



# **Estruturas Isostáticas**



# **Estruturas Isostáticas**

João Carlos dos Santos

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Bárbara Nardi Melo

Adriane Monteiro Fontana

**Editorial**

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Santos, João Carlos do  
S237e Estruturas isostáticas / João Carlos do Santos. –  
Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.  
168 p.

ISBN 978-85-522-0673-6

1. Engenharia. 2. Estruturas. I. Santos, João Carlos do.  
II. Título.

CDD 620

---

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018  
Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza  
CEP: 86041-100 – Londrina – PR  
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br  
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Vigas isostáticas</b>	<b>7</b>
Seção 1.1 - Vigas isostáticas planas	8
Seção 1.2 - Vigas isostáticas inclinadas	30
Seção 1.3 - Vigas Gerber	43
<b>Unidade 2   Treliças isostáticas</b>	<b>55</b>
Seção 2.1 - Treliças isostáticas	56
Seção 2.2 - Treliças compostas	68
Seção 2.3 - Treliças espaciais	80
<b>Unidade 3   Pórticos isostáticos</b>	<b>93</b>
Seção 3.1 - Pórticos isostáticos: esforços reativos externos	94
Seção 3.2 - Pórticos isostáticos: diagramas de forças cortantes e normais	105
Seção 3.3 - Pórticos isostáticos: diagramas de momentos fletores	119
<b>Unidade 4   Grelhas isostáticas</b>	<b>131</b>
Seção 4.1 - Introdução ao estudo das grelhas	132
Seção 4.2 - Grelha engastada e livre	142
Seção 4.3 - Grelha triapoiada	155



# Palavras do autor

Caro aluno,

Estruturas Isostáticas é um assunto de grande importância na área de cálculo de estruturas da Engenharia Civil, e faz parte da base curricular para um bom desempenho quando chegar a hora de estudar Estruturas de Madeira e Metálicas, Estruturas de Concreto Armado, Pontes, entre outras. O conhecimento aqui apresentado lhe servirá de suporte durante toda a sua carreira na engenharia, pois esta disciplina tem por objetivo transmitir o conhecimento sobre os esforços internos e externos aos quais as estruturas isostáticas (como vigas, treliças, pórticos e grelhas) estão sujeitas.

Os estudos aos quais você será exposto lhe garantirão conhecimento sobre os conceitos fundamentais necessários para aplicar e executar cálculos de determinação dos esforços internos e as deformações das múltiplas estruturas, vigas, pórticos planos e grelhas; e também, lhe darão condições para determinar e analisar os esforços externos, atuantes e reativos de vigas isostáticas; para conhecer e definir os tipos de treliças; para analisar os esforços externos atuantes e reativos junto aos diagramas de forças cortantes, normais e momentos fletores em pórticos isostáticos; e para analisar estruturas do tipo grelhas. Essas serão suas competências técnicas.

Para que o acima citado se concretize, o material foi dividido em 4 Unidades de Ensino: na primeira, serão apresentadas vigas isostáticas planas; vigas isostáticas inclinadas; e vigas Gerber. Já na Unidade 2, abordaremos as treliças isostáticas; treliças compostas; e treliças especiais. A Unidade 3 é dedicada aos pórticos isostáticos, em que serão apresentados esforços externos reativos, diagramas de força cortante, momento fletor e normais. E, por fim, na Unidade 4, veremos as grelhas isostáticas, engastadas e triapoiadas.

Aluno, este é conjunto de informações comporão o seu aprendizado. Ao término desta fase, você começará a sentir-se um engenheiro!

Bons estudos!



## Vigas isostáticas

### Convite ao estudo

Caro aluno,

Nesta unidade, começam seus estudos sobre vigas isostáticas. Esse assunto é muito comum na Engenharia Civil, na área de Cálculos Estruturais, pois muitas das estruturas compostas por vigas, geralmente, não são aparentes, mas, se você for ao subsolo de um prédio, com certeza as verá, assim como embaixo de pontes, entre outras. Nesta unidade, você será apresentado aos cálculos iniciais para o dimensionamento de muitas dessas vigas.

O conteúdo que você estudará lhe garantirá condições de aplicar os conceitos fundamentais para determinar e analisar os esforços externos atuantes e reativos de vigas isostáticas, junto aos diagramas de forças cortantes e momentos fletores. E como ferramenta de desenvolvimento de seu potencial técnico, você será inserido, como estagiário, em um problema de uma situação real.

Você é um estagiário recém-contratado de uma empresa de cálculo estrutural; seu supervisor terá de dimensionar algumas vigas isostáticas e, para isso, dará a você a tarefa de calcular os esforços reativos externos, com seus diagramas de forças cortantes e momentos fletores.

Nas seções desta unidade, você aprenderá vigas isostáticas planas, vigas isostáticas inclinadas e vigas Gerber, assuntos que lhe darão condições de atender o solicitado pelo seu supervisor. A dedicação aos estudos é o segredo do sucesso!

# Seção 1.1

## Vigas isostáticas planas

### Diálogo aberto

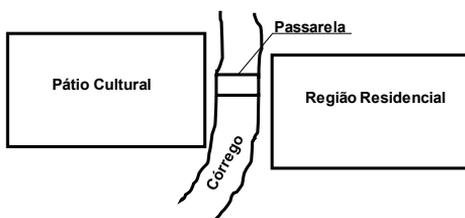
Caro aluno,

Nesta seção, estudaremos vigas isostáticas planas, as quais você encontra, com grande facilidade, no seu cotidiano, e podem ser de madeira, aço ou concreto. Em sua residência, talvez não aparente, há um conjunto de vigas que suporta as lajes.

Aqui você terá a oportunidade de calcular os esforços reativos externos em vigas biapoimadas – com e sem balanço – e em vigas engatadas; e também aprenderá, em função desses esforços reativos externos, a construir os diagramas de força cortante e momento fletor.

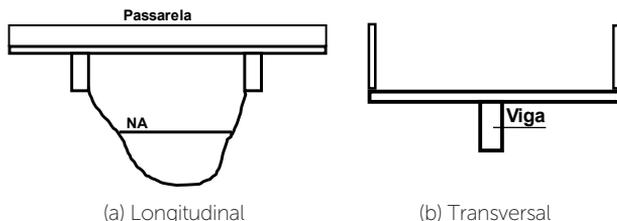
Não se esqueça de que você é estagiário, recém-contratado, de uma empresa de cálculo estrutural e seu supervisor terá de dimensionar algumas vigas isostáticas, para isso, ele dará a você uma tarefa que depende do conhecimento dos assuntos citados. Sua missão é apresentar os diagramas de força cortante e momento fletor juntamente com a força cortante máxima e o momento fletor máximo de uma viga de uma passarela de concreto armado que facilitará o acesso de pedestres da região residencial para o pátio cultural, em que há escola, quadras poliesportivas, cinema, praça para atividades físicas, entre outros. Seu supervisor apresentou alguns detalhes que facilitarão a compreensão do que deve ser feito: as Figuras 1.1, 1.2 e 1.3 mostram a localização da obra, os cortes longitudinal e transversal e o esquema estrutural de cálculo, respectivamente.

Figura 1.1 | Localização da obra



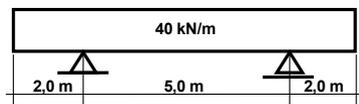
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.2 | Cortes da passarela



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.3 | Esquema estrutural de cálculo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para que tenha condições de obter êxito em sua missão, vamos aos estudos!

## Não pode faltar

Caro aluno,

Estamos iniciando nossos estudos sobre vigas isostáticas planas, mas antes vamos relembrar, de forma rápida, os vínculos e suas restrições, conforme apresentado no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 | Vínculos e suas restrições

Vínculos	Representação	Restrições ou reações
Móvel	ou	
Fixo		
Engaste	ou	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Feita essa rápida revisão, vamos para os estudos previstos.

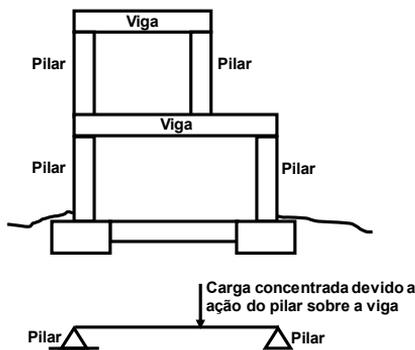
Os cálculos dos esforços externos reativos são realizados com base nas equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases}$$

• **Vigas isostáticas biapoizadas:** inicialmente sem balanço.

Carga concentrada: pode ser proveniente de um pilar que se apoia sobre uma viga, conforme Figura 1.4.

Figura 1.4 | Exemplo de carga concentrada

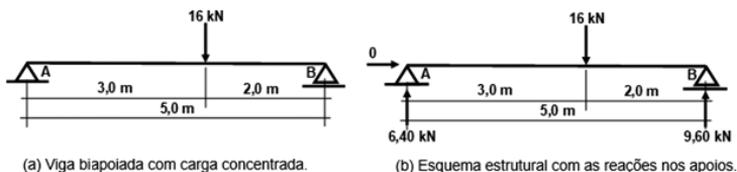


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dada a Figura 1.5.a, em que uma viga está suportando uma carga concentrada de 16 kN, calcularemos os esforços reativos externos nos apoios A e B, ou também podemos dizer as reações em A e B.

E, fazendo uso das Equações de Equilíbrio, obteremos o exposto na Figura 1.5.b.

Figura 1.5 | Carga concentrada



Fonte: Elaborada pelo autor.



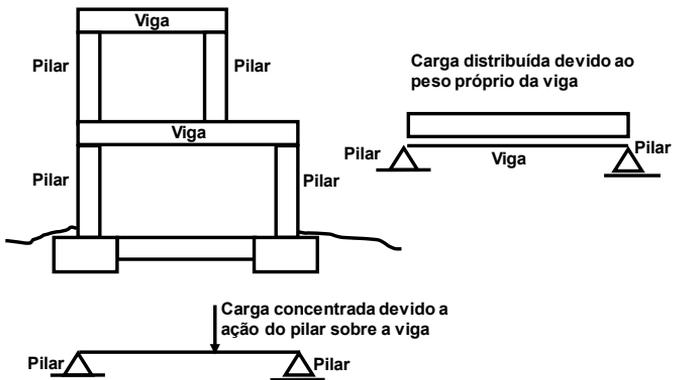
Em todo e qualquer cálculo de esforços externos reativos de vigas isostáticas, teremos como base as equações de equilíbrio, lembrando que:

- se a força promover giro da estrutura em sentido anti-horário, o momento será positivo e, no sentido horário, o momento será negativo;
- momento é calculado por:  $M = F \cdot d$ .

Você acabou de aprender a calcular os esforços externos reativos, ou reações, nos apoios com carga concentrada; agora veremos o mesmo tipo de estrutura, mas com carga distribuída. Neste novo tópico, você perceberá que a mudança é ínfima.

Carga distribuída: geralmente é oriunda dos próprios pesos de elementos componentes da estrutura, conforme Figura 1.6.

Figura 1.6 | Exemplo de carga distribuída



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 1.7.a mostra-nos uma viga biapoiada suportando uma carga distribuída 5 kN/m. Para essa estrutura, deveremos calcular as reações nos apoios A e B.

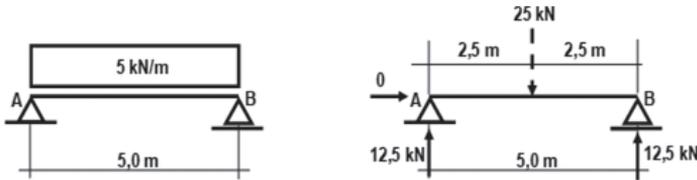
Para resolver esse tipo de problema, iniciamos transformando a carga distribuída em concentrada, que denominamos carga fictícia. A carga fictícia é obtida multiplicando-se a carga distribuída ( $q$ ) pela sua extensão ( $l$ ):  $C_{fic} = q \cdot l$ . Ela é representada, no esquema estrutural, como carga concentrada, porém tracejada e sempre será alocada

no centro de sua extensão, como mostra a Figura 1.7.b, que também apresenta as reações nos apoios calculadas considerando a carga fictícia e fazendo uso das Equações de Equilíbrio.

$$C_{fic} = q \cdot l$$

$$C_{fic} = 5 \cdot 5 \Rightarrow C_{fic} = 25 \text{ kN} \text{ (Esse é o valor da carga fictícia)}$$

Figura 1.7 | Carga distribuída



(a) Viga biapoiada com carga distribuída. (b) Carga concentrada fictícia e as reações nos apoios.

Fonte: Elaborada pelo autor.



### Exemplificando

Como a maior parte das estruturas são combinações de cargas distribuídas e concentradas, vamos mostrar um exemplo dessa condição:

A Figura 1.8.a apresenta um esquema estrutural de uma viga biapoiada com cargas concentradas e distribuídas para que se calcule os esforços externos reativos, ou seja, as reações nos apoios.

Vamos iniciar os cálculos substituindo as cargas distribuídas por cargas fictícias em cada um de seus vãos.

A carga distribuída de 30 kN/m será substituída pela fictícia resultante de

$$C_{fic} = q \cdot l, \text{ sendo } q = 30 \text{ kN/m e } l = 6 \text{ m} :$$

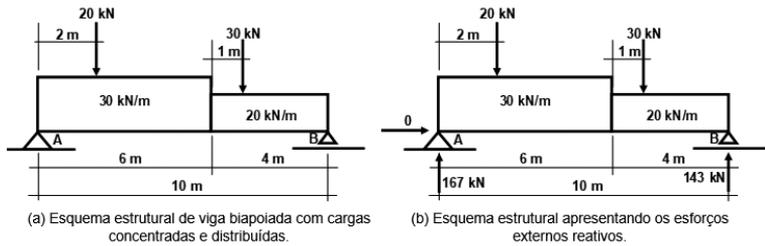
$$C_{fic} = q \cdot l \Rightarrow C_{fic} = 30 \cdot 6 \Rightarrow C_{fic} = 180 \text{ kN}$$

O mesmo processo se dá para a carga distribuída de 20 kN/m com vão de 4 m:

$$C_{fic} = q \cdot l \Rightarrow C_{fic} = 20 \cdot 4 \Rightarrow C_{fic} = 80 \text{ kN}$$

As cargas fictícias calculadas alocamos no centro de suas extensões, depois disso, passamos a ter conjunto de cargas concentradas. Então, com o auxílio das Equações de Equilíbrio, obtemos os esforços externos reativos, ou seja, as reações nos apoios (Figura 1.8.b).

Figura 1.8 | Cargas concentradas e distribuídas



Fonte: Elaborada pelo autor.



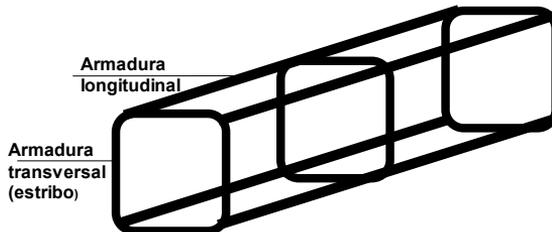
Assimile

Cargas fictícias (ou equivalentes, em algumas bibliografias) também são cargas concentradas, resultantes de cargas distribuídas.

### • Diagramas de forças cortantes e momentos fletores

Os diagramas de forças cortantes e momentos fletores são muito importantes para que possamos entender o comportamento das estruturas. Exemplificando, no caso de concreto armado, utilizam-se os momentos fletores para dimensionar as armaduras longitudinais das vigas e, com o digrama de forças cortantes, é possível dimensionar as armaduras transversais (estribos), como na Figura 1.9.

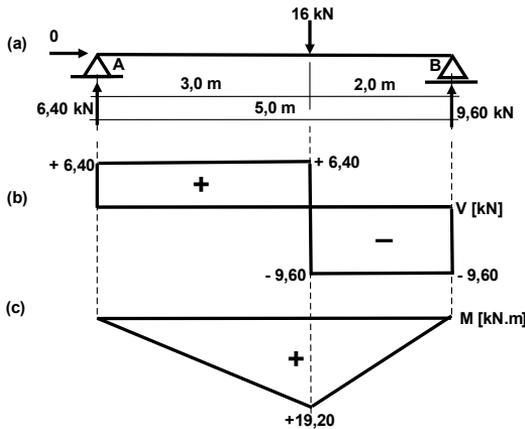
Figura 1.9 | Armadura de viga em concreto armado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos aprender a construir os diagramas de força cortante e momento fletor para viga biapoiada com carga concentrada (Figura 1.10.a).

Figura 1.10 | Esquema estrutural com as reações nos apoios e os diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, a explicação da construção do diagrama de força cortante (V) representado na Figura 1.10.b:

- No apoio A, foi obtida uma reação de 6,40 kN para cima, então, no diagrama, traçamos uma reta vertical na mesma direção representando essa reação.
- Do apoio A até a carga concentrada de 16 kN, não há nenhum tipo de esforço, por isso traçamos uma reta horizontal até a carga concentrada.
- Chegando à carga concentrada, temos 6,40 kN positivo, mas a carga de 16 kN é negativa, porque está descendo, então, somando as duas, temos  $-9,40$  kN [ $6,40 + (-16) = -9,60$  kN], por isso traçamos uma reta vertical de +6,40 kN a -9,60 kN.
- Do ponto em que há -9,60 kN até o apoio B, novamente não existe nenhum tipo de esforço, então traçamos, mais uma vez, uma reta horizontal até o referido apoio.
- No apoio B, chegou-se com a cortante -9,60 kN, mas nele há uma reação vertical para cima, ou seja, positiva, de 9,60 kN, portanto, somando-se a cortante com a reação, o resultado será zero, assim fechou-se o diagrama com traço vertical.
- No desenho formado acima do eixo, identificamos com o sinal positivo, e abaixo, com sinal negativo. Diagrama traçado, não se esqueça de identificá-lo com a letra V, que simboliza força cortante, e de colocar a unidade, nesse caso [kN].

Obtido o diagrama de força cortante (Figura 1.10 b), construímos o diagrama de momento fletor (M) (Figura 1.10.c).

Os valores do momento fletor são determinados calculando-se a integral da função cortante. No caso de cargas concentradas, a função é constante, então:

$$f(V) = V \text{ Função da cortante.}$$

Calcula-se também a função do momento fletor:

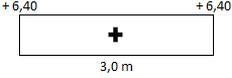
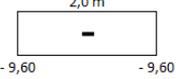
$$M = \int f(V)dx \Rightarrow M = \int Vdx \Rightarrow M = V \int dx \Rightarrow M = V \cdot x .$$

A demonstração da integral garante que o diagrama apresentará um comportamento linear.

Não se preocupe, pois calcularemos o momento por área.

Calculando os momentos por área, temos a Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Cálculo de momento fletor por área

Figura	Representação	Área = Momento fletor [kN.m]	Momento Acumulado	x [m]
Apoio A			0	0
I		$6,40 \cdot 3 = 19,20$	19,20	3
II Apoio B		$-9,60 \cdot 2 = -19,20$	0	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O momento acumulado é obtido pela equação  $M_i^{ac} = A_i + M_{ant}^{ac}$ , onde:

$M_i^{ac}$  = Momento Acumulado;

$A_i$  = Área do momento a ser calculado o acúmulo;

$M_{ant}^{ac}$  = Momento Acumulado anterior.

Considerando momento acumulado em função de posição (x), teremos então pares ordenados, que ligamos por retas conforme diagrama da Figura 1.10.c, isso porque estamos trabalhando somente com carga concentrada.

Não podemos deixar de indicar o símbolo de momento fletor (M) e a unidade de trabalho, nesse caso [kN.m].

No caso de momento fletor abaixo do eixo, indicamos com sinal positivo e acima do eixo, com sinal negativo.

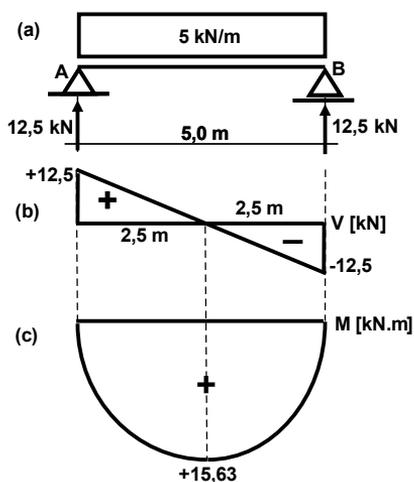
O importante não é saber apenas fazer os diagramas, mas, sim, entender o que nos mostram e a importância dessas informações.

Momento máximo **19,20 kN·m**, e isso sempre acontecerá onde a força cortante for mínima, essa informação é muito importante para o dimensionamento das armaduras longitudinais.

Máxima cortante **9,60 kN**, que definirá as armaduras transversais (estribos).

Terminamos o conceito básico de diagramas de força cortante e momento fletor para vigas biapoiadas com cargas concentradas. Agora, passaremos a ver a mesma situação de viga, porém com carga distribuída, que será desenvolvida com base na Figura 1.11.a.

Figura 1.11 | esquema estrutural com os valores das reações nos apoios A e B, diagramas de força e momento fletor



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos apresentar o diagrama de força cortante e a explicação de seu desenvolvimento (Figura 1.11.b).

Como se trata de carga distribuída, a função cortante será:  $V(x) = V_A + q \cdot x$ , onde  $V_A = 12,50 \text{ kN}$ ,  $q = -5 \text{ kN/m}$ , negativa devido ao sentido de sua ação (de cima para baixo). Calculando, metro a metro, teremos a Tabela 1.2, sendo  $V(x) = 12,50 + (-5) \cdot x$ .

Tabela 1.2 | Forças cortantes atuantes ao longo da viga.

x	V(x)
0	12,50
1	7,50
2	2,50
3	-2,50
4	-7,50
5	-12,50

Fonte: Elaborada pelo autor.



### Refleta

Como iríamos definir uma estrutura sem entender seu comportamento em função dos esforços externos atuantes, ou seja, suas solicitações?

Acompanhando as cortantes calculadas ao longo da viga, conseguimos montar o diagrama, mas não podemos chegar ao final da viga e deixar o diagrama em aberto, pois, nesse ponto, a cortante é de  $-12,50$  kN, mas há uma reação positiva, no mesmo ponto, de  $12,50$  kN, então, somando-as, o diagrama fechará em zero, portanto, para que isso aconteça, devemos traçar uma linha vertical. E já enxergamos a cortante máxima, que é de  $12,50$  kN. Mas notamos que, no gráfico, aparecem as medidas que localizam a mínima cortante, então mostraremos como isso é obtido:

$V(x) = 0$ , nesse caso, cortante mínima;  $V_A = 12,50$  kN e  $V_q = -5$  kN / m

$$0 = 12,50 + (-5) \cdot x \Rightarrow x = \frac{12,50}{5} \Rightarrow x = 2,50 \text{ m}$$

Então, do apoio A ao local em que ocorre a cortante mínima, a distância é  $2,50$  m.

E com o diagrama de força cortante podemos desenvolver o diagrama de momento fletor. Como citado anteriormente, o cálculo do momento fletor se dá pela integral da função cortante, assumindo que esta é:  $V(x) = q \cdot x$ .

Portanto, a função do momento fletor será:

$$M = \int V(x) dx \Rightarrow M = \int q \cdot x dx \Rightarrow M = q \int x dx \Rightarrow M = q \cdot \frac{x^2}{2}$$

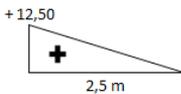
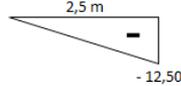
Dessa função,  $M = q \cdot \frac{x^2}{2}$ , para o caso que estamos estudando, podemos afirmar que o momento máximo será  $M = q \cdot \frac{l^2}{8}$ , porque ocorrerá no centro da viga em  $l/2$ . Vamos demonstrar:

$$M = \frac{q}{2} \cdot x^2 \text{ e } x = l/2, \text{ então: } M_{\max} = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow M_{\max} = \frac{q}{2} \cdot \frac{l^2}{4} \Rightarrow M_{\max} = q \cdot \frac{l^2}{8}$$

e isso ocorrerá onde a cortante é mínima.

Mas calcularemos o momento por áreas, o que não fere o conceito das integrais, fazendo uso da Tabela 1.3 de momentos acumulados.

Tabela 1.3 | Cálculo de momento fletor por área

Figura	Representação	Área = Momento fletor [kN.m]	Momento Acumulado	x [m]
Apoio A			0	0
I		$\frac{12,50 \cdot 2,50}{2} = +15,63$	+15,63	2,5
II Apoio B		$\frac{-12,50 \cdot 2,50}{2} = -15,63$	0	5

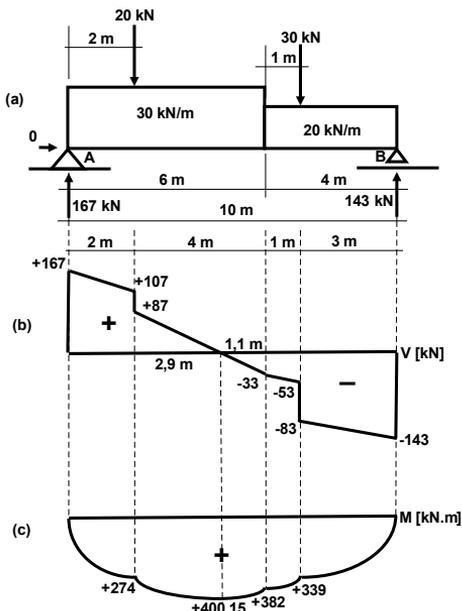
Fonte: elaborada pelo autor.

Com esses valores, construímos o diagrama de momento fletor (Figura 1.11.c), da mesma forma que mostrado anteriormente, porém aqui consideramos que, pelo fato de a carga ser distribuída, o diagrama apresenta-se em forma de parábola.

No gráfico (Figura 1.11.c), podemos observar que o momento máximo é 15,63 kN · m, ocorrendo quando a cortante é mínima, nesse caso, nula, e no centro da viga. Por ser uma carga distribuída sem variação ao longo de toda a viga, podemos confirmar o valor do momento máximo pela equação:  $M_{\max} = q \cdot \frac{l^2}{8} \Rightarrow M_{\max} = 5 \cdot \frac{5^2}{8} \Rightarrow M_{\max} = 15,63 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Assim, está confirmado o que se apresenta no diagrama (Figura 1.11.c).

Como estudamos os dois casos separados, diagramas de força cortante e momento fletor para cargas concentrada e distribuída, vamos juntá-los numa única situação. Vamos apoiar-nos no caso representado pela Figura 1.12 e desenvolveremos os seus diagramas de força cortante e momento fletor.

Figura 1.12 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externos reativos, diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Acompanhando o apresentado na Figura 1.12.b, diagrama de força cortante, explicaremos o seu desenvolvimento:

- No apoio A, temos uma reação de 167 kN, então, partindo da origem, traçamos uma reta vertical que representa a reação.
- Da reação de 167 kN à força concentrada de 20 kN, temos uma carga distribuída de 30 kN/m, distribuída por 2 m, então, fazendo uso da função cortante  $V(x) = V_A + q \cdot x$ , determinamos o valor seguinte de cortante:  $V(x) = V_A + q \cdot x \Rightarrow V(2) = 167 + (-30) \cdot 2 \Rightarrow V(2) = 107 \text{ kN}$ ; obtido o valor da próxima cortante, traçamos uma reta inclinada ligando 167 kN a 107 kN (inclinada por se tratar de carga distribuída).
- Mas, a 2 m do apoio A, há uma carga concentrada de 20 kN, com vetor, em sentido negativo, de 107 kN somamos à carga de -20 kN, obtendo-se o valor de 87 kN, (essa queda é representada por um traço vertical).
- A partir da carga concentrada de 20 kN, há novamente carga distribuída de 30 kN/m ao longo de 4 m, para representar essa ação, mais uma vez, fazemos uso da função cortante  $V(x) = V_i + q \cdot x$ :  $V(x) = V_i + q \cdot x \Rightarrow V(4) = 87 + (-30) \cdot 4 \Rightarrow V(4) = -33 \text{ kN}$

; assim, o valor de  $-33$  kN foi alocado a 4 m da carga concentrada de 20 kN e ligado por um traço inclinado que parte de 87 kN a  $-33$  kN.

- Ao término da carga distribuída de 30 kN/m, inicia-se outra carga distribuída de 20 kN/m, que percorre 1 m até a carga concentrada de 30 kN; para representar essa ação, usamos a função cortante:  $V(x) = V_i + q \cdot x \Rightarrow V(x) = V_i + q \cdot x \Rightarrow V(1) = -33 + (-20) \cdot 1 \Rightarrow V(1) = -53$  kN; tendo o conhecimento do valor ( $-53$  kN) alocado no mesmo ponto da carga concentrada de 30 kN, traçamos uma reta inclinada (por representar carga distribuída) ligando  $-33$  kN a  $-53$  kN.
- Onde se alocou  $-53$  kN, há uma carga de 30 kN, em sentido negativo, por isso realizamos essas ações:  $-53 + (-30) = -87$  kN, onde  $-53$  kN e  $-83$  kN foram ligados por um traço vertical.
- De  $-83$  kN, há novamente carga distribuída, essa com o valor de 20 kN/m ao longo de 3 m, chegando ao apoio B e, como em todas as vezes em que há carga distribuída, usamos a função cortante  $V(x) = V_i + q \cdot x \Rightarrow V(x) = V_i + q \cdot x \Rightarrow V(3) = -83 + (-20) \cdot 3 \Rightarrow V(3) = -143$  kN; como já visto, por se tratar de carga distribuída, ligamos os valores  $-83$  kN e  $-143$  kN por um traço inclinado.
- O ponto em que se alocou o valor  $-143$  kN é o apoio B, que tem reação, em sentido positivo, de 143 kN, portanto, somando esses valores, temos o resultado nulo, fechando assim o sistema com um traço vertical atingindo a origem.
- Observe que, entre os valores de transição 87 kN e  $-33$  kN, constam suas distâncias ao ponto nulo (ponto de transição), cujo total é 4 m. As distâncias foram obtidas dividindo-se os valores pela carga distribuída atuante:

$$d_1 = 87 / 30 \Rightarrow 2,90 \text{ m}$$

$$d_2 = 33 / 30 \Rightarrow 1,10 \text{ m}$$

nesse caso:  $d_1 + d_2 = 4,00 \text{ m}$

$$d_1 + d_2 = 4,00 \text{ m} \Rightarrow 2,90 + 1,10 = 4,00 \text{ m Ok!!!}$$

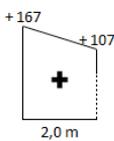
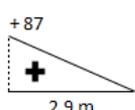
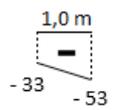
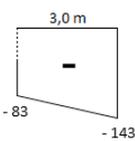
Assim, as medidas do ponto são 2,90 m e 1,10 m, conforme apresentadas no diagrama de força cortante. Finalizamos nosso diagrama, mas não esqueça de colocar o símbolo de cortante (V) e a unidade de trabalho, que foi [kN].

Com a análise do diagrama de força cortante, podemos indicar a máxima força cortante atuante na estrutura, que é 167 kN. Se você estivesse dimensionando uma viga de concreto armado, esse seria o valor para dimensionar a armadura transversal, também conhecida como estribo.

Agora que temos o diagrama de força cortante, podemos construir o diagrama de momento fletor, conforme a Figura 1.12.c, explicado a seguir.

Temos cinco figuras geométricas no diagrama de força cortante, da esquerda para a direita: trapézio, triângulo, triângulo, trapézio e trapézio. Calculamos as áreas de cada figura, assumindo o sinal da sua área cortante, conforme a Tabela 1.4.

Tabela 1.4 | Cálculo de momento fletor por área

Figura	Desenho	Área = Momento fletor [kN.m]	Momento Acumulado	x [m]
Apoio A			0	0
I		$\frac{167 + 107}{2} \cdot 2 = 274$	274	2
II		$\frac{87 \cdot 2,90}{2} = 126,15$	400,15	4,90
III		$\frac{-33 \cdot 1,10}{2} = -18,15$	382	6
IV		$\frac{-33 + (-53)}{2} \cdot 1 = -43$	339	7
V (Apoio B)		$\frac{-83 + (-143)}{2} \cdot 3 = -339$	0	10

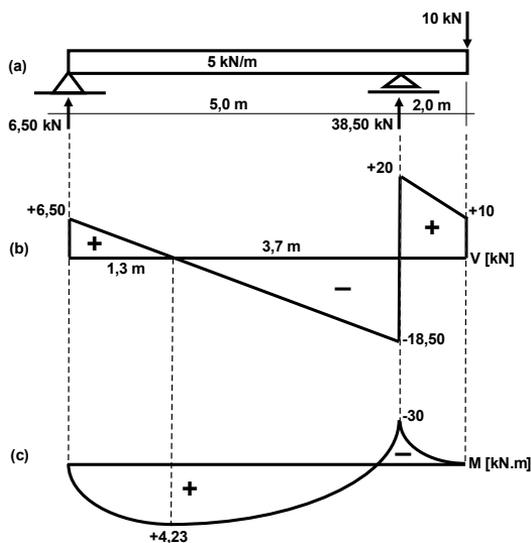
Fonte: elaborada pelo autor.

Fazendo uso da Tabela 1.4 e considerando o Momento Acumulado a coordenada  $y$ , temos pares ordenados  $x$  e  $y$ , lembrando que momentos fletores positivos são abaixo do eixo e que a carga é distribuída por toda a extensão da viga. Em razão de as cargas distribuídas estarem em toda extensão, o traçado do diagrama tende a uma parábola, conforme se observa na Figura 1.12. Dessa forma, construímos o diagrama de momento fletor e nele enxergamos o momento máximo, que é  $400,15 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Mais uma vez falando sobre dimensionamento de viga em concreto armado, essa informação é importante para dimensionar a armadura longitudinal.

Com essas explicações, você não terá mais dificuldades para desenvolver os diagramas de força cortante e momento fletor, pois o que foi visto até aqui é a base para todas as situações.

Vamos agora desenvolver um diagrama de força cortante e momento fletor para viga isostática biapoiada com balanço, tendo como base a Figura 1.13.

Figura 1.13 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externos reativos, diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o desenvolvimento do diagrama de força cortante, não há novidade, basta que sigamos o que foi estudado até agora. Vamos nos aplicar-nos no desenvolvimento do diagrama de momento fletor.

Calculando o momento fletor pelas áreas das figuras geométricas formadas no diagrama de força cortante, temos os resultados de que necessitamos, usando novamente a tabela das áreas (Tabela 1.5).

Tabela 1.5 | Cálculo de momento fletor por área

Figura	Áreas = Momentos [kN.m]	Momento Acumulado [kN.m]	x [m]
Apoio A		0	0,00
I	$\frac{6,50 \cdot 1,30}{2} = 4,23$	4,23	1,30
Apoio B	$\frac{-18,50 \cdot 3,70}{2} = -34,23$	-30,00	3,70
III	$\frac{20 + 10}{2} \cdot 2 = 30$	0	7,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Momento Acumulado é obtido por  $M_i^{ac} = A_i + M_{ant}^{ac}$ , onde:

$M_i^{ac}$  = Momento Acumulado;

$A_i$  = Área do momento a ser calculado o acúmulo;

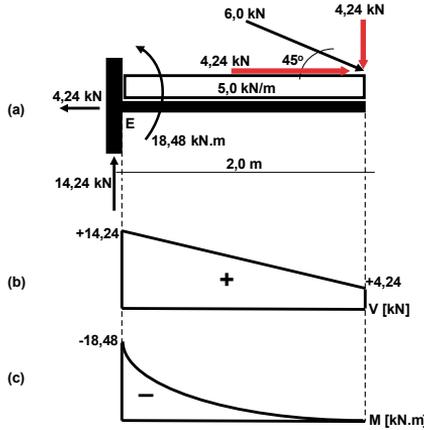
$M_{ant}^{ac}$  = Momento Acumulado anterior.

