



# **Estruturas Hiperestáticas**



# **Estruturas hiperestáticas**

Rodrigo Cuberos Vieira

Ana Paula Vedoato Torres

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Bárbara Nardi Melo

Armando Diório Filho

**Editorial**

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Vieira, Rodrigo Cuberos

V658e Estruturas hiperestáticas / Rodrigo Cuberos Vieira, Ana Paula Vedoato Torres. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.  
216 p.

ISBN 978-85-522-0735-1

1. Engenharia. I. Vieira, Rodrigo Cuberos. II. Torres, Ana Paula Vedoato. III. Título.

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

CDD 620

2018  
Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza  
CEP: 86041-100 – Londrina – PR  
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br  
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Grau de hiperestaticidade</b>	<b>7</b>
Seção 1.1 - Estruturas estaticamente indeterminadas	8
Seção 1.2 - Estruturas com um grau hiperestático	22
Seção 1.3 - Estruturas com múltiplos graus hiperestáticos	34
<b>Unidade 2   Método das forças e do deslocamento</b>	<b>47</b>
Seção 2.1 - Teoremas e princípios	49
Seção 2.2 - Método das forças	66
Seção 2.3 - Método dos deslocamentos	82
<b>Unidade 3   Linhas de influência: estruturas hiperestáticas</b>	<b>101</b>
Seção 3.1 - Linhas de influência de vigas	103
Seção 3.2 - Linhas de influência para estruturas com vários graus de indeterminação	121
Seção 3.3 - Representação esquemática das linhas de influência	137
<b>Unidade 4   Método da Rigidez e Processo de Cross</b>	<b>157</b>
Seção 4.1 - Análise matricial de treliças	159
Seção 4.2 - Análise matricial de vigas e pórticos	178
Seção 4.3 - Processo de Cross	194



# Palavras do autor

Bem-vindo à disciplina de Estruturas Hiperestáticas! Esta disciplina é parte da área de estruturas, dentro da engenharia civil. Ela colabora para que nossos edifícios, casas, pontes, e todas as outras estruturas que conhecemos saiam do papel e se tornem reais.

A disciplina busca trazer o conhecimento e a análise de estruturas hiperestáticas, calculando os esforços e os deslocamentos em elementos e as reações de apoio. Na primeira fase, será definido qual é o grau de hiperestaticidade da estrutura. Depois, aplicaremos o método das forças ou dos deslocamentos para determinação das reações e forças internas nas estruturas. Em seguida, avaliaremos a força cortante, o momento fletor e representaremos a linha de influência. Ao final, aplicaremos o Método da Rigidez na análise matricial de estruturas ou o Processo de Cross.

Na primeira unidade, veremos como classificar a estrutura quanto ao grau hiperestático. A definição destes graus irá direcionar o modelo que usaremos para resolver a estrutura, encontrando como resultado as reações de apoio, a força cortante e o momento fletor.

Na segunda unidade serão tratados dois métodos: o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Antes de iniciarmos seu uso, precisamos de alguns conceitos fundamentais que serão apresentados como os princípios e teoremas que norteiam a hiperestática, entre eles, o Princípio do Trabalho Virtual (PTV).

Já na terceira unidade, o estudo se refere às linhas de influência. Elas têm papel importante nas estruturas que recebem cargas móveis, como as pontes. Nesta unidade, veremos a aplicação nas estruturas hiperestáticas, tanto as com um grau hiperestático quanto as com múltiplos graus hiperestáticos.

A última unidade é sobre a aplicação das propriedades matemáticas das matrizes no cálculo das estruturas hiperestáticas. O Método da Rigidez será um dos métodos abordados, assim como o Processo de Cross. Este se baseia no Método dos Deslocamentos, abordado na unidade dois, o que facilita seu aprendizado.

Dedique-se ao estudo das estruturas hiperestáticas, pois estes conceitos abrirão muitas possibilidades no campo da engenharia

estrutural. Apesar da complexidade, quase a totalidade das estruturas construídas hoje são estaticamente indeterminadas. Valorize o privilégio de estudar e aplique-se a esta disciplina tão complexa, mas ao mesmo tempo apaixonante.

Bom estudo!

## Grau de hiperestaticidade

### Convite ao estudo

Seja bem-vindo à primeira unidade de estudo da disciplina de Estruturas Hiperestáticas!

Nesta unidade, veremos como encontrar o grau de hiperestaticidade de elementos como vigas, treliças e pórticos, com um e com vários graus de hiperestaticidade. Portanto, aprenderemos a definir o grau de hiperestaticidade da estrutura.

Em um de seus projetos como engenheiro, sua empresa de *facilities* foi contratada para realizar manutenções em um hotel e dentro do escopo de trabalho está a implantação de uma estrutura em um jardim. Junto com a renovação do projeto paisagístico, foi escolhido um pórtico, que será inaugurado como a nova estrutura moderna do local. O pórtico se destaca pelo seu tamanho e uso de materiais inovadores. O projeto paisagístico foi apresentado, e agora o próximo passo será analisar a estrutura. Mas além da estética, você deve verificar se este elemento é uma estrutura estaticamente indeterminada. Se for, qual é seu grau hiperestático?

Assim, para responder a este desafio, estudaremos como definir o grau de hiperestaticidade das estruturas. Para isso, primeiramente, devemos determinar se uma estrutura é hipostática, isostática ou hiperestática. Como consequência do número de graus hiperestáticos, escolheremos, dessa forma, o melhor método de cálculo.

Após esta unidade, você será capaz de determinar se estruturas, tais como vigas, pórticos e treliças apresentam um ou múltiplos graus de hiperestaticidade.

Bom estudo!

# Seção 1.1

## Estruturas estaticamente indeterminadas

### Diálogo aberto

Olá, aluno! O aprendizado do cálculo das estruturas hiperestáticas é fundamental para a área de cálculo de estruturas. Na maioria dos projetos de engenharia surgirão desafios relacionados a esta área.

Nesta primeira seção, serão explicados os motivos de usarmos as estruturas hiperestáticas, suas vantagens e desvantagens. Também será abordada a definição da estrutura externamente hiperestática e da internamente hiperestática, e como encontrar seu grau hiperestático total.

No seu desafio profissional do pórtico localizado no jardim do hotel, você precisa definir o grau de hiperestaticidade da estrutura, para que ela seja calculada e executada e seu projeto seja entregue com êxito. Como definir o grau hiperestático deste pórtico? Quais são as possibilidades de vinculação para este elemento?

Conhecendo as possibilidades de vinculação para esta estrutura e as vantagens e desvantagens de cada opção, você será capaz de escolher a que melhor se enquadra em seu projeto, tendo um melhor custo-benefício.

Dedicando-se nos estudos aplicados da disciplina e resolvendo este desafio profissional, quando se deparar com projetos semelhantes, você terá todo o conhecimento necessário para ter êxito.

Bom estudo!

### Não pode faltar

#### Introdução ao estudo das estruturas hiperestáticas

As estruturas são sistemas compostos por um ou mais elementos, ligados entre si de forma a se tornarem estáveis. Isto significa que as estruturas devem ser capazes de receber os esforços externos, absorvê-los internamente e direcioná-los aos apoios.

Todavia, o cálculo de alguns tipos de estruturas não é tão simples de se resolver. Até o início do século passado, as estruturas estaticamente indeterminadas eram complexas demais e evitadas pelos engenheiros, pois não havia métodos tão precisos de análise como temos hoje.

O que é uma estrutura estaticamente indeterminada?

Quando a estrutura a ser analisada tem mais reações externas e/ou mais forças internas a serem determinadas do que as incógnitas resolvidas pelas equações de equilíbrio da estática, ela é considerada uma estrutura estaticamente indeterminada.

As equações de equilíbrio da estática consideram que a somatória das forças verticais, horizontais e do momento devem ser nulas. São descritas pelas equações:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Onde:  $F_x$  = Forças horizontais;  $F_y$  = Forças verticais;  $M$  = Momentos.

Para isso, considera-se que as vinculações estão em um sistema plano, isto é, só podem se movimentar nas direções contidas neste plano. Isto não ocorre na estrutura real, mas esta consideração não interfere nas estruturas usuais analisadas.

Já o tipo de vinculação a ser considerado no cálculo interferirá na análise da estrutura. O Quadro 1.1 apresenta os principais vínculos utilizados e suas características. O número de graus de mobilidade retirado pelo vínculo é fator determinante para a classificação da estrutura em hiperestática, isostática ou hipostática.

Quadro 1.1 | Vinculações e características

Nome do vínculo	Símbolo	Reações de apoio provocadas pelos vínculos	Números de graus de mobilidade retirados pelo vínculo (n)
Apoio móvel			1

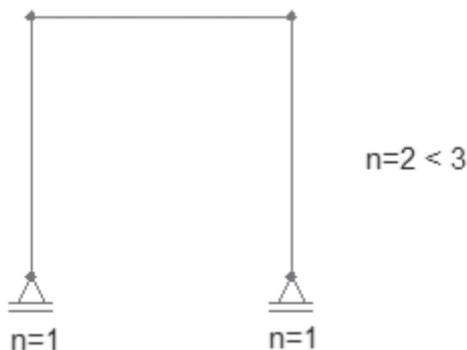
Apoio fixo			2
Engaste			3

Fonte: elaborado pelo autor.

As estruturas hipostáticas (Figura 1.1) são móveis em seu conjunto e apresentam grau de hiperestaticidade negativo, ou a estrutura possui uma parte móvel, o que a torna inaceitável para edificações.

Por causa do número inferior de reações de apoio que possam trazer estabilidade à estrutura, o conjunto da estrutura não é impedido de se deslocar.

Figura 1.1 | Estrutura hipostática



Fonte: elaborada pelo autor.



### Exemplificando

As estruturas hipostáticas têm um número inferior de graus de mobilidade permitido pelos apoios necessários para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.2), mas também podem ser hipostáticas quando não tiverem restrição em ambas as direções do plano (Figura 1.3). Assim, estas estruturas têm movimento infinito e não podem ser usadas para projetos, pois seu equilíbrio é instável.

Figura 1.2 | Estrutura hipostática com graus de mobilidade permitidos pelos apoios inferiores às equações de equilíbrio



Fonte: elaborada pelo autor.

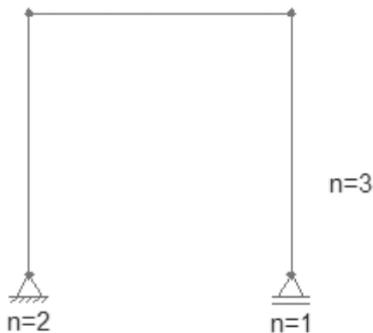
Figura 1.3 | Estrutura hipostática com graus de mobilidade permitidos pelos apoios superiores às equações de equilíbrio



Fonte: elaborada pelo autor.

As estruturas isostáticas (Figura 1.4) são aquelas que apresentam número de reações igual ao número de incógnitas das equações de equilíbrio e, conseqüentemente, o grau de hiperestaticidade é igual a zero.

Figura 1.4 | Estrutura isostática



Fonte: elaborada pelo autor.



### Exemplificando

As estruturas isostáticas apresentam um número de apoios suficiente para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.5) e, portanto, seu equilíbrio é estável.

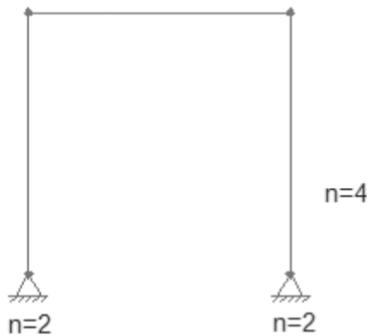
Figura 1.5 | Estrutura isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

As estruturas hiperestáticas (Figura 1.6) são aquelas em que o número de reações é maior que o número de equações da estática ou se as equações da estática não são suficientes para determinar os esforços internos, consequentemente, o grau de hiperestaticidade é de um ou mais. Assim, não é possível determinar suas reações de apoio apenas com estas equações.

Figura 1.6 | Estrutura hiperestática

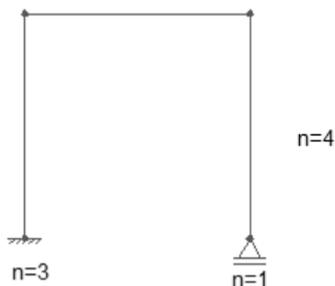


Fonte: elaborada pelo autor.

### Exemplicando

As estruturas hiperestáticas apresentam um número de apoios superior ao necessário para impedir que a estrutura se movimente (Figura 1.7) e, portanto, seu equilíbrio é estável. Apesar de a análise da estrutura hiperestática ser complexa, a maioria das estruturas é hiperestática.

Figura 1.7 | Estrutura hiperestática

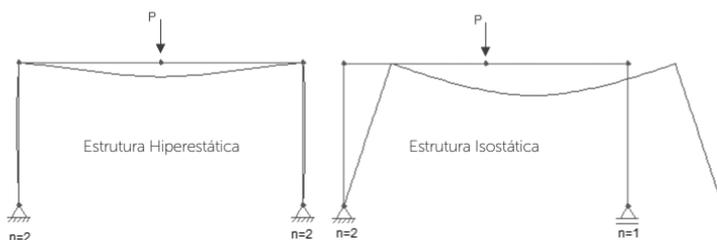


Fonte: elaborada pelo autor.

