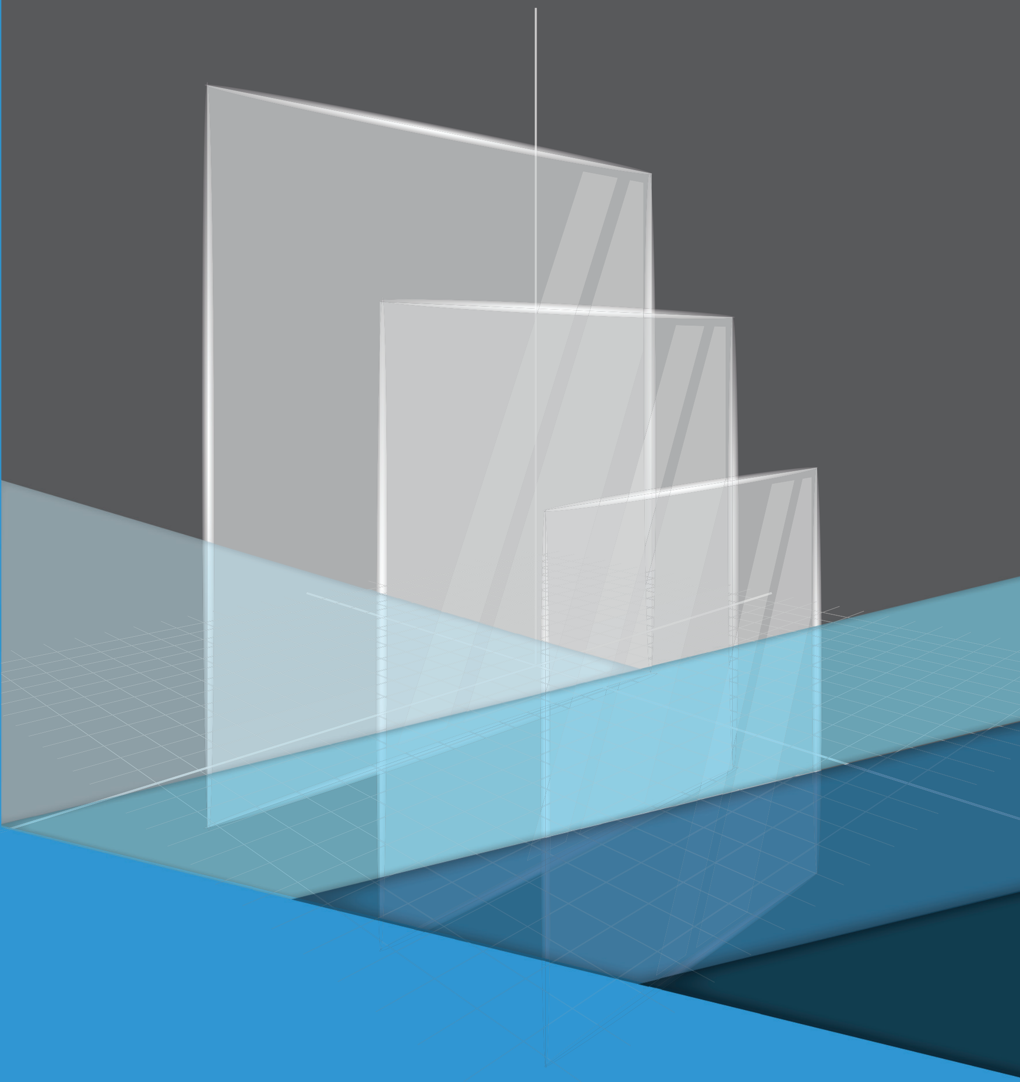


Geometria analítica

Geometria analítica

Alessandra Negrini Dalla Barba

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Barba, Alessandra Negrini Dalla
B228g Geometria analítica / Alessandra Negrini Dalla Barba. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
200 p.

ISBN 978-85-522-0676-7

1. Geometria. I. Barba, Alessandra Negrini Dalla. II. Título.

CDD 660

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Caro aluno!

Atualmente, é indiscutível a importância das representações gráficas, as quais são observadas nas mais diversas situações em nosso cotidiano. O uso de conceitos da geometria tem sido intensificado, de acordo com diferentes objetivos. Na Matemática, além dos estudos desenvolvidos nos campos da geometria plana e espacial, outra área fundamental é a geometria analítica, na qual podemos associar conceitos da geometria com os da álgebra. Neste livro didático, abordaremos alguns dos principais conceitos estudados na geometria analítica, como a estruturação do sistema cartesiano, o estudo de retas, planos, curvas cônicas e quádricas, observando as relações que podem ser estabelecidas entre estes conceitos e sua aplicabilidade em determinadas situações práticas.

Com o objetivo de organizar esses conteúdos, dividimos o livro didático em quatro unidades:

Na Unidade 1, serão iniciados os estudos a respeito do sistema cartesiano, com base no qual outros conceitos podem ser avaliados. Em relação aos planos, as diferentes formas de determinação, bem como o estudo das posições relativas e distâncias, também serão abordadas nessa unidade.

Considerando a caracterização do sistema cartesiano e os conceitos estudados anteriormente, na Unidade 2, o foco serão as retas, com a explicação das possíveis representações, a avaliação das interseções e das posições relativas, analisando-se, também, a associação entre retas e planos.

As curvas cônicas serão estudadas na Unidade 3, caracterizadas como curvas planas. Por isso, é necessário associá-las aos planos, tema tratado na Unidade 1. Nessa unidade, serão investigadas as diferentes curvas cônicas, incluindo seus principais elementos.

Por fim, na Unidade 4, o tema central consiste nas quádricas, que correspondem a superfícies que podem ser associadas às curvas cônicas, abordadas na Unidade 3. Serão destacados os elementos e as representações geométricas das principais quádricas.

Para que ocorra um aprendizado significativo em relação aos conteúdos tratados na disciplina, é imprescindível o desenvolvimento de uma rotina de estudos. Lembre-se de que é preciso organizar seus estudos, esclarecendo as dúvidas que possam surgir ao longo do processo, evitando que se acumulem.

Vamos, então, iniciar este novo desafio, investigando a importância da geometria analítica e a aplicabilidade de seus conceitos em diferentes situações do cotidiano.

Sistema cartesiano ortogonal e o estudo dos planos

Convite ao estudo

Ao longo desta unidade, serão discutidos conceitos importantes da geometria analítica, associados, principalmente, ao estudo do sistema cartesiano e dos planos. Estes temas continuam sendo empregados no desenvolvimento da Matemática, além de serem aplicados em outros campos, como é o caso da Engenharia Civil e de áreas afins. Você poderá investigar algumas situações práticas dessas áreas nas quais os conceitos da geometria analítica são importantes.

É fundamental que os profissionais da Matemática conheçam algumas das aplicações dos conceitos desta ciência, além dos conhecimentos teóricos e sua fundamentação. Você já observou que as estruturas de determinadas construções são baseadas em planos, dispostos em diferentes posições? Esse é apenas um dos exemplos da aplicação dos planos na construção civil. Assim, nesta unidade, você deverá investigar determinadas aplicações dos planos nessa área.

Desta forma, suponha que você atua como professor em uma instituição que presta serviço ofertando aulas de apoio para alunos da Educação Básica e do Ensino Superior. Dois alunos, um da área de Arquitetura e Urbanismo e outro da Engenharia Civil, procuraram essa instituição solicitando aulas complementares da área de Matemática, a fim de que possam desenvolver um projeto de Iniciação Científica do qual participam.

Você foi designado pela instituição para auxiliá-los com suas dúvidas a respeito do sistema cartesiano e dos planos. Ao longo desta unidade, você será colocado diante de diferentes situações nas quais deverá orientar os alunos em relação a alguns conceitos envolvendo o estudo do sistema cartesiano e dos planos, auxiliando-os em algumas etapas do projeto que precisam desenvolver. De que forma você pode orientá-los nesse trabalho? Dê sequência à leitura da unidade e veja o primeiro problema a ser solucionado.

Seção 1.1

O sistema cartesiano e alguns elementos

Diálogo aberto

Considerando a aplicabilidade dos conceitos da geometria analítica na construção civil e a sua responsabilidade como professor de Matemática na instituição que oferece aulas particulares, no contexto envolvendo os alunos apresentados, uma das etapas a serem desenvolvidas em seu projeto corresponde à elaboração de uma logomarca para uma empresa de Engenharia Civil. A logomarca deve ter um formato triangular, sendo necessário também a construção de segmentos de reta que unam os vértices do triângulo ao ponto de encontro de suas medianas.

Os alunos precisam elaborar o projeto dessa logomarca, representando-a conforme o sistema cartesiano ortogonal, bidimensional, indicando as medidas dos seus lados e as coordenadas dos principais pontos que irão compor a figura.

Sabendo que, ao ser representado no sistema cartesiano, o triângulo que caracteriza a logomarca deve ter vértices com coordenadas $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$ e $C(4, 0)$, como deve ser elaborado o projeto dessa logomarca? Para que você possa orientar os alunos nessa tarefa, construa a representação da logomarca no plano cartesiano utilizando as informações dadas, destacando o passo a passo e os conceitos necessários para tal construção.

Não pode faltar

Sistema cartesiano ortogonal

Para resolver as situações propostas nesta seção, é preciso identificar os principais elementos que caracterizam o sistema cartesiano ortogonal bidimensional, ou seja, o plano cartesiano.

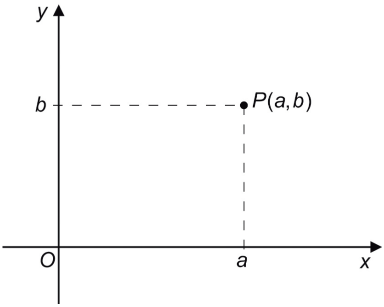
Por meio da construção de duas retas orientadas x e y, perpendiculares entre si, com ponto de interseção dado pela origem O, é possível determinar um sistema de eixos ortogonais no plano, de modo que a reta x é chamada de eixo x ou eixo das abscissas, enquanto y é denominado eixo y ou eixo das ordenadas. As retas x e y dividem o plano em quatro partes, também chamadas de quadrantes.

Com base no sistema apresentado, associamos cada ponto pertencente ao plano a um par ordenado de números reais. Assim, os pontos do plano podem ser determinados por meio de suas coordenadas cartesianas ou coordenadas retangulares. Exemplo:

$$P(a,b),$$

em que a é a abscissa do ponto P, e b é a ordenada de P, sendo representado conforme a Figura 1.1. Além disso, dado qualquer par ordenado de números reais, existe um único ponto P no sistema cartesiano associado a ele.

Figura 1.1 | Representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal



Fonte: elaborada pela autora (2017).

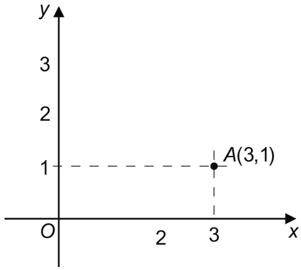
O ponto de interseção entre os eixos x e y corresponde à origem do sistema cartesiano, sendo representado por $O(0,0)$.

Atenção

Podemos adotar sistemas cartesianos não ortogonais, nos quais os eixos x e y não correspondem a retas perpendiculares entre si. Porém, nos estudos que envolvem o sistema cartesiano, ao longo deste livro, você deve considerar o sistema cartesiano ortogonal, a menos que seja especificado outro sistema.

Por exemplo, o ponto $A(3,1)$ possui abscissa 3 e ordenada 1, sendo representado geometricamente no sistema cartesiano como o ponto de interseção das retas $x = 3$ e $y = 1$, conforme a Figura 1.2.

Figura 1.2 | Representação do ponto $A(3,1)$ no sistema cartesiano



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Reflita

A estrutura do sistema cartesiano apresentado diz respeito a um sistema bidimensional, o qual possibilita a representação de elementos com, no máximo, duas dimensões. E, para a representação de objetos tridimensionais, quais adaptações seriam necessárias nesse sistema?

Pesquise mais

Além da representação de pontos, também é possível representar vetores no sistema cartesiano. Para contribuir com os estudos a respeito desse tema, acesse o seguinte *site*:

GEOGEBRA. **Vetores no plano (representação algébrica)**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/MnHay3em>. Acesso em: 5 jan. 2018.

Esse *site* apresenta algumas informações sobre a representação de vetores no plano, em associação com um aplicativo do GeoGebra, que pode ser manipulado para investigar o tema em questão.

Distância entre dois pontos

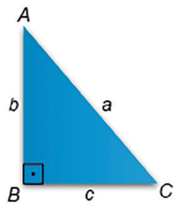
Por meio dos estudos a respeito do sistema cartesiano, além das representações, é possível calcular as distâncias entre pontos, partindo de suas coordenadas.

Lembre-se

Na Figura 1.3, observamos um triangulo retângulo *ABC*, com ângulo reto em *B*, o qual possui hipotenusa com medida *a* e catetos cujas medidas são *b* e *c*. Tomando como base o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

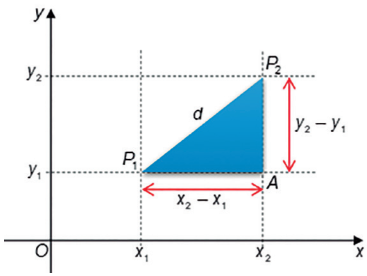
Figura 1.3 | Triângulo *ABC*



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Sejam os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Utilizando estes pontos em conjunto com $A(x_2, y_1)$, podemos construir um triângulo retângulo com ângulo reto localizado no vértice *A*, conforme a Figura 1.4.

Figura 1.4 | Distância entre pontos



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo de vértices *A*, P_1 e P_2, temos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

ou seja,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Logo, conhecendo os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, podemos determinar a distância entre estes por meio de suas coordenadas de forma algébrica.

Exemplificando

Determine a distância entre os pontos $P(2,-1)$ e $Q(3,1)$.

Considerando $(x_1, y_1) = (2,-1)$ e $(x_2, y_2) = (3,1)$, segue que:

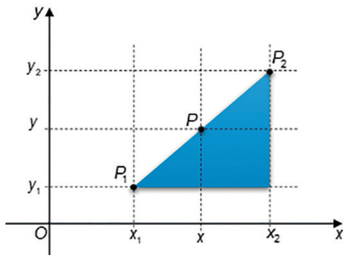
$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2}$$
$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Portanto, a distância entre os pontos *P* e *Q* é igual a $\sqrt{5}$.

Ponto que divide um segmento em uma razão dada

Seja o segmento de extremos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Desejamos determinar as coordenadas do ponto $P(x, y)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão k, partindo das coordenadas de P_1 e P_2, como demonstrado na Figura 1.5.

Figura 1.5 | Representação do segmento P_1P_2 contendo o ponto *P*



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Por semelhança de triângulos, pela Figura 1.5, observamos que:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k\,,$$

o que implica:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \text{ e } \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k.$$

Isolando as variáveis x e y nas equações apresentadas, obtemos:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} \text{ e } y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}.$$

Exemplificando

Determine as coordenadas dos pontos A e B que dividem o segmento de extremos $C(1,-2)$ e $D(7,4)$ em três segmentos, com comprimentos iguais.

Como CD deve ser dividido em três partes iguais, devemos determinar os pontos A e B, tais que os segmentos CB, BA e AD sejam de mesmo comprimento, conforme a Figura 1.6.

Figura 1.6 | Partição do segmento CD

Fonte: elaborada pela autora (2017).

A razão deve ser $k = 2$, porque:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = 2 \text{ e } \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = 2$$

Assim, para o ponto A, segue que:

$$x_A = \frac{1+2\cdot 7}{1+2} \Rightarrow x_A = \frac{1+14}{3} \Rightarrow x_A = \frac{15}{3} = 5$$

$$y_A = \frac{(-2)+2\cdot 4}{1+2} \Rightarrow y_A = \frac{(-2)+8}{3} \Rightarrow y_A = \frac{6}{3} = 2$$

De modo análogo, para B, temos:

$$x_B = \frac{7+2\cdot 1}{1+2} \Rightarrow x_B = \frac{7+2}{3} \Rightarrow x_B = \frac{9}{3} = 3$$

$$y_B = \frac{4+2\cdot(-2)}{1+2} \Rightarrow y_B = \frac{4+(-4)}{3} \Rightarrow y_B = \frac{0}{3} = 0$$

Portanto, os pontos $C(1,-2)$, $B(3,0)$, $A(5,2)$ e $D(7,4)$ dividem o segmento CD em três partes de mesmo comprimento.

No caso particular em que $k=1$, o ponto P divide o segmento P_1P_2 em seu ponto médio, sendo que $P(x_M, y_M)$ tem coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Assimile

O ponto médio P de um segmento de reta P_1P_2 tem sua abscissa dada pela média aritmética simples das abscissas dos pontos P_1 e P_2, bem como a ordenada de P, a qual é calculada pela média aritmética simples das ordenadas dos pontos P_1 e P_2.

Faça você mesmo

Determine as coordenadas do ponto médio do segmento MN, sabendo que $M(4,-2)$ e $N(-3,2)$.

Baricentro de um triângulo

No estudo dos triângulos, podemos conhecer os segmentos denominados cevianas. Uma ceviana é caracterizada como um segmento de reta que liga um vértice do triângulo a um ponto qualquer da reta suporte do lado oposto. Dentre as cevianas notáveis, destacamos a altura, a bissetriz, a mediatriz e a mediana, associadas a cada vértice dos triângulos. Por meio das cevianas notáveis, estudamos também os pontos de interseção entre os segmentos relativos aos três vértices dos triângulos, isto é, o ortocentro, o incentro, o circuncentro e o baricentro.

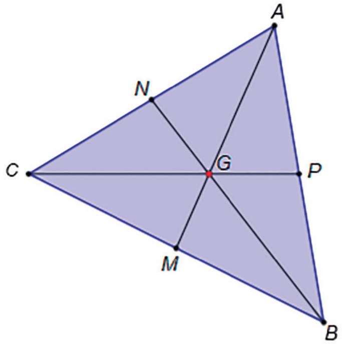
Pesquise mais

Você pode obter mais informações a respeito dos pontos de interseção das cevianas notáveis de um triângulo no artigo indicado a seguir:

MORGADO, Augusto C. Coordenadas para os centros do triângulo. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 43, p. 26-30, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_05.PDF>. Acesso em: 4 jan. 2018.

Quando são construídas as medianas relativas aos três vértices de um triângulo, verificamos que esses segmentos possuem um ponto de interseção, denominado baricentro do triângulo, podendo ser associado, inclusive, ao centro de massa da figura.

Figura 1.7 | Baricentro de um triângulo



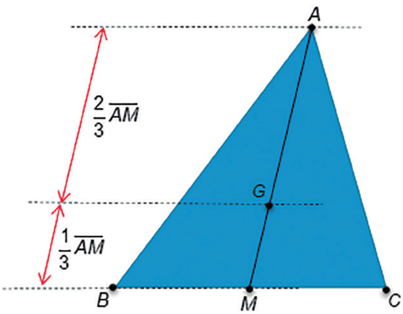
Fonte: elaborada pela autora (2017).

Reflita

Considere *G* o baricentro de um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*. Quais condições devem ser satisfeitas para que *G* coincida com o incentro e com o ortocentro do triângulo *ABC*?

Para determinar as coordenadas do baricentro *G* de um triângulo *ABC*, suponha que as coordenadas dos vértices de *ABC* sejam dadas por $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Além disso, sabemos que o baricentro *G* divide a mediana *AM* na razão 2, conforme a Figura 1.8.

Figura 1.8 | Relação do baricentro com as medianas



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Nessas condições, admitindo $G(x_G, y_G)$, segue pela expressão da divisão de um segmento em uma razão dada, com $k = 2$, que a abscissa x_G satisfaz a relação:

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3}$$

E sabendo que M é o ponto médio do segmento BC, então:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$$

Substituindo a relação para x_M na expressão de x_G, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De forma análoga, para a ordenada y_G, segue que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Assimile

O baricentro G de um triângulo ABC tem sua abscissa dada pela média aritmética simples das abscissas dos vértices A, B e C, bem como a ordenada de G, a qual é calculada pela média aritmética simples das ordenadas dos vértices A, B e C.

Exemplificando

Determine as coordenadas do baricentro do triângulo de vértices $A(1,-1)$, $B(5,3)$ e $C(-3,4)$.

As coordenadas do baricentro do triângulo ABC são dadas por:

$$x_G = \frac{1+5+(-3)}{3} \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{3}{3} = 1 \text{ e}$$

$$y_G = \frac{(-1)+3+4}{3} \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{6}{3} = 2.$$

Portanto, o baricentro tem coordenadas $G(1,2)$.

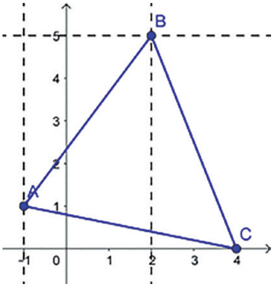
Faça você mesmo

Determine as coordenadas do vértice *C* do triângulo *ABC*, sabendo que os outros dois vértices têm coordenadas $A(4,0)$ e $B(-3,1)$, e o baricentro de *ABC* possui coordenadas $G(3,-1)$.

Sem medo de errar

A logomarca a ser elaborada pelos alunos, conforme descrito no início desta seção, deve ter o formato de um triângulo com vértices $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 5)$ e $C(4,\ 0)$. Assim, os vértices do triângulo possuem as seguintes características: $A(-1,\ 1)$ é o ponto de abscissa $x = -1$ e ordenada $y = 1$; $B(2,\ 5)$ tem abscissa $x = 2$ e ordenada $y = 5$; $C(4,\ 0)$ possui abscissa $x = 4$ e ordenada $y = 0$. Inicialmente, é necessário orientá-los na representação das abscissas e das ordenadas desses pontos no sistema cartesiano, conforme a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Representação do triângulo de vértices *A*, *B* e *C*



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Na sequência, os alunos precisam calcular o comprimento dos lados do triângulo. Para isso, eles devem ser orientados a calcular a distância entre os pontos, de acordo com os seguintes itens:

$$\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\overline{AC} = d(A,C) = \sqrt{(4-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \approx 5{,}1 \text{ e}$$

$$\overline{BC} = d(B,C) = \sqrt{(4-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5{,}4.$$

Logo, o triângulo que caracteriza a logomarca tem lados de medidas dadas, aproximadamente, por 5, 5,1 e 5,4 unidades de comprimento.

Além disso, nessa figura, devem ser destacados os segmentos de reta que unem os vértices do triângulo ao ponto de encontro de suas medianas, o qual corresponde ao baricentro. Por isso, na próxima etapa, é necessário orientar os alunos na determinação do baricentro do triângulo de vértices $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 5)$ e $C(4,\ 0)$, como segue:

$$\left(\frac{(-1)+2+4}{3},\ \frac{1+5+0}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{6}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$$

Logo, o baricentro do triângulo tem coordenadas $G\left(\frac{5}{3},2\right)$. Além disso, os alunos precisam calcular o comprimento dos segmentos AG, BG e CG, por serem informações solicitadas para a construção do projeto da logomarca. Essa etapa envolve os seguintes cálculos:

$$\overline{AG}=d(A,G)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-(-1)\right)^2+(2-1)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+1}=\sqrt{\frac{73}{9}}\approx 2{,}85,$$

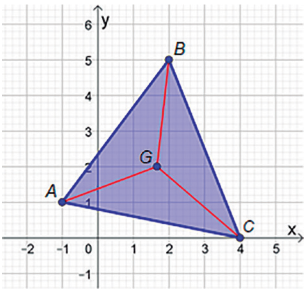
$$\overline{BG}=d(B,G)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-2\right)^2+(2-5)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+9}=\sqrt{\frac{82}{9}}\approx 3{,}02 \text{ e}$$

$$\overline{CG}=d(C,G)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-4\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+4}=\sqrt{\frac{85}{9}}\approx 3{,}07.$$

Esses cálculos concluem os dados necessários para a identificação da logomarca.

Com base nas informações obtidas, na última etapa, os alunos precisarão construir o triângulo no sistema cartesiano, indicando os pontos *A*, *B*, *C* e *G*, cujas coordenadas são conhecidas, além dos segmentos *AB*, *AC*, *BC*, *AG*, *BG* e *CG*, conforme a Figura 1.10.

Figura 1.10 | Representação da logomarca



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Desta forma, na tarefa a ser desenvolvida pelos alunos, você deverá orientá-los a realizar os procedimentos indicados anteriormente, iniciando pela representação dos pontos no sistema cartesiano, seguindo para a elaboração do triângulo, o cálculo dos comprimentos dos lados, a determinação das coordenadas do baricentro, o cálculo dos comprimentos dos segmentos que unem o baricentro aos vértices e, por fim, a construção da figura, com base nas informações obtidas.

Avançando na prática

Baricentro e o centro de massa

Descrição da situação-problema

Após a resolução da tarefa proposta, ainda no contexto de orientação aos alunos da Engenharia Civil e da Arquitetura e Urbanismo, suponha que eles queiram analisar uma lâmina que possui formato triangular, a fim de identificar seu centro de massa, o qual corresponde ao ponto no qual se pode admitir que a massa esteja concentrada. Sabemos que a lâmina tem o formato de um triângulo retângulo cujos vértices, ao serem representados no sistema cartesiano, coincidem com a origem, com um ponto sobre o eixo x, de abscissa 4, e outro ponto sobre o eixo y, de ordenada 3. Considerando que a lâmina possa ser aproximada a uma figura bidimensional devido a sua espessura, se o centro de massa coincide com o baricentro no caso do triângulo, quais são as coordenadas do centro de massa dessa lâmina?

Resolução da situação-problema

Um dos vértices do triângulo retângulo que representa a lâmina coincide com a origem, assim, esse ponto pode ser indicado por $O(0,0)$. Se o segundo vértice coincide com um ponto sobre o eixo x, de abscissa 4, então temos $P(x,y)$, sendo $x=4$ e $y=0$, ou seja, $P(4,0)$. O terceiro vértice coincide com um ponto sobre o eixo y, de ordenada 3. Logo, temos o ponto $Q(x,y)$, no qual $x=0$ e $y=3$, ou seja, $Q(0,3)$. Portanto, a lâmina pode ser representada pelo triângulo OPQ no sistema cartesiano, sendo $O(0,0)$, $P(4,0)$ e $Q(0,3)$.

Para determinar as coordenadas do baricentro, segue que:

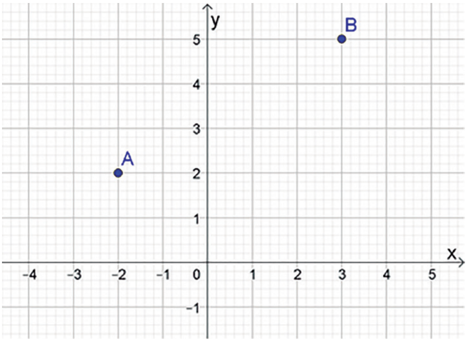
$$\left(\frac{0+4+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$$

Portanto, o centro de massa da lâmina tem coordenadas $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.

Faça valer a pena

1. Sejam os pontos *A* e *B* representados no sistema cartesiano, conforme a Figura 1.11:

Figura 1.11



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Considerando as posições ocupadas pelos pontos na figura anterior, sabemos que *A* e *B* são vértices opostos de determinado quadrado.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que corresponde à área do quadrado em questão:

a) 10.

b) 17.

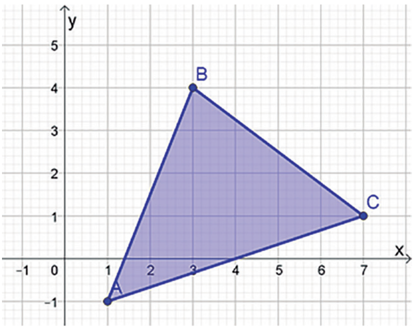
c) 25.

d) 27.

e) 34.

2. Considere um triângulo de vértices $A(1,-1)$, $B(3,4)$ e $C(7,1)$, de acordo com a representação dada pela Figura 1.12:

Figura 1.12



Fonte: elaborada pela autora (2017).

Com base nessas informações, podemos construir as medianas relativas a cada um dos vértices, partindo das coordenadas dos vértices *A*, *B* e *C*.

Assinale a alternativa que indica corretamente o comprimento da mediana do triângulo *ABC* relativa ao vértice *B*:

a) $\sqrt{7}$.

b) 5.

c) 8.

d) $\sqrt{17}$.

e) $\sqrt{29}$.

3. Considere o triângulo de vértices *A*, *B* e *C*. Em relação a esse triângulo, são conhecidas as coordenadas dos vértices $A(1,1)$ e $C(3,5)$, além das coordenadas do ponto médio $M(4,2)$ do segmento *AB*.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente as coordenadas do baricentro *G* do triângulo *ABC*:

a) $G\left(\frac{11}{3},3\right)$.

b) $G(-1,2)$.

c) $G(7,3)$.

d) $G\left(\frac{9}{2},2\right)$.

e) $G\left(1,\frac{5}{3}\right)$.

Seção 1.2

Equação geral do plano, equação segmentária do plano e vetor normal

Diálogo aberto

Você trabalha para uma instituição que oferta aulas particulares e foi encarregado de auxiliar dois alunos das áreas de Arquitetura e Urbanismo e de Engenharia Civil no desenvolvimento de um projeto de iniciação científica. A segunda etapa do trabalho a ser desenvolvido pelos estudantes consiste na elaboração do projeto de algumas faces do telhado de uma casa, utilizando a representação no sistema cartesiano ortogonal tridimensional. As faces do telhado serão posteriormente reproduzidas em um software, com base nas informações obtidas pelos estudantes, para a geração por meio de uma impressora 3D e a posterior confecção de maquetes.

Supondo que as faces do telhado são superfícies planas e considerando as respectivas representações gráficas, são conhecidas as seguintes informações:

- A primeira face do telhado contém os pontos $A(1,\ 2,\ 1)$, $B(-1,\ 4,\ 1)$ e $C(2,\ 6,\ 0)$.
- A segunda face do telhado contém o ponto $D(-2,\ 1,\ 3)$ e possui como vetor ortogonal $\vec{n}=(6,\ 4,-2)$.
- A terceira face do telhado é paralela ao vetor $\vec{v}=(3,\ 1,-5)$, contém o ponto $E(2,\ 0,\ 2)$, além de intersectar o eixo x no ponto cuja abscissa é $x=3$.

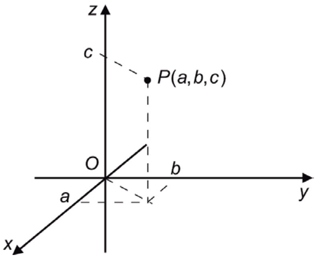
Considerando as informações apresentadas, como os estudantes podem representar algebricamente as três faces do telhado descritas anteriormente?

Lembre-se de que eles devem ser capazes de construir corretamente as representações gráficas das faces do telhado no sistema cartesiano ortogonal tridimensional a partir das expressões algébricas construídas. Assim, nesse sentido, como você pode auxiliá-los?

Não pode faltar

Os planos são objetos bidimensionais, sendo suas representações gráficas construídas no espaço. Assim, para o estudo deste tema, devemos considerar uma extensão do sistema cartesiano construído na seção anterior, tomando três eixos ortogonais entre si, conforme a Figura 1.13, de modo a construir o sistema cartesiano ortogonal tridimensional, que pode ser denominado de espaço cartesiano.

Figura 1.13 | Sistema cartesiano ortogonal tridimensional



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Os pontos são representados no espaço cartesiano na forma $P(x,y,z)$, com três coordenadas.

Além da caracterização do espaço cartesiano, o estudo dos vetores também é essencial para a determinação dos planos e de suas representações algébricas.

Pesquise mais

Para auxiliar na retomada de conceitos importantes sobre vetores – tema essencial para o estudo dos planos, consulte o seguinte material:

MIRANDA, D.; GRISI, R.; LODOVICI, S. **Geometria Analítica e Vetorial**. Santo André: UFABC, 2015. (versão 9). Disponível em: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf. Acesso em: 4 jan. 2018.

Você também pode utilizar a seguinte obra como referência para seus estudos a respeito da Geometria:

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~jcvb/online/geo-1.pdf. Acesso em: 4 jan. 2018.

Equação geral do plano

Considere $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π, além de um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ normal (ortogonal) a π. O plano π pode ser definido como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço cartesiano, tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ seja ortogonal a $\vec{n}$. Assim, P pertence ao plano se, e somente se,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0,$$

isto é, se o produto escalar entre os vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{AP}$ for nulo. A partir das expressões que foram apresentadas anteriormente, segue que:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad ax + by + cz + d = 0. \end{aligned}$$

sendo esta última expressão a equação geral do plano, na qual $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Assimile

A equação geral do plano π que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e possui como vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ pode ser determinada como segue:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Exemplificando

Determine a equação geral do plano π que contém o ponto $D(-1,\ 2,\ 3)$ e tem $\vec{n} = (2, -1,\ 2)$ como vetor normal a π.

A equação geral do plano descrito é determinada da seguinte forma:

$$2(x - (-1)) + (-1)(y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2 - y + 2 + 2z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 2z - 2 = 0$$

Logo, o plano tem equação geral $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Faça você mesmo

Determine a equação geral do plano π que contém o ponto $P(2,\ 0, -1)$ e tem $\vec{n} = (-3,\ 2, -5)$ como o vetor normal a π.

Determinação de um plano

Além da possibilidade de determinar um plano a partir de um de seus pontos e de um vetor normal a ele, existem outras situações com as quais podemos nos deparar no momento de identificar uma representação algébrica para um plano.

Para isso, um conceito essencial da álgebra vetorial é a definição de produto vetorial, a qual possibilita a caracterização de determinados vetores normais aos planos.

Lembre-se

Sejam dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tomados nessa ordem. O produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, corresponde ao vetor

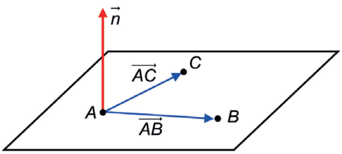
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2,\ -x_1z_2 + z_1x_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$$

Reflita

Com base nas características do vetor oriundo do produto vetorial, que relação pode ser estabelecida entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$?

Um dos casos possíveis é a definição de um plano π, dados três de seus pontos, *A*, *B* e *C*, os quais não são colineares entre si, conforme a Figura 1.14.

Figura 1.14 | Plano definido por três pontos



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Neste caso, é necessário identificar o vetor normal ao plano por meio do produto vetorial de dois vetores construídos a partir dos três pontos indicados (como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, por exemplo), os quais são paralelos ao plano e não colineares entre si. Podemos considerar nessa situação, por exemplo, o vetor normal dado por $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Exemplificando

Determine a equação geral do plano que contém os pontos $M(2,\ 1,\ 0)$, $N(-1,\ 5,\ 2)$ e $R(5,\ 3,\ 2)$.

A partir dos pontos M, N e R, podemos determinar os vetores $\overrightarrow{MN} = (-3,\ 4,\ 2)$ e $\overrightarrow{MR} = (3,\ 2,\ 2)$ e, consequentemente, o vetor normal ao plano pode ser determinado como segue:

$$\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 12\vec{j} - 18\vec{k} = (4,\ 12, -18),$$

pois $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.

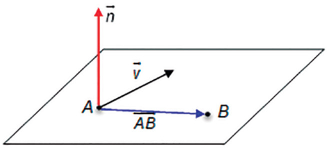
Logo, a equação geral do plano, considerando um dos pontos – $M(2,\ 1,\ 0)$, por exemplo – e o vetor normal $\vec{n} = (4,\ 12, -18)$, é dada por:

$$4(x-2) + 12(y-1) + (-18)(z-0) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x + 12y - 18z - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 6y - 9z - 10 = 0$$

Portanto, o plano tem equação geral $2x + 6y - 9z - 10 = 0$.

Um plano π também pode ser determinado a partir de dois de seus pontos, A e B, e um vetor $\vec{v}$ paralelo ao plano e não colinear com $\overrightarrow{AB}$, conforme a Figura 1.15.

Figura 1.15 | Plano determinado por dois pontos e um vetor paralelo ao plano



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Nesse caso, construindo o vetor $\overrightarrow{AB}$ e determinando o produto vetorial $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{v}$, é possível identificar o vetor $\vec{n}$ normal ao plano, o qual, em conjunto com um dos pontos conhecidos (A ou B), fornece a equação geral de π.

Exemplificando

Determine a equação geral do plano que contém os pontos $P(1,\ 0,-1)$, $Q(2,\ 2,-2)$, e tem $\vec{v}=(1,-1,\ 3)$ como vetor paralelo ao plano.