Calculamos os momentos como já havíamos estudado, a novidade foi o aparecimento de um momento negativo (sempre será acima do eixo). Como o problema apresentado envolve carga distribuída, o diagrama tende a ser uma parábola, cuja concavidade deverá ser voltada para cima. Observe bem o diagrama da Figura 1.13.c.

Analisando os diagramas da Figura 1.13 b, em estudo, nos quais a máxima cortante é de 20 kN, quanto ao momento fletor, temos dois momentos máximos, um positivo e um negativo, que são 4,23 kN.m e -30 kN.m. Exemplificando a aplicação dos valores de momento fletor obtidos (Figura 1.13 c), e, mais vez, usando a área de concreto armado, o momento positivo de 4,23 kN.m definiria a armadura longitudinal positiva, também chamada armadura positiva; e o momento negativo, de -30 kN - m, definiria a armadura longitudinal negativa, também chamada armadura negativa.

Para finalizarmos o aprendizado desta seção, vamos ver o desenvolvimento dos diagramas de força cortante e momento fletor para viga isostática engastada. Para isso, tomaremos como base a Figura 1.14.

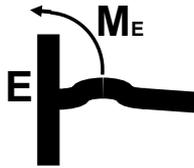
Figura 1.14 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externos reativos de uma viga engastada, diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Os cálculos são os mesmos já estudados, a diferença é como representamos, no diagrama, o momento em que aparecem na estrutura. Veja para onde o momento está puxando a estrutura, no caso da Figura 1.14, está no engaste, puxando a estrutura para cima, conforme demonstrado na Figura 1.15.

Figura 1.15 | Momento no engaste puxando a estrutura para cima



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a estrutura é puxada para cima, fazemos um traço vertical acima do eixo representando o momento e indicando seu valor – por estar acima do eixo, é representado como negativo –, em seguida, calculamos a área da figura geométrica e somamos ao valor, que apresentou resultado nulo, ou seja, zero. E, assim, unimos, com uma parábola, pois envolve uma carga distribuída, do valor do momento,  $-18,48 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , com o eixo no final da viga.

Agora você está preparado para atender à solicitação do seu supervisor!



## Pesquise mais

Complemente seus estudos com os capítulos 1, 3 e 4 do livro **Fundamentos de resistência dos materiais**, disponível na biblioteca digital. PINHEIRO, A. C. da F. B.; CRIVELARO, M. Fundamentos de **resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

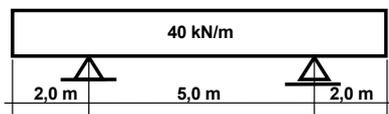
Veja também o Capítulo 11 do livro Resistência dos materiais, disponível na biblioteca virtual. HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

E o Capítulo 2 do livro **Análise das estruturas**, também disponível na biblioteca virtual. HIBBELER, R. C. Análise das estruturas. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

## Sem medo de errar

Você, como estagiário de empresa de cálculo, deverá apresentar os diagramas de força e também a força cortante máxima e o momento fletor de uma viga isostática cujo esquema estrutural de cálculo lhe foi fornecido na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Esquema estrutural de cálculo



Fonte: elaborada pelo autor.

Seguindo o que foi estudado, temos:

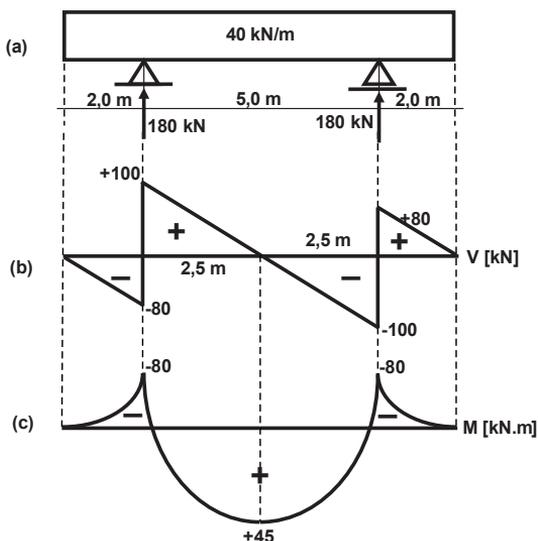
$$V(x) = q \cdot x = 40 \cdot x$$

$$M(x) = \frac{q \cdot x^2}{2} = 20 \cdot x^2$$

$$M_{MAX} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{40 \cdot 5^2}{8} = 125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Realizados os cálculos dos esforços externos reativos, construímos os diagramas de força cortante e momento fletor (Figura 1.16).

Figura 1.16 | Diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez que temos conhecimento dos diagramas de força cortante e momento fletor, podemos indicar a força cortante máxima e o momento fletor máximo. A força cortante máxima é de 100 kN. Quanto ao momento fletor, temos que indicar o máximo positivo, que é 45 kN.m, e o máximo negativo, que é 80 kN.m.

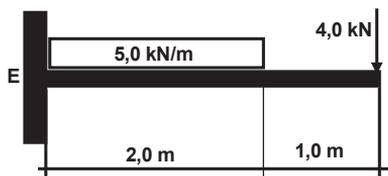
## Avançando na prática

### Adaptação de plataforma

#### Descrição da situação-problema

Na empresa em que você é estagiário, chegou uma situação de adaptação de pequena plataforma, que deverá ser sustentada por vigas engastadas, para as quais, em função das forças cortantes e momentos fletores, serão definidos os materiais e processos construtivos. Seu supervisor passa a você o esquema estrutural de cálculo, para que apresente os diagramas de força cortante e momento fletor (Figura 1.17), e também para que indique a cortante e o momento fletor máximos.

Figura 1.17 | Esquema estrutural de cálculo

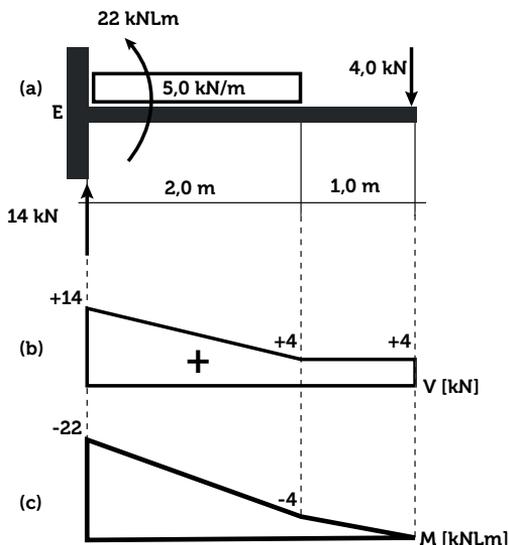


Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução da situação-problema

Calculadas as reações no engaste (E), desenvolvemos os diagramas de força cortante e momento fletor, conforme Figura 1.18.

Figura 1.18 | Diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os diagramas, podemos responder também que a cortante máxima é de 14 kN e o momento máximo é negativo, de 22 kN · m.

## Faça valer a pena

**1.** Engenharia Civil é uma formação que abrange várias áreas, como Planejamento, Fundação, Solos, Águas, Estruturas divididas em concreto,

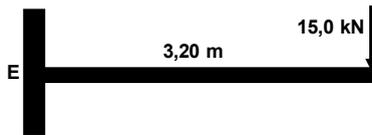
madeiras, metálicas e Alvenaria estrutural. Para formação em Estruturas, o aluno deve estudar, entre outras disciplinas, Resistência dos materiais, Estruturas isostáticas e hiperestáticas.

Indique qual das equações citadas a seguir é a base para resoluções de esforços externos reativos de vigas isostáticas.

- a) Equação de Bernoulli.
- b) Equação de Hazen-Williams.
- c) Equações de Equilíbrio.
- d) Equações de Cross.
- e) Equações de Transferência.

**2.** O Engenheiro Civil especialista em Cálculo estrutural executa, em seu cotidiano, os cálculos de pilares, lajes, elementos de fundação, vigas, entre outros. As vigas isostáticas podem ser biapoiadas, com ou sem balanço, planas, inclinadas, engastadas. A Figura 1.19 representa o esquema estrutural de cálculo de uma viga engastada.

Figura 1.19 | Esquema estrutural de cálculo de viga engastada



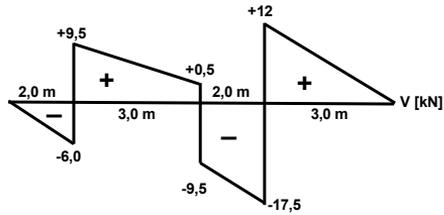
Fonte: elaborada pelo autor.

Indique a alternativa que apresenta o momento fletor correto que ocorre no engaste E.

- a) 15 kN
- b) 0 kN
- c) 15 kN - m
- d) 24 kN - m
- e) 48 kN - m

**3.** Os diagramas de força cortante e momento fletor são ferramentas utilizadas pelos Engenheiros Cívicos, especialistas em estruturas, para conhecer os esforços aos quais a estrutura é submetida. Cortante máxima e momento fletor máximo auxiliam a definir as características das estruturas. A Figura 1.20 apresenta o diagrama de força cortante de uma viga isostática.

Figura 1.20 | Diagrama de força cortante de uma viga isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

Fazendo uso do diagrama de força cortante, indique a alternativa correta quanto aos momentos máximos:

- a) +9 kN - m e -18 kN - m
- b) +9 kN - m
- c) -18 kN - m
- d) -9 kN - m e +18 kN - m
- e) +18 kN - m

# Seção 1.2

## Vigas isostáticas inclinadas

### Diálogo aberto

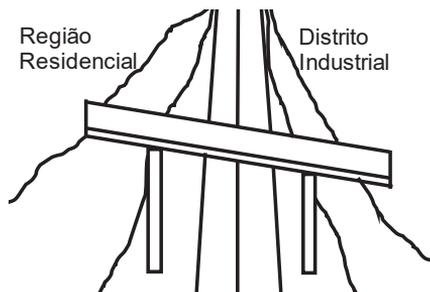
Caro aluno,

Estamos iniciando mais uma seção, aqui estudaremos vigas isostáticas inclinadas e, nesse estudo, novamente trataremos de esforços externos reativos e diagramas de momento força cortante e momento fletor.

Na seção anterior (Seção 1.1), estudamos vigas isostáticas planas, e nos foi apresentado que a determinação dos esforços externos reativos é obtida por meio das Equações de Equilíbrio, e que, tendo o conhecimento desses esforços e dos esforços externos ativos (as cargas), conseguimos desenvolver o diagrama de força cortante. Por fim, estudamos o desenvolvimento do diagrama de momento fletor, que dependente do diagrama de força cortante.

Para que você tenha condição de se desenvolver no assunto apresentado nesta seção, voltaremos a sua situação de estagiário de uma empresa de Cálculo Estrutural, em que seu supervisor, vendo que atendeu satisfatoriamente o que lhe foi solicitado, passa uma nova missão: apresentar a cortante e o momento fletor de uma passarela que garantirá a travessia de pedestres sobre uma rodovia, conforme Figura 1.21.

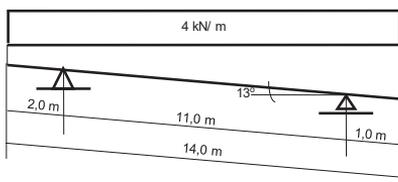
Figura 1.21 | Passarela a ser implantada sobre rodovia



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa passarela liga uma região residencial a uma industrial, muitas pessoas moram na primeira região e trabalham na segunda, atravessando diariamente a rodovia. Seu supervisor lhe fornecerá o esquema estrutural de cálculo da viga (Figura 1.22) e você notará que se trata de uma viga inclinada. Os cálculos devem ser desenvolvidos considerando que a atuação das forças, também chamadas esforços externos ativos, é perpendicular ao eixo da viga.

Figura 1.22 | Esquema estrutural de cálculo



Fonte: elaborada pelo autor.

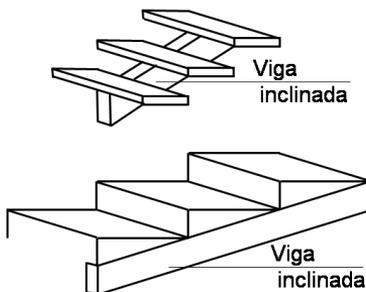
Para que você apresente bom desempenho nessa missão, vamos para o “Não pode faltar” e bom estudo!

## Não pode faltar

Aluno,

Vigas isostáticas inclinadas são de uso comum nas obras de construção, elas fazem parte do nosso cotidiano, estão presentes em passarelas, escadas, rampas (Figura 1.23).

Figura 1.23 | Vigas inclinadas em escadas



Fonte: elaborada pelo autor.

E, além dessas aplicações, o estudo das vigas isostáticas inclinadas lhe transmitirá uma boa visão para os estudos de Pórticos, isso porque, lá, você trabalhará o tempo todo com rotação dos eixos x e y, o que acontece quando trabalhamos com vigas inclinadas.

O estudo desse tipo de viga foi embasado na Seção 1.1, na qual adquirimos as ferramentas que resolverão todos os problemas:

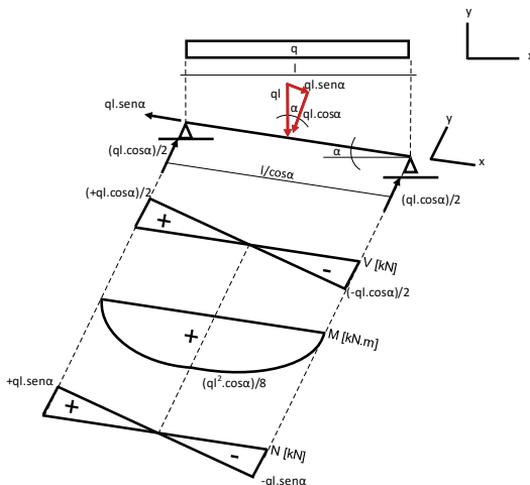
• Equações de Equilíbrio: 
$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases}$$

- Desenvolvimento dos diagramas de força cortante e momento fletor.

Quando recebemos a solicitação para determinar os esforços externos reativos, considerando os esforços externos ativos perpendiculares ao eixo da viga, a nossa obrigação é decompor esses esforços garantindo que eles estão perpendiculares à viga. O cálculo e os diagramas de força cortante, momento fletor e esforço normal em vigas isostáticas inclinadas nada mais são que a rotação dos eixos x e y. Veja a seguir:

- Carregamento vertical distribuído ao longo da projeção horizontal (Figura 1.24).

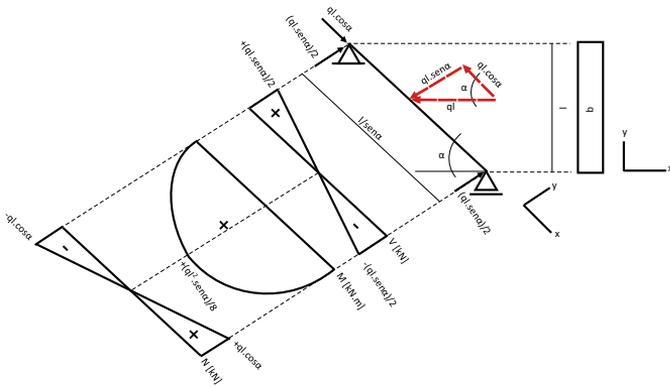
Figura 1.24 | Carregamento vertical distribuído ao longo da projeção horizontal



Fonte: elaborada pelo autor.

- Carregamento horizontal distribuído ao longo da projeção vertical (Figura 1.25).

Figura 1.25 | Carregamento horizontal distribuído ao longo da projeção vertical



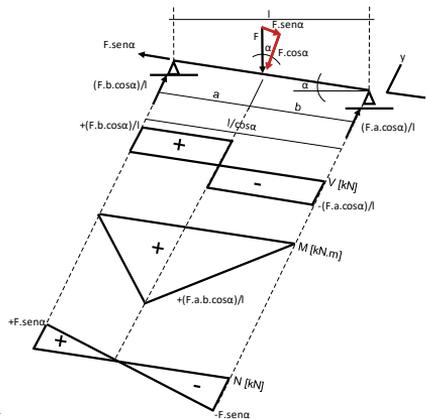
Fonte: elaborada pelo autor.

Você pode observar que houve uma rotação nos eixos, em função de um ângulo  $\alpha$ , e, em razão dessa rotação, somos obrigados a decompor a força em componentes paralelas aos novos eixos  $x$  e  $y$ . Uma vez encontradas as componentes, os cálculos dos esforços externos reativos, ou seja, as reações nos apoios e a construção dos diagramas de força cortante são realizados como foi mostrado.

Vamos apresentar o conceito para cargas concentradas:

- Carregamento vertical concentrado (Figura 1.26).

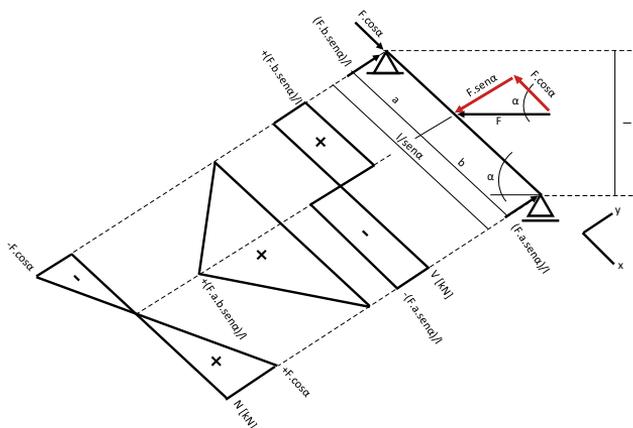
Figura 1.26 | Carregamento vertical concentrado



Fonte: elaborada pelo autor.

- Carregamento horizontal concentrado (Figura 1.27).

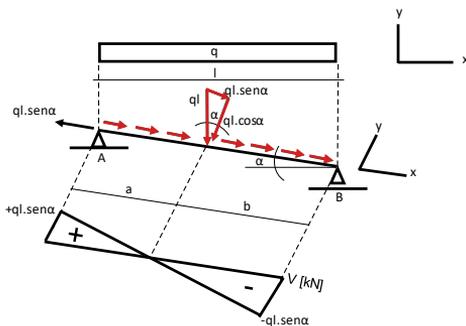
Figura 1.27 | Carregamento horizontal concentrado



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos dar uma atenção à construção do diagrama de força normal, observe a Figura 1.28).

Figura 1.28 | Diagrama de força normal de um esquema estrutural de cálculo



Fonte: elaborada pelo autor.

A força normal está diretamente ligada aos esforços internos da estrutura como tração, que representamos como positiva, e compressão, que representamos como negativa; esses efeitos são lineares. Observando a Figura 1.28, notamos que, no apoio A, temos a reação contrária à componente, em x, da carga  $ql$  que, por serem opostas no trecho  $a$ , provocam uma tração. Já no trecho  $b$ , a componente de  $ql$  vai de encontro ao apoio B, provocando uma compressão. Os efeitos de tração e compressão, nesse caso, têm

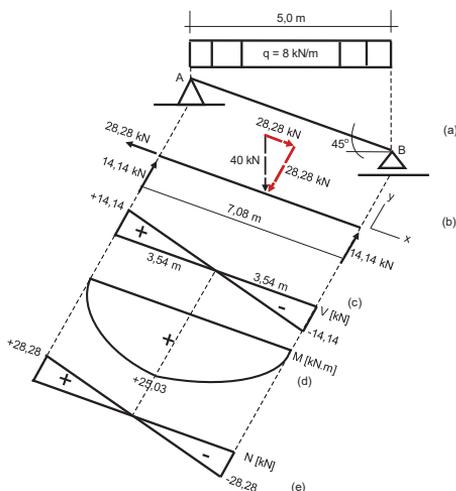
o valor em módulo, mas, sendo contrários em efeitos, suas áreas apresentam seus sinais de convenção.



## Exemplificando

A Figura 1.29 é o esquema estrutural de cálculo de uma viga inclinada, em que são apresentados os esforços externos reativos (reações nos apoios) considerando os esforços externos ativos (cargas) perpendiculares ao eixo da viga; e também seus diagramas de força cortante, momento fletor e força normal.

Figura 1.29 | Esquema estrutural de cálculo



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Observamos que a Figura 1.29a apresenta carga distribuída de 8 kN/m com hachuras verticais, essas hachuras representam as linhas de carga que não estão perpendiculares ao eixo da viga. Vamos definir a carga concentrada fictícia acompanhando a linha de ação da carga distribuída, assim, o vão (l) a ser considerado é de 5,0 m:

$$C_{fic} = q \cdot l \Rightarrow C_{fic} = 8 \cdot 5 \Rightarrow C_{fic} = 40 \text{ kN}$$

A carga concentrada fictícia é representada na Figura 1.29b. Como desejamos calcular os esforços externos reativos com as cargas atuando perpendiculares à viga, somos obrigados a decompô-la. A mesma figura apresenta as suas componentes em função dos eixos x e y.

Com as componentes alocadas no centro da viga, calculamos os esforços reativos externos, fazendo uso das Equações de Equilíbrio.

A seguir, construímos o diagrama de força cortante (Figura 1.29c), então obtemos o diagrama de momento fletor (Figura 1.29c), calculando pelas áreas das figuras geométricas do diagrama de força cortante, como estudado na Seção 1.1. E, finalizando, construímos o diagrama de força cortante.

Tendo os diagramas, podemos indicar a força cortante e o momento fletor máximo, respectivamente: 14,14 kN e 25,03 kN.m.

As vigas inclinadas são muito utilizadas em escadas e passarelas, dê um passeio pela sua cidade e verá muitas vigas desse tipo.



### Assimile

Para resolver problemas de vigas isostáticas inclinadas, basta decompor as forças, quando necessário, e aplicar as teorias estudadas na Seção 1.1.



### Refleta

Por que, no diagrama de momento fletor, o positivo está abaixo do eixo e o negativo, acima do eixo?

Na Seção 1.1, estudamos alguns tipos de vigas isostáticas planas como:

- Vigas biapoiadas.
- Vigas com balanço.
- Vigas engastadas.

Todas as vigas citadas podem surgir de forma inclinada, e o método de obtenção dos esforços externos reativos, assim como o desenvolvimento dos diagramas de momento fletor e força cortante, são realizados da mesma forma, desde que você decomponha as forças quando necessário.



### Pesquise mais

Para que você, aluno, tenha uma visão mais apurada do assunto, acesse:

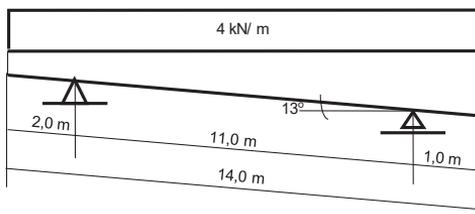
- Vídeo que apresenta o cálculos das reações em vigas inclinadas e

também a construção dos diagramas de força cortante e momento fletor. Teoria das Estruturas 12 – Ex02 – Viga Inclinada – reações e diagramas de esforços. Disponível em: <<https://youtu.be/QiBbWQ7cw7k>>. Acesso em: 6 out. 2017.

## Sem medo de errar

Você, como estagiário em uma empresa de cálculo estrutural, foi incumbido de apresentar a força cortante máxima e o momento fletor máximo de uma viga que sustentará uma passarela, e, para isso, foi fornecido o esquema estrutural de cálculo (Figura 1.22).

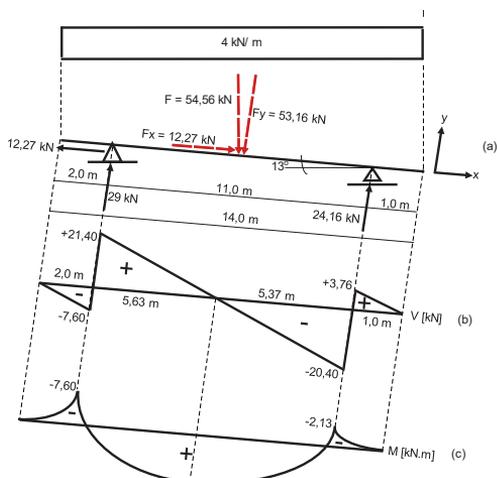
Figura 1.22 | Esquema estrutural de cálculo



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Figura 1.30 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externos reativos, diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Determinamos a carga concentrada fictícia e, por ela não ser perpendicular ao eixo da viga, também foram determinadas suas componentes em função dos eixos  $x$  e  $y$  (Figura 1.30a).

Fazendo uso das Equações de Equilíbrio estudadas na Seção 1.1, determinamos os esforços externos reativos, o que nos permitiu desenvolver o diagrama de força cortante (Figura 1.30b).

Para construir o diagrama de momento fletor, necessitamos determinar as distâncias dos apoios à posição em que a cortante é mínima (nula), o que nos obrigou a determinar a carga distribuída perpendicular ao eixo da viga. Essa carga distribuída foi definida pela razão entre a componente vertical ( $F_y$ ) da carga concentrada fictícia e a extensão total da viga: assim iniciamos a construção do diagrama de momento fletor por cálculo das áreas das figuras geométricas do diagrama de força cortante, conforme estudado na Seção 1.1.

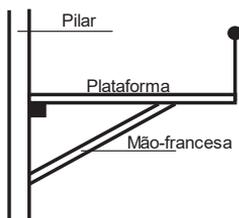
Com o término da construção dos diagramas, podemos atender à solicitação do supervisor informando que a força cortante máxima é 21,40 kN e os momentos fletores máximos são o negativo, de 7,60 kN.m e o positivo, de 52,64 kN.m. Com essa resposta, entregamos os diagramas (Figura 1.30b e c).

### Mão-francesa

#### Descrição da situação-problema

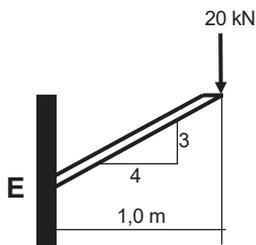
Um conjunto de mãos-francesas (Figura 1.31) sustentará uma plataforma, essas peças, na verdade, são vigas isostáticas inclinadas, cujo esquema estrutural de cálculo é fornecido na Figura 1.32, para que você determine os esforços externos reativos para a carga atuando em situação perpendicular ao eixo da viga.

Figura 1.31 | Plataforma sustentada por mão-francesa



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.32 | Esquema estrutural de cálculo – viga engastada



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Determinamos as componentes da força concentrada:

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(3/4) \Rightarrow \alpha = 36,87^\circ$$

$$F_x = 20 \text{sen} \alpha \Rightarrow F_x = 12 \text{ kN}$$

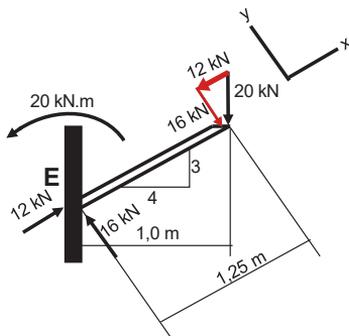
$$F_y = 20 \text{cos} \alpha \Rightarrow F_y = 16 \text{ kN}$$

Também é determinado o comprimento da viga:

$$\frac{l}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow l = 1,25 \text{ m}$$

E, conforme estudado na Seção 1.1, determinamos os esforços externos reativos, fazendo uso da Equações de Equilíbrio, cujos resultados são mostrados na Figura 1.33.

Figura 1.33 | Esforços externos reativos



Fonte: elaborada pelo autor.

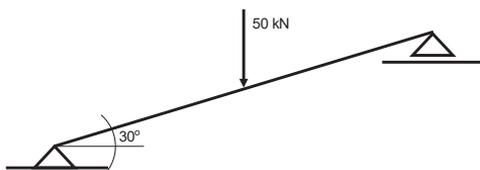
Os esforços externos reativos atuantes no engaste são: 16 kN perpendicular à viga, 12 kN no sentido do eixo da viga, e momento fletor de 20 kN.m em sentido anti-horário.

## Faça valer a pena

**1.** Estruturas isostáticas inclinadas são muito usuais em escadas, rampas, passarelas urbanas. Para o dimensionamento dessas estruturas, usamos os mesmos conceitos aplicados no dimensionamento de estruturas planas, com o diferencial de considerar os eixos  $x$  e  $y$  rotacionados.

Dada a estrutura, Figura 1.34, calcule a componente da força perpendicular à barra da estrutura.

Figura 1.34 | Estrutura isostática inclinada



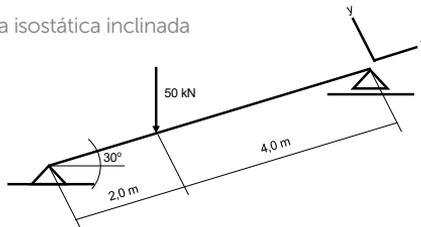
Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 25,00 kN
- b) 50,00 kN
- c) 40,33 kN
- d) 43,30 kN
- e) 43,03 kN

**2.** Estruturas isostáticas inclinadas são muito usuais em escadas, rampas, passarelas urbanas. Para o dimensionamento dessas estruturas, usamos os mesmos conceitos aplicados no dimensionamento de estruturas planas, com diferencial de considerar os eixos  $x$  e  $y$  rotacionados.

Dada a estrutura, Figura 1.35, calcule o esforço externo reativo, perpendicular à barra da estrutura, no apoio fixo.

Figura 1.35 | Estrutura isostática inclinada



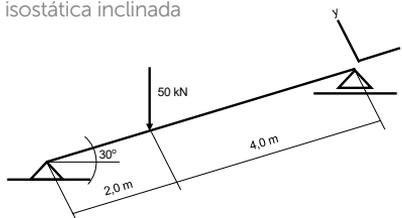
Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 28,87 kN
- b) 25,00 kN
- c) 14,33 kN
- d) 50,00 kN
- e) 33,76 kN

**3.** Os cálculos de esforços externos reativos, diagramas de força cortante e momento fletor são informações de grande valia para que possamos decidir as características da estrutura a ser utilizada e o material de sua confecção.

Calcule a cortante e o momento máximo da viga isostática com ações perpendiculares a sua barra (Figura 1.35).

Figura 1.35 | Estrutura isostática inclinada



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 57,34 kN e 28,67 kN.m
- b) 27,68 kN e 54,73 kN.m
- c) 72,68 kN e 43,75 kN.m
- d) 28,87 kN e 57,74 kN.m
- e) 76,82 kN e 75,34 kN.m

# Seção 1.3

## Vigas Gerber

### Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta última seção da Unidade 1, estudaremos vigas isostáticas do tipo Gerber, em que os conceitos estudados na Seção 1.1 e reforçados na seção seguinte (1.2) serão novamente aplicados. A novidade aqui é que trabalharemos com um conjunto de vigas isostáticas que atuam como uma única estrutura, denominada viga Gerber. Esse tipo estrutura é muito usual em pontes, passarelas, estruturas pré-moldadas, entre outras.

Não nos esqueçamos de que, nessa Unidade, você foi contratado como estagiário de uma empresa de cálculos estruturais e seu supervisor vem, aos poucos, solicitando que apresente os diagramas de força cortante e momento fletor, e também que indique a força cortante e os momentos fletores máximos ocorrentes nas estruturas que lhe são passadas. Nesta seção, você tem uma nova missão: apresentar os diagramas de força e momento fletor, indicando as máximas forças cortantes e os máximos momentos fletores da estrutura, que terá uma viga tipo Gerber, pois trata-se de uma passarela que sofrerá uma alteração devido ao alargamento de duas vias (Figura 1.36).

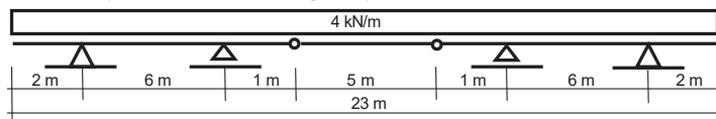
Figura 1.36 | Rodovia não alargada (a) e alargada (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que o ilustrado na Figura 1.36b ocorra, a passarela passa a ser sustentada por um sistema de viga Gerber, cuja situação estrutural é dada pela Figura 1.37, viga da sua missão.

Figura 1.37 | Esquema estrutural da viga da passarela



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao término desta seção, você terá condições para calcular os esforços externos reativos, construir diagramas de força cortante e momento fletor, e também analisar os esforços atuantes em vigas Gerber.

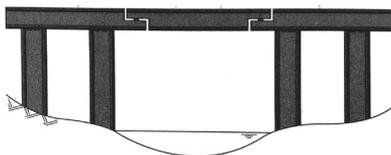
Para o sucesso de sua missão, vamos nos apoiar no item “Não pode faltar”!

## Não pode faltar

Aluno,

Como já citado, as vigas do tipo Gerber são usuais em pontes, passarelas, estruturas pré-moldadas, entre outras. Agora, deixaremos claro o que é Viga Gerber: trata-se de um conjunto de vigas isostáticas com balanço e vigas isostáticas simples, estas se apoiam nos balanços (Figura 1.38).

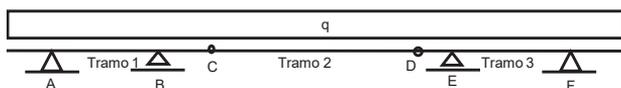
Figura 1.38 | viga Gerber



Fonte: Almeida (2009, p.82).

A Figura 1.39 representa o esquema estrutural de cálculo da Figura 1.38.

Figura 1.39 | Esquema estrutural de cálculo

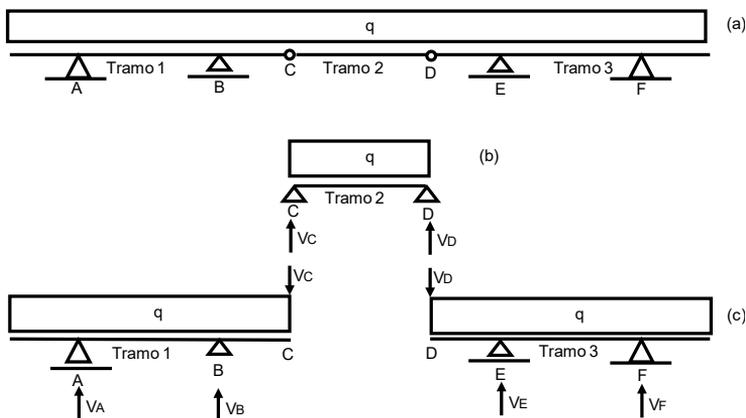


Fonte: elaborada pelo autor.

Tramo é uma viga sobre dois apoios. Observe que os tramos 1 e 3 são vigas com balanços e apoiadas sobre um apoio fixo e um móvel, já o tramo 2 é uma viga simples apoiada sobre os balanços dos Tramos 1 e 3, sendo esse conjunto de vigas isostáticas caracteriza uma viga Gerber.

Uma vez que entendemos a viga Gerber, vamos estudar o processo de cálculo das reações nos apoios (esforços externos reativos), com base na Figura 1.40.

Figura 1.40 | Cálculo de reações nos apoios de uma viga Gerber



Fonte: elaborada pelo autor.

Para iniciar os cálculos das reações nos apoios, devemos separar os tramos, conforme a Figura 1.40; calculamos, então, as reações nos apoios da viga isostática simples (Figura 1.40b – tramo 2); em seguida, transferimos essas reações com os vetores invertidos para os extremos dos balanços que suportam a viga simples (Figura 1.40c – tramos 1 e 3); realizado isso, podemos calcular as reações nos apoios das vigas isostáticas com balanço. Todos esses cálculos de reações nos apoios, para as vigas simples e com balanço, têm como base as Equações de Equilíbrio.