## Vantagens das estruturas hiperestáticas

1. Estruturas mais seguras: há uma redistribuição maior das tensões devido à rigidez da estrutura. Quando um elemento da estrutura está sendo muito solicitado, ele redistribuirá a tensão para os elementos ao seu redor, pois haverá uma redistribuição dos momentos.
2. Menor deslocamento transversal com maior rigidez: devido à maior rigidez da estrutura por causa do menor grau de liberdade, ocorrerá uma melhor distribuição dos esforços, assim como tensões menores (Figura 1.8).

Figura 1.8 | Comparação de deformação da estrutura hiperestática e isostática

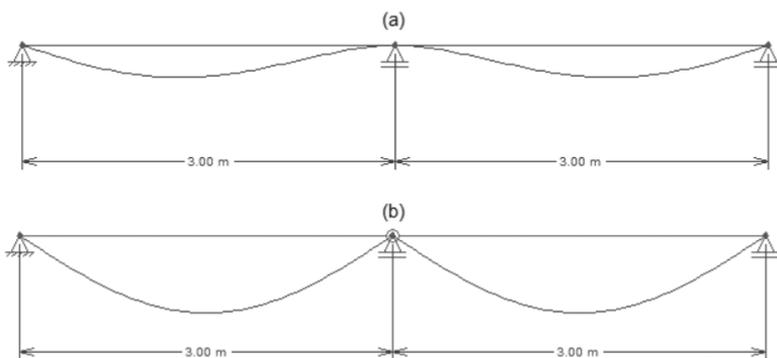


Fonte: elaborada pelo autor.

Quando as colunas são muito mais rígidas do que a viga que se apoia nelas, a rotação em suas extremidades é pequena, ficando próxima a uma viga biengastada.

3. Economia de material: as vigas contínuas (caso (a) da Figura 1.9), apesar de apresentarem momentos negativos maiores nos apoios, têm momentos positivos menores no meio do vão e, conseqüentemente, isso gerará uma economia de material. Já as vigas simplesmente apoiadas (caso (b) da Figura 1.9) apresentam momentos fletores maiores no meio do vão e maior gasto com material, o que significa vigas de seções maiores e maior peso sendo descarregado na fundação.

Figura 1.9 | Deformada: (a) viga contínua; (b) viga rotulada no apoio central



Fonte: elaborada pelo autor.

## Desvantagens das estruturas hiperestáticas

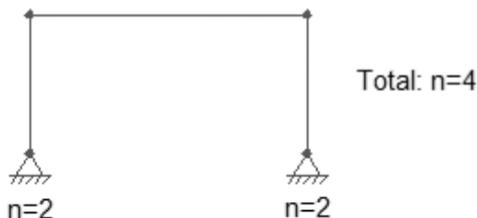
1. Modelos de cálculo mais complexos: devido à complexidade dos modelos de cálculo, pode-se gerar algumas dificuldades na análise estrutural e em projeto.
2. Devido a recalques dos apoios podem surgir problemas significativos: caso ocorra algum tipo de recalque nos apoios, devido à maior rigidez da estrutura, isso pode acarretar mudanças nos valores de momento fletor e torção, no esforço cortante, nas forças de reação e nos esforços normais dos elementos estruturais.
3. Tensões não consideradas podem gerar variações significativas: tensões geradas devido à má execução do material ou a variações de temperatura não consideradas, podem gerar uma

modificação da posição relativa do elemento, o que gerará variações nos esforços atuantes ao longo da estrutura.

### Estruturas externamente hiperestática

As estruturas externamente hiperestáticas são aquelas em que o número de reações é maior do que as equações de equilíbrio da estática (Figura 1.10).

Figura 1.10 | Exemplo de estrutura externamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.



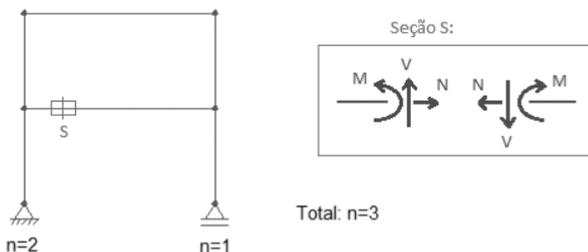
### Assimile

As estruturas externamente hiperestáticas são aquelas que apresentam o número de reações de apoio superior a três.

### Estruturas internamente hiperestática

Apesar de a estrutura ser isostática externamente, caso não seja possível determinar os esforços das seções ao longo da estrutura, utilizando as equações de equilíbrio da estática, esta estrutura é considerada internamente hiperestática (Figura 1.11).

Figura 1.11 | Exemplo de estrutura internamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.



## Assimile

As estruturas internamente hiperestáticas são aquelas que apresentam todas as reações de apoio conhecidas, entretanto, devido à geometria de sua estrutura, um conjunto de barras não articulado entre si, formam uma poligonal fechada.

### Grau hiperestático

O grau hiperestático da estrutura é determinado somando-se o grau hiperestático interno e externo.

Ao se retirar determinadas reações, seguindo certos critérios, as estruturas hiperestáticas continuam a não apresentar quaisquer movimentos, portanto, estáveis. Assim, o grau de hiperestaticidade é igual ao número de reações que pode ser suprido, até que a estrutura se torne isostática. Dessa forma, para a estrutura isostática, que tem grau de hiperestaticidade nulo, podem ser utilizadas as equações de equilíbrio da estática.



## Reflita

Você observou que as estruturas isostáticas são menos complexas de se calcular do que as estruturas hiperestáticas. Após a definição do grau de hiperestaticidade, os métodos buscam utilizar formas de transformar a estrutura hiperestática em uma estrutura isostática, adicionando outras ferramentas para ajustar esta mudança.



## Pesquise mais

FTOOL – programa gráfico interativo para estudo do comportamento das estruturas.

Este programa pode ser baixado gratuitamente e utilizado para análise de estruturas isostáticas e hiperestáticas. É uma ferramenta simples e de fácil uso, utilizado para estruturas bidimensionais. Ele permite uma grande variedade de esquemas estáticos, e após a definição de alguns parâmetros, o programa detalha os gráficos de momento fletor, esforço

normal e cortante, linha elástica e gráfico de configuração deformada. Foi originalmente criado pelo professor Luiz Fernando Martha. Saiba mais em:

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos, Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

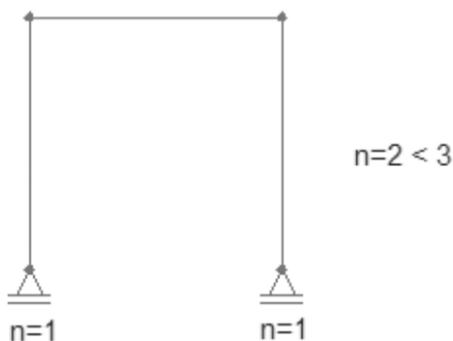
## Sem medo de errar

Seu cliente, dono do hotel, aguarda seu projeto para que seja renovada a área do jardim, mas, para isso, você deve definir o grau hiperestático do pórtico. Quais são as possibilidades de vinculação para este elemento?

Primeiramente, deve-se avaliar quais são as vinculações possíveis para este conjunto.

A escolha do vínculo é de extrema importância, pois algumas situações não são possíveis de serem executadas. Se a estrutura, por exemplo, for hipostática (Figura 1.12), tem uma parte móvel, o que a torna inaceitável para edificações. Por causa do número inferior de reações de apoio, o conjunto da estrutura não é impedido de se deslocar, portanto, esta opção não é viável para este projeto.

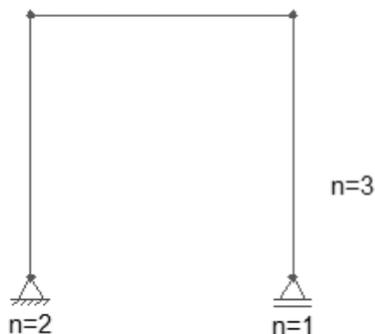
Figura 1.12 | Estrutura hipostática



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma segunda opção de vinculação deste pórtico é a estrutura ser isostática (Figura 1.13). Esta estrutura é possível de ser construída e tem a facilidade de ser calculada com apenas as equações de equilíbrio, entretanto, tem a desvantagem de ter maiores deformações.

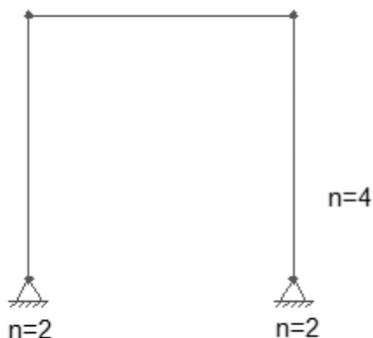
Figura 1.13 | Estrutura isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

A última opção é a escolha de uma estrutura hiperestática (Figura 1.14), em que o número de incógnitas é maior do que o número das equações da estática.

Figura 1.14 | Estrutura hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Caso opte por esta opção de vinculação, você poderá ter uma estrutura mais segura, com maior rigidez e com menos deslocamento e, além disso, gerar uma economia com gastos de material.

### Vantagens e desvantagens da estrutura hiperestática

#### Descrição da situação-problema

Uma construtora fechou um grande projeto na empresa em que você trabalha. Seu chefe o chamou e disse que estava tendo uma discussão a respeito dos apoios a serem adotados em uma das estruturas. Esta definição modificará toda a solução do projeto, pois classificará a estrutura em isostática ou em hiperestática e, conseqüentemente, cada tipo de estrutura tem um lado contra e um a favor. Seu chefe marca uma reunião com os engenheiros e pede que você apresente quais são as vantagens e as desvantagens da estrutura hiperestática em relação à estrutura isostática, para que, então, possam encontrar a melhor solução para este caso.

#### Resolução da situação-problema

Você apresenta em slides para toda a equipe as vantagens e as desvantagens de cada estrutura:

Vantagens da estrutura hiperestática em relação à estrutura isostática:

1. Estrutura mais segura: há uma redistribuição maior das tensões devido à rigidez da estrutura. Quando um elemento da estrutura está sendo muito solicitado, ele redistribuirá a tensão para os elementos ao seu redor, pois haverá uma redistribuição dos esforços.
2. Menor deslocamento transversal com maior rigidez: devido à maior rigidez da estrutura por causa do menor grau de liberdade, ocorrerá uma melhor distribuição dos esforços, assim como tensões e deslocamentos menores. Quando as colunas são muito mais rígidas do que a viga que se apoia nelas, a rotação em suas extremidades é pequena, ficando próxima a uma viga biengastada.
3. Economia de material: as vigas contínuas, apesar de terem momentos negativos maiores nos apoios, apresentam momentos

positivos menores no meio do vão e, conseqüentemente, isso gerará uma economia de material. Já as vigas simplesmente apoiadas apresentam momentos fletores maiores no meio do vão e maior gasto com material, o que significa vigas de seções maiores e maior peso sendo descarregado na fundação.

Desvantagens das estruturas hiperestáticas em relação às estruturas isostáticas:

4. Modelos de cálculo mais complexos: devido à complexidade dos modelos de cálculo, pode-se gerar algumas dificuldades na análise estrutural e em projeto.
5. Devido a recalques dos apoios podem surgir problemas significativos: caso ocorra algum tipo de recalque nos apoios, devido à maior rigidez da estrutura, pode acarretar mudanças nos valores de momento fletor e torção, no esforço cortante, nas forças de reação e nos esforços normais dos elementos estruturais.
6. Tensões não consideradas podem gerar variações significativas: tensões geradas devido à má execução do material ou variações de temperatura não consideradas podem gerar uma modificação da posição relativa do elemento, o que gerará variações nos esforços atuantes ao longo da estrutura.

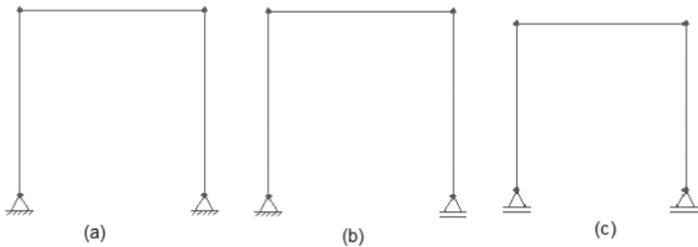
## Faça valer a pena

**1.** Na entrada de uma cidade é colocado um portal para recepção daqueles que chegam. Este portal foi dimensionado como uma estrutura isostática. Caso tivesse sido projetado como uma estrutura hiperestática, qual seria a diferença entre eles?

Assinale a alternativa correta que corresponde à diferença entre a estrutura isostática e a estrutura hiperestática.

- a) Se fosse hiperestática, a estrutura deveria ter menor rigidez.
- b) Se fosse hiperestática, a estrutura deveria ter seções menores.
- c) Se fosse hiperestática, a estrutura deveria ter pilares maiores.
- d) Se fosse hiperestática, a estrutura deveria ter seções maiores.
- e) Se fosse hiperestática, a estrutura deveria ter um vão menor.

**2.** Como parte de um projeto de uma edificação em um condomínio entregue a você para solução, três pórticos precisam ser analisados.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta quanto à classificação dos croquis, respectivamente, em hipostático, isostático ou hiperestático.