A partir dos pontos *P* e *Q*, podemos determinar o vetor $\overrightarrow{PQ}=(1,\ 2,-1)$ e, em conjunto com $\vec{v}=(1,-1,\ 3)$, identificar o vetor normal ao plano, como:

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=(5,-4,-3).$$

Logo, a partir de $\vec{n}$ e *P*, a equação geral do plano é dada por:

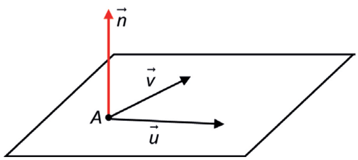
$$5(x-1)+(-4)(y-0)+(-3)(z-(-1))=0$$

$$\Rightarrow\quad 5x-4y-3z-8=0$$

Portanto, o plano tem equação geral $5x-4y-3z-8=0$.

Outra situação com a qual podemos nos deparar é a determinação de um plano π a partir de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos ao plano e não colineares entre si, em conjunto com um ponto *A* pertencente ao plano, conforme a Figura 1.16.

Figura 1.16 | Plano determinado por um ponto e dois vetores paralelos ao plano



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Sendo assim, a equação geral de π é obtida a partir do ponto *A* e do produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pois o vetor normal ao plano π pode ser determinado como $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$.

Exemplificando

Determine a equação geral do plano π que contém o ponto $A(2,-3,\ 1)$, sendo paralelo aos vetores $\vec{v}=(2,\ 1,\ 1)$ e $\vec{w}=(0,-2,\ 1)$.

Para determinar o vetor normal ao plano, podemos calcular:

$$\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}=(3,-2,-4).$$

Logo, considerando $\vec{n}$ e A, a equação geral do plano é dada por:

$$3(x-2)+(-2)(y-(-3))+(-4)(z-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad 3x-2y-4z-8=0.$$

Portanto, o plano tem equação geral $3x-2y-4z-8=0$.

Assimile

Em síntese, podemos determinar a equação geral de um plano a partir de diferentes elementos, porém, em todos os casos, devemos determinar um ponto pertencente ao plano, além de um vetor normal a ele, que, na maioria dos casos, é obtido por meio do produto vetorial entre dois vetores paralelos ao plano e não colineares entre si.

Faça você mesmo

Determine a equação geral do plano que contém os pontos $P(1,\ 2,-1)$ e $Q(3,\ 1,\ 1)$, sendo paralelo ao vetor $\vec{v}=(5,\ 2,-3)$.

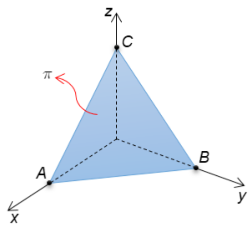
Interseção de planos com os eixos coordenados

Reflita

Quais são as características dos pontos que pertencem aos eixos coordenados: eixo *x*, eixo *y* e eixo *z*?

Seja um plano π de equação geral $ax+by+cz+d=0$. Podemos identificar as interseções desse plano com os eixos coordenados, caso existam, conforme a Figura 1.17.

Figura 1.17 | Interseção de plano com os eixos coordenados



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Para a interseção com o eixo *x*, o eixo das abscissas, devemos determinar os pontos na forma $A(a,0,0)$, ou seja, tomamos na equação geral do plano as variáveis *y* e *z* nulas ($y = z = 0$).

No caso do eixo *y*, o eixo das ordenadas, as interseções são da forma $B(0,b,0)$, que podem ser determinadas assumindo-se, na equação geral do plano, as variáveis *x* e *z* nulas ($x = z = 0$).

Por fim, as interseções com o eixo *z*, ou eixo das cotas, são da forma $C(0,0,c)$, determinadas a partir da equação geral do plano, tomando as variáveis *x* e *y* nulas ($x = y = 0$).

Exemplificando

Determine as interseções do plano π de equação geral $3x - 2y + z + 1 = 0$ com os eixos coordenados.

Como os pontos que pertencem ao eixo *x* são da forma $A(a,0,0)$, segue da equação geral de π a seguinte igualdade:

$$A \in \pi \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot a - 2 \cdot 0 + 0 + 1 = 0.$$

o que implica $a = -\dfrac{1}{3}$. Logo, a interseção de π com o eixo *x* resulta no ponto $A\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$.

De modo análogo, para as interseções com os eixos *y* e *z*, teremos os pontos $B(0,b,0)$ e $C(0,0,c)$, de modo que:

$$B \in \pi \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 0 - 2 \cdot b + 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

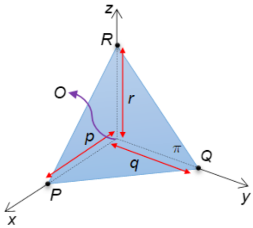
$$C \in \pi \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + c + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Portanto, as interseções do plano π com os eixos *y* e *z* são dadas, respectivamente, por $B\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ e $C(0,\ 0, -1)$.

Equação segmentária do plano

Suponha que o plano π de equação geral $ax+by+cz+d=0$ intersecta os eixos coordenados *x*, *y* e *z*, respectivamente, nos pontos *P*, *Q* e *R*, originando segmentos de reta *OP*, *OQ* e *OR* com comprimentos dados, respectivamente, por *p*, *q* e *r*, conforme a Figura 1.18.

Figura 1.18 | Interseção de plano com eixos e determinação dos pontos *P*, *Q* e *R*



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Desta forma, os pontos $P(p,0,0)$, $Q(0,q,0)$ e $R(0,0,r)$ satisfazem a equação geral de π. Logo,

$$P\in\pi \quad\Rightarrow\quad a\cdot p+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \quad\Rightarrow\quad p=-\frac{d}{a},$$

$$Q\in\pi \quad\Rightarrow\quad a\cdot 0+b\cdot q+c\cdot 0+d=0 \quad\Rightarrow\quad q=-\frac{d}{b},$$

$$R\in\pi \quad\Rightarrow\quad a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot r+d=0 \quad\Rightarrow\quad r=-\frac{d}{c}.$$

Considerando $d\neq 0$, segue da equação geral do plano que

$$ax+by+cz+d=0 \quad\Rightarrow\quad ax+by+cz=-d \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ax}{-d}+\frac{by}{-d}+\frac{cz}{-d}=1,$$

e tomando $a,b,c\neq 0$, tem-se:

$$\frac{x}{-d/a}+\frac{y}{-d/b}+\frac{z}{-d/c}=1.$$

Das relações avaliadas anteriormente, segue que:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

que corresponde à equação segmentária do plano π.

Exemplificando

Determine a equação segmentária do plano π de equação geral dada por $6x+4y-3z-12=0$.

Podemos reescrever a equação geral do plano como $6x+4y-3z=12$, ou, ainda,

$$\frac{6}{12}x+\frac{4}{12}y-\frac{3}{12}z=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{12/6}+\frac{y}{12/4}+\frac{z}{-12/3}=1.$$

Logo, a equação segmentária de π é dada por:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1.$$

Faça você mesmo

Determine a equação segmentária do plano π determinado pelos pontos $M(2,\ 0,\ 1)$, $N(1,\ 2,-1)$ e $Q(3,-1,\ 1)$.

Pesquise mais

Para auxiliar nos estudos a respeito dos planos, consulte o seguinte material:

SANTOS, Fabiano José dos; FERREIRA, Silvimar Fábio. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009. Disponível em Minha Biblioteca. Veja a partir da página 184.

Reflita sobre as estratégias que podem ser empregadas na identificação dos planos, além dos diferentes formatos de equações que podem ser utilizados para a representação desses objetos matemáticos.

Sem medo de errar

Como professor da instituição que atua no ramo de aulas particulares, você precisa auxiliar os alunos de Arquitetura e Urbanismo e de Engenharia Civil em seu projeto.

Para essa etapa, os alunos precisam descrever algebricamente as faces de um telhado, considerando-as como superfícies planas.

Logo, é necessário construir equações de planos que representem cada uma das faces de acordo com suas principais características.

Sabe-se que a primeira face do telhado contém os pontos $A(1,\ 2,\ 1)$, $B(-1,\ 4,\ 1)$ e $C(2,\ 6,\ 0)$. Desta forma, você deve orientar os alunos a construírem a equação de um plano, sendo conhecidos três de seus pontos.

Como os pontos A, B e C não são colineares, precisamos determinar um vetor normal ao plano a partir destes. Para isso, é preciso construir dois vetores paralelos ao plano, como é o caso de

$$\overrightarrow{AB} = (-1,\ 4,\ 1) - (1,\ 2,\ 1) = (-2,\ 2,\ 0) \text{ e}$$
$$\overrightarrow{AC} = (2,\ 6,\ 0) - (1,\ 2,\ 1) = (1,\ 4, -1),$$

e, a partir destes, determinar o vetor normal por meio do produto vetorial, como segue:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 10\vec{k} = (-2, -2, -10),$$

pois $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.

Para determinar a equação do plano que caracteriza a primeira face, consideramos o vetor normal $\vec{n} = (-2, -2, -10)$ e um dos pontos do plano (por exemplo, o ponto $A(1,\ 2,\ 1)$). Sendo assim,

$$(-2)(x-1) + (-2)(y-2) + (-10)(z-1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -2x + 2 - 2y + 4 - 10z + 10 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -2x - 2y - 10z + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + 5z - 8 = 0$$

Logo, o plano que caracteriza a primeira face do telhado tem equação geral $x + y + 5z - 8 = 0$.

Para a segunda face do telhado, que contém o ponto $D(-2,\ 1,\ 3)$ e possui como vetor ortogonal $\vec{n} = (6,\ 4, -2)$, segue a equação geral do plano:

$$6(x+2) + 4(y-1) + (-2)(z-3) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6x + 12 + 4y - 4 - 2z + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 6x + 4y - 2z + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - z + 7 = 0$$

Desta forma, a segunda face do telhado é caracterizada pelo plano de equação geral dada por $3x+2y-z+7=0$. Logo, para a segunda face do telhado, é necessário orientar os alunos na construção da equação geral de um plano definido por um ponto e um vetor normal ao plano.

A terceira face do telhado é paralela ao vetor $\vec{v}=(3,\ 1,-5)$, contém o ponto $E(2,\ 0,\ 2)$, além de intersectar o eixo x no ponto cuja abscissa é $x=3$. Como os pontos que pertencem ao eixo x são da forma $(x,0,0)$, então a interseção do telhado com o eixo x, conforme as informações apresentadas, corresponde ao ponto $F(3,0,0)$.

Para determinar o vetor normal ao plano, nessa terceira situação, precisamos determinar inicialmente dois vetores paralelos ao plano. Nesse caso, temos o vetor $\vec{v}=(3,\ 1,-5)$ e podemos considerar

$$\overrightarrow{EF}=(3,\ 0,\ 0)-(2,\ 0,\ 2)=(1,\ 0,-2).$$

Pelo produto vetorial, podemos determinar o vetor ortogonal, sabendo que

$$\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{EF}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-2,\ 1,-1).$$

Sendo assim, a equação geral do plano que contém o ponto $E(2,\ 0,\ 2)$ e tem vetor normal $\vec{n}=(-2,\ 1,-1)$ é dada por:

$$(-2)(x-2)+1(y-0)+(-1)(z-2)=0 \quad\Rightarrow\quad -2x+4+y-z+2=0$$

$$\Rightarrow\quad -2x+y-z+6=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-y+z-6=0.$$

Logo, a terceira face do telhado é caracterizada pelo plano de equação $2x-y+z-6=0$.

Portanto, nessa tarefa, você deve orientar os alunos a estudarem a equação geral do plano analisando os principais elementos envolvidos, para que possam identificar de que forma cada uma das faces do telhado – ou seja, os planos – estão definidas, buscando em cada situação a caracterização dos planos a partir de um ponto e de um vetor normal para a construção das equações gerais correspondentes, conforme os cálculos apresentados anteriormente.

Avançando na prática

Investigação a respeito de problemas com o telhado

Descrição da situação-problema

Considerando ainda o trabalho a ser desenvolvido pelos estudantes, suponha que houve um problema com uma das faces do telhado a qual, devido ao seu posicionamento, precisou ser substituída por outra face, para que fosse possível escoar a água proveniente das chuvas.

Devido a esse problema, é necessário determinar uma expressão algébrica que represente essa nova face do telhado a ser produzida pela impressora 3D.

Sabendo que essa face pode ser aproximada pelo plano que contém o ponto $A(-1, 2, 1)$ e possui vetores $\vec{u} = (1, 0, -2)$ e $\vec{v} = (3, 2, 1)$ paralelos ao plano, qual é a equação geral do plano que caracteriza a nova face do telhado?

Resolução da situação-problema

Para essa situação, precisamos determinar a equação de um plano definido por um de seus pontos e por dois vetores paralelos a ele, não colineares entre si.

Na determinação do vetor normal ao plano que representa a face do telhado, podemos empregar o produto vetorial como segue:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k} = (4, -7, 2)$$

A equação geral do plano que contém o ponto $A(-1, 2, 1)$ e tem vetor normal dado por $\vec{n} = (4, -7, 2)$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$4(x - (-1)) + (-7)(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 7y + 2z + 16 = 0$$

Portanto, a nova face do telhado pode ser representada pelo plano de equação geral $4x - 7y + 2z + 16 = 0$.

Faça valer a pena

1. Uma empresa produz chapas metálicas para a utilização em obras da construção civil. Para que seja possível a produção dessas chapas, faz-se necessário elaborar projetos, de modo a identificar o formato de cada produto, para que as máquinas possam realizar os cortes corretamente, conforme as necessidades dos clientes atendidos pela empresa.

Suponha que uma das chapas metálicas possa ser aproximada por um plano que contém os pontos $P(1,-2,\ 5)$ e $Q(2,\ 2,\ 1)$, tendo $\vec{v}=(1,\ 0,-1)$ como vetor paralelo ao plano.

Assinale a alternativa que indica a equação geral do plano que caracteriza a chapa metálica descrita:

a) $x-2y+5z+5=0$

b) $4x+3y+4z-18=0$

c) $x-z+1=0$

d) $2x+2y+z-1=0$

e) $x+y+z+9=0$

2. Considere os planos cujas equações gerais são dadas por

$$\pi_1:\ 3x-5y+2z-3=0$$
$$\pi_2:\ x+2y-z+12=0$$
$$\pi_3:\ 2x-3y-4z+6=0$$

A respeito desses planos, analise as afirmações apresentadas a seguir:

I. A interseção do plano π_1 com o eixo das abscissas corresponde ao ponto $P(1,0,0)$.

II. A interseção do plano π_2 com o eixo das ordenadas corresponde ao ponto $Q(0,6,0)$.

III. A interseção do plano π_3 com o eixo das cotas corresponde ao ponto $R\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$.

Em relação às afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmação II está correta.

b) Apenas a afirmação III está correta.

c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

d) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

e) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

3. Para resolver um problema envolvendo a representação de superfícies planas no espaço, um estudante precisa determinar uma representação algébrica adequada para o plano π, sabendo que ele contém o ponto

$A(-1,\ 0,\ 4)$ e o ponto de interseção do plano de equação geral $2x-3y+z-5=0$ com o eixo das cotas. Além disso, π é paralelo ao vetor descrito por $\vec{v}=(-2,\ 1,\ 0)$.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente a equação geral que representa o plano π:

a) $-2x+y-2=0$

b) $x-4z+1=0$

c) $x+2y-z+5=0$

d) $x-y-z+3=0$

e) $2x-3y+z+3=0$

Seção 1.3

Posições relativas, distâncias e ângulos entre planos

Diálogo aberto

Nesta seção, discutiremos a respeito das posições relativas entre planos e das distâncias que podem ser estudadas a partir destes objetos matemáticos. Para isso, é necessário considerar os estudos iniciados na seção anterior em relação aos planos.

Como profissional designado pela instituição de aulas particulares, você deverá dar continuidade às orientações aos alunos de Arquitetura e Urbanismo e de Engenharia Civil, para que eles possam concluir o trabalho associado ao seu projeto de Iniciação Científica. Nessa etapa, os estudantes precisam analisar alguns elementos da estrutura de sustentação do telhado de uma residência. Sendo assim, você deverá orientá-los a respeito dos conceitos da Geometria Analítica necessários para o desenvolvimento desses estudos.

Os estudantes precisam avaliar o posicionamento de uma viga de sustentação que deverá ser construída com base nas faces do telhado representadas pelos seguintes planos de equações:

$$\pi_1 : 3x - 2y - z - 4 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : -6x + 4y + 2z - 7 = 0.$$

Qual a relação existente entre as posições das faces do telhado? Qual deve ser o comprimento aproximado da viga de sustentação, sabendo que ela unirá as faces representadas por π_1 e π_2, além do fato de seu comprimento ser o menor possível?

Além disso, em relação às faces descritas pelos planos dados pelas equações,

$$\pi_3 : 2x - y + 4z - 3 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_4 : 3x + y - 2z + 5 = 0,$$

qual a relação existente entre elas? Qual a medida do ângulo formado entre essas faces? Qual a distância entre o ponto de coordenadas $P(2, 3, 1)$ e a face descrita pelo plano π_3?

Como você pode auxiliar os estudantes na investigação e na resolução desses problemas?

Não pode faltar

Casos particulares da equação geral do plano

Considere um plano π de equação geral $ax + by + cz + d = 0$. De acordo com os valores assumidos pelas constantes *a*, *b*, *c* e *d*, podemos investigar alguns casos particulares da equação do plano, conforme seu posicionamento no espaço.

Quando $d = 0$, a equação do plano assume a forma $ax + by + cz = 0$, de modo que a origem $O(0,0,0)$ satisfaz a essa equação. Sendo assim, no caso em que $d = 0$, temos que o plano contém a origem *O* do sistema.

Reflita

Que condições dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem satisfazer para que sejam classificados como perpendiculares ou ortogonais?

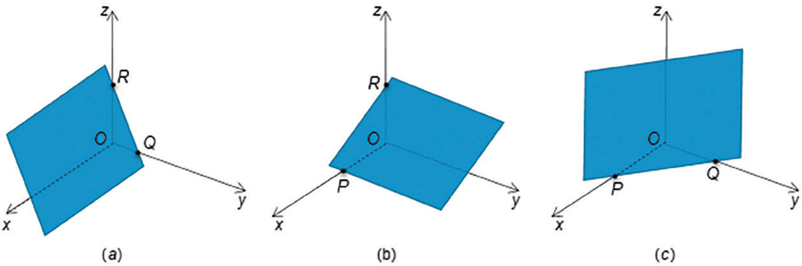
Em relação às constantes *a*, *b* e *c*, temos as seguintes situações:

- No caso em que $a = 0$, então o plano de equação $by + cz + d = 0$ é paralelo ao eixo *x*, pois $\vec{n} = (0,b,c)$ é um vetor normal (ortogonal) a esse plano e perpendicular ao eixo *x*, o qual, por sua vez, tem direção dada pelo vetor $\vec{i} = (1,0,0)$. Essa situação pode ser observada na Figura 1.17 (a).

- Quando $b = 0$, o plano de equação $ax + cz + d = 0$ é paralelo ao eixo *y*, de modo que o vetor $\vec{n} = (a,0,c)$ é normal ao plano e perpendicular ao eixo *y*, o qual tem direção dada pelo vetor $\vec{j} = (0,1,0)$. Esse caso é ilustrado na Figura 1.17 (b).

- Se $c = 0$, então o plano de equação $ax + by + d = 0$ é paralelo ao eixo *z*, sendo o vetor na forma $\vec{n} = (a,b,0)$ normal ao plano e perpendicular ao eixo z, de direção dada por $\vec{k} = (0,0,1)$. Esse caso é representado na Figura 1.19 (c).

Figura 1.19 | Planos paralelos aos eixos coordenados



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Exemplificando

Determine a equação geral do plano π que contém os pontos $A(1,\ 0,-1)$ e $B(2,\ 1,\ 0)$, paralelo ao eixo z.

Como π é paralelo ao eixo z, então o vetor $\vec{k} = (0,0,1)$ é paralelo ao plano. Sabendo que $\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 1)$ também é paralelo a π, podemos determinar o vetor ortogonal ao plano por meio do produto vetorial

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{k} = (1,-1,\ 0).$$

Considerando o vetor $\vec{n} = (1,-1,\ 0)$ e um dos pontos pertencentes a π, como, por exemplo, $A(1,\ 0,-1)$, da equação geral do plano, segue que

$$1(x-1)+(-1)(y-0)+0(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad x-1-y=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-1=0.$$

Portanto, a equação geral de π é dada por $x-y-1=0$.

Quando combinamos as situações apresentadas para a, b e c com a caracterização para d, podemos avaliar ainda as seguintes situações:

- Se $a = d = 0$, então o plano contém o eixo x, sendo dado por $by + cz = 0$.
- Se $b = d = 0$, o plano contém o eixo y, tendo equação geral $ax + cz = 0$.
- Se $c = d = 0$, então o plano contém o eixo z e será dado por $ax + by = 0$.

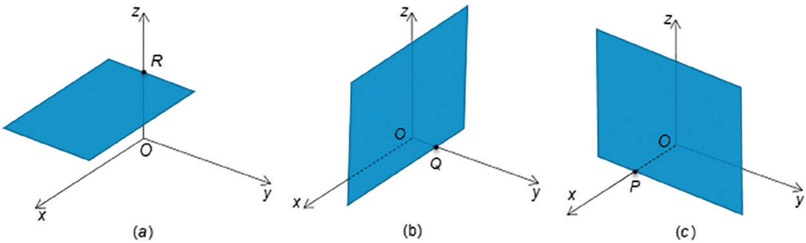
Assimile

A partir da equação geral do plano, temos que o mesmo é sempre paralelo ao eixo da coordenada ausente.

No caso em que o vetor normal ao plano possui duas componentes nulas, podemos comparar a posição assumida pelo plano em relação aos três planos coordenados (*xy*, *xz* e *yz*), da seguinte forma:

- Se tivermos $a = b = 0$, podemos concluir que o plano é paralelo ao plano *xy*, sendo dado pela equação geral $cz + d = 0$, situação ilustrada na Figura 1.18 (a).
- Se $a = c = 0$, o plano em questão será paralelo ao plano *xz*, possuindo equação geral na forma $by + d = 0$, fato apresentado na Figura 1.18 (b).
- Quando $b = c = 0$, o plano em estudo será paralelo ao plano *yz*, com equação geral $ax + d = 0$, situação destacada na Figura 1.20 (c).

Figura 1.20 | Planos paralelos aos planos coordenados



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Exemplificando

Determine a equação geral do plano π que contém o ponto $P(0,1,2)$, paralelo ao plano *xy*.

Se π é paralelo ao plano *xy*, então admite o vetor normal $\vec{k} = (0,0,1)$, no qual a primeira e a segunda componentes são nulas. Além disso, como π contém o ponto $P(0,1,2)$, sua equação geral será dada por

$$0(x-0)+0(y-1)+1(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad z-2=0.$$

Portanto, a equação geral do plano π é dada por $z-2=0$.

Assimile

Se o vetor normal a um plano possui duas componentes nulas, a equação associada representará um plano paralelo ao plano das variáveis que não são indicadas na equação geral.

Faça você mesmo

Determine a equação geral dos seguintes planos:

- π_1 contém a origem e o ponto $A(1,0,3)$, sendo paralelo ao eixo *x*;
- π_2 contém o ponto $T(2,1,1)$, sendo paralelo ao plano *yz*.

Pesquise mais

Para auxiliar nos estudos a respeito dos planos e as posições relativas associadas, estude a seção 10.2 do livro indicado a seguir:

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Posições relativas entre planos

De acordo com a posição ocupada no espaço, podemos comparar diferentes planos entre si por meio do estudo das posições relativas entre eles.

Sejam os planos descritos por

$$\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ \text{ e}$$

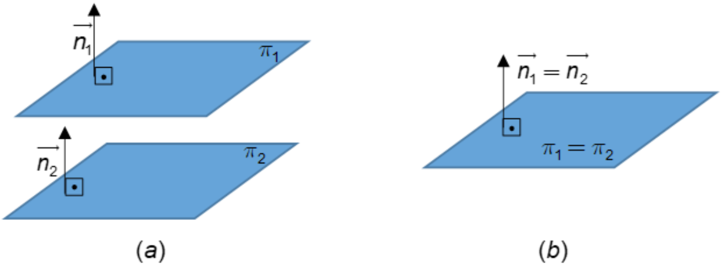
$$\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

cujos vetores normais são dados, respectivamente, por $\vec{n_1} = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $\vec{n_2} = (a_2,\ b_2,\ c_2)$. Para avaliar as posições relativas entre π_1 e π_2, precisamos analisar os vetores normais correspondentes e as relações que podem ser estabelecidas entre eles.

Dizemos que os planos π_1 e π_2 são paralelos entre si, conforme a situação ilustrada na Figura 1.21 (a), quando os vetores normais correspondentes também forem paralelos entre si. Neste caso, podemos determinar $k \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$, ou, ainda,

$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Figura 1.21 | Planos paralelos



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

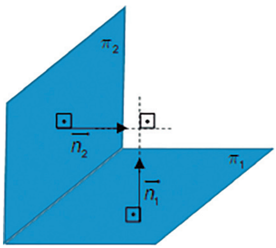
Como caso particular, temos os planos coincidentes, de acordo com a Figura 1.21 (b), nos quais é válida a relação

$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Podemos, ainda, estudar a situação na qual a intersecção entre os planos é não vazia. Neste caso, é possível identificar quando os planos são ortogonais entre si.

Os planos π_1 e π_2 são ortogonais entre si, conforme a Figura 1.22, no caso em que os vetores normais correspondentes também forem ortogonais entre si, relação que pode ser avaliada por meio do produto escalar dado por $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$, ou, ainda, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Figura 1.22 | Planos ortogonais



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Exemplificando

Estude a posição relativa entre os planos

$$\pi_1:\ 2x-3y+z-8=0 \text{ e}$$
$$\pi_2:\ 4x-6y+2z+1=0.$$

Observe que $\vec{n_1}=(2,-3,\ 1)$ e $\vec{n_2}=(4,-6,\ 2)$ são os vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. A partir desses vetores, podemos verificar a seguinte relação:

$$\vec{n_2}=(4,-6,\ 2)=2(2,-3,\ 1)=2\vec{n_1}.$$

Como os vetores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são paralelos entre si, então, os planos π_1 e π_2 são paralelos entre si. Além disso, como $\dfrac{d_2}{d_1}\neq 2$, podemos concluir que π_1 e π_2 são planos paralelos não coincidentes.

Faça você mesmo

Considerando

$$\pi_1: 2x+3y+z+3=0 \text{ e}$$
$$\pi_2: x-2y+4z-7=0,$$

o que podemos concluir a respeito da posição relativa entre π_1 e π_2?

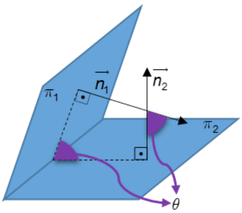
Ângulo entre planos concorrentes

Considere os planos dados pelas seguintes equações gerais:

$$\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \text{ e}$$
$$\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

cujos vetores normais são dados, respectivamente, por $\vec{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $\vec{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$, conforme a Figura 1.23.

Figura 1.23 | Ângulo entre planos



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Denominamos o ângulo entre os planos π_1 e π_2 como o menor ângulo formado entre os vetores normais dos dois planos. Se representarmos este ângulo por θ, pelo produto escalar segue que

$$\cos(\theta) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

ou, de forma equivalente,

$$\cos(\theta) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assimile

Para avaliar o ângulo entre planos, devemos determinar o menor ângulo formado entre os vetores normais aos planos.

Exemplificando

Determine o ângulo formado entre os planos

$$\pi_1 : \ x - 2y + 2z - 5 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : \ 3x - 4z + 2 = 0.$$

Note que $\overrightarrow{n_1} = (1, -2, \ 2)$ e $\overrightarrow{n_2} = (3, \ 0, -4)$ são vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Sendo assim,

$$\cos(\theta) = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{|-5|}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $\theta \approx 70{,}5°$.

Distância de ponto a plano

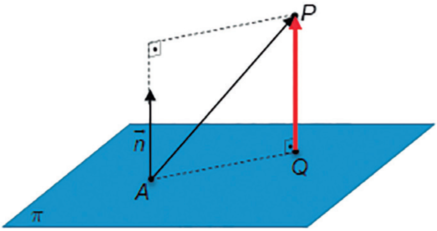
Reflita

O que são as projeções ortogonais? Como podemos determinar a projeção ortogonal envolvendo vetores no espaço?

Podemos avaliar as distâncias entre pontos e planos por meio do estudo das projeções.

Considere o plano π de equação geral $ax+by+cz+d=0$ e o ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ não pertencente a π. De acordo com a Figura 1.24, o ponto Q é caracterizado como a projeção ortogonal de P sobre o plano π. Para determinar a distância entre π e o ponto P, precisamos calcular a distância entre os pontos P e Q, ou, ainda, o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$.

Figura 1.24 | Distância entre ponto e plano



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Das informações apresentadas, podemos identificar o vetor $\vec{n}=(a,b,c)$ normal a π e um ponto $A(x_1,y_1,z_1)\in\pi$. Como o ponto Q é construído de tal forma que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ corresponda à projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ sobre o vetor normal $\vec{n}$, segue que

$$d(P,\pi)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}.$$

Sabendo que $\overrightarrow{AP}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$, então

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Se $A(x_1,y_1,z_1)\in\pi$, então $ax_1+by_1+cz_1+d=0$, ou seja, $d=-ax_1-by_1-cz_1$. A partir dessa relação, segue que a distância entre o plano π e o ponto P é calculada como segue:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Distância de plano a plano

A distância entre dois planos é definida quando eles são paralelos entre si. Neste caso, a distância entre os planos π_1 e π_2 é avaliada a partir da equação geral de um dos planos e de um ponto do segundo plano, tomando por base as distâncias avaliadas no tópico anterior.

Assim, considerando os planos definidos por

$$\pi_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

a distância entre π_1 e π_2 pode ser avaliada de acordo com uma das seguintes expressões:

- Sendo conhecidas as coordenadas de um ponto $P \in \pi_1$, então $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$.
- Sendo conhecidas as coordenadas de um ponto $Q \in \pi_2$, então $d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_1)$.

Assimile

As distâncias entre planos são avaliadas a partir do cálculo da distância entre ponto e plano, considerando um dos planos e um ponto pertencente ao segundo plano.

Exemplificando

Qual a distância entre os planos dados pelas equações a seguir?

$$\pi_1 : x - y + 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 3y + 6z + 7 = 0$$

Como os planos descritos são paralelos entre si, para avaliar a distância entre eles, é necessário identificar um ponto de um dos planos e determinar sua distância ao outro plano.

Veja que $P(1,\ 0,\ 1) \in \pi_1$, pois, da equação geral de π_1, temos que

$$1 - 0 + 2 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Para calcular a distância entre os planos, podemos determinar $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$. Sendo assim,

$$d(P, \pi_2) = \frac{|3 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{8\sqrt{6}}{9} \approx 2{,}18.$$

Portanto, a distância entre π_1 e π_2 é de, aproximadamente, 2,18 u.c.

Faça você mesmo

Determine a distância entre o ponto $P(1, 0, -2)$ e o plano caracterizado pela seguinte equação geral:

$$\pi : 3x - 2y + z - 2 = 0.$$

Sem medo de errar

No desenvolvimento da terceira etapa de seu trabalho, os estudantes precisam analisar o posicionamento de faces do telhado e de determinadas vigas de sustentação, sendo você o responsável por orientá-los nesse processo.

Inicialmente, os estudantes precisam avaliar e comparar as posições assumidas pelas faces do telhado representadas pelos planos de equações

$$\pi_1 : 3x - 2y - z - 4 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : -6x + 4y + 2z - 7 = 0.$$

Nessa parte, você deve orientá-los, inicialmente, a identificar vetores normais a cada um dos planos, pois é a partir destes que podemos analisar as posições relativas entre planos. Note que $\overrightarrow{n_1} = (3, -2, -1)$ é um vetor normal a π_1, enquanto $\overrightarrow{n_2} = (-6, 4, 2)$ é um vetor normal a π_2. Além disso, temos que

$$\overrightarrow{n_2} = (-6, 4, 2) = -2(3, -2, -1) = -2\overrightarrow{n_1},$$

ou seja, $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são paralelos entre si. Logo, os planos π_1 e π_2 são paralelos entre si.

Para avaliar o comprimento da viga de sustentação que unirá as faces representadas por π_1 e π_2, os alunos devem ser orientados a calcular a distância entre os dois planos. Além disso, como $\frac{d_2}{d_1} \neq -2$, π_1 e π_2 são planos paralelos distintos.

Note que $A\left(1,0,\frac{13}{2}\right)$ é um ponto pertencente a π_2, pois $(-6)\cdot 1 + 4\cdot 0 + 2\cdot\frac{13}{2} - 7 = 0$.

E sendo $\overrightarrow{n_1} = (3,-2,-1)$ um vetor normal a π_1, como verificado anteriormente, a distância entre os planos pode ser determinada da seguinte forma:

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(A,\pi_1) = \frac{\left|3\cdot 1 - 2\cdot 0 - \frac{13}{2} - 4\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{15}{2}\right|}{\sqrt{14}} = \frac{15\sqrt{14}}{28} \approx 2.$$

Logo, a viga de sustentação deve ter, aproximadamente, um comprimento de 2 *u.c.*

Para o estudo das faces descritas pelos seguintes planos

$$\pi_3 : 2x - y + 4z - 3 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_4 : 3x + y - 2z + 5 = 0,$$

os alunos devem ser orientados a realizar um estudo análogo ao que foi realizado para π_1 e π_2.

Observe que $\overrightarrow{n_3} = (2,-1,\ 4)$ é um vetor normal a π_3, enquanto $\overrightarrow{n_4} = (3,\ 1,-2)$ é um vetor normal a π_4. Além disso, é possível verificar que $\overrightarrow{n_3} \neq k\overrightarrow{n_4}$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Logo, π_3 e π_4 não são paralelos entre si. Também temos que $\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4} \neq 0$, portanto, π_3 e π_4 também não são ortogonais entre si.

Para determinar o ângulo formado entre as faces, os alunos devem ser orientados a determinar o ângulo formado entre π_3 e π_4, que pode ser calculado a partir dos vetores normais correspondentes $\overrightarrow{n_3} = (2, -1,\ 4)$ e $\overrightarrow{n_4} = (3,\ 1, -2)$, da seguinte maneira:

$$\cos(\theta) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-2)\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{14} \approx 0{,}175$$

$$\Rightarrow \theta \approx 79{,}9°.$$

Desta forma, o ângulo formado entre π_3 e π_4 é de, aproximadamente, 79,9°.

Por fim, para concluir a tarefa, os alunos devem ser orientados a calcular a distância entre o ponto de coordenadas $P(2,\ 3,\ 1)$ e a face descrita pelo plano π_3. Das informações apresentadas anteriormente, temos que

$$d(P, \pi_3) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 + 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \approx 0{,}44.$$

Logo, a distância entre P e o plano π_3 é, aproximadamente, 0,44 *u.c.*

Para que os alunos concluam a tarefa proposta, é fundamental orientá-los em cada etapa dos trabalhos, investigando os principais conceitos associados ao estudo dos planos, como as posições relativas, os ângulos e as distâncias, com base nas informações apresentadas e nos procedimentos descritos anteriormente.

Avançando na prática

Posições relativas entre planos

Descrição da situação-problema

Para contribuir com os estudos a serem desenvolvidos pelos estudantes em seu projeto de Iniciação Científica, principalmente em relação às posições relativas entre planos, foi proposta a seguinte situação:

Suponha que três faces de um telhado possam ser representadas pelos planos cujas equações são:

$$\pi_1 : x - 2y + 3z - 3 = 0,$$

$$\pi_2 : 2x - 5y - 4z + 1 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : 2x - 4y + 6z + 7 = 0.$$

Como podemos estudar as posições relativas entre os planos π_1, π_2 e π_3?

Resolução da situação-problema

Para estudar as posições relativas entre os planos, precisamos identificar as relações existentes entre os vetores normais associados a cada um dos planos.

Note que $\overrightarrow{n_1} = (1, -2,\ 3)$, $\overrightarrow{n_2} = (2, -5, -4)$ e $\overrightarrow{n_3} = (2, -4,\ 6)$ são vetores normais aos planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente.

Temos que os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são paralelos entre si, pois

$$\overrightarrow{n_3} = (2, -4,\ 6) = 2(1, -2,\ 3) = 2\overrightarrow{n_1}.$$

Logo, os planos π_1 e π_3 são paralelos entre si. Além disso, como $\frac{7}{-3} \neq 2$, então π_1 e π_3 são planos paralelos não coincidentes.