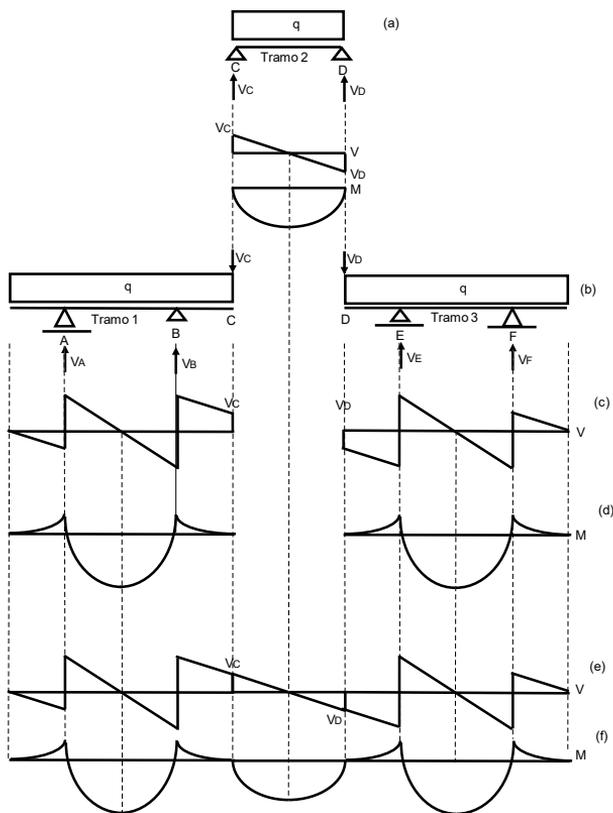


### Assimile

As reações das vigas simples em vigas Gerber devem ser transferidas para os extremos dos balanços que as suportam.

Já calculamos as reações nos apoios, então podemos construir os diagramas de força cortante e momento fletor, conforme explicado, a seguir, com o apoio da Figura 1.41.

Figura 1.41 | Construção dos diagramas de força e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

Construímos tanto o diagrama de força cortante quanto o de momento fletor para cada tramo em separado, como apresentado nas Figuras 1.41a, 1.41b, 1.41c e 1.41d; feito isso, juntamos os diagramas, como nas Figuras 1.46.e e 1.46.f.



**Refleta**

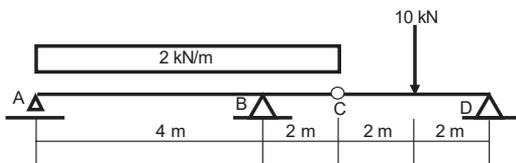
Por que devemos transferir as reações dos apoios das vigas isostáticas para os extremos dos balanços que as suportam quando se trata de viga Gerber?

Vamos agora exemplificar o que foi apresentado de forma genérica.

## Exemplificando

Dado o esquema estrutural de cálculo (Figura 1.42), apresente os diagramas de força cortante e momento fletor.

Figura 1.42 | Esquema estrutural de cálculo

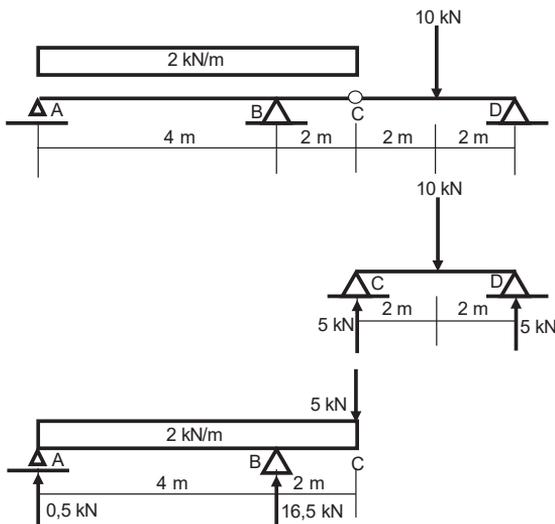


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Fazendo uso da Equações de Equilíbrio, calculamos as reações nos apoios (Figura 1.43).

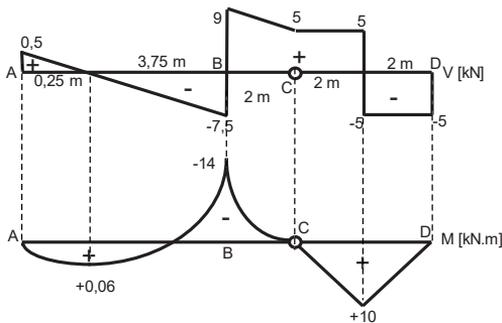
Figura 1.43 | Reações nos apoios



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os valores das reações nos apoios, construímos os diagramas de força cortante e momento fletor (Figura 1.44).

Figura 1.44 | Diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Para aprofundar seu conhecimento no assunto, acesse:

Biblioteca Virtual:

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Editora CENGAGE Learning, 2016.

Sites:

Cálculo de reações nos apoios de viga Gerber. Disponível em: <<https://youtu.be/5BzcnD-G2gU>>. Acesso em: 30 out. 2017.

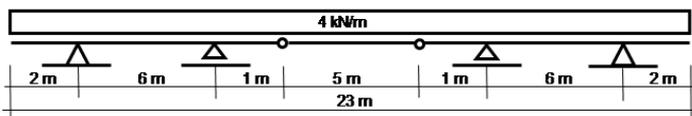
Diagrama de força cortante em viga Gerber. Disponível em: <<https://youtu.be/CRdeaxM71ck>>. Acesso em: 30 out. 2017.

Diagrama de momento fletor de viga Gerber. Disponível em: <<https://youtu.be/MqX0SvXxX6g>>. Acesso em: 30 out. 2017.

## Sem medo de errar

Seu supervisor solicitou que você apresentasse os diagramas de força e momento fletor, indicando as máximas forças cortantes e os máximos momentos fletores da estrutura, que terá uma viga tipo Gerber, cujo esquema estrutural de cálculo foi dado pela Figura 1.37.

Figura 1.37 | Esquema estrutural da viga da passarela

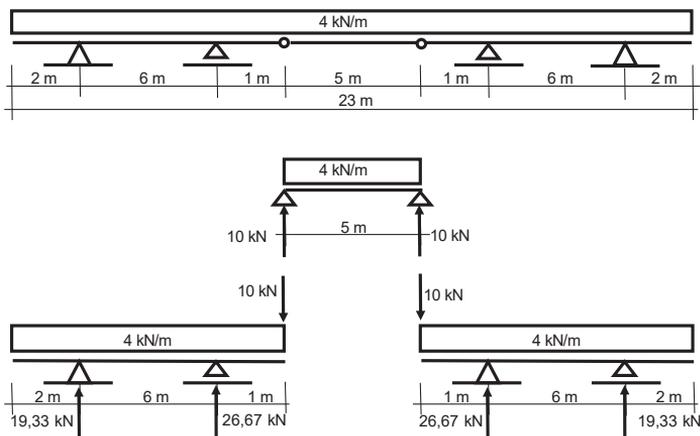


Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Seguindo o que foi apresentado, separamos as vigas e iniciamos pela viga isostática simples, transferimos as reações dos apoios para os extremos dos balanços em que a viga simples se apoia, e em seguida, calculamos as reações nos apoios das vigas isostáticas com balanço (Figura 1.45), sempre fazendo uso das Equações de Equilíbrio.

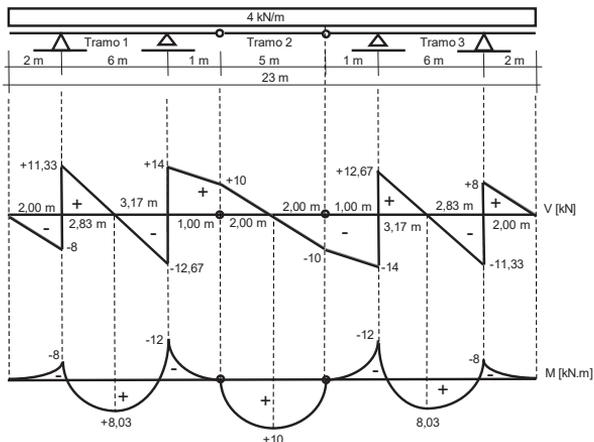
Figura 1.45 | Reações nos apoios



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtidas as reações nos apoios, construímos os diagramas de força cortante e momento fletor, fazendo inicialmente os diagramas para cada viga isostática para depois unirmos todos (Figura 1.46).

Figura 1.46 | Diagrama de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

E concluímos que as cortantes máximas são:  
 Nos tramos 1 e 3: 14 kN e -14 kN, respectivamente.  
 No tramo 2: 10 kN.  
 E os máximos momentos fletores são:  
 Nos tramos 1 e 3: +8,03 kN.m e -12 kN.m.  
 No tramo 2: 10 kN.m.

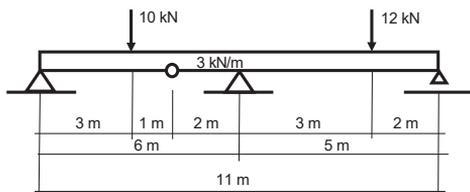
## Avançando na prática

### Momento máximo

#### Descrição da situação-problema

Dado o esquema estrutural de cálculo (Figura 1.47), determine os momentos máximos.

Figura 1.47 | Esquema estrutural de cálculo

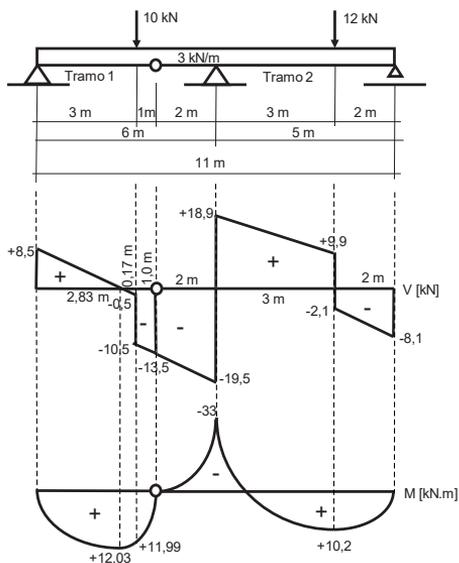


Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução da situação-problema

A Figura 1.48 apresenta os diagramas de força cortante e momento fletor da estrutura para a qual foram solicitados os momentos fletores máximos. Respondendo o que foi pedido, temos, no tramo 1, 12,03 kN.m de momento máximo e, no tramo 2, como momentos máximos, -33 kN.m e +10,2 kN.m.

Figura 1.48 | Diagramas de força cortante e momento fletor



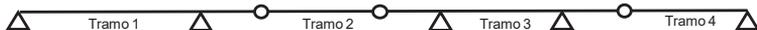
Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** Vigas Gerber são usuais em pontes, passarelas, estruturas pré-moldadas, entre outras. A viga Gerber é um conjunto de vigas isostáticas com balanço e vigas isostáticas simples, sendo as vigas simples apoiadas nos balanços.

Dada a estrutura da Figura 1.49, indique quais tramos são representados como vigas isostáticas simples.

Figura 1.49 | Viga Gerber



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Tramos 1 e 2.
- b) Tramos 3 e 4.
- c) Tramos 1 e 3.
- d) Tramos 2 e 4.
- e) Tramos 1 e 4.

**2.** Os cálculos dos esforços externos reativos (reações nos apoios) de uma viga Gerber estão embasados nas Equações de Equilíbrio e na decomposição do conjunto em vigas isostáticas. Essa decomposição não só auxilia os cálculos das reações, mas, também, a construção dos diagramas de força cortante e momento fletor.

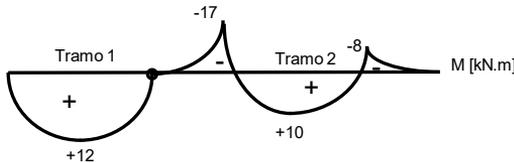
Os cálculos das reações nos apoios têm início em que tipo de viga isostática?

- a) Nas vigas que têm apenas um balanço.
- b) Nas vigas que apresentam balanços nas duas extremidades.
- c) Nas vigas simples que se apoiam sobre os balanços.
- d) Nas vigas mais carregadas.
- e) Nas vigas que apresentam somente carregamento distribuído.

**3.** Os diagramas de força cortante e momento fletor fornecem informações importantes, que nos ajudam a determinar as características da estrutura que deverá suportar os esforços externos atuantes. E quem toma essas decisões são os Engenheiros Calculistas de Estruturas, que podem ser de concreto armado, de aço, madeira ou mistas.

Dado o diagrama de momento fletor (Figura 1.50), indique os momentos máximos a que a estrutura estará exposta.

Figura 1.50 | Diagrama de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Tramo 1: +12 kN.m e Tramo 2: -17 kN.m e 10 kN.m
- b) Tramo 1: +12 kN.m e Tramo 2: -17 kN.m
- c) Tramo 1: +12 kN.m e Tramo 2: -8 kN.m e 10 kN.m
- d) Tramo 1: +12 kN.m e Tramo 2: -17 kN.m e -8 kN.m
- e) Tramo 1: +12 kN.m e Tramo 2: 10 kN.m

# Referências

ALMEIDA, M. C. F. de. **Estruturas isostáticas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.

KASSIMALI, Aslam. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Editora CENGAGE Learning, 2015.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural** – Estruturas isostáticas. São Paulo: Editora Globo, 1981. v. 1.



# Treliças isostáticas

### Convite ao estudo

Caro aluno,

Nesta unidade, você estudará o conceito de estruturas do tipo treliça, estruturas que fazem parte do nosso dia a dia, pois estão presentes em telhados, dos mais simples aos mais sofisticados, pontes, em estruturas metálicas e de madeira, torres de comunicação e de alta tensão.

Com os conceitos aqui apresentados, você terá condições de aplicar e executar cálculos de determinação dos esforços internos em treliças e também de definir os tipos de treliças dos projetos em que estará envolvido.

Para que você adquira os conceitos esperados nesta unidade, novamente, será inserido como estagiário em uma empresa de cálculo estrutural, pois, como foi muito bem no seu primeiro ciclo de estágio, seu contrato foi renovado. Agora você estará envolvido em projetos de estruturas treliçadas, e seu supervisor solicitará que desenvolva alguns trabalhos.

Você deve estar se perguntando: O que são treliças? Como defini-las? Qual sua composição? Como calculá-las? Você terá estas respostas ao longo do estudo desta unidade.

Bem-vindo à unidade de Treliças Isostáticas!

# Seção 2.1

## Treliças isostáticas

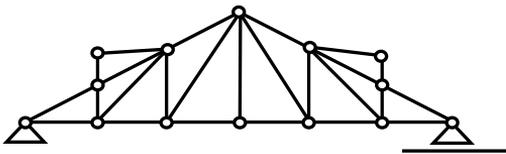
### Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, estudaremos a definição de treliças isostáticas, quais os seus tipos, como são formadas, suas estaticidade e estabilidade. Esses assuntos são muito importantes para que uma estrutura treliçada tenha um bom funcionamento, ou seja, para que suporte as cargas às quais forem solicitadas.

Você foi muito bem no seu primeiro ciclo de estágio e teve seu contrato renovado. Agora estará envolvido em projetos de estruturas treliçadas, e seu supervisor solicitará que desenvolva alguns trabalhos. Nesse momento, a empresa foi contratada para dimensionar a estrutura de um telhado (Figura 2.1) em treliça e você será o responsável por verificar a estaticidade e a estabilidade dos elementos estruturais.

Figura 2.1 | Telhado contratado



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que continue a obter êxito em suas atividades como estagiário, é necessário que se dedique aos estudos, e isso significa que vamos ao “Não pode faltar”.

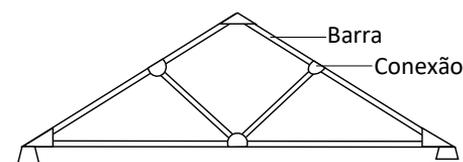
## Não pode faltar

Vamos iniciar nossos estudos sobre treliças.

### Definindo treliças isostáticas

Treliças são estruturas constituídas por barras que, por sua vez, são unidas por conexões que podem ser de madeira, ferro, alumínio, aço, ou, ainda, soldadas (Figura 2.2). São muito utilizadas em telhados, estruturas de pontes, entre outras... e isso se dá por serem estruturas leves e altamente resistentes.

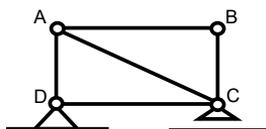
Figura 2.2 | Treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

Definimos como “nós” os encontros das barras que formam a treliça, conforme a Figura 2.3, em que A, B, C e D são os nós. Observe que, no nó A, encontram-se as barras AB, AC e AD.

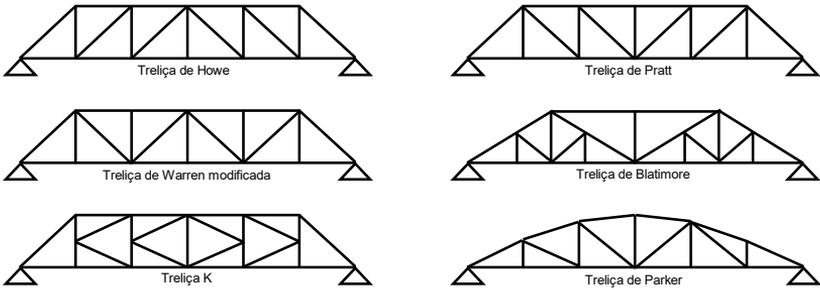
Figura 2.3 | Apresentação dos nós de uma treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

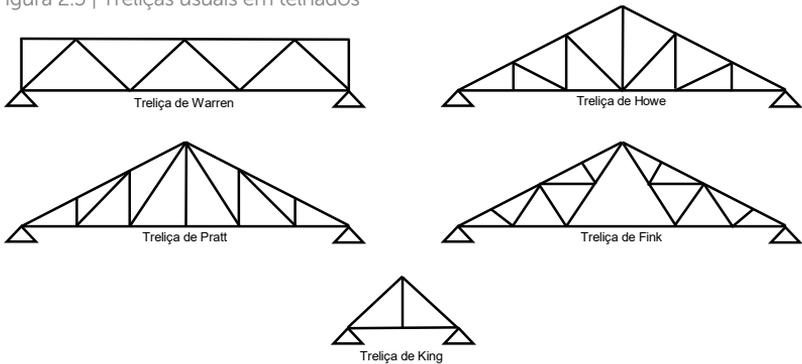
Conheça, a seguir, alguns estilos de treliças usadas em pontes (Figura 2.4) e em telhados (Figura 2.5).

Figura 2.4 | Treliças usuais em pontes



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2.5 | Treliças usuais em telhados

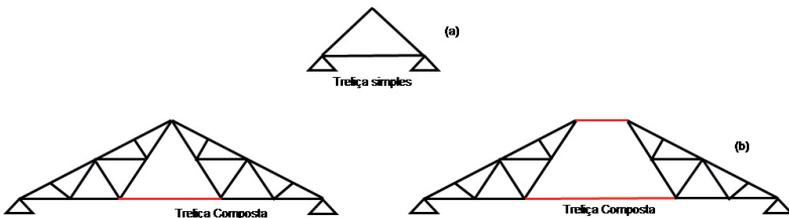


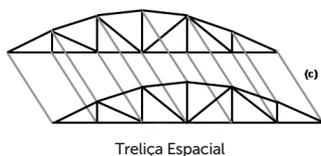
Fonte: elaborada pelo autor.

## Tipos de treliças isostáticas

As treliças são estruturas formadas por barras e conexões (também chamadas nós), em que os carregamentos externos ativos atuam; as barras, por sua vez, são responsáveis por suportar os efeitos internos da estrutura (tração e compressão). Essas estruturas podem ser divididas em simples, compostas e espaciais (Figura 2.6).

Figura 2.6 | Tipos de treliças isostáticas





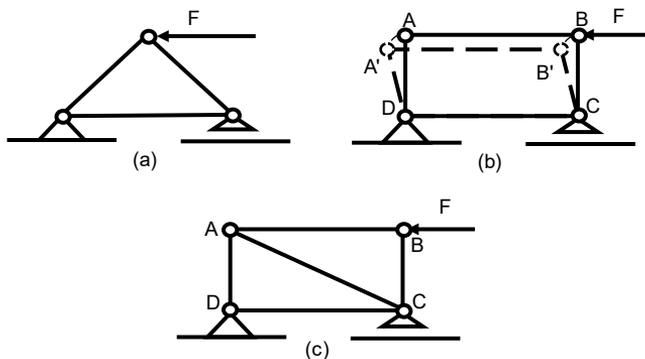
Fonte: elaborada pelo autor.

As treliças compostas são formadas pela conexão de duas ou mais treliças simples, mesmo assim, ainda são bidimensionais, como apresentado na Figura 2.6(b); já as treliças espaciais, compostas também por treliças simples, são tridimensionais, como pode-se observar na Figura 2.6(c).

### Estabilidade da treliça

Dependendo de como você montar uma treliça, ela poderá ser instável, ou seja, variar de forma em função do esforço solicitante ( $F$ ), conforme apresentado na Figura 2.7. É possível notar que a treliça da Figura 2.7(a) não muda de forma quando solicitada, portanto ela é considerada uma treliça estável. A da Figura 2.7(b), quando solicitada, passa da situação  $ABCD$  para  $A'B'CD$ , então é considerada uma treliça instável.

Figura 2.7 | Treliças estável e instável



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma treliça estável é sempre formada por junções de triângulos. Veja: se inserirmos uma barra, conforme a Figura 2.7(c), ela se torna estável. Mas uma treliça pode ser montada seguindo a equação que garante sua estabilidade:

$$b = 2n - 3 \begin{cases} b = n^{\circ} \text{ de barras} \\ n = n^{\circ} \text{ de nós} \end{cases}, \text{ porém, se:}$$

$b < 2n - 3$  a treliça é instável

$b \geq 2n - 3$  a treliça é estável

## Estaticidade da treliça

### Estaticidade global da treliça ( $E_g$ )

Ainda é necessário saber se a treliça é estaticamente determinada, ou seja, se as forças atuantes nas barras podem ser determinadas fazendo uso de  $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$ . Usando a equação da estaticidade global ( $E_g$ ), teremos condição de definir se a treliça é hipostática, isostática ou hiperestática.

$$E_g = r + b - 2n \Rightarrow E_g < 0 \Rightarrow \text{Treliça hipostática}$$

$$E_g = r + b - 2n \Rightarrow E_g = 0 \Rightarrow \text{Treliça isostática}$$

$$E_g = r + b - 2n \Rightarrow E_g > 0 \Rightarrow \text{Treliça hiperestática}$$

Onde:

$$r = n^{\circ} \text{ total de reações nos apoios}$$

$$b = n^{\circ} \text{ total de barras}$$

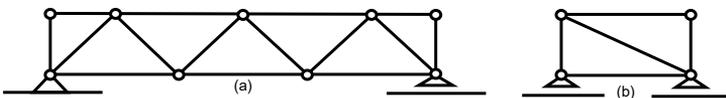
$$n = n^{\circ} \text{ total de nós}$$

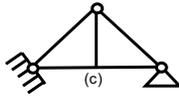


## Exemplificando

Para a Figura 2.8, verifique a estaticidade global das estruturas.

Figura 2.8 | Treliças

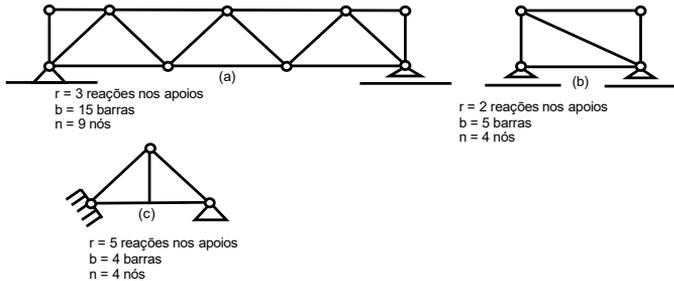




Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Figura 2.9 | Treliças com relação de reações, nós e barras



Fonte: elaborada pelo autor.

Para a Figura 2.9(a):

$$E_g = r + b - 2n$$

$$E_g = 3 + 15 - 2 \cdot 9$$

$$E_g = 0 \Rightarrow \text{treliça isostática}$$

Para a Figura 2.9(b):

$$E_g = r + b - 2n$$

$$E_g = 2 + 5 - 2 \cdot 4$$

$$E_g = -1 < 0 \Rightarrow \text{treliça hipostática}$$

Para a Figura 2.9(c):

$$E_g = r + b - 2n$$

$$E_g = 5 + 4 - 2 \cdot 4$$

$$E_g = +1 > 0 \Rightarrow \text{treliça hipostática}$$

## Estaticidade interna da treliça ( $E_i$ )

Para verificar a estaticidade interna, consideramos que a treliça é simplesmente apoiada (um apoio fixo e móvel) e fazemos uso da seguinte equação:

$$E_i = b - (2n - 3) \begin{cases} b = n^{\circ} \text{ de barras} \\ n = n^{\circ} \text{ de nós} \end{cases}$$

Se  $E_i < 0$ : faltam barras, então a treliça é hipostática, ou seja, instável, como visto na Figura 2.7(b), em que temos 4 barras e 4 nós, dessa forma:  $E_i = -1 < 0$ .

Se  $E_i = 0$ : uma das condições para considerar a treliça estável, mas não há garantia disso, pois é possível que as barras não estejam alocadas para assegurar a estabilidade.

Se  $E_i > 0$ : nesse caso, temos barras em excesso, portanto a treliça é considerada internamente hiperestática, sem condições para determinar as cargas nas barras pelas Equações de Equilíbrio, passando, então, a ser considerada indeterminada, com necessidade de verificar a alocação das barras.

### Estaticidade externa da treliça ( $E_e$ )

Leva em consideração o número de reações proveniente dos apoios e é calculada por:

$$E_e = r - 3 \begin{cases} E_e < 0 \Rightarrow \text{treliça externamente hipostática} \\ E_e = 0 \Rightarrow \text{treliça externamente isostática} \\ E_e > 0 \Rightarrow \text{treliça externamente hiperestática} \end{cases}$$



Refleta

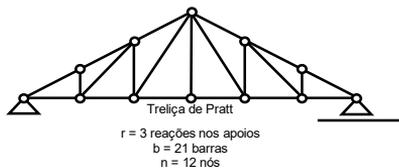
Podemos construir treliças da forma que bem desejarmos?



Exemplificando

Para a treliça da Figura 2.10, verifique as estaticidades interna e externa.

Figura 2.10 | Treliças de Pratt



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Elasticidade interna:

$$E_i = b - (2n - 3) \begin{cases} b = n^{\circ} \text{ de barras} \\ n = n^{\circ} \text{ de nós} \end{cases}$$

$$E_i = 21 - (2 \cdot 12 - 3) \Rightarrow E_i = 0$$

*Uma das condições para que a treliça seja considerada estável*

Elasticidade externa:

$$E_e = r - 3$$

$$E_e = 3 - 3 \Rightarrow E_e = 0$$

*Treliça externamente isostática*



Pesquise mais

Para facilitar sua compreensão, acesse os links:

GOMES, M. I. S. **Estudo e análise de treliças**. Português-Brasil: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2016. p. 9-18. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/301298120>>. Acesso em: 4 nov. 2017.

Leia os subcapítulos 4.1 a 4.4, sobre treliças planas e espaciais, do livro:

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. Disponível na Biblioteca Virtual.

Veja os vídeos:

Conceito de elasticidade: <<https://www.youtube.com/watch?v=uvHeru38Ipl>>. Acesso em: 4 dez. 2017.

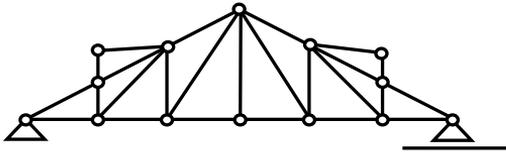
Resoluções de exercícios sobre elasticidade em treliças: <<https://www.youtube.com/watch?v=N2t6G2Kx2C8>>. Acesso em: 4 dez. 2017. e <<https://www.youtube.com/watch?v=PKFZUzeNoC0>>. Acesso em: 4 dez. 2017.

## Sem medo de errar

Você está no segundo ciclo de seu estágio em uma empresa de cálculo estrutural. Seu supervisor solicita que verifique a estabilidade

e as estaticidades da estrutura de um telhado que a empresa foi contratada para dimensionar (Figura 2.1).

Figura 2.1 | Telhado contratado



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Considere que a treliça que forma o telhado é constituída por 25 barras, 14 nós e terá 3 esforços externos reativos (reações nos apoios).

Estabilidade:

$$b = 2n - 3$$

$$25 = 2 \cdot 14 - 3 \Rightarrow 25 = 25$$

$$\therefore b = 2n - 3$$

*A treliça que forma o telhado é estável*

Estaticidade global:

$$E_g = r + b - 2n$$

$$E_g = 3 + 25 - 2 \cdot 14 \Rightarrow E_g = 0 \Rightarrow \text{treliça isostática}$$

Estaticidade interna:

$$E_i = b - (2n - 3) \begin{cases} b = n^{\circ} \text{ de barras} \\ n = n^{\circ} \text{ de nós} \end{cases}$$

$$E_i = 25 - (2 \cdot 14 - 3) \Rightarrow E_i = 0$$

*Uma das condições para que a treliça seja considerada estável*

Estaticidade externa:

$$E_e = r - 3$$

$$E_e = 3 - 3 \Rightarrow E_e = 0$$

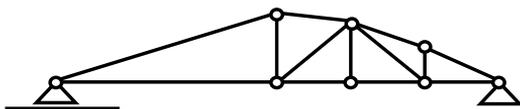
*Treliça externamente isostática*

### Condições mínimas para dimensionamento

#### Descrição da situação-problema

Um amigo, sabendo que você está estagiando em uma empresa de cálculo de estruturas, mais precisamente, que tem se envolvido em projetos de telhados, pediu que você verificasse o desenho da estrutura do telhado (Figura 2.11) que ele pretende construir.

Figura 2.11 | Treliça – estrutura do telhado



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

A treliça apresenta 13 barras, 8 nós e 3 reações em função dos apoios.

Estabilidade:

$$b = 2n - 3$$

$$13 = 2 \cdot 8 - 3 \Rightarrow 13 = 13$$

$$\therefore b = 2n - 3$$

*A treliça que forma o telhado é estável*

Estaticidade global:

$$E_g = r + b - 2n$$

$$E_g = 3 + 13 - 2 \cdot 8 \Rightarrow E_g = 0 \Rightarrow \text{treliça isostática}$$

Estaticidade interna:

$$E_i = b - (2n - 3) \begin{cases} b = n^{\circ} \text{ de barras} \\ n = n^{\circ} \text{ de nós} \end{cases}$$

$$E_i = 13 - (2 \cdot 8 - 3) \Rightarrow E_i = 0$$

*Uma das condições para que a treliça seja considerada estável*

Estaticidade externa:

$$E_e = r - 3$$

$$E_e = 3 - 3 \Rightarrow E_e = 0$$

*Treliça externamente isostática*

Resposta:

Pelos resultados apresentados, de estabilidade e estaticidades, a estrutura desenhada para o telhado deverá dar certo.

## Faça valer a pena

**1.** Treliças são estruturas constituídas por barras que, por sua vez, são unidas por conexões que podem ser de madeira, ferro, alumínio, aço, ou, ainda, soldadas. São muito utilizadas em telhados, estruturas de pontes, entre outras, isso porque são estruturas leves e altamente resistentes.

Indique a alternativa correta quanto aos tipos de treliças.

- a) Básicas, complexas e espaciais.
- b) Unidimensional, bidimensional e tridimensional.
- c) Simples, compostas e espaciais.
- d) Simples, bidimensional e tridimensional.
- e) Simples, complexas e espaciais.

**2.** As treliças são estruturas formadas por barras e conexões (também chamadas “nós”). Nessas conexões, os carregamentos externos ativos atuam, e as barras são responsáveis por suportar os efeitos internos da estrutura (tração e compressão).

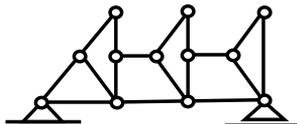
Indique a alternativa correta quanto à formação de treliças compostas bidimensionais.

- a) Apresentam formas complexas.
- b) Apresentam formações hiperestáticas.
- c) Formadas por conjuntos complexos.
- d) Formadas pela conexão de duas ou mais treliças simples.
- e) Formadas por excessos de triângulos.

**3.** As estruturas de telhados, em sua grande maioria, são formadas por treliças. Você pode observar em sua casa, em ginásios esportivos, coberturas de shows em praças, parques, entre outros; portanto são estruturas que vencem grandes vãos e também têm outras aplicabilidades, como em pontes, torres de alta tensão e comunicação.

Dada a treliça (Figura 2.12) a seguir, indique a sua estaticidade global.

Figura 2.12 | Treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Hipostática.
- b) Isostática.
- c) Determinada.
- d) Hiperestática.
- e) Isostática e indeterminada.

## Seção 2.2

### Treliças compostas

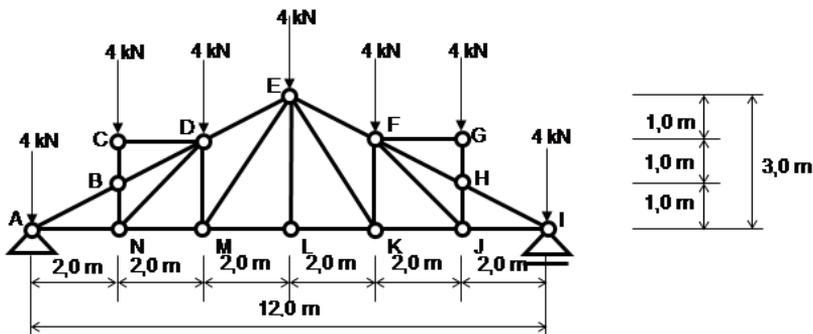
#### Diálogo aberto

Caro aluno,

Na Seção 2.1, vimos uma introdução sobre treliças isostáticas simples, em que tivemos a oportunidade de estudar seus tipos, sua estabilidade e estaticidade. Nesta seção, estudaremos as treliças isostáticas compostas e, também, o Método de Ritter para esse tipo de treliça.

Esse estudo ajudará no seu desempenho como estagiário, pois o seu supervisor solicitou que determinasse o esforço que ocorre na barra  $b = 2n - r$  da estrutura treliçada (Figura 2.13) para a qual tiveram o serviço de dimensionamento contratado.

Figura 2.13 | Estrutura treliçada de telhado com esforços externos atuantes



Fonte: elaborada pelo autor.

Atenderemos à demanda solicitada e, para isso, não podemos deixar de ir ao “Não pode faltar”!