- a) Isostático, hiperestático e hipostático.
- b) Hipostático, hiperestático e isostático
- c) Hiperestático, hipostático, isostático.
- d) Hipostático, isostático e hiperestático.
- e) Hiperestático, isostático e hipostático.

**3.** Como consultor de um projeto, foi-lhe entregue uma viga para ser analisada, conforme croqui apresentado:



Fonte: elaborada pelo autor.

Como parte de sua análise inicial, você tem de classificar a viga, mas antes determinar os graus de cada apoio. Qual é o grau de hiperestaticidade total da estrutura?

Assinale a alternativa correta que apresenta o grau de hiperestaticidade da estrutura.

- a)  $n = 1$ .
- b)  $n = 0$ .
- c)  $n = 2$ .
- d)  $n = 3$ .
- e)  $n = 4$ .

# Seção 1.2

## Estruturas com um grau hiperestático

### Diálogo aberto

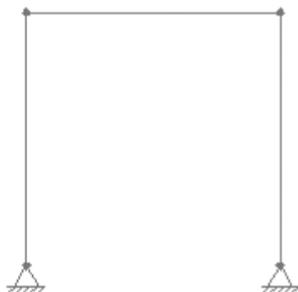
Caro aluno, bem-vindo à nossa segunda seção da Unidade 1. Na primeira seção, vimos os motivos de usarmos as estruturas hiperestáticas, suas vantagens e desvantagens. Também foi abordada a definição da estrutura externamente hiperestática e internamente hiperestática, bem como o seu grau hiperestático total.

Nesta seção, nos aprofundaremos nas definições das estruturas com um grau hiperestático, entre elas as vigas, os pórticos e as treliças. Veremos as particularidades de cada arranjo estrutural e como definir sua hiperestaticidade e os modelos com um grau de hiperestaticidade. Este tópico é importante, pois o grau de hiperestaticidade definirá como utilizar os métodos para cálculo deste tipo de estrutura.

Como início do projeto do pórtico, já que sua empresa de *facilities* foi contratada para a manutenção do hotel e para execução do pórtico, você tem um novo desafio: sendo a estrutura do pórtico com um grau hiperestático, qual é o passo a passo para calcular este tipo de estrutura?

Para analisar este pórtico (Figura 1.15), será necessário conhecer as particularidades deste arranjo e como encontrar seu grau hiperestático total.

Figura 1.15 | Pórtico com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

## Não pode faltar

Uma estrutura plana estará resolvida geometricamente desde que sejam conhecidos os deslocamentos nos extremos das barras que a compõem. Após determinação dos esforços nas seções, são traçados os diagramas de momento e força cortante, portanto, o primeiro passo para o cálculo da estrutura é definir seu grau hiperestático. Assim, o método de cálculo pode ser escolhido e, com ele, determinados os esforços máximos solicitantes, a partir dos quais procede-se a verificação do dimensionamento das peças estruturais.



Refleta

Você observou que desenhamos e calculamos as estruturas em modelos planos? Isso ocorre, pois consideramos que estas estruturas não possuem deslocamento na direção não analisada. Caso seja necessário levar em conta estes deslocamentos, deve-se utilizar programas de cálculo que auxiliem no cálculo de estruturas tridimensionais.

### Definição de estruturas com um grau hiperestático

Uma estrutura é considerada com um grau de hiperestaticidade quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, na qual esta diferença é igual a 1. Se, uma vez conhecida as reações, for impossível determinar os esforços das seções ao longo da estrutura utilizando as equações de equilíbrio, então, a estrutura é hiperestática internamente e pode ter este grau igual a 1.

Vale salientar que se a viga tiver o apoio móvel na vertical, isto a tornará uma estrutura hipostática e instável, mesmo que tenha o número de equações menores que o número de reações.

### Vigas com um grau hiperestático

As vigas com um grau hiperestático são definidas em função de suas reações de apoio e suas rótulas. As rótulas geram equações extras e são somadas às equações de equilíbrio da estática.

A fórmula dada para encontrar o grau hiperestático ( $g$ ) de uma viga é dada por:

$$g = R - (E + r)$$

Em que:

R: reações de apoio, dada pelo Quadro 1.2.

Quadro 1.2 | Vinculações e características

Nome do vínculo	Símbolo	Reações de apoio provocadas pelos vínculos	Números de graus de mobilidade retirados pelo vínculo ( $n$ )
Apoio móvel			1
Apoio fixo			2
Engaste			3

Fonte: elaborado pela autora.

E: equações de equilíbrio da estática ( $=3$ )

r: número de rótulas



### Exemplificando

As vigas são estruturas fundamentais nas construções. Como vigas com um grau hiperestático (Figura 1.16 e 1.17), podemos ter:

Figura 1.16 | Exemplo 1 – viga com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

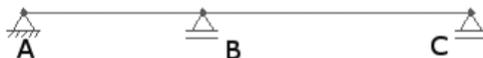
$$R = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$E = 3$$

$$r = 1$$

$$g = 5 - (3 + 1) = 1$$

Figura 1.17 | Exemplo 2 – viga com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 4 - (3 + 0) = 1$$

### Pórticos com um grau hiperestático

Pórticos são estruturas formadas por barras horizontais, verticais e/ou inclinadas, que formam quadros entre si. Os pórticos são amplamente utilizados nas construções civis, principalmente em edifícios. A maioria dos arranjos estruturais utilizados são hiperestáticos. Para os pórticos, de modo geral, o grau de hipergeometria é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

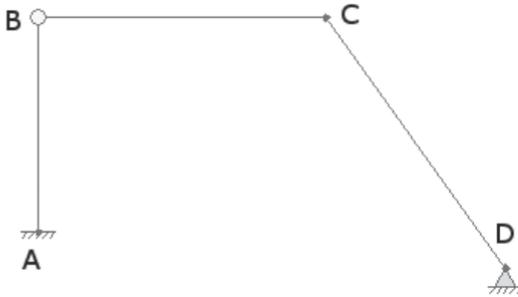
r: número de equações referentes à rótula, dado pela fórmula:

$$r = \text{barras conectadas a rótula} - 1$$



Os pórticos podem ter um grau de hiperestaticidade, mas com diferentes arranjos estruturais (Figura 1.18 e 1.19).

Figura 1.18 | Exemplo 3 – pórtico com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

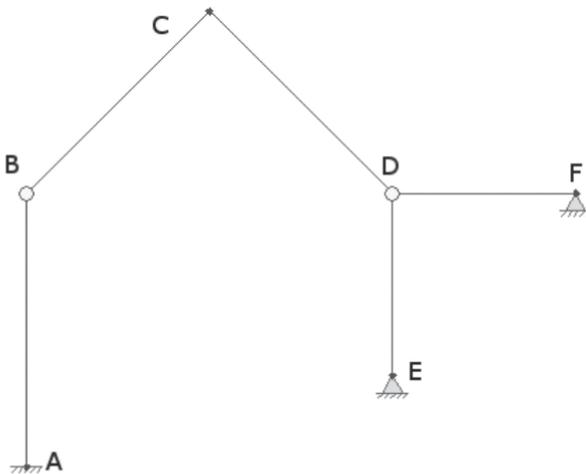
$$R = 3 + 2 = 5$$

$$E = 3$$

$$r = 1$$

$$g = 5 - (3 + 1) = 1$$

Figura 1.19 | Exemplo 4 – pórtico com um grau hiperestático



Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 1 + 2 = 3$$

$$g = 7 - (3 + 3) = 1$$

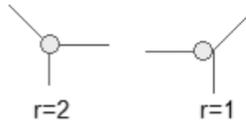
Ambos os arranjos apresentam um grau de hiperestaticidade.



Assimile

A forma com que as rótulas são colocadas na barra, é fundamental para determinação do grau hiperestático (Figura 1.20).

Figura 1.20 | Modelos de rótula



Fonte: elaborada pela autora.

### Treliças com um grau hiperestático

As treliças são amplamente utilizadas em coberturas, pontes etc. Para determinação do grau hiperestático, as incógnitas a serem resolvidas nas treliças são:

- Número de barras ( $b$ ).
- As reações nos apoios em função do tipo de vínculo ( $R$ ), dadas pelo Quadro 1.2.

Para uma estrutura isostática, a soma destas incógnitas deve ser igual a duas vezes o número de nós:

$$R + b = 2 * n$$

Sendo que  $n$  é o número de nós.

Isso significa que para cada nó da estrutura teremos duas equações.

O grau de hiperestaticidade é dado por:

$$g = (R + b) - (2 * n)$$

Quando  $g = 1$ , a estrutura será uma vez hiperestática.

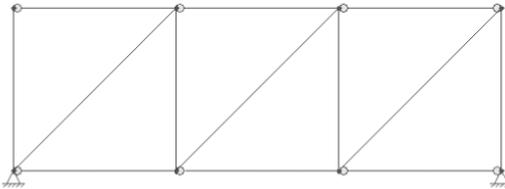


## Exemplificando

As treliças podem ser externamente hiperestáticas (Figura 1.21) ou internamente hiperestáticas (Figura 1.22).

Seguindo a fórmula dada, podemos verificar as diferenças dos tipos de treliça com um grau de hiperestaticidade:

Figura 1.21 | Treliça externamente hiperestática



Fonte: elaborada pela autora.

$$R = 2 + 2 = 4$$

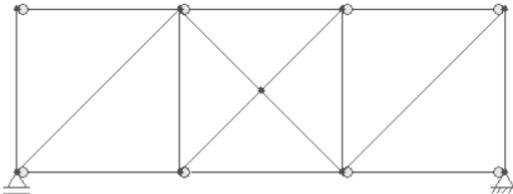
$$b = 13$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

$$g = (4 + 13) - (2 * 8) = 1$$

A incógnita para este caso é a reação de apoio, portanto, a estrutura é externamente hiperestática.

Figura 1.22 | Treliça internamente hiperestática



Fonte: elaborada pela autora.

Neste caso específico, as barras que se cruzam em "x" apenas se cruzam, mas não estão ligadas entre si, sendo barras independentes.

$$R = 1 + 2 = 3$$

$$b = 14$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

$$g = (3 + 14) - (2 * 8) = 1$$

A incógnita para este caso são os esforços nas barras, portanto, a estrutura é internamente hiperestática.



Pesquise mais

O livro *Análise das estruturas* conta com uma sala virtual, que oferece materiais digitais para explicar os conceitos clássicos da hiperestática. Também apresenta soluções em vídeo como parte de um kit de aprendizado visual que facilita a compreensão.

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

## Sem medo de errar

O pórtico a ser colocado no jardim do hotel apresenta sua estrutura com um grau de hiperestaticidade. O passo a passo para encontrar o grau da estrutura do tipo pórtico é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

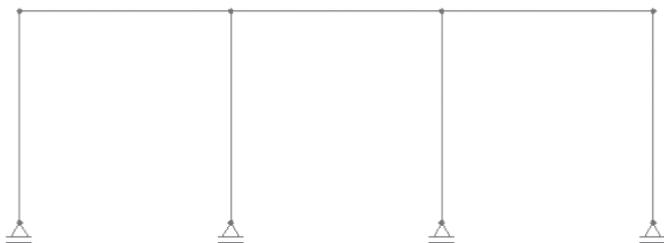
r: número de equações referentes à rótula, dado pela fórmula:

$$r = \text{barras.conectadas.a.rótula} - 1$$

Deve-se prestar atenção nas ligações feitas por rótulas, pois nos pórticos elas variam de acordo com a forma em que são executadas.

Outro tópico a ser analisado é que algumas estruturas podem parecer hiperestática, mas são hipostáticas, tais como a estrutura da Figura 1.23.

Figura 1.23 | Estrutura hipostática



Fonte: elaborada pela autora.

Apesar da equação mostrar um resultado de  $g = 1$ , conforme desenvolvimento a seguir:

$$R = 4$$

$$E = 3$$

$$r = 1$$

$$g = R - (E + r) = 4 - 3 = 1$$

A estrutura pode deslizar horizontalmente, o que a torna instável e, portanto, impossível de ser construída.

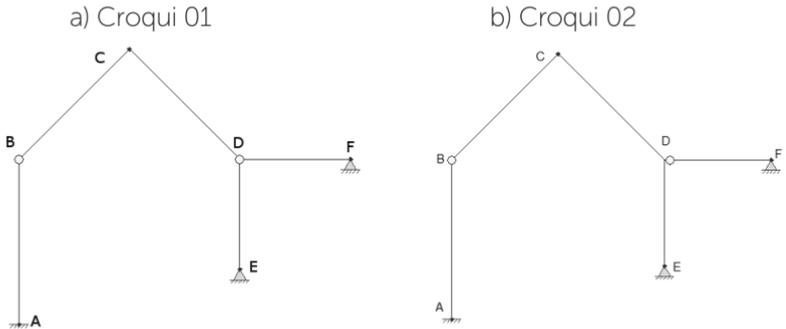
## Avançando na prática

### Análise das rótulas nos arranjos estruturais

#### Descrição da situação-problema

Você foi convidado a dar uma aula sobre pórticos e sua execução. Foram apresentados a você dois problemas distintos de estruturas semelhantes para que explique as diferenças entre seus arranjos estruturais aos alunos da disciplina de Estruturas Hiperestáticas (Figura 1.24). Os problemas eram:

Figura 1.24 | Croquis de estruturas



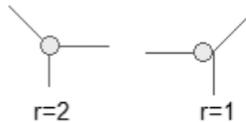
Fonte: elaborada pela autora.