Além disso, observe que

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (1, -2,\ 3) \cdot (2, -5, -4) = 2 + 10 - 12 = 0 \text{ e}$$

$$\overrightarrow{n_3} \cdot \overrightarrow{n_2} = (2, -4,\ 6) \cdot (2, -5, -4) = 4 + 20 - 24 = 0,$$

ou seja, os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são ortogonais entre si, bem como os vetores $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$. Portanto, os planos π_1 e π_2 são ortogonais entre si, assim como π_2 e π_3 também são ortogonais entre si.

Faça valer a pena

1. Considere, no espaço cartesiano, os planos cujas equações são dadas por:

$$\pi_1 : 3x - 6y + 12z + 3 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : 2x - 4y + 8z - 5 = 0.$$

Ao analisar as equações apresentadas, um estudante escreveu as seguintes afirmações, propondo uma relação entre elas:

I. Os planos π_1 e π_2 podem ser classificados como paralelos entre si.

PORQUE

II. O vetor $\vec{v} = (1, -2,\ 4)$ é caracterizado como um vetor não nulo ortogonal aos planos π_1 e π_2.

Considerando as afirmações apresentadas pelo estudante, assinale a alternativa correta:

a) As afirmações I e II são verdadeiras e a II é uma justificativa correta para a I.

b) As afirmações I e II são verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta para a I.

c) A afirmação I é verdadeira e a II, falsa.

d) A afirmação I é falsa e a II, verdadeira.

e) As afirmações I e II são falsas.

2. Um estudante precisa determinar a equação de um plano conhecendo dois de seus pontos e sabendo da relação existente entre ele e um dos eixos coordenados.

Considere que o plano π em estudo contém os pontos cujas coordenadas são dadas por $P(-1,\ 2,\ 1)$ e $Q(3,\ 1,\ 0)$, além de ser paralelo ao eixo *y*.

A partir das informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente a equação geral do plano π:

a) $4x - z + 5 = 0$.

b) $4x - y - z + 3 = 0$.

c) $2x + 3y + z = 0$.

d) $3x + y - z + 4 = 0$.

e) $x + 4z - 3 = 0$.

3. Duas chapas metálicas, presentes em uma peça automotiva, precisam ser conectadas por meio de um cabo de aço, instalado de modo a possuir o menor comprimento possível.

Sabe-se que estas chapas podem ser aproximadas pelos planos descritos pelas seguintes equações:

$$\pi_1 : 3x - y + 5z + 12 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2 : 9x - 3y + 15z - 2 = 0.$$

Sabendo que o comprimento do cabo de aço deve ser igual à distância entre as chapas metálicas, assinale a alternativa que indica, aproximadamente, o comprimento do cabo de aço a ser instalado na peça em questão:

a) 1,05.

b) 1,32.

c) 1,77.

d) 2,14.

e) 2,56.

Referências

BORIN JUNIOR, Airton Monte Serrat. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson, 2014.

BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

FERNANDES, Luana Fonseca Duarte. **Geometria analítica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

VENTURI, Jacir J. **Álgebra vetorial e geometria analítica**. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Equações de retas no espaço

Convite ao estudo

Na primeira unidade do livro, vimos a respeito das características principais do plano e do espaço cartesianos, destacando as contribuições destes sistemas nas representações gráficas associadas aos conceitos da Geometria Analítica. Foi possível também investigar algumas das aplicações do estudo analítico dos planos na construção civil.

Ainda considerando este setor, na Unidade 2, você deverá estudar outro conceito importante para a Geometria Analítica: a reta. Para isso, imagine que você foi contratado para trabalhar em uma empresa de Engenharia que atua no ramo da construção civil, a qual possui como diferencial o emprego de estruturas metálicas na construção de edifícios que, posteriormente, serão direcionados a atividades comerciais ou industriais.

A função de sua equipe, composta principalmente por matemáticos, engenheiros civis e projetistas, é a elaboração dos projetos e o estudo dos cálculos estruturais associados às obras sob responsabilidade da empresa. Assim, neste setor, você e sua equipe são responsáveis por analisar os projetos, realizar cálculos estruturais, construir as representações bidimensionais e tridimensionais, além de obter outras informações necessárias para que o setor responsável pela construção possa executá-la em conformidade com o projeto elaborado.

Considerando as funções designadas a você e sua equipe, no decorrer desta unidade, você será o encarregado de desempenhar algumas tarefas que irão auxiliar na elaboração de alguns projetos que estão sob responsabilidade da empresa.

E agora? Qual é a importância da Geometria Analítica nessa situação? Vamos dar sequência aos estudos e verificar o primeiro problema a ser resolvido.

Seção 2.1

Equações vetoriais, paramétricas e simétricas de retas e o cálculo de distâncias

Diálogo aberto

Considerando sua função na empresa de Engenharia Civil, como integrante da equipe responsável pela elaboração dos projetos, em sua primeira tarefa você precisará determinar expressões algébricas que descrevem as posições ocupadas por certas vigas metálicas, as quais são elementos que farão parte do projeto de um edifício de quatro andares que sediará um shopping.

Alguns funcionários de sua equipe já iniciaram os estudos a respeito deste projeto e identificaram as seguintes informações relacionadas à representação gráfica das estruturas citadas no espaço cartesiano:

- A primeira viga pode ser representada pela reta *r*, a qual contém o ponto $A(-1,\ 3,\ 2)$ e tem direção dada pelo vetor $\vec{v}=(4,-8,\ 6)$.

- A segunda viga pode ser representada pela reta *s*, a qual contém os pontos $C(1,-2,\ 2)$ e $D(-1,\ 2,-1)$.

Com base nas informações apresentadas, você seria capaz de determinar as expressões algébricas que caracterizam cada uma das duas vigas? Quais tipos de equações podem ser empregados na representação das vigas descritas anteriormente?

Além disso, qual é a distância entre a primeira viga e o vértice $P(-2,-1,\ 0)$ de uma terceira estrutura que compõe o projeto? E qual é a distância entre as duas vigas citadas inicialmente e representadas pelas retas *r* e *s*, sabendo que estas retas são paralelas distintas?

Organize as informações apresentadas e identifique as representações algébricas que descrevem corretamente as duas vigas destacadas, respondendo às questões propostas.

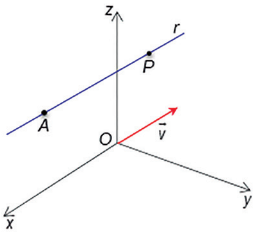
Não pode faltar

Equação vetorial da reta

Além do estudo geométrico, podemos analisar as retas no espaço por meio de suas representações algébricas. Para isso, é necessário determinar elementos que caracterizam estes objetos matemáticos.

Considere uma reta *r* que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem direção dada por um vetor não nulo $\vec{v} = (a,b,c)$, conforme a Figura 2.1. Dizemos que um ponto $P(x,y,z)$ pertence à reta *r* se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ forem paralelos, ou seja, é possível identificar $t \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, ou, ainda, pela definição de vetor determinado por dois pontos: $P = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Figura 2.1 | Representação da reta *r* no espaço



Fonte: elaborada pela autora.

Levando em conta as coordenadas dos pontos *A* e *P*, além das componentes de $\vec{v}$, segue que:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A última expressão corresponde à equação vetorial da reta *r*. O vetor $\vec{v}$ é denominado *vetor diretor* de *r*, enquanto $t \in \mathbb{R}$ é o *parâmetro* da reta. A cada parâmetro *t* existe um único ponto *P* associado, relação que possibilita a identificação de todos os pontos da reta, quando *t* varia de $-\infty$ a ∞.

Assimile

A reta que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor não nulo dado por $\vec{v} = (a,b,c)$ tem seus pontos $P(x,y,z)$ descritos pela equação vetorial:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Atenção

Se uma reta *r* for definida por dois de seus pontos, como $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$, podemos identificar o vetor diretor $\vec{v}$ de *r* da seguinte forma:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Reflita

Levando em conta a representação das retas a partir de ponto e vetor diretor, podemos afirmar que existe um único vetor diretor associado a cada reta?

Exemplificando

Determine a equação vetorial da reta *s* que contém os pontos $M(1,\ 0,-1)$ e $N(2,-3,\ 1)$.

Um vetor diretor de *s* pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{v} = \overrightarrow{MN} = (2,-3,\ 1) - (1,\ 0,-1) = (1,-3,\ 2).$$

Qualquer vetor paralelo a $\vec{v}$ também pode ser adotado como vetor diretor de *s*, pois as direções indicadas serão as mesmas.

Considerando o vetor $\vec{v} = (1,-3,\ 2)$ e um dos pontos pertencente à *s* (como o ponto $M(1,\ 0,-1)$, por exemplo), segue que a equação vetorial de *s* será dada por $(x, y, z) = (1,\ 0,-1) + t(1,-3,\ 2),\quad t \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas e simétricas da reta

Podemos também representar uma reta por meio de suas equações paramétricas e simétricas.

Da equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, $t \in \mathbb{R}$, da reta *r*, que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem direção dada pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, segue que:

$$(x, y, z) = (x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct).$$

Pela condição de igualdade, obtém-se:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que correspondem às equações paramétricas da reta *r*, assumindo o parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Sabendo que $a, b, c \neq 0$, podemos reescrever as equações paramétricas da seguinte forma:

$$x = x_0 + at \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = at \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = t$$

$$y = y_0 + bt \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = bt \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_0}{b} = t$$

$$z = z_0 + ct \quad \Rightarrow \quad z - z_0 = ct \quad \Rightarrow \quad \frac{z - z_0}{c} = t.$$

Tendo em vista que a cada ponto $P(x, y, z)$ exista um único parâmetro *t* associado, igualando as expressões anteriores por meio de *t*, segue que:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A última expressão obtida corresponde às equações simétricas da reta *r*, a qual contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e está associada ao vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Assimile

Podemos representar a reta *r*, que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, com $a, b, c \neq 0$, partindo das seguintes equações:

- Equação vetorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}$.
- Equações paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.
- Equações simétricas: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Atenção

Podemos nos deparar com situações nas quais nem todas as coordenadas do vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ são não nulas. Para estes casos, precisamos realizar adequações nas equações simétricas da reta.

Por exemplo, se uma reta *r* contém um ponto da forma $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (a, b, 0)$, com $a, b \neq 0$, o qual é paralelo ao plano *xy*, então suas equações simétricas serão dadas por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b};\ z = z_0;$$

porque a terceira coordenada do vetor diretor é nula.

Exemplificando

Determine as equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta *t* que contém o ponto $A(1,\ 1,\ 3)$ e cujo vetor diretor é dado por $\vec{v} = (3,\ 1, -4)$.

Podemos representar a reta *t* partindo das seguintes equações:

- Equação vetorial: $(x, y, z) = (1,\ 1,\ 3) + k(3,\ 1, -4),\quad k \in \mathbb{R}$.
- Equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + k \\ z = 3 - 4k \end{cases},\quad k \in \mathbb{R}$.
- Equações simétricas: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$.

Faça você mesmo

Determine as equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta *t* que contém os pontos $P(-1,\ 2,\ 2)$ e $Q(2, -1,\ 3)$.

Reflita

Ao compararmos os três tipos de equações de reta, quais semelhanças e diferenças podem ser identificadas?

Pesquise mais

Para auxiliar nos estudos sobre as retas e suas representações algébricas, você pode consultar a Unidade 2 do livro indicado a seguir:

SANTOS, N. M. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Outro material que pode contribuir com os estudos a respeito das retas é a Seção 10.1 do livro indicado:

FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Distância entre pontos e retas

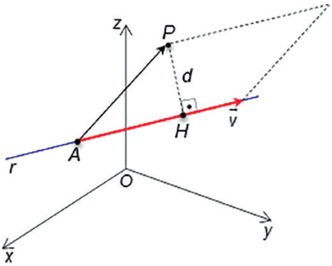
Reflita

Quais são as interpretações geométricas para o módulo do produto vetorial e o módulo do produto misto envolvendo vetores no espaço?

Conhecendo as possíveis representações algébricas para as retas no espaço, nosso próximo objetivo é o de estudar a distância entre pontos e retas no sistema cartesiano tridimensional.

Considere uma reta *r* que tem $\vec{v} = (a, b, c)$ por vetor diretor e contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$. Além disso, considere um ponto $P(x_1, y_1, z_1)$ não pertencente a *r*, conforme a Figura 2.2.

Figura 2.2 | Distância entre ponto e reta



Fonte: elaborada pela autora.

Com base na Figura 2.2, precisamos determinar *d*, que corresponde ao comprimento do segmento de reta que une os pontos *P* e *H*, sendo este último a projeção ortogonal de *P* sobre *r*.

Note que os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo no qual a altura corresponde à distância *d* entre o ponto *P* e a reta *r*. Sabe-se que a área do paralelogramo é dada pelo produto do comprimento da base pela altura $\left(A = \left|\vec{v}\right| d\right)$, podendo ser determinada também pelo módulo do produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ $\left(A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|\right)$. Assim, podemos concluir das duas igualdades apresentadas que a distância *d* entre o ponto *P* e a reta *r* pode ser calculada da seguinte forma:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Exemplificando

Determine a distância entre o ponto $T(1,\ 0,-1)$ e a reta *s* dada pela equação vetorial $(x,y,z) = (2,\ 2,-1) + k(5,\ 3,\ 2),\quad k \in \mathbb{R}$.

Pela equação vetorial de *s*, podemos verificar que $\vec{v} = (5,\ 3,\ 2)$ é um dos vetores diretores da reta. Além disso, o ponto $R(2,\ 2,-1)$ pertence a *s* (ponto obtido quando tomamos o parâmetro $k = 0$).

Dos pontos *R* e *T*, podemos determinar o vetor $\overrightarrow{RT} = (-1,-2,\ 0)$ que, em conjunto com $\vec{v} = (5,\ 3,\ 2)$, determinam:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{RT} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k} = (4,-2,-7).$$

Além disso,

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

$$\left|\vec{v} \times \overrightarrow{RT}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{69}.$$

Portanto, a distância entre *T* e a reta *s* é dada por:

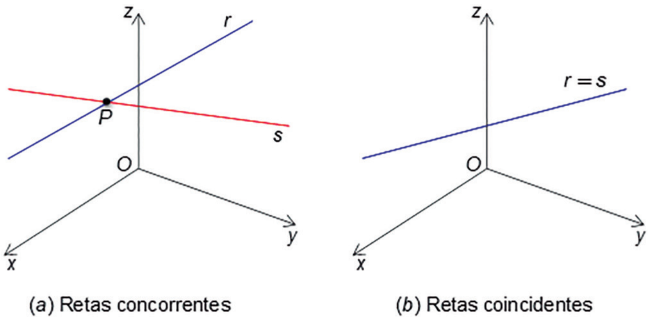
$$d(T,s) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{RT}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{69}{38}} \approx 1{,}35\ u.c.$$

Distância entre retas

No estudo da distância entre retas, precisamos avaliá-las e compará-las conforme suas disposições espaciais, para que as diferentes situações possam ser avaliadas.

Quando duas retas *r* e *s* possuem um ponto em comum, ou seja, são concorrentes ou coincidentes, conforme as figuras 2.3(a) e 2.3(b), respectivamente, temos que a distância será dada por $d(r,s)=0$.

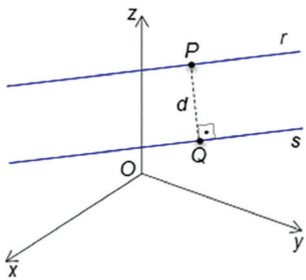
Figura 2.3 | Distância entre retas com pontos em comum



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos ainda trabalhar com retas paralelas distintas, ou seja, retas que não possuem nenhum ponto em comum, mas que pertencem a um mesmo plano (coplanares), conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4 | Distância entre retas paralelas distintas



Fonte: elaborada pela autora.

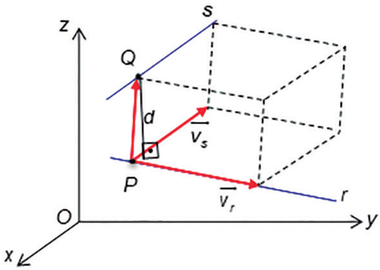
No caso ilustrado na Figura 2.4, para determinar a distância *d* entre as retas *r* e *s*, podemos calcular a distância do ponto $P \in r$ à reta *s*, ou, ainda, calcular a distância do ponto $Q \in s$ à reta *r*, isto é, $d(r,s)=d(P,s)=d(Q,r)$.

Assimile

Para calcular a distância entre duas retas, podemos identificar um ponto pertencente a uma das retas e determinar sua distância à segunda reta.

Podemos ainda nos deparar com retas que não possuem pontos em comum e que não podem ser representadas em um mesmo plano, as quais são classificadas como retas reversas, conforme apresenta a Figura 2.5.

Figura 2.5 | Distância entre retas reversas



Fonte: elaborada pela autora.

Tendo em vista a situação apresentada na Figura 2.5, sejam duas retas *r* e *s* reversas, de tal forma que *r* seja descrita pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e vetor diretor $\vec{v_r} = (a_0, b_0, c_0)$, enquanto *s* seja descrita pelo ponto $Q(x_1, y_1, z_1)$ e vetor diretor $\vec{v_s} = (a_1, b_1, c_1)$.

Os vetores $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ e $\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ determinam um paralelepípedo cuja base é definida pelos vetores $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, enquanto a altura corresponde à distância *d* entre *r* e *s*. O volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura $\left(V = \left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right| d\right)$, podendo ser determinado também pelo módulo do produto misto entre $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ e $\overrightarrow{PQ}$ $\left(V = \left|\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right)\right|\right)$. Logo, das duas igualdades apresentadas, a distância *d* entre as retas *r* e *s* pode ser calculada da seguinte forma:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right|}.$$

Exemplificando

Determine a distância entre as retas:

$$r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=k \\ y=-3+k, \quad k\in\mathbb{R}, \\ z=1-k \end{cases}$$

sabendo que *r* e *s* são reversas.

Nesse caso, note que:

- *r* contém o ponto $P(-1,\ 3,\ 1)$ e tem a direção dada por $\vec{v_r}=(1,-2,-1)$.
- *s* contém o ponto $Q(0,-3,\ 1)$ e tem a direção dada por $\vec{v_s}=(1,\ 1,-1)$.

Podemos construir o vetor $\overrightarrow{PQ}=(1,-6,\ 0)$ partindo dos pontos *P* e *Q*. Além disso, do produto vetorial entre $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, temos $\vec{v_r}\times\vec{v_s}=(3,\ 0,\ 3)$. Pelo produto misto entre $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ e $\overrightarrow{PQ}$, obtemos:

$$\left(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{PQ}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}=3.$$

Portanto, a distância entre as retas *r* e *s* é dada por:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{v_r}\times\vec{v_s}\right|}=\frac{|3|}{\sqrt{3^2+0^2+3^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}\approx 0{,}71\ u.c.$$

Faça você mesmo

Determine a distância entre as retas reversas *r* e *s*, cujas equações paramétricas são apresentadas a seguir:

$$r:\begin{cases} x=2-t \\ y=3+t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=k \\ y=-1-3k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z=2k \end{cases}$$

Pesquise mais

Para mais informações a respeito do produto vetorial e do produto misto, consulte a seção 3.5 do livro indicado a seguir:

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Outra sugestão de material complementar são os tópicos 17 a 19 do capítulo 5 do seguinte livro:

VENTURI, Jacir J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10 ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. Disponível no link: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2018.

Sem medo de errar

Assumindo sua função na empresa de Engenharia Civil para a elaboração do projeto do edifício de quatro andares que sediará o shopping, você deve investigar as representações algébricas para determinadas vigas, as quais podem ser aproximadas por meio de retas no espaço, além de calcular distâncias com base nas informações apresentadas.

Sua primeira tarefa é determinar expressões algébricas que caracterizam a primeira viga, a qual contém o ponto $A(-1, 3, 2)$ e possui direção dada pelo vetor $\vec{v}=(4,-8, 6)$. Essa primeira viga pode ser representada pela reta r de equação vetorial:

$$r:(x,y,z)=(-1,\ 3,\ 2)+t(4,-8,\ 6),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Partindo da equação vetorial de r, podemos determinar as equações paramétricas da seguinte forma:

$$(x,y,z)=(-1,\ 3,\ 2)+t(4,-8,\ 6)=(-1+4t,\ 3-8t,\ 2+6t),$$

isto é,

$$r:\begin{cases} x=-1+4t \\ y=3-8t \\ z=2+6t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Além disso, as equações simétricas que representam a primeira viga, ou seja, a reta *r*, podem ser dadas por meio das equações paramétricas, isolando o parâmetro *t* e comparando as três equações em relação a ele, do que se conclui:

$$r : \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-2}{6}.$$

Em seguida, para representar algebricamente a segunda viga, a qual contém os pontos $C(1,-2,\ 2)$ e $D(-1,\ 2,-1)$, é necessário identificar inicialmente o vetor diretor à reta *s* que representa essa viga. Uma das possibilidades é adotar, por exemplo, o vetor diretor:

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{CD} = (-1,\ 2,-1)-(1,-2,\ 2) = (-2,\ 4,-3).$$

Com base nesses elementos, é possível determinar a equação vetorial da reta *s*. Conhecendo o ponto $C(1,-2,\ 2)$ e o vetor diretor $\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 4,-3)$, a equação vetorial de *s* será dada por:

$$s : (x,y,z) = (1,-2,\ 2) + k(-2,\ 4,-3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, a reta *s* pode ser representada pelas seguintes equações paramétricas:

$$(x,y,z) = (1,-2,\ 2) + k(-2,\ 4,-3) = (1-2k,-2+4k,\ 2-3k),$$

ou seja,

$$s : \begin{cases} x = 1-2k \\ y = -2+4k, \quad k \in \mathbb{R}. \\ z = 2-3k \end{cases}$$

Ou, ainda, a segunda viga, caracterizada por *s*, pode ser descrita pelas equações simétricas, obtidas pela comparação entre as equações paramétricas por meio do parâmetro *k*, e assim,

$$s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{-3}.$$

Para calcular a distância entre a primeira viga, representada pela reta *r*, e o ponto $P(-2,-1,\ 0)$, vértice de uma das estruturas, precisamos determinar inicialmente um vetor a partir dos pontos $A(-1,\ 3,\ 2) \in r$ e *P*, o qual pode ser identificado da seguinte forma:

$$\overrightarrow{AP} = (-2,-1,\ 0)-(-1,\ 3,\ 2) = (-1,-4,-2).$$

Considerando os vetores $\overrightarrow{AP}=(-1,-4,-2)$ e $\vec{v}=(4,-8,\ 6)$, o vetor diretor de *r*, podemos obter:

$$\vec{v}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -8 & 6\\ -1 & -4 & -2\end{vmatrix}=40\vec{i}+2\vec{j}-24\vec{k}=(40,\ 2,-24).$$

Com base nessas informações, podemos calcular a distância entre a primeira viga, representada pela reta *r*, e o ponto $P(-2,-1,\ 0)$, por meio da seguinte expressão:

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\sqrt{40^2+2^2+(-24)^2}}{\sqrt{4^2+(-8)^2+6^2}}=\frac{\sqrt{2180}}{\sqrt{116}}\approx 4{,}34.$$

Logo, a distância entre a primeira viga e o ponto *P* é de, aproximadamente, 4,34 *u.c*.

Por fim, para avaliar a distância entre as duas vigas, é necessário calcular a distância entre as retas *r* e *s*. Para isso, note que as retas *r* e *s* são paralelas distintas. Logo, para calcular a distância entre elas, podemos calcular a distância entre um ponto de uma das retas à outra.

Uma das possibilidades é calcular a distância de $C(1,-2,\ 2)\in s$ à reta *r*. Neste caso, partindo de $A(-1,\ 3,\ 2)\in r$ e *C*, podemos determinar o vetor $\overrightarrow{AC}=(2,-5,\ 0)$ e, em conjunto com o vetor $\vec{v}=(4,-8,\ 6)$, calcular $\vec{v}\times\overrightarrow{AC}=(30,\ 12,-4)$. Com base nessas informações, podemos calcular a distância entre as duas vigas, como segue:

$$d(r,s)=d(C,r)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\sqrt{30^2+12^2+(-4)^2}}{\sqrt{4^2+(-8)^2+6^2}}=\frac{\sqrt{1060}}{\sqrt{116}}\approx 3{,}02.$$

Portanto, a distância entre a primeira e a segunda viga é de, aproximadamente, 3,02 *u.c*.

Avançando na prática

Instalação hidráulica de um edifício

Descrição da situação-problema

Tendo em vista ainda a elaboração do projeto do edifício que sediará o shopping, o gerente solicitou a você o projeto hidráulico para dar andamento à obra.

Um dos funcionários de sua equipe está com dificuldades para representar algebricamente o trajeto percorrido por um dos canos presentes na parte hidráulica do prédio. Com base nos estudos desenvolvidos, sabe-se que o cano em questão pode ser representado por uma reta *p*, a qual contém os pontos $M(-1,\ 2,\ 3)$ e $N(2,\ 2,-1)$.

Tendo em vista essas informações, determine as equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta *p*.

Resolução da situação-problema

Na situação apresentada, precisamos determinar as expressões algébricas que representem o cano descrito pela reta *p*, que contém os pontos $M(-1,\ 2,\ 3)$ e $N(2,\ 2,-1)$.

Podemos determinar o vetor $\overrightarrow{MN}=(3,\ 0,-4)$ que representa a direção de *p*.

Partindo do vetor diretor $\overrightarrow{MN}=(3,\ 0,-4)$ e de um dos pontos de *p* (como $N(2,\ 2,-1)$, por exemplo), a equação vetorial de *p* será dada por:

$$(x,y,z)=(2,\ 2,-1)+k(3,\ 0,-4),\quad k\in\mathbb{R}.$$

Da equação vetorial, podemos obter as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x=2+3k \\ y=2 \\ z=-1-4k \end{cases},\quad k\in\mathbb{R}$$

Para determinar as equações simétricas, veja que a segunda componente do vetor diretor é nula, logo, não podemos trabalhar com a divisão por zero.

Por isso, neste caso, podemos isolar o parâmetro *k* na primeira e terceira equações, comparando-as por meio dele, mas mantendo, nas equações simétricas, a segunda equação paramétrica, conforme a seguinte descrição:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{z+1}{-4};\ y=2.$$

Faça valer a pena

1. Considere um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$. O conjunto composto por todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço, tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo à $\vec{v}$, constitui, no espaço cartesiano, uma reta, a qual também pode ser definida partindo de dois de seus pontos.

Seja uma reta *r* definida a partir dos pontos $D(3, -1, 4)$ e $E(4, -3, -1)$.

Com base nas informações apresentadas, qual deve ser o valor assumido por $m \in \mathbb{R}$, para que o ponto $P(m, 1, 9)$ pertença à reta *r*?

a) $m = \dfrac{7}{2}$.

b) $m = 1$.

c) $m = -1$.

d) $m = \dfrac{3}{2}$.

e) $m = 2$.

2. Atualmente, a determinação de distâncias entre duas localidades é fundamental para diversas situações reais, como é o caso do transporte rodoviário, por exemplo. Dentre as ferramentas disponíveis para nos auxiliar nesses estudos, temos o GPS (Sistema de Posicionamento Global), por meio do qual é possível avaliar a localização de pontos sobre a superfície do planeta, possibilitando a avaliação de distâncias e tendo como base os conceitos da Geometria Analítica.

Considere a reta *r* de equações paramétricas dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Levando em conta as informações apresentadas, qual é a distância entre o ponto $A(1, 2, 3)$ e a reta *r* descrita anteriormente?

a) $d(A, r) = 0$ u.c.

b) $d(A, r) = 2$ u.c.

c) $d(A, r) = 3$ u.c.

d) $d(A, r) = 5$ u.c.

e) $d(A, r) = 9$ u.c.

3. Para dar sustentação a um edifício em construção, uma empresa decidiu instalar cabos de aço em posições específicas, visando dar maior segurança aos funcionários que trabalham nesta obra. Para isso, o engenheiro responsável precisa elaborar um projeto para identificar quais são os melhores pontos para a instalação dos cabos e qual deve ser seu comprimento, evitando, assim, perda de material.

Em seus estudos, o engenheiro observou que um cabo deve ser instalado ligando as estruturas representadas pelas seguintes retas:

$$r:\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 \\ z = -2 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-1}{-5} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+4}{4},$$

as quais são classificadas como reversas e cujas dimensões são dadas em metros.

Com base nas informações apresentadas, qual deve ser o comprimento do cabo de aço que unirá as retas *r* e *s*, sabendo que este deve ter o menor comprimento possível?

a) O cabo de aço deve ter um comprimento de, aproximadamente, 1,27 m.

b) O cabo de aço deve ter um comprimento de, aproximadamente, 1,46 m.

c) O cabo de aço deve ter um comprimento de, aproximadamente, 1,88 m.

d) O cabo de aço deve ter um comprimento de, aproximadamente, 2,32 m.

e) O cabo de aço deve ter um comprimento de, aproximadamente, 2,65 m.

Seção 2.2

Equações reduzidas, interseções e posições relativas de retas

Diálogo aberto

Dando continuidade ao estudo das retas, nesta seção discutiremos a respeito das equações reduzidas, as quais também podem ser empregadas para descrever algebricamente as retas no espaço cartesiano. Também estudaremos as posições relativas entre retas, observando quando podemos classificar duas retas, por exemplo, como ortogonais ou paralelas, e, no caso de serem concorrentes, ainda avaliaremos suas interseções.

Assumindo sua função como funcionário da empresa que atua no ramo da construção civil, paralelamente ao projeto da sede de um shopping, outro trabalho em andamento refere-se ao planejamento da estrutura solicitada por um supermercado de grande porte para uma de suas filiais.

Analisando a estrutura metálica que irá compor o projeto do supermercado, existem vigas metálicas que precisam ser associadas entre si, para adequar os acessos ao estacionamento do supermercado, o que será construído no subsolo do prédio.

Desta estrutura, podem ser destacadas as vigas metálicas representadas pelas seguintes expressões:

- A: $(x, y, z) = (2, 1, 4) + \lambda_1(3, 0, 1), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$;
- B: $(x, y, z) = (3, -1, -1) + \lambda_2(4, -2, -4), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Assim, nesta segunda tarefa, você deve, inicialmente, determinar qual é a interseção entre as vigas A e B, cujas representações foram dadas anteriormente.

Sabendo que a reta que caracteriza uma terceira viga V contém a interseção entre as vigas A e B e tem direção dada por $\vec{u} = (0, 2, -1)$, determine a expressão que caracteriza a viga V.

Analisando as expressões que caracterizam as vigas A, B e V, o que podemos concluir por meio de suas disposições espaciais? Como podemos comparar as três vigas, segundo as posições relativas entre retas?

Ainda a respeito da viga V, determinada anteriormente, é necessário identificar qual a posição relativa entre ela e uma quarta viga C, cuja representação algébrica é dada por:

$$(x,y,z)=(-2,-1,\ 0)+\lambda_3(0,-4,\ 2),\quad \lambda_3\in\mathbb{R}.$$

Assim, para concluir essa tarefa, você precisará também descrever que relação pode ser estabelecida entre as vigas C e V, tendo em vista as posições assumidas por cada uma no espaço cartesiano.

Não pode faltar

Equação reduzida da reta

Além das equações vetoriais, paramétricas e simétricas para as retas no espaço cartesiano, é possível identificar suas equações reduzidas. Para isso, considere a reta r cujas equações simétricas são dadas por $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$, para $a,b,c\neq 0$. Na identificação das equações reduzidas, representando as variáveis y e z em função de x, por exemplo, podemos empregar os seguintes procedimentos:

- Para expressar y em função de x:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\ \Rightarrow\ a(y-y_0)=b(x-x_0)\ \Rightarrow\ y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow\ y-y_0=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x_0\ \Rightarrow\ y=\frac{b}{a}x+\left(-\frac{b}{a}x_0+y_0\right).$$

Sabendo que $m=\dfrac{b}{a}$ e $n=-\dfrac{b}{a}x_0+y_0$, obtemos a equação $y=mx+n$.

- Para expressar z em função de x:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}\ \Rightarrow\ a(z-z_0)=c(x-x_0)\ \Rightarrow\ z-z_0=\frac{c}{a}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow\ z-z_0=\frac{c}{a}x-\frac{c}{a}x_0\ \Rightarrow\ z=\frac{c}{a}x+\left(-\frac{c}{a}x_0+z_0\right).$$

Adotando $p = \frac{c}{a}$ e $q = -\frac{c}{a}x_0 + z_0$, obtemos a equação $z = px + q$.

Portanto, as equações reduzidas da reta r são dadas por: $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$.

Assimile

As equações reduzidas de uma reta r não dependem diretamente de um parâmetro real, o que as diferencia das equações paramétricas, por exemplo, apesar de relacionarem diretamente as variáveis x, y e z entre si.

Exemplificando

Quais são as equações reduzidas da reta s que contêm o ponto $A(1,\ 0, -1)$, cuja direção é dada pelo vetor $\vec{u} = (2,\ 3, -1)$?

Podemos construir as equações simétricas de s da seguinte forma:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

Escrevendo as equações reduzidas em função de y, segue que:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad 3(x-1) = 2y \quad \Rightarrow \quad x-1 = \frac{2}{3}y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y + 1$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \Rightarrow \quad 3(z+1) = -y \quad \Rightarrow \quad z+1 = -\frac{1}{3}y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{1}{3}y - 1$$

Portanto, as equações reduzidas de s são dadas por:

$$x = \frac{2}{3}y + 1;\ \ z = -\frac{1}{3}y - 1.$$

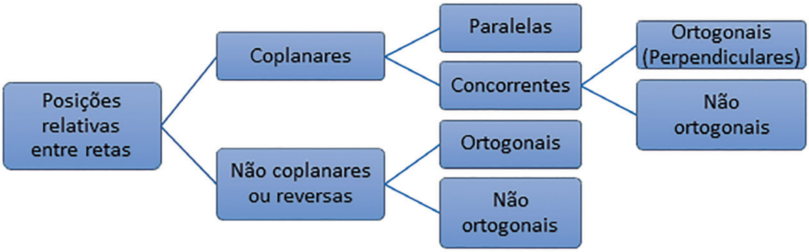
Atenção

Podemos escrever as equações reduzidas de uma reta em função de qualquer uma das três variáveis (x, y ou z), desde que as duas equações sejam representadas em função de uma única variável.

Posições relativas entre retas

Conhecendo suas respectivas representações algébricas, as retas podem ser comparadas entre si de acordo com as posições que ocupam no espaço cartesiano, sendo este estudo desenvolvido por meio dos vetores diretores que as caracterizam e das coordenadas de seus pontos.

Figura 2.6 | Posições relativas entre retas



Fonte: elaborada pela autora.

De acordo com o esquema apresentado na Figura 2.6, as retas podem ser coplanares ou não, sendo possível avaliar subcategorias pelas suas posições específicas. Nos próximos tópicos, serão avaliadas algumas destas categorias e suas respectivas condições.

Reflita

Qual a interpretação geométrica para o produto misto entre três vetores ser igual a zero?

Condições de coplanaridade e paralelismo de retas

Considere duas retas *r* e *s*, cujas equações vetoriais são dadas a seguir:

$$r:(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(a_1,b_1,c_1),\quad t\in\mathbb{R}$$

$$s:(x,y,z)=(x_2,y_2,z_2)+k(a_2,b_2,c_2),\quad k\in\mathbb{R}.$$

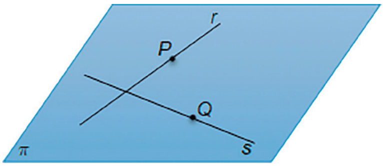
Assim, a reta *r* contém o ponto $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$ e tem direção dada por $\overrightarrow{v_r}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, enquanto *s* contém $Q(x_2,\ y_2,\ z_2)$ e tem direção indicada por $\overrightarrow{v_s}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$.

Para investigar se *r* e *s* são coplanares, ou seja, se existe um único plano que as contenha, é necessário que os vetores $\overrightarrow{v_r} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{v_s} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ – sendo este último construído a partir de um ponto pertencente a cada uma das retas – também sejam coplanares, conforme a Figura 2.7, fato investigado por meio do produto misto:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se o produto misto entre os vetores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ e $\overrightarrow{PQ}$ for nulo, podemos concluir que as retas *r* e *s* são coplanares. Caso contrário, podemos classificá-las como reversas.

Figura 2.7 | Retas coplanares



Fonte: elaborada pela autora.

