Figura 4.37). Ao realizar a subtração do volume de ambos os volumes, obtemos a seguinte fórmula para calcular o volume do tronco a partir da altura do tronco e dos raios das bases:

$$V_t = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + rR + r^2\right)$$

Figura 4.37 | Cone para embasar o cálculo do volume do tronco

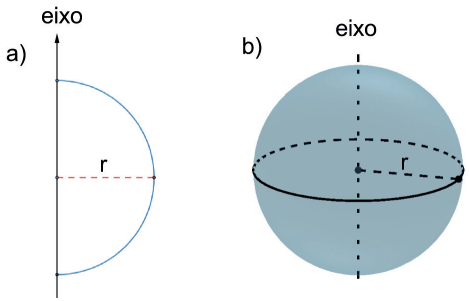


Fonte: elaborada pelo autor.

Área e volume da esfera de revolução

Dada uma região no espaço delimitada por uma semicircunferência de raio *r*, a rotação de tal região resultará em uma esfera de revolução (Figura 4.38), cuja área da superfície pode ser calculada por $A_s = 4\pi r^2$ e o volume é calculado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Figura 4.38 | Superfície esférica de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

Para aprofundar os conhecimentos adquiridos nesta seção, assista a essas videoaulas disponíveis no YouTube e, se possível, pesquise outros materiais didáticos sobre o assunto para explorar ainda mais o conteúdo sobre Sólidos de Revolução. No link descrito, há suporte para trabalhar esses conceitos utilizando o software Geogebra.

GeoGebra: forma de revolução a partir de funções. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x7Xuwkz1EOM >. Acesso em: 30 jan. 2018 (vídeo do YouTube).

GeoGebra: forma de revolução a partir de polígonos – Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Apd-xOo-jQs.>. Acesso em: 30 jan. 2018 (vídeo do YouTube)

Com a superfície esférica de revolução, encerramos nosso estudo de Geometria espacial. Muitos conceitos foram aprendidos no decorrer das quatro unidades e estamos felizes em ter contribuído com sua formação. Continue com perseverança para que possa realizar um excelente trabalho em sua vida profissional.

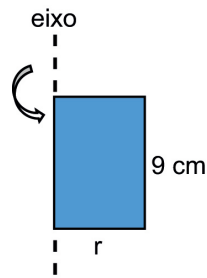
Sem medo de errar

Agora que você já aprendeu o que são os sólidos de revolução, bem como sua construção e o cálculo da área e do volume, é hora de finalizar o projeto na Packing-Design. Foi lhe solicitado modelar duas canecas, além de fazer uma previsão sobre a rentabilidade do negócio. Foram fornecidas as seguintes informações: (I) o volume da caneca deverá ter 500 ml; (II) uma caneca deverá ter 9 cm de altura e a outra, 10 cm.

O primeiro passo é determinar qual será a região do espaço que, rotacionando, gerará o modelo desejado. Seu gerente sugeriu utilizar uma região retangular e, consequentemente, a caneca terá formato cilíndrico.

I. Modelo I: caneca com altura de 9 cm

Figura 4.39 | Revolução do retângulo que resultará num cilindro de altura 9 cm



Fonte: elaborada pelo autor.

O volume do cilindro de revolução é encontrado com a mesma fórmula já estudada neste curso. Ou seja:

$V_{cilindro} = \pi r^2.h$, como 500 ml equivalem também a 500 cm^3, obtemos:

$$500 = 3{,}14.r^2.9$$
$$r^2 = \frac{500}{28{,}26}$$
$$r^2 = 17{,}69$$
$$r = \sqrt{17{,}96}$$
$$r \cong 4{,}21\ cm$$

Para estimar o custo com a produção dessa caneca, é preciso conhecer a área da superfície, pois a quantidade de produto que será gasta para confeccionar depende desse valor. Portanto, a área da superfície será:

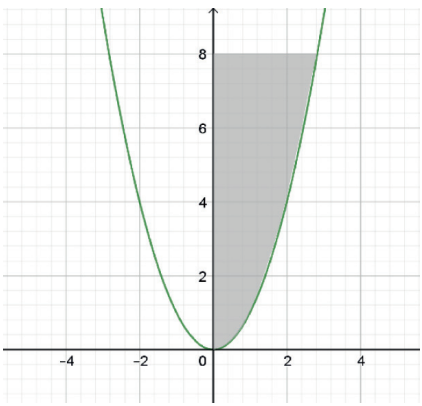
$$A_t = 2\pi r(h + r)$$
$$A_t = 2\pi \cdot 4{,}21(13{,}21)$$
$$A_t \cong 349\ cm^2$$

Para estimar o valor de custo de uma caneca, apresente a seguinte expressão: $Custo = 360 * valor$, em que 360 é a área da superfície com um acréscimo de possível perda nas bordas e o valor depende da matéria-prima a ser utilizada.

Agora que você conhece os passos para a produção do modelo, complete sua apresentação com os detalhes do modelo 2, efetuando os cálculos para a caneca com altura de 10 cm.

A sugestão da região retangular veio do seu chefe. Que tal impressioná-lo e também apresentar a modelagem de uma caneca formada por uma região criada pela função $f(x) = x^2$, tendo como domínio o intervalo [0,4] e como imagem [0,8], sendo rotacionada em torno do eixo *y*, conforme ilustra a região sombreada na Figura 4.40.

Figura 4.40 | **Gráfico da função quadrática** $f(x) = x^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembre-se de ter um comportamento ativo na profissão, pois tal atitude pode trazer bons resultados a você. Até a próxima!