Qual é a principal diferença entre as estruturas apresentadas? O que isso acarreta?

### Resolução da situação-problema

A forma que as rótulas são colocadas na barra é fundamental para a determinação do grau hiperestático (Figura 1.25).

Figura 1.25 | Modelos de rótula



Fonte: elaborada pela autora.

No primeiro croqui, o cálculo hiperestático é dado por:

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 1 + 2 = 3$$

$$g = 7 - (3 + 3) = 1$$

No segundo croqui, o cálculo hiperestático é dado por:

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 1 + 1 = 2$$

$$g = 7 - (3 + 2) = 2$$

Conclui-se que no primeiro croqui a estrutura é uma vez hiperestática e no segundo croqui, duas vezes hiperestática. Isso indica que o segundo modelo estrutural apresentará deformações menores para um mesmo carregamento.

## Faça valer a pena

**1.** Dada a viga a seguir, calcule os valores da soma das reações de apoio (R), das equações de equilíbrio (E) e do número de equações referentes às rótulas (r):



Assinale a alternativa correta que apresenta as respostas para R, E e r:

- a) R = 5; E = 2; r = 2.
- b) R = 6; E = 4; r = 2.
- c) R = 6; E = 3; r = 2.
- d) R = 7; E = 3; r = 4.
- e) R = 7; E = 4; r = 3.

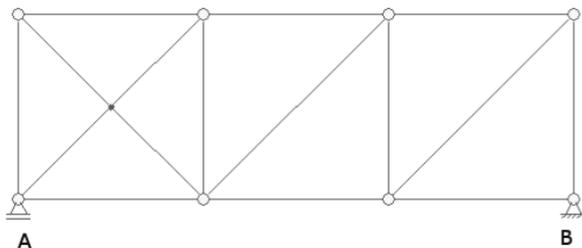
**2.** Dentre os arranjos estruturais de vigas, pórticos e treliças utilizados, os mais comuns são aqueles que conduzem a estruturas hiperestáticas. Quando uma estrutura é considerada com um grau de hiperestaticidade externa, levando-se em conta estruturas estáveis?

Assinale a alternativa que apresenta a resposta correta que define estruturas com um grau de hiperestaticidade:

- a) Quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é igual a 2.
- b) Quando o número de reações conhecidas excede o número das equações de desequilíbrio da estática, e esta diferença é igual a 1.
- c) Quando o número de rótulas desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é igual a 1.

- d) Quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações dos momentos fletores, e esta diferença é igual a 2.
- e) Quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é igual a 1.

**3.** Dada a treliça a seguir e a fórmula que calcula o grau hiperestático, calcule "R", "b" e "n" e o grau estático da estrutura.



$$g = (R + b) - (2 * n)$$

Onde:

R: são as reações nos apoios em função do tipo de vínculo.

b: são os esforços normais nas barras.

n: é o número de nós.

Assinale a alternativa correta que apresenta o grau estático da estrutura:

- a) R = 5; b = 12; n = 6; g = 1.
- b) R = 3; b = 14; n = 8; g = 1.
- c) R = 3; b = 14; n = 8; g = 2.
- d) R = 3; b = 13; n = 7; g = 1.
- e) R = 4; b = 14; n = 8; g = 2.

## Seção 1.3

### Estruturas com múltiplos graus hiperestáticos

#### Diálogo aberto

Caro aluno, bem-vindo à nossa terceira seção da Unidade 1. Na segunda seção, aprofundamos as definições das estruturas com um grau hiperestático, entre elas as vigas, os pórticos e as treliças. Vimos também as particularidades de cada arranjo estrutural e como definir sua hiperestaticidade e os modelos com um grau de hiperestaticidade.

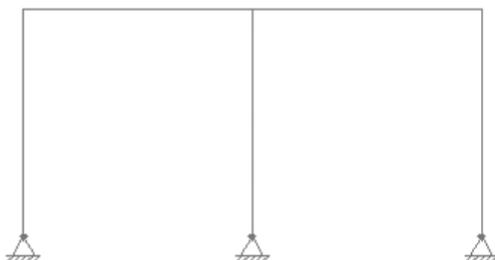
Nesta unidade, aprenderemos sobre as estruturas com múltiplos graus de hiperestaticidade, com ênfase nos mesmos arranjos estruturais estudados na segunda seção.

Como uma segunda opção do projeto do pórtico, já que sua empresa de *facilities* foi contratada para a manutenção do hotel e para execução desta estrutura, você tem um novo desafio: sendo a estrutura do pórtico com múltiplos graus hiperestáticos, qual é o procedimento de análise desse tipo de estrutura?

Para analisar este pórtico (Figura 1.26), será necessário conhecer as particularidades deste arranjo e como encontrar seu grau hiperestático total.

Bons estudos!

Figura 1.26 | Pórtico com múltiplos graus de hiperestaticidade



Fonte: elaborada pelo autor.

### Definição de estruturas com múltiplos graus hiperestáticos

Uma estrutura é considerada com múltiplos graus de hiperestaticidade quando o número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é superior a 1. Se, uma vez conhecida as reações, for impossível determinar os esforços das seções ao longo da estrutura utilizando as equações de equilíbrio, então, a estrutura é hiperestática internamente e pode ter este grau igual ou superior a 1.

### Vigas com múltiplos graus hiperestáticos

As vigas com múltiplos graus hiperestáticos são definidas em função de suas reações de apoio e suas rótulas. As rótulas geram equações extras e são somadas nas equações de equilíbrio da estática.



#### Assimile

Vale salientar que se a viga tiver o apoio móvel na vertical, isto a tornará uma estrutura hipostática e instável, mesmo que tenha o número de equações menores que o número de reações. Além disso, se a viga não tiver nenhuma restrição na horizontal, ela será hipostática e deslizará, sendo uma estrutura instável.

A fórmula dada para encontrar o grau hiperestático ( $g$ ) de uma viga é dada por:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio da Estática (=3).

r: número de rótulas.

Dados pelo Quadro 1.3.

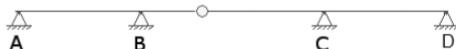
Nome do vínculo	Símbolo	Reações de apoio provocadas pelos vínculos	Números de graus de mobilidade retirados pelo vínculo (n)
Apoio móvel			1
Apoio fixo			2
Engaste			3

Fonte: elaborado pelo autor.

### Exemplificando

As vigas são estruturas fundamentais nas construções. Como vigas com múltiplos graus hiperestáticos (Figura 1.27 e 1.28), podemos ter:

Figura 1.27 | Exemplo 1 – viga com quatro graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

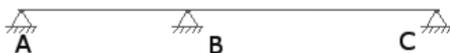
$$R = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$E = 3$$

$$r = 1$$

$$g = 8 - (3 + 1) = 4$$

Figura 1.28 | Exemplo 2 – viga com três graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 6 - (3 + 0) = 3$$

## Pórticos com múltiplos graus hiperestáticos

Pórticos são estruturas formadas pela combinação de barras horizontais, verticais e/ou inclinadas entre si. Os pórticos, como o da Figura 1.29, são amplamente utilizados nas construções civis, principalmente em edifícios.

Figura 1.29 | Pórtico de entrada – Brandenburg Gate



Fonte: iStock.

A maioria dos arranjos estruturais utilizados é hiperestática. Para os pórticos, de um modo geral, o grau de hipergeometria é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: número de equações referentes à rótula, dado pela fórmula:

$$r = \text{barras conectadas a rótula} - 1$$

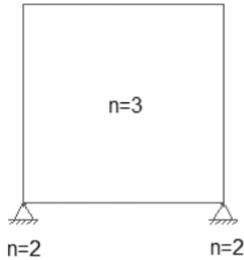


### Exemplificando

Os pórticos podem ter múltiplos graus de hiperestaticidade (Figuras 1.30 e 1.31), mas com diferentes arranjos estruturais. Quando o arranjo estrutural

apresenta um anel fechado (Figura 1.30), este acrescentará mais três incógnitas ao número de apoios, exceto no caso de treliças.

Figura 1.30 | Pórtico com quatro graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

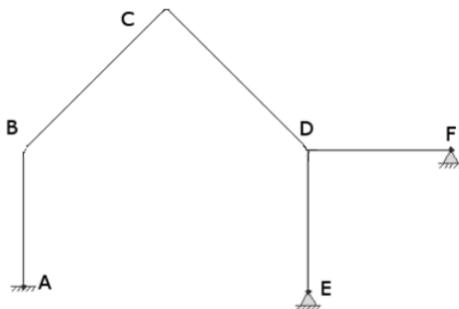
$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 7 - 3 = 4$$

Figura 1.31 | Pórtico com quatro graus hiperestáticos



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 7 - (3) = 4$$

## Treliças com múltiplos graus hiperestáticos

As treliças são amplamente utilizadas em coberturas, pontes, edificações etc. (Figura 1.32).

Figura 1.32 | Treliza utilizada em ponte



Fonte: <<http://www.istockphoto.com/br/foto/ponte-sobre-o-rio-dan%C3%BAbio-imagem-hdr-gm536686318-95062633>>. Acesso em: 20 out. 2017.

Para determinação do grau hiperestático, as incógnitas a serem resolvidas nas treliças são:

- Número de barras ( $b$ ).
- As reações nos apoios em função do tipo de vínculo  $\textcircled{R}$ , dadas pelo Quadro 1.3.
- Para uma estrutura isostática, a soma destas incógnitas deve ser igual a duas vezes o número de nós:

$$R + b = 2 * n$$

Sendo:  $n$  é o número de nós.

Isso significa que para cada nó da estrutura teremos duas equações.

O grau de hiperestaticidade é dado por:

$$g = (R + b) - (2 * n)$$

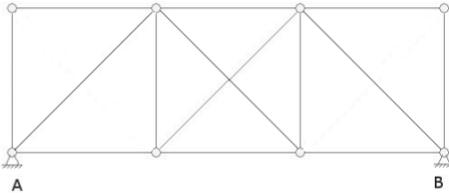
Quando  $g = 1$ , a estrutura será uma vez hiperestática.



As treliças podem ser externamente hiperestáticas ou internamente hiperestáticas.

Seguindo a fórmula dada, podemos verificar as diferenças dos tipos de treliça com dois graus de hiperestaticidade:

Figura 1.33 | Treliça externamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R = 2 + 2 = 4$$

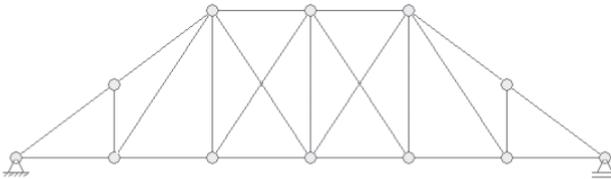
$$b = 14$$

$$n = 8 \rightarrow 2n = 16$$

$$g = (4 + 14) - (2 * 8) = 2$$

A incógnita para este caso é a reação de apoio e uma das barras centrais, portanto, a estrutura, é duas vezes externamente hiperestática.

Figura 1.34 | Treliça internamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso específico, as barras que se cruzam em "x" apenas se cruzam, mas não estão ligadas entre si, sendo barras independentes.

$$R = 1 + 2 = 3$$

$$b = 23$$

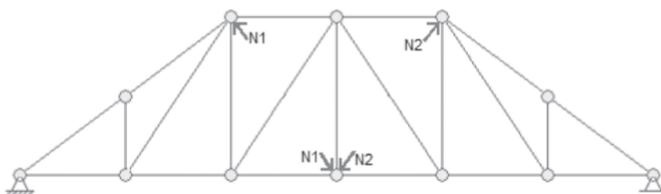
$$n = 12 \rightarrow 2n = 24$$

$$g = (3 + 23) - (2 * 12) = 2$$

A incógnita para este caso são os esforços nas barras, portanto, a estrutura é duas vezes internamente hiperestática.

Para resolver a estrutura, é necessário que as barras com hiperestaticidade sejam removidas, colocando no seu lugar a força normal como incógnita, em ambos os lados e com igual valor, mas com sentidos diferentes.

Figura 1.35 | Início da resolução da treliça internamente hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Calcular o grau de hiperestaticidade é o primeiro passo antes da escolha do método a ser utilizado para cálculo dos esforços e momentos.



Pesquise mais

O Mola é um modelo físico interativo que simula o comportamento de estruturas arquitetônicas. O modelo é composto por um conjunto de peças moduladas que se conectam, por meio de magnetismo, permitindo inúmeras combinações. De uso simples e interativo, o produto auxilia engenheiros e arquitetos em seus projetos.

Disponível em: <<https://molamodel.com/>>. Acesso em: 11 nov. 2017.

## Sem medo de errar

Para os pórticos, de modo geral, o grau de hipergeometria é dado pela fórmula:

$$g = R - (E + r)$$

Onde:

R: reações de apoio.

E: equações de equilíbrio.

r: número de equações referentes à rótula.