Assimile

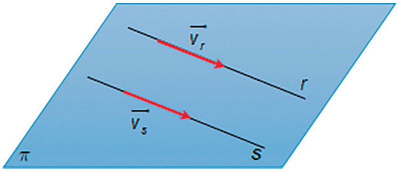
Se duas retas não são coplanares, elas são classificadas como reversas, as quais ainda podem ser ortogonais entre si. Por outro lado, quando duas retas são coplanares, podem ser paralelas ou concorrentes, e, neste segundo caso, ainda podem ser classificadas como ortogonais (ou perpendiculares).

Sabendo que as retas *r* e *s* são coplanares, podemos investigar se são paralelas entre si. Para isso, precisamos analisar as relações existentes entre seus vetores diretores.

Para as retas cujas equações vetoriais foram apresentadas anteriormente, *r* tem direção dada por $\overrightarrow{v_r} = (a_1, b_1, c_1)$, enquanto *s* tem direção descrita por $\overrightarrow{v_s} = (a_2, b_2, c_2)$. Logo, podemos concluir que as retas *r* e *s* serão paralelas, conforme a Figura 2.8, quando seus vetores forem paralelos entre si, ou seja, quando for possível determinar $k \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{v_r} = k\vec{v_s}$, ou, ainda, sabendo que $a_2, b_2, c_2 \neq 0$,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Figura 2.8 | Retas paralelas



Fonte: elaborada pela autora.

Atenção

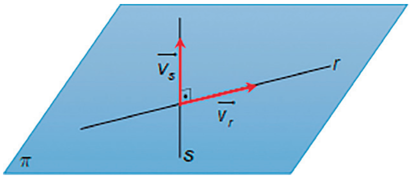
Duas retas *r* e *s* paralelas podem ser distintas, quando não possuem pontos em comum, ou coincidentes, quando todos os pontos são comuns às duas retas em estudo.

Condição de ortogonalidade de retas

Outra situação possível envolvendo a posição relativa entre retas corresponde à ortogonalidade.

Nesse caso, podemos avaliar a condição de ortogonalidade entre as retas, ou seja, a condição que deve ser satisfeita para que as retas sejam ortogonais entre si, conforme a situação apresentada na Figura 2.9.

Figura 2.9 | Retas ortogonais



Fonte: elaborada pela autora.

Dizemos que duas retas são ortogonais entre si quando seus vetores diretores também satisfizerem a essa condição, fato que pode ser avaliado pelo produto escalar.

Para as retas descritas anteriormente, sabendo que *r* tem direção dada por $\vec{v_r} = (a_1,\ b_1,\ c_1)$, e que *s* tem direção descrita por $\vec{v_s} = (a_2,\ b_2,\ c_2)$, as retas *r* e *s* serão classificadas como ortogonais quando o produto escalar entre os vetores diretores for nulo, ou seja, no caso em que:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (a_1,\ b_1,\ c_1) \cdot (a_2,\ b_2,\ c_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Assimile

Alguns autores consideram que duas retas *r* e *s* serão ortogonais se formarem entre si um ângulo reto, enquanto as retas *r* e *s* serão perpendiculares quando, além de ortogonais, forem concorrentes, ou seja, possuírem interseção não vazia.

Exemplificando

Estude a posição relativa das retas *r* e *s*, sabendo que suas equações simétricas são dadas por:

$$r: \frac{x-3}{8} = \frac{z+1}{-6},\ y = 3$$

$$s: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}$$

Inicialmente, vamos verificar se as retas são coplanares. Para isso, temos os vetores diretores de *r* e *s* dados, respectivamente, por $\vec{v_r} = (8,\ 0, -6)$ e $\vec{v_s} = (3,\ 5,\ 4)$. Além disso, tomando $P(3,\ 3, -1) \in r$ e $Q(0, -1,\ 3) \in s$, teremos o vetor $\overrightarrow{PQ} = (-3, -4,\ 4)$. Assim, pelo produto misto,

$$\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 270.$$

Como o produto misto é não nulo, podemos concluir que as retas *r* e *s* são reversas. Além disso, pelo produto escalar, temos que:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (8,\ 0, -6) \cdot (3,\ 5,\ 4) = 8 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + (-6) \cdot 4 = 0,$$

ou seja, *r* e *s* são ortogonais.

Portanto, podemos concluir que *r* e *s* são reversas e ortogonais.

Faça você mesmo

Qual é a posição relativa entre as retas p e q, cujas equações paramétricas são apresentadas a seguir?

$$p:\begin{cases} x = -3 + 8t \\ y = 4 - 6t \\ z = 2 + 2t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad q:\begin{cases} x = -5 - 4k \\ y = 5 + 3k \\ z = -4 - k \end{cases},\quad k \in \mathbb{R}$$

Interseção de duas retas

Quando duas retas r e s são coplanares e possuem um único ponto em comum, isto é, possuem interseção não vazia, podemos classificá-las como retas concorrentes. Conhecendo as representações algébricas das retas, podemos identificar as coordenadas dos pontos de interseção, caso existam.

Sejam as retas r e s, cujas equações vetoriais são dadas a seguir:

$$r:(x,y,z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a_1, b_1, c_1), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$s:(x,y,z) = (x_2, y_2, z_2) + k(a_2, b_2, c_2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Considere que, pelo estudo dessas retas, seja possível representá-las por meio de suas equações reduzidas da seguinte forma:

$$r:\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} y = m_2 x + n_2 \\ z = p_2 x + q_2 \end{cases}$$

Deseja-se determinar as coordenadas $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ do ponto de interseção das retas, isto é, do ponto que pertence às duas retas simultaneamente. Assim, as coordenadas $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ correspondem à solução do sistema composto pelas equações reduzidas das retas r e s, ou seja,

$$\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + n_2 \\ z = p_2 x + q_2 \end{cases}$$

Note que o objetivo é resolver um sistema com quatro equações e três incógnitas (x, y e z).

Assimile

Para determinar a interseção entre duas retas, precisamos resolver o sistema de equações lineares formado pelas equações reduzidas das duas retas consideradas.

Exemplificando

Determine o ponto de interseção entre as retas k e t, cujas equações reduzidas são apresentadas a seguir:

$$k:\begin{cases} y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$t:\begin{cases} y=2x+1 \\ z=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para determinar o ponto de interseção entre as retas k e t, precisamos resolver o seguinte sistema de equações lineares para as variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3} \\ y=2x+1 \\ z=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Igualando a primeira à terceira equação por meio da variável y, segue que:

$$\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=2x+1 \Rightarrow \frac{5}{3}x-2x=1-\frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1$$

Substituindo $x=-1$ na terceira equação, por exemplo, obtemos

$$y=2\cdot(-1)+1=-2+1=-1,$$

e substituindo esse mesmo valor na quarta equação, por exemplo, segue que

$$z=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2.$$

Portanto, o ponto de interseção entre as retas *k* e *t* é $P(-1,-1,-2)$.

Faça você mesmo

Quais são as coordenadas do ponto de interseção entre as retas *r* e *s* representadas a seguir?

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{e} \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{z+2}{1},\ y=1$$

Pesquise mais

Para o estudo das retas no espaço, principalmente em relação às posições relativas e interseção entre retas, leia a Unidade 2 do livro indicado a seguir, que pode ser empregado como material complementar e está disponível na nossa Biblioteca Virtual

BORIN JUNIOR, A. M. S. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 2014.

Sem medo de errar

No desenvolvimento do projeto da nova filial do supermercado, solicitado à empresa na qual você atua, sua função é estudar algumas vigas metálicas que compõem o projeto, identificando as interseções e posições relativas, elementos fundamentais para a composição do projeto.

Sua primeira tarefa consiste em determinar a interseção entre as vigas *A* e *B*, cujas representações algébricas são, respectivamente, $(x,y,z)=(2,\ 1,\ 4)+\lambda_1(3,\ 0,\ 1),\quad \lambda_1\in\mathbb{R}$, e $(x,y,z)=(3,-1,-1)+\lambda_2(4,-2,-4),\quad \lambda_2\in\mathbb{R}$. Podemos representar as vigas *A* e *B* da seguinte forma:

$$A:\ \frac{x-2}{3}=\frac{z-4}{1},\ y=1;\ B:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-4}.$$

Note que precisamos representar a viga *A*, nas equações simétricas, considerando também a expressão $y = 1$, porque a segunda coordenada do vetor diretor é nula, pois ele é paralelo ao plano *xz*, impossibilitando a descrição da variável *y* em conjunto com as demais.

Para determinar as equações reduzidas que caracterizam as vigas *A* e *B*, precisamos avaliar as seguintes expressões:

- Para a viga *A*:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{z-4}{1} \Rightarrow 3(z-4) = x-2 \Rightarrow z-4 = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 4 \Rightarrow z = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

Logo, as equações reduzidas que representam a viga *A* são: $\begin{cases} y = 1 \\ z = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3} \end{cases}$.

- Para a viga *B*:

Representando a variável *y* em função de *x*, segue que:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow 4(y+1) = (-2)(x-3) \Rightarrow y+1 = \frac{-2}{4}(x-3)$$

$$\Rightarrow y+1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

E representando a variável *z* em função de *x*, obtemos:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{z+1}{-4} \Rightarrow 4(z+1) = (-4)(x-3) \Rightarrow z+1 = \frac{-4}{4}(x-3)$$

$$\Rightarrow z+1 = -x+3 \Rightarrow z = -x+3-1 \Rightarrow z = -x+2.$$

Assim, as equações reduzidas que representam a viga *B* são: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ z = -x + 2 \end{cases}$

Para determinar a interseção entre as vigas *A* e *B*, precisamos resolver o sistema composto pelas equações reduzidas que representam as duas vigas, ou seja, resolver:

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ z = -x + 2 \end{cases}$$

Sabemos que $y = 1$ da primeira equação. Substituindo esse valor na terceira equação, obtemos $x = -1$. Partindo da segunda ou quarta equações, considerando o valor assumido por *x*, concluímos que $z = 3$. Portanto, a interseção entre as retas que representam as vigas *A* e *B* corresponde ao ponto $M(-1,\ 1,\ 3)$.

A segunda parte de sua tarefa consiste em determinar uma representação algébrica para a viga *V*, sabendo que ela pode ser descrita pela reta que contém o ponto de interseção entre as retas que caracterizam as vigas *A* e *B*, isto é, o ponto $M(-1,\ 1,\ 3)$, e tem direção dada por $\vec{u} = (0,\ 2,-1)$. Com base nessas informações, a viga *V* pode ser descrita pela equação vetorial:
$(x, y, z) = (-1,\ 1,\ 3) + \lambda_4(0,\ 2,-1),\quad \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

A terceira parte dos trabalhos envolve a comparação das retas que representam as vigas *A*, *B* e *V* por meio do estudo das posições relativas. Pelas equações vetoriais das retas, note que:

- *A*: contém o ponto $P_A(2,\ 1,\ 4)$ e tem direção dada por $\overrightarrow{v_A} = (3,\ 0,\ 1)$;
- *B*: contém o ponto $P_B(3,-1,-1)$ e tem direção dada por $\overrightarrow{v_B} = (4,-2,-4)$;
- *V*: contém o ponto $M(-1,\ 1,\ 3)$ e tem direção dada por $\vec{u} = (0,\ 2,-1)$.

Como já observado anteriormente, podemos verificar que as retas que caracterizam as vigas *A*, *B* e *V* possuem um ponto em comum (o ponto $M(-1,\ 1,\ 3)$), ou seja, têm interseção não vazia.

Logo, podemos caracterizá-las como retas concorrentes e, portanto, coplanares. Pelo produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{v_A}\cdot\overrightarrow{v_B}=(3,\ 0,\ 1)\cdot(4,-2,-4)=3\cdot 4+0\cdot(-2)+1\cdot(-4)=12-4=8$$

$$\overrightarrow{v_A}\cdot\vec{u}=(3,\ 0,\ 1)\cdot(0,\ 2,-1)=3\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot(-1)=-1$$

$$\overrightarrow{v_B}\cdot\vec{u}=(4,-2,-4)\cdot(0,\ 2,-1)=4\cdot 0+(-2)\cdot 2+(-4)\cdot(-1)=-4+4=0.$$

Como os dois primeiros produtos escalares resultaram em valores não nulos, podemos concluir que as retas que caracterizam as vigas *A* e *B* são concorrentes não perpendiculares, bem como as retas que representam *A* e *V*. Porém, o terceiro produto escalar resultando em zero implica que as retas que caracterizam as vigas *B* e *V* são concorrentes perpendiculares.

Por fim, precisamos comparar as vigas *C* e *V*, sabendo que a reta que representa *C* contém o ponto $Q(-2,-1,\ 0)$ e tem direção dada por $\overrightarrow{v_C}=(0,-4,\ 2)$, ou seja, é dada pela equação vetorial $(x,y,z)=(-2,-1,\ 0)+\lambda_3(0,-4,\ 2),\ \ \lambda_3\in\mathbb{R}$.

Para avaliar se as retas em questão são coplanares, podemos calcular o produto misto envolvendo os vetores $\vec{u}=(0,\ 2,-1)$, $\overrightarrow{v_C}=(0,-4,\ 2)$ e $\overrightarrow{QM}=(1,\ 2,\ 3)$, o qual é determinado a partir do ponto $M(-1,\ 1,\ 3)$ da reta que representa a viga *V* e de $Q(-2,-1,\ 0)$ da reta que descreve a viga *C*. Veja que:

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{v_C},\overrightarrow{QM}\right)=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(0+4+0)-(4+0+0)=0.$$

Como o produto misto é nulo, podemos concluir que as retas que representam as vigas *C* e *V* são coplanares. Com base nessa informação, podemos verificar se as retas são paralelas entre si. Para isso, observe que $\overrightarrow{v_C}=(0,-4,\ 2)=(-2)(0,\ 2,-1)=(-2)\vec{u}$. Logo, sabendo que os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{v_C}$ são múltiplos, sendo válida a relação $\overrightarrow{v_C}=(-2)\vec{u}$, podemos concluir que eles são paralelos entre si. Portanto, as retas que caracterizam as vigas *C* e *V* são paralelas entre si, concluindo, desta forma, o estudo das vigas apresentadas, as quais irão compor a estrutura metálica da nova filial do supermercado.

Avançando na prática

As posições relativas de retas na construção civil

Descrição da situação-problema

O setor responsável pela realização das obras na empresa onde você trabalha solicitou ao setor no qual você atua a modificação de um dos projetos, pois houve a necessidade de alterar o posicionamento de uma das paredes de um barracão comercial.

Após os estudos desenvolvidos pela equipe responsável, foi identificado no projeto qual seria a posição aproximada da viga a ser instalada. Alguns funcionários do setor de projetos observaram que essa nova viga poderia ser representada pela reta *v* de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 - 2kt \\ y = 1 + 6kt \\ z = 7 + 12t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

em que $k \in \mathbb{R}$. Sabendo que *v* é paralela à reta *r* de equações simétricas:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z}{4},$$

qual deve ser o valor assumido por *k* na representação algébrica da reta *v*?

Resolução da situação-problema

Duas retas são classificadas como paralelas quando seus vetores diretores são paralelos entre si. Neste caso, $\vec{u} = (-2k,\ 6k,\ 12)$, $k \in \mathbb{R}$, é um vetor diretor à *v*, enquanto $\vec{w} = (2, -6,\ 4)$ é um vetor diretor à *r*. Estes vetores serão paralelos se for possível identificar uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, de tal forma que $\vec{u} = \lambda\vec{w}$. Assim, segue que:

$$(-2k,\ 6k,\ 12) = \lambda(2, -6,\ 4) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2k = 2\lambda \\ 6k = -6\lambda \\ 12 = 4\lambda \end{cases}$$

Da terceira equação, podemos concluir que $\lambda = 3$. Assim, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} -2k = 6 \\ 6k = -18 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, podemos concluir que, para que as retas v e *r* sejam paralelas, devemos ter $k = -3$.

Faça valer a pena

1. Podemos comparar diferentes retas por meio das posições ocupadas por elas no espaço cartesiano, propiciando o estudo das chamadas posições relativas entre retas. Uma das posições possíveis de serem avaliadas é a ortogonalidade entre retas.

Sejam as retas *r* e *s* dadas pelas seguintes equações:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2mt \\ y = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

Com base nas informações apresentadas, qual deve ser o valor assumido por *m* para que as retas *r* e *s* sejam classificadas como ortogonais?

a) $m = -\frac{1}{4}$.

b) $m = -\frac{7}{4}$.

c) $m = \frac{4}{3}$.

d) $m = \frac{7}{4}$.

e) $m = 3$.

2. Analise as retas descritas pelas seguintes equações:

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 - 4k \\ y = -1 - 2k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 8 + 2k \end{cases}$$

$$t: (x, y, z) = (-1,\ 1,\ 2) + h(0,\ 3,\ 3),\ h \in \mathbb{R}$$

A respeito das retas apresentadas, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

( ) As retas *r* e *s* são coplanares e perpendiculares entre si.

( ) As retas *r* e *t* são reversas e paralelas entre si.

( ) As retas *s* e *t* são reversas e ortogonais entre si.

Com base nas afirmações anteriores, assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, tendo em vista a ordem na qual foram apresentadas:

a) V – V – F.

b) V – F – V.

c) F – F – V.

d) F – V – F.

e) F – V – V.

3. Na elaboração de um projeto hidráulico, um engenheiro precisa conectar dois encanamentos em um ponto para equilibrar a vazão de água de uma residência.

Considere que, na elaboração do projeto, os dois canos que precisam ser conectados podem ser descritos pelas retas *s* e *t* representadas pelas seguintes expressões:

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$$

$$t: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que no projeto a conexão a ser instalada nos canos corresponde ao ponto de interseção das retas *s* e *t*.

Com base nas informações apresentadas, quais são as coordenadas do ponto no qual os dois canos serão conectados?

a) $A(-5,\ 2,-1)$.

b) $A(2,\ 3,\ 4)$.

c) $A(-4,\ 7,\ 0)$.

d) $A(2,\ 2,-3)$.

e) $A(4,\ 3,\ 9)$.

Seção 2.3

Paralelismo, interseções de retas e planos, distâncias e ângulos

Diálogo aberto

Prosseguindo com o estudo das retas, nesta seção discutiremos a respeito das interseções entre retas e planos; da possibilidade de identificar retas por meio da interseção entre planos; do estudo das posições relativas e dos ângulos definidos, quando comparamos retas a planos; e dos ângulos construídos entre retas.

Para isso, ainda considerando sua participação como integrante da equipe responsável pela elaboração de projetos e pelos cálculos estruturais das obras desenvolvidas pela empresa de construção civil, outro trabalho que também está sendo desenvolvido pela empresa na qual você trabalha, mais especificamente no setor de projetos, diz respeito a um hotel de alto padrão que será construído na região central de uma cidade.

Dentre as diversas etapas associadas à elaboração do projeto deste hotel, você foi designado, em conjunto com um projetista, para estudar a entrada do edifício.

Além da entrada do hotel estar ligada diretamente à recepção e aos apartamentos, ela terá uma conexão com uma área comercial que será construída no interior do hotel. Para o acesso a essa área, será instalada uma escada rolante, sendo necessária a inclusão deste elemento no projeto do hotel.

Sabendo que uma das vigas de sustentação necessária para a instalação da escada rolante possa ser representada por:

$$r:(x,y,z)=\left(2;\ 0;\ 0{,}58\right)+\alpha(2{,}67;\ 0;\ 1{,}54),\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

determine qual é a interseção desta com o piso do primeiro pavimento do edifício, que pode ser representado, no espaço cartesiano, pelo plano *xy*.

Além disso, identifique a interseção da viga em questão com o plano de equação:

$$100x + 273y - 100z - 373 = 0,$$

bem como sua inclinação aproximada em relação ao piso do primeiro pavimento.

Como esses problemas podem ser solucionados?

Não pode faltar

Interseção de reta e plano

Considere uma reta r e um plano π representados no espaço cartesiano e descritos pelas seguintes expressões:

$$r : \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Para determinar a interseção entre r e π, precisamos identificar um ponto $I(x, y, z)$, cujas coordenadas verifiquem as equações do sistema linear formado pelas equações de r e π:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}.$$

No exemplo a seguir, podemos verificar o procedimento que pode ser empregado na determinação dos pontos de interseção de retas e planos.

Exemplificando

Determine o ponto de interseção da reta r com o plano π, sabendo que:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0.$$

Inicialmente, podemos representar a reta r pelas suas equações reduzidas da seguinte forma:

$$r:\begin{cases} y = 2x+3 \\ z = 3x-4 \end{cases}.$$

Para determinar a interseção entre a reta r e o plano π, precisamos identificar o ponto $I(x,y,z)$, cujas coordenadas satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} y = 2x+3 \\ z = 3x-4 \\ 3x+5y-2z-9=0 \end{cases}.$$

Assim, substituindo a primeira e a segunda equação na terceira, teremos:

$$3x+5(2x+3)-2(3x-4)-9=0$$

$$\Rightarrow \quad 3x+10x+15-6x+8-9=0$$

$$\Rightarrow \quad 7x+14=0 \quad \Rightarrow \quad 7x=-14 \quad \Rightarrow \quad x=-2.$$

Substituindo $x=-2$ nas duas primeiras equações do sistema, segue que:

$$y = 2\cdot(-2)+3 \quad \Rightarrow \quad y=-4+3 \quad \Rightarrow \quad y=-1$$

$$z = 3\cdot(-2)-4 \quad \Rightarrow \quad z=-6-4 \quad \Rightarrow \quad z=-10.$$

Portanto, a interseção entre a reta r e o plano π corresponde ao ponto $I(-2,-1,-10)$.

Reflita

No estudo de retas e planos, a interseção sempre será caracterizada por um único ponto ou podemos nos deparar com outros tipos de situações?

Reta determinada pela interseção de planos

A interseção de dois planos não paralelos,

$$\pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

corresponde a uma reta *r*, cuja representação algébrica pode ser determinada conforme as seguintes estratégias:

- Resolver o sistema linear composto pelas equações dos planos π_1 e π_2, de modo a determinar as equações reduzidas de r; ou
- identificar um ponto e um vetor diretor que caracterizem r.

O emprego desses procedimentos é ilustrado nos exemplos apresentados a seguir.

Exemplificando

Determine as equações reduzidas da reta *r* obtida pela interseção dos planos π_1 e π_2, cujas equações gerais são dadas por:

$$\pi_1 : 3x - y + 2z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : 2x + y + z + 2 = 0.$$

Para determinar as equações reduzidas de *r*, precisamos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação do sistema por -2 e adicionando-a à primeira, obtemos:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z + 3 = 0 \\ -4x - 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -x - 3y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Novamente pelo sistema, adicionando as duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x + 3z + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3z = -5x - 5 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{5}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Portanto, a reta *r* pode ser descrita pelas equações reduzidas:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{5}{3}x - \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Exemplificando

Determine as equações paramétricas da reta *r* obtida pela interseção dos planos π_1 e π_2, cujas equações gerais são dadas por:

$$\pi_1 : x + y + 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - 3y - z + 6 = 0.$$

Para determinar as equações paramétricas, ou mesmo a vetorial ou as simétricas, precisamos identificar um ponto e um vetor diretor para *r*.

Vamos determinar um dos pontos pertencentes à *r*, considerando, por exemplo, o ponto de abscissa nula, isto é, $P(0, y, z)$. Desta forma, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y + 2z - 3 = 0 \\ -3y - z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Adicionando as duas equações, multiplicando previamente a segunda por 2, obtemos:

$$\begin{cases} y + 2z - 3 = 0 \\ -3y - z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2z - 3 = 0 \\ -6y - 2z + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -5y + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{5}$$

Substituindo $y = \dfrac{9}{5}$ em uma das duas equações (na segunda, por exemplo), segue que:

$$-3 \cdot \frac{9}{5} - z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -z + \frac{3}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{5}.$$

Logo, o ponto $P\left(0,\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$ pertence à reta *r*, por ser um ponto pertencente à interseção dos planos π_1 e π_2.

Para determinar o vetor diretor de *r*, precisamos identificar um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 2)$ e $\overrightarrow{n_1}=(2,-3,-1)$, que correspondem aos vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Para isso, basta calcular $\vec{v}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(5,\ 5,-5)$.

Portanto, a reta *r* contém o ponto $P\left(0,\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$ e tem direção dada por $\vec{v}=(5,\ 5,-5)$, podendo ser representada como:

$$r:\begin{cases} x=5t \\ y=\dfrac{9}{5}+5t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=\dfrac{3}{5}-5t \end{cases}$$

Assimile

Para identificar a representação algébrica da reta *r* que corresponde à interseção entre os planos π_1 e π_2, podemos resolver o sistema linear composto pelas equações gerais do plano ou identificar um ponto e um vetor diretor que a caracterizem.

Faça você mesmo

Como podemos representar algebricamente a reta *s* obtida pela interseção entre os seguintes planos?

$$\pi_1: x+2y+z-1=0$$

$$\pi_2: 2x+y-z+7=0$$

Condições de paralelismo e ortogonalidade de reta e plano

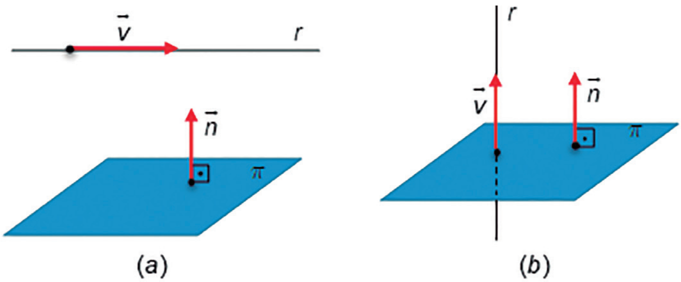
Podemos estudar posições relativas comparando retas e planos entre si, sendo estas relações estabelecidas com base nos vetores que definem cada um destes objetos.

Para esse estudo, seja a reta r de vetor diretor $\vec{v}$ e o plano π com vetor normal $\vec{n}$. Observe que:

- se os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$ forem ortogonais entre si, podemos concluir que a reta r e o plano π serão paralelos entre si, conforme a Figura 2.10 (a);

- no caso de os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$ serem paralelos entre si, a reta r e o plano π serão perpendiculares entre si, de acordo com a situação ilustrada na Figura 2.10 (b).

Figura 2.10 | Posições relativas entre reta e plano



Fonte: elaborada pela autora.

Exemplificando

Qual relação podemos estabelecer entre a reta r e o plano π, dados pelas seguintes expressões algébricas?

$$r:\begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -1 - 3k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 3 + k \end{cases}$$

$$\pi: 5x + 2y - 4z + 2 = 0$$

Podemos identificar o vetor $\vec{v} = (2, -3,\ 1)$ diretor de r e o vetor $\vec{n} = (5,\ 2, -4)$, normal ao plano π. Observe que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = 0$, ou seja, o produto escalar entre $\vec{v}$ e $\vec{n}$ é nulo, ou seja, estes vetores são ortogonais entre si. Portanto, podemos concluir que a reta r e o plano π são paralelos.

Faça você mesmo

Estude a posição relativa entre o plano π e a reta *r*, descritos por:

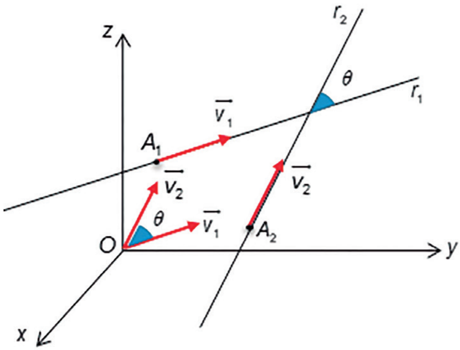
$$\pi : 4x - 6y + 2z + 1 = 0$$

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 4 + 3k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -5 - k \end{cases}$$

Ângulo entre retas

Seja a reta r_1, que contém o ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem direção dada por $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e r_2, que contém o ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem direção descrita pelo vetor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, de acordo com a Figura 2.11.

Figura 2.11 | Ângulo entre retas



Fonte: elaborada pela autora.

O menor ângulo formado entre um vetor diretor de r_1 e um vetor diretor de r_2 é denominado ângulo de duas retas r_1 e r_2. Se representarmos esse ângulo por θ, podemos determiná-lo por meio da seguinte expressão:

$$\cos(\theta) = \frac{\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|\left|\overrightarrow{v_2}\right|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

Ou, ainda,

$$\cos(\theta) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Exemplificando

Determine o ângulo entre as retas descritas por:

$$r : (x, y, z) = (-1, -2,\ 3) + t(1, 1, -2), t \in \mathbb{R}$$

$$s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$$

Os vetores diretores que definem as retas r e s são dados, respectivamente, por $\vec{v_r} = (1,\ 1, -2)$ e $\vec{v_s} = (-2,\ 1,\ 1)$.

Calculando o ângulo θ entre as retas r e s, obtemos:

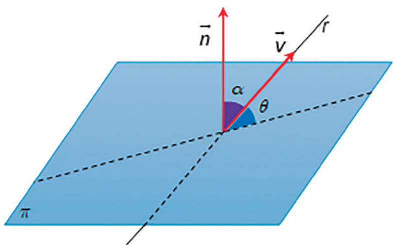
$$\cos(\theta) = \frac{|1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = 60°$.

Ângulo entre reta e plano

Podemos determinar o ângulo formado entre retas e planos por meio de seus vetores característicos. Para isso, seja a reta r de vetor diretor $\vec{v}$ e o plano π com vetor normal $\vec{n}$, de acordo com a Figura 2.12:

Figura 2.12 | Ângulo entre reta e plano



Fonte: elaborada pela autora.

Note que o ângulo θ da reta *r* com o plano π corresponde ao complemento do ângulo α formado entre a reta *r* e uma reta normal ao plano, ou, ainda, entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$. Logo, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$, o que implica $\cos(\alpha) = \text{sen}(\theta)$. Pelo ângulo formado entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$, em conjunto com a igualdade apresentada, obtemos a seguinte expressão:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Exemplificando

Determine o ângulo entre a reta *s* e o plano π, conforme as seguintes representações algébricas:

$$s : (x, y, z) = (3,\ 7, -1) + t(2,\ 1,\ 2), \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\pi : x + y - 5 = 0$$

Sabemos que $\vec{v} = (2,\ 1,\ 2)$ e $\vec{n} = (1,\ 1,\ 0)$ correspondem, respectivamente, ao vetor diretor da reta *s* e ao vetor normal ao plano π.

Logo,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = 45°$.

Pesquise mais

Para contribuir com os estudos de retas e planos, pode ser consultado o capítulo 2 do seguinte livro de referência:

SANTOS, N. M. **Vetores e matrizes:** uma introdução à Álgebra Linear. 4. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Outra sugestão:

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015. Disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2018.

Sem medo de errar

Na elaboração do projeto para a construção do edifício que sediará o hotel, precisamos empregar os conhecimentos sobre retas para estudar as interseções e os ângulos envolvendo retas e planos.

Seja a viga representada pela reta r descrita como:

$$r:(x,y,z)=\left(2;\ 0;\ 0{,}58\right)+\alpha(2{,}67;\ 0;\ 1{,}54),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Podemos reescrever as equações da reta r na forma paramétrica:

$$r:\begin{cases} x=2+2{,}67\alpha \\ y=0 \\ z=0{,}58+1{,}54\alpha \end{cases},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Isolando o parâmetro α na primeira equação $\left(\alpha=\dfrac{x-2}{2{,}67}\right)$ e substituindo na terceira, obtemos:

$$z=0{,}58+1{,}54\left(\frac{x-2}{2{,}67}\right)\quad\Rightarrow\quad z=0{,}58+0{,}577x-1{,}154\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad z=0{,}577x-0{,}574.$$

Assim, a reta r pode ser descrita pelas seguintes equações reduzidas:

$$r:\begin{cases} y=0 \\ z=0{,}577x-0{,}574 \end{cases}.$$

O plano π_1, que representa o piso do primeiro pavimento, tem equação $z=0$, pois corresponde ao plano xy. Para determinar a interseção entre r e π_1, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0{,}577x-0{,}574. \\ z=0 \end{cases}$$

Da segunda e da terceira equação, obtemos:

$$0=0{,}577x-0{,}574\quad\Rightarrow\quad 0{,}577x=0{,}574\quad\Rightarrow\quad x\approx 0{,}995.$$

Logo, a interseção entre r e π_1 corresponde ao ponto $I\left(0{,}995;\ 0;\ 0\right)$.

Além disso, precisamos determinar a interseção da viga representada pela reta r com o plano π_2 de equação:

$$100x+273y-100z-373=0.$$

Levando em conta a representação de *r* segundo suas equações reduzidas, como avaliado anteriormente, no estudo da interseção precisamos identificar o ponto cujas coordenadas satisfazem ao sistema linear:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0{,}577x - 0{,}574 \\ 100x + 273y - 100z - 373 = 0 \end{cases}.$$

Substituindo a primeira e a segunda equação na terceira, obtemos:

$$100x + 273 \cdot 0 - 100(0{,}577x - 0{,}574) - 373 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 100x - 57{,}7x + 57{,}4 - 373 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 42{,}3x - 315{,}6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 42{,}3x = 315{,}6 \quad \Rightarrow \quad x \approx 7{,}46$$

Ao substituir $x = 7{,}46$ na segunda equação, temos:

$$z = 0{,}577 \cdot 7{,}46 - 0{,}574 \quad \Rightarrow \quad z = 4{,}3 - 0{,}574 \quad \Rightarrow \quad z \approx 3{,}73.$$

Logo, a interseção entre *r* e π_2 corresponde ao ponto $J(7{,}46;\ 0;\ 3{,}73)$.

Na determinação da inclinação da viga em relação ao primeiro pavimento, precisamos determinar o ângulo formado entre a reta *r* e o plano π_1. Identificando o vetor $\vec{v} = (2{,}67;\ 0;\ 1{,}54)$ diretor de *r* e o vetor $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ normal a π_1, segue que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|2{,}67 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1{,}54 \cdot 1|}{\sqrt{2{,}67^2 + 0^2 + 1{,}54^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|1{,}54|}{\sqrt{9{,}5005}\sqrt{1}} \approx 0{,}5.$$

Portanto, o ângulo formado entre a reta *r* e o plano π_1 é de, aproximadamente, $30°$ ou $\frac{\pi}{6}$.

Avançando na prática

Investigando as posições relativas entre retas e planos

Descrição da situação-problema

Devido à necessidade de comparar algebricamente retas e planos entre si para a elaboração dos projetos da empresa de construção civil, foi proposta à sua equipe um problema da Geometria Analítica para contribuir com os estudos a respeito do tema.

Considere a reta r que contém os pontos $A(1,-1,\ 0)$ e $B(k,\ 1,\ 2)$, em que $k \in \mathbb{R}$ e o plano π de equação geral é $2x-3y+z-2=0$.

Para que a reta r seja paralela ao plano π, qual deve ser o valor assumido pela constante k?

Resolução da situação-problema

Sabemos que uma reta e um plano são paralelos entre si quando o vetor diretor da reta for ortogonal ao vetor normal associado ao plano. Desta forma, com base nos dados apresentados, podemos identificar o vetor:

$$\overrightarrow{AB}=(k,\ 1,\ 2)-(1,-1,\ 0)=(k-1,\ 2,\ 2),$$

diretor da reta r, além do vetor $\vec{n}=(2,-3,\ 1)$, normal a π.

Como os vetores apresentados devem ser ortogonais entre si, devemos ter o produto escalar entre eles igual a zero. Assim:

$$0=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(k-1)\cdot 2+2\cdot(-3)+2\cdot 1$$

$$\Rightarrow\ 2(k-1)-6+2=0\ \Rightarrow\ 2k-2-6+2=0$$

$$\Rightarrow\ 2k-6=0\ \Rightarrow\ 2k=6\ \Rightarrow\ k=3$$

Portanto, para que r seja paralela a π, devemos ter $k=3$.

Faça valer a pena

1. Considere as retas e os planos cujas representações algébricas são dadas a seguir:

$$r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=3t \\ x=-5+t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$s:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-2}$$

$$\pi: x+2y-4z+1=0$$

$$\lambda: 4x+2y-4z+5=0$$

A respeito dessas retas e planos, analise as seguintes afirmações, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. (   ) A reta *s* e o plano λ são perpendiculares entre si.

II. (   ) A reta *r* e o plano λ são perpendiculares entre si.

III. (   ) A reta *s* e o plano π são paralelos entre si.

IV. (   ) A reta *r* e o plano π são paralelos entre si.

Com relação às afirmações anteriores, assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, considerando a ordem na qual foram apresentadas:

a) V – F – V – F.

b) V – F – F – F.

c) V – F – F – V.

d) F – V – F – F.

e) F – F – V – V.