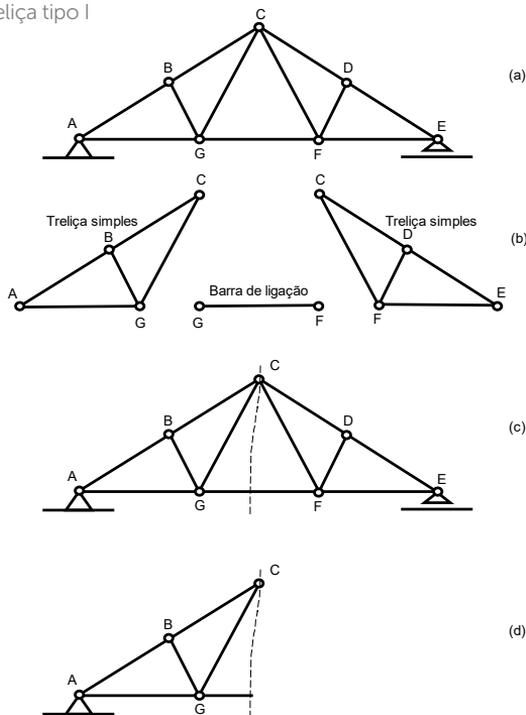
## Não pode faltar

Na seção anterior (Seção 2.1), definimos que treliças compostas são aquelas formadas por duas ou mais treliças simples. Com base nesse conceito, ainda podemos dividi-las em treliças isostáticas compostas dos tipos I, II e III.

### Treliças tipo I

Esse tipo é formado por duas treliças simples e uma barra de ligação (Figura 2.14); seus esforços internos podem ser calculados, inicialmente, pelo Método de Ritter, também conhecido como Método das Secções, que é feito seccionando-se a união das treliças simples e a barra de ligação (Figura 2.14(c) e 2.14(d)). Com isso, determinamos o esforço que ocorre na barra de união (FG); já os esforços internos das demais barras, determinamos pelo Método dos Nós. Estudaremos, logo mais, o Método de Ritter para treliças isostáticas compostas, ainda nesta seção.

Figura 2.14 | Treliça tipo I



Fonte: elaborada pelo autor.

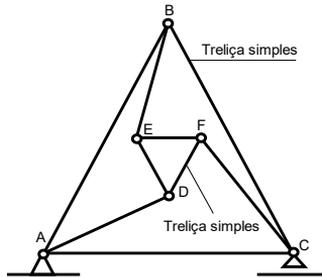


Treliças compostas são aquelas formadas por duas ou mais treliças simples.

### Treliça tipo II

Essa também é uma treliça composta formada por duas treliças simples, mas com três barras de ligação (Figura 2.15):  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$ . Também podemos determinar os esforços internos dessa treliça iniciando os cálculos pelo Método de Ritter, seccionando uma das barras de ligação.

Figura 2.15 | Treliça tipo II

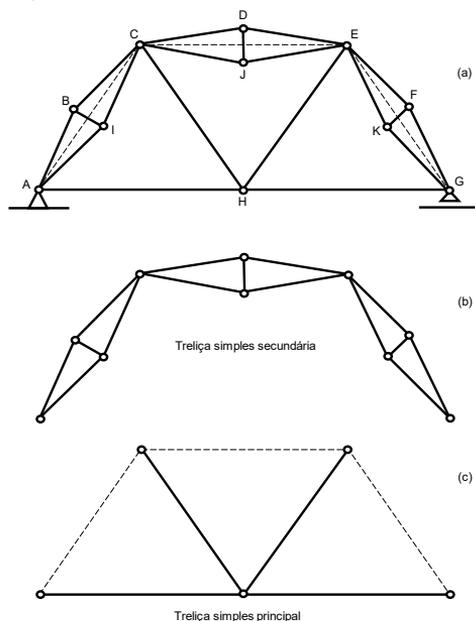


Fonte: elaborada pelo autor.

### Treliça tipo III

Como as anteriores, essa treliça também é formada por treliças simples, mas, para determinação dos esforços internos, devemos dividi-la em treliças secundárias, Figura 2.16(b), e treliça principal, Figura 2.16(c), que é formada por barras auxiliares imaginárias (barras tracejadas). Os efeitos provenientes das treliças secundárias são transferidos às conexões que as unem e podemos calculá-los fazendo usos dos Métodos dos Nós ou de Ritter.

Figura 2.16 | Treliça tipo III



Fonte: elaborada pelo autor.

## Método de Ritter para treliças compostas

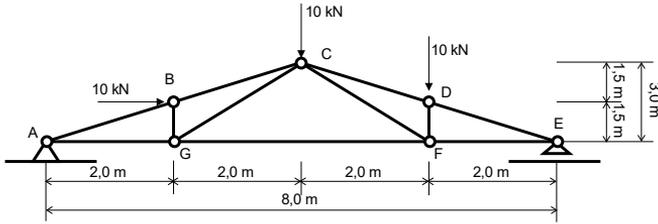
Também conhecido como Método das Secções, o Método de Ritter nos permite calcular os esforços internos (forças axiais) das barras de interesse de forma direta. Esse método é utilizado quando desejamos conhecer os esforços internos de algumas barras de estrutura treliçada, e não de todas as barras. O seu procedimento consiste em determinar os esforços externos reativos (reações nos apoios); em seguida, seccionar a treliça em duas partes, passando pela barra de interesse e, no máximo, mais duas (então devemos seccionar até três barras, de forma que não sejam concorrentes nem paralelas); na próxima fase, assume-se que as barras seccionadas são vetores de força cujos valores são determinados pelas Equações de Equilíbrio.



### Exemplificando

Dada a Figura 2.17, determine o esforço axial e o efeito ocorrente na barra  $\overline{CG}$ .

Figura 2.17 | Treliza composta



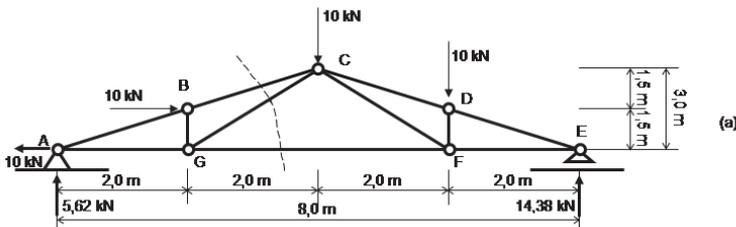
Fonte: elaborada pelo autor.

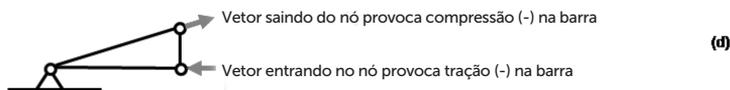
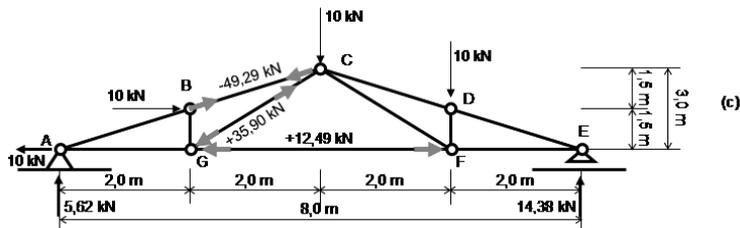
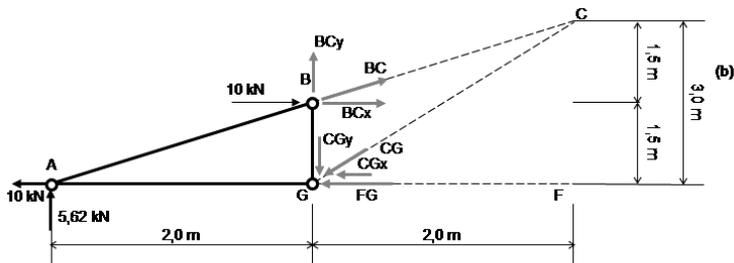
Resolução:

Conforme citado anteriormente, iniciamos os cálculos pelos esforços externos reativos (reações nos apoios A e E), Figura 2.18(a), fazendo uso das Equações de Equilíbrio. Em seguida, seccionamos a treliça, passando pela barra de interesse  $\overline{CG}$  e, conforme orientado, passando por, no máximo, três barras, também mostrado na Figura 2.18(a).

O próximo passo é redesenhar a parte da treliça escolhida, na qual as seccionadas foram transformadas em vetores de forças axiais, Figura 2.18(b), para desenvolver os cálculos que determinaram a força axial e seu efeito na barra  $\overline{CG}$ , cálculo este que teve por base, novamente, as Equações de Equilíbrio, em que determinamos o valor do vetor  $\overline{FG} = 12,49 \text{ kN}$  fazendo  $\sum M_C = 0$  e, a seguir, determinamos os vetores  $\overline{BC} = 49,29 \text{ kN}$  e  $\overline{CG} = 35,90 \text{ kN}$ , fazendo  $\sum F_H = 0$  e  $\sum F_V = 0$ , que gerou um sistema linear e nos possibilitou encontrar os valores dos vetores.

Figura 2.18 | Resolução pelo Método de Ritter





Fonte: elaborada pelo autor.

Resposta:

A barra  $\overline{CG}$  é solicitada por uma força axial de 35,90 kN, que exerce um efeito de tração.



Assimile

Método de Ritter (roteiro de cálculo):

- 1º Determinar os esforços externos reativos.
- 2º Seccionar a treliça, passando pela barra de interesse, não seccionando mais de três barras, que não deverão ser paralelas nem concorrentes.
- 3º Transformar as barras em vetores.
- 4º Determinar os valores dos vetores por Equações de Equilíbrio.
- 5º Verificar os sentidos dos vetores com relação aos nós para definir tração ou compressão.



## Refleta

As treliças, por sua formação, podem vencer grandes vãos. Caso elas não existissem, como seria as estruturas das coberturas?



## Pesquise mais

Para que aprofunde seu conhecimento a respeito desse assunto, estude o capítulo 4.7, sobre análise de treliças compostas, e o capítulo 4.8, sobre treliças complexas, do livro **Análise estrutural**, disponível na Biblioteca Virtual.

KASSIMALI, A. Análise estrutural. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

Veja a apresentação do conceito e o desenvolvimento de exercícios sobre o Método de Ritter para treliças isostáticas compostas no vídeo: <<https://youtu.be/Y2XDdu0P1bw>>. Acesso em: 9 nov. 2017.

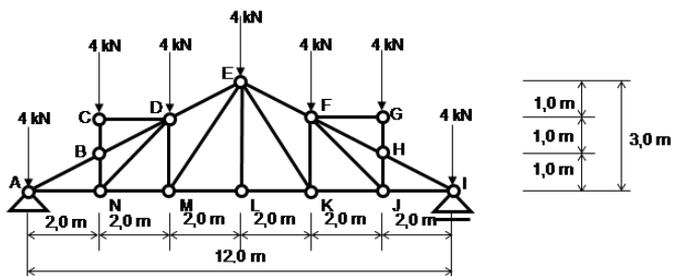
Veja a apresentação do conceito e o desenvolvimento de exercícios sobre o Método de Ritter para treliças isostáticas no vídeo: <[https://youtu.be/v3T\\_ebi22HU](https://youtu.be/v3T_ebi22HU)>. Acesso em: 9 nov. 2017.

Veja alguns exercícios resolvidos no link do Prof. Osvaldo Shigueru Nakao, do Laboratório de Estruturas e Materiais Estruturais da USP. Disponível em: <<http://www.lem.ep.usp.br/membros/nakao/pef215/tema1trelicas/tema1trelicas.html>>. Acesso em: 9 nov. 2017.

## Sem medo de errar

Você, como estagiário, agora deve determinar o valor do esforço ao qual a barra  $\overline{EF}$  está sujeita nessa estrutura de telhado cuja estabilidade e estaticidade você verificou.

Figura 2.13 | Estrutura treliçada de telhado com esforços externos atuantes



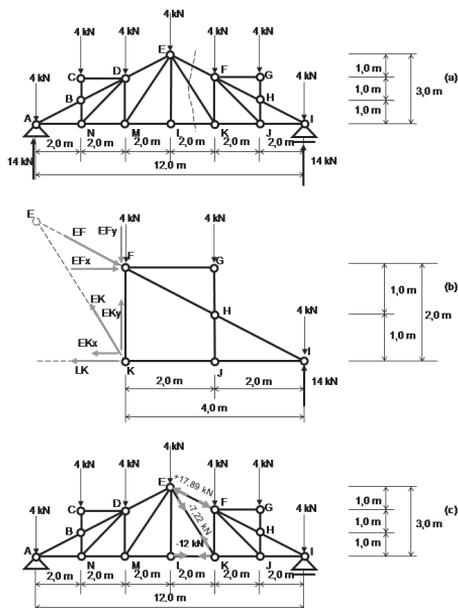
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Determinamos os esforços externos reativos e seccionamos a treliça, passando pela barra de interesse  $\overline{EF}$ , Figura 2.19(a). Transformamos as barras em vetores e determinamos seus valores por Equações de Equilíbrio, conforme Figura 2.19(b).

E, na Figura 2.19(c), indicamos a resposta solicitada, barra  $\overline{EF}$  tracionada por uma carga axial de 17,89 kN.

Figura 2.19 | Resolução pelo Método de Ritter



Fonte: elaborada pelo autor.

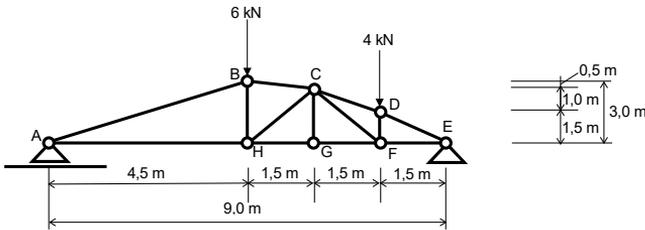
## Avançando na prática

### Esforços internos

#### Descrição da situação-problema

Dada a estrutura treliçada (Figura 2.20), determine a força axial atuante na barra  $\overline{GH}$ .

Figura 2.20 | Estrutura treliçada



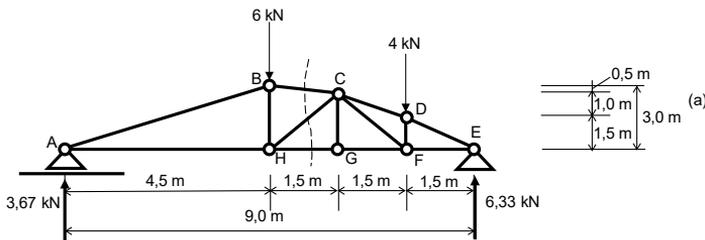
Fonte: elaborada pelo autor.

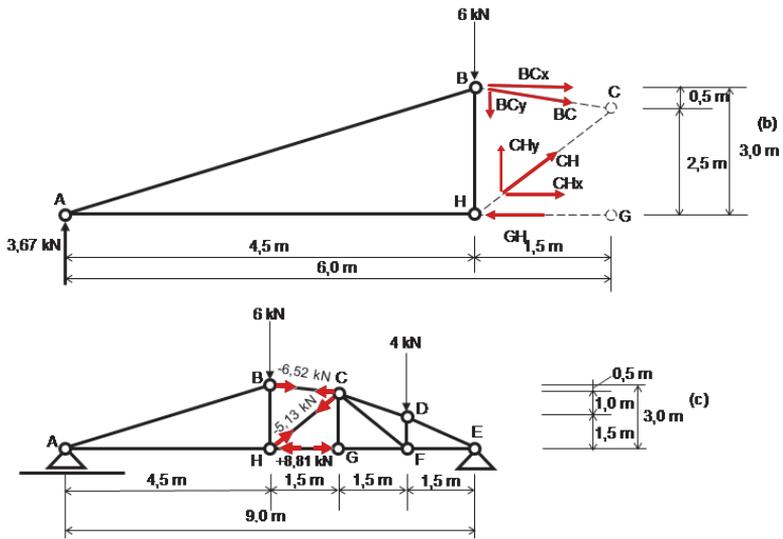
#### Resolução da situação-problema

Determinamos os esforços externos reativos e seccionamos a treliça, passando pela barra de interesse  $\overline{GH}$ , Figura 2.21(a). Transformamos as barras em vetores e determinamos seus valores por Equações de Equilíbrio, conforme Figura 2.21(b).

E, na Figura 2.21(c), indicamos a resposta solicitada: barra  $\overline{GH}$  é tracionada por uma carga axial de 8,81 kN.

Figura 2.21 | Resolução pelo Método de Ritter





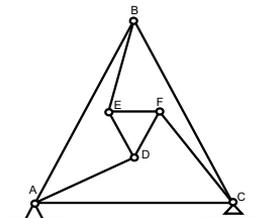
Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** No estudo de treliças isostáticas, podemos defini-las como treliças simples, treliças compostas e treliças complexas. As compostas são aquelas formadas por duas ou mais treliças simples e, dentro da sua classificação, há as treliças compostas dos tipos I, II e III.

Dada a Figura 2.22, de uma treliça composta, indique a alternativa correta quanto à sua classificação.

Figura 2.22 | Treliça composta



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Treliça tipo composta.
- b) Treliça composta tipo II.
- c) Treliça composta simples.
- d) Treliça composta tipo III.
- e) Treliça composta tipo I.

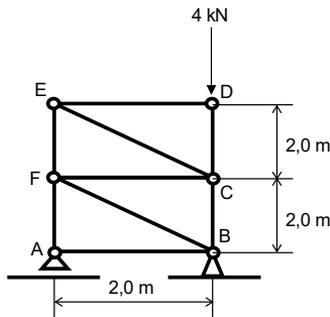
**2.** Goerg Dietrich August Ritter (1826-1908), nascido em Luneburgo, na Alemanha, foi professor de Mecânica e Astrofísica e também foi quem desenvolveu o Método das Secções, que leva o seu nome: Método de Ritter, para cálculo dos esforços internos ocorrentes em barras de treliças.

Quando usar o Método de Ritter?

- a) Quando se deseja calcular os esforços externos reativos nas barras de treliças.
- b) Quando se deseja calcular os esforços internos e externos de treliças complexas.
- c) Quando se deseja conhecer as condições de estabilidade de uma treliça.
- d) Quando se deseja conhecer a força axial ocorrente em determinada barra da treliça, sem precisar determinar o conjunto completo.
- e) Quando se deseja determinar a estaticidade da treliça.

**3.** Uma estrutura trelaçada (Figura 2.23) é composta por nove barras, seis nós, um vínculo fixo e um móvel, portanto é sujeita a três reações. Com essas informações, foi possível verificar a estabilidade e a estaticidade dessa estrutura, cujo resultado foi estrutura isostática estável.

Figura 2.23 | Estrutura trelaçada



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine a força axial atuante na barra  $\overline{EF}$ .

- a) +4 kN.
- b) -2,82 kN.
- c) 0.
- d) -4 kN.
- e) +2, 82 kN.

# Seção 2.3

## Treliças espaciais

### Diálogo aberto

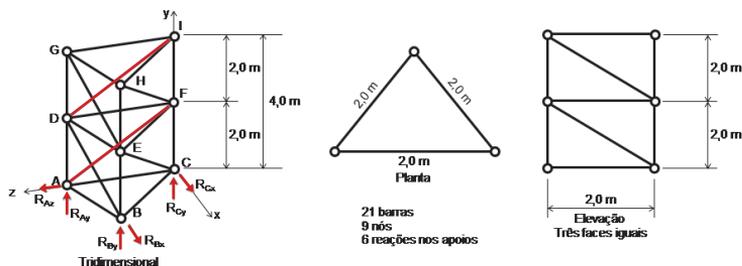
Caro aluno,

Na Seção 2.2, estudamos sobre treliças compostas e sua resolução pelo Método de Ritter; aprendemos que o método é muito útil quando temos o interesse em determinar o esforço interno de uma barra da treliça, e que, para isso, deve-se seccionar a treliça de modo a atingir no máximo três barras que não sejam paralelas nem concorrentes; uma vez seccionadas as barras, identificamos seus segmentos como vetores de forças, as quais desejamos conhecer, e determinamos os valores desses vetores fazendo uso das Equações de Equilíbrio.

Agora, nesta seção, estudaremos treliças complexas, sua definição e como determinar seus esforços internos pelo Método Henneberg. Também estudaremos as treliças espaciais, sua definição e como determinar os esforços internos ocorrentes em suas barras.

E, novamente como estagiário da Empresa de Cálculo, você será incumbido de verificar a estaticidade de uma torre (Figura 2.24), que será dimensionada para suportar uma caixa d'água encomendada por um ruralista para alimentar sua cultura hidropônica.

Figura 2.24 | Torre treliçada para suportar uma caixa d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Você tem obtido êxito em suas incumbências e assim continuará, bastando aplicar-se em seus estudos e acompanhar atentamente os

conceitos apresentados sobre verificação de estaticidade de treliças espaciais.

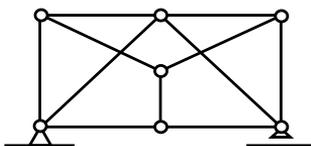
Então, mãos à obra!

## Não pode faltar

### Treliças complexas

Esse tipo de treliça (Figura 2.25) é aquele que não podemos classificar como treliças simples ou compostas; embora elas atendam à condição  $b = 2n - r$  ( $b$  = número de barras da treliça;  $n$  = número de nós da treliça e  $r$  = números de reações em função dos apoios da treliça), significando que são estaticamente determinadas, não é possível aplicar os Métodos dos Nós nem o de Ritter, pois o primeiro exige que tenhamos apenas duas barras como incógnitas assim que determinarmos as reações nos apoios, e para o segundo é necessário que, ao seccionarmos a treliça, não passemos por mais de três barras que não sejam concorrentes nem paralelas. Para a determinação de forças axiais atuantes em barras de treliças complexas, é preciso usar o Método de Henneberg, também conhecido como Método Geral de Resolução de Treliças Complexas.

Figura 2.25 | Treliça complexa



Fonte: adaptada de Sussekind (1981, p. 241).



### Assimile

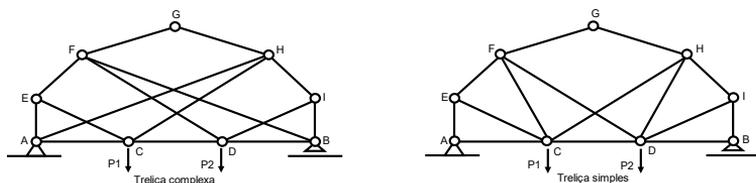
Embora uma treliça complexa possa ser estaticamente determinada, isso não possibilita o uso do Método dos Nós nem do Método de Ritter para resolução de seus esforços internos.

## Método de Henneberg (Método Geral de Resolução de Treliças Complexas)

Esse método utiliza a aplicação de substituição da treliça complexa por treliça simples (Figura 2.26) e a superposição de esforços.

A treliça simples é formada pela mudança de posição de uma ou duas barras da treliça complexa, sem alterar a estaticidade inicial. Podemos notar que as barras  $\overline{BF}$  e  $\overline{AH}$  são substituídas pelas barras  $\overline{CF}$  e  $\overline{DH}$ , conforme apresentado na Figura 2.26.

Figura 2.26 | Treliça complexa transformada em treliça simples

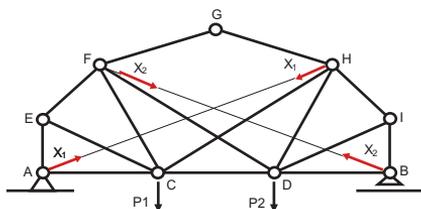


Fonte: adaptada de Sussekind (1981, p. 241).

Considerando a Figura 2.26, entenderemos o processo de cálculo. Embora as barras tenham sido transferidas de posição, os nós C, D, F e H não sofrem mudanças quanto às solicitações normais a eles impostas. Para que isso seja verdade, consideramos que as barras têm ações nulas: a força normal (força axial) atuante no nó C, em função da barra  $\overline{CF}$ , é nula ( $N^{CF} = 0$ ), e também a força normal atuante no nó D, em função da barra  $\overline{DH}$ , é nula ( $N^{DH} = 0$ ).

Para que os nós A, B, F e H também sofram alteração de solicitação com a ausência das barras  $\overline{BF}$  e  $\overline{AH}$ , são inseridas as forças  $X_1$  e  $X_2$  (Figura (2.27)).

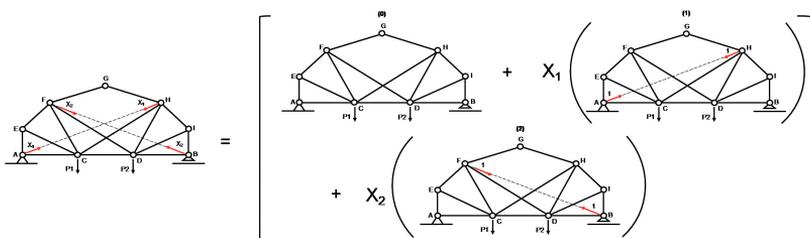
Figura 2.27 | Ideia inicial do processo de cálculo do Método de Henneberg



Fonte: adaptada de Sussekind (1981, p. 241).

Como a solução da determinação das forças axiais nas barras da treliça se dá por superposição, temos (Figura 2.28):

Figura 2.28 | Metodologia do cálculo por superposição



Fonte: adaptada de Sussekind (1981, p. 242).

Assim, temos que a compatibilidade estática é dada por:

$$\begin{cases} N_0^{CF} + N_1^{CF} X_1 + N_2^{CF} X_2 = 0 \\ N_0^{DH} + N_1^{DH} X_1 + N_2^{DH} X_2 = 0 \end{cases}$$

A resolução desse sistema nos remete aos valores de  $X_1$  e  $X_2$ , que são os esforços atuantes nas barras  $\overline{AH}$  e  $\overline{BF}$ .

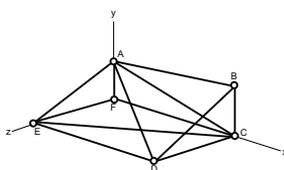
O determinante das incógnitas do sistema apresentado define a estaticidade da estrutura; se o determinante for diferente de zero, a treliça é, realmente, isostática; caso o determinante seja igual a zero, isso significa que a estrutura é instável.

$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1^{CF} & N_2^{CF} \\ N_1^{DH} & N_2^{DH} \end{vmatrix}$$

## Treliças espaciais

Formadas pela união dos nós, que formam reticulados tridimensionais (Figura 2.29). A determinação dos esforços atuantes nas barras não pode ser feita pela ideia de transformação em treliças planas, então somos obrigados a trabalhar considerando a condição tridimensional, ou seja, considerando os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Figura 2.29 | Treliça espacial



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que possamos formar uma treliça espacial, devemos obedecer à seguinte equação:

$$b = 3n - 6 \begin{cases} b = \text{barras} \\ n = \text{nós} \end{cases}$$

Note que a Figura 2.29 obedece à equação apresentada, pois a treliça é formada por 12 barras e 6 nós, assim:

$$b = 3n - 6 \Rightarrow b = 3 \cdot 6 - 6 \Rightarrow b = 12 \text{ ok!!!}$$



**Refleta**

Como determinamos os esforços externos reativos de uma treliça espacial?

Por serem treliças espaciais, seus esforços externos reativos (reações nos apoios) devem ser considerados em condições tridimensionais, assim como as Equações de Equilíbrio, então, nessas condições, elas se apresentam da seguinte forma:

$$\text{Equações de Equilíbrio} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right.$$

Para resolução dos esforços internos da treliça, podemos fazer uso de dois métodos: o Método dos Nós ou o de Ritter. No primeiro, para treliças espaciais, iniciamos seus cálculos onde há, no máximo, três barras. No segundo, que aplicamos quando desejamos conhecer os esforços de determinadas barras e do conjunto todo, devemos seccionar a treliça de forma a não seccionar mais que seis barras; assim feito, desenvolvemos os cálculos fazendo uso das Equações de Equilíbrio.

### Verificação da estaticidade

Essa verificação se dá em função dos números de barras ( $b$ ) e nós

( $n$ ) existentes na treliça, e também do número de esforços externos reativos (reações nos apoios) ( $r$ ), por meio da equação:

Se  $b + r < 3n$ , a treliça espacial é estaticamente instável (hipostática).

Se  $b + r = 3n$ , a treliça espacial é estaticamente determinada (isostática).

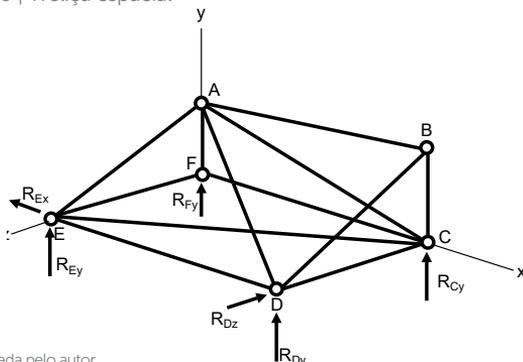
Se  $b + r > 3n$ , a treliça espacial é estaticamente indeterminada (hiperestática).



## Exemplificando

Verifique a estaticidade da treliça espacial representada pela Figura 2.30, formada por 12 barras, 6 nós e as reações dadas na figura.

Figura 2.30 | Treliça espacial



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

$$b + r \Rightarrow b + r = 12 + 6 = 18$$

$$3n \Rightarrow 3n = 3 \cdot 6 = 18$$

$$\therefore b + r = 3n \Rightarrow \textit{isostática}$$

Se  $b + r = 3n$ , a treliça espacial é estaticamente determinada (isostática).



## Pesquise mais

Para aprofundar seu conhecimento, acesse:

Leia sobre treliças complexas e espaciais nos itens 4.8 e 4.9 do livro *Análise*



meio das equações:

Se  $b + r < 3n$ , a treliça espacial é estaticamente instável (hipostática).

Se  $b + r = 3n$ , a treliça espacial é estaticamente determinada (isostática).

Se  $b + r > 3n$ , a treliça espacial é estaticamente indeterminada (hiperestática).

Com as informações necessárias, apresentadas na Figura 2.24, então:

$$b + r = 21 + 6 \Rightarrow b + r = 27$$

$$3n = 3 \cdot 9 \Rightarrow 3n = 27$$

$$b + r = 3n$$

Como  $b + r = 3n$ , a treliça espacial (torre que suportará uma caixa d'água) é estaticamente determinada, ou seja, isostática.

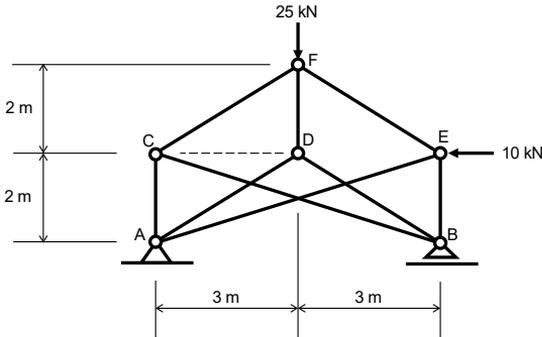
## Avançando na prática

### Complexo, mas simples

#### Descrição da situação-problema

Observe a estrutura treliçada da Figura 2.30, que será utilizada como estrutura para uma tenda de campanha de uma ação social. Trata-se de uma treliça complexa, portanto seus esforços internos deverão ser determinados por meio do Método de Henneberg; para isso, devemos deslocar ao menos uma barra para que se torne uma treliça simples. Determine a força axial na barra  $\overline{BC}$  fazendo uso do Método de Henneberg.

Figura 2.31 | Estrutura treliçada



Fonte: adaptada de Mecânica das estruturas I (2016, p 70).

### Resolução da situação-problema

Iniciamos os cálculos determinando os esforços externos reativos, ou seja, as reações nos apoios A e B, por meio das Equações de Equilíbrio. Em seguida, transformamos a treliça complexa em treliça simples, extraíndo a barra  $\overline{BC}$  e criando a barra auxiliar  $\overline{CD}$ . No lugar da barra  $\overline{BC}$ , fica a força  $X_1$ , carga axial atuante na barra  $\overline{BC}$ , conforme a Figura 2.32 (a).

No passo seguinte, determinamos as forças axiais nas barras da treliça simples, Figura 2.32(b), que podem ser determinadas pelo Método de Ritter ou pelo Método dos Nós, assim obtemos as forças axiais, apresentadas na referida figura.

Em seguida, recalculamos as forças axiais auxiliares nas barras das treliças simples, porém considerando nulas as reações nos apoios; no lugar da força  $X_1$ , inserimos forças unitárias (Figura 2.32(c)) e desconsideramos os esforços externos atuantes na estrutura; dessa forma, obtemos os valores apresentados na figura citada.

Por meio das forças axiais obtidas para a barra auxiliar  $\overline{CD}$  e sabendo que a força axial final nessa barra é  $N_{final}^{CD} = 0$  e que  $N_{final}^{CD} = N_0^{CD} + N_1^{CD} \cdot X_1$ , podemos determinar a força axial  $X_1$ , atuante na barra  $\overline{BC}$ , da seguinte forma:

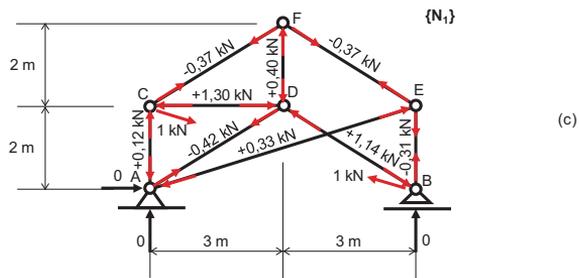
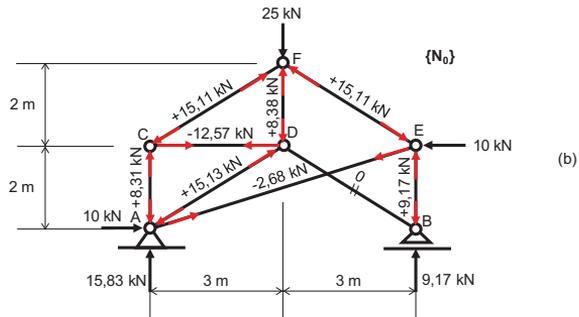
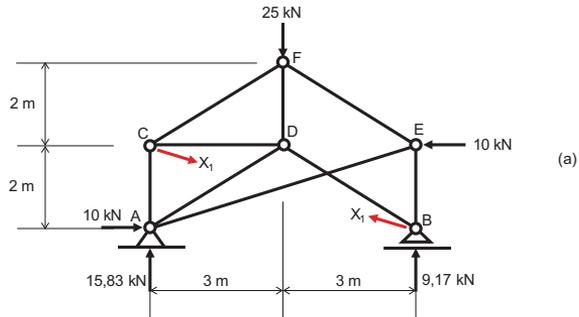
$$N_0^{CD} + N_1^{CD} \cdot X_1 = N_{final}^{CD}$$

$$-12,57 + 1,30 \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 = 9,67 \text{ kN}$$

$$N_{final}^{BC} = 9,67 \text{ kN}$$

Figura 2.32 | Treliça simples



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** As treliças complexas são aquelas que não podemos classificar como treliças simples ou compostas; embora elas atendam à condição  $b = 2n - r$  ( $b$  = número de barras da treliça;  $n$  = número de nós da treliça e  $r$  = números de reações em função dos apoios da treliça), que significa serem estaticamente determinadas.

Podemos determinar os esforços internos de uma treliça complexa por qual método?

- a) Método dos Nós.
- b) Método de Ritter.
- c) Método das Equações de Equilíbrio.
- d) Método de Henneberg.
- e) Método da Secante.

**2.** Para a determinação de forças axiais atuantes em barras de treliças complexas, devemos usar o Método de Henneberg, também conhecido como Método Geral de Resolução de Treliças Complexas, pois os Métodos dos Nós e de Ritter não fornecem as condições necessárias.

Qual a base de resolução do Método de Henneberg?

- a) Substituição da treliça complexa por treliça simples e superposição de esforços.
- b) Substituição de cargas.
- c) Cargas equivalentes.
- d) Cargas adicionais.
- e) Trabalhos virtuais.

**3.** As treliças espaciais são compostas pela união de nós que formam reticulados tridimensionais; e a determinação dos esforços atuantes nas barras não podem utilizar a ideia de transformação em treliças planas.