Portanto, para o pórtico a ser executado no jardim, teremos:

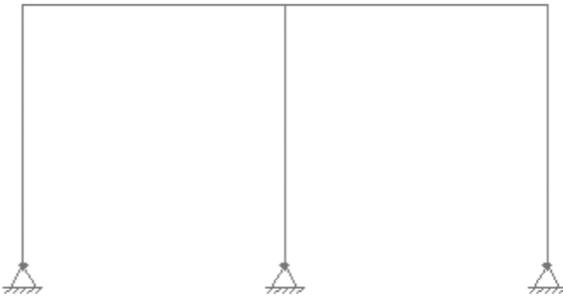
$$R = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$E = 3$$

$$r = 0$$

$$g = 6 - (3 + 0) = 3$$

Figura 1.36 | Pórtico com três graus de hiperestaticidade



Fonte: elaborada pelo autor.

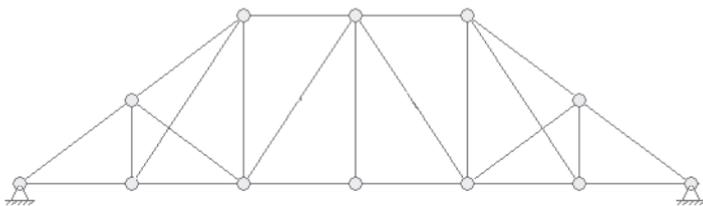
## Avançando na prática

### Ponte treliçada

#### Descrição da situação-problema

Como engenheiro de uma empresa de rodagem, você foi convocado para solucionar estruturalmente o projeto de uma ponte. Esta ponte deve ser executada para união de duas cidades, divididas por um rio. Seu chefe lhe entrega o projeto (Figura 1.37) para a primeira análise, que requer definir o grau de hiperestaticidade da estrutura.

Figura 1.37 | Projeto de ponte



Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução da situação-problema

Para solução desta primeira etapa do projeto, devem ser definidos quantos graus de hiperestaticidade esta estrutura possui, pois na próxima etapa esta informação é fundamental na escolha do método para a solução:

$$R = 2 + 2 = 4$$

$$b = 23$$

$$n = 12 \rightarrow 2n = 24$$

$$g = (4 + 23) - (2 * 12) = 3$$

Salientando que as barras que se cruzam não se tocam, sendo elementos independentes. Portanto, esta estrutura é três vezes hiperestática, sendo uma vez externa e duas vezes internamente.

## Faça valer a pena

**1.** Uma estrutura é considerada com múltiplos graus de hiperestaticidade quando:

Preencha a frase com a resposta correta sobre o múltiplo grau de hiperestaticidade.

- O número de reações desconhecidas é menor do que o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é inferior a 1.
- O número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é superior a 1.
- O número de reações desconhecidas excede o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é inferior a 1.

- d) O número de reações desconhecidas é menor do que o número das equações de equilíbrio da estática, e esta diferença é superior a 1.
- e) O número de reações desconhecidas não tem relações com o número das equações de equilíbrio da estática.

**2.** Para que as áreas de lazer de dois prédios de um hotel localizadas no topo fossem unidas e os hóspedes pudessem circular de uma para outra, foi criada uma viga de transição entre eles. O modelo proposto para esta viga foi dado a você e lhe cabe resolver o grau de hiperestaticidade do elemento.

Figura | Viga de transição



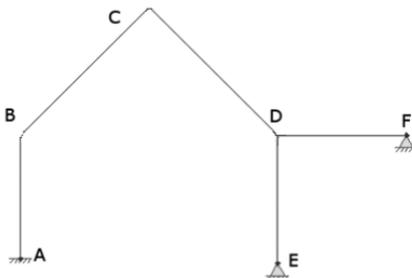
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a resposta correta que contém o número do grau de hiperestaticidade da viga proposta:

- a) 2.
- b) 4.
- c) 6.
- d) 3.
- e) 1.

**3.** Um shopping center quer ampliar seu tamanho e criar uma galeria para lojas. Para isso, um modelo de pórtico foi proposto. Entre os pontos A e E ficarão as lojas e entre os pontos E e F será o corredor de acesso, a ser fixado na estrutura já pronta. Seu desafio profissional é calcular o grau de hiperestaticidade do pórtico, conforme croqui:

Figura | Modelo de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta que contém o grau de hiperestaticidade do pórtico proposto:

- a) 4.
- b) 5.
- c) 2.
- d) 3.
- e) 6.

# Referências

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

ROCHA, A. M. **Teoria e prática das estruturas**: hiperestática plana geral - 1ª parte. vol. II. Rio de Janeiro: Científica, 1976. v. II.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural 2**: deformações em estruturas - método das forças. 5. ed. Porto Alegre: Globo, 1981.

\_\_\_\_\_. **Curso de análise estrutural 3**: método das deformações - processo de cross. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1980.

# Método das forças e do deslocamento

## Convite ao estudo

Bem-vindo à Unidade 2 da disciplina de *Estruturas hiperestáticas!*

Nesta segunda unidade, iremos nos aprofundar no estudo das estruturas hiperestáticas. Pelo que aprendemos na Unidade 1, já sabemos identificar esse tipo de estrutura e também quais são as suas vantagens e desvantagens. Agora, precisamos aprender a calcular as estruturas hiperestáticas, ou seja, determinar as reações que ocorrem em seus apoios, os esforços que ocorrem em suas barras e os deslocamentos que ocorrem em seus pontos.

Após a finalização do seu mestrado, uma faculdade o convidou para ministrar a disciplina de Estruturas hiperestáticas, mas para ser efetivado como professor permanente na vaga, você terá que fazer um teste. Seu coordenador lhe deu o desafio de estudar alguns princípios e métodos que são a base de sua disciplina. Entre os desafios, ele escolheu três exercícios diversos.

Para cumprir os três desafios propostos pelo seu coordenador da faculdade, iniciaremos pelo estudo do Princípio do Trabalho Virtual, que pode ser empregado nas estruturas isostáticas e também nas estruturas hiperestáticas. A compreensão desse princípio é fundamental para que possamos entender como realizar o cálculo das estruturas hiperestáticas. Na sequência, estudaremos dois métodos de análise de estruturas hiperestáticas: o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos.

Dessa maneira, ao final desta unidade, você será capaz de determinar os diagramas de esforços solicitantes, como esforço normal, cortante e momento fletor, que ocorrem nos mais diversos tipos de estruturas hiperestáticas, como vigas e pórticos.

Assim, ao projetar uma estrutura, você poderá tirar proveito das vantagens já estudadas que as estruturas hiperestáticas possuem.

Bons estudos!

# Seção 2.1

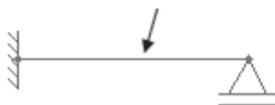
## Teoremas e princípios

### Diálogo aberto

Caro aluno, após a conclusão da primeira unidade, na qual iniciamos os estudos das estruturas hiperestáticas, aprendendo como identificar esse tipo de estrutura e quais são as suas vantagens e desvantagens, iremos, agora, nos aprofundar mais na análise deste tipo de estrutura. Para que possamos empregar as estruturas hiperestáticas na nossa prática diária, devemos determinar qual a intensidade dos esforços que atuam sobre ela. Para isso, é fundamental ter a compreensão do *Princípio do Trabalho Virtual*, que estudaremos nesta nossa primeira seção da Unidade 2.

Para conseguir realizar o teste, e assim garantir a sua vaga como professor permanente na faculdade, você deve cumprir o primeiro desafio proposto por seu coordenador: analisar a aplicação do *Princípio do Trabalho Virtual* e explicar como ele é empregado nas estruturas hiperestáticas, tomando como exemplo a viga da Figura 2.1.

Figura 2.1 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Antes de aplicarmos esse princípio neste tipo de estrutura, devemos compreender a sua essência e aplicá-lo em estruturas mais simples, como as estruturas isostáticas. Tendo esse conhecimento, poderemos avançar para o emprego do Princípio do Trabalho Virtual nas estruturas hiperestáticas com mais confiança e, desta forma, conseguir realizar o teste com êxito.

Vamos aos estudos?

### Princípio do Trabalho Virtual (PTV)

Quando um ponto material submetido a uma força  $F$  apresenta um deslocamento  $d$  na mesma direção da força  $F$ , essa força realiza um trabalho dado por:

$$U = F \cdot d$$

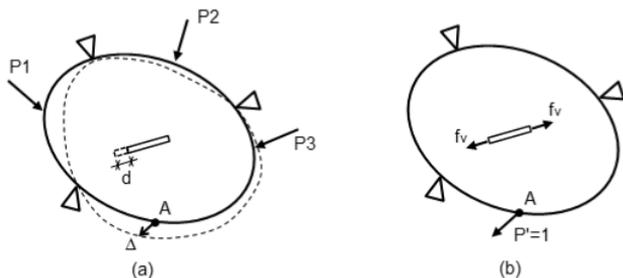
Assim, ao aplicarmos forças externas em um determinado corpo, ele se deformará, apresentando deslocamentos nos pontos de aplicação das forças externas. Dessa forma, essas forças externas irão realizar um trabalho externo ( $U_e$ ), que, pelo Princípio da Conservação de Energia, será convertido em energia de deformação, a qual é armazenada na estrutura quando esta se deforma. Essa energia de deformação, que também pode ser chamada de trabalho interno ( $U_i$ ), é liberada com a retirada das forças externas atuantes no corpo, fazendo com que o corpo retorne à sua configuração indeformada, caso não seja excedido o limite elástico do material. O Princípio da Conservação de Energia é a base do Princípio do Trabalho Virtual, e pode ser expresso matematicamente por:

$$U_e = U_i$$

O Princípio do Trabalho Virtual pode ser utilizado para determinar um deslocamento ou uma inclinação em um ponto de uma estrutura qualquer. Para compreender melhor esse princípio, tomemos um corpo submetido a um conjunto de forças externas, conforme a Figura 2.2a.

As forças externas  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  irão provocar esforços internos  $f_i$  nos vários pontos internos ao longo do corpo, que em uma estrutura convencional, como uma treliça, uma viga ou um pórtico, são os esforços normal, cortante, momento fletor e momento torçor. Consequentemente, o corpo irá se deformar, apresentando deslocamentos externos  $\Delta_n$  nos pontos de aplicação das forças externas e deslocamentos internos  $d$  nos diversos pontos internos ao longo do corpo.

Figura 2.2 | (a) Corpo submetido a um conjunto de forças externas e (b) Corpo com aplicação da força virtual externa  $P'$



Fonte: elaborada pelo autor.

O produto de uma força externa pelo deslocamento externo que ocorre na direção dessa força no ponto de sua aplicação resulta em um trabalho externo. Já o produto de um esforço interno em um determinado ponto interior pelo deslocamento interno que ocorre nesse mesmo ponto resulta em um trabalho interno. Dessa forma, pelo Princípio da Conservação de Energia, podemos escrever:

$$U_e = U_i \Rightarrow \sum P_n \cdot \Delta_n = \sum f_i \cdot d_i$$

Consideremos, agora que, se deseja determinar o deslocamento  $\Delta$  do ponto A do corpo da Figura 2.2a, na direção mostrada, submetido ao conjunto de forças externas reais indicadas. Para isso, utilizaremos o Princípio do Trabalho Virtual.

Primeiramente, com o corpo indeformado, ou seja, antes da atuação das forças externas reais, aplica-se uma força virtual externa  $P'$  na mesma direção do deslocamento  $\Delta$  que se deseja determinar, conforme a Figura 2.2b. Utiliza-se o termo virtual, pois essa é uma força imaginária, ou seja, que não ocorre na realidade. Essa força virtual pode ter uma intensidade qualquer, mas por conveniência, adotaremos uma força virtual de intensidade unitária, ou seja,  $P' = 1$ . A força virtual externa irá provocar esforços virtuais internos  $f_v$  compatíveis com as condições de equilíbrio, como exemplificado na Figura 2.2b.

Posteriormente, aplicam-se as forças externas reais, que irão provocar o deslocamento externo real  $\Delta$  no ponto A e deslocamentos internos reais  $d$  compatíveis nos pontos internos do corpo. Dessa forma, a força virtual externa  $P'$  irá realizar um trabalho virtual externo ao se mover ao longo do deslocamento real  $\Delta$ . Já nos pontos internos

do corpo, cada esforço virtual interno  $f_v$  irá realizar um trabalho virtual interno ao se mover ao longo do deslocamento interno real  $d$ . Dessa forma, é possível formular a equação do Princípio do Trabalho Virtual igualando o trabalho virtual externo com o trabalho virtual interno realizado em todos os pontos do corpo:

$$P' \cdot \Delta = \sum f_v \cdot d \Rightarrow 1 \cdot \Delta = \sum f_v \cdot d$$



### Assimile

No Princípio dos Trabalhos Virtuais, as forças (externas e internas) são virtuais e os deslocamentos (externos e internos) são reais. Assim, os deslocamentos  $\Delta$  e  $d$  não são provocados pelas forças  $P'$  e  $f_v$ . Porém, é necessário que as forças externas e internas estejam em equilíbrio, e que os deslocamentos externos e internos sejam compatíveis, ou seja, as forças internas virtuais  $f_v$  são provocadas pela aplicação da força externa virtual  $P'$ , e seus valores são obtidos respeitando as condições de equilíbrio. Já os deslocamentos internos reais  $d$  são provocados pelo deslocamento externo real  $\Delta$ , e seus valores são obtidos respeitando as condições de compatibilidade de deslocamentos. Em comum, os sistemas de forças e deslocamentos têm o fato de atuarem sobre o mesmo corpo.