Avançando na prática

Brinquedo com formato de um sólido de revolução

Descrição da situação-problema

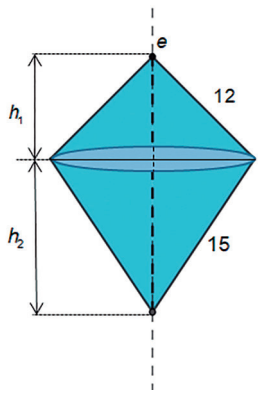
Uma fábrica que produz objetos de madeira recebeu uma encomenda para fabricar um lote de um brinquedo similar a um pião. A fábrica, então, apresentou ao cliente o projeto de um brinquedo que poderia atender ao pedido do cliente. Esse brinquedo seria confeccionado a partir da rotação de 360° em torno da hipotenusa de um triângulo retângulo que possuía catetos de 12 cm e 15 cm.

Dessa forma, qual é o volume do material a ser utilizado para produzir tal brinquedo?

Resolução da situação-problema

Com base no enunciado, podemos representar um esboço do brinquedo que tem formato de dois cones com bases comuns, sendo a soma de suas alturas $(h_1 + h_2)$ a hipotenusa do triângulo anteriormente citado.

Figura 4.40 | Ilustração do brinquedo após a rotação de 360°



Fonte: elaborada pelo autor.

I. Vamos considerar que $x = h_1 + h_2$. Sendo x a hipotenusa do triângulo retângulo, temos:

$$x^2 = 12^2 + 15^2 \therefore x^2 = 144 + 225 \therefore x^2 = 369 \therefore x = 3\sqrt{41} \text{ cm}$$

II. Utilizando as relações métricas do triângulo retângulo, obtemos:

$$3\sqrt{41}.r = 15.12 \therefore 3\sqrt{41}.r = 180 \therefore r = \frac{180}{3\sqrt{41}} \therefore r = \frac{60\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$$

III. $V = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{60\sqrt{41}}{41}\right)^2.h_1 + \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{60\sqrt{41}}{41}\right)^2.h_2 \therefore V =$

$$= \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{60\sqrt{41}}{41}\right)^2.(h_1 + h_2)$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}.\frac{3600}{41}.3\sqrt{41} \therefore V = \frac{3600\sqrt{41}}{41} \therefore V = 562{,}19cm^3$$

Portanto, o volume a ser utilizado na produção do brinquedo é de $562{,}19\ cm^3$.

Faça valer a pena

1. A revolução de 360° de uma figura plana gera um sólido geométrico que possui superfície, ou seja, um corpo redondo. No caso dos quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos, os sólidos gerados têm formato cilíndrico. Portanto, para calcular sua área e seu volume, basta reportarmos as fórmulas do cilindro.

> "Considere o losango cujos lados medem 6 cm e um dos ângulos internos mede 60°. A rotação desse losango em torno de um de seus lados gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é..." (FATEC, 2006, p. 9).

Escolha a opção que corresponde ao volume do sólido:

a) $146\sqrt{3}\pi\ cm^3$.
b) $162\pi\ cm^3$.
c) $162\sqrt{3}\pi\ cm^3$.
d) $178\pi\ cm^3$.
e) $178\sqrt{3}\pi\ cm^3$.

2. Se com a rotação de um retângulo em torno de um de seus lados obtém-se um sólido no formato de um cilindro, se imaginarmos a situação inversa, ou seja, com a planificação desse corpo redondo, teremos a sua superfície com formato retangular e um de seus lados representará justamente a base do cilindro.

"Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas com folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na Figura 4.41:

Figura 4.41 | Sólido de revolução

Fonte: Enem (2014, p. 19).

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original é desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?" (ENEM, 2014, p. 19):

a) πd cm.
b) $2\pi d$ cm.
c) $4\pi d$ cm.
d) $5\pi d$ cm.
e) $10\pi d$ cm.

3. No dia a dia, são inúmeros os exemplos de superfícies de revolução. Basta olhar ao redor que veremos diversos objetos e todos podem ser analisados do ponto de vista geométrico. Um agrimensor, por exemplo, necessita de fórmulas específicas para mensurar um terreno irregular, que normalmente estão implementadas em algum programa de computador, no qual alguém teve que aplicar a teoria para solucionar.

O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo da abscissa, da região do plano limitada pelo triângulo com vértices nos pontos (6,0), (8,0) e (8,9) é igual a:

a) 72π u.v.
b) 81π u.v.
c) 54π u.v.
d) 64π u.v.
e) nenhuma das alternativas.

Referências

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Geometria Espacial. São Paulo: Atual, 2013. V. 10.

ENEM. **Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias, prova de matemática e suas tecnologias**. 2015. Disponível em: <http://inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 29 dez. 2017.

ENEM. **Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias**. 2014. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/CAD_ENEM_2014_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

FATEC. **Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias, prova de matemática e suas tecnologias**. 2009. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2017.

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de Geometria Espacial**. 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2017.

UECE. **Prova de Conhecimentos Gerais – 1ª fase**. 2016. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:PwqSr4OE83oJ:www.uece.br/cev/index.php/arquivos/doc_download/2866-vtb20162f1g2+&cd=2&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 30 jan. 2018.

UNICAMP. **Prova de Matemática e Língua Estrangeira, 2ª fase**. 2003. Disponível em: <http://www.comvest.unicamp.br/vest_anteriores/2003/download/matestr.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.

ISBN 978-85-522-0677-4