Com relação à estaticidade de treliças espaciais, indique as afirmações corretas.

- I. Se  $b + r < 3n$ , a treliça espacial é estaticamente instável (hipostática).
- II. Se  $b + r = 3n$ , a treliça espacial é estaticamente determinada (isostática).
- III. Se  $b + r > 3n$ , a treliça espacial é estaticamente indeterminada (hiperestática).

- a) Apenas a I está correta.
- b) Apenas I e II estão corretas.
- c) Estão corretas I, II e III.
- d) Apenas II e III estão corretas.
- e) Apenas I e III estão corretas.

# Referências

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

MECÂNICA das estruturas I. (Notas de aula). Universidade Federal do Rio Grande – Escola de Engenharia. Rio Grande, 2016.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. 6. ed. vol.1. São Paulo: Editora Globo, 1981.

# Pórticos isostáticos

## Convite ao estudo

Caro aluno,

Estudaremos um assunto que nos remete a dimensionamento de portais, os quais são muito utilizados em entradas de cidades, hotéis de grande porte, parques temáticos e turísticos, etc.

Esta unidade apresentará a definição de pórticos isostáticos, bem como os tipos existentes e suas classificações. Também aprenderemos a determinar os esforços externos reativos em diferentes condições e, assim que tivermos adquirido esse conhecimento, partiremos para o estudo do desenvolvimento de diagramas de força cortante, momento fletor e de força normal. Dessa forma, você será capaz de desenvolver os conceitos fundamentais necessários para aplicar e executar cálculos de determinação dos esforços internos e as deformações das múltiplas estruturas, vigas, pórticos planos e grelhas, conhecendo e definindo os tipos de treliças.

Mais uma vez você será inserido no contexto do problema da unidade. Desta vez você é um engenheiro recém-formado que trabalha em uma empresa de cálculo estrutural e estará incumbido de auxiliar no dimensionamento de uma estrutura (pórtico isostático) que será o portal de um grande hotel. A cada seção desta unidade você cumprirá uma etapa.

As etapas que deverão ser desenvolvidas terão como suporte as teorias apresentadas para o cálculo de esforços externos reativos em pórticos isostáticos, construção de diagramas de força cortante, força normal e momento fletor para pórticos isostáticos.

# Seção 3.1

## Pórticos isostáticos: esforços reativos externos

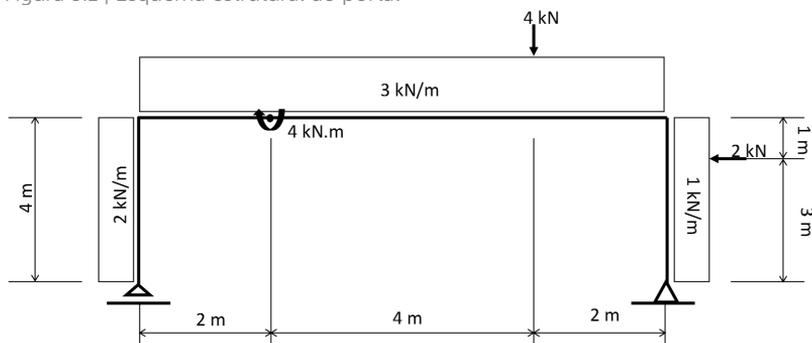
### Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção estudaremos a definição, a classificação e os tipos de pórticos isostáticos, assim como a determinação dos esforços externos reativos para diferentes esforços externos atuantes na estrutura.

Neste contexto você é um engenheiro recém-formado, trabalhando em uma empresa de cálculo estrutural, e está incumbido de auxiliar no dimensionamento de um portal (pórtico isostático) de um hotel de grande porte. Você deverá calcular os esforços externos reativos desse portal, cujo esquema estrutural é apresentado na Figura 3.1. Para conseguir cumprir sua etapa do dimensionamento, terá como suporte o estudo do item *Não pode faltar* deste livro didático.

Figura 3.1 | Esquema estrutural do portal



Fonte: elaborada pelo autor.

Estude com a máxima atenção, acesse o item *Pesquise mais* e mãos à obra!

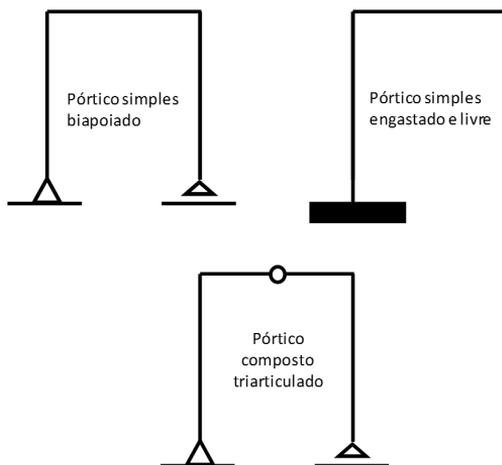
### Não pode faltar

#### Definição de pórticos

Pórticos são estruturas rígidas compostas por vigas e pilares, podendo ser classificadas em pórticos simples, quando são

estruturas isoladas, e pórticos compostos, quando são estruturas associadas da mesma forma que associamos as vigas simples que compõem a viga Gerber (Figura 3.2). Os pórticos são utilizados em portais de cidades, condomínios, indústrias e fazendas.

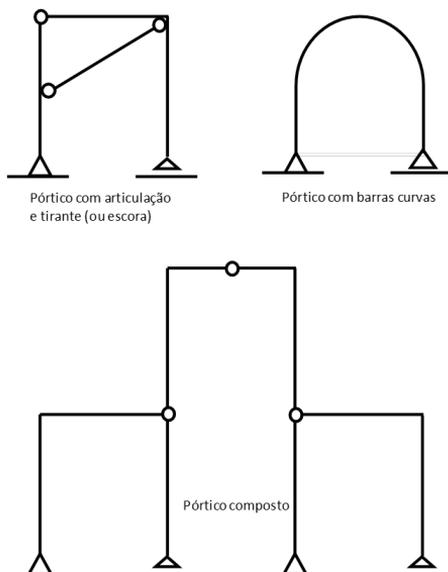
Figura 3.2 | Pórticos simples e compostos



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos ter outros tipos de pórticos. Veja na Figura 3.3:

Figura 3.3 | Outros pórticos



Fonte: elaborada pelo autor.



Veja mais exemplos de estruturas aporricadas, além de mais aplicações nas páginas 52 a 58 do arquivo:

SOUZA, M. F. S. M.; RODRIGUES, R. B. Sistemas estruturais de edificações e exemplos. Notas de aula – Universidade Estadual de Campinas, 2008. Disponível em: <[http://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/sistemas\\_estruturais\\_grad.pdf](http://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/sistemas_estruturais_grad.pdf)>. Acesso em: 5 mar. 2018.

### Determinação dos esforços externos reativos em pórticos isostáticos

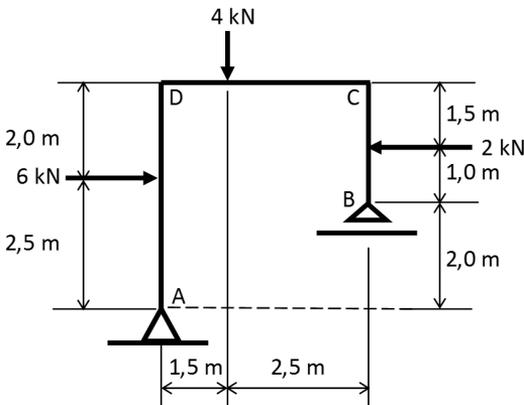
Os esforços externos reativos (reações nos apoios) de um pórtico isostático são calculados obedecendo as mesmas regras estudadas em vigas isostáticas, ou seja, fazemos uso das equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases}$$

### Determinação dos esforços reativos para cargas concentradas em pórticos isostáticos

Dado o pórtico (Figura 3.4), calculamos os esforços externos reativos por meio das equações de equilíbrio.

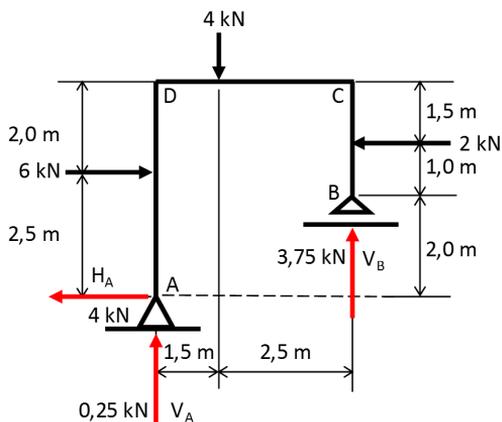
Figura 3.4 | Pórtico sob ação de cargas concentradas



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando as equações de equilíbrio, foi possível obter os valores dos esforços externos reativos  $H_A = 4 \text{ kN}$ ,  $V_A = 0,25 \text{ kN}$  e  $V_B = 3,75 \text{ kN}$ , conforme pode ser observado na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Apresentação dos esforços externos reativos da Figura 3.4



Fonte: elaborada pelo autor.



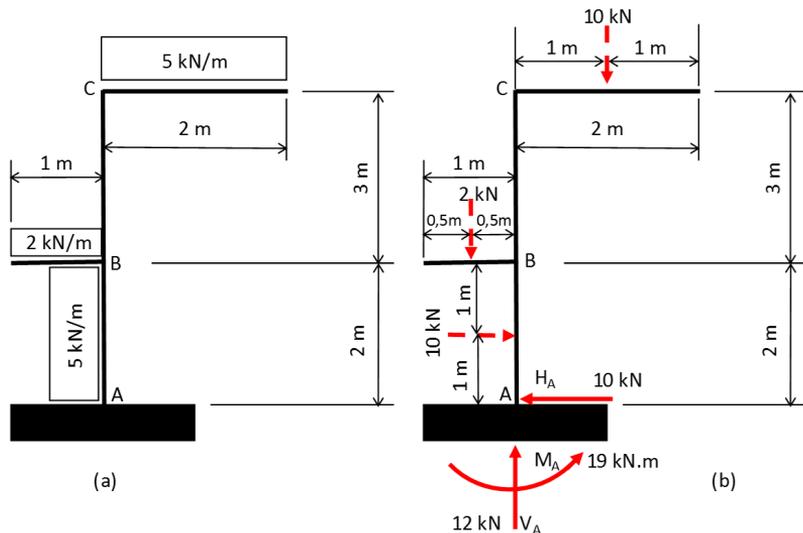
### Assimile

Para determinar os esforços externos reativos (reações nos apoios) de pórticos isostáticos, fazemos uso dos conceitos aplicados para a mesma situação de vigas isostáticas, por meio das equações de equilíbrio.

## Determinação dos esforços externos reativos para cargas distribuídas em pórticos isostáticos

Mais uma vez temos que nos basear no que já estudamos sobre vigas isostáticas planas, sem se esquecer de que, para calcular os esforços externos reativos para a situação com cargas distribuídas, somos obrigados a transformar esse tipo de carga em carga fictícia, fazendo uso de  $C_{fic} = q \cdot l$ , onde  $q$  é a carga distribuída e  $l$ , a extensão por ela ocupada. A Figura 3.6(a) apresenta a estrutura solicitada por cargas distribuídas e a Figura 3.6(b) mostra as cargas distribuídas transformadas em cargas fictícias, bem como os valores dos esforços externos reativos (reações nos apoios)  $V_A = 12 \text{ kN}$ ;  $H_A = 10 \text{ kN}$  e  $M_A = 19 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , obtidos fazendo uso das equações de equilíbrio.

Figura 3.6 | Pórtico simples isostático com os esforços externos reativos



Fonte: elaborada pelo autor.



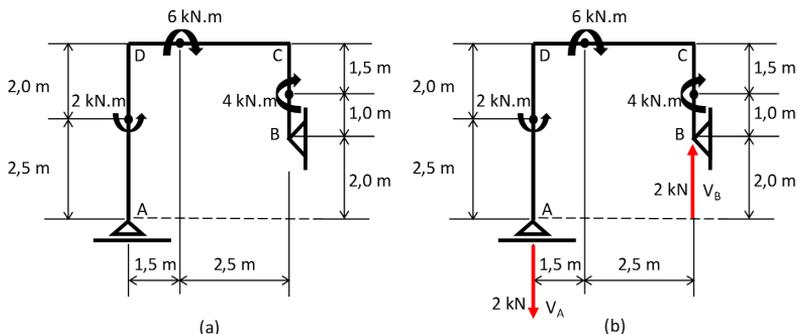
Refleta

Se não conhecermos as equações de equilíbrio, quais outros métodos teríamos para resolver problemas de pórticos isostáticos?

### Determinação dos esforços externos reativos para momentos puros em pórticos isostáticos

Momento puro é o esforço externo atuante na estrutura que promove giro em determinado ponto dessa estrutura; por convenção, adotamos como positivo o giro anti-horário e negativo, o giro horário. Quando uma estrutura é solicitada por momento puro e desejamos determinar os esforços externos reativos, também fazemos uso das equações de equilíbrio, porém os momentos puros entram nos cálculos somente na  $\sum M_i = 0$ . Observe na Figura 3.7(a), o pórtico biapoiado solicitado por momentos puros. Na Figura 3.7(b), temos a mesma estrutura com as reações nos apoios, cujos vetores são iguais a **2 kN**, porém com sentidos opostos. Quando encontramos esse tipo de reação, temos uma situação de vetores binários.

Figura 3.7 | Pórtico solicitado por momentos puros e as reações nos apoios



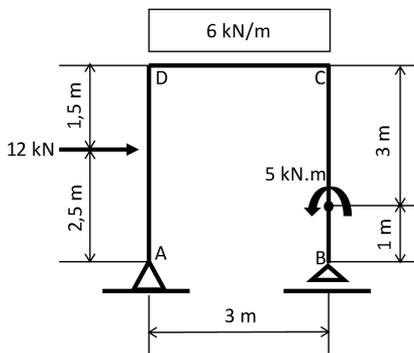
Fonte: elaborada pelo autor.



### Exemplificando

Dado o pórtico isostático (Figura 3.8), determine os esforços externos relativos (reações nos apoios A e B).

Figura 3.8 | Pórtico isostático



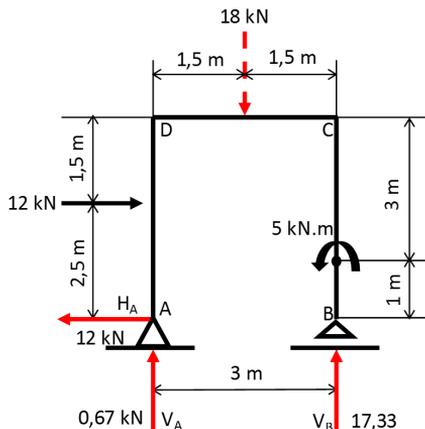
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Fazendo uso das equações de equilíbrio, 
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{array} \right. , \text{ podemos obter}$$

as reações nos apoios  $H_A = 12 \text{ kN}$ ,  $V_A = 0,67 \text{ kN}$  e  $V_B = 17,33 \text{ kN}$ , conforme Figura 3.9.

Figura 3.9 | Esquema de resolução da Figura 3.8



Fonte: elaborada pelo autor.



**Pesquise mais**

Aprofunde seus conhecimentos sobre esse assunto no capítulo 5.6, que trata da análise de pórticos planos. Esse material está disponível na Biblioteca Virtual.

KASSIMALI, Aslam. Análise estrutural. 5. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2015.

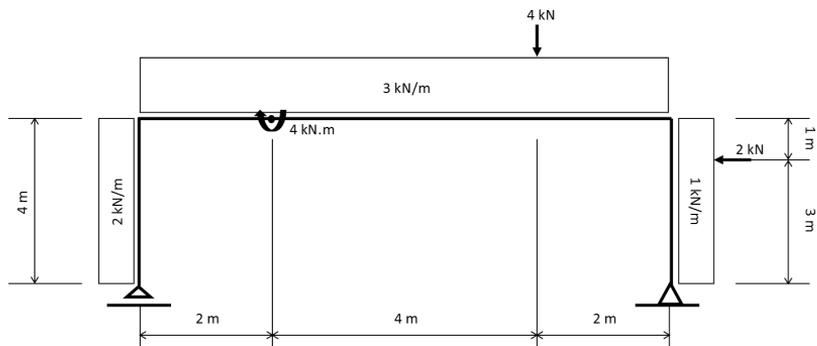
Veja a determinação das reações nos apoios de um pórtico apresentado pelo prof. Fabiano Meira de Moura Luz no vídeo a seguir:

Pórtico: reações de apoio. Disponível em: <[https://youtu.be/Rep7\\_\\_n1pzg](https://youtu.be/Rep7__n1pzg)>. Acesso em: 5 mar. 2018.

## Sem medo de errar

Você, engenheiro recém-formado, está incumbido de auxiliar no dimensionamento de um portal (pórtico isostático) de um hotel de grande porte e deverá calcular os esforços externos reativos desse portal, cujo esquema estrutural é apresentado na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Esquema estrutural do portal

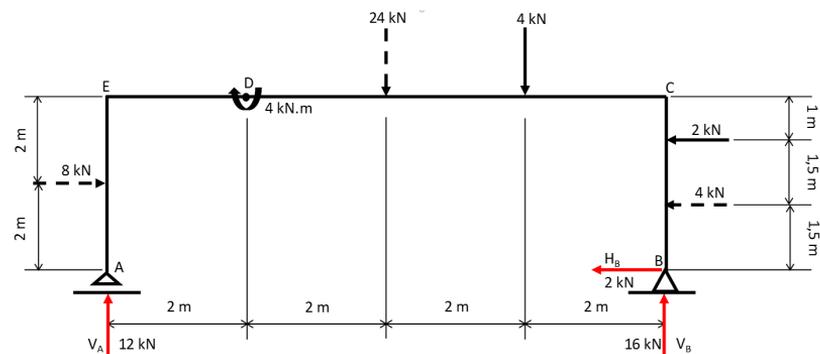


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Inicialmente transformamos as cargas distribuídas em cargas fictícias e as alocamos no centro de suas extensões (Figura 3.10); em seguida, fazemos uso das equações de equilíbrio e determinamos os esforços externos relativos apresentados também na Figura 3.10:  $V_A = 12 \text{ kN}$ ,  $V_B = 16 \text{ kN}$  e  $H_B = 2 \text{ kN}$ .

Figura 3.10 | Esquema estrutural de determinação dos esforços externos relativos do portal



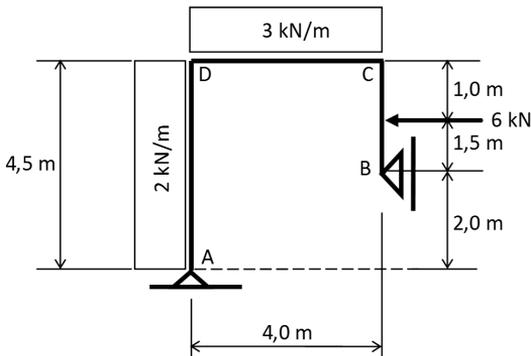
Fonte: elaborada pelo autor.

### Os apoios reagem

#### Descrição da situação-problema

Um portal com estrutura conforme a Figura 3.11 deverá ser dimensionado, e para isso você deverá determinar as reações nos apoios.

Figura 3.11 | Esquema estrutural de cálculo do portal

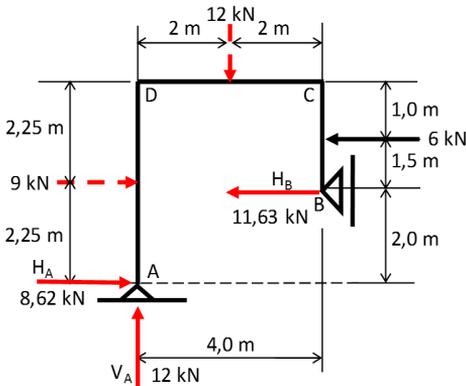


Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Iniciamos os cálculos transformando as cargas distribuídas em cargas fictícias e, em seguida, determinamos as reações nos apoios A e B fazendo uso das equações de equilíbrio. Dessa forma são obtidos  $V_A = 12 \text{ kN}$ ,  $H_A = 8,62 \text{ kN}$  e  $H_B = 11,63 \text{ kN}$ , conforme podemos observar na Figura 3.12.

Figura 3.12 | Esquema estrutural de determinação das reações nos apoios do portal



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** Pórticos são estruturas rígidas compostas por viga e pilares, podendo ser classificadas em pórticos simples, quando são estruturas isoladas, e compostos, quando são estruturas associadas da mesma forma que associamos as vigas simples que compõem a viga Gerber. Os pórticos são utilizados em portais de cidades, condomínios, indústrias e fazendas.

Indique a alternativa correta quanto ao processo de cálculo utilizado para a determinação das reações nos apoios de pórticos isostáticos.

- a) Método dos nós.
- b) Por meio das equações de equilíbrio.
- c) Método das secções.
- d) Método de Ritter.
- e) Método de Cremona.

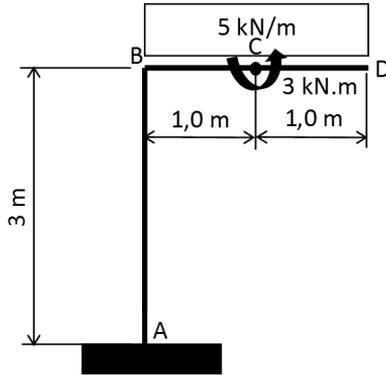
**2.** Momento puro é um esforço externo atuante na estrutura que promove giro em um determinado ponto dessa estrutura. Por convenção, adotamos como positivo o giro anti-horário e negativo, o giro horário. Quando uma estrutura é solicitada por momento puro e deseja-se determinar os esforços externos reativos, também fazemos uso das equações de equilíbrio.

Como denominamos os vetores quando uma estrutura é solicitada somente por momento puro e os esforços externos reativos serão vetores de mesma intensidade e sentidos opostos?

- a) Vetores opostos.
- b) Vetores de anulação.
- c) Vetores momento.
- d) Vetores binários.
- e) Vetores combinados.

**3.** Um pórtico engastado e livre é uma estrutura rígida composta por viga e pilar, classificando-se em pórtico simples quando utilizada como estrutura isolada. A figura a seguir diz respeito a um pórtico que é engastado no ponto A e livre no ponto D. Essa estrutura está sendo solicitada por uma carga distribuída de  $5 \text{ kN/m}$ , na extensão do segmento  $\overline{BD}$ , e nesse mesmo vão, no centro, há também uma outra solicitação, um momento puro de  $3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Figura | Pórtico engastado e livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Indique a alternativa correta com relação aos esforços externos reativos.

- a)  $V_A = 10 \text{ kN}$ ;  $H_A = 0$  e  $M_A = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .
- b)  $V_A = 10 \text{ kN}$ ;  $H_A = 10 \text{ kN}$  e  $M_A = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .
- c)  $V_A = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ;  $H_A = 0$  e  $M_A = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .
- d)  $V_A = 10 \text{ kN}$ ;  $H_A = 0$  e  $M_A = 7 \text{ kN}$ .
- e)  $V_A = 10 \text{ kN}$ ;  $H_A = 0$  e  $M_A = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

## Seção 3.2

### Pórticos isostáticos: diagramas de forças cortantes e normais

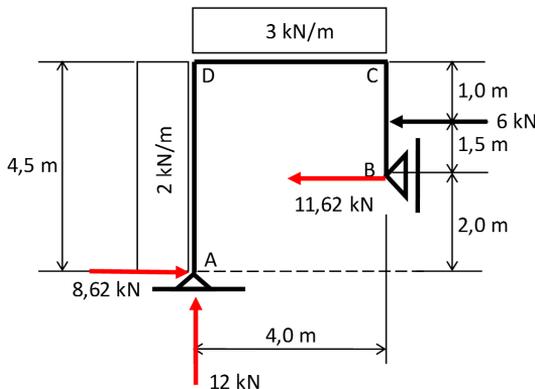
#### Diálogo aberto

Caro aluno,

Na seção anterior estudamos a determinação dos esforços externos reativos de um pórtico isostático e tivemos a oportunidade de verificar que há diferença com relação ao estudado sobre vigas isostáticas. Nesta seção estudaremos a construção de diagramas de força cortante e normal e também o cálculo de tensão de cisalhamento ocorrente em vigas. A importância dos conhecimentos aqui adquiridos está diretamente ligada a áreas de dimensionamento de estruturas, sejam elas de concreto armado, madeira ou metálica.

Você, como engenheiro recém-formado, foi incumbido de calcular os esforços externos reativos de um pórtico que será a entrada de um hotel de grande porte; nesta etapa, sua incumbência será construir os diagramas de força cortante e de força normal e determinar a tensão de cisalhamento máxima à qual a viga do pórtico estará sujeita em função de sua força cortante máxima – essa viga apresenta uma seção transversal de 50 x 20 cm. A Figura 3.13 traz o esquema estrutural de cálculo do pórtico com as reações nos apoios do portal, conforme resultado obtido na Seção 3.1 e que é a base para o desenvolvimento desta nova incumbência.

Figura 3.13 | Esquema estrutural de cálculo do pórtico com as reações nos apoios do portal



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que você obtenha êxito, dedique-se à compreensão da construção dos diagramas de forças cortante e normal, bem como ao cálculo de tensões de cisalhamento em vigas retangulares.

## Não pode faltar

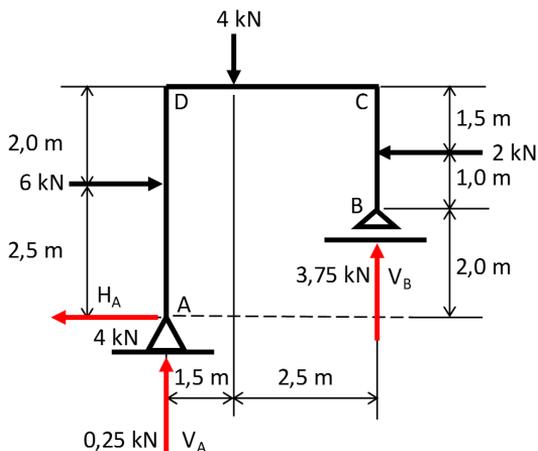
Nesta seção os estudos estão voltados à construção dos diagramas de forças cortantes e normais de pórticos. As construções de diagramas de forças cortantes em pórticos obedecem às mesmas regras estudadas em vigas isostáticas.

### Diagramas de forças cortantes para cargas concentradas em pórticos isostáticos

Nos pórticos construímos os diagramas de força cortante da mesma forma que nas vigas isostáticas, obedecendo a rotação dos eixos.

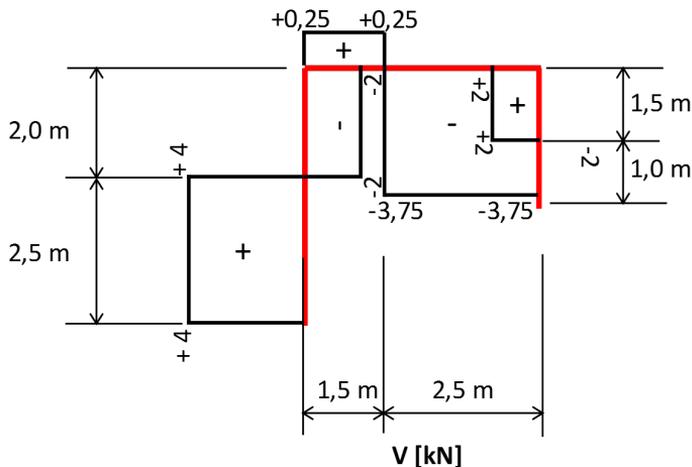
Vamos construir o diagrama de cortante da Figura 3.5 (da Seção 3.1), apresentado na Figura 3.14, mais adiante:

Figura 3.5 | Apresentação dos esforços externos relativos da Figura 3.4



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.14 | Diagrama de força cortante

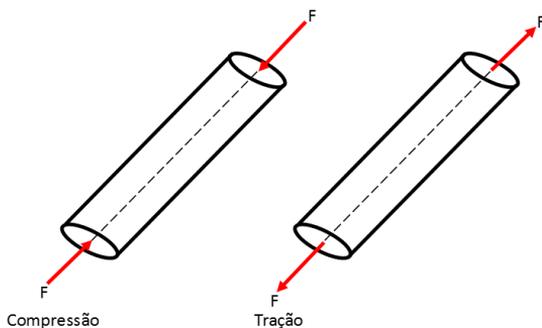


Fonte: elaborada pelo autor.

### Diagramas de forças normais para cargas concentradas em pórticos isostáticos

As forças normais são forças que atuam no sentido do eixo da peça da estrutura (Figura 3.15), provocando efeito de tração ou compressão, podendo ocorrer em vigas e pilares.

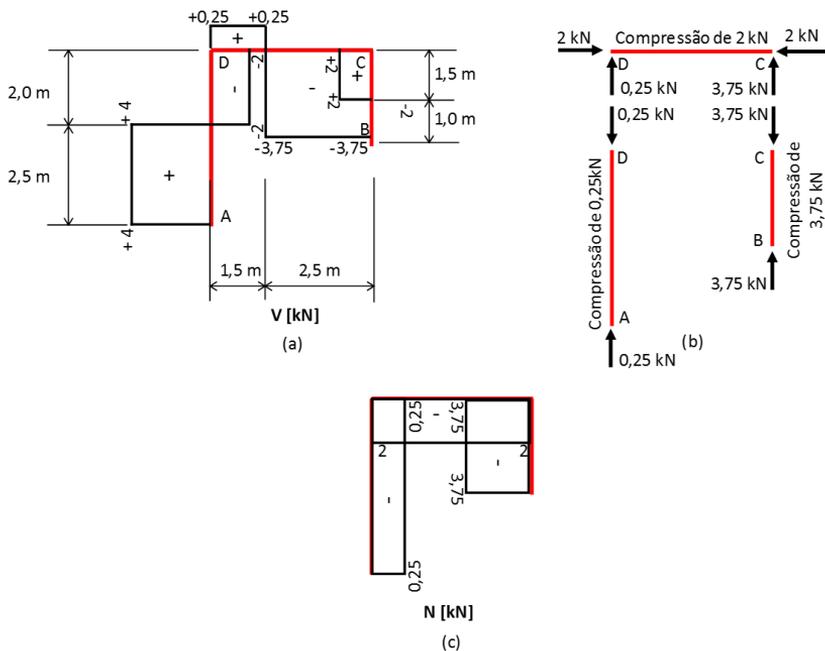
Figura 3.15 | Forças normais



Fonte: elaborada pelo autor.

Geralmente nos pórticos encontramos ações de forças normais em função das forças cortantes. Interpretando o diagrama de força cortante da Figura 3.16(a), podemos enxergar ações de forças cortantes nos elementos da estrutura (Figura 3.16(b)) e, na Figura 3.16(c), temos o diagrama de força normal da estrutura representado as ações.

Figura 3.16 | Diagrama de força cortante ao diagrama de forças normais



Fonte: elaborada pelo autor.



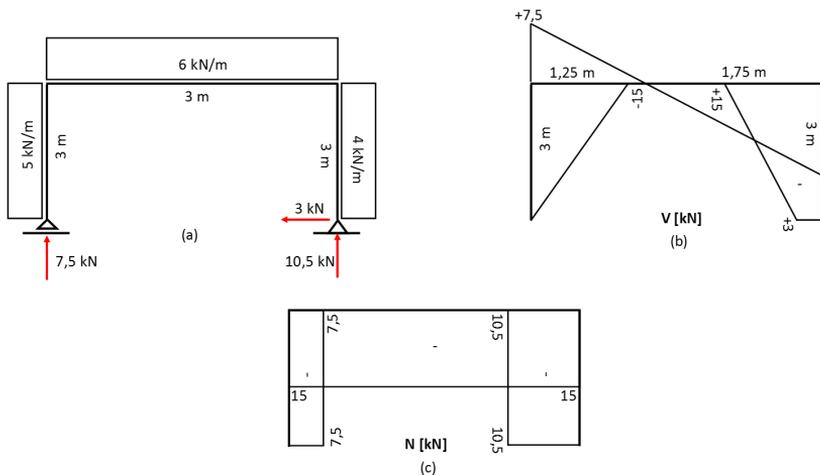
**Assimile**

As forças normais em pórticos são oriundas da análise de forças cortantes.

## Diagramas de forças cortantes e normais para cargas distribuídas em pórticos isostáticos

Mais uma vez reforçamos: os diagramas de força cortante em pórticos são construídos obedecendo o que foi estudado em vigas isostáticas, mesmo quando envolve cargas distribuídas. Observe a Figura 3.17, que nos traz um pórtico isostático solicitado por cargas distribuídas (Figura 3.17(a)) com suas reações nos apoios. Em função disso foi construído o diagrama de força cortante, por meio do qual construiu-se o diagrama de força normal. A análise foi realizada da mesma forma que apresentada no tópico anterior, e assim concluímos que as barras  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$  estão sendo comprimidas pelas forças normais de 7,5 kN, 10,5 kN e 15 kN, respectivamente.

Figura 3.17 | Pórtico e seus diagramas de força cortante e normal



Fonte: elaborada pelo autor.



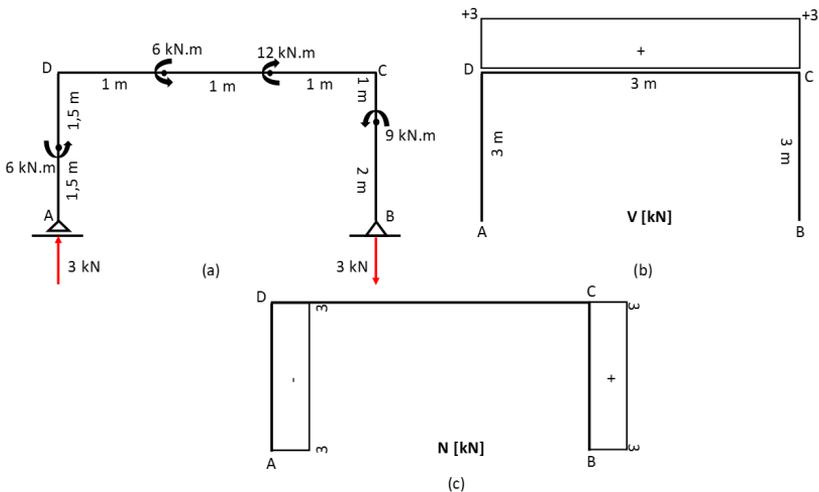
Refleta

Qual é a importância de se conhecer as forças normais ocorrentes numa estrutura?

## Diagramas de forças cortantes e normais para momentos puros em pórticos isostáticos

A influência dos momentos puros numa estrutura é a geração de esforços binários nos apoios, por meio dos quais são construídos os diagramas de força cortante e força normal. O momento puro será realmente exposto no diagrama de momento fletor. Observando a Figura 3.18 temos um pórtico solicitado somente por momentos cujas reações nos apoios é um binário de 3 kN (Figura 3.18(a)) que nos possibilitou construir um diagrama de cortante (Figura 3.18(b)); analisando o diagrama de força cortante construímos o diagrama de força normal e ainda podemos observar que a barra, ou o pilar,  $\overline{AD}$  está sendo comprimida por uma força normal de 3 kN e que a barra, ou pilar,  $\overline{BC}$  está sendo tracionada por uma força normal também de 3 kN.