2. Um projetista precisa construir, por meio das ferramentas do desenho técnico, a representação da parte superior de uma máquina para, posteriormente, elaborar o projeto tridimensional empregando um software adequado.

Para isso, dentre os diversos elementos que precisam ser identificados, podemos destacar as arestas e os vértices que caracterizam o sólido em questão.

Considere que duas arestas presentes na estrutura da máquina podem ser descritas pelas seguintes retas:

$$r:\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-t \ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+4t \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 2+k \\ y = -3+2k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 1+2k \end{cases}$$

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica as coordenadas do vértice que se localiza na interseção entre as arestas representadas por *r* e *s*:

a) $I(2,1,3)$.

b) $I(3,-1,3)$.

c) $I(5,0,9)$.

d) $I(4,1,5)$.

e) $I(0,0,1)$.

3. Para a resolução de um problema, um aluno precisa determinar um dos ângulos internos de um triângulo, sabendo que os lados adjacentes podem ser descritos pelas retas de equações:

$$r:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 9 - k \end{cases}$$

$$s:(x, y, z) = (0, -1,\ 4) + t(1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Tendo em vista as informações apresentadas, assinale a alternativa que indica a medida aproximada, em radianos, para o ângulo formado entre as retas *r* e *s*:

a) $\frac{\pi}{6}$.

b) $\frac{\pi}{12}$.

c) $\frac{2\pi}{3}$.

d) $\frac{\pi}{4}$.

e) $\frac{\pi}{3}$.

Referências

BORIN JUNIOR, A. M. S. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 2014.

BOULOS, P. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

FERNANDES, L. F. D. **Geometria Analítica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Equações de cônicas no plano

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores, foram apresentados conceitos fundamentais para a Geometria Analítica, entre os quais destacamos as retas e os planos. Porém, além destes, o estudo das curvas cônicas também é importante, pois estas podem ser empregadas na representação de determinados fenômenos presentes em nosso cotidiano.

O estudo das curvas cônicas é iniciado na Educação Básica, estando presente, por exemplo, no estudo das funções quadráticas, cujos gráficos são representados por meio de parábolas. Devido à sua aplicabilidade, as curvas cônicas podem ser associadas ao estudo de conceitos de outros campos do conhecimento, como é o caso da Óptica e da Astronomia, áreas de estudo da Física.

Para um professor de Matemática, uma das habilidades fundamentais é a capacidade de estabelecer relações entre conceitos de diferentes campos do conhecimento, de modo interdisciplinar. Considerando esse fato, imagine que a escola de Educação Básica na qual você atua como professor de Matemática, com as turmas do Ensino Médio, está desenvolvendo projetos com o objetivo de demonstrar aos alunos algumas das relações existentes entre conceitos de diferentes campos de conhecimento, propondo a realização de atividades interdisciplinares.

Considerando essa estratégia, você ficou encarregado pela supervisão de três grupos de alunos do terceiro ano do Ensino Médio, em associação com o professor de Física, desenvolvendo estudos a respeito das aplicações das curvas cônicas no estudo de conceitos da Física, principalmente da Óptica e da Astronomia, desenvolvendo trabalhos que posteriormente serão apresentados na feira cultural da escola.

Cada grupo é responsável pelo estudo de uma curva cônica específica, destacando suas principais características e observando sua aplicabilidade no estudo de determinados fenômenos associados à disciplina de Física no Ensino Médio.

Assim, sua tarefa será a de acompanhar cada grupo em seus estudos, auxiliando-os no desenvolvimento das propostas. Quais temas deverão ser estudados por você, em conjunto com os alunos? Na sequência, verifique o primeiro problema a ser resolvido.

Seção 3.1

Estudo da circunferência e da elipse

Diálogo aberto

Considerando a proposta de articulação entre Matemática e Física, um dos grupos de alunos do terceiro ano é responsável por elaborar um trabalho que envolva a apresentação geral das cônicas, além do estudo das circunferências e elipses.

Para isso, inicialmente, eles devem estudar e classificar as cônicas dadas pelas seguintes expressões:

- I: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$
- II: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$
- III: $3x^2 + 18xy + 3y^2 + 24x - 11 = 0$

Como você pode orientá-los na classificação das cônicas citadas?

Em seguida, esses alunos deverão construir uma representação simplificada do Sistema Solar, considerando apenas o Sol e a Terra. Devido a estudos realizados com o professor de Física, já foi verificado que a trajetória da Terra ao redor do Sol assume formato elíptico. Assim, nessa tarefa, os alunos devem ilustrar, em uma representação no plano cartesiano, a trajetória da Terra ao redor do Sol, considerando, no desenho, as seguintes informações:

- A distância focal da elipse que representa a trajetória da Terra é igual a 10 centímetros.
- A elipse está centrada na origem.
- O eixo maior pertence ao eixo *x*.
- A excentricidade da elipse é igual a 0,1.

Com base nessas informações, qual é a equação que representa essa elipse? Que informações são necessárias para a representação dessa curva no plano cartesiano?

Desta forma, nessa situação, você deverá desenvolver as tarefas propostas aos alunos de modo a construir um roteiro para melhor orientá-los na realização dos trabalhos.

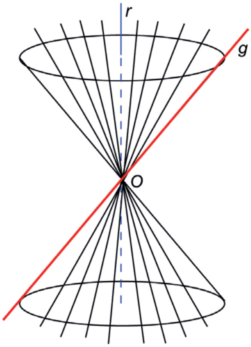
Não pode faltar

Equação geral das cônicas

As curvas cônicas são estudadas desde a Antiguidade. O principal matemático que contribuiu para o estudo desse tema foi o geômetra grego Apolônio (262 a.C.-194 a.C.), que escreveu uma obra completa a respeito desse tema, influenciando outros matemáticos, como Ptolomeu (90 d.C.-168 d.C.), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642), por exemplo.

Para a construção das curvas cônicas, precisamos tomar por base uma superfície cônica, construída da seguinte forma: considere duas retas r e g chamadas, respectivamente, de eixo da superfície e da reta geratriz, sendo ambas concorrentes em O e não perpendiculares entre si; mantendo r fixa, giramos a reta g 360° em torno de r, mantendo constante o ângulo entre as duas retas. Com esse procedimento, obtemos uma superfície cônica circular infinita, com duas folhas, conforme a Figura 3.1, a partir da qual podem ser construídas as curvas cônicas.

Figura 3.1 | Superfície cônica



Fonte: elaborada pela autora.

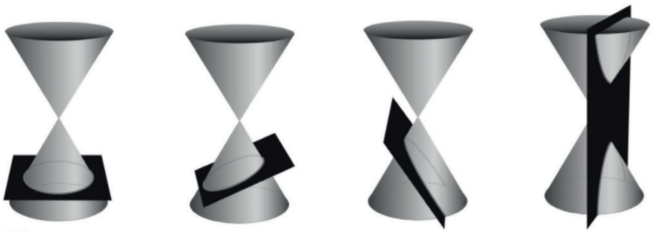
Uma curva cônica, ou simplesmente cônica, corresponde ao conjunto de pontos obtidos pela intersecção de um plano com a superfície cônica.

Assimile

Uma curva cônica corresponde a uma curva plana, sendo representada no plano cartesiano bidimensional. Logo, no estudo das cônicas, empregaremos a representação de pontos e curvas no plano cartesiano.

Quando o plano não passa pelo ponto *O* de intersecção entre as retas *r* e *g*, podemos obter uma das seguintes cônicas: elipse, circunferência, parábola ou hipérbole, conforme a Figura 3.2. Quando o plano de intersecção contiver o ponto *O*, podemos obter cônicas degeneradas: uma reta, um ponto ou duas retas. Para nosso estudo, consideraremos apenas as cônicas não degeneradas, ou seja, aquelas obtidas quando o plano de intersecção não contém o ponto *O*.

Figura 3.2 | Cônicas não degeneradas



(a) Circunferência (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbole

Fonte: adaptada de Santos e Ferreira (2009, p. 59).

Algebricamente, as cônicas correspondem ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem a uma equação do 2º grau com duas variáveis. Em sua forma geral, é dada por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Conhecendo essa equação, podemos classificar as cônicas de acordo com o valor assumido pelo discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$. Neste caso,

- quando $\Delta = B^2 - 4AC < 0$, a equação geral descreve uma elipse;
- quando $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, a equação geral descreve uma parábola;
- quando $\Delta = B^2 - 4AC > 0$, a equação geral descreve uma hipérbole.

Esse procedimento é empregado quando a equação geral descreve uma das três cônicas não degeneradas.

Pesquise mais

Para a avaliação dos critérios empregados na identificação das cônicas degeneradas em função de suas equações gerais, estude a Seção 6.2 do livro cuja referência é indicada por:

FERNANDES, L. F. D. **Geometria Analítica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

Exemplificando

Classifique as seguintes cônicas com base no discriminante:

- Cônica A: $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 70x - 64y + 281 = 0$.
- Cônica B: $4x^2 - 4xy + y^2 - 24x - 8y + 56 = 0$.

Calculando o discriminante, obtemos:

$$\Delta_A = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = -144 < 0$$

$$\Delta_B = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

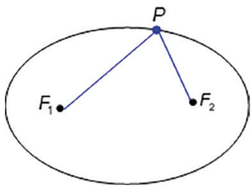
Como o discriminante associado à cônica A assume um valor negativo, podemos concluir que essa cônica é uma elipse.

Por outro lado, sendo o discriminante associado à cônica B igual a zero, podemos concluir que ela representa uma parábola.

Estudo da elipse

Quando intersectamos a superfície cônica por um plano que não contém o vértice, não perpendicular ao eixo, não paralelo à geratriz, e que intercepta uma única folha dessa superfície, obtemos a cônica denominada elipse, conforme a Figura 3.2b. Podemos definir a elipse como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante, conforme a Figura 3.3.

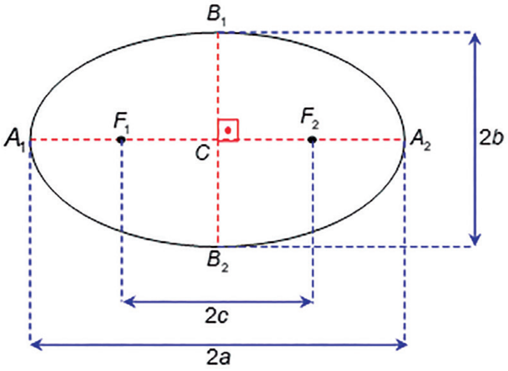
Figura 3.3 | Elipse



Fonte: elaborada pela autora.

Sejam dois pontos distintos F_1 e F_2 do plano, de modo que $d(F_1,F_2)=2c$, além de um número real a, tal que $2a>2c$, o conjunto formado por todos os pontos P do plano que satisfazem $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$, ou $\left|\overrightarrow{PF_1}\right|+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=2a$, é denominado elipse. Podemos identificar diversos elementos que caracterizam uma elipse, de acordo com a Figura 3.4.

Figura 3.4 | Elipse e seus principais elementos



Fonte: elaborada pela autora.

Da Figura 3.4, podemos destacar os seguintes elementos:

- Focos: correspondem aos pontos F_1 e F_2.
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2, com extremos, sendo os focos da elipse.
- Eixo maior: é ao segmento A_1A_2 de comprimento $2a$, o qual contém os focos da elipse.
- Eixo menor: refere-se ao segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, perpendicular ao eixo maior e de tal forma que A_1A_2 e B_1B_2 se interceptam em seus pontos médios.
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, pontos extremos da elipse em relação ao eixo maior e ao eixo menor, respectivamente.

Por meio das medidas indicadas anteriormente, podemos determinar também a excentricidade da elipse, que corresponde ao número dado por $e=c/a$, e como $c<a$, $0<e<1$. A excentricidade é responsável pela forma da elipse, de modo que se *e* está muito próximo de 0, então a elipse se aproxima de uma circunferência.

Além disso, em qualquer elipse é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$, sendo obtida a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo de vértices B_1, C e F_2, por exemplo, conforme a Figura 3.4.

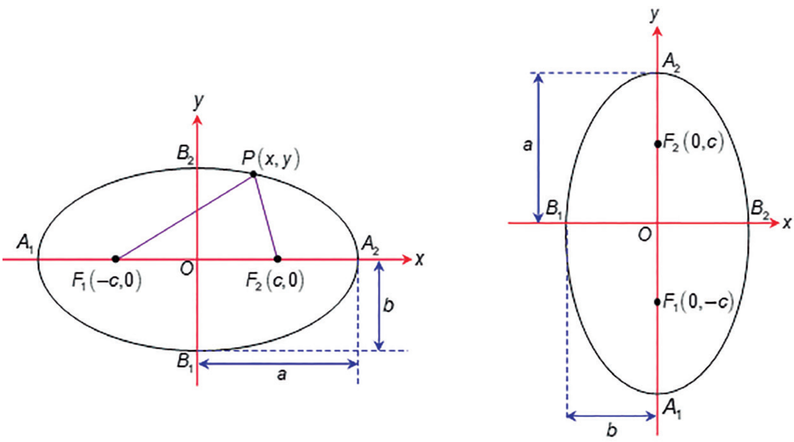
Reflita

Como calculamos a distância entre pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas?

Equação da elipse

A equação da elipse pode ser construída com base na definição, a qual é estruturada a partir da distância entre pontos no plano cartesiano. Nesse processo, consideraremos dois casos, ambos ilustrados na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Elipse centrada na origem



(a) *Eixo maior contido no eixo x* (b) *Eixo maior contido no eixo y*

Fonte: elaborada pela autora.

Caso 1: Elipse centrada na origem com eixo maior contido no eixo *x*

Nesse caso, considere $P(x,y)$ um ponto qualquer sobre a elipse, a qual possui focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, conforme a Figura 3.5a. Pela definição, sabemos que $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$. Assim sendo, ao empregar as coordenadas dos pontos conhecidos, obtemos

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}\,.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se:

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+2cx+c^2=$$
$$=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$

$$\Rightarrow \quad 4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=4a^2-4cx.$$

Dividindo ambos os membros por 4 e elevando-os ao quadrado, obtemos:

$$\Rightarrow \quad a^2\left(x^2+y^2-2cx+c^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Aplicando a propriedade distributiva e somando os termos comuns, segue que

$$\Rightarrow \quad \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Como $a^2=b^2+c^2$, então $a^2-c^2=b^2$ e, assim,

$$\Rightarrow \quad \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \quad \Rightarrow \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior pelo produto a^2b^2, tem-se $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, que corresponde à equação reduzida da elipse centrada na origem e de eixo maior contido no eixo x.

Caso 2: Elipse centrada na origem com eixo maior contido no eixo *y*

Empregando um procedimento análogo ao do caso 1, obtemos a equação reduzida $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ da elipse centrada na origem, com eixo maior contido no eixo *y*, conforme a Figura 3.5b.

Exemplificando

Determine a equação da elipse centrada na origem cujo eixo maior, contido no eixo *y*, tenha comprimento igual a 10 unidades e o eixo menor, contido no eixo *x*, possua comprimento igual a 6 unidades.

Neste caso, sabemos que $2a = 10$, ou $a = 5$, e que $2b = 6$, ou $b = 3$.

Sendo $a^2 = b^2 + c^2$, segue que

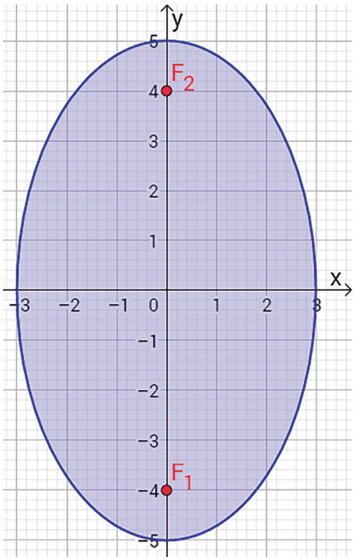
$$5^2 = 3^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4.$$

Desta forma, a equação reduzida da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Além disso, os focos dessa elipse correspondem aos pontos $F_1(0,-4)$ e $F_2(0,4)$, situação ilustrada na Figura 3.6.

Figura 3.6 | Elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



Fonte: elaborada pela autora.

Observe também que a excentricidade dessa elipse é dada por $e = 4/5$.

Faça você mesmo

Qual é a equação da elipse centrada na origem de eixo maior, contido no eixo *x*, com comprimento igual a 20 unidades, e eixo menor, contido no eixo *y*, de comprimento igual a 12 unidades? Quais são as coordenadas de seus focos?

Reflita

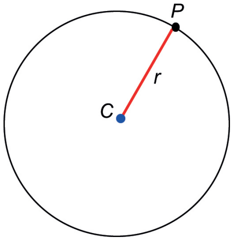
No estudo da elipse, o que ocorreria se os focos F_1 e F_2 fossem pontos coincidentes? Isto é, em vez de tomar dois focos distintos, considerássemos apenas um ponto como foco?

Estudo da circunferência

Quando nos deparamos com uma elipse na qual os focos são coincidentes, ou seja, correspondem a um mesmo ponto, temos a curva cônica chamada de circunferência.

A circunferência pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo é constante, conforme apresentado na Figura 3.7. O ponto fixo *C* é chamado de centro da circunferência, enquanto a distância *r* entre o centro e os pontos da circunferência corresponde ao seu raio.

Figura 3.7 | Circunferência



Fonte: elaborada pela autora.

Sendo $P(x,y)$ um ponto da circunferência e $C(a,b)$ o seu centro, se o raio tem medida *r*, tem-se:

$$d(C,P) = r \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \;\Rightarrow\; (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

a qual corresponde à equação da circunferência.

Assimile

Para uma circunferência centrada na origem do sistema cartesiano, ou seja, no ponto $O(0,0)$, sua equação será dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

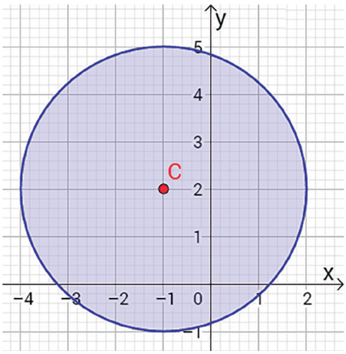
Exemplificando

Qual é a equação da circunferência centrada no ponto $A(-1,2)$ com raio de medida igual a 3 unidades?

A equação da circunferência ilustrada na Figura 3.8 é dada por

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Figura 3.8 | Circunferência de equação $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$



Fonte: elaborada pela autora.

Pesquise mais

No estudo das curvas cônicas, principalmente em relação à elipse, pode ser consultado o seguinte livro:

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003. Disponível no link: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2018.

Também pode ser consultado o capítulo 4 do livro indicado a seguir:

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Sem medo de errar

Para orientar o primeiro grupo de alunos no desenvolvimento do projeto envolvendo a articulação entre Matemática e Física, a primeira tarefa a ser desenvolvida consiste na classificação das cônicas, com base nas seguintes equações gerais:

- I: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$
- II: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$
- III: $3x^2 + 18xy + 3y^2 + 24x - 11 = 0$

Nesse sentido, você deverá orientá-los a, inicialmente, calcular o discriminante associado a cada cônica, classificando-as de acordo com seu sinal, conforme as seguintes informações:

- Para a cônica I, de equação geral
  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$:

temos que $A = 5$, $B = 6$ e $C = 5$. Logo, $\Delta_I = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 36 - 100 = -64 < 0$. Como $\Delta_I < 0$, a cônica I representa uma elipse.

- Para a cônica II, de equação geral
  $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$:

note que $A = 1$, $B = -2$ e $C = 1$. Sendo assim, $\Delta_{II} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$.

E sendo $\Delta_{II} = 0$, então a cônica II pode ser classificada como uma parábola.

- Para a cônica III, de equação geral
  $3x^2 + 18xy + 3y^2 + 24x - 11 = 0$:

sabendo que $A = 3$, $B = 18$ e $C = 3$, temos $\Delta_{III} = 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 324 - 36 = 288 > 0$. Sendo assim, como $\Delta_{III} > 0$, a cônica III corresponde a uma hipérbole.

Na próxima tarefa, os alunos precisam construir a representação, no plano cartesiano, da trajetória da Terra ao redor do Sol, sabendo que é elíptica. Assim, em síntese, os alunos precisarão construir uma elipse com base nas seguintes informações:

- A distância focal da elipse que representa a trajetória da Terra é igual a 10 centímetros.
- A elipse está centrada na origem.
- O eixo maior pertence ao eixo *x*.
- A excentricidade da elipse é igual a 0,1.

Para orientá-los na construção da equação dessa elipse e sua representação no plano, você deverá destacar os elementos que constituem essa cônica, relacionando-os com as informações apresentadas.

Como a elipse está centrada na origem e seu eixo maior pertence ao eixo *x*, então sua equação reduzida assume a forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, de modo que $2a$ representa o comprimento do eixo maior, $2b$, o comprimento do eixo menor, sendo válida a relação $a^2=b^2+c^2$.

Sabendo que a distância focal da elipse é de 10 centímetros, então $2c=10$ e, portanto, $c=5$.

A excentricidade da elipse é dada por $e=c/a$, e como $e=0{,}1$ e $c=5$, segue que

$$0{,}1=\frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad a=50.$$

Além disso, se $a=50$ e $c=5$,

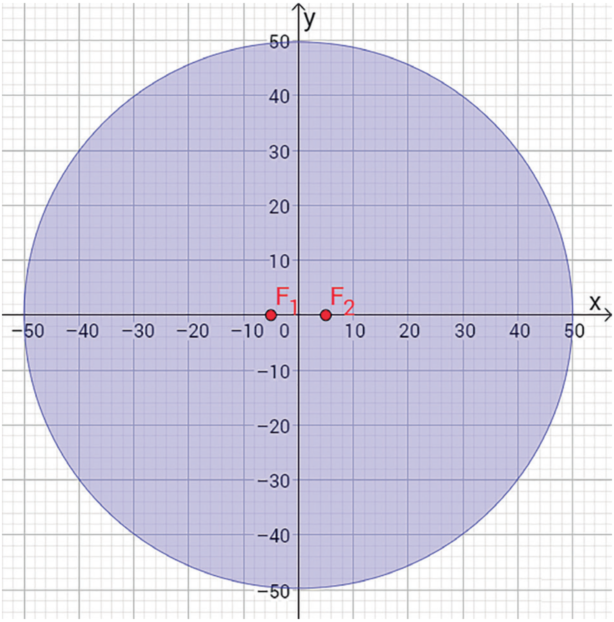
$$a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad 50^2=b^2+5^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=2500-25=2475 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad b=\sqrt{2475}$$

Sendo assim, a equação da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{\sqrt{2475}^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2500}+\frac{y^2}{2475}=1,$$

possuindo focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$. A representação dessa cônica é dada conforme a Figura 3.9.

Figura 3.9 | Elipse que descreve a trajetória da Terra em torno do Sol



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, para que os alunos possam desenvolver a segunda parte da proposta, você deverá orientá-los inicialmente a identificar, com base na excentricidade (e) e na distância focal ($2c$), os comprimentos dos eixos maior ($2a$) e menor ($2b$), pois é com base nesses dados que podemos identificar a equação reduzida da elipse.

Em seguida, de posse da equação reduzida e considerando todas as informações destacadas, em conjunto com as coordenadas dos focos da elipse, os alunos podem utilizar algum software, como o GeoGebra, para auxiliar na construção da sua representação gráfica.

No caso da elipse em estudo, como a excentricidade é muito próxima de zero, podemos observar graficamente que sua representação se aproxima da de uma circunferência, porém, ainda assim, corresponde a uma elipse, centrada na origem e com focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$.

Avançando na prática

Aplicações da elipse na Odontologia

Descrição da situação-problema

Como exemplo de aplicação da elipse, temos os espelhos empregados em determinados dispositivos de iluminação, utilizados em consultórios odontológicos.

Suponha que, na elaboração do projeto de um desses equipamentos, a elipse que representa o espelho pode ser descrita pela equação $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Considerando essas informações, qual é a equação reduzida da elipse em questão? Qual é sua distância focal? Quais são os comprimentos de seus eixos maior e menor? Quais são as coordenadas de seus focos e vértices?

Resolução da situação-problema

Como a elipse em estudo é dada pela equação $16x^2 + 25y^2 = 400$, podemos dividir ambos os membros da equação por 400 e obter

$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{400/16} + \frac{y^2}{400/25} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Logo, a equação reduzida da elipse é dada por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Assim, temos uma elipse centrada na origem, com eixo maior contido no eixo x.

Da equação reduzida, temos que $a = 5$ e $b = 4$, e como $a^2 = b^2 + c^2$,

$$5^2 = 4^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 25 = 16 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Sendo assim, a distância focal da elipse é $2c = 6$, o comprimento do eixo maior é $2a = 10$ e o comprimento do eixo menor é $2b = 8$.

Os focos da elipse têm coordenadas $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, enquanto $A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$, $B_1(0,-4)$ e $B_2(0,4)$ são os vértices da elipse em questão.

Faça valer a pena

1. Considere as cônicas não degeneradas descritas pelas seguintes expressões:

Cônica A: $x^2 - 3y^2 - 12x + 24y = 0$

Cônica B: $y^2 + 18x - 12y + 27 = 0$

Cônica C: $5x^2 + 4y^2 - 20x - 16y - 44 = 0$

Analisando as cônicas indicadas, complete as lacunas das seguintes afirmações, tornando-as informações corretas:

I. A cônica A pode ser classificada como ______________.

II. A cônica B pode ser classificada como ______________.

III. A cônica C pode ser classificada como ______________.

Assinale a alternativa que indica os termos que completam corretamente as lacunas das afirmações apresentadas:

a) I – elipse; II – parábola; III – hipérbole.

b) I – parábola; II – hipérbole; III – parábola.

c) I – hipérbole; II – elipse; III – elipse.

d) I – hipérbole; II – parábola; III – elipse.

e) I – parábola; II – elipse; III – hipérbole.

2. A respeito das elipses, analise as afirmações apresentadas a seguir, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. A elipse descrita por $25x^2 + 4y^2 = 100$ tem como focos os pontos $F_1(0,-2)$ e $F_2(0,2)$.

II. A elipse descrita por $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$ apresenta comprimento do eixo igual ou superior a 6 unidades.

III. A elipse descrita por $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ apresenta distância focal igual a 21 unidades.

Assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V – F – V.

b) V – V – F.

c) V – F – F.

d) F – V – F.

e) F – F – V.

3. Considere as equações reduzidas de elipses indicadas a seguir:

A. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{50}=1$

B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$

C. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}=1$

Sejam também os elementos descritos pelos seguintes itens:

I. Focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, com vértices $A_1(-4,0)$ e $A_2(4,0)$.

II. Focos $F_1(0,-3)$ e $F_2(0,3)$, com excentricidade $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

III. Focos $F_1(0,-5)$ e $F_2(0,5)$, com eixo menor de comprimento igual a 10 unidades.

Associe as elipses (denotadas por A, B e C) com os respectivos elementos (descritos em I, II e III).

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B.

b) I – B; II – A; III – C.

c) I – B; II – C; III – A.

d) I – C; II – A; III – B.

e) I – C; II – B; III – A.

Seção 3.2

Estudo da parábola

Diálogo aberto

Conforme estudado na seção anterior, podemos analisar as interseções de uma superfície cônica com planos para obter as chamadas curvas cônicas, entre as quais temos as elipses, as parábolas e as hipérboles.

Nesta seção, daremos continuidade ao estudo das curvas cônicas, para identificarmos os principais elementos que caracterizam as parábolas, que possuem diversas aplicações na própria Matemática, como a representação gráfica de funções polinomiais de 2º grau, bem como em outros campos, como é o caso do emprego dessa curva cônica como base na fabricação das antenas parabólicas.

Para isso, partindo do contexto no qual você deve ter por função orientar alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, na escola em que você atua, no estudo das aplicações das curvas cônicas na Física, o segundo grupo de alunos possui como tema de estudo as parábolas e precisam investigar as propriedades dessa curva, importantes na fabricação dos faróis dos automóveis.

Ao observar a seção de um farol, é possível verificar que sua representação pode ser aproximada por uma parábola, sendo esse formato adotado devido às propriedades reflexivas associadas.

Assim, na elaboração do material para a apresentação na feira cultural da escola, de modo a explicar as principais propriedades das parábolas associadas à fabricação de um farol automotivo, esse grupo de alunos precisa construir uma representação gráfica de uma parábola, ilustrando a seção de um farol.

Para essa representação, os alunos devem considerar as seguintes informações:

- O eixo da parábola coincide com o eixo x.

- O foco da parábola pertence ao eixo *x* e dista 5 centímetros da origem do sistema, na direção positiva adotada para o eixo *x*.

- A distância entre o foco e o vértice da parábola é igual a 3 centímetros.

Com base nesses dados, que elementos são necessários para a representação gráfica da parábola em questão?

Sua tarefa será construir a parábola citada, destacando seus principais elementos, como sua representação algébrica, por exemplo, para que possa orientar esse grupo de alunos no desenvolvimento da proposta. Para isso, estudaremos a definição de parábola como lugar geométrico, identificaremos seus principais elementos e suas representações algébrica e geométrica, para construir um referencial teórico que nos permita construir a parábola segundo as informações descritas anteriormente.

Não pode faltar

Estudo da parábola

Considere uma superfície cônica, conforme a Figura 3.1 apresentada na seção anterior.

A curva cônica chamada de parábola pode ser obtida quando intersectamos a superfície cônica por um plano paralelo à sua geratriz, conforme a Figura 3.2c destacada na seção anterior.

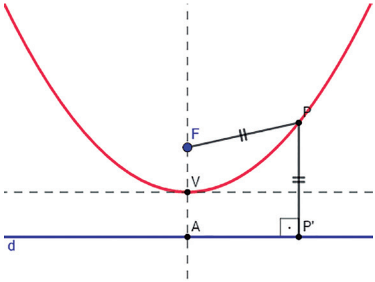
As parábolas possuem diversas aplicações na Matemática, como a representação dos gráficos das funções polinomiais de 2º grau, por exemplo, e também em outras áreas, como o lançamento de projéteis, fenômeno investigado pela Física.

Reflita

Quais seriam outros exemplos da aplicação das parábolas em outros campos do conhecimento?

Podemos definir a parábola como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta fixa, denominada diretriz, ou seja, é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma mesma distância de dois referenciais fixados: um ponto e uma reta. Essa curva é ilustrada pela Figura 3.10.

Figura 3.10 | Parábola



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando a reta *d* como a diretriz da parábola e *F* seu foco, então podemos definir a parábola como o conjunto de todos os pontos *P* do plano, tais que

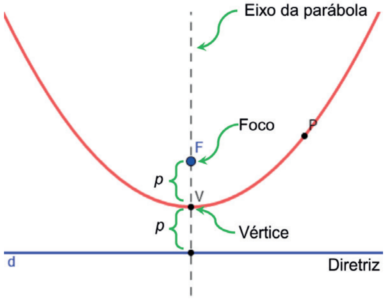
$$d(P,F) = d(P,d).$$

Assim como no caso da elipse, podemos identificar diversos elementos que podem auxiliar na caracterização da parábola.

Elementos da parábola

Considere a parábola representada na Figura 3.11.

Figura 3.11 | Elementos da parábola



Fonte: elaborada pela autora.

Com base na ilustração presente na Figura 3.11, podemos identificar os seguintes elementos:

- Foco: corresponde ao ponto *F*;
- Diretriz: refere-se à reta *d*;

- Eixo: reta que passa por F e é perpendicular à diretriz d;
- Vértice: corresponde ao ponto V de interseção da parábola com seu eixo.

Assimile

A parábola é caracterizada como uma curva aberta, sendo simétrica em relação ao seu eixo.

Além disso, se P corresponde ao ponto de interseção da diretriz com o eixo da parábola, então o vértice V corresponde ao ponto médio do segmento de extremos P e F, isto é, a distância entre o vértice e a diretriz é igual à distância entre o vértice e o foco da parábola.

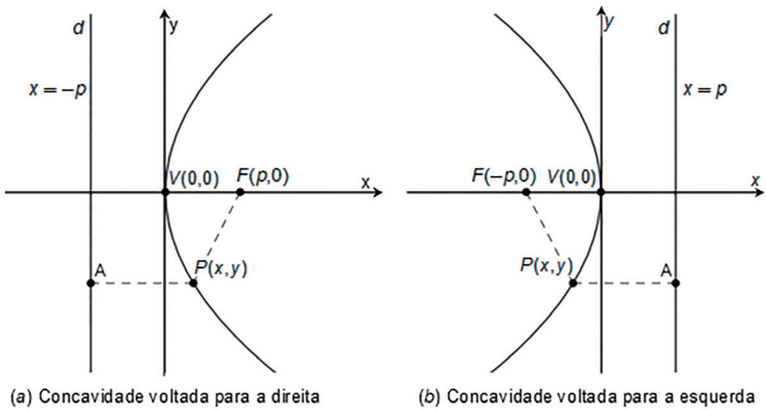
Ao assumir que $d(F,d) = 2p$, temos que a constante p será chamada de parâmetro da parábola e representará a distância entre o foco e o vértice da parábola.

O parâmetro p é fundamental para a representação algébrica da parábola, assunto que será tratado no tópico a seguir.

Equação da parábola

Considere a parábola com vértice coincidindo com a origem do sistema cartesiano, ou seja, $V(0,0)$, de modo que o eixo da parábola coincida com o eixo x, conforme a Figura 3.12.

Figura 3.12 | Parábola de vértice $V(0,0)$ com eixo coincidindo com eixo x



Fonte: elaborada pela autora.

Na Figura 3.12, nós nos deparamos com duas possibilidades: parábola com concavidade voltada para a direita – Figura 3.12a – ou parábola com concavidade voltada para a esquerda – Figura 3.12b. Essa diferenciação se deve às localizações do foco e da diretriz. Para a dedução da equação reduzida, consideraremos o caso ilustrado na Figura 3.12a. Um estudo análogo pode ser desenvolvido para o caso da Figura 3.12b.

Desta forma, considere $F(p,0)$ o foco da parábola e a diretriz d de equação $x=-p$.

Se o ponto $P(x,y)$ pertence à parábola, então suas coordenadas atendem à igualdade

$$d(P,F)=d(P,d).$$

Pelas fórmulas de distância entre pontos e entre ponto e reta, temos:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=|x-(-p)| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2xp+p^2+y^2=x^2+2xp+p^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2=4px$$

a qual corresponde à equação reduzida da parábola ilustrada na Figura 3.12a.

Observação: se $p>0$, a parábola terá a concavidade voltada para a direita e, quando $p<0$, a concavidade estará voltada para a esquerda.

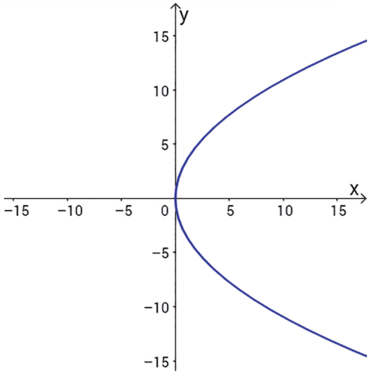
Exemplificando

Identifique a equação reduzida da parábola de vértice $V(0,0)$ e o foco localizado no ponto $F(3,0)$, tendo seu eixo coincidindo com o eixo x do sistema cartesiano.

Se a parábola tem foco $F(3,0)$ e vértice $V(0,0)$, e seu eixo coincide com o eixo x, o valor do parâmetro é dado por $p=3$. Consequentemente, sua diretriz tem equação dada por $x=-3$.

Sabendo que $p = 3$, a equação reduzida da parábola é dada por $y^2 = 12x$, sendo sua representação gráfica dada conforme a Figura 3.13.

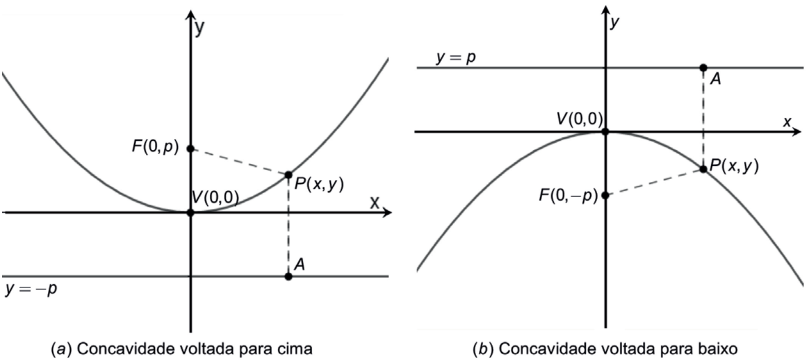
Figura 3.13 | Parábola de equação reduzida $y^2 = 12x$



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos ainda construir parábolas cujo eixo coincide com o eixo *y*, as quais podem ter concavidade voltada para baixo ou para cima, conforme a Figura 3.14.