## Método do Trabalho Virtual

O método do trabalho virtual pode ser empregado para determinar um único deslocamento em uma determinada direção que ocorre em um ponto de uma estrutura, seja ela uma treliça, uma viga ou um pórtico. Para tanto, utilizaremos a equação do PTV que acabou de ser apresentada:

$$1 \cdot \Delta = \sum f_v \cdot d$$

Suponha que se deseja determinar o deslocamento  $\Delta$  em uma determinada direção de um ponto da estrutura, quando ela estiver submetida a um conjunto de forças reais. Para resolver esse problema usando o método do trabalho virtual, basta aplicar, no ponto em estudo, uma força (ou momento) unitária (força externa virtual) na mesma direção do deslocamento desejado. Essa força (ou momento) unitária virtual irá provocar esforços internos virtuais ( $f_v$ ), que podem ser o esforço normal, esforço cortante, momento fletor ou momento torçor, nos diversos pontos ao longo da estrutura. Esses esforços

internos podem ser determinados rapidamente para uma estrutura isostática, traçando os seus diagramas de esforços solicitantes, quando ela está submetida somente à força unitária.

O deslocamento real  $\Delta$ , que na equação anterior será a incógnita, foi provocado pelas forças reais que atuam na estrutura, as quais também geraram deslocamentos internos reais compatíveis, ou deformações, nos diversos pontos da estrutura. Essas deformações são funções dos esforços solicitantes reais que atuam na estrutura, provocados pelas forças reais, e suas expressões foram deduzidas pela teoria de Resistência dos Materiais. Assim, sabe-se que cada um dos esforços solicitantes (força normal, força cortante, momento fletor e momento torçor) provoca as seguintes deformações em um elemento  $dx$  da estrutura:

- Deformação axial devido ao esforço normal ( $N$ ):

$$dL = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A}$$

- Deformação de cisalhamento devido ao esforço cortante ( $Q$ ):

$$dh = \frac{\chi \cdot Q \cdot dx}{G \cdot A}$$

- Giro devido ao momento fletor ( $M$ ):

$$d\theta = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

- Giro de torção devido ao momento torçor ( $T$ ):

$$d\varphi = \frac{T \cdot dx}{E \cdot I_t}$$

Em que:

$E$ : Módulo de elasticidade longitudinal do material.

$G$ : Módulo de elasticidade transversal do material.

$A$ : Área da seção transversal.

$I$ : Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo de flexão.

$I_t$ : Momento de inércia à torção da seção transversal.

$\chi$  : fator de forma (varia conforme o tipo de seção transversal).

Como essas deformações são correspondentes a um elemento infinitesimal  $dx$ , deve-se fazer a multiplicação dessas deformações pelos esforços que atuam no elemento infinitesimal, e então integrar ao longo de todo o comprimento da estrutura para que seja possível determinar a somatória do trabalho virtual interno em todos os pontos dessa estrutura. Dessa forma, no caso mais geral de uma estrutura que apresenta os quatro esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor), o trabalho virtual interno total será a soma dos trabalhos virtuais internos de cada um desses quatro esforços ao longo de toda a estrutura. Como já visto, o trabalho virtual interno é dado pela multiplicação entre o esforço interno virtual e a deformação real. Assim, a equação do PTV será:

$$1 \cdot \Delta = U_{iNormal} + U_{iCortante} + U_{iMFletor} + U_{iMTorçor}$$

$$1 \cdot \Delta = \int_L N' \cdot dL + \int_L Q' \cdot dh + \int_L M' \cdot d\theta + \int_L T' \cdot d\varphi$$

$$1 \cdot \Delta = \int_L N' \cdot \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} + \int_L Q' \cdot \frac{\chi \cdot Q \cdot dx}{G \cdot A} + \int_L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} + \int_L T' \cdot \frac{T \cdot dx}{G \cdot I_t}$$

Em que:

$N'$ ,  $Q'$ ,  $M'$  e  $T'$ : esforços internos virtuais, provocados pela força virtual unitária.

$N$ ,  $Q$ ,  $M$  e  $T$ : esforços internos reais, provocados pelas forças reais.

Vale ressaltar que é comum que tanto os esforços virtuais quanto os esforços reais variem ao longo do comprimento total da estrutura. Assim, eles são funções da posição  $x$  na estrutura.

Em determinadas estruturas convencionais, podemos desprezar, sem que ocorra um erro significativo no resultado final, algumas das parcelas dos trabalhos virtuais internos, pois resultam em trabalhos muito pequenos em comparação com as outras parcelas de trabalhos virtuais internos. Por exemplo:

- Nas treliças, pode-se considerar somente a parcela referente ao esforço normal.

- Nas vigas e pórticos, pode-se considerar somente a parcela referente ao momento fletor (a parcela da cortante só é utilizada em casos de vãos muito curtos ou cargas elevadas).

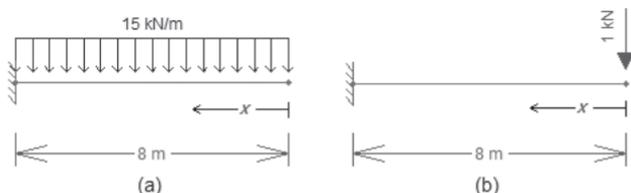
- A parcela da torção só é utilizada em estruturas espaciais, como grelhas e pórticos espaciais.



### Exemplificando

Sabendo que a viga da Figura 2.3a possui  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$  e  $I = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ , o deslocamento vertical que ocorre na extremidade livre da viga, devido ao carregamento real indicado, pode ser encontrado com a aplicação do PTV. Como se trata de uma viga, iremos considerar apenas a parcela do trabalho virtual interno referente aos momentos fletores.

Figura 2.3 | (a) Viga com carregamento real (b) Viga com força virtual



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando uma força virtual unitária no mesmo ponto e na mesma direção do deslocamento desejado, conforme a Figura 2.3b, temos:

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

Basta, agora, determinar as equações dos momentos fletores  $M'$  e  $M$  em função da posição  $x$  da viga, obtidos, respectivamente, com a aplicação da força unitária (Figura 2.3b) e do carregamento real (Figura 2.3a), substituí-los na equação do PTV e resolver a integral ao longo do comprimento  $L = 8\text{m}$  da viga. Pode-se tomar como origem da coordenada  $x$  qualquer ponto, desde que essa origem seja a mesma para a determinação de  $M'$  e  $M$ . Admitindo que a tração no lado de baixo da viga é positiva, temos:

$$M' = -1 \cdot x \qquad M = -15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -7,5 \cdot x^2$$

$$1 \cdot \Delta = \int_0^8 (-1 \cdot x) \cdot \frac{(-7,5 \cdot x^2) \cdot dx}{2 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{10^5} \cdot \int_0^8 7,5 \cdot x^3 \cdot dx$$

$$\Delta = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{7,5 \cdot 8^4}{4} \Rightarrow \Delta = 0,0768m = 76,8mm$$

Como o deslocamento resultou em um valor positivo, isso significa que ele tem o mesmo sentido da força unitária, ou seja, para baixo.

As deformações reais  $d$ , além de serem provocadas por esforços reais, também podem ser provocadas por variações de temperatura (expansão térmica ou dilatação térmica) e defeitos de fabricação (barras fabricadas com comprimentos diferentes dos previstos em projeto). Caso esses efeitos reais ocorram, os seus trabalhos virtuais internos devem ser somados aos demais trabalhos virtuais internos no lado direito da equação do PTV. As deformações reais provocadas por esses efeitos e seus respectivos trabalhos virtuais internos são:

- Expansão térmica (provoca uma deformação de flexão):

$$d\theta = \alpha \cdot \frac{(T_i - T_e)}{h} \cdot dx \quad U_i = \int_L M' \cdot \alpha \cdot \frac{(T_i - T_e)}{h} \cdot dx$$

- Dilatação térmica (provoca uma deformação axial):

$$dL = \alpha \cdot \left( \frac{T_i + T_e}{2} \right) \cdot dx \quad U_i = \int_L N' \cdot \alpha \cdot \left( \frac{T_i + T_e}{2} \right) \cdot dx$$

- Defeito de fabricação (provoca uma deformação axial):

$$dL = \frac{\delta L}{L} \cdot dx \quad U_i = \int_L N' \cdot \frac{\delta L}{L} \cdot dx$$

Em que:

$\alpha$ : Coeficiente de dilatação térmica.

$T_e$ : Variação de temperatura nas fibras externas.

$T_i$ : Variação de temperatura nas fibras internas.

$h$ : Altura da seção transversal da barra.

$dL$ : Variação do comprimento da barra.

$L$ : Comprimento da barra.

Os recalques de apoio (deslocamentos que podem ocorrer nos apoios de uma estrutura) também devem ser considerados na equação do PTV. Porém, como um recalque de apoio provoca um movimento de corpo rígido em uma estrutura, ou seja, não provoca deformações nela, ele não irá provocar trabalho virtual interno. Entretanto, o recalque de apoio provoca um trabalho virtual externo que deve ser somado no lado esquerdo da equação do PTV. Esse trabalho virtual externo é dado pela multiplicação entre a reação de apoio virtual (na direção do recalque) provocada pela força virtual unitária e o recalque de apoio (deslocamento real).



Refleta

Para determinar o giro (deslocamento angular) de um determinado ponto, devemos aplicar uma força unitária na direção de um deslocamento linear, ou será que devemos aplicar um momento unitário na direção de um deslocamento angular? Lembre-se de que a carga unitária deve ser aplicada na mesma direção do deslocamento desejado.



Pesquise mais

Para recordar como são deduzidas as expressões das deformações provocadas pelos esforços solicitantes (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor), utilizadas no PTV, consulte alguns livros que tratam da teoria da Resistência dos Materiais, como:

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

## Teorema de Castigliano

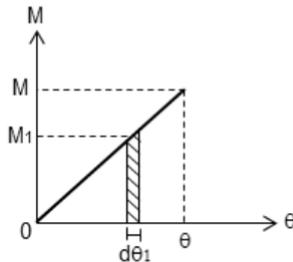
Tendo como base o Princípio da Conservação de Energia e os conceitos de energia de deformação, o segundo teorema de Castigliano pode ser usado para determinar o deslocamento (linear ou angular) de um ponto de uma estrutura. Segundo esse teorema, o deslocamento em um ponto de uma estrutura é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação em relação a uma ação (força ou momento) que atua no ponto e na direção do deslocamento. Assim, para determinar o deslocamento no ponto e na direção de uma

força  $P$  aplicada em uma estrutura empregando esse teorema, temos:

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

No caso de flexão de uma viga de material elástico linear, a relação entre momento fletor  $M$  e giro da seção transversal  $\theta$  é linear, e pode ser representada pelo gráfico da Figura 2.4:

Figura 2.4 | Relação entre  $M$  e  $\theta$  para material elástico linear



Fonte: elaborada pelo autor.

Um acréscimo  $dM_1$  do momento produz um acréscimo  $d\theta_1$  no giro da seção. O trabalho produzido por  $M_1$  durante esse acréscimo é dado pela multiplicação de  $M_1$  e  $d\theta_1$ , representado pela área hachurada no gráfico da Figura 2.4. O trabalho total (energia de deformação armazenada na barra) quando o momento cresce de 0 a  $M$  será a soma das várias áreas elementares, que resulta na área do triângulo abaixo da reta do gráfico:

$$U_i = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \theta$$

Para um elemento infinitesimal  $dx$  da viga, submetido a um giro  $d\theta$ , temos:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta \qquad d\theta = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

Fazendo a substituição e integrando ao longo do comprimento  $L$  da viga:

$$dU_i = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad U_i = \int_0^L \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot I}$$

Empregando no teorema de Castigliano:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot I}$$

Para resolver essa equação, é mais fácil diferenciar o momento em relação à  $P$  antes da integração. Assim, a equação fica:

$$\Delta = \int_0^L M \cdot \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{E \cdot I}$$

### Aplicação do Teorema de Castigliano

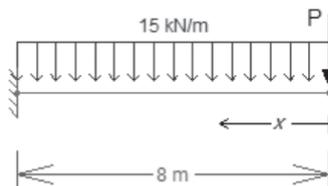
O teorema de Castigliano pode ser aplicado na determinação de deslocamentos em qualquer estrutura que tenha temperatura constante, apoios sem recalques e material elástico linear.