Figura 3.18 | Pórtico e seus diagramas de força cortante e normal

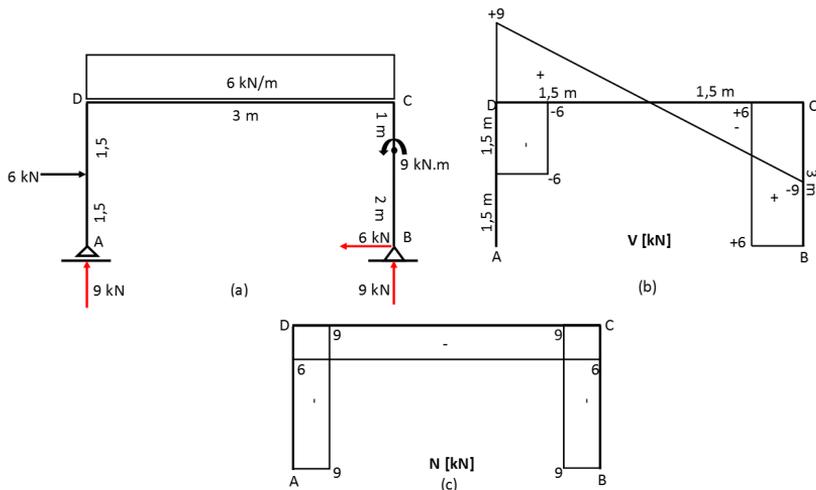


Fonte: elaborada pelo autor.

### Diagramas de forças cortantes e normais para pórticos sujeitos a cargas distribuídas, concentradas e momentos puros

Em uma única estrutura, este tópico vem demonstrar a aplicação dos conceitos apresentados nos tópicos anteriores. Observe o pórtico exibido na Figura 3.19. Construímos o diagrama de força cortante (Figura 3.19(b)), fizemos a análise desse diagrama e construímos o diagrama de força normal. Dessa forma, concluímos que as barras estão sob compressão, sendo que as barras  $\overline{AD}$  e  $\overline{CB}$  estão sujeitas às cargas normais de 9 kN e  $\overline{CD}$ , à carga de 6 kN.

Figura 3.19 | Pórtico e seus diagramas de força cortante e normal



Fonte: elaborada pelo autor.

## Tensão de cisalhamento em vigas

A tensão de cisalhamento é provocada pela ação de força cortante que gera o deslizamento entre faces, sendo que a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) é paralela à força cortante (V).

## Tensão de cisalhamento em vigas retangulares

A tensão de cisalhamento é calculada atendendo a expressão:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

Onde:

V : força cortante

Q : momento estático igual a  $\frac{bh^2}{8}$

I : momento de inércia dado por  $\frac{bh^3}{12}$

b : base da seção transversa

Assim, se desejarmos a máxima tensão de cisalhamento ( $\tau_{m\acute{a}x}$ ), que ocorre na linha neutra (LN), sendo a variação de  $y$  nula, temos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\frac{Vbh^2}{8}}{\frac{b^2h^3}{12}} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{Vbh^2}{8} \cdot \frac{12}{b^2h^3} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{3V}{2bh}$$

Onde  $bh$  é área ( $A$ ) da seção transversal. Assim:

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5V \cdot A^{-1}$$

O diagrama de tensão de cisalhamento é descrito por uma parábola (Figura 3.20).



Fonte: elaborada pelo autor.

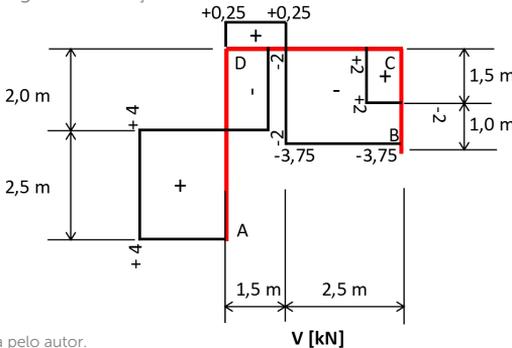
A tensão de cisalhamento média é dada então por:

$$\tau_{m\acute{e}d} = V \cdot A^{-1}$$

### Exemplificando

Dado o diagrama de força cortante (Figura 3.21) de um pórtico cuja viga apresenta altura de 40 cm e base de 20 cm, calcule a máxima e a média tensão de cisalhamento para a máxima cortante dessa viga.

Figura 3.21 | Diagrama de força cortante



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

A máxima cortante atuante na viga em questão é de 3,75 kN. Sabendo que as equações de tensão de cisalhamento para vigas retangulares são:

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5V \cdot A^{-1} \text{ e } \tau_{m\acute{e}d} = V \cdot A^{-1}$$

Então, temos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5V \cdot A^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5 \cdot 3,75 \cdot (0,2 \cdot 0,4)^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 70,31 \text{ kPa}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = V \cdot A^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = 3,75 \cdot (0,2 \cdot 0,4)^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = 46,88 \text{ kPa}$$

Portanto as tensões de cisalhamento média e máxima são, respectivamente, 46,88 kPa e 70,31 kPa.



Pesquise mais

Para maior compreensão dos assuntos apresentados nesta seção, acesse:

Pórtico: diagramas de momento fletor, força cortante e força normal. Disponível em: <<https://youtu.be/5pLPP-CEjTE>>. Acesso em: 5 mar. 2018.

Leia sobre construção de diagramas de força cortante e normal no item 5.6 do livro:

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2015.

Sobre tensão de cisalhamento em vigas, veja o material:

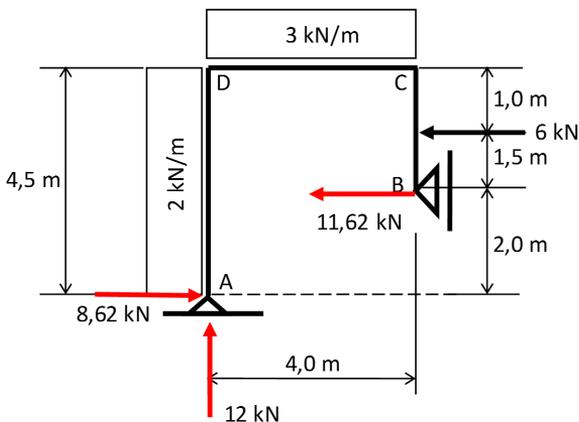
VANDERLEI, Romel Dias. **Cisalhamento**. Universidade Estadual de Maringá. Cap. 5. Disponível em: <<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/MecanicaSolidosI/Capitulo5-Cisalhamento.pdf>>. Acesso em: 5 mar. 2018.

Cisalhamento simples. Universidade Federal do Paraná. p. 61-67. Disponível em: <<http://www.estruturas.ufpr.br/wp-content/uploads/resistencia/Apostila/Capitulo5.pdf>>. Acesso em: 5 mar. 2018.

## Sem medo de errar

Você como engenheiro recém-formado foi incumbido anteriormente de calcular as reações nos apoios de um pórtico que será a entrada de um hotel (Figura 3.13). Dando continuidade a essa incumbência, deverá apresentar os diagramas de força cortante e normal e a tensão máxima de cisalhamento da viga do pórtico, em função da máxima cortante nela ocorrente. A seção da viga é retangular, de 20 x 50 cm.

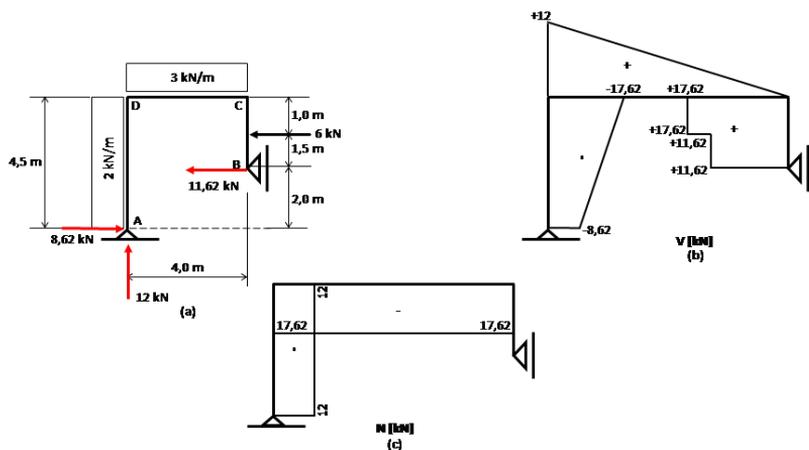
Figura 3.13 | Esquema estrutural de cálculo do pórtico com as reações nos apoios do portal



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme estudado, construímos os diagramas de força cortante (Figura 3.22(b)) e de força normal (Figura 3.22(c)) e identificamos que a maior força cortante atuante na viga do pórtico é de 12 kN, que utilizamos para determinar a máxima tensão de cisalhamento.

Figura 3.22 | Diagramas de força cortante e normal



Fonte: elaborada pelo autor.

Máxima tensão de cisalhamento:

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5V \cdot A^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5 \cdot 12 \cdot (0,2 \cdot 0,5)^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 180 \text{ kPa}$$

Portanto a máxima tensão de cisalhamento em função da máxima força cortante é de 180 kPa.

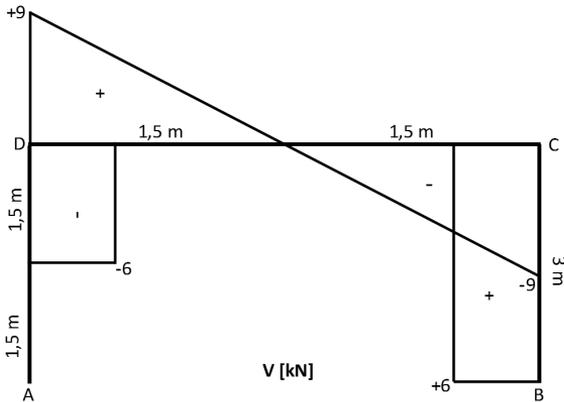
## Avançando na prática

### Tensão de cisalhamento

#### Descrição da situação-problema

Um pórtico está em fase de dimensionamento e sua função é determinar as tensões de cisalhamento média e máxima às quais a viga desse pórtico estará sujeita, sabendo que as dimensões transversais da viga são de 20 x 30 cm. As tensões deverão ser determinadas em função da máxima força cortante da viga. Para que sejam realizados os cálculos, foi-lhe apresentado o diagrama de força cortante (Figura 3.23).

Figura 3.23 | Diagrama de força cortante



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução da situação-problema

Observando a Figura 3.23, notamos que a cortante máxima à qual a viga do pórtico está sujeita é de 9 kN, e sabendo que suas dimensões transversais são de 20 x 30 cm, determinamos as tensões de cisalhamento solicitadas.

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5V \cdot A^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5 \cdot 9 \cdot (0,2 \cdot 0,3)^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 225 \text{ kPa}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = V \cdot A^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = 9 \cdot (0,2 \cdot 0,3)^{-1}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = 150 \text{ kPa}$$

### Faça valer a pena

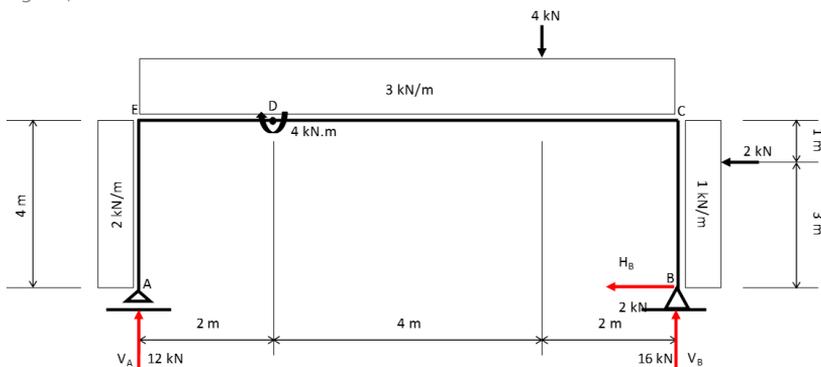
**1.** A tensão de cisalhamento é provocada pela ação de força cortante que gera o deslizamento entre faces, sendo que a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) é paralela à força cortante (V). Em uma estrutura de concreto armado, ela é uma das variáveis que nos auxilia a calcular a taxa de aço da armadura transversal.

Uma viga retangular de seção transversal igual a 30 x 70 cm está sujeita a uma força cortante de 21 kN. Qual é a tensão de cisalhamento média?

- a) 10 kPa.
- b) 21 kPa.
- c) 100 kPa.
- d) 12 kPa.
- e) 1 kPa.

**2.** Nos pórticos, construímos os diagramas de força cortante da mesma forma que nas vigas isostáticas, obedecendo a rotação dos eixos. Para que se possa dimensionar uma estrutura, uma das variáveis a ser conhecida é a força cortante. O pórtico apresentado na figura a seguir deverá ser dimensionado.

Figura | Pórtico isostático



Fonte: elaborada pelo autor.

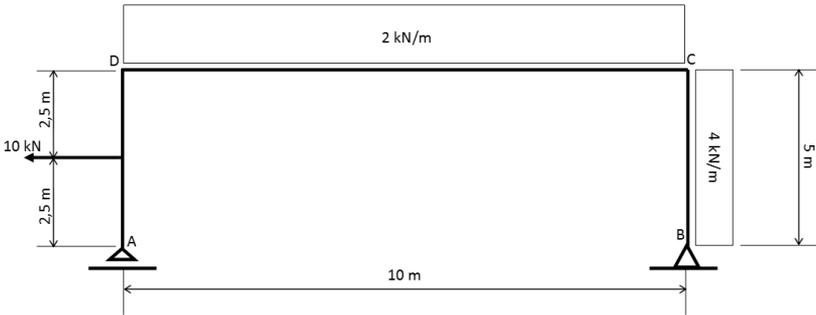
Indique a alternativa correta com relação à cortante máxima atuante no pórtico apresentado.

- a) 16 kN.
- b) 22 kN.
- c) 28 kN.
- d) 12 kN.
- e) 61 kN.

**3.** Pórtico é uma estrutura rígida composta de pilar e viga, estando esses elementos sujeitos a esforços ativos externos que provocam esforços externos reativos, esforços cortantes e normais. Em se tratando de pórticos isostáticos, os esforços externos reativos são obtidos por meio das equações de equilíbrio.

Dada a figura a seguir, determine a força cortante máxima atuante na estrutura.

Figura | Pórtico isostático



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) 17,5 kN.
- b) 10 kN.
- c) 20 kN.
- d) 2,5 kN.
- e) 30 kN.

## Seção 3.3

### Pórticos isostáticos: diagramas de momentos fletores

#### Diálogo aberto

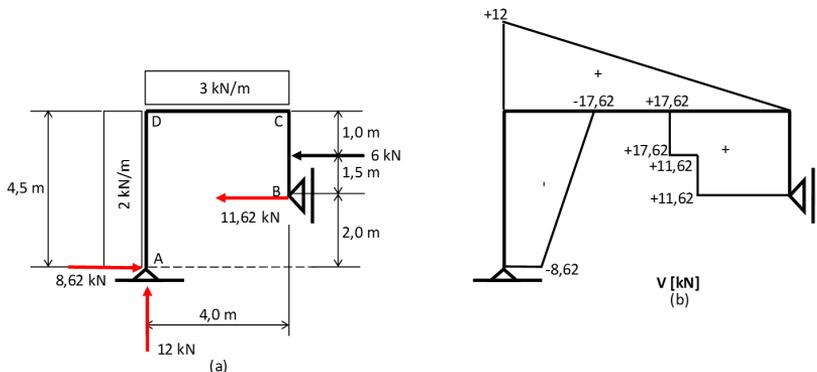
Caro aluno,

Nesta seção estudaremos a construção de diagramas de momento fletor. Como já vimos em outras situações, o momento auxilia no dimensionamento de estruturas. Na seção anterior, estudamos a construção de diagramas de força cortante e normal, e agora o diagrama de força cortante nos servirá de base para a construção do diagrama de momento fletor.

Veremos que a construção dos diagramas de momento fletor ainda obedece às bases já estudadas em vigas isostáticas, sendo assim podemos calculá-los fazendo uso dos cálculos das áreas das figuras formadas no diagrama de força cortante.

Você, engenheiro recém-formado, foi incumbido de auxiliar no dimensionamento de um pórtico isostático, que servirá de portal em um hotel de grande porte, e terá mais uma etapa a cumprir, a construção do diagrama de momento fletor com base nas informações apresentadas na Figura 3.24, composta do esquema estrutural de cálculo com os esforços externos ativos e reativos (Figura 3.24(a)) e do diagrama de força cortante (Figura 3.24(b)).

Figura 3.24 | Esquema estrutural de cálculo e diagrama de força cortante



Fonte: elaborada pelo autor.

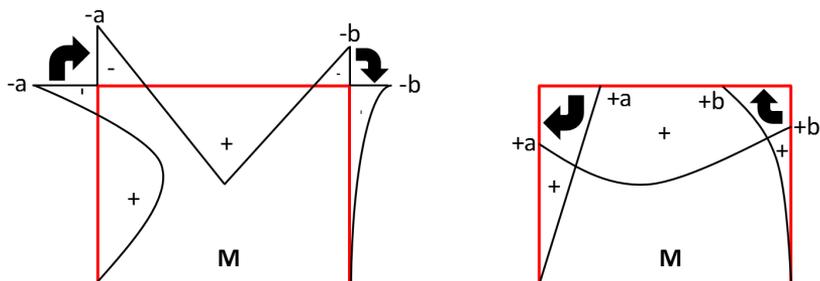
Para que você obtenha êxito em mais esta etapa, dedique-se a estudar o assunto. Leia e acesse os links que tratam da construção de diagramas de momento fletor para cargas distribuídas e concentradas.

## Não pode faltar

Caro aluno,

Aqui estamos estudando a construção de diagramas de momento fletor em pórticos isostáticos, similar ao que lhe foi apresentado na construção de diagramas de momento fletor para vigas isostáticas, já que os cálculos são os mesmos, podendo ser baseados nas áreas das figuras formadas no diagrama de força cortante. O que difere é que, ao construir o diagrama na primeira barra vertical do pórtico, devemos transferir o momento para a barra horizontal fazendo um giro horário. O mesmo deverá ser feito quando chegar ao final da barra horizontal: devemos transferir o momento para a segunda barra vertical também em giro horário, observe as Figuras 3.25(a) e (b).

Figura 3.25 | Transferência dos momentos



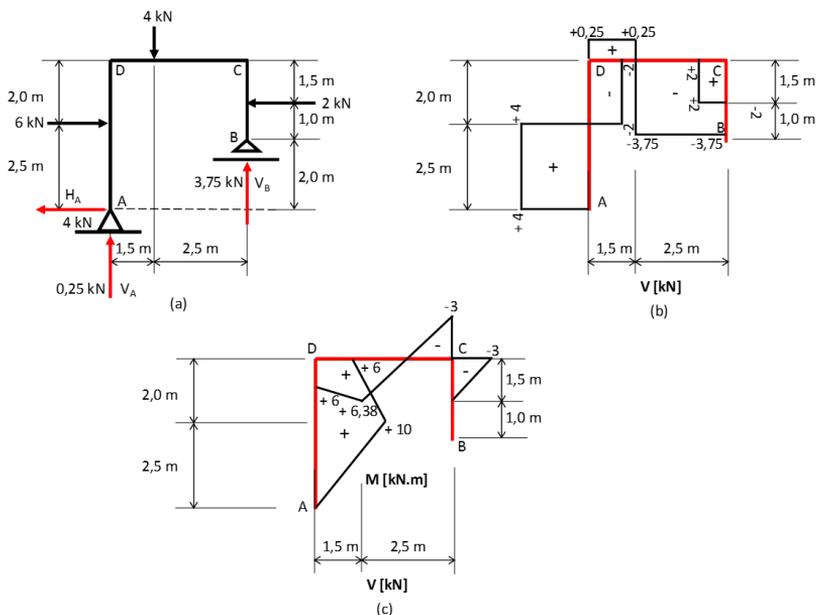
Fonte: elaborada pelo autor.

## Diagramas de momentos fletores para cargas concentradas em pórticos isostáticos

A construção desse tipo de diagrama obedece aos conceitos já estudados na Seção 1.1, ou seja, temos como base o diagrama de força cortante e calculamos os momentos a serem apresentados no diagrama em função das áreas das figuras geométricas formadas no diagrama de força cortante. A Figura 3.26 nos apresenta um diagrama de força cortante (Figura 3.26(b)) em função do qual obtemos o diagrama de momento fletor (Figura 3.26(c)). Podemos notar no diagrama de

momento fletor que, no ponto  $D$  da barra  $\overline{AD}$ , o momento é de  $+6$  kN.m, que é transferido no mesmo ponto  $D$  para a barra  $\overline{CD}$  com giro horário, ocorrendo o mesmo no ponto  $C$  dessa mesma barra  $\overline{CD}$ , transferindo o momento para barra  $\overline{BC}$ , mais uma vez com giro horário.

Figura 3.26 | Diagramas de força cortante e momento fletor de um pórtico solicitado com cargas concentradas



Fonte: elaborada pelo autor.



**Assimile**

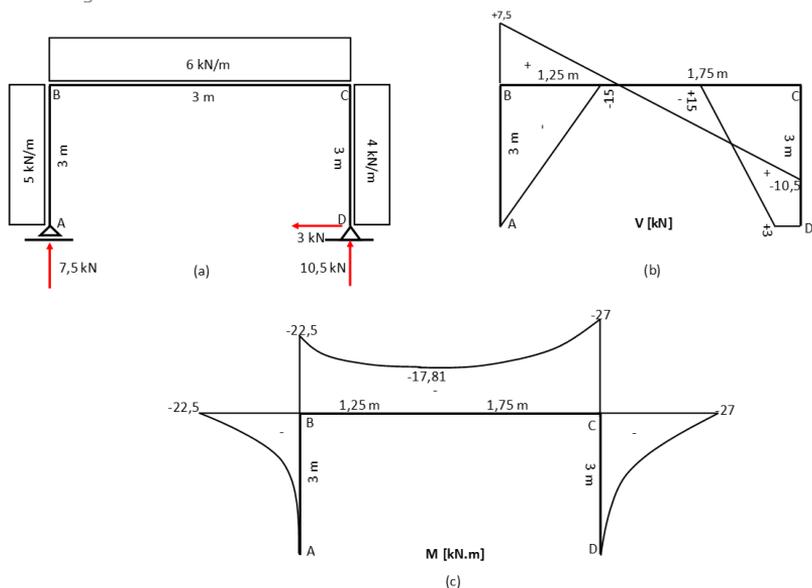
Em pórticos isostáticos, a transferência do momento fletor de uma barra para outra se faz em giro horário.

## Diagramas de momentos fletores para cargas distribuídas em pórticos isostáticos

Para construirmos esse tipo de diagrama de momento fletor, também fazemos uso dos ensinamentos obtidos na construção de diagramas de momento fletor de vigas isostáticas com cargas distribuídas. O que teremos de diferente aqui é a transferência do momento ocorrente na barra vertical para a barra horizontal, e dessa barra para a próxima

barra vertical. Observe na Figura 3.27 que os cálculos dos momentos foram realizados por meio das figuras formadas no diagrama de força cortante (Figura 3.27(b)) e, observe na Figura 3.27(c), que o momento da barra  $\overline{AB}$  no ponto  $B$  ( $-22,5 \text{ kN.m}$ ) é transferido no mesmo ponto para a barra  $\overline{BC}$ , fazendo um giro horário, ocorrendo o mesmo nesta barra no ponto  $C$ , cujo momento é de  $-27 \text{ kN.m}$ , em transferência para a barra  $\overline{CD}$ .

Figura 3.27 | Diagramas de força cortante e momento fletor de um pórtico sollicitado com cargas distribuídas



Fonte: elaborada pelo autor.



**Refleta**

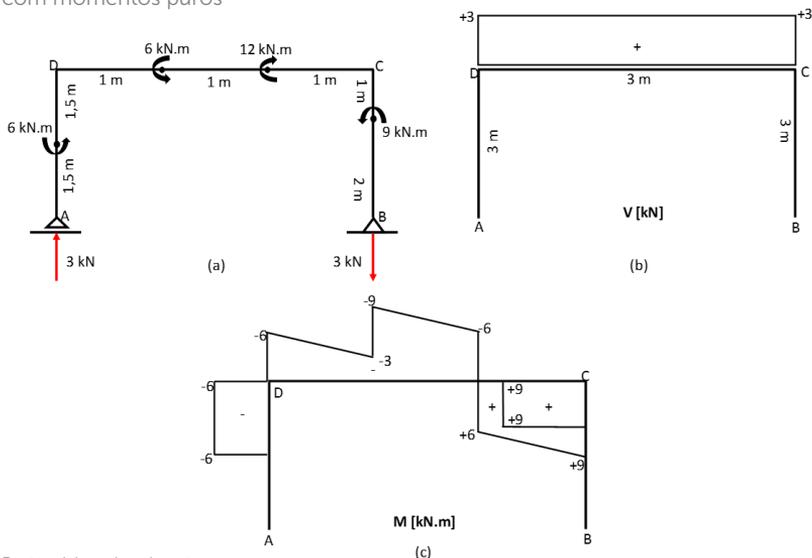
Caso você não tenha condição de fazer uso do cálculo das áreas do diagrama de força cortante para construção do diagrama de momento fletor, qual seria seu outro recurso?

## Diagramas de momentos fletores para momentos puros em pórticos isostáticos

As teorias explicadas nos tópicos anteriores se aplicam aqui também; a novidade é que a representação do momento puro no diagrama é feita por um traço, como você pode notar na Figura 3.28(c),

em que os momentos  $6 \text{ kN.m}$ ,  $12 \text{ kN.m}$  e  $9 \text{ kN.m}$  são representados por traços horizontais e verticais. Veja que o momento  $6 \text{ kN.m}$  na barra  $\overline{AB}$  está representado na horizontal, e, como não há nenhum tipo de carregamento após esse momento, representamos então como uma ação constante que no ponto  $B$  é transferido com giro horário para barra  $\overline{BC}$ , onde encontramos os momentos puros de  $6 \text{ kN.m}$  e  $12 \text{ kN.m}$  representados por traços verticais, sendo o primeiro saindo de  $-3 \text{ kN.m}$  e chegando a  $-9 \text{ kN.m}$  e o segundo saindo de  $-6 \text{ kN.m}$  e chegando a  $+6 \text{ kN.m}$ .

Figura 3.28 | Diagramas de força cortante e momento fletor de um pórtico sollicitado com momentos puros



Fonte: elaborada pelo autor.

## Diagramas de momentos fletores para pórticos sujeitos a cargas distribuídas, concentradas e momentos puros

Nesta situação temos a junção das três situações estudadas anteriormente, obedecendo as teorias estudadas sobre a construção de diagramas de momento fletor, além da transferência de momento da barra vertical para horizontal, e vice-versa, que ocorre em sentido horário.

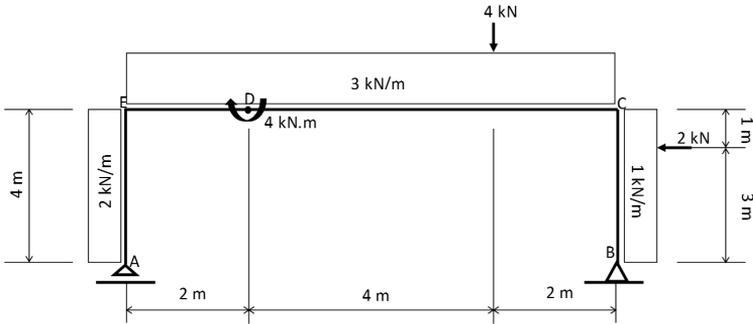


### Exemplificando

Considere uma estrutura aporticada sollicitada por cargas concentradas, distribuída em momento puro (Figura 3.29), da qual lhe é pedido o diagrama

de momento fletor.

Figura 3.29 | Diagrama de momento fletor de um pórtico solicitado com cargas distribuída, concentrada e momentos puro

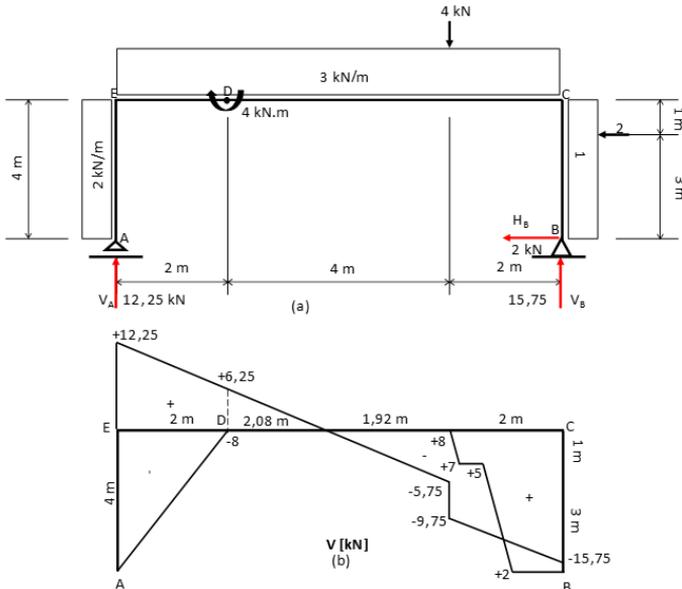


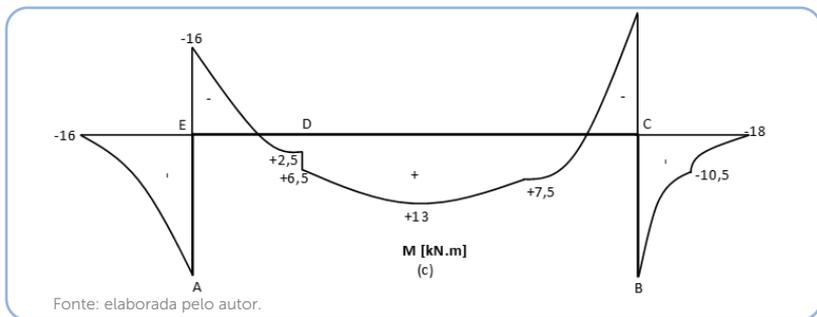
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Calculamos os esforços externos reativos apresentados na Figura 3.30(a), em seguida construímos o diagrama de força cortante (Figura 3.30(b)), que nos deu base para construir o diagrama de momento (Figura 3.30(c)), seguindo as teorias apresentadas nesta seção, pois este gráfico fez uso dos conceitos já apresentados.

Figura 3.30 | Diagrama de momento fletor de um pórtico solicitado com cargas distribuída, concentrada e momentos puro





**Pesquise mais**

Para a construção de diagrama de momento fletor, leia da página 176 à 190 do livro:

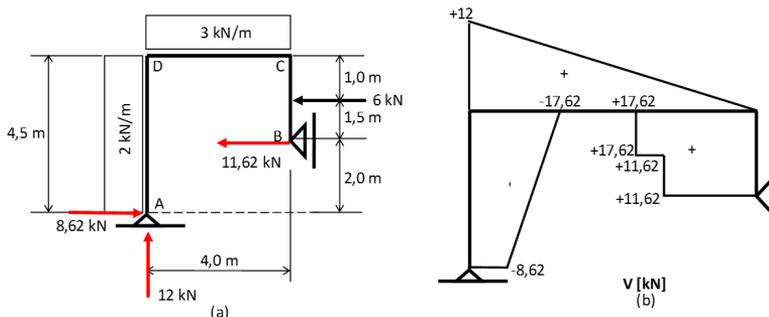
KASSIMALI, Aslam. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2015.

Pórtico: diagramas de momento fletor, força cortante e força normal. Disponível em: <<https://youtu.be/5pLPP-CEjTE>>. Acesso em: 5 mar. 2018.

**Sem medo de erro**

Você como engenheiro recém-formado foi incumbido de auxiliar no dimensionamento de um pórtico isostático que servirá de portal em um hotel de grande porte e agora terá de construir o diagrama de momento fletor com base nas informações apresentadas na Figura 3.24, que é composta do esquema estrutural de cálculo com os esforços externos ativos e reativos (Figura 3.24(a)) e do diagrama de força cortante (Figura 3.24(b)).

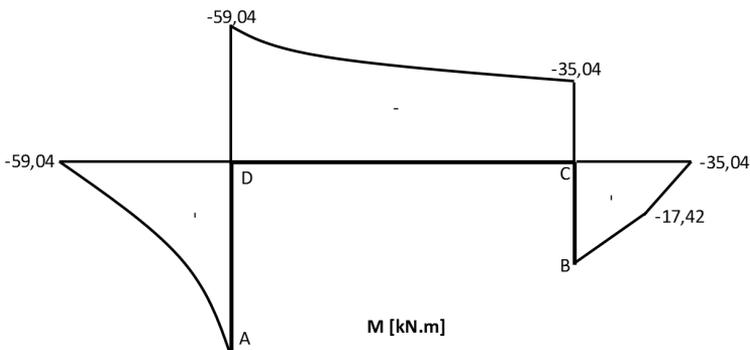
Figura 3.24 | Esquema estrutural de cálculo e diagrama de força cortante



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nas informações fornecidas e fazendo uso dos conceitos de construção de diagramas de momento fletor, tivemos como resultado a Figura 3.31, o diagrama de momento fletor solicitado.

Figura 3.31 | Diagrama de momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

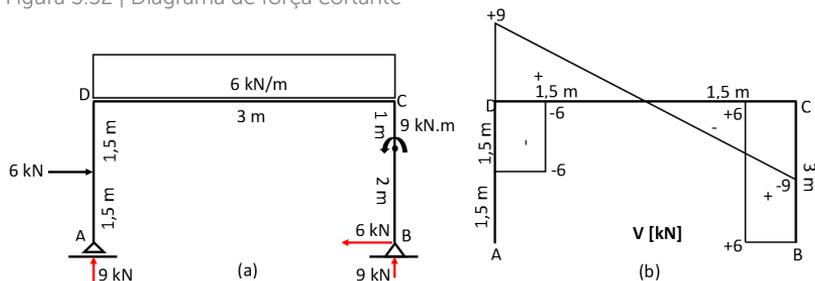
## Avançando na prática

### Diagrama de momento fletor

#### Descrição da situação-problema

Dado o pórtico, Figura 3.32, que será a estrutura do portal de entrada de um celeiro. Construa o diagrama de momento fletor em função das informações.

Figura 3.32 | Diagrama de força cortante

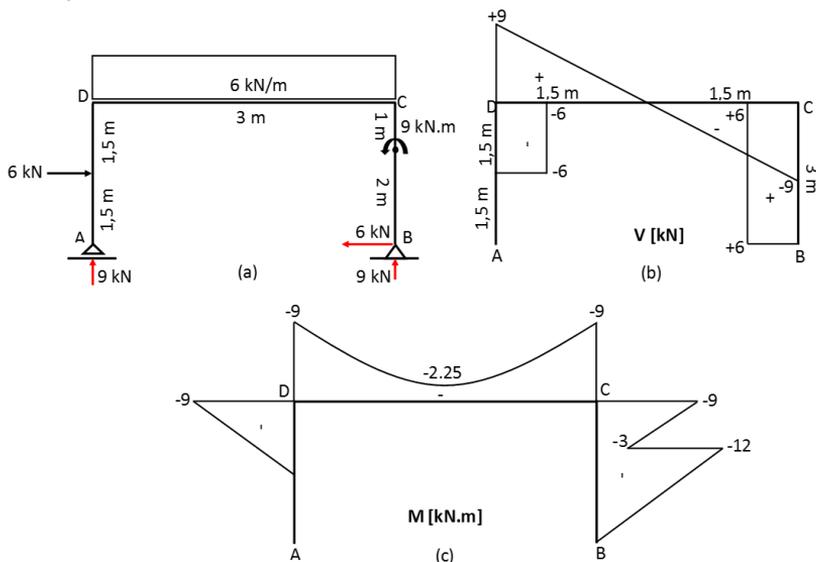


Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Fazendo uso conceitos apresentados nesta seção e com base no diagrama de força cortante (Figura 3.33(b)), construímos o diagrama de momento fletor (Figura 3.33(c)).