Figura 3.14 | Parábola de vértice $V(0,0)$ com eixo coincidindo com eixo *y*



Fonte: elaborada pela autora.

No caso da Figura 3.14a, a parábola tem foco de coordenadas $F(0,p)$ e diretriz de equação $y = -p$. A equação reduzida da parábola com essas características será dada por

$$x^2 = 4py.$$

Observação: se $p > 0$, a parábola terá concavidade voltada para cima e, quando $p < 0$, a concavidade estará voltada para baixo.

Por exemplo, no caso de a parábola possuir vértice coincidindo com a origem e de concavidade voltada para cima, sua equação reduzida assumirá a forma $x^2 = 4py$, e sabendo que o ponto $P(-2,4)$ pertence à parábola, segue que

$$(-2)^2 = 4p(4) \quad \Rightarrow \quad 4 = 16p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}.$$

Sendo assim, pode ser descrita pela equação $x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)y$, ou seja, $x^2 = y$.

Assimile

Para determinar a equação reduzida da parábola centrada na origem, precisamos identificar o parâmetro p associado, que pode ser identificado a partir das coordenadas de seu foco ou da equação de sua reta diretriz.

Exemplificando

Determine o foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 = -16y$.

Considerando a forma geral $x^2 = 4py$ para a equação reduzida da parábola, segue que

$$4p = -16 \quad \Rightarrow \quad p = -4.$$

Portanto, a parábola tem foco $F(0,-4)$ e diretriz $y = 4$.

Faça você mesmo

Quais são as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola descrita pela equação reduzida $y^2 = 24x$?

Reflita

Que alterações podem ser identificadas na equação reduzida da parábola cujo vértice não coincide com a origem do sistema cartesiano?

Outras formas de equação da parábola

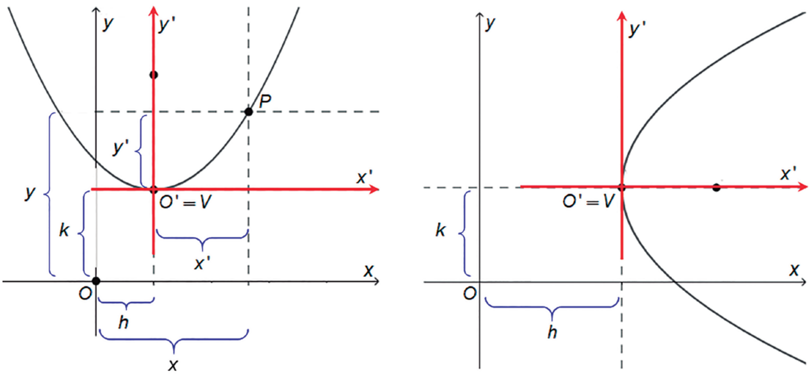
No caso em que o vértice da parábola não coincide com a origem do sistema, precisamos considerar modificações em sua equação reduzida em função da translação de eixos. Nessas situações, construímos um novo sistema $x'O'y'$ pela translação do sistema xOy para um sistema em que a origem O' coincida com o vértice V da parábola.

Considere uma parábola cujo vértice tem coordenadas $V(a,b)$ não nulas.

Quando, por exemplo, o eixo da parábola é paralelo ao eixo y, a equação da parábola será dada por $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, de modo que se $p>0$, a parábola terá concavidade voltada para cima e, quando $p<0$, a concavidade estará voltada para baixo. A Figura 3.15a ilustra a situação em que p é positivo.

Por outro lado, se o eixo da parábola é paralelo ao eixo x, a equação da parábola será dada por $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, de tal forma que se $p>0$, a parábola terá concavidade voltada para a direita e, no caso de $p<0$, a concavidade estará voltada para a esquerda. A Figura 3.15b representa o caso em que p é positivo.

Figura 3.15 | Parábola com vértice $V(h,k) \neq (0,0)$



(*a*) Concavidade voltada para cima

(*b*) Concavidade voltada para a direita

Fonte: elaborada pela autora.

Exemplificando

Determine a equação da parábola cujo vértice tem coordenadas $V(2,-1)$, seu eixo é paralelo ao eixo y e o parâmetro assume valor $p=2$.

Sendo o eixo da parábola paralelo ao eixo y, teremos a seguinte equação:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Considerando $V(2,-1)$ e $p=2$, segue que

$$(x-2)^2 = 4\cdot 2\cdot (y-(-1)).$$

Isto é,

$$(x-2)^2 = 8(y+1),$$

a qual ainda pode ser reescrita como

$$x^2 - 4x - 8y - 4 = 0.$$

sendo denominada **equação geral da parábola**.

Assimile

A equação geral da parábola é uma equação na forma

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{ou} \quad Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

na qual $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Pesquise mais

No estudo das curvas cônicas, pode ser consultado o seguinte livro:

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003. Disponível no link: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2018.

Também pode ser consultada a Seção 4.4 do livro indicado a seguir:

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Sem medo de errar

Na orientação do segundo grupo de alunos no desenvolvimento do projeto envolvendo a articulação entre Matemática e Física, a tarefa que precisa ser desenvolvida corresponde à elaboração do material para a apresentação a respeito das principais propriedades das parábolas associadas à fabricação de um farol automotivo, sendo necessária a construção de uma parábola que possua as seguintes características:

- O eixo da parábola coincide com o eixo x.
- O foco da parábola pertence ao eixo x e dista 5 centímetros da origem do sistema, na direção positiva adotada para o eixo x.
- A distância entre o foco e o vértice da parábola é igual a 3 centímetros.

Da segunda informação apresentada, podemos identificar o foco da parábola como sendo o ponto $F(5,0)$.

Como o eixo da parábola coincide com o eixo x, então temos que o vértice da parábola pertence a esse eixo, assumindo a forma $V(a,0)$. Além disso, a equação da parábola assume a forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

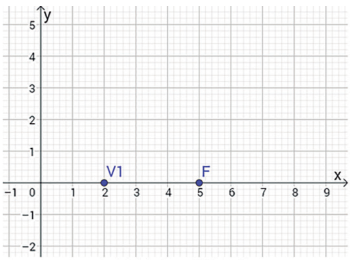
Sabendo que a distância entre o foco e o vértice da parábola é de 3 centímetros, podemos considerar duas situações distintas:

(a) O vértice tem coordenadas $V_1(2,0)$; ou

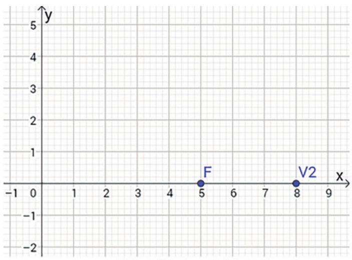
(b) O vértice tem coordenadas $V_2(8,0)$.

Essas situações estão ilustradas na Figura 3.16.

Figura 3.16 | Identificação do vértice da parábola



(a) Vértice $V_1(2,0)$

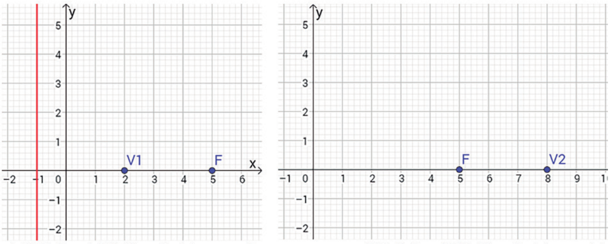


(b) Vértice $V_2(8,0)$

Fonte: elaborada pela autora.

Considerando a situação na qual o vértice é dado por $V_1(2,0)$, temos que a diretriz terá equação $x = -1$, conforme a Figura 3.17a, já que a distância entre a diretriz e o vértice é igual à distância entre o vértice e o foco. Por outro lado, considerando o caso em que o vértice é dado por $V_2(8,0)$, temos que a diretriz terá equação $x = 11$, conforme a Figura 3.17b.

Figura 3.17 | Identificação da diretriz da parábola



(a) Vértice $V_1(2,0)$ e diretriz $x=-1$ (b) Vértice $V_2(8,0)$ e diretriz $x=11$

Fonte: elaborada pela autora.

Na situação na qual $F(5,0)$ e $V_1(2,0)$, a diretriz é dada por $x=-1$; temos que o parâmetro assume valor $p=3$. Considerando essas informações, teremos a equação

$$(y-0)^2 = 4\cdot 3\cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 12(x-2) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 12x - 24,$$

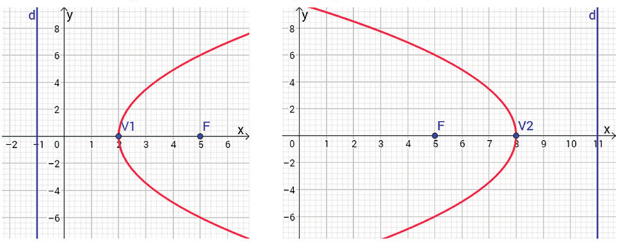
cujo gráfico é dado na Figura 3.18a.

Por outro lado, quando $F(5,0)$ e $V_2(8,0)$, a diretriz é dada por $x=11$; temos que o parâmetro assume valor $p=-3$. Considerando essas informações, teremos a equação

$$(y-0)^2 = 4\cdot(-3)\cdot(x-8) \quad \Rightarrow \quad y^2 = -12(x-8) \quad \Rightarrow \quad y^2 = -12x + 96,$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 3.18b.

Figura 3.18 | Parábolas que representam o problema



(a) Parábola de equação $y^2 = 12x - 24$ (b) Parábola de equação $y^2 = -12x + 96$

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, para esse trabalho, você deverá orientar os alunos a estudarem as duas possibilidades apresentadas, identificando os elementos que caracterizam as parábolas em cada situação, para construírem corretamente a equação reduzida que descreve a curva cônica em questão.

Avançando na prática

Aplicação das parábolas nas antenas parabólicas

Descrição da situação-problema

Uma empresa fabrica antenas parabólicas e, para isso, um grupo de projetistas é responsável pela identificação de todos os elementos que precisarão compor seu projeto, de modo que todas as informações sejam transmitidas corretamente ao setor responsável pela produção.

Na elaboração do projeto de um dos modelos de antena parabólica, uma parte do projeto consiste na construção de uma parábola que, em função dos eixos x e y que representam o plano cartesiano, tem vértice $V(2,1)$ e foco $F(2,5)$. Qual é a equação reduzida que caracteriza a parábola em questão?

Resolução da situação-problema

Sendo conhecidos os pontos $V(2,1)$ e $F(2,5)$, temos uma parábola com eixo paralelo ao eixo y, de concavidade voltada para cima. A equação que representa esse tipo de cônica é dada por

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

A partir da distância entre o foco e o vértice, podemos identificar que $p = 4$. Assim, considerando $V(2,1)$ e $p = 4$, temos

$$(x-2)^2 = 4 \cdot 4 \cdot (y-1) \Rightarrow (x-2)^2 = 16(y-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 = 16y - 16.$$

Logo, a equação reduzida da parábola é dada por

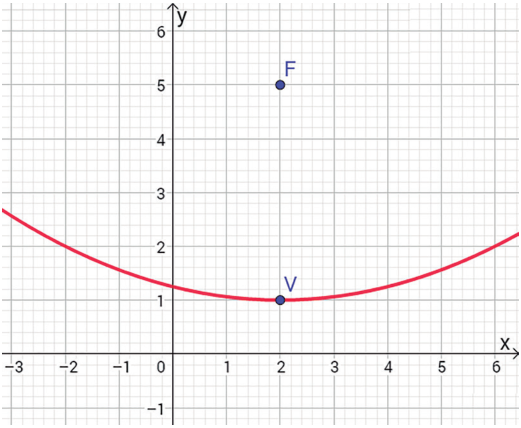
$$(x-2)^2 = 16y - 16$$

e sua equação geral é caracterizada como

$$x^2 - 4x - 16y + 20 = 0$$

sendo representada pela Figura 3.19.

Figura 3.19 | Parábola de equação $x^2 - 4x - 16y + 20 = 0$



Fonte: elaborada pela autora.

Faça valer a pena

1. Um estudante pretende construir a representação algébrica de uma parábola para que, empregando um *software* adequado, possa construir sua representação gráfica.

As informações disponíveis a respeito da parábola em estudo são dadas a seguir:

- A parábola tem seu eixo coincidente com o eixo x.
- A parábola possui concavidade voltada para a esquerda.
- A parábola tem vértice na origem.
- A parábola tem diretriz descrita pela equação $x = 3$.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente a equação da parábola em estudo:

a) $x^2 = -12y$.

b) $x^2 = 12y$.

c) $y^2 = -12x$.

d) $y^2 = 12x$.

e) $y^2 = -12x + 12$.

2. Sejam as parábolas descritas pelas seguintes equações:

A. $y^2 - 8x = 0$

B. $x^2 - 8y = 0$

C. $y^2 + 8x = 0$

Considere também os elementos indicados nos itens a seguir:

I. Foco $F(-2,0)$ e parâmetro $p = -2$.

II. Foco $F(2,0)$ e diretriz $x + 2 = 0$.

III. Foco $F(0,2)$ e parâmetro $p = 2$.

Associe as parábolas denotadas por A, B e C com seus respectivos elementos descritos por I, II e III.

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B.

b) I – B; II – C; III – A.

c) I – B; II – A; III – C.

d) I – C; II – A; III – B.

e) I – C; II – B; III – A.

3. Considere as afirmações apresentadas a seguir a respeito das parábolas, suas representações algébricas e seus principais elementos:

I. A parábola descrita por $x^2 - 4x - y + 4 = 0$ tem vértice de coordenadas $V(2,0)$ e parâmetro $p = \frac{1}{4}$.

II. A parábola descrita por $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ tem foco de coordenadas $F(2,0)$ e vértice dado por $V(2,1)$.

III. A parábola descrita por $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ tem foco de coordenadas $F(0,-3)$ e parâmetro $p = 1$.

IV. A parábola descrita por $y^2 - x - 4y = 0$ tem foco de coordenadas $F(-4,2)$ e diretriz descrita pela equação $y = \frac{1}{4}$.

Em relação às afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

b) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

c) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

d) Apenas as afirmações II e IV estão corretas.

e) Apenas as afirmações I, II e IV estão corretas.

Seção 3.3

Estudo da hipérbole

Diálogo aberto

Dando continuidade ao estudo das curvas cônicas, nesta seção, o objetivo é investigar as hipérboles, identificando seus principais elementos e representando-as algebricamente.

Para isso, no contexto de orientação dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, na escola em que você atua, o terceiro grupo de alunos sob sua supervisão estudará as propriedades das hipérboles, associando-as com determinados tipos de telescópios, como é o caso dos telescópios refletores. Nesses telescópios, observa-se a presença de um espelho em formato de hipérbole, o qual possibilita ao observador analisar as imagens obtidas devido à posição dos focos da hipérbole que representa o espelho.

Em sua apresentação, os alunos precisarão explicar a respeito da propriedade das hipérboles, associada à reflexão. Para isso, terão de construir uma representação gráfica de uma hipérbole no plano cartesiano, com base nas seguintes informações:

- Os focos da hipérbole pertencem ao eixo y.
- A distância focal da hipérbole é de 12 unidades.
- A hipérbole está centrada na origem.
- A excentricidade da hipérbole é igual a 1,2.

Para que você possa orientar os alunos nessa proposta, a sua tarefa é construir as representações algébrica e geométrica da hipérbole em questão, com base nas informações apresentadas, elaborando um roteiro com a indicação dos principais passos necessários para o desenvolvimento da tarefa proposta. Prossiga em seus estudos, consultando os temas abordados no tópico seguinte, para cumprir adequadamente a proposta desta seção.

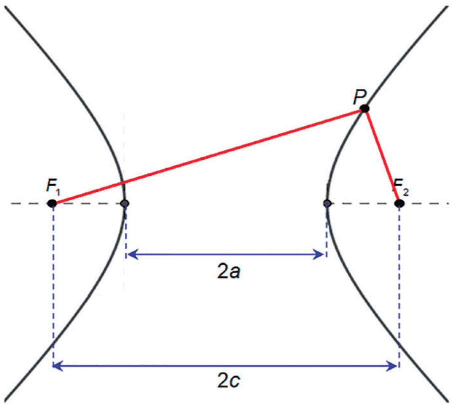
Não pode faltar

Estudo da hipérbole

Seja uma superfície cônica, conforme a representação indicada na Figura 3.1. Quando intersectamos as duas folhas dessa superfície por um plano paralelo ao seu eixo, obtemos uma curva cônica denominada hipérbole. Assim, entre as curvas cônicas não degeneradas estudadas, apenas a hipérbole é construída da interseção de plano com as duas folhas da superfície cônica, as demais consideram uma única folha. Desta forma, podemos identificar que essa curva é composta de duas partes, cada qual derivada de uma das folhas da superfície cônica.

Podemos definir a hipérbole como o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo valor absoluto (ou módulo) da diferença entre a distância a dois pontos fixos desse plano é constante, de acordo com a ilustração apresentada na Figura 3.20.

Figura 3.20 | Hipérbole



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando o conceito de distância entre pontos, estudada anteriormente, sejam dois pontos distintos F_1 e F_2 do plano, de modo que $d(F_1, F_2) = 2c$, além de um número real *a* que satisfaz $2a < 2c$. O conjunto formado por todos os pontos *P* do plano que satisfazem $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, ou, ainda, $\left\| \overrightarrow{PF_1} \right| - \left| \overrightarrow{PF_2} \right\| = 2a$, é denominado hipérbole.

Assimile

As **hipérboles** são caracterizadas como curvas abertas compostas de dois ramos, os quais são derivados das interseções do plano com cada uma das folhas da superfície cônica.

Partindo do posicionamento da hipérbole conforme a Figura 3.20, temos que um ponto P pertencerá a ela no caso de $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$, isto é, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=\pm 2a$. Se P estiver no ramo da direita, a diferença entre as distâncias será igual a $+2a$, e, no caso de P pertencer ao ramo da esquerda, a diferença será caracterizada por $-2a$.

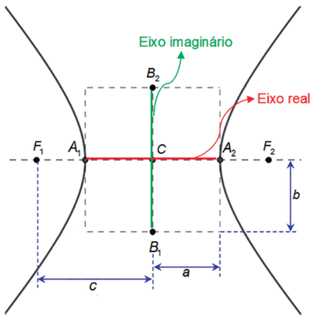
Reflita

Que aplicações da hipérbole podemos destacar, além da fabricação de espelhos refletores, conforme a indicação anterior?

Elementos da hipérbole

Seja a hipérbole ilustrada na Figura 3.21.

Figura 3.21 | Elementos da hipérbole



Fonte: elaborada pela autora.

Diversos elementos podem ser identificados na representação presente na Figura 3.21, indicados a seguir:

- Focos: correspondem aos pontos F_1 e F_2.
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2, com extremos sendo os focos da elipse.

- Vértices: são os pontos A_1 e A_2 obtidos pela interseção da hipérbole com a reta construída contendo seus focos F_1 e F_2.

- Eixo real ou transverso: corresponde ao segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

- Eixo imaginário ou conjugado: refere-se ao segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, o qual é perpendicular ao eixo real e de tal forma que A_1A_2 e B_1B_2 se interceptam em seus pontos médios.

Assimile

O valor de b é obtido por meio da seguinte relação

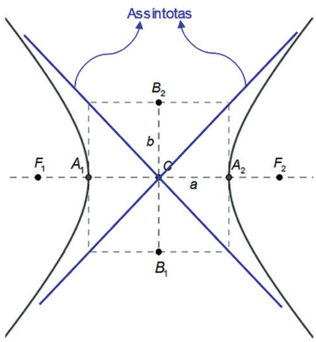
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

identificada considerando-se a aplicação do Teorema de Pitágoras, por exemplo, ao triângulo de vértices C, A_2 e B_2, e sabendo que $2c$ corresponde à distância focal e que $2a$ refere-se ao comprimento do eixo real.

Note que a hipérbole é uma curva simétrica em relação à reta que contém seu eixo real, à reta que contém seu eixo imaginário e, também, em relação ao seu centro. Pela simetria, é possível verificar que $d(A_1,F_1) = d(A_2,F_2)$ e, em conjunto com a definição, justificar que $d(A_1,A_2) = 2a$.

Sendo conhecidos os valores a e b, podemos construir um retângulo, chamado de retângulo fundamental, com comprimento dos lados iguais $2a$ e $2b$, o qual contém os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, assim como é destacado na Figura 3.22.

Figura 3.22 | Retângulo fundamental da hipérbole e assíntotas



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos construir retas que contenham as diagonais do retângulo fundamental, obtendo, desta forma, as retas assíntotas da hipérbole, conforme destacado na Figura 3.22.

Por meio das medidas indicadas anteriormente, também podemos identificar a excentricidade da hipérbole, a qual corresponde ao número $e = c/a$, e sendo $a < c$, segue que $e > 1$. Ao realizar um estudo com base nas representações gráficas, podemos observar que a excentricidade está relacionada com a abertura dos ramos da hipérbole.

Reflita

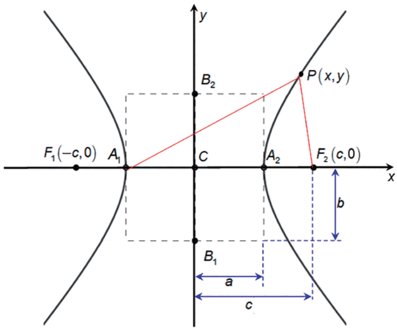
Que elementos da hipérbole precisam ser identificados para que possamos construir suas equações reduzidas, ou seja, suas representações algébricas?

Equação da hipérbole

Na construção da equação da hipérbole, podemos considerar alguns casos particulares.

Seja a hipérbole construída com centro na origem, de tal forma que seu eixo real esteja contido no eixo *x*, veja a situação ilustrada na Figura 3.23.

Figura 3.23 | Hipérbole centrada na origem com eixo real contido no eixo *x*



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando $P(x,y)$ um ponto qualquer dessa hipérbole, a qual possui como focos os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, temos por definição que

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = \pm 2a$$

Ou, ainda, tomando as coordenadas dos pontos envolvidos e a expressão que fornece a distância entre dois pontos,

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e efetuando as devidas simplificações, é possível verificar que

$$a^2\left(c^2-a^2\right)=x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2.$$

E como $b^2=c^2-a^2$, segue que $a^2b^2=x^2b^2-a^2y^2$. Dividindo ambos os membros da igualdade por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que corresponde à equação reduzida da hipérbole.

Neste caso, as assíntotas são representadas pelas equações

$$r_1: y=-\frac{b}{a}x; \quad r_2: y=\frac{b}{a}x.$$

Assimile

A hipérbole centrada na origem com eixo real contido no eixo *x* tem equação reduzida dada por

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

e assíntotas de equações $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Exemplificando

Determine a equação reduzida da elipse centrada na origem cujo eixo real está contido no eixo *x*, possuindo distância focal igual a 10 unidades e comprimento do eixo real de 8 unidades.

Considerando o posicionamento da hipérbole em questão, sabemos que sua equação reduzida assume a forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Das medidas descritas, temos que

- Distância focal: $2c = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 5$.
- Comprimento do eixo real: $2a = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 4$.

Além disso, como a relação $b^2 = c^2 - a^2$ é válida, obtemos

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$$

Sendo assim, a equação reduzida da hipérbole é dada por

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

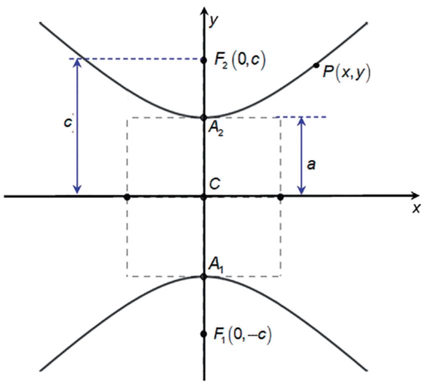
Faça você mesmo

Determine as coordenadas dos focos e dos vértices, bem como as equações das assíntotas, da hipérbole de equação reduzida dada por

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Podemos, ainda, construir hipérboles com focos pertencentes ao eixo y, de acordo com a situação ilustrada na Figura 3.24.

Figura 3.24 | Hipérbole centrada na origem com eixo real contido no eixo y



Fonte: elaborada pela autora.

Para a hipérbole de focos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, cujo eixo real está contido no eixo *y*, conforme a Figura 3.24, sua equação reduzida é da forma

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

com assíntotas de equações

$$r_1: y=-\frac{a}{b}x; \quad r_2: y=\frac{a}{b}x.$$

Exemplificando

Determine as coordenadas dos focos e vértices da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{81}=1.$$

Identifique também as equações das assíntotas e a excentricidade da cônica.

Da equação reduzida, podemos observar que a hipérbole está centrada na origem e seu eixo real está contido no eixo *y*. Além disso, podemos identificar que

$$a^2=144 \quad \Rightarrow \quad a=12$$

$$b^2=81 \quad \Rightarrow \quad b=9.$$

Como a relação $b^2=c^2-a^2$ é válida, isto é, $c^2=a^2+b^2$, segue que

$$c^2=144+81=225 \quad \Rightarrow \quad c=15.$$

Sendo assim, os focos da hipérbole são dados por $F_1(0,-15)$ e $F_2(0,15)$, enquanto os vértices têm coordenadas $A_1(0,-12)$ e $A_2(0,12)$.

As assíntotas têm equações $y=-\frac{4}{3}x$ e $y=\frac{4}{3}x$ e a excentricidade é

$$e=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}.$$

Faça você mesmo

Qual é a equação reduzida da elipse centrada na origem cujo eixo real está contido no eixo *y*, possui distância focal igual a 10 unidades e comprimento do eixo real de 6 unidades?

Outras formas da hipérbole

Considere agora uma hipérbole de centro no ponto $C(h,k)$, diferente da origem $(0,0)$, de modo que os eixos da hipérbole sejam paralelos aos eixos coordenados.

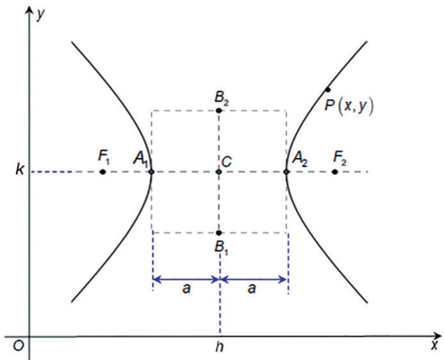
Se o eixo real for paralelo ao eixo *x*, conforme a Figura 3.25, a equação reduzida será dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

De modo análogo, no caso de o eixo real ser paralelo ao eixo *y*, a equação reduzida assumirá a forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Figura 3.25 | Hipérbole com centro em $C(h,k)$ diferente da origem $(0,0)$



Fonte: elaborada pela autora.

Pesquise mais

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003. Disponível no link: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2018.

Também pode ser consultada a Seção 4.5 do livro indicado a seguir:

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Sem medo de errar

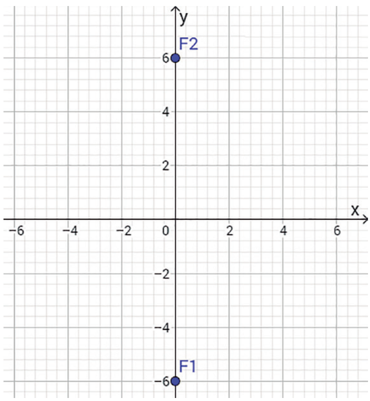
Na orientação do terceiro grupo de alunos sob sua supervisão, o qual estudará as propriedades das hipérboles associadas a determinados tipos de telescópios, os alunos precisarão construir uma representação gráfica de uma hipérbole no plano cartesiano, com base nas seguintes informações:

- Os focos da hipérbole pertencem ao eixo *y*.
- A distância focal da hipérbole é de 12 unidades.
- A hipérbole está centrada na origem.
- A excentricidade da hipérbole é igual a 1,2.

Da terceira informação apresentada, podemos identificar o centro da parábola como sendo o ponto $C(0,0)$.

Como os focos da hipérbole pertencem ao eixo *y* e a distância focal é de 12 unidades, os focos da hipérbole têm coordenadas $F_1(0,-6)$ e $F_2(0,6)$, elementos ilustrados na Figura 3.26.

Figura 3.26 | Identificação dos focos da hipérbole



Fonte: elaborada pela autora.

Além disso, se a hipérbole está centrada na origem, com os focos pertencentes ao eixo *y*, então temos a situação de uma hipérbole cujo eixo real está contido no eixo y, possuindo equação reduzida na forma

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Como a excentricidade da hipérbole é igual a 1,2, segue que

$$e=\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad 1{,}2=\frac{6}{a} \quad \Rightarrow \quad a=5.$$

Além disso, sendo válida a relação $b^2=c^2-a^2$, obtemos:

$$b^2=36-25=11 \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{11}.$$

Logo, temos as seguintes informações:

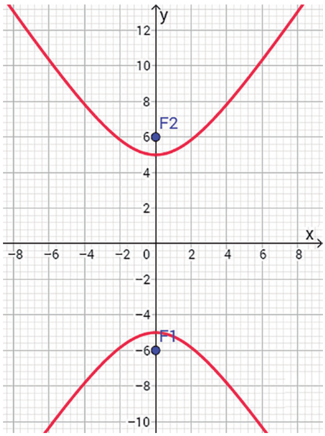
- Centro: $C(0,0)$;
- Focos: $F_1(0,-6)$ e $F_2(0,6)$;
- Vértices: $A_1(0,-5)$ e $A_2(0,5)$;
- $a=5$, $b=\sqrt{11}$ e $c=6$;
- Comprimento do eixo real: $2a=10$ unidades.

Desta forma, a hipérbole pode ser representada pela seguinte equação reduzida

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$$

e cuja representação gráfica é dada conforme a Figura 3.27.

Figura 3.27 | Hipérbole de equação $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, para esse trabalho, podemos organizar o seguinte roteiro, para melhor orientar os alunos na construção da hipérbole descrita inicialmente:

- Identificação do posicionamento da hipérbole em relação ao seu eixo real, com base na localização de seu centro e foco;
- Determinação dos valores assumidos por a, b e c, com base na distância focal e na excentricidade da hipérbole;
- Construção da equação reduzida da hipérbole;
- Emprego de software ou técnicas de desenho geométrico na representação gráfica da hipérbole, com base em sua equação reduzida.

Sendo assim, com esse roteiro, é possível orientar adequadamente os alunos para realizarem as construções corretamente, cumprindo, com êxito, a tarefa proposta.

Avançando na prática

Investigação das equações gerais das hipérboles

Descrição da situação-problema

Em algumas situações, não conhecemos as equações reduzidas das hipérboles, mas, sim, suas equações gerais. Para obter informações em relação a focos, vértices e distâncias focais, precisamos, inicialmente, converter a equação em sua forma reduzida, comparando-a com as expressões gerais conhecidas.

Seja a hipérbole descrita pela equação geral

$$81x^2 - 63y^2 + 5103 = 0,$$

com base nas informações apresentadas, identifique a equação reduzida da hipérbole, as coordenadas de seus focos e vértices, bem como as equações de suas assíntotas.

Resolução da situação-problema

Podemos reescrever a equação geral $81x^2 - 63y^2 + 5103 = 0$ da seguinte forma:

$$63y^2 - 81x^2 = 5103$$

Dividindo ambos os membros por 5103, obtemos:

$$\frac{63y^2}{5103} - \frac{81x^2}{5103} = \frac{5103}{5103} \Rightarrow \frac{y^2}{5103/63} - \frac{x^2}{5103/81} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{63} = 1.$$

Sendo assim, temos uma hipérbole centrada na origem, com eixo real contido no eixo y. Da equação reduzida, podemos identificar

$$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$

$$b^2 = 63 \Rightarrow b = \sqrt{63}.$$

Para identificar a distância focal, podemos empregar a expressão $b^2 = c^2 - a^2$, ou sua forma equivalente $c^2 = a^2 + b^2$, obtendo

$$c^2 = 81 + 63 = 144 \Rightarrow c = 12.$$

Logo, a equação reduzida da hipérbole é dada por

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{63} = 1.$$

Seus focos têm coordenadas $F_1(0,-12)$ e $F_2(0,12)$ e seus vértices são dados por $A_1(0,-9)$ e $A_2(0,9)$. As equações das assíntotas são dadas por:

$$y = -\frac{9}{\sqrt{63}}x \Rightarrow y = -\frac{9}{3\sqrt{7}}x \Rightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x$$

$$y = \frac{9}{\sqrt{63}}x \Rightarrow y = \frac{9}{3\sqrt{7}}x \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{7}}{7}x.$$

Note que podemos representar as equações das cônicas nas formas geral ou reduzida, no entanto, pela forma reduzida, podemos identificar vários elementos de forma direta, como o posicionamento, a localização dos vértices, entre outras. Assim, é importante conhecer as diferentes formas de representação, além dos métodos de conversão entre estas, auxiliando na interpretação e compreensão dos fenômenos que podem ser descritos a partir das curvas cônicas.

Faça valer a pena

1. Um projetista precisa construir a representação geométrica de uma hipérbole, sabendo que é caracterizada pelos seguintes elementos:

- A hipérbole está centrada na origem.
- Os focos da hipérbole pertencem ao eixo x, de modo que a distância focal é de 450 unidades.
- A excentricidade da hipérbole assume o valor 1,25.

Para construir a representação geométrica da cônica descrita, o projetista precisa identificar, inicialmente, qual é sua equação reduzida.

Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que indica corretamente os valores assumidos pelas constantes *a* e *b* que caracterizam a curva em estudo, as quais estão relacionadas, respectivamente, aos eixos real e imaginário:

a) $a = 225$ e $b = 180$.
b) $a = 180$ e $b = 225$.
c) $a = 135$ e $b = 180$.
d) $a = 135$ e $b = 225$.
e) $a = 180$ e $b = 135$.

2. Considere a curva cônica descrita pela seguinte equação geral:

$$9y^2 - 4x^2 - 36 = 0.$$

Ao analisar essa curva, um estudante classificou-a como uma hipérbole, devido às suas características. Após esse estudo, a respeito da hipérbole considerada, o estudante apresentou as seguintes afirmações:

I. A distância focal da hipérbole tem comprimento igual a 10 unidades.
II. Os focos da hipérbole têm coordenadas $F_1(0,-2)$ e $F_2(0,2)$.
III. Os vértices da hipérbole têm coordenadas $A_1(0,-2)$ e $A_2(0,2)$.

Qual das seguintes alternativas indica corretamente, entre as afirmações apresentadas pelo estudante, apenas a(s) correta(s)?

a) Apenas a afirmação II está correta.
b) Apenas a afirmação III está correta.
c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
d) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
e) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

3. Analise as afirmações apresentadas a seguir, classificando-as em verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. A hipérbole de equação geral $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ tem focos com coordenadas $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$, enquanto seus vértices são dados por $A_1(-3,0)$ e $A_2(3,0)$.

II. A hipérbole de equação geral $7y^2 - 9x^2 - 252 = 0$ tem vértices de coordenadas $A_1(0,-6)$ e $A_2(0,6)$, enquanto suas assíntotas têm expressões $y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x$ e $y = \frac{3\sqrt{7}}{7}x$.

III. A hipérbole de equação geral $13x^2 - 36y^2 - 468 = 0$ tem focos com coordenadas $F_1(0,-6)$ e $F_2(0,6)$, enquanto suas assíntotas têm expressões $y = -\frac{7}{6}x$ e $y = \frac{7}{6}x$.

Assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V – F – V.

b) V – F – F.

c) V – V – F.

d) F – F – V.

e) F – V – F.

Referências

BORIN JUNIOR, A. M. S. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 2014.

BOULOS, P. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

FERNANDES, L. F. D. **Geometria Analítica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

MACHADO, M. T. G. **Parábolas – As curvas preciosas.** Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mirtes_tamy_gomes_machado.pdf>. Acesso em: 7 jan. 2018.

SANTOS, F.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: UFPR, 2015.

______________. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Unificado, 2003.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Quádricas

Convite ao estudo

Na Unidade 3, foi discutido a respeito das curvas cônicas, que são curvas planas obtidas pela interseção de um cone reto de duas folhas com planos de diferentes inclinações.