### Exemplificando

Como exemplo, iremos determinar o deslocamento vertical na extremidade livre da viga da Figura 2.3a, que já foi determinado pela aplicação do PTV. Para tanto, devemos aplicar uma força vertical  $P$  na extremidade livre, conforme a Figura 2.5:

Figura 2.5 | Viga com carregamento real e força  $P$



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, determina-se a equação do momento fletor na viga em relação à coordenada  $X$ , para o carregamento da Figura 2.5. Em seguida, encontra-se a derivada parcial desse momento fletor com relação à força  $P$  (força que atua no ponto e na direção do deslocamento). Admitindo que tração no lado de baixo da viga é positiva:

$$M = -P \cdot x - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow M = -P \cdot x - 7,5 \cdot x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Substituindo o valor da força  $P$  por seu valor real, que neste caso é  $P = 0$ , uma vez que no carregamento original essa força não existe:

$$M = -7,5 \cdot x^2 \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Aplicando a equação do teorema de Castigliano, temos:

$$\Delta = \int_0^L M \cdot \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I} = \int_0^8 (-7,5 \cdot x^2) \cdot (-x) \cdot \frac{dx}{2 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$\Delta = \frac{1}{10^5} \cdot \int_0^8 7,5 \cdot x^3 \cdot dx = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{7,5 \cdot 8^4}{4} \Rightarrow \Delta = 0,0768m = 76,8mm$$

Esse é o mesmo valor de deslocamento encontrado através do PTV.

## Sem medo de errar

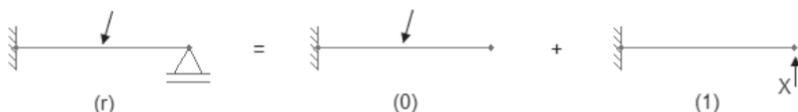
Agora que já sabemos como aplicar o PTV na determinação dos deslocamentos de estruturas isostáticas, vamos verificar como podemos utilizá-lo nas estruturas hiperestáticas, permitindo, assim, resolver o primeiro desafio proposto pelo coordenador da faculdade.

Em uma estrutura isostática, o respeito às condições de equilíbrio (equações de equilíbrio) são condições únicas e suficientes para determinar as reações de apoio e os esforços na estrutura. Já no caso de uma estrutura hiperestática, utilizando-se somente as condições de equilíbrio, não temos condições de determinar as suas reações e os seus esforços. Para resolver uma estrutura hiperestática, devemos, além das condições de equilíbrio, respeitar também as condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e as condições que regem o comportamento dos materiais utilizados (leis constitutivas dos materiais).

O Princípio do Trabalho Virtual pode ser utilizado nas estruturas hiperestáticas justamente para verificar o atendimento das condições de compatibilidade de deslocamentos dessa estrutura. Como exemplo, tomemos a viga da Figura 2.1, a qual, pelos nossos estudos da Unidade 1, já sabemos se tratar de uma viga uma vez hiperestática.

Essa viga hiperestática (r) pode ser desmembrada nas vigas (0) e (1), conforme a Figura 2.6, ambas isostáticas, sendo  $X$  a reação do apoio direito da viga hiperestática. Pela superposição dos efeitos, ao serem somadas, as vigas (0) e (1) resultam na viga hiperestática (r).

Figura 2.6 | Superposição dos efeitos



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo  $\Delta r$  o deslocamento vertical na extremidade direita da viga hiperestática, que deve ser nulo, e  $\Delta 0$  e  $\Delta 1$  dos deslocamentos verticais na extremidade direita das vigas isostáticas (0) e (1), respectivamente, a condição de compatibilidade de deslocamentos nos diz que:

$$\Delta r = \Delta 0 + \Delta 1 \Rightarrow 0 = \Delta 0 + \Delta 1 \Rightarrow \Delta 1 = -\Delta 0$$

Assim, podemos aplicar o PTV na viga isostática (0) para determinar  $\Delta 0$ , e depois aplicar o PTV novamente na estrutura (1), impondo que  $\Delta 1$  seja igual a  $-\Delta 0$ , para encontrar a reação  $X$ . Esses conceitos serão utilizados nas seções seguintes para a resolução de estruturas hiperestáticas.

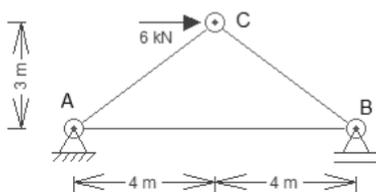
## Avançando na prática

### Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais em treliças

#### Descrição da situação-problema

Seu chefe solicitou que você determine o deslocamento vertical que ocorre no nó C da treliça da Figura 2.7, que será utilizada na construção da cobertura de uma residência. Os dados fornecidos pela sua equipe são: a área da seção transversal de cada barra da treliça é  $A = 400\text{mm}^2 = 4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$  e o módulo de elasticidade do material empregado na treliça é  $E = 20000\text{kN/cm}^2 = 2 \cdot 10^8\text{kN/m}^2$ .

Figura 2.7 | Treliça da cobertura

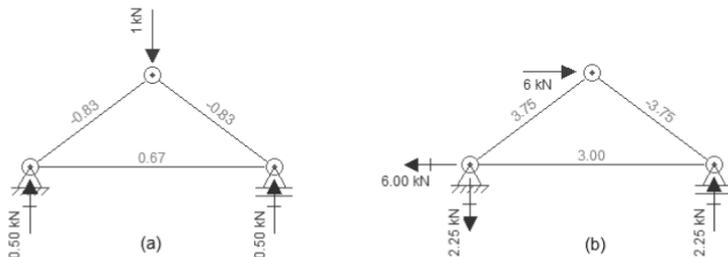


Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução da situação-problema

Como se deseja determinar o deslocamento vertical no nó C da treliça, deve-se aplicar uma força virtual de 1 kN na direção vertical do nó C. Em seguida, pelas três equações de equilíbrio, determinam-se as reações de apoio, e pelo método dos nós, encontram-se os esforços normais que atuam em cada barra, conforme a Figura 2.8a. De maneira semelhante, as reações e os esforços nas barras da treliça são determinados para a treliça com o seu carregamento real, conforme a Figura 2.8b.

Figura 2.8 | (a) Esforços normais ( $N'$ ) provocados pela força virtual; (b) Esforços normais ( $N$ ) provocados pelo carregamento real



Fonte: elaborada pelo autor.

Como trata-se de uma treliça, consideraremos apenas a parcela referente aos esforços normais na equação do PTV:

$$1 \cdot \Delta_C = \int_L N' \cdot \frac{N \cdot dx}{E \cdot A}$$

Como  $N'$  e  $N$  são constantes ao longo do comprimento de cada barra, a integral resulta na seguinte expressão, para cada barra de comprimento  $L$ :

$$\int_L N' \cdot \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} = N' \cdot \frac{N}{E \cdot A} \cdot \int_0^L dx = N' \cdot \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

Portanto, o trabalho virtual interno da treliça toda será o somatório do trabalho interno de cada barra. Assim, substituindo os valores de  $N'$  e  $N$  de cada barra, temos:

$$\Delta_C = \sum N' \cdot \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (N'_{AC} \cdot N_{AC} \cdot L_{AC} + N'_{BC} \cdot N_{BC} \cdot L_{BC} + N'_{AB} \cdot N_{AB} \cdot L_{AB})$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \cdot [(-0,83) \cdot 3,75 \cdot 5 + (-0,83) \cdot (-3,75) \cdot 5 + 0,67 \cdot 3 \cdot 8] = 2,01 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,201 \text{ mm}$$

Como o deslocamento calculado é positivo, isso indica que ele tem o mesmo sentido da força unitária, ou seja, para baixo.

## Faça valer a pena

**1.** Um novo equipamento que será colocado em operação em uma fábrica está localizado próximo de uma barra da estrutura da fábrica. Este equipamento gera uma grande quantidade de calor ao ser ligado, e devido ao funcionamento, foi identificado que as fibras externa e interna da barra da estrutura apresentaram variações de temperatura de +10 °C e +18 °C, respectivamente.

Você deve identificar se essa variação de temperatura provocou uma deformação do tipo expansão térmica, uma deformação do tipo dilatação térmica, ou ambos os casos. Além disso, também é preciso identificar se, no caso de uma expansão térmica, ela provoca tração na fibra externa ou interna, e no caso de uma dilatação térmica, se ela provoca tração ou compressão do eixo da barra.

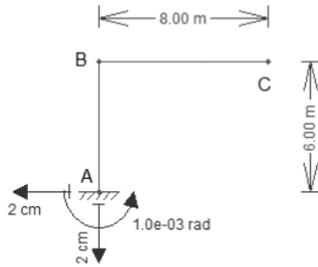
Assinale a alternativa correta que corresponde à(s) deformação(ões) ocorrida(s).

- a) Apenas dilatação térmica com tração do eixo.
- b) Expansão térmica com tração na fibra interna e dilatação térmica com tração do eixo.
- c) Apenas dilatação térmica com compressão do eixo.

- d) Apenas expansão térmica com tração na fibra interna.  
 e) Expansão térmica com tração na fibra externa, e dilatação térmica com tração do eixo.

**2.** O pórtico da figura a seguir foi construído em um terreno que apresenta grandes deformações ao ser submetido a cargas. Ao final da construção, antes da aplicação do carregamento real, foi identificado que o apoio A sofreu os recalques indicados.

Figura | Pórtico com recalque de apoio



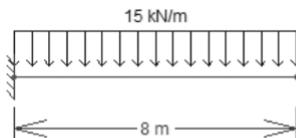
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine o deslocamento horizontal que ocorre no ponto C do pórtico, devido aos recalques do apoio A, indicando o seu sentido, e assinale a alternativa correta.

- a) 2,6 cm para a direita.  
 b) 2 cm para a esquerda.  
 c) 2,6 cm para a esquerda.  
 d) 2 cm para a direita.  
 e) Zero.

**3.** A viga em balanço apresentada na figura a seguir possui momento de inércia em relação ao eixo de flexão  $I = 5 \cdot 10^{-4} m^4$ , e material com módulo de elasticidade  $E = 2 \cdot 10^8 kN / m^2$ .

Figura | Pórtico com recalque de apoio



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine o giro que ocorre na extremidade livre esquerda da viga, indicando se é um giro horário ou anti-horário, e assinale a alternativa correta.

- a) 0,0768 rad, giro horário.
- b) 0,0128 rad, giro anti-horário.
- c) 0,0768 rad, giro anti-horário.
- d) Zero.
- e) 0,0128 rad, giro horário.

## Seção 2.2

### Método das forças

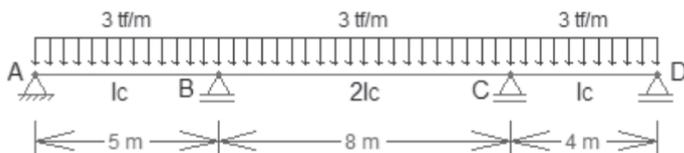
#### Diálogo aberto

Bem-vindo à segunda seção da Unidade 2 da disciplina de *Estruturas hiperestáticas*!

Após estudarmos o Princípio do Trabalho Virtual e entendermos a sua aplicação na determinação dos deslocamentos de estruturas isostáticas, iremos, agora, empregá-lo na resolução das estruturas hiperestáticas. Um dos métodos que pode ser utilizado para resolver estruturas desse tipo é o método das forças, que usa o Princípio do Trabalho Virtual.

A compreensão desse método de análise de estruturas hiperestáticas será fundamental para que você consiga resolver o seu segundo desafio proposto pelo seu coordenador na busca por uma vaga como professor da disciplina de *Estruturas hiperestáticas*. Lembre-se de que nesse desafio você deve determinar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.9.

Figura 2.9 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, para vencer mais uma barreira na busca pela sua vaga, vamos aprender como funciona o método das forças!

### Definição do método das forças

O método das forças é um procedimento empregado para analisar estruturas hiperestáticas, permitindo encontrar as suas reações de apoio e traçar os seus diagramas de esforços solicitantes. Os métodos de resolução de estruturas hiperestáticas devem sempre respeitar as seguintes condições:

- Condições de equilíbrio.
- Condições de compatibilidade.
- Condições que regem o comportamento dos materiais empregados (leis constitutivas dos materiais).

As condições de equilíbrio são satisfeitas quando a estrutura se mantém em repouso, ou seja, quando as reações de apoio e as forças atuantes na estrutura estão em equilíbrio. Para respeitar essas condições no método das forças, iremos aplicar as equações de equilíbrio estático, já conhecidas e empregadas na resolução das estruturas isostáticas.

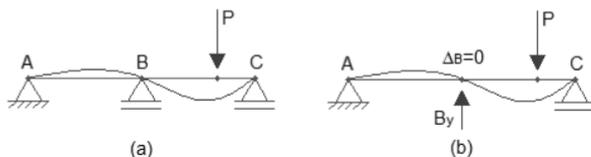
O comportamento do material é a resposta que ele apresenta quando submetido aos esforços que ocorrem na estrutura. Para que o método das forças respeite o comportamento dos materiais empregados, iremos considerar que os materiais possuem comportamento elástico linear e que as deformações estejam dentro do limite da região elástica.

Já uma estrutura que respeita as condições de compatibilidade é aquela que não apresenta rompimentos de seus vários segmentos e cuja forma defletida seja coerente com as restrições de deslocamentos impostas pelas vinculações de apoio. Para respeitar essas condições no método das forças, iremos escrever uma ou mais equações de compatibilidade que garantam o não rompimento da estrutura ou que garantam que as deflexões da estrutura respeitem as condições de vinculação.

O conceito básico do método das forças consiste em substituir a estrutura hiperestática por uma estrutura isostática fundamental, obtida pela remoção de certas restrições, como a remoção de reações de apoio. Como essa estrutura fundamental é isostática, a sua análise pode ser feita facilmente pelos métodos já conhecidos de análise de estruturas isostáticas.