Figura 3.33 | Esquema estrutural de cálculo e esforços externos reativos, diagramas de força cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** O estudo da construção de diagramas de momento fletor em pórticos isostáticos apresenta pouca novidade com relação ao que foi estudado em vigas isostáticas; os cálculos são os mesmos, podendo ser baseados nas áreas as figuras formadas no diagrama de força cortante.

De que forma ocorre a transferência de momento de barras verticais para barras horizontais e vice-versa?

- Por cálculos isostáticos.
- Por giro horário.
- Por transferência isostática.
- Por giro anti-horário.
- Por transferência binária.

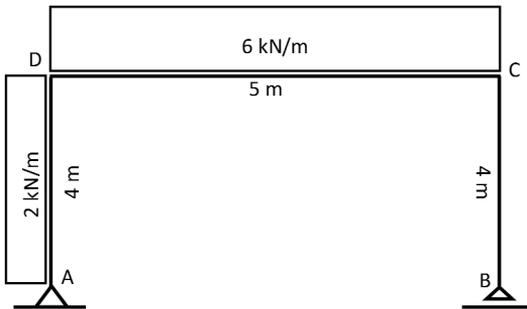
**2.** Sabemos que o momento puro reflete no cálculo de esforços externos reativos como força binária atuando em sentido contrário ao momento, assim garantindo que ele não causará instabilidade da estrutura. Nos diagramas de força normal e cortante, o momento puro não aparece; ele é representado no diagrama de momento fletor.

Como representamos um momento puro no diagrama de momento fletor de uma barra horizontal?

- a) Com traço oblíquo.
- b) Com traço curvo.
- c) Com traço reto horizontal.
- d) Com tracejado.
- e) Com traço reto vertical.

**3.** Dada a estrutura de um pórtico isostático sujeito a esforços externos ativos de cargas concentrada e distribuída, juntamente com seus esforços externos reativos, conforme a figura a seguir. Essa estrutura está também sujeita a efeitos de forças cortantes e momentos fletores.

Figura | Estrutura de pórtico isostático



Fonte: elaborada pelo autor.

Indique a alternativa correta com relação ao maior momento fletor a que a estrutura está sujeita.

- a) 22,76 kN.m.
- b) 26,72 kN.m.
- c) 62,27 kN.m.
- d) 27,62 kN.m.
- e) 76,22 kN.m.

# Referências

JUDICE, F. M. S.; PERLINGEIRO, M. S. P. L. Resistência dos materiais IX. Centro Tecnológico de Engenharia – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense. 2005. Disponível em: <[http://www.uff.br/resmatcivil/Downloads/ResMatIX/apostila\\_resmatIX.pdf](http://www.uff.br/resmatcivil/Downloads/ResMatIX/apostila_resmatIX.pdf)>. Acesso em: 5 mar. 2018.

KASSIMALI, Aslam. **Análise estrutural**. 5. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2015.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**: volume 1: estruturas isostáticas. 6. ed. São Paulo: Editora Globo, 1981.



# Grelhas isostáticas

## Convite ao estudo

Nesta unidade de estudo, iremos adquirir conhecimentos sobre grelhas isostáticas. Esse assunto trata de estruturas que têm a função de suportar lajes de piso e de cobertura, pisos de mezaninos, entre outros.

O estudo apresentado oferecerá os conceitos fundamentais para aplicar e executar cálculos de determinação dos esforços das estruturas tipo grelhas e fornecerá condições para analisar estruturas do mesmo tipo.

Serão apresentados nesta unidade: a definição e os tipos de grelhas; os esforços solicitantes e a estaticidade em grelhas isostáticas; a grelha engastada e livre, com foco no cálculo de reações, diagramas de forças cortantes e de momento fletor; a grelha triapoiada, visando ao cálculo de reações, diagramas de forças cortantes e de momento fletor.

Para o desenvolvimento desses conhecimentos, você será inserido em um problema de uma situação real: como engenheiro de uma empresa de cálculo estrutural, você deverá auxiliar no dimensionamento de estruturas do tipo grelhas isostáticas. Na Seção 4.1, verificará a estaticidade da estrutura de um mezanino. Na Seção 4.2, deverá calcular as reações no apoio, construir os diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor de um outro mezanino com base estrutural em grelha isostática engastada e livre. Na Seção 4.3, deverá apresentar os cálculos de reações nos apoios, os diagramas de força cortante, momentos fletor e torsor de uma cobertura que terá como base uma grelha isostática triapoiada. O seu sucesso terá como base o conhecimento fornecido nesta unidade!

# Seção 4.1

## Introdução ao estudo das grelhas

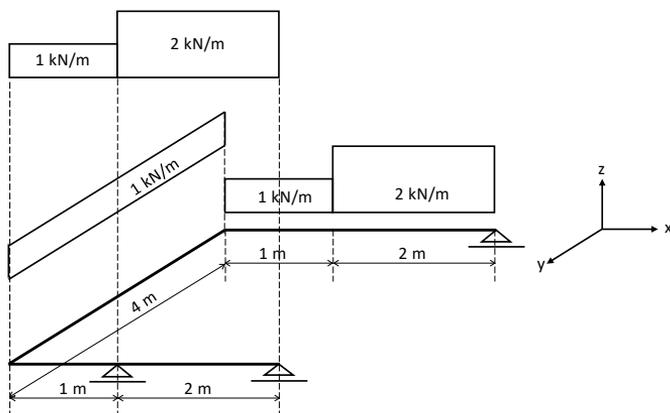
### Diálogo aberto

Nesta seção, você verá as definições e os conceitos sobre grelhas, além de uma introdução sobre os esforços solicitantes e a estaticidade.

O estudo sobre grelhas é muito importante, pois várias situações têm como estrutura de base as grelhas, como lajes de piso e cobertura, mezaninos, entre outros. Essas estruturas podem ser construídas em concreto armado, em madeira ou metal.

Para que possa ter um bom domínio e se familiarize com o assunto estudado, você será inserido num problema como engenheiro que faz parte de uma equipe de cálculo estrutural e deverá verificar a estaticidade de uma estrutura tipo grelha (Figura 4.1) que servirá como base para o piso de um mezanino de um barracão industrial.

Figura 4.1 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha



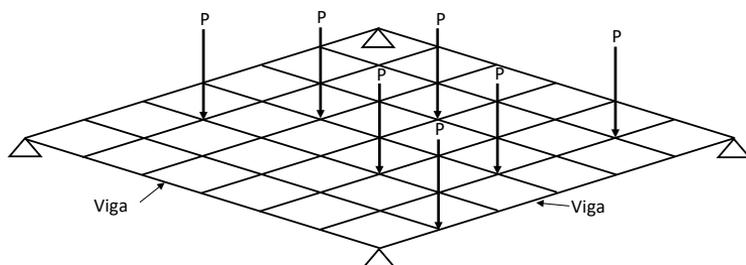
Fonte: elaborada pelo autor.

Para que você possa obter êxito nessa incumbência, deverá entender os conceitos de “estaticidade das grelhas”. Mãos à obra!

### Definição

Grelha é uma estrutura reticulada plana formada pelo cruzamento entre vigas. Esses reticulados podem ser quadrados ou oblíquos. A grelha é submetida a esforços externos ativos ( $P$ ) perpendiculares ao seu plano (Figura 4.2), gerando esforços externos reativos, como força cortante, momento fletor e momento torsor.

Figura 4.2 | Grelha



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos encontrar aplicações do uso de grelhas em estruturas de lajes de cobertura e piso de grandes extensões, mezaninos, entre outros. Elas podem ser feitas em concreto armado, estrutura de madeira ou metálica (Figura 4.3). Na Figura 4.3 (a), temos um exemplo de estrutura tipo grelha com reticulado quadrado em estrutura metálica; na Figura 4.3 (b), vemos um exemplo desse tipo de estrutura em reticulado quadrado em madeira; e na Figura 4.3 (c) observamos um exemplo de estrutura tipo grelha em reticulado quadrado e oblíquo em estrutura metálica.

Figura 4.3 | Grelhas em estruturas metálica e de madeira



Fonte: Ruy Flávio de Oliveira, coberturas da área de convivência da Kroton Educacional, Valinhos (20 de dezembro de 2017).

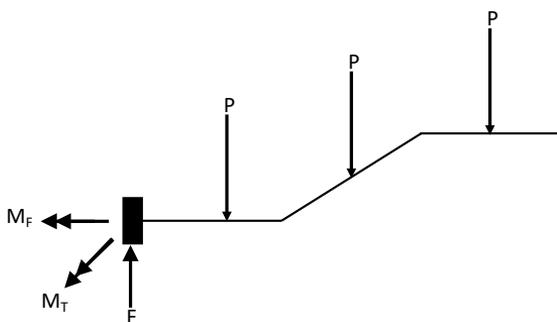
## Tipos de grelhas isostáticas e introdução aos esforços solici- tantes em grelhas

Há dois tipos de grelhas isostáticas:

- Grelha engastada e livre.
- Grelha triapoiada.

A grelha engastada e livre tem como esquema estrutural de cálculo a Figura 4.4, na qual:  $M_F$  = **momento fletor**,  $M_T$  = **momento torsor** e  $F$  = **força**. Os momentos são representados por um vetor de seta dupla ( $\rightarrow\rightarrow$ ).

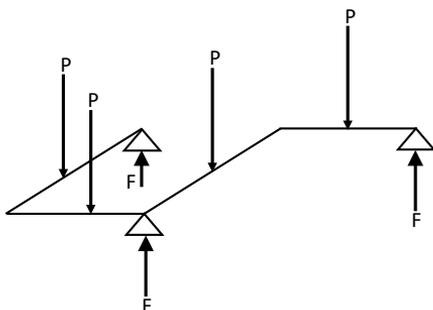
Figura 4.4 | Esquema estrutural de cálculo de grelha engastada e livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos também a grelha triapoiada (Figura 4.5). Como o próprio nome diz, ela é apoiada em três apoios que não devem estar na mesma linha. A figura a seguir apresenta o esquema estrutural de cálculo de uma grelha isostática triapoiada.

Figura 4.5 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha triapoiada



Fonte: elaborada pelo autor.

As grelhas triapoiadas apresentarão, como esforços externos reativos, a força cortante e o momento fletor.

Os esforços externos reativos em grelhas isostáticas são obtidos com as equações de equilíbrio, considerando uma situação tridimensional. Então:

$$\text{Equações de equilíbrio} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right.$$



**Refleta**

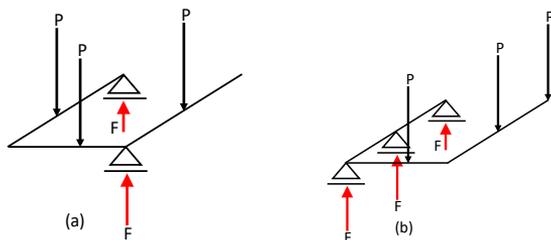
Estamos na última unidade de ensino. Ao longo da leitura, você identificou o que é comum a todos os estudos quando tratamos da determinação dos esforços externos reativos?

## Estaticidade em grelhas isostáticas

As grelhas, quanto à sua estaticidade, podem ser classificadas em hipostática, isostática e hiperestática, como todas as estruturas que estudamos desde a Unidade 1.

- Hipostática: quando apresentar menos que três esforços externos reativos (Figura 4.6(a)), ou reações nos apoios; e/ou quando os apoios apresentarem condições colineares (Figura 4.6(b)).

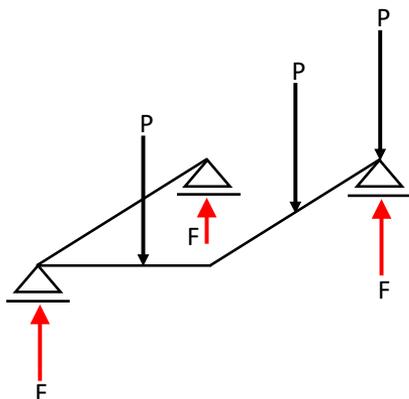
Figura 4.6 | Esquema estrutural de cálculo de grelha hipostática



Fonte: elaborada pelo autor.

- Isostática: quando apresentar três esforços externos reativos, ou reações nos apoios; e quando os apoios não apresentarem condições colineares (Figura 4.7).

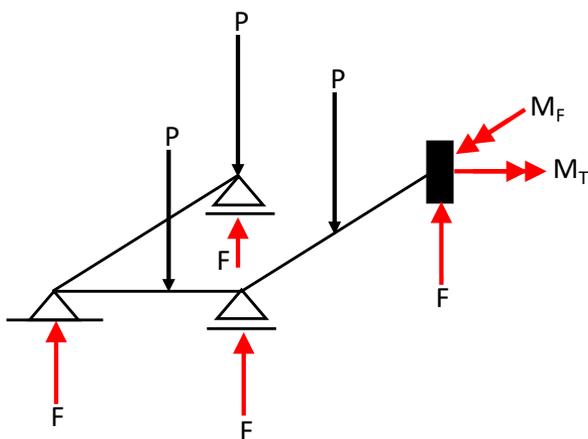
Figura 4.7 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

- Hiperestática: quando apresentar mais que três esforços externos reativos (Figura 4.8), ou reações nos apoios.

Figura 4.8 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha hiperestática

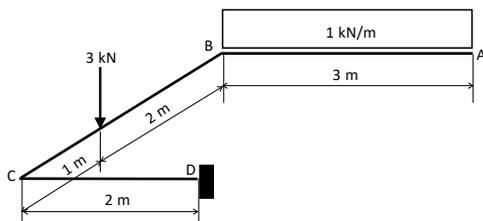


Fonte: elaborada pelo autor.



Dada a estrutura de cálculo de uma grelha (Figura 4.9), determine a sua estaticidade.

Figura 4.9 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha

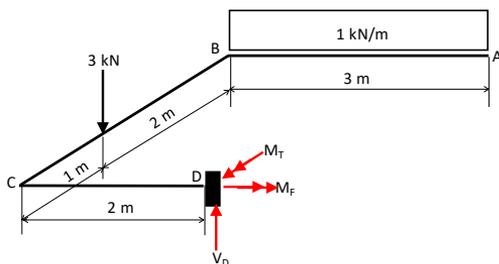


Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Podemos observar na Figura 4.10 que são apresentadas três reações, ou seja, esforços externos reativos: a força ( $V_D$ ), o momento fletor ( $M_F$ ) e o momento torsor ( $M_T$ ). Portanto, podemos concluir que se trata de uma grelha isostática, pois a teoria nos informa que, quando tivermos um número de reações igual a três e não colineares, estamos trabalhando com uma grelha isostática.

Figura 4.10 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha com os esforços externos reativos



Fonte: elaborada pelo autor.



Estaticidade em grelhas isostáticas

- Hipostática: número de reações  $< 3$  e/ou colineares.
- Isostática: número de reações  $= 3$  e não colineares.
- Hiperestática: número de reações  $> 3$ .



Leia sobre conceitos, tipos e exemplos de aplicação de grelhas isostáticas em:

NEVES JUNIOR, Alex. **Teoria das Estruturas I**. Grupo de Experimentação em Estruturas – GRUPEX – UFSC. Cuiabá: UFMT – CUA. Disponível em: <[http://araguaia2.ufmt.br/professor/disciplina\\_arquivo/96/20111108140.pdf](http://araguaia2.ufmt.br/professor/disciplina_arquivo/96/20111108140.pdf)>. Acesso em: 22 dez. 2017.

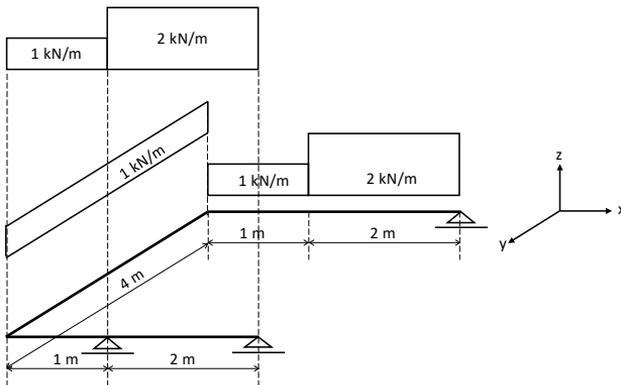
Acesse também a apostila de Análise Estrutural I da Universidade Federal de Santa Catarina:

VALLE, Ângela do; ROVERE, Henriette Lebre La; PILLAR, Nora Maria De Patta. **Apostila de análise estrutural I**. Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2013, p. 134-136. Disponível em: <<http://pet.ecv.ufsc.br/arquivos/apoio-didatico/ECV5219%20-%20An%C3%A1lise%20Estrutural%20I.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2017.

## Sem medo de errar

Você, como um engenheiro que faz parte de uma equipe de cálculo estrutural, recebeu a incumbência de verificar a estaticidade de uma estrutura tipo grelha que servirá como base para o piso de um mezanino. A Figura 4.1, apresentada anteriormente, é o esquema estrutural de cálculo da grelha a qual deverá ser a base do piso do mezanino em questão.

Figura 4.1 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha

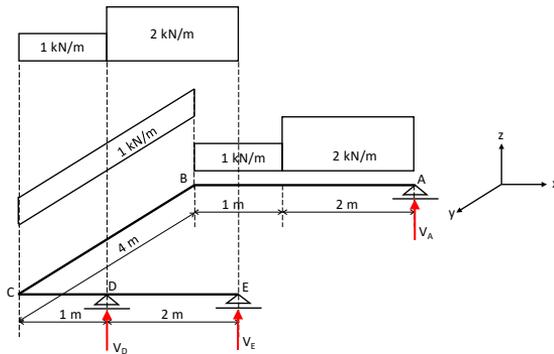


Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução:

Observando a Figura 4.11 notamos que ela é sustentada por três apoios móveis, cada um apresenta uma reação em sentido vertical, não colineares. Sendo assim, temos três reações, ou seja, três esforços externos reativos. O que observamos atende à teoria que nos diz: “número de reações = 3 e não colineares resulta em grelha isostática”.

Figura 4.11 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externo reativos (reações nos apoios)



Fonte: elaborada pelo autor.

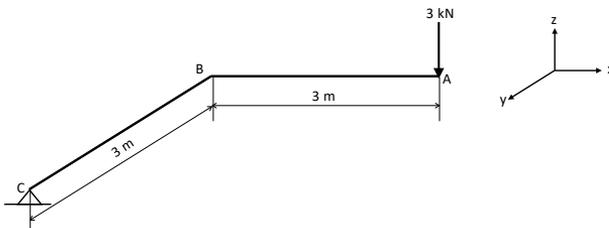
## Avançando na prática

### Estaticidade é verificação de segurança

#### Descrição da situação-problema

Deseja-se utilizar como estrutura para suporte de uma máquina elevadora de carga uma estrutura tipo grelha, representada pela Figura 4.12. Para isso, pede-se que seja realizada a verificação da estaticidade da estrutura.

Figura 4.12 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha

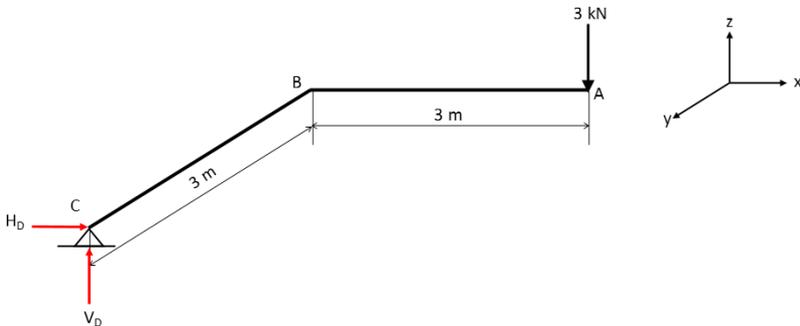


Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução da situação-problema

A Figura 4.13 é a representação da Figura 4.12 com os esforços externos reativos. Então, na Figura 4.13, observamos que o apoio fixo resulta em duas reações, uma vertical e outra horizontal. Pelo fato de a estrutura ter apenas duas reações, concluímos que se trata de uma grelha hipostática, pois a teoria nos informa que: quando o "número de reações  $< 3$ , trata-se de grelha hipostática".

Figura 4.13 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externo reativos (reações nos apoios)



Fonte: elaborada pelo autor.

### Faça valer a pena

**1.** Grelha é uma estrutura reticulada plana formada pelo cruzamento entre vigas, submetida a esforços externos ativos (P) perpendiculares a seu plano, gerando esforços externos reativos, como força cortante, momento fletor e momento torsor.

Quanto aos reticulados das grelhas, como podem ser definidos?

- a) Retangular e oblíquo.
- b) Quadrado e inclinado.
- c) Retangular e inclinado.
- d) Quadrado e oblíquo.
- e) Plano e não plano.

**2.** Podemos encontrar aplicações do uso de grelhas em estruturas de lajes de cobertura e piso de grandes extensões, mezaninos, pontes, entre outros. As grelhas podem ser construídas em concreto armado ou com estruturas de madeira ou metal.

Indique a alternativa correta quanto aos tipos de grelhas isostáticas.

- a) Grelha engastada; grelha triapoiada.
- b) Grelha livre; grelha triapoiada.
- c) Grelha engastada; grelha biapoiada.
- d) Grelha livre; grelha biapoiada.
- e) Grelha engastada e livre; grelha triapoiada.

**3.** As grelhas são estruturas reticuladas planas formadas pelo cruzamento entre vigas, são submetidas a esforços externos ativos perpendiculares a seus planos e, quanto à sua estaticidade, podem ser classificadas em hipostática, isostática e hiperestática.

Considera-se uma grelha isostática em que condições com relação a seus esforços externos reativos (reações nos apoios)?

- a) Número de esforços externos reativos igual a 3 com apoios não colineares.
- b) Número de esforços externos reativos maior que 3.
- c) Número de esforços externos reativos igual a 3 com apoios colineares.
- d) Número de esforços externos reativos menor que 3.
- e) Número de esforços externos reativos maior que 3 com apoios colineares.

## Seção 4.2

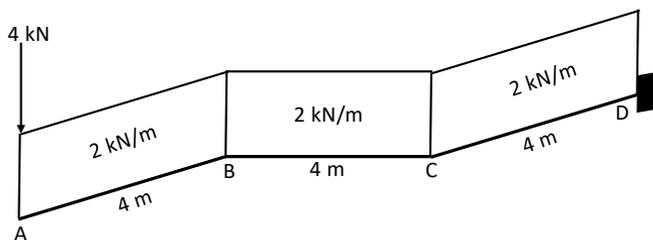
### Grelha engastada e livre

#### Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos os tipos de grelhas isostáticas, uma introdução aos cálculos de esforços externos reativos e a estática de grelhas isostáticas. Nesta seção, ainda estudaremos as grelhas isostáticas, com foco no estudo da grelha engastada e livre e apresentaremos os cálculos das reações nos apoios, bem como a construção dos diagramas de momento fletor e momento torsor.

Para que você tenha mais compreensão dos assuntos, será inserido em um problema como engenheiro civil de uma empresa de cálculo estrutural. Você faz parte de uma equipe que está desenvolvendo a estrutura de um mezanino que será suportado por um sistema de grelha isostática engastada e livre. Sua função é apresentar os diagramas de força cortante, momento fletor e torsor da estrutura a ser desenvolvida, cujo esquema estrutural de cálculo é dado na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Esquema estrutural de cálculo do mezanino



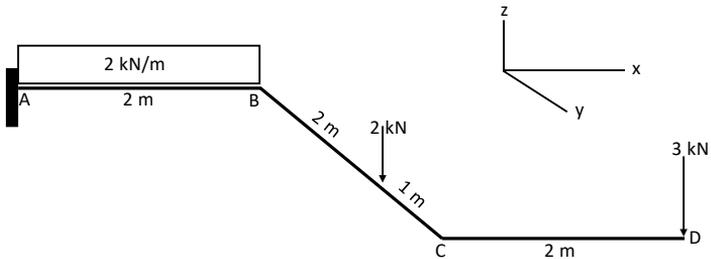
Fonte: elaborada pelo autor.

Para que obtenha êxito nessa incumbência, você deverá estudar e pesquisar sobre cálculo de reações nos apoios, construção de diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor para grelhas isostáticas do tipo engastada e livre.

### Grelha engastada e livre

Esse tipo de grelha tem uma de suas extremidades engastada e as outras livres, como apresentado na Figura 4.15, a qual é o esquema estrutural de cálculo de uma grelha engastada e livre.

Figura 4.11 | Esquema estrutural de cálculo com os esforços externo reativos (reações nos apoios)

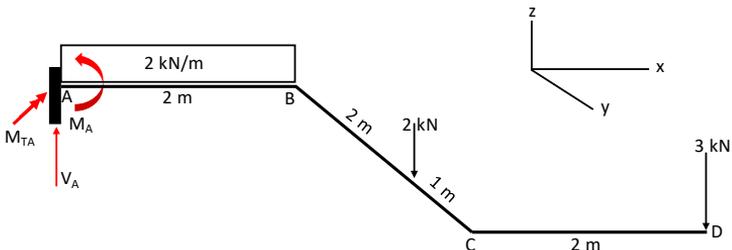


Fonte: elaborada pelo autor.

### Cálculo de reações (esforços externos reativos)

No tipo de grelha que estamos estudando (grelha engastada e livre), teremos como reações, ou esforços externos reativos: a reação vertical ( $V_i$ ), o momento fletor ( $M_i$ ) e o momento torsor ( $M_{Ti}$ ), conforme podemos ver na Figura 4.16.

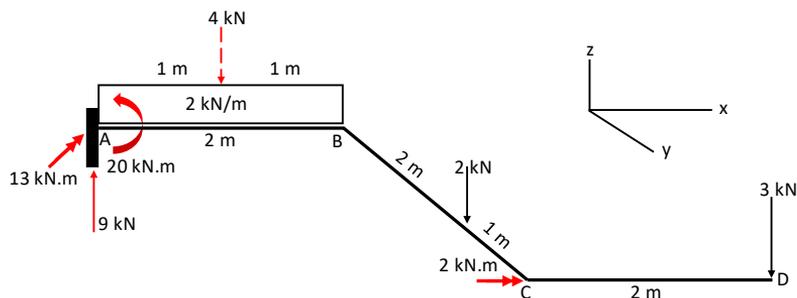
Figura 4.16 | Esquema estrutural de cálculo de grelha engastada e livre com as reações



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtemos a reação vertical por meio de  $\sum F_V = 0$ , assim, obtemos  $V_A = 9 \text{ kN}$ . O momento fletor ( $M_A$ ) foi obtido considerando  $\sum M_A = 0$  em torno do eixo y, assim,  $M_A = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , conforme podemos observar na Figura 4.17.

Figura 4.17 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha engastada e livre com suas reações



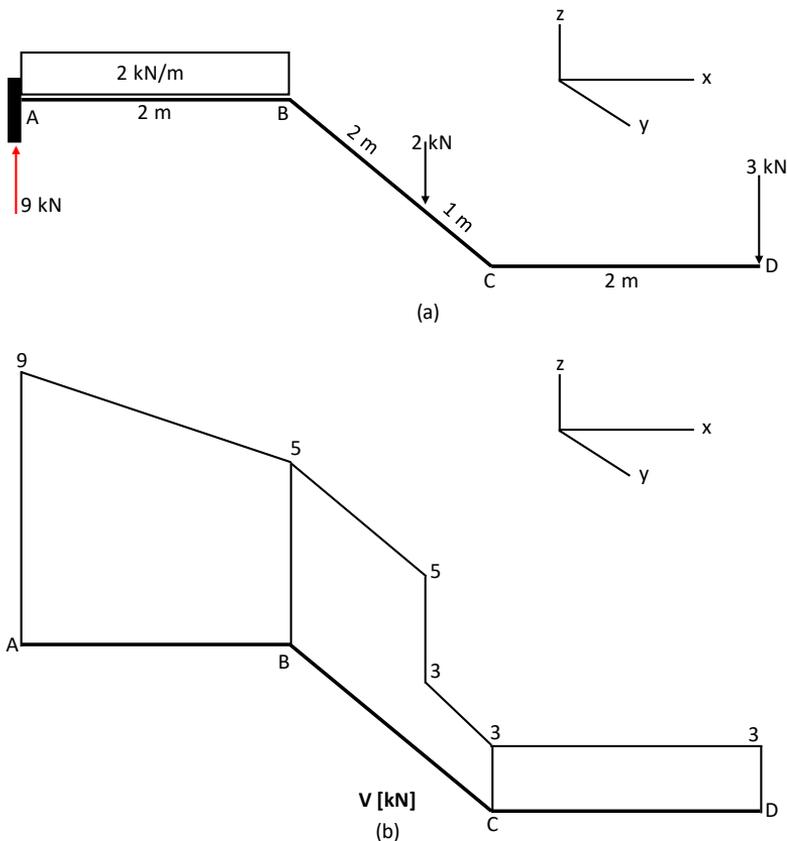
Fonte: elaborada pelo autor.

Já no momento torsor, consideramos as forças que fazem com que cada barra gire em torno do seu próprio eixo, mas ainda calculamos o momento obedecendo  $M = F \cdot d$ . Temos sob efeito de momento torsor as barras  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , sendo que a primeira gira sob o torque de  $13 \text{ kN}\cdot\text{m}$  e a segunda sob  $2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , como apresentado na Figura 4.17.

## Diagramas de forças cortantes

A construção do diagrama de força cortante tem como base a mesma forma de construção estudada na Seção 1.1 – Vigas isostáticas planas. O que temos a nos atentar é que devemos obedecer às mudanças de eixos. Observe a Figura 4.18, a qual apresenta os esforços externos ativos e reativos (Figura 4.18(a)). A partir deles, construímos o diagrama de força cortante (Figura 4.18(b)).

Figura 4.18 | Esforços externos ativos e reativos (a); diagrama de força cortante (b)



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

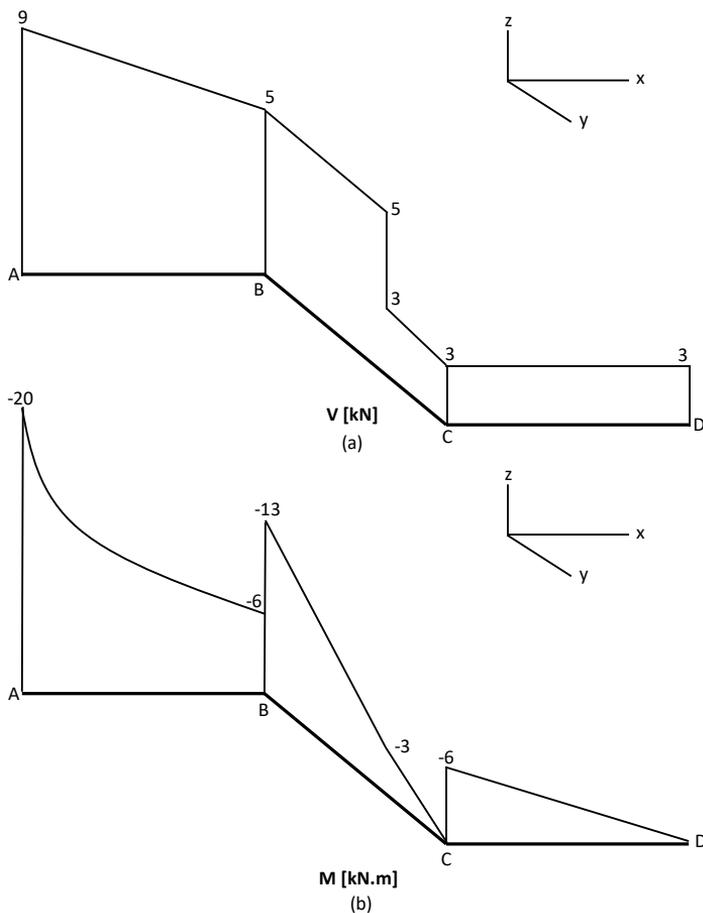
Qual a diferença entre momento fletor e momento torsor?

## Diagramas de momento fletor

A construção do diagrama de momento fletor pode ser baseado nas figuras geométricas formadas no diagrama de esforço cortante. As barras perpendiculares têm seus diagramas de momento fletor independentes. Mas, quando as barras são paralelas, os momentos são sequenciais, ou seja, o momento do término de uma barra será

apresentado no início da próxima, conforme apresentado na Figura 4.19, com relação ao momento de  $-6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , que aparece no término da barra  $\overline{AB}$  e no início da barra  $\overline{CD}$ .

Figura 4.19 | Diagrama de momento fletor de uma grelha isostática engastada e livre



Fonte: elaborada pelo autor.



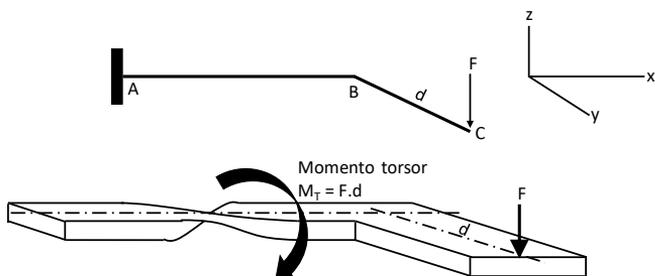
**Assimile**

Na construção dos diagramas de momento fletor, as barras perpendiculares têm seus diagramas independentes. Mas, quando as barras são paralelas, os momentos são sequenciais, ou seja, o momento do término de uma barra será apresentado no início da próxima.

## Diagramas de momento torsor

Sabemos que o momento torsor é o esforço externo que promove o giro da barra em torno do seu próprio eixo em função de uma força ( $F$ ) e de uma distância ( $d$ ) perpendicular ao eixo da barra, conforme Figura 4.20.

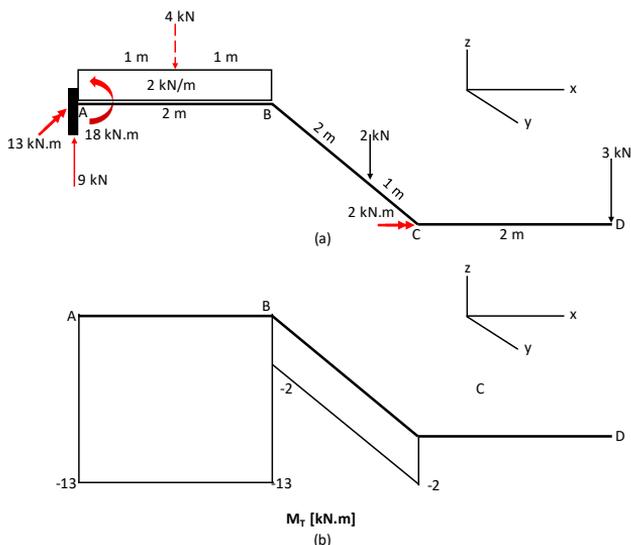
Figura 4.20 | Momento torsor



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtemos o diagrama de momento torsor por meio de  $M_T = \sum F \cdot d$ , forças e distâncias perpendiculares ao eixo da barra. Assim, calculamos as barras separadamente e construímos o diagrama conforme a Figura 4.21.