Além dessas curvas planas, podem ser estudadas superfícies, as quais são tridimensionais e podem ser associadas às cônicas. Estas são chamadas de **quádricas** e podem ser empregadas, entre outras situações, na representação de construções e objetos presentes em nosso cotidiano. Por isso, é importante compreender as representações algébricas das quádricas, de modo que possamos interpretar adequadamente esse tipo de problema.

Buscando observar a aplicação das quádricas em grandes projetos arquitetônicos para esta unidade, suponha que você foi contratado por um escritório de Engenharia Civil e Arquitetura e Urbanismo para assumir a função de consultor com o objetivo de orientar um grupo de estagiários com estudos que contribuirão com a elaboração de futuros projetos arquitetônicos.

O gerente de projetos do escritório solicitou que você investigasse algumas estruturas em particular, identificando seus principais elementos e representações, para que pudesse auxiliar o grupo de estagiários das áreas de Engenharia Civil e de Arquitetura e Urbanismo a compreender as representações tridimensionais dessas estruturas, tendo em vista incentivá-los no desenvolvimento de novos designs para os projetos arquitetônicos pelos quais o escritório é responsável.

Desta forma, sua tarefa será organizada de acordo com o formato das estruturas em estudo, envolvendo a análise de determinadas obras arquitetônicas presentes nas mais diversas regiões do mundo, com o objetivo de associá-las com as superfícies denominadas quádricas. Assim, em cada situação, você deverá analisar as estruturas indicadas, observando seus elementos principais para possibilitar a construção de roteiros de estudos que possam auxiliar os estagiários.

Quais são as principais superfícies quádricas? Que tipos de representações podem ser empregados no estudo dessas figuras tridimensionais? Que relações podem ser estabelecidas entre as diferentes categorias de quádricas? Essas são questões que orientarão os estudos ao longo deste capítulo, no qual discutiremos a respeito das quádricas e suas principais categorias – elipsoides, paraboloides e hiperboloides –, bem como a respeito das superfícies esféricas, cilíndricas e cônicas.

Seção 4.1

Esferas e elipsoides

Diálogo aberto

Para dar início aos estudos a respeito das superfícies quádricas, investigaremos as propriedades, principalmente dos elipsoides e das superfícies esféricas. Nesse sentido, a sua primeira tarefa será investigar uma construção localizada na China, associando-a com os formatos esférico e elipsoidal. Para as obras indicadas, você deverá destacar seus principais elementos, construindo representações algébricas e geométricas adequadas.

O *National Centre for the Performing Arts* (Centro Nacional de Artes Cênicas ou Grande Teatro Nacional), localizado em Beijing, na China, possui uma estrutura em formato de elipsoide, de modo que suas dimensões aproximadas são dadas como: 212 metros na direção Leste-Oeste, 144 metros na direção Norte-Sul, altura total de 80 metros (considerando inclusive a parte localizada no subsolo). Essa estrutura é apresentada na Figura 4.1.

Figura 4.1 | Centro Nacional de Artes Cênicas, Beijing – China

Fonte: Láscar, J. **Lascar National Centre for the Performing Arts (The Egg)**, 2008. Licenciado sob CC BY 2.0, via Wikimedia Commons. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lascar_National_Centre_for_the_Performing_Arts_(The_Egg)_(4474852849).jpg>. Acesso em: 22 fev. 2018.

Suponha que, ao posicionar essa superfície no espaço cartesiano, podemos construí-la centrada na origem. Considerando essas informações, como podemos representar algebricamente essa superfície?

Assim, para executar essa tarefa, você deve construir uma equação que represente o elipsoide em questão, considerando as informações apresentadas para possibilitar sua representação gráfica no espaço cartesiano. Qual é a interseção dessa superfície com os planos coordenados (*xy*, *xz* e *yz*)? Que diferenças poderiam ser observadas se, em vez de o formato elipsoidal, o teatro assumisse um formato esférico?

Proponha soluções para as questões apresentadas, considerando as principais características dos elipsoides e das esferas.

Não pode faltar

Superfícies quádricas

No estudo das superfícies quádricas, precisamos considerar as propriedades do sistema cartesiano ortogonal tridimensional, ou seja, do espaço cartesiano.

Podemos representar uma superfície quádrica ou simplesmente quádrica a partir da seguinte equação geral de 2º grau, em relação às variáveis *x*, *y* e *z*:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0,$$

na qual ao menos um dos coeficientes **a**, *b*, *c*, *d*, *e* ou *f* é não nulo.

Ao intersectarmos uma superfície quádrica pelos planos coordenados ou planos paralelos a eles, podemos obter como resultado curvas cônicas chamadas de **traço da superfície no plano**.

Para que possamos analisar as principais categorias de quádricas, é fundamental analisarmos como são construídas as superfícies de revolução, pelo fato de as principais quádricas serem geradas a partir desse processo.

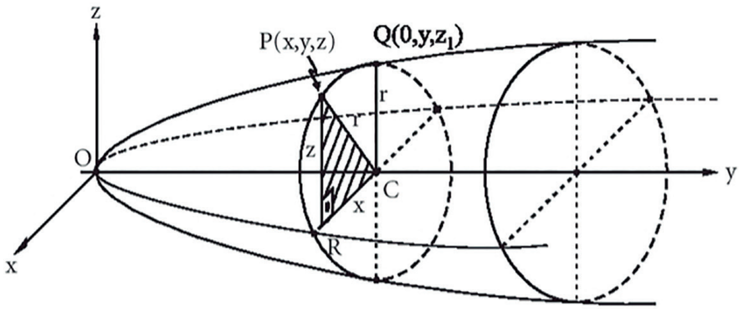
Superfície de revolução

Uma **superfície de revolução** corresponde à superfície gerada pela rotação (completa, de 360°) de uma curva plana denominada

geratriz, em torno de uma reta, chamada de **eixo** e localizada no mesmo plano da curva. Desta forma, o traço da superfície em um plano perpendicular ao eixo corresponde a uma circunferência e sua equação pode ser obtida de acordo com a equação da geratriz.

Um exemplo de superfície de revolução corresponde ao sólido obtido pela rotação da parábola $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ em torno do eixo y, conforme ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 | Exemplo de superfície de revolução



Fonte: Winterle (2014, p. 224).

Reflita

Quais seriam os formatos das superfícies de revolução construídas, considerando as curvas cônicas como geratrizes e tomando eixos posicionados convenientemente no plano?

Dentre as principais quádricas, podemos estudar os elipsoides, os hiperboloides, os paraboloides, bem como as superfícies esféricas, cônicas e cilíndricas.

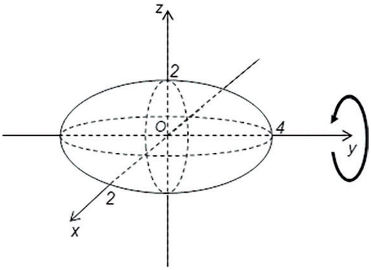
Elipsoides

Os **elipsoides** correspondem a superfícies quádricas caracterizadas pelo fato de que as interseções com planos paralelos aos planos coordenados são dadas por elipses, pontos ou conjuntos vazios. Alguns elipsoides podem ser gerados pela rotação de elipses em torno de seus eixos.

Exemplificando

Seja a elipse de equação $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ construída no plano yz $(x=0)$. Podemos rotacionar essa elipse em torno do eixo y, para obter a superfície descrita na Figura 4.3.

Figura 4.3 | Elipsoide de revolução



Fonte: elaborada pelo autor.

A superfície obtida corresponde ao elipsoide de equação:

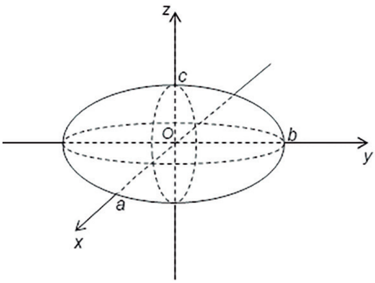
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

O elipsoide corresponde à superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

na qual a, b e c são números reais positivos e representam as medidas dos semieixos do elipsoide, conforme a Figura 4.4. Essa equação é denominada **forma canônica do elipsoide**.

Figura 4.4 | Elipsoide centrado na origem



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso da Figura 4.4, temos um elipsoide centrado na origem $O(0,0,0)$ com os semieixos sendo caracterizados pelos segmentos que unem o centro da superfície aos seus pontos de interseção com os eixos coordenados (*x*, *y* e *z*). Além disso, podemos identificar traços conforme as informações presentes no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 | Traços de um elipsoide centrado na origem

Interseção com o plano	Equação do traço obtido	Tipo de traço obtido
Xy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad z=0$	Elipse
Xz	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad y=0$	Elipse
Yz	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad x=0$	Elipse

Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos identificar também os pontos $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ e $(0,0,\pm c)$, os quais são soluções da forma canônica do elipsoide.

Observação: se pelo menos dois dos valores *a*, *b* e *c* são iguais, então o elipsoide é de revolução, ou seja, é obtido pela rotação de elipses em torno de eixos convenientes.

Exemplificando

Seja o elipsoide descrito pela equação:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1.$$

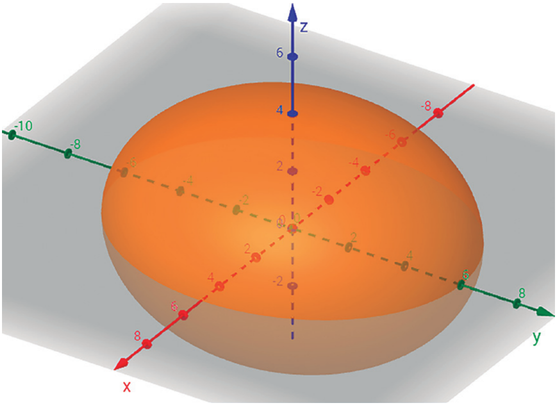
A partir da equação geral apresentada, podemos identificar os seguintes elementos:

- Centro: $C(0,0,0)$;
- Semieixos: $a=5$, $b=6$ e $c=4$ (referentes, respectivamente, aos eixos *x*, *y* e *z*);

- Traços:
  - Em relação ao plano *xy*: elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} = 1$;
  - Em relação ao plano *xz*: elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1$;
  - Em relação ao plano *yz*: elipse $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

A representação gráfica do elipsoide é dada pela Figura 4.5.

Figura 4.5 | Elipsoide de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{16} = 1$



Fonte: elaborada pela autora.

Faça você mesmo

Considere um elipsoide centrado na origem de tal forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- O traço do elipsoide em relação ao plano *xy* é descrito pela elipse de eixo maior, com comprimento de 10 unidades e eixo menor de comprimento de 8 unidades.
- O traço do elipsoide em relação ao plano *yz* é descrito pela elipse de eixo maior, com comprimento de 10 unidades e eixo menor de comprimento de 6 unidades.

Qual é a forma canônica que representa o elipsoide em questão? Construa um esboço da superfície em questão, indicando os traços correspondentes aos planos *xy* e *yz*.

Intersectando um elipsoide por planos $x = k$, $y = k$ ou $z = k$, com k constante, ou seja, por planos paralelos aos planos coordenados, podemos obter elipses, pontos ou conjuntos vazios como sendo as interseções.

Assimile

Assim como podemos nos deparar, no plano, com elipses não centradas na origem; este fato também pode ser observado em relação aos elipsoides.

Se um elipsoide possuir um centro coincidindo com um ponto $C(h,k,l)$ e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, então sua equação assumirá a forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1,$$

obtida pela translação de eixos.

Reflita

O que ocorre quando um elipsoide centrado na origem possui as constantes a, b e c assumindo mesmos valores, isto é, $a = b = c$?

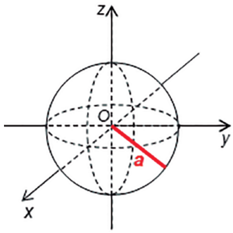
Superfície esférica

Quando $a = b = c$, da forma canônica do elipsoide centrado na origem, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

que corresponde à equação característica de uma superfície esférica, ou esfera, de centro $O(0,0,0)$ e raio a, conforme mostra a Figura 4.6.

Figura 4.6 | Esfera centrada na origem de raio *a*



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos, ainda, caracterizar uma esfera como o lugar geométrico dos pontos do espaço cartesiano cuja distância a um ponto fixo, ou seja, ao centro, é constante.

Assim como observado no estudo dos elipsoides, podemos construir esferas cujos centros não coincidem com a origem do espaço cartesiano. Se o centro de uma esfera de raio *a* coincidir com o ponto $C(h,k,l)$, sua equação característica assumirá a forma:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=a^2.$$

Exemplificando

Determine as equações que representam as seguintes superfícies esféricas:

(a) Centro $C(0,0,0)$ e raio $r=4$.

Da equação característica em sua forma geral, obtemos:

$$x^2+y^2+z^2=4^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2=16.$$

Note que os pontos $A(4,0,0)$ e $B\left(2\sqrt{2},\ 2,-2\right)$ pertencem a essa superfície, pois suas coordenadas satisfazem a equação característica, conforme evidenciado no que segue:

$$4^2+0^2+0^2=16;$$

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2+(-2)^2=8+4+4=16.$$

A representação da superfície, com os pontos indicados, é apresentada na Figura 4.7(a).

(b) Centro $C(-1,\ 0,\ 2)$ e raio $r=3$.

Pela equação característica em sua forma geral, segue que:

$$(x-(-1))^2+(y-0)^2+(z-2)^2=3^2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9.$$

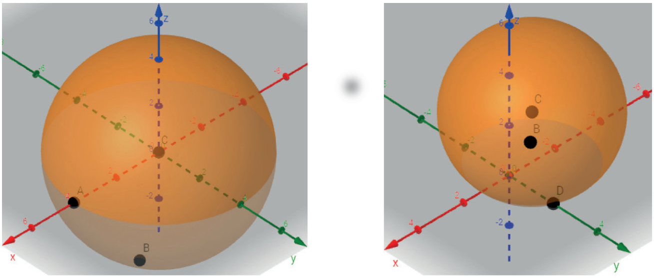
Veja que os pontos $D(0,2,0)$ e $E(1,2,3)$ pertencem à superfície em questão, pois suas coordenadas são soluções da equação característica, porque:

$$(0+1)^2+2^2+(0-2)^2=1+4+4=9;$$

$$(1+1)^2+2^2+(3-2)^2=4+4+1=9.$$

Essa superfície, com os pontos indicados, é descrita na Figura 4.7(b).

Figura 4.7 | Superfícies esféricas



(a) Esfera centrada na origem (b) Esfera centrada em $C(-1, 0, 2)$

Fonte: elaborada pela autora.

Faça você mesmo

Qual é a equação característica da esfera de centro em $C(-1,\ 1,\ 2)$ e raio de comprimento 7 unidades? Identifique as coordenadas de, ao menos, três pontos pertencentes a essa superfície.

Pesquise mais

Como sugestão de materiais complementares para o estudo das quádricas, principalmente das superfícies esféricas e dos elipsoides, consulte os capítulos 8 e 9 do livro *Cônicas e quádricas*, de Jacir J. Venturi, disponível no link: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2018. Consulte também o capítulo 6 do seguinte livro:

CONDE, A. *Geometria Analítica*. São Paulo: Atlas, 2004. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522465729/cfi/0!/4/4@0.00:0.00>. Acesso em: 8 dez. 2017.

Sem medo de errar

A sua primeira tarefa como funcionário do Escritório de Engenharia Civil e de Arquitetura e Urbanismo corresponde ao estudo de uma obra arquitetônica com o objetivo de relacioná-la com superfícies conhecidas, como é o caso das quádricas.

A obra em questão corresponde ao *National Centre for the Performing Arts* (Centro Nacional de Artes Cênicas ou Grande Teatro Nacional), localizado em Beijing, na China, a qual possui uma estrutura em formato de elipsoide.

Na construção das representações algébrica e geométrica do elipsoide que representa o teatro, vamos considerar o eixo z para representar as variações em relação à altura, o eixo x como indicação da direção Leste-Oeste e o eixo y relativo à direção Norte-Sul.

Sabemos que as dimensões da obra são: 212 metros na direção Leste-Oeste, 144 metros na direção Norte-Sul, altura total de 80 metros (considerando inclusive a parte localizada no subsolo). Logo, podemos identificar os comprimentos dos semieixos da seguinte forma:

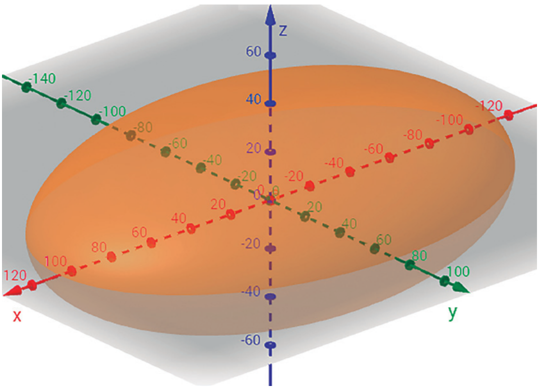
- Em relação ao eixo x (direção Leste-Oeste): $a = \frac{212}{2} \Rightarrow a = 106$.
- Em relação ao eixo y (direção Norte-Sul): $b = \frac{144}{2} \Rightarrow b = 72$.
- Em relação ao eixo z (altura): $c = \frac{80}{2} \Rightarrow c = 40$.

Desta forma, ao considerar o elipsoide centrado na origem, será representado pela equação:

$$\frac{x^2}{106^2} + \frac{y^2}{72^2} + \frac{z^2}{40^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{11236} + \frac{y^2}{5184} + \frac{z^2}{1600} = 1.$$

A representação geométrica desse elipsoide é indicada na Figura 4.8.

Figura 4.8 | Elipsoide que caracteriza o *National Centre for the Performing Arts*



Fonte: elaborada pelo autor.

Da forma canônica do elipsoide, podemos identificar os seguintes traços, que correspondem às interseções da superfície com os planos coordenados:

- Traço em relação ao plano *xy*: $\dfrac{x^2}{11236} + \dfrac{y^2}{5184} = 1$.
- Traço em relação ao plano *xz*: $\dfrac{x^2}{11236} + \dfrac{z^2}{1600} = 1$.
- Traço em relação ao plano *yz*: $\dfrac{y^2}{5184} + \dfrac{z^2}{1600} = 1$.

Se, em vez de assumir o formato elipsoidal, o teatro apresentasse um formato esférico com, por exemplo, as dimensões nas direções Leste-Oeste e Norte-Sul, bem como a altura total, de medidas iguais a 80 metros, poderíamos representar essa obra por meio de uma esfera centrada na origem e de raio:

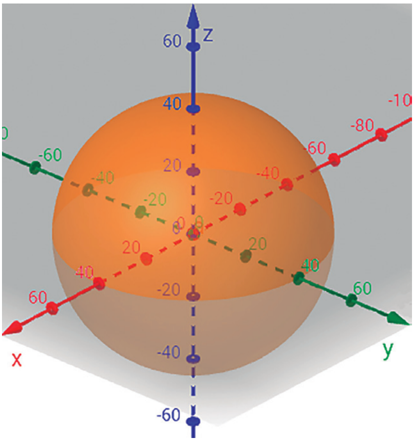
$$r = \frac{80}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 40.$$

Logo, a representação algébrica da superfície seria dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 40^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1600.$$

enquanto sua representação geométrica coincidiria com a da Figura 4.9.

Figura 4.9 | Superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1600$



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, para concluir a primeira tarefa, é fundamental identificar as representações algébricas das superfícies estudadas, que aproximam o formato da obra em questão, empregando-a para analisar as representações geométricas correspondentes no espaço cartesiano, de modo a favorecer a compreensão da estrutura em estudo.

Avançando na prática

Estudo da superfície esférica

Descrição da situação-problema

Podemos analisar as superfícies a partir de suas equações gerais, as quais envolvem as variáveis x, y e z, considerando suas potências de expoente, no máximo, iguais a 2.

Considerando esse tema, seja a superfície descrita pela seguinte equação geral:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0.$$

Suponha que um estudante, de posse dessa equação, precisa investigar as propriedades da superfície correspondente, para, por meio de técnicas de desenho, construir esboços da superfície no plano.

Sabendo que essa equação descreve uma superfície esférica, quais seriam as coordenadas de seu centro? Qual é a medida de seu raio?

Resolução da situação-problema

Considere a superfície descrita pela equação geral

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0.$$

Queremos identificar o centro e o raio associados a essa superfície; para isso, precisamos rescrever essa equação na forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2,$$

identificando $C(h,k,l)$ e a.

Trabalhando com o completamento de quadrados, segue que:

$$(x^2+2x+1)+\left(y^2-6y+9\right)+z^2+\left(-6-1-9\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=16$$

$$\Rightarrow \left(x-(-1)\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=4^2.$$

Sendo assim, temos que o centro da esfera corresponde ao ponto $C\left(-1,\ 3,\ 0\right)$, enquanto seu raio tem medida $a=4$.

De posse dessas medidas, o estudante poderá analisar a projeção da superfície no plano, a qual corresponde a uma circunferência, representando-a adequadamente de acordo com seus objetivos.

O estudo das superfícies esféricas, bem como dos elipsoides, é essencial para a representação e interpretação de diversos fenômenos, por isso é necessário compreender seus principais elementos e observar as relações que podem ser estabelecidas entre estes.

Faça valer a pena

1. Considere as quádricas descritas pelas seguintes expressões:

$$A:\ x^2+y^2+z^2=25$$

$$B:\ \frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{100}+\frac{z^2}{81}=1$$

$$C:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2-100=0.$$

Com base nessas superfícies, complete corretamente as lacunas das seguintes afirmações, tornando-as verdadeiras:

I. A superfície A corresponde a ____________ de centro na origem.

II. A superfície B corresponde a ____________ de centro na origem.

III. A superfície C corresponde a ____________ de centro no ponto $K(1,\ 1,-1)$.

Assinale a alternativa que indica os termos que completam corretamente as lacunas das afirmações apresentadas:

a) I – uma esfera; II – um elipsoide; III – um elipsoide.

b) I – uma esfera; II – uma esfera; III – um elipsoide.

c) I – uma esfera; II – um elipsoide; III – uma esfera.

d) I – um elipsoide; II – uma esfera; III – um elipsoide.

e) I – um elipsoide; II – um elipsoide; III – uma esfera.

2. Considere os elipsoides descritos pelas seguintes formas canônicas:

$$A: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{100} = 1$$

$$B: \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{100} = 1$$

$$C: \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{100} = 1$$

Associe corretamente os elipsoides (denotados por *A*, *B* e *C*) com as respectivas informações a respeito de seus traços (apresentadas por I, II e III):

I. O traço relativo ao plano *xy* é a curva plana de equação geral $9x^2 + 16y^2 - 1296 = 0$.

II. O traço relativo ao plano *yz* é a curva plana de equação geral $25y^2 + 36z^2 - 3600 = 0$.

III. O traço relativo ao plano *xz* é a curva plana de equação geral $x^2 + z^2 - 100 = 0$.

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B.

b) I – B; II – C; III – A.

c) I – B; II – A; III – C.

d) I – C; II – B; III – A.

e) I – C; II – A; III – C.

3. Analise as seguintes afirmações a respeito das esferas e dos elipsoides, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas:

I. A superfície descrita por $45x^2 + 20y^2 + 36z^2 - 180 = 0$ corresponde a um elipsoide centrado na origem com comprimentos dos semieixos dados por $a = 4$, $b = 9$ e $c = 5$.

II. A superfície descrita por $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 70 = 0$ corresponde a uma esfera centrada na origem com raio de medida igual a 8 unidades.

III. A superfície descrita por $400x^2 + 144y^2 - 225z^2 - 3600 = 0$ corresponde a um elipsoide centrado na origem com comprimentos dos semieixos dados por $a = 3$, $b = 5$ e $c = 4$.

Assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, considerando a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V – V – F.

b) V – F – F.

c) V – F – V.

d) F – V – F.

e) F – F – V.

Seção 4.2

Paraboloides e hiperboloides

Diálogo aberto

Nesta seção, dando sequência ao estudo das superfícies quádricas, o objetivo é investigar as propriedades de superfícies com formato de paraboloides e hiperboloides. Na seção anterior, observamos as principais características dos elipsoides e das superfícies esféricas, relacionando os formatos destas com obras arquitetônicas particulares. Assim, dando continuidade aos nossos estudos, investigaremos as propriedades das duas superfícies citadas, relacionando-as também com edificações específicas.

Tendo em vista a sua função no escritório de Engenharia Civil e Arquitetura e Urbanismo, o gerente de projetos solicitou-lhe um estudo a respeito da estrutura do Palácio das Exposições, localizado no Conjunto Arquitetônico do Parque do Ibirapuera, em São Paulo, conforme a Figura 4.10.

Figura 4.10 | Palácio das Exposições, Parque do Ibirapuera, em São Paulo

Fonte: Yamanaka (2012, [s.p.]). Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pavilhao_oca_ibirapuera.jpg>. Acesso em: 28 fev. 2018.

Os projetistas do escritório precisam construir uma maquete para representar a cúpula, sendo esta caracterizada por uma base de formato circular, com aproximadamente 72 *cm* de diâmetro e 18 *cm* de altura. Por isso, você deverá analisar a estrutura em questão, observando como fazer as possíveis representações algébricas. Para concluir essa tarefa, você deverá elaborar um relatório, o qual será entregue, posteriormente, ao gerente de projetos do escritório, composto de uma descrição a respeito das principais características da edificação estudada, relacionando-a com as propriedades dos paraboloides elípticos. Nesse relatório é necessário identificar, entre outras informações, uma equação que descreva corretamente o edifício em questão.

Devido ao seu formato, podemos aproximar essa cúpula a um paraboloide elíptico. Neste caso, qual seria a representação no espaço cartesiano, considerando-a com vértice na origem? Qual equação poderia ser empregada em sua representação? Para isso, saiba que, ao intersectar a superfície pelos planos *xz* e *yz*, obtemos parábolas com concavidade voltada para baixo, de modo que o vértice esteja localizado na origem do sistema e que a distância entre o foco e o vértice corresponda à altura da estrutura.

No desenvolvimento dessa tarefa, é importante que você analise as possíveis representações da construção citada, levando em conta a provável associação com os paraboloides elípticos e indicando a representação algébrica correspondente. Para tanto, dê continuidade aos seus estudos, investigando essas subcategorias específicas das superfícies quádricas.

Não pode faltar

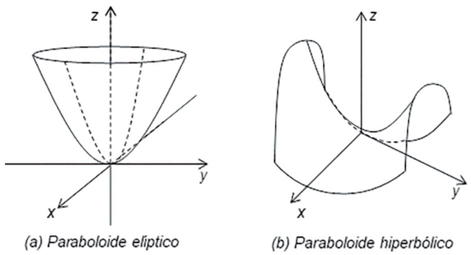
Dentre as superfícies quádricas, além dos elipsoides, podemos estudar os paraboloides e hiperboloides, os quais são tratados com mais detalhes nos tópicos seguintes.

Paraboloides

Os paraboloides são superfícies quádricas relacionadas às parábolas. Podemos obter um paraboloide, por exemplo, a partir da rotação de uma parábola em torno do seu eixo.

De acordo com suas características, podemos construir dois tipos de paraboloides: o elíptico, conforme a Figura 4.11(a), e o hiperbólico, que assume o formato conforme a Figura 4.11(b).

Figura 4.11 | Categorias de paraboloides



Fonte: elaborada pela autora.

Reflita

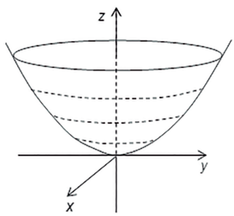
Quais são as curvas cônicas que podem ser identificadas ao avaliarmos as interseções dos paraboloides com os planos coordenados?

Paraboloide elíptico

Um paraboloide elíptico, ao longo do eixo *z*, corresponde a uma superfície no espaço descrita pela equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, denominada forma canônica. No caso dos paraboloides elípticos, ao longo dos eixos *x* e *y*, respectivamente, temos $ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e $by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Em um paraboloide elíptico, os dois termos de 2º grau (identificados em associação com as variáveis *x*, *y* e *z*) presentes na forma canônica devem assumir mesmo sinal.

O paraboloide elíptico, ao longo do eixo *z* de equação $z = x^2 + y^2$, obtido pela rotação da parábola $z = y^2$, em torno do eixo *z*, tem representação geométrica dada na Figura 4.12.

Figura 4.12 | Paraboloide elíptico de equação $z = x^2 + y^2$



Fonte: elaborada pela autora.

Seja o paraboloide elíptico de forma canônica $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Nesse caso, o ponto $O(0,0,0)$ corresponde ao vértice do paraboloide. Além disso, segundo essa equação, podemos analisar duas situações: quando $c > 0$, a superfície está localizada inteiramente acima do plano *xy*; quando $c < 0$, toda a superfície situa-se abaixo do plano *xy*.

Outro fato que podemos estudar são os traços dessa superfície, ou seja, as interseções com os planos coordenados e os planos paralelos a estes, observando os casos descritos no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 | Traços do paraboloide elíptico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Interseção com o plano	Equação do traço obtido	Tipo de traço obtido
xy	$O(0,0,0)$	Ponto
xz	$cz = \frac{x^2}{a^2};\ y = 0$	Parábola
yz	$cz = \frac{y^2}{b^2};\ x = 0$	Parábola

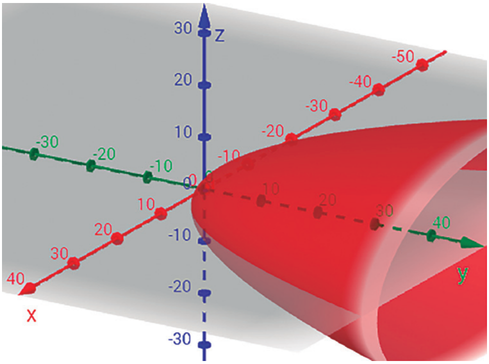
Fonte: elaborado pela autora.

Os traços da superfície em relação a planos de equações, na forma $z = k$ (planos paralelos ao plano *xy*), são elipses que aumentam gradativamente de tamanho quanto mais distante o plano estiver da origem. Para essa situação, ainda temos o caso particular no qual os traços são circunferências quando $a = b$. Já os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. Esse tipo de estudo pode ser realizado quando avaliamos os outros dois casos de paraboloides elípticos.

Exemplificando

Considere o paraboloide elíptico descrito pela equação $y = \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9}$, cuja representação geométrica é dada na Figura 4.13.

Figura 4.13 | Paraboloide elíptico de equação $y = \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9}$



Fonte: elaborada pela autora.

Temos os seguintes traços: no plano *xy*, é a parábola $y = \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow x^2 = 16y$, com parâmetro $p = 4$, foco $F(0,4,0)$ e diretriz dada por $y = -4$, $z = 0$; no plano *xz*, é a origem $O(0,0,0)$; no plano *yz*, é a parábola de equação $y = \frac{z^2}{9} \Leftrightarrow z^2 = 9y$, de parâmetro $p = 9/4$, foco $F\left(0, \frac{9}{4}, 0\right)$ e diretriz dada por $y = -9/4$, $x = 0$; no plano de equação $y = 1$, é a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, $y = 1$, com focos $F_1\left(-\sqrt{7},1,0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{7},1,0\right)$.

Paraboloide hiperbólico

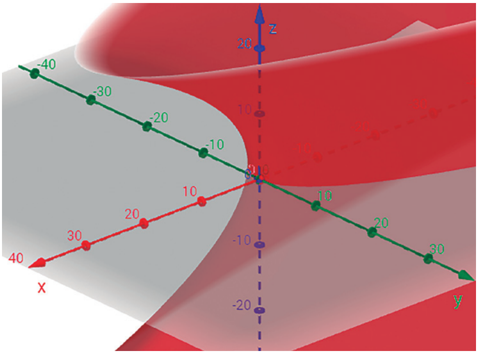
Um paraboloide hiperbólico, ao longo do eixo *z*, é uma superfície de forma canônica $cz = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Para os paraboloides hiperbólicos, ao longo dos eixos *x* e *y*, respectivamente, temos as formas canônicas $ax = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e $by = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$. De modo semelhante aos paraboloides elípticos, nos paraboloides hiperbólicos, os dois termos de 2º grau (identificados em associação com as variáveis *x*, *y* e *z*) da forma canônica assumem sinais opostos.

Assimile

Para identificar um paraboloide elíptico, precisamos observar se apenas duas das três variáveis (*x*, *y* e *z*) assumem potências de expoente 2 e se estas têm o mesmo sinal. No caso do paraboloide hiperbólico, precisamos observar se apenas duas das três variáveis (*x*, *y* e *z*) assumem potências de expoente 2, com os termos de 2º grau com sinais opostos.

A superfície de equação $x = -y^2 + z^2$ descreve um paraboloide hiperbólico ao longo do eixo *x*, ilustrado na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Paraboloide hiperbólico de equação $x = -y^2 + z^2$



Fonte: elaborada pela autora.

Para o paraboloide hiperbólico de forma canônica $cz = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, os traços podem ser identificados no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Traços do paraboloide hiperbólico de equação $cz = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Interseção com o plano	Equação do traço obtido	Tipo de traço obtido
xy	$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{x}{a} = 0; \quad z = 0 \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a} = 0; \quad z = 0 \end{cases}$	Par de retas
xz	$cz = -\dfrac{x^2}{a^2}; \quad y = 0$	Parábola
yz	$cz = \dfrac{y^2}{b^2}; \quad x = 0$	Parábola

Fonte: elaborado pela autora.

Os traços da superfície em relação a planos de equações, na forma $z = k$, são hipérboles, tais que: se $k > 0$, o eixo real é paralelo ao eixo *y*; e se $k < 0$, o eixo real é paralelo ao eixo *x*. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. Para os outros dois casos de paraboloides hiperbólicos (ao longo dos eixos *x* e *y*), temos situações análogas.

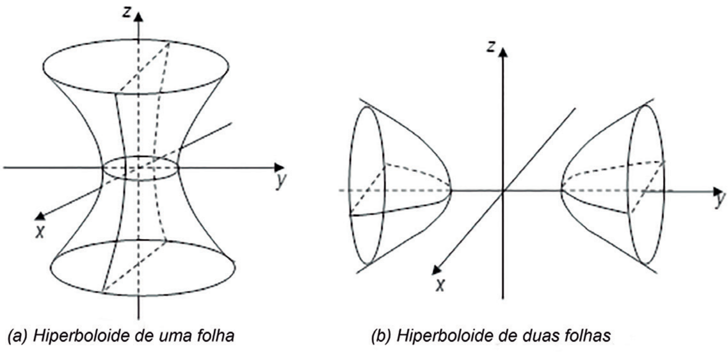
Faça você mesmo

Determine os traços do paraboloide hiperbólico de equação $y = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$ em relação aos planos coordenados (*xy*, *xz* e *yz*) e ao plano $y = -1$.

Hiperboloides

Os hiperboloides são superfícies centradas cujas equações características apresentam os termos de 2º grau, relativos a *x*, *y* e *z*, com sinais distintos. Devido às diferentes possibilidades de composição das equações, temos duas categorias distintas: hiperboloide de uma folha, conforme a Figura 4.15(a), e hiperboloide de duas folhas, representado pela Figura 4.15(b).

Figura 4.15 | Categorias de hiperboloides



Fonte: elaborada pela autora.

Hiperboloide de uma folha

Um hiperboloide de uma folha, ao longo do eixo *z*, diz respeito a uma superfície espacial dada por uma equação na forma

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, a qual é denominada forma canônica do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo z. Os hiperboloides de uma folha, ao longo dos eixos x e y, são dados, respectivamente, pelas formas canônicas: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ e $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Os traços do hiperboloide de uma folha de forma canônica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, em relação aos planos coordenados, são descritos no Quadro 4.4.

Quadro 4.4 | Traços do hiperboloide de uma folha de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Interseção com o plano	Equação do traço obtido	Tipo de traço obtido
xy	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Elipse
xz	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbole
yz	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbole

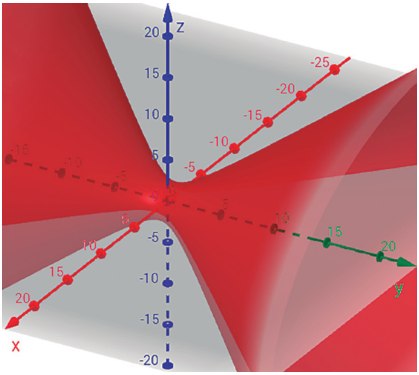
Fonte: elaborado pela autora.

Os traços da superfície, nos planos na forma $z=k$, são elipses, enquanto os traços nos planos de equações $x=k$ e $y=k$ são hipérboles.