Para exemplificar, consideremos a viga apresentada na Figura 2.10a. Conforme já estudado na Unidade 1, essa viga é uma vez hiperestática, já que possui quatro reações de apoio (força vertical e força horizontal no apoio fixo em A, força vertical no apoio móvel em B e força vertical no apoio móvel em C) e apenas três equações de equilíbrio. Dessa forma, para resolver essa estrutura, precisamos definir mais uma equação, resultando em um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, ou seja, um sistema com uma única solução.

Figura 2.10 | (a) Viga uma vez hiperestática; (b) Estrutura isostática fundamental



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar essa equação adicional, iremos substituir a estrutura hiperestática por uma estrutura isostática fundamental equivalente, através da retirada de uma das vinculações de apoio e da aplicação da reação de apoio correspondente ao vínculo retirado, conforme a Figura 2.10b. Para que essa estrutura fundamental seja realmente equivalente à estrutura hiperestática, além de aplicar uma força vertical em B, correspondente à reação de apoio, também devemos respeitar a condição de compatibilidade imposta por esse apoio móvel em B, ou seja, a condição de que o deslocamento vertical no ponto B deve ser nulo. Esse requisito geométrico nos permite escrever uma equação de compatibilidade adicional, que irá se juntar às três equações de equilíbrio, permitindo encontrar as quatro reações de apoio e resolver a estrutura hiperestática:

Equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Equação de compatibilidade

$$\Delta_B = 0$$



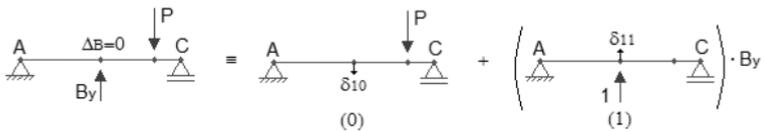
Em muitas estruturas hiperestáticas, a escolha de qual vínculo iremos retirar para definir a estrutura isostática fundamental é arbitrária. No caso da viga da Figura 2.10a, alternativamente, poderíamos retirar o vínculo correspondente à reação vertical no ponto C. Neste caso, a equação de compatibilidade que deve ser respeitada é a de que o deslocamento vertical no ponto C deve ser nulo. Entretanto, não poderíamos retirar o vínculo horizontal no ponto A porque transformaríamos a estrutura em hipostática. Independentemente de qual vínculo escolhemos para retirar, a resposta encontrada deve ser a mesma.

### Método das forças: vigas

Já vimos que, para aplicar o método das forças, devemos montar uma ou mais equações de compatibilidade. Como iremos utilizar essas equações para resolver os problemas de estruturas hiperestáticas? A resposta desse questionamento passa pelo princípio da superposição, que é válido para materiais de comportamento elástico linear. Para solucionar o problema, iremos desmembrar a estrutura isostática fundamental em duas ou mais estruturas isostáticas, que ao serem somadas, resultam na estrutura isostática fundamental.

Para esclarecer esse procedimento, iremos considerar a viga já apresentada na Figura 2.10a, uma vez hiperestática. A sua estrutura isostática fundamental, apresentada na Figura 2.10b, pode ser desmembrada nos casos (0) e (1), conforme a Figura 2.11, que ao serem somados, resultam na estrutura isostática fundamental.

Figura 2.11 | Superposição



Fonte: elaborada pelo autor.

Como o deslocamento vertical em B deve ser nulo, a equação de compatibilidade fica:

$$\Delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y \quad \text{e} \quad \Delta_B = 0$$

$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y \Rightarrow B_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

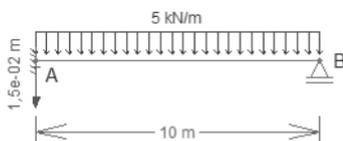
Conhecidos os deslocamentos no ponto B para os casos (0) e (1), podemos determinar a reação de apoio vertical em B da estrutura real (viga hiperestática), que é uma das quatro incógnitas do nosso problema. Para encontrar as outras três incógnitas, que são as reações de apoio horizontal e vertical em A e a reação de apoio vertical em C, basta aplicar as três equações de equilíbrio estático.

A determinação dos valores dos deslocamentos no ponto B das estruturas isostáticas dos casos (0) e (1) pode ser feita aplicando os conceitos estudados na primeira seção desta unidade: o Princípio dos Trabalhos Virtuais. O deslocamento  $\delta_{10}$  é encontrado, através do PTV, com a aplicação de uma força virtual unitária na direção vertical em B na estrutura do caso (0). Já o deslocamento  $\delta_{11}$  é encontrado, através do PTV, com a aplicação de uma força virtual unitária na direção vertical em B na estrutura do caso (1).

### Exemplificando

Determinar as reações de apoio para a viga da Figura 2.12, que possui  $E \cdot I$  constante.

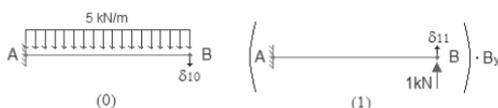
Figura 2.12 | Viga com carregamento uniformemente distribuído



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa viga é uma vez hiperestática. Para montar a sua estrutura isostática fundamental, podemos retirar a vinculação correspondente ao deslocamento vertical no apoio B, obtendo, assim, os casos (0) e (1) da Figura 2.13.

Figura 2.13 | Casos (0) e (1)



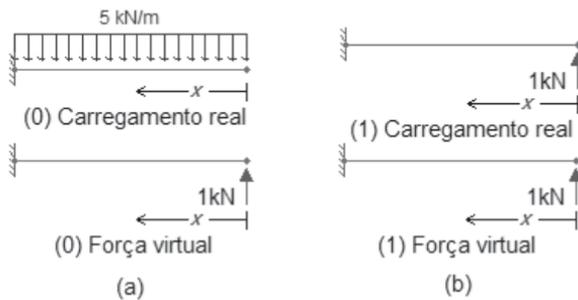
Fonte: elaborada pelo autor.

Desta forma, temos a seguinte equação de compatibilidade:

$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot B_y \Rightarrow B_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

A determinação dos deslocamentos será feita aplicando o PTV duas vezes, considerando os carregamentos reais dos casos (0) e (1) apresentados na Figura 2.13, e admitindo que o momento que traciona a fibra de baixo da viga é positivo. A Figura 2.14a representa o PTV do caso (0), com o carregamento real e a força unitária virtual aplicada em B na direção do deslocamento  $\delta_{10}$  (vertical).

Figura 2.14 | (a) Carregamento real e força virtual do caso (0); (b) Carregamento real e força virtual do caso (1)



Fonte: elaborada pelo autor.

a) Determinação de  $\delta_{10}$

$$M = -5 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -2,5 \cdot x^2 \qquad M' = x$$

$$1 \cdot \delta_{10} = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^{10} x \cdot \frac{(-2,5 \cdot x^2) \cdot dx}{E \cdot I} = -\frac{2,5}{E \cdot I} \int_0^{10} x^3 \cdot dx = -\frac{2,5 \cdot 10^4}{4 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{10} = -\frac{6250}{E \cdot I} \quad \text{para baixo [m]}$$

b) Determinação de  $\delta_{11}$

Já a Figura 2.14b representa o PTV do caso (1), com o carregamento real deste caso e a força unitária virtual aplicada em B na direção do deslocamento  $\delta_{11}$  (vertical).

$$M = M' = x$$

$$1 \cdot \delta_{11} = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^{10} x \cdot \frac{x \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_{11} = \frac{10^3}{3 \cdot E \cdot I} \text{ para cima [m/kN]}$$

Assim, determinamos as quatro reações de apoio, adotando giro anti-horário positivo:

$$B_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-\frac{6250}{E \cdot I}\right)}{\frac{10^3}{3 \cdot E \cdot I}} = \frac{6250}{E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{10^3} = 18,75 \text{ kN para cima}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

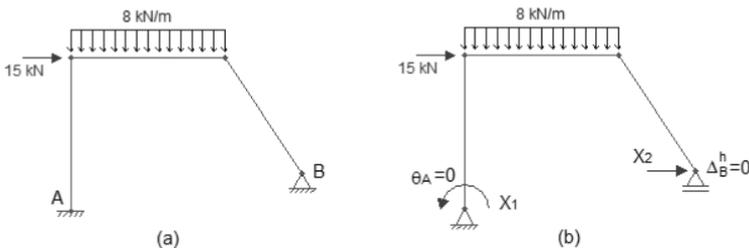
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} + 18,75 \cdot 10 = 0 \Rightarrow M_A = 62,5 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 \cdot 10 + 18,75 = 0 \Rightarrow A_y = 31,25 \text{ kN para cima}$$

### Método das forças: pórticos

O método das forças também pode ser empregado para resolver pórticos hiperestáticos, como o apresentado na Figura 2.15a. Note que, por se tratar de um pórtico duas vezes hiperestático, foram retiradas duas vinculações (momento em A e reação horizontal em B) para encontrar a sua estrutura isostática fundamental, representada na Figura 2.15b. Essas duas vinculações retiradas são duas incógnitas do nosso problema, e são denominadas de hiperestáticos. Utilizaremos a nomenclatura  $X_i$  para indicar os hiperestáticos ( $X_1 = M_A$  e  $X_2 = B_x$ ).

Figura 2.15 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Estrutura isostática fundamental

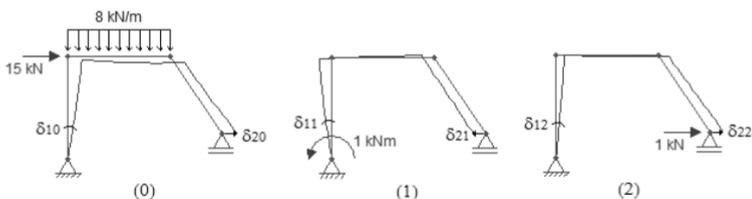


Fonte: elaborada pelo autor.

Como foram retiradas duas vinculações, a estrutura isostática fundamental será obtida pela superposição de três casos básicos:

caso (0), correspondente ao carregamento original; caso (1), correspondente ao momento unitário aplicado no ponto do hiperestático  $X_1$ ; caso (2), correspondente à força unitária aplicada no ponto do hiperestático  $X_2$ . Esses três casos são apresentados na Figura 2.16. O número de casos básicos sempre será igual ao grau de hiperestaticidade mais um.

Figura 2.16 | Casos (0), (1) e (2)



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, teremos duas equações de compatibilidade, resultando em um sistema de duas equações e duas incógnitas ( $X_1$  e  $X_2$ ):

$$\theta_A = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2$$

$$\Delta_B^h = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2$$

A rotação  $\delta_{10}$  e o deslocamento  $\delta_{20}$  são denominados termos de carga. Podemos definir um termo de carga como:

$\delta_{i0}$ : deslocamento ou rotação na direção do vínculo associado ao hiperestático  $X_i$ , para o carregamento do caso (0), que corresponde ao carregamento original.

Já as rotações  $\delta_{11}$  e  $\delta_{12}$  e os deslocamentos  $\delta_{21}$  e  $\delta_{22}$  são denominados coeficientes de flexibilidade, e são definidos como:

$\delta_{ij}$ : deslocamento ou rotação na direção do vínculo associado ao hiperestático  $X_i$ , para o carregamento do caso (j).

Para determinar cada um dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade, devemos aplicar o PTV uma vez, o que, neste caso, resulta em aplicar o PTV seis vezes:

- $\delta_{10}$ : aplicar um momento unitário na direção de  $X_1$ , para o carregamento do caso (0);

- $\delta_{20}$ : aplicar uma força unitária na direção de  $X_2$ , para o carregamento do caso (0);

- $\delta_{11}$ : aplicar um momento unitário na direção de  $X_1$ , para o carregamento do caso (1);
- $\delta_{12}$ : aplicar um momento unitário na direção de  $X_1$ , para o carregamento do caso (2);
- $\delta_{21}$ : aplicar uma força unitária na direção de  $X_2$ , para o carregamento do caso (1);
- $\delta_{22}$ : aplicar uma força unitária na direção de  $X_2$ , para o carregamento do caso (2).

Determinados os termos de carga e os coeficientes de flexibilidade, basta resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas para determinar os hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ , que, no caso do pórtico da Figura 2.15, correspondem às reações de apoio  $M_A$  e  $B_x$ , respectivamente. As outras três reações de apoio ( $A_x$ ,  $A_y$  e  $B_y$ ) são encontradas através das equações de equilíbrio.



### Assimile

A resolução de estruturas hiperestáticas pelo método das forças consiste nos seguintes passos:

- Retirar o número de vinculações correspondente ao grau de hiperestaticidade da estrutura, definindo os hiperestáticos  $X_i$ .
- Montar os casos básicos. A quantidade de casos básicos é igual ao grau de hiperestaticidade mais um.
- Escrever as equações de compatibilidade.
- Aplicar o PTV quantas vezes forem necessárias para determinar os termos de carga  $\delta_{i0}$  e os coeficientes de flexibilidade  $\delta_{ij}$ .
- Encontrar os hiperestáticos  $X_i$  através das equações de compatibilidade.
- Encontrar as demais reações