Figura 4.21 | Diagrama de momento torsor de uma grelha isostática engastada e livre



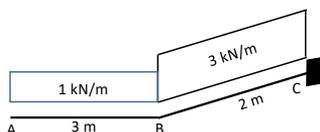
Fonte: elaborada pelo autor.



## Exemplificando

Dado o esquema estrutural de cálculo de uma grelha isostática engastada e livre (Figura 4.22), apresente os diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor.

Figura 4.22 | Esquema estrutural de grelha isostática engastada e livre

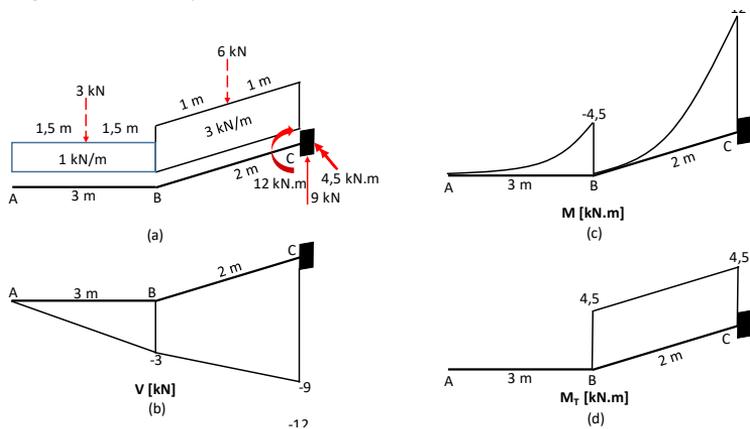


Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Obedecendo a teorias apresentadas nesta seção com relação aos cálculos de reações nos apoios, construções de diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor, obtivemos a Figura 4.23 que atende ao solicitado neste exemplo.

Figura 4.23 | Esquema estrutural de grelha isostática engastada e livre com os diagramas de esforços externos reativos



Fonte: elaborada pelo autor.



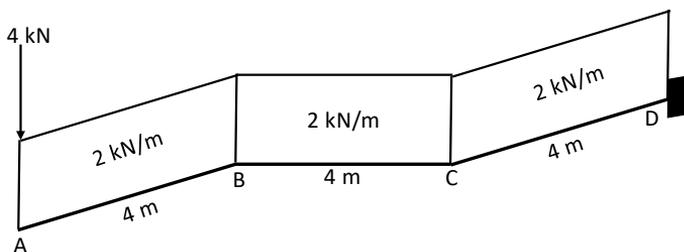
## Pesquise mais

Para observar um exemplo de grelha engastada e livre, acesse: ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira de. **Estruturas isostáticas**. Oficina de Texto, p. 15-16. Disponível em: <[https://www.ofitexto.com.br/wp-content/uploads/2017/04/Estruturas\\_Isost%C3%A1ticas\\_cap07.pdf](https://www.ofitexto.com.br/wp-content/uploads/2017/04/Estruturas_Isost%C3%A1ticas_cap07.pdf)>. Acesso em: 11 abr. 2018.

## Sem medo de errar

Você, como engenheiro civil de uma empresa de cálculo estrutural, faz parte de uma equipe que está desenvolvendo a estrutura de mezanino que será suportado por um sistema de grelha isostática engastada e livre. Sua função é apresentar os diagramas de força cortante, momento fletor e torsor da estrutura a ser desenvolvida, cujo esquema estrutural de cálculo é dado na Figura 4.14.

Figura 4.14 | Esquema estrutural de cálculo do mezanino

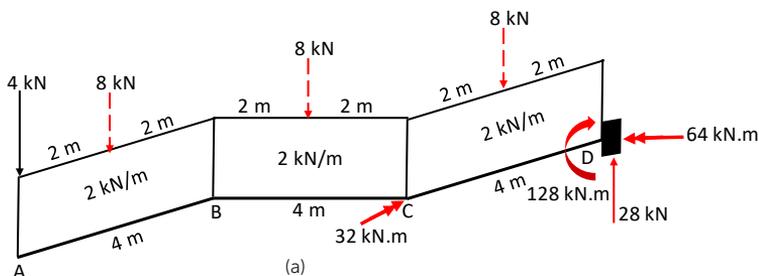


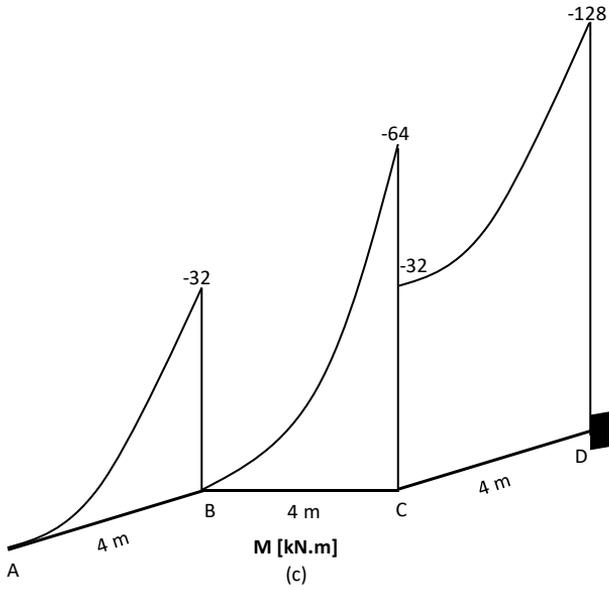
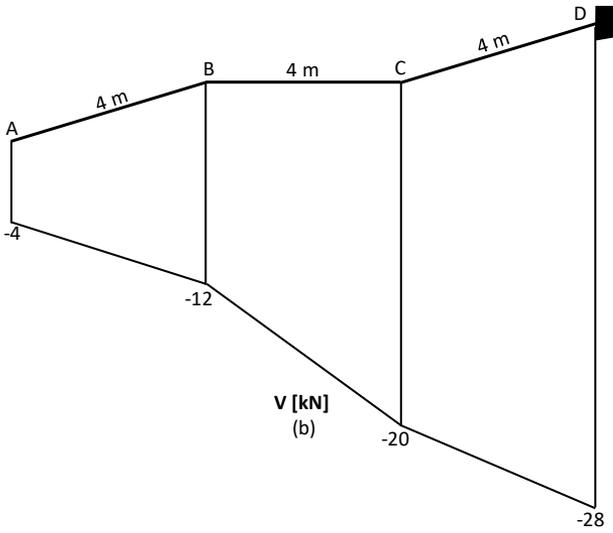
Fonte: elaborada pelo autor.

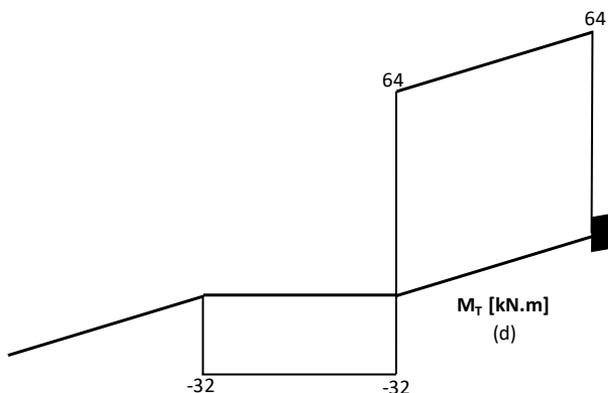
### Resolução:

Aplicando os conceitos apresentados nesta seção sobre cálculo de reações nos apoios, construção de diagramas de força cortante, momento fletor e torsor, obtemos os resultados apresentados na Figura 4.24.

Figura 4.24 | Esquema estrutural de cálculo do mezanino e os diagramas de força cortante, momento fletor e torsor







Fonte: elaborada pelo autor.

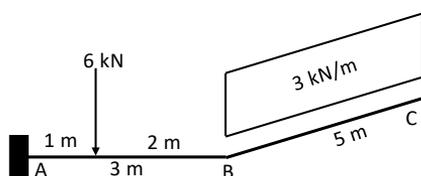
## Avançando na prática

### Diagramas de força cortante, momento fletor e torsor

#### Descrição da situação-problema

Você, como engenheiro civil, membro de uma equipe de cálculo estrutural, está incumbido de apresentar os diagramas de força cortante, momento fletor e torsor de uma estrutura de camarote que terá como estrutura uma grelha isostática engastada e livre (Figura 4.25).

Figura 4.25 | Esquema estrutural de cálculo do camarote

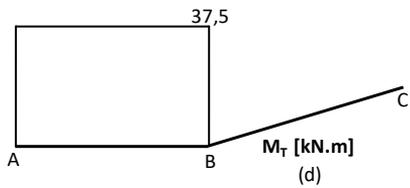
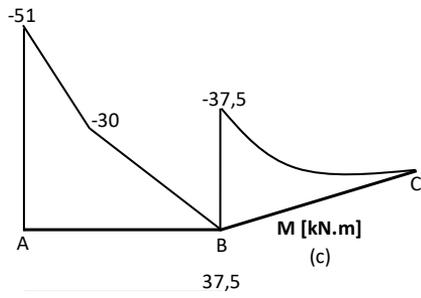
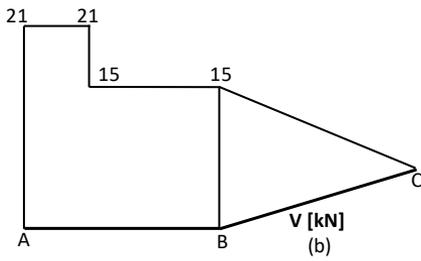
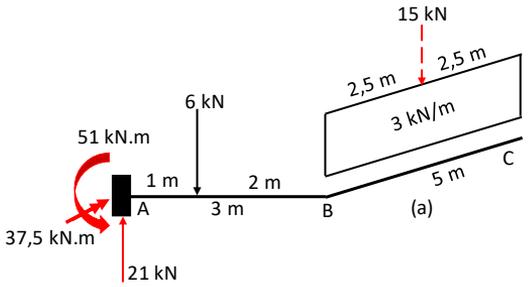


Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Aplicando os conceitos estudados nesta seção com relação à determinação das reações nos apoios e à construção dos diagramas de momento fletor e torsor, obtemos os resultados apresentados na Figura 4.26, atendendo ao solicitado.

Figura 4.26 | Esquema estrutural de cálculo do camarote e os diagramas de força cortante, momento fletor e torsor



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** Em uma grelha isostática engastada e livre, que é uma grelha com uma extremidade engastada e as outras livres, temos como reações nos apoios, ou seja, esforços externos reativos: a força vertical, o momento no engaste e o momento torsor.

Com relação à força vertical existente no apoio, como podemos obtê-la?

a)  $\sum M_{Engaste} = 0$

b)  $\sum F_H = 0$

c)  $\sum F_V = 0$

d)  $\sum M_{Torsor} = 0$

e)  $\sum M_{Engaste} + M_{Torsor} = 0$

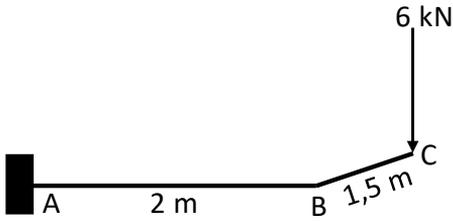
**2.** Para que possamos expressar o comportamento de uma grelha isostática do tipo engastada e livre, usamos os diagramas de força, momento fletor e momento torsor, pois esses diagramas nos oferecem informações que possibilitam dimensionar a estrutura do tipo grelha de forma adequada e segura.

A construção dos diagramas de momento fletor podem ter como base as figuras geométricas do diagrama de força cortante e, quando se trata de grelha isostática engastada e livre, temos que nos atentar a quê?

- a) Que, em barras paralelas, o momento fletor apresentado no término de uma barra deverá ser transferido para o início da próxima barra paralela.
- b) Que, em barras paralelas, o momento apresentado no término de uma barra deverá ser subtraído da próxima barra paralela.
- c) Que o momento apresentado no término de uma barra deverá ser transferido para o início da próxima barra.
- d) Que, em barras paralelas, o momento apresentado no término de uma barra deverá ser omitido do início da próxima barra paralela.
- e) Como as barras são independentes, não devemos ter nenhuma preocupação.

**3.** Uma grelha isostática do tipo engastada e livre, cujo esquema estrutural de cálculo é dado pela figura a seguir, será utilizada como base de uma plataforma de elevador de carga de um grande centro comercial.

Esquema estrutural de cálculo de uma plataforma elevadora de carga



Fonte: elaborada pelo autor.

Calcule o momento torsor atuante na barra  $\overline{AB}$ .

- a)  $12 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- b)  $21 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- c)  $9 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- d)  $18 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- e)  $0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

## Seção 4.3

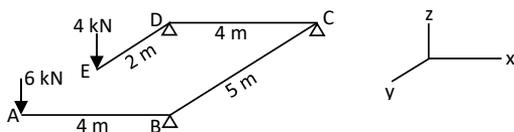
### Grelha triapoiada

#### Diálogo aberto

Na seção anterior, aprendemos a calcular reações nos apoios, construir diagramas de força, momento fletor e torsor para grelhas isostáticas do tipo engastada e livre. Nesta seção, veremos os mesmos tópicos, mas voltados a grelhas isostáticas do tipo triapoiada. O tipo de estrutura a ser estudado é aplicado como base de suporte de lajes, mezaninos, entre outros.

Para que você tenha mais compreensão sobre o assunto apresentado, você será inserido em uma situação-problema como engenheiro civil de uma empresa de cálculo estrutural e deverá apresentar os diagramas de força cortante, momentos fletor e torsor de uma cobertura que terá como base uma grelha isostática triapoiada. A Figura 4.27 representa o esquema estrutural de cálculo.

Figura 4.27 | Esquema estrutural de cálculo da cobertura



Fonte: elaborada pelo autor.

Para executar essa tarefa, você terá que estudar: reações nos apoios de grelhas triapoiadas, construção de diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor para o mesmo tipo de estrutura.

#### Não pode faltar

Como sabemos, nesta seção, estudaremos os cálculos de reações nos apoios, bem como a construção de diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor.

## Grelha triapoada

Como o próprio nome diz são grelhas que apresentam três apoios e, para serem consideradas isostáticas, esses apoios não podem ser colineares, como citado na Seção 4.1.

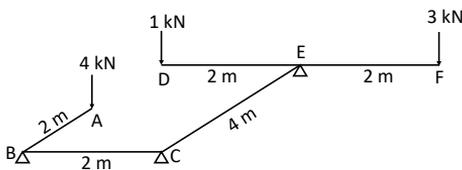
### Cálculo de reações

O cálculo de reações ocorre por meio de equações de equilíbrio, levando em consideração as condições tridimensionais. Porém, para os cálculos das somatórias dos momentos, levaremos em consideração a barra ( $\sum M_{\text{barra}i\bar{j}} = 0$ ), e não o ponto, como estudado em vigas isostáticas planas.

#### Exemplo:

Dada a grelha isostática triapoada (Figura 4.28), determine as reações nos apoios, ou seja, os esforços externos reativos.

Figura 4.28 | Grelha isostática triapoada



Fonte: adaptada de Süsssekind (1981, p. 282).

#### Resolução:

Observando a Figura 4.28 e fazendo uso das equações de equilíbrio, determinamos as reações  $V_B$ ,  $V_C$  e  $V_E$ .

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$V_B + V_C + V_E - 4 - 1 - 3 = 0$$

$$V_B + V_C + V_E = 8 \text{ kN}$$

Pela somatória das forças, não é possível determinar as incógnitas. Assim, partimos para a somatória dos momentos, mas com relação às barras.

$$\sum M_{\text{barraBC}} = 0$$

$$4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 4V_E = 0 \Rightarrow V_E = 6 \text{ kN}$$

$$\sum M_{\text{barraCE}} = 0$$

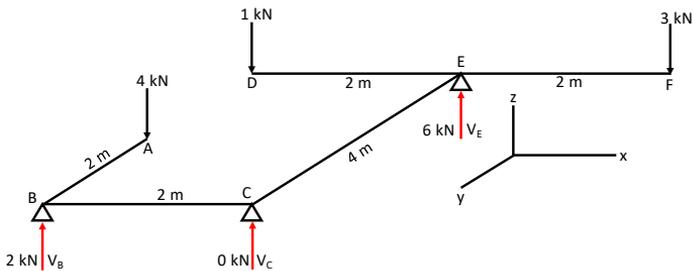
$$-2V_B + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_{\text{barraDF}} = 0$$

$$-2 \cdot 4 + 4V_B + 4V_C = 0$$

$$-2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4V_C = 0 \Rightarrow V_C = 0 \text{ kN}$$

Figura 4.29 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha triapoiada com as reações de apoio



Fonte: adaptada de Süsskind (1981, p. 282)



### Assimile

As somatórias dos momentos em grelhas triapoiadas serão consideradas em relação a uma barra, e não a um ponto.

## Diagramas de forças cortantes

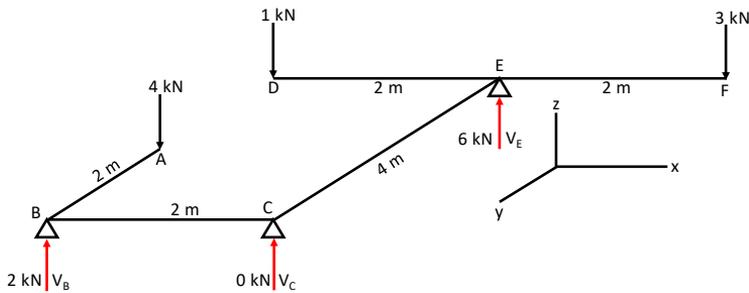
Construímos os diagramas de força cortante com base nos cálculos de reações nos apoios, ou seja, nos esforços externos reativos. Usamos os mesmos conceitos apresentados nos estudos de vigas isostáticas planas (Seção 1.1). Porém, consideramos as condições tridimensionais apresentadas na Seção 4.2.



### Exemplificando

Fazendo uso dos resultados das reações nos apoios apresentados na Figura 4.30, construa o diagrama de força cortante.

Figura 4.30 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha triapioiada com as reações de apoio

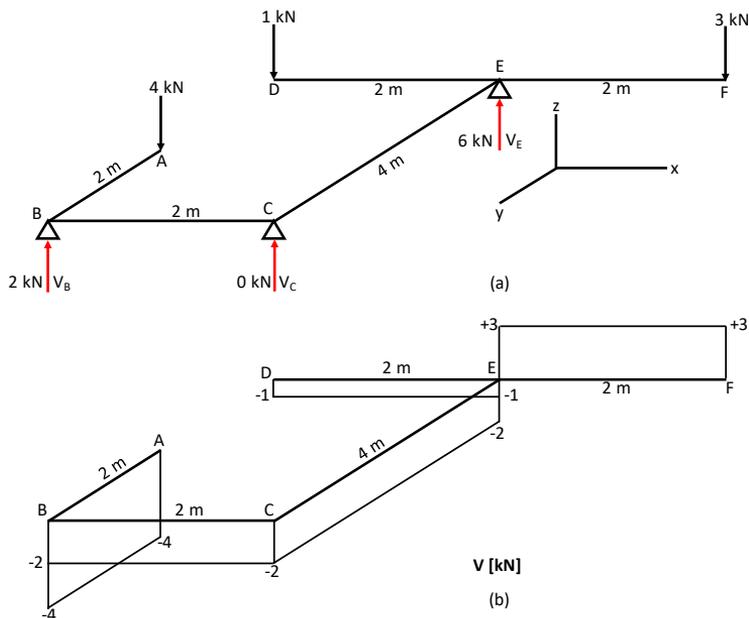


Fonte: adaptada de Süsserkind (1981, p. 282).

### Resolução:

Fazendo uso dos conceitos de construção de diagramas de forças cortantes estudados nas Seções 1.1 e 4.2, construímos o diagrama solicitado. Observe a Figura 4.31(b).

Figura 4.31 | Esquema estrutural de cálculo de uma grelha triapioiada com as reações de apoio e diagrama de força cortante



Fonte: adaptada de Süsserkind (1981, p. 282; 283).

## Diagramas de momentos fletores

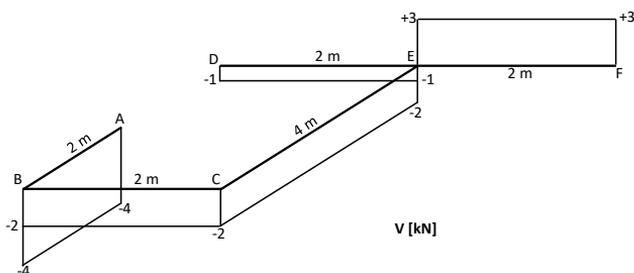
Para a construção desse tipo de diagrama, temos que nos basear pelo diagrama de força cortante, considerando os apoios como engastes. Além disso, analisamos as barras separadamente. Assim, as barras não serão consideradas biapoiadas, mas serão consideradas engastadas e livres.



### Exemplificando

Fazendo uso do diagrama de força cortante apresentado na Figura 4.31(b), construa o diagrama de momento fletor.

Figura 4.31(b) | Diagrama de força cortante de uma grelha triapoiada isostática

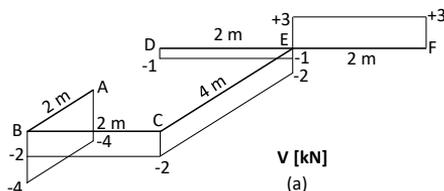


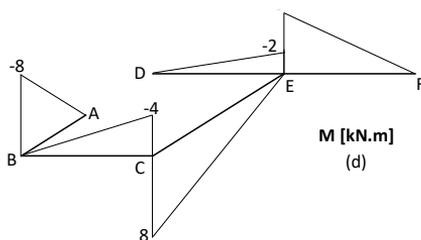
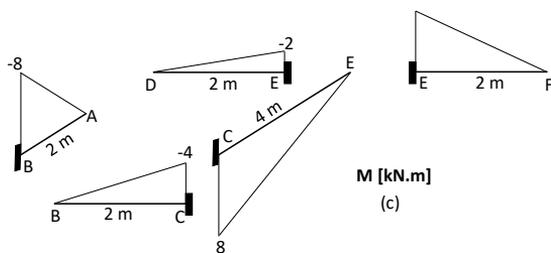
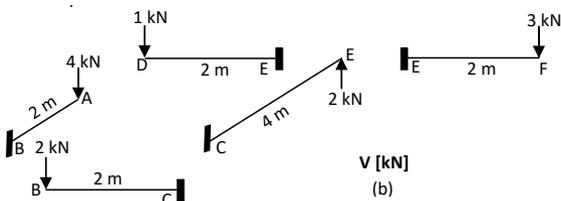
Fonte: adaptada de Süssekind (1981, p. 283).

### Resolução:

Com base na Figura 4.32(a), separamos as barras, tornando-as engastadas e livre, e transformamos as forças cortantes em vetores (Figura 4.32(b)). Logo após, calculamos os momentos fletores em cada barra e construímos os diagramas de momentos fletores parciais (Figura 4.32(c)). Finalizando, unimos os diagramas de momentos fletores parciais, gerando um único diagrama de momento fletor (Figura 4.32(d)).

Figura 4.32 | Diagrama de força cortante de uma grelha triapoiada isostática e diagrama de momento fletor





Fonte: adaptada de Süsskind (1981, p. 283).

## Diagramas de momento torsor

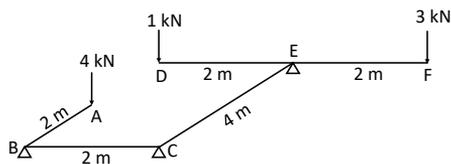
Para construir o diagrama de momento torsor de uma grelha isostática triapoiada, temos que analisar quais barras estarão sob o efeito do momento torsor. Estarão sob esse efeito as barras que estiverem conectadas às barras que sejam concorrentes e com extremidade livre sob ação de cargas. O cálculo do momento fletor se dá por  $M = F \cdot d$ .



### Exemplificando

Dada a grelha isostática triapoiada (Figura 4.28), apresente o diagrama de momento torsor.

Figura 4.28 | Grelha isostática triapijada



Fonte: adaptada de Sússekind (1981, p. 282).

### Resolução:

Analisando a Figura 4.28, podemos observar que a barra  $\overline{BC}$  estará sujeita a momento torsor devido à ação da barra concorrente  $\overline{AB}$ , que é uma barra com extremidade livre. E essas barras se conectam pelo ponto  $B$ . Então, calculamos o momento torsor em  $\overline{BC}$ :

$$M = F \cdot d$$

$$M_{TBC} = 4 \cdot 2 \Rightarrow M_{TBC} = +8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

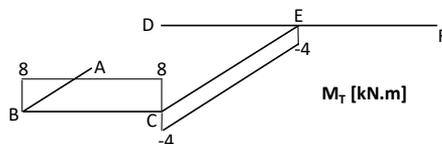
Também podemos notar que a barra  $\overline{CE}$  estará sujeita a momento torsor devido às suas barras concorrentes  $\overline{DE}$  e  $\overline{EF}$ . Estas duas barras têm extremidades livres e se conectam à barra  $\overline{CE}$  pelo ponto  $E$ . Então, o momento torsor em  $\overline{CE}$  será:

$$M = F \cdot d$$

$$M_{TCE} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \Rightarrow M_{TCE} = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Com os resultados obtidos, construímos o diagrama de momento torsor (Figura 4.33).

Figura 4.33 | Diagrama de momento torsor de uma grelha triapijada isostática



Fonte: adaptada Sússekind (1981, p. 283).



Refleta

Quando se trata de grelhas isostáticas triapijadas, por que as barras com extremidades livres promovem momento torsor em suas concorrentes?



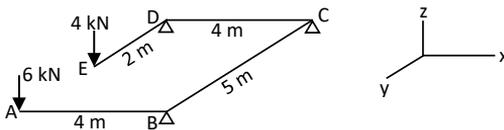
Leia sobre cálculos de reações, diagramas de momento fletor e torsor de grelhas isostáticas triapoiadas, acessando:

VALLE, Ângela do; ROVERE, Henriette Lebre La; PILLAR, Nora Maria De Patta. **Apostila de análise estrutural I**. Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2013, p. 136-140. Disponível em: <<http://pet.ecv.ufsc.br/arquivos/apoio-didatico/ECV5219%20-%20An%C3%A1lise%20Estrutural%20I.pdf>>. Acesso em: 30 dez. 2017.

## Sem medo de errar

Você, como engenheiro civil em uma empresa de cálculo estrutural, deverá apresentar os diagramas de força cortante, momentos fletor e torsor de uma cobertura que terá como base uma grelha isostática triapoiada. A Figura 4.27 representa o esquema estrutural de cálculo.

Figura 4.27 | Esquema estrutural de cálculo da cobertura



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução:

Para atender ao solicitado, iniciamos calculando as reações nos apoios com base na Figura 4.27.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$V_B + V_C + V_D - 4 - 6 = 0 \Rightarrow V_B + V_C + V_D = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{BC} = 0$$

$$-4V_D + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_D = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{CD} = 0$$

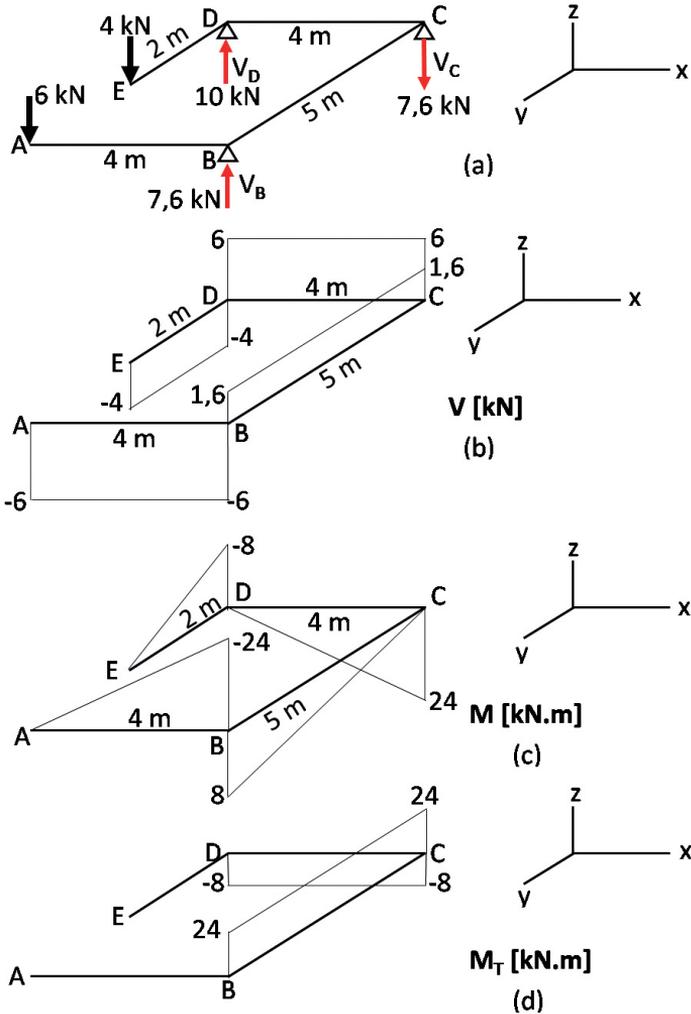
$$-5 \cdot 6 + 5V_B - 2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 7,6 \text{ kN}$$

$$V_B + V_C + V_D = 30 \text{ kN}$$

$$7,6 + V_C + 10 = 30 \text{ kN} \Rightarrow V_C = -7,6 \text{ kN}$$

Aplicando os conceitos apresentados nesta seção, construímos os diagramas apresentados na Figura 4.34.

Figura 4.34 | Esquema estrutural de cálculo com reações nos apoios, diagramas de força cortante, momento fletor e torsor



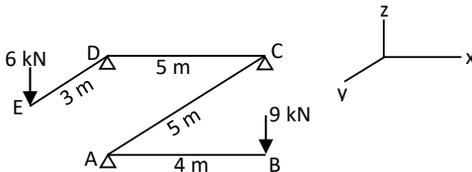
Fonte: elaborada pelo autor.

### Base para elevador de carga

#### Descrição da situação-problema

Você deverá apresentar os diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor de base para um elevador de carga. A base desse elevador será construída em uma estrutura do tipo grelha isostática triapioiada. O esquema estrutural de cálculo é apresentado na Figura 4.35.

Figura 4.35 | Esquema estrutural de cálculo do elevador de carga



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Para atender ao solicitado, iniciamos calculando as reações nos apoios com base na Figura 4.35.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$V_A + V_C + V_D - 6 - 9 = 0 \Rightarrow V_A + V_C + V_D = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_{AC} = 0$$

$$5V_D + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow V_D = 1,2 \text{ kN}$$

$$\sum M_{CD} = 0$$

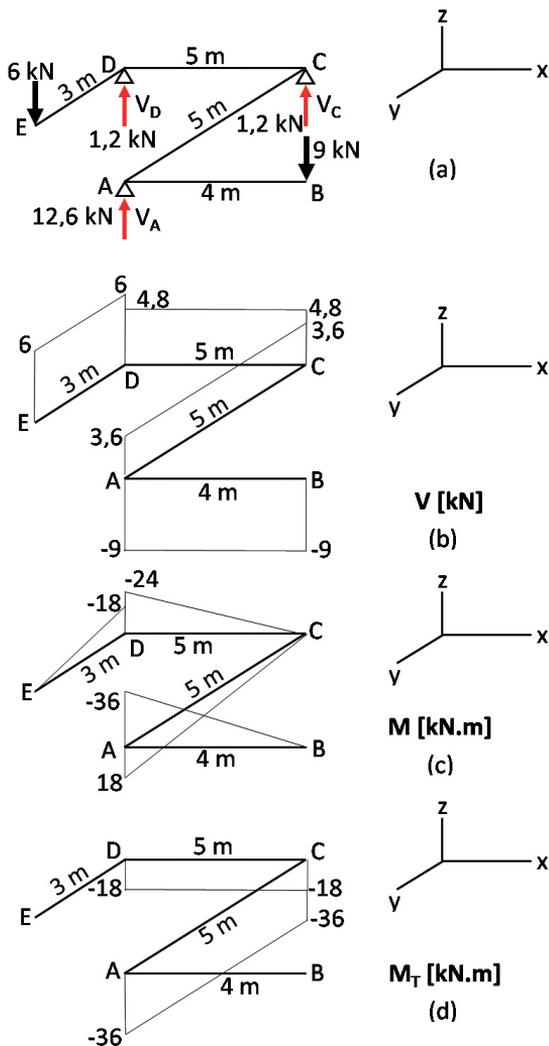
$$-3 \cdot 6 + 5V_A - 5 \cdot 9 = 0 \Rightarrow V_A = 12,6 \text{ kN}$$

$$V_A + V_C + V_D = 15 \text{ kN}$$

$$12,6 + V_C + 1,2 = 15 \text{ kN} \Rightarrow V_C = 1,2 \text{ kN}$$

Aplicando os conceitos apresentados nesta seção, construímos os diagramas apresentados na Figura 4.36.

Figura 4.36 | Esquema estrutural de cálculo com reações nos apoios e diagramas de força cortante, momento fletor e torsor



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

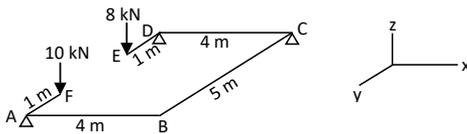
**1.** No caso de uma grelha isostática triapoiada, para que possamos construir os diagramas de força cortante, momento fletor e momento torsor, devemos inicialmente calcular as reações nos apoios, ou seja, os esforços externos reativos, fazendo uso das equações de equilíbrio.

Com relação à equação dos momentos, podemos indicar como correta qual alternativa?

- a)  $\sum M_{\text{ponto } i} = 0$
- b)  $\sum M_{\text{ponto } i} + \sum M_{\text{ponto } j} = 0$
- c)  $\sum M_{\text{barra } IJ} = 0$
- d)  $\sum F_x = 0$
- e)  $\sum F_{x,y,z} = 0$

**2.** Um centro comercial contratou uma equipe de engenharia estrutural para construir um mezanino, onde será instalada a central de comunicação. A base desse mezanino será uma estrutura isostática do tipo grelha triapoia-da, conforme representado no esquema estrutural de cálculo.

Figura | Esquema estrutural de cálculo do mezanino



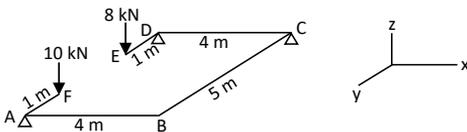
Fonte: elaborada pelo autor.

Indique a alternativa correta com relação ao momento torsor ocorrente em AB.

- a) 10 kNm.
- b) 8 kNm.
- c) 18 kNm.
- d) 32 kNm.
- e) 40 kNm.

**3.** Um mezanino foi projetado para um centro comercial e tem como base uma grelha isostática triapoia-da, cujo esquema estrutural de cálculo é dado na figura a seguir. A construtora que deverá executar o trabalho de construção do mezanino solicitou as reações nos apoios para que possa enviá-las aos engenheiros de fundação para que determinem o tipo de fundação a ser utilizada.

Figura | Esquema estrutural de cálculo do mezanino



Fonte: elaborada pelo autor.

Indique a alternativa que apresenta a maior reação dos apoios do mezanino.

- a) 6,9 kN.
- b) 10 kN.
- c) 8 kN.
- d) 9,6 kN.
- e) 18 kN.

# Referência

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de análise estrutural**. V. 1: Estruturas isostáticas. 6ª ed. Porto Alegre; Rio de Janeiro: Editora Globo, 1981.





ISBN 978-85-522-0673-6



9 788552 206736 >