Exemplificando

O hiperboloide de uma folha de equação $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$ é dado conforme a Figura 4.16 e apresenta os seguintes traços: no plano xy, é a hipérbole $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$; no plano yz, é a hipérbole $-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$; no plano xz, é a circunferência $x^2+z^2=4$.

Figura 4.16 | Hiperboloide de uma folha com equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$



Fonte: elaborada pela autora.

Hiperboloide de duas folhas

Um hiperboloide de duas folhas, ao longo do eixo z, corresponde a uma superfície no espaço descrita pela forma canônica $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Os hiperboloides de duas folhas, ao longo dos eixos x e y, são dados, respectivamente, por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Os traços do hiperboloide de duas folhas de forma canônica $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, em relação aos planos coordenados, são descritos no Quadro 4.5.

Quadro 4.5 | Traços do hiperboloide de duas folhas de equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Interseção com o plano	Equação do traço obtido	Tipo de traço obtido
xy	Não existe interseção	Não existe interseção
xz	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbole
yz	$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbole

Fonte: elaborado pela autora.

Assimile

Na identificação de um hiperboloide de uma folha, devemos observar se as três variáveis (x, y e z) assumem potências de expoente 2, nas quais duas assumem valores positivos e uma negativo. Já no hiperboloide de duas folhas, as três variáveis (x, y e z) assumem potências de expoente 2, de modo que duas assumem valores negativos e uma, positivo.

Faça você mesmo

Determine os traços do hiperboloide de duas folhas de equação $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{64} - \frac{z^2}{81} = 1$ em relação aos planos coordenados (xy, xz e yz).

Pesquise mais

Para complementar o estudo das quádricas, consulte os capítulos 8 e 9 do seguinte livro:

VENTURI, Jacir José. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2003. Disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 1º mar. 2018.

Consulte também o livro de referência:

CONDE, Antonio. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atlas, 2004. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522465729/cfi/0!/4/4@0.00:0.00>. Acesso em: 1º mar. 2018.

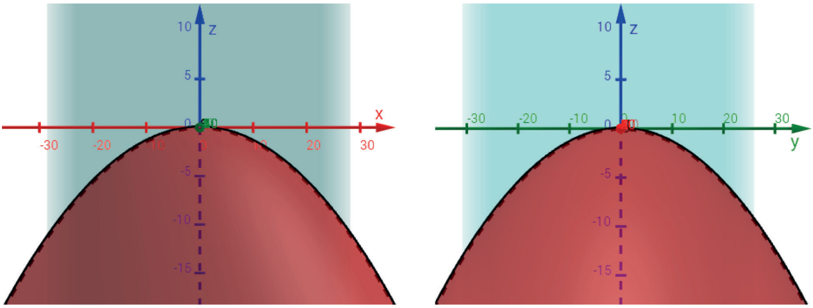
Sem medo de errar

Conforme apresentado anteriormente, sua tarefa como funcionário do escritório de Engenharia Civil e Arquitetura e Urbanismo é analisar a estrutura do Palácio das Exposições, localizado no Conjunto Arquitetônico do Parque do Ibirapuera, em São Paulo, o qual possui formato de acordo com a Figura 4.10. Essa figura identifica representações algébricas adequadas, tendo em vista a construção de uma maquete na qual a cúpula tem base de formato circular com 72 *cm* de diâmetro, ou 36 *cm* de raio, e 18 *cm* de altura.

Para aproximar essa superfície de um paraboloide elíptico, sendo este representado ao longo do eixo *z*, sua equação assumirá a forma $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Queremos que o vértice da superfície coincida com a origem e os traços nos planos *xz* e *yz* sejam parábolas com concavidade voltada para baixo e vértices na origem $(0,0,0)$, de tal forma que a distância entre o foco e o vértice corresponda à altura da estrutura, ou seja, 18 *cm*. Para tanto, precisamos determinar *a*, *b* e *c*, de modo que $c < 0$.

Na Figura 4.17(a), podemos observar o traço da superfície em questão no plano *xz*, e na Figura 4.17(b), o traço em relação ao plano *yz*.

Figura 4.17 | Traços do paraboloide elíptico



(a) Traço no plano *xz* (b) Traço no plano *yz*

Fonte: elaborada pela autora.

Note que o traço em relação ao plano *xz* corresponde a uma parábola de equação $x^2 = -4pz$, com $y = 0$. Se o foco pertence ao eixo *z* e dista 18 *m* do vértice $O(0,0,0)$, suas coordenadas são $F(0,0,-18)$, devido ao seu posicionamento em relação ao eixo *z* (parábola de concavidade voltada para baixo). Desta forma, o parâmetro da parábola é dado por $p = 18$. Assim, o traço no plano *xz* tem equação:

$$x^2 = -72z \ \text{ e } \ y = 0,$$

$$\text{ou, ainda, } -z = \frac{x^2}{72}, \text{ com } y = 0.$$

De modo análogo, podemos avaliar o traço no plano *yz*, e sendo a base da cúpula uma circunferência de raio 36, a equação da parábola que corresponde ao traço no plano em questão será dada por:

$$y^2 = -72z \text{ e } x = 0,$$

$$\text{isto é, } z = -\frac{y^2}{72}, \text{ com } x = 0.$$

Combinando as duas equações, teremos o paraboloide elíptico de equação na forma canônica:

$$-z = \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{72} \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{72}.$$

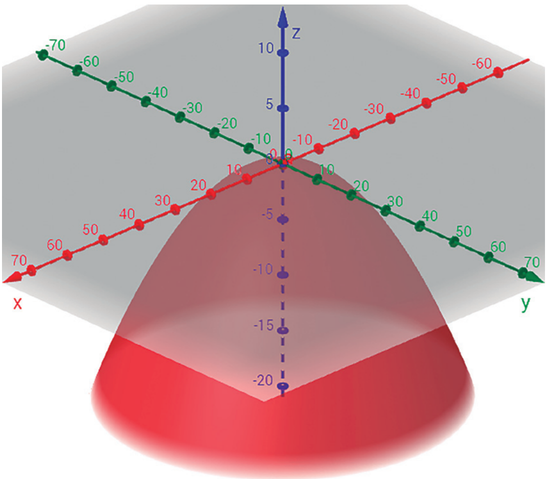
Neste caso, a base da superfície, associada ao plano $z = -18$, será descrita pela equação:

$$-18 = -\frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{72} \quad \Rightarrow \quad -1296 = -x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 36^2,$$

ou seja, corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio 36. Assim, temos uma representação algébrica que descreve as propriedades da cúpula em questão.

A representação geométrica para a cúpula pode ser observada na Figura 4.18.

Figura 4.18 | Paraboloide elíptico de equação $z = -\frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{72}$



Fonte: elaborada pela autora.

Para concluir essa tarefa, você deve construir um relatório, levando em conta todas as informações coletadas e as análises realizadas, conforme estudos anteriores. Assim, faça um resumo de todas as informações apresentadas, destacando a representação algébrica construída e demais informações necessárias à sua obtenção.

Avançando na prática

Estudo dos traços dos paraboloides hiperbólicos

Descrição da situação-problema

Os paraboloides hiperbólicos, devido ao seu formato, muitas vezes são chamados de "selas", pela semelhança com esse tipo de objeto.

Suponha que um aluno precisa estudar uma superfície desse tipo, analisando seus traços em relação a determinados planos. Considere que a superfície em questão seja descrita pela equação:

$$3z = \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{12}.$$

Com base nessas informações, quais são os traços da "sela" em estudo em relação aos planos $z = 1$, $y = -6$ e $x = 15$?

Resolução da situação-problema

A superfície de equação $3z = \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{12}$ corresponde a um paraboloide hiperbólico ao longo do eixo z.

O traço da superfície, em relação ao plano $z = 1$, é tal que:

$$3 = \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{12} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{36},$$

ou seja, corresponde a uma hipérbole centrada na origem, cujo eixo real está contido no eixo x. Além disso, é possível verificar que essa hipérbole possui eixo real de comprimento:

$$2a = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5},$$

e distância focal tal que:

$$c^2 = 45 + 36 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad c = 9.$$

Em relação ao plano $y=-6$, o traço da superfície é tal que:

$$3z=\frac{x^2}{15}-\frac{36}{12} \quad\Rightarrow\quad 3z=\frac{x^2}{15}-3 \quad\Rightarrow\quad 3z+3=\frac{x^2}{15}$$

$$\Rightarrow\quad 45(z+1)=x^2 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot\frac{45}{4}(z+1)=x^2.$$

Assim, temos uma parábola com eixo coincidindo com o eixo *y*, associada ao parâmetro $p={}^{45}\!/_{4}$ e de vértice localizado no ponto $V(0,-6,-1)$.

Para o plano $x=15$, o traço da superfície é tal que:

$$3z=\frac{225}{15}-\frac{y^2}{12} \quad\Rightarrow\quad 3z=15-\frac{y^2}{12} \quad\Rightarrow\quad 3z-15=-\frac{y^2}{12}$$

$$\Rightarrow\quad 3(z-5)=-\frac{y^2}{12} \quad\Rightarrow\quad 36(z-5)=-y^2 \quad\Rightarrow\quad -4\cdot 9(z-5)=y^2.$$

Desta forma, temos uma parábola com eixo coincidindo com o eixo *z*, associada ao parâmetro $p=-9$ e de vértice localizado no ponto $V(15,0,5)$.

Faça valer a pena

1. Considere as superfícies descritas pelas seguintes equações:

I. $9x^2+16z^2+288y=0$

II. $9y^2+12z^2-108x=0$

III. $8x^2-12z^2+192y=0$

IV. $6y^2-8z^2-192x=0$

Associe as superfícies (de equações denotadas por I, II, III e IV) com suas respectivas classificações (indicadas por A, B, C e D):

A. Paraboloide elíptico ao longo do eixo *x*.

B. Paraboloide hiperbólico ao longo do eixo *x*.

C. Paraboloide elíptico ao longo do eixo *y*.

D. Paraboloide hiperbólico ao longo do eixo *y*.

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B; IV – D.

b) I – B; II – C; III – A; IV – D.

c) I – B; II – A; III – D; IV – C.

d) I – C; II – A; III – D; IV – B.

e) I – D; II – B; III – C; IV – A.

2. Analise as afirmações apresentadas a respeito dos paraboloides e hiperboloides, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. A superfície descrita pela equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ corresponde a um hiperboloide de uma folha, cujo traço em relação ao plano $x = 6$ é descrito por uma hipérbole de eixo real contido no eixo z.

II. A superfície descrita pela equação $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$ corresponde a um paraboloide elíptico, cujo traço em relação ao plano $z = 4$ é descrito por uma elipse de eixo maior, com comprimento igual a 8 unidades.

III. A superfície descrita pela equação $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$ corresponde a um hiperboloide de duas folhas, cujo traço em relação ao plano $y = 10$ é descrito por uma parábola, com distância focal igual a $4\sqrt{3}$ unidades.

Assinale a alternativa que indica todas as classificações corretamente, tendo em vista a ordem na qual as afirmações foram apresentadas:

a) V – V – F.
b) V – F – V.
c) V – F – F.
d) F – F – V.
e) F – V – F.

3. Considere as superfícies descritas pelas seguintes equações:

$$S_1 : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

$$S_2 : y = \frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{36}$$

$$S_3 : -\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} - \frac{z^2}{64} = 1$$

$$S_4 : z = \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81}$$

Complete corretamente as lacunas das seguintes afirmações, tornando-as informações corretas a respeito das superfícies descritas:

I. A superfície S_1 corresponde a um hiperboloide, cujo traço em relação ao plano *xz* é descrito por ______________.

II. A superfície S_2 corresponde a um paraboloide, cujo traço em relação ao plano *xz* é descrito por ______________.

III. A superfície S_3 corresponde a um hiperboloide, cujo traço em relação ao plano *xy* é descrito por ________________.

IV. A superfície S_4 corresponde a um paraboloide, cujo traço em relação ao plano *yz* é descrito por ________________.

Assinale a alternativa que associa corretamente os termos que completam as lacunas das afirmações anteriores:

a) I – uma parábola; II – uma circunferência; III – uma elipse; IV – uma parábola.

b) I – uma elipse; II – um ponto; III – uma hipérbole; IV – uma hipérbole.

c) I – uma hipérbole; II – um ponto; III – uma hipérbole; IV – uma parábola.

d) I – uma parábola; II – uma elipse; III – uma parábola; IV – uma hipérbole.

e) I – uma parábola; II – uma hipérbole; III – uma parábola; IV – uma elipse.

Seção 4.3

Cones e cilindros

Diálogo aberto

Nesta seção, sua tarefa consiste em concluir estudos a respeito de edifícios específicos, associando seus formatos com determinados tipos de superfícies. Anteriormente, você trabalhou com alguns edifícios, relacionando-os aos elipsoides, superfícies esféricas, paraboloides e hiperboloides, observando as características que definem cada um desses tipos de superfícies, possibilitando um estudo a respeito das superfícies quádricas e esféricas.

Neste momento, para finalizar o trabalho iniciado com o estudo das superfícies quádricas, na terceira tarefa você é responsável por analisar obras arquitetônicas que possuem formato cônico e cilíndrico. Para tanto, você deve observar as estruturas e construir representações algébricas adequadas.

A primeira obra que você deve estudar é o edifício "Torres de Hércules", do arquiteto Rafael de La-Hoz Castanys, localizado na Espanha, conforme a Figura 4.19. Cada torre que compõe o edifício possui 25 *m* de diâmetro e 100 *m* de altura.

Figura 4.19 | "Torres de Hércules", Espanha

Fonte: Wikimedia (2009, [s.p.]). Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torres_de_hercules_2.jpg>. Acesso em: 1º mar. 2018.

Como pode ser representada algébrica e geometricamente cada torre do edifício, supondo que sua base coincida com o plano *xy* no espaço cartesiano? Quais são suas interseções com os planos *xy*, *xz* e *yz*?

A segunda obra que você deverá analisar é a Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, localizada na cidade de Maringá, no Paraná, cuja estrutura está retratada na Figura 4.20.

Figura 4.20 | Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, no Paraná

Fonte: Ortiz (2007, [s.p.]). Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cathedral_of_Maring%C3%A1_02_2007_8712.JPG>. Acesso em: 1º mar. 2018.

Essa construção apresenta formato cônico, com 114 *m* de altura e base circular com 50 *m* de diâmetro. Como pode ser representada algébrica e geometricamente essa catedral, supondo que seu vértice coincida com a origem do espaço cartesiano?

Como você responderia a essas questões? Quais conceitos estão envolvidos no estudo dessas obras arquitetônicas? Dê sequência a seus estudos, analisando as principais características das superfícies cônicas e cilíndricas.

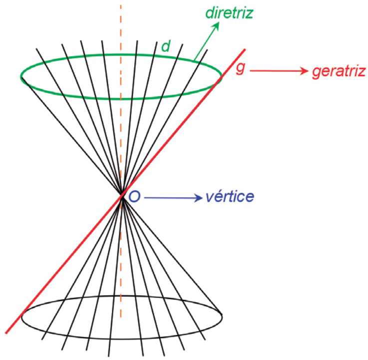
Não pode faltar

Superfície cônica

No estudo das curvas cônicas, realizado na seção anterior, observamos que esses tipos de curvas são obtidos pelas interseções de planos com tipos específicos de superfícies cônicas.

Uma superfície cônica corresponde a uma superfície obtida a partir de uma reta (geratriz) que se movimenta, apoiada em uma curva plana (diretriz) qualquer, e que passa por um ponto dado (vértice) não situado no plano que contém essa curva. A superfície, com seus respectivos elementos, é indicada na Figura 4.21.

Figura 4.21 | Elementos da superfície cônica



Fonte: elaborada pela autora.

A diretriz corresponde a uma curva plana obtida pela interseção de duas superfícies:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}.$$

Assimile

Se a diretriz for caracterizada por uma circunferência, então poderemos construir uma superfície cônica circular. As diretrizes descritas por parábolas, elipses ou hipérboles podem gerar, respectivamente, superfícies cônicas parabólicas, elípticas ou hiperbólicas. No caso de a diretriz ser dada por uma reta, a superfície cônica converte-se em um plano.

Pesquise mais

Note que o estudo das superfícies cônicas, assim como o das superfícies cilíndricas, que será realizado na sequência, pode ser associado às curvas cônicas. Por isso, retome os conceitos e as características das principais curvas cônicas com a seguinte leitura:

VENTURI, Jacir José. **Cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2003. Disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>. Acesso em: 1º mar. 2018.

O vértice é um elemento que divide a superfície cônica em duas partes distintas chamadas de folhas e que são opostas pelo vértice, assim como retratado na Figura 4.21.

Reflita

O sólido conhecido popularmente como cone é estudado desde a Educação Básica e está diretamente associado a uma superfície cônica.

Refletindo sobre as propriedades do sólido geométrico denominado cone, quais são as características específicas da superfície cônica que gera o cone?

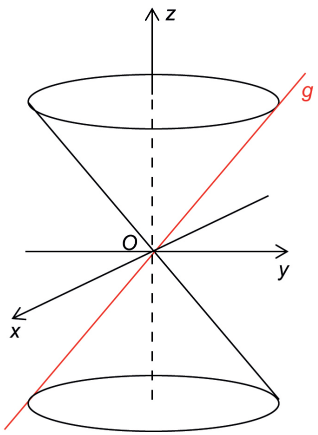
Exemplificando

Seja a reta *g* de equações $z = my$ e $x = 0$, construída no plano *yz*.

Na rotação da reta *g* em torno do eixo *z*, obtemos uma superfície cônica circular, conforme a Figura 4.22. A equação dessa superfície pode ser obtida pela substituição, na equação da reta, de *y* por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e, assim:

$$z = m\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad z^2 = m^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Figura 4.22 | Superfície cônica circular de equação $z^2 = m^2\left(x^2 + y^2\right)$



Fonte: elaborada pela autora.

Desta forma, *g* corresponde à geratriz da superfície, a diretriz é descrita por uma circunferência e o vértice é dado pelo ponto *O* que separa as duas folhas da superfície.

Levando em conta o caso mais geral, em que a diretriz é uma elipse, podemos construir superfícies cônicas elípticas, as quais têm sua forma canônica descrita por uma das seguintes equações:

- Superfície ao longo do eixo *z*: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
- Superfície ao longo do eixo *y*: $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$.
- Superfície ao longo do eixo *x*: $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Tomando o caso em que temos uma superfície cônica elíptica ao longo do eixo *z*, o traço dessa superfície no plano *xy* corresponde ao ponto $O(0,0,0)$, e em relação aos planos paralelos de equações $z = k$, os traços são elipses. Por outro lado, os traços em relação aos planos da forma $x = k$ ou $y = k$ são hipérboles, as quais se degeneram em duas retas nos casos dos planos *xz* e *yz*.

Estudos semelhantes podem ser desenvolvidos no caso das superfícies cônicas parabólicas e hiperbólicas.

Atenção

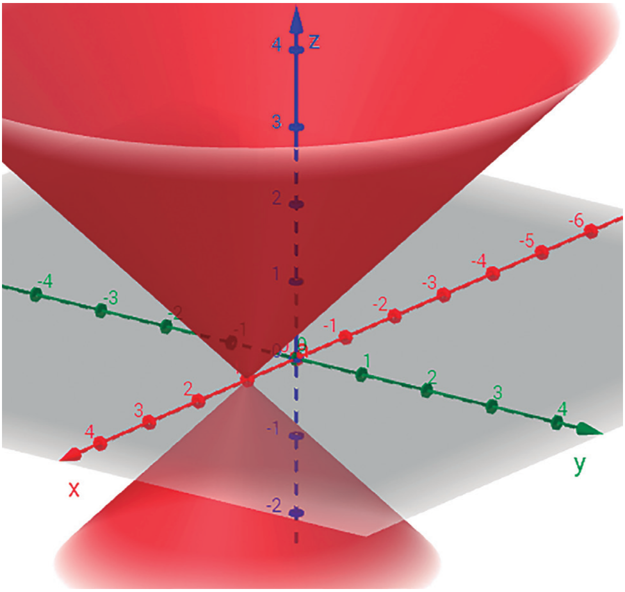
As equações apresentadas foram construídas conforme as superfícies cônicas centradas na origem, ou seja, o vértice coincide com a origem do sistema. Podemos, ainda, supor superfícies com vértice em um ponto $V(h,k,l)$, realizando modificações nas formas canônicas ao substituir os termos *x*, *y* e *z*, respectivamente, pelas expressões $x - h$, $y - k$ e $z - l$.

Por exemplo, podemos supor uma superfície cônica circular de equação:

$$z^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

Com essa equação, notamos que o vértice dessa superfície corresponde ao ponto $P(1{,}0{,}0)$, e não à origem do sistema, fato este que pode ser observado na Figura 4.23.

Figura 4.23 | Superfície cônica de equação $z^2 = (x-1)^2 + y^2$



Fonte: elaborada pela autora.

Faça você mesmo

Estude os traços da superfície cônica de equação:

$$y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16},$$

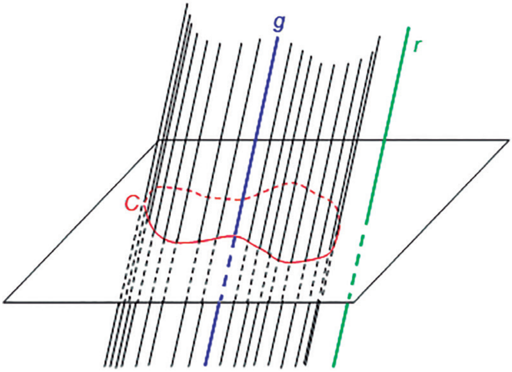
em relação aos planos coordenados e aos planos das formas $x = k$, $y = k$ e $z = k$, isto é, planos paralelos aos planos coordenados.

Superfície cilíndrica

Considere uma curva plana C e uma reta r fixa que não esteja contida no plano que contém C.

Partindo desses elementos, podemos caracterizar a superfície cilíndrica como uma superfície gerada a partir de uma reta g que se movimenta ao longo da curva plana C e que mantém a relação de paralelismo com r, situação ilustrada na Figura 4.24.

Figura 4.24 | Superfície cilíndrica obtida a partir de C e r



Fonte: elaborada pela autora.

A curva plana C é chamada de diretriz da superfície cilíndrica, enquanto g é denominada geratriz da superfície.

Assimile

Assim como no caso das superfícies cônicas, as superfícies cilíndricas podem ser classificadas em função de suas diretrizes. Superfícies cilíndricas chamadas de circulares, elípticas, hiperbólicas ou parabólicas são construídas, respectivamente, a partir de circunferências, elipses, hipérboles ou parábolas.

As superfícies cilíndricas podem ser construídas a partir de diferentes curvas planas. Porém, nos exemplos apresentados, consideraremos apenas superfícies cilíndricas obtidas a partir de curvas planas que estejam contidas em um dos planos coordenados e cujas geratrizes sejam retas paralelas aos eixos coordenados que não estejam contidos nos planos considerados.

Quando fixamos essas condições, as equações das superfícies podem ser obtidas diretamente de suas diretrizes.

Exemplificando

Considere a superfície cilíndrica construída a partir da parábola de equação:

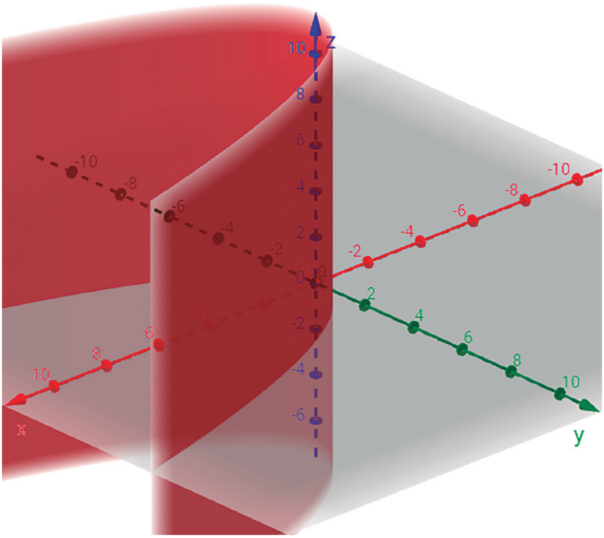
$$y^2 = 3x,$$

contida no plano *xy*. Tomando as geratrizes paralelas ao eixo *z*, a superfície será descrita pela equação:

$$y^2 = 3x,$$

a qual é apresentada na Figura 4.25.

Figura 4.25 | Superfície cilíndrica de equação $y^2 = 3x$



Fonte: elaborada pela autora.

Observe que os traços dessa superfície, em relação ao plano coordenado *xy* e a qualquer plano da forma $z = k$ (planos paralelos ao plano *xy*), correspondem à parábola de equação $y^2 = 3x$.

Faça você mesmo

Considere, no plano *yz*, a hipérbole de equação:

$$\frac{y^2}{64} - \frac{z^2}{81} = 1.$$

Qual é a equação da superfície cilíndrica, construída a partir da hipérbole e ao longo do eixo *x*, sabendo que suas geratrizes serão paralelas ao eixo *x*? Quais são os traços da superfície cilíndrica em relação aos planos coordenados?

Construa também um esboço para a superfície com base em sua descrição.

Pesquise mais

Como material complementar para o estudo das superfícies cônicas e cilíndricas, pode ser empregado o seguinte livro:

CONDE, Antonio. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atlas, 2004. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522465729/cfi/0!/4/4@0.00:0.00>. Acesso em: 1º mar. 2018.

Sem medo de errar

No contexto de atuação como funcionário do escritório de Engenharia Civil e de Arquitetura e Urbanismo, sua tarefa consiste na análise de duas obras, com base nas características das superfícies cônicas e cilíndricas.

O primeiro edifício a ser analisado consiste em uma das torres que compõem as “Torres de Hércules”, localizadas na Espanha e cuja estrutura é retratada na Figura 4.19. Sabendo que cada torre que compõe o edifício possui 25 *m* de diâmetro e 100 *m* de altura, podemos representá-la por uma superfície cilíndrica construída a partir de uma circunferência de diâmetro igual a 25 *m*, ou ainda, com raio de medida 12,5 *m*.

Uma circunferência de centro na origem e raio com medida 12,5 *m*, construída no plano *xy* $(z = 0)$, será descrita pela equação:

$$x^2 + y^2 = (12{,}5)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 156{,}25.$$

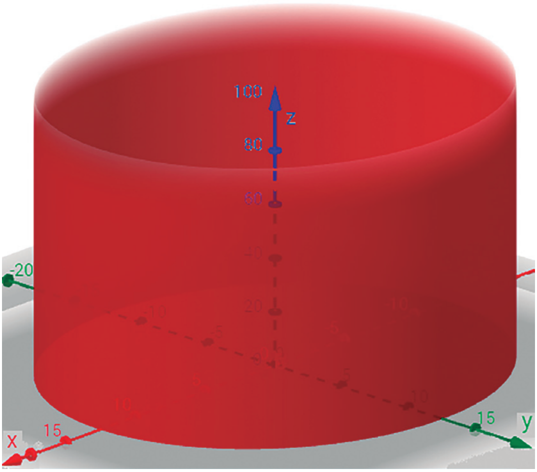
Assim, a superfície cilíndrica pode ser construída a partir da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 156{,}25$ ao longo do eixo *z*.

Como o edifício possui 100 *m* de altura, a superfície cilíndrica em questão pode ser descrita por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 156,25 \\ 0 \leq z \leq 100 \end{cases},$$

cuja representação é dada conforme a Figura 4.26.

Figura 4.26 | Representação geométrica de uma das "Torres de Hércules"



Fonte: elaborada pela autora.

Note que a interseção com o plano *xy* ($z = 0$) é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 156,25$. As interseções com o plano *xz* ($y = 0$) são dadas pelas retas $x = \pm 12,5$, enquanto as interseções com o plano *yz* ($x = 0$) correspondem às retas $y = \pm 12,5$.

Por outro lado, a Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, localizada no Paraná, pode ser estudada com base nas características da superfície cônica. Sabemos que essa obra arquitetônica tem formato descrito por uma das folhas de uma superfície cônica, possuindo 114 *m* de altura e base circular com 50 *m* de diâmetro.

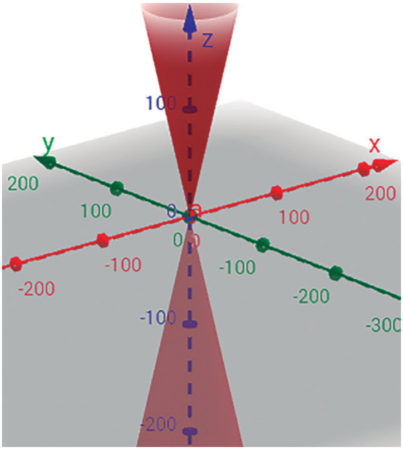
Como o vértice da superfície deve corresponder ao ponto $O(0,0,0)$, devemos supor que a base circular com 50 *m* de diâmetro, ou 25 *m* de raio, esteja contida no plano $z = -114$.

Sabemos que uma superfície cônica circular, com vértice na origem, tem equação dada por $z^2 = m^2\left(x^2 + y^2\right)$. Qualquer ponto da superfície no plano $z = -114$ assume a forma $P(x, y, -114)$, de modo que $x^2 + y^2 = 25^2$, isto é, $x^2 + y^2 = 625$. Como o ponto P que satisfaz essas condições pertence à superfície, então:

$$(-114)^2 = m^2(625) \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{(-114)^2}{625} \quad \Rightarrow \quad m^2 = 20{,}7936.$$

A superfície cônica que representa a catedral da cidade de Maringá, no Paraná, portanto, é descrita pela equação $z^2 = 20{,}7936\left(x^2 + y^2\right)$, cuja representação gráfica é dada conforme a Figura 4.27.

Figura 4.27 | Representação geométrica da catedral localizada em Maringá, no Paraná



Fonte: elaborada pela autora.

Na Figura 4.27, é possível observar as duas folhas da superfície cônica de equação $z^2 = 20{,}7936\left(x^2 + y^2\right)$. No entanto, para a descrição da catedral, apenas devemos considerar a folha voltada para baixo, desde o vértice até o plano $z = -114$, ou seja,

$$\begin{cases} z^2 = 20{,}7936\left(x^2 + y^2\right) \\ -114 \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Assim, concluímos essa tarefa obtendo descrições adequadas à superfície estudada.

Nesta situação, o objetivo consistia em comparar os formatos de edifícios com certas superfícies, possibilitando a representação algébrica destes. Para que isso seja possível, é fundamental identificar as principais características do formato da obra e comparar com os diferentes tipos de superfícies, sejam estas quádricas, esféricas, cônicas ou cilíndricas.

Avançando na prática

Superfícies cilíndricas não centradas na origem

Descrição da situação-problema

Uma indústria, para a produção de estruturas metálicas em formato cilíndrico, precisa, inicialmente, descrever algebricamente cada produto, para fabricar protótipos, com o auxílio de *softwares* computacionais, favorecendo a produção das estruturas corretamente.

Um estagiário do setor de construção de protótipos dessa indústria, investigando as propriedades das superfícies cilíndricas, deparou-se com a superfície descrita pela equação:

$$x^2 + z^2 + 4x - 6z + 9 = 0.$$

Analisando as características dessa superfície cilíndrica e sabendo que esta é circular, o que podemos concluir a respeito de seu centro? E de seus traços em relação aos planos da forma $y = k$?

Resolução da situação-problema

Seja a superfície cilíndrica de equação:

$$x^2 + z^2 + 4x - 6z + 9 = 0.$$

Pelo completamento de quadrados, efetuado com a adição e a subtração de 4 unidades no primeiro membro da equação e o emprego dos produtos notáveis, podemos rescrever essa equação da seguinte forma:

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) + \left(z^2 - 6z + 9\right) - 4 = 0 \Rightarrow \left(x + 2\right)^2 + \left(z - 3\right)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x + 2\right)^2 + \left(z - 3\right)^2 = 4.$$

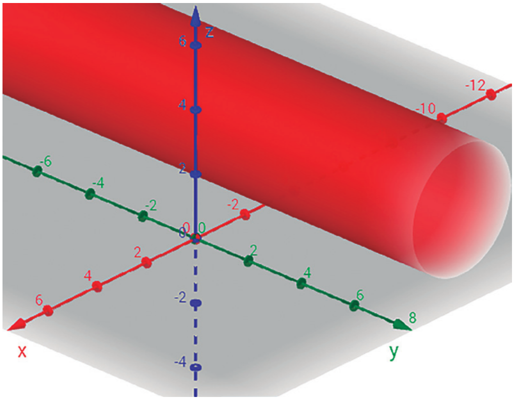
Assim, temos uma superfície cilíndrica construída a partir de uma circunferência, no plano *xz*, descrita pela equação:

$$(x+2)^2+(z-3)^2=4,$$

ou seja, uma circunferência, no plano *xz*, de raio 2 centrada no ponto *P* de abscissa -2 e com cota 3, isto é, $P(-2,0,3)$. Portanto, a superfície cilíndrica é centrada no ponto $P(-2,0,3)$, pertencente ao plano *xz*. Essa superfície pode ser observada conforme a Figura 4.28.

O traço da superfície em relação a planos da forma $y=k$, ou seja, planos paralelos ao plano *xz*, corresponde a circunferências de raio 2 centradas em pontos da forma $Q(-2,k,3)$.

Figura 4.28 | Superfície cilíndrica de equação $(x+2)^2+(z-3)^2=4$



Fonte: elaborada pela autora.

No estudo das superfícies, sejam estas quádricas, cônicas, cilíndricas ou esféricas, é fundamental identificar suas principais características, para que seja possível representá-las algébrica e geometricamente de forma adequada, preservando suas propriedades e empregando-as no estudo de outros fenômenos.

Faça valer a pena

1. Considere a superfície dada por:

$$z^2=3x^2+3y^2.$$

Com base nas propriedades da superfície em questão, preencha as lacunas da seguinte afirmação, tornando-a uma descrição correta para a superfície apresentada:

A superfície de equação $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ corresponde a uma superfície ______________, cujos traços nos planos *xy* e *yz* correspondem, respectivamente, a ______________ e a ______________, de modo que seu ______________ coincida com a origem.

Assinale a alternativa que indique, na ordem em que devem ser considerados, os termos que preenchem corretamente as lacunas da afirmação apresentada:

a) cônica – origem – duas retas paralelas – centro.

b) cônica – origem – duas retas concorrentes – vértice.

c) cônica – duas retas paralelas – duas retas concorrentes – vértice.

d) cilíndrica – origem – duas retas paralelas – centro.

e) cilíndrica – duas retas concorrentes – origem – vértice.

2. Sejam as superfícies descritas pelas seguintes equações:

$$I.\ 4y^2 + z^2 - x^2 = 0$$

$$II.\ x^2 - 9y^2 - 9 = 0$$

$$III.\ 2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$$

Associe as superfícies (denotadas por I, II e III) com as características indicadas nas descrições (representadas por A, B e C):

A. Superfície cilíndrica ao longo do eixo *z*.

B. Superfície cônica ao longo do eixo *y*.

C. Superfície cônica ao longo do eixo *x*.

Assinale a alternativa que indica todas as associações corretamente:

a) I – A; II – C; III – B.

b) I – B; II – A; III – C.

c) I – B; II – C; III – A.

d) I – C; II – A; III – B.

e) I – C; II – B; III – A.

3. Seja a superfície no espaço cartesiano descrita pela equação:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 15 = 0.$$

A respeito dessa superfície, foram feitas as seguintes afirmações:

I. A equação apresentada descreve uma superfície cônica, cujo vértice coincide com o ponto de coordenadas $P(1,0,0)$.

II. A equação apresentada descreve uma superfície cilíndrica, cujo centro coincide com o ponto $P(-1,0,0)$.

III. A equação apresentada descreve uma superfície cilíndrica, cujos traços em relação a planos na forma $z = k$ são elipses.

Com base na superfície e nas afirmações apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas a afirmação II está correta.

b) Apenas a afirmação III está correta.

c) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

d) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

e) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

Referências

BORIN JUNIOR, A. M. S. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 2014.

BOULOS, P. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

CONDE, A. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atlas, 2004.

FERNANDES, L. F. D. **Geometria Analítica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

LÁSCAR, J. Lascar National Centre for the Performing Arts (The Egg), 2008. Licenciado sob CC BY 2.0, via Wikimedia Commons. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lascar_National_Centre_for_the_Performing_Arts_(The_Egg)_(4474852849).jpg>. Acesso em: 22 fev. 2018.

SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015.

__________. **Cônicas e Quádricas**. 5. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2003.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

ISBN 978-85-522-0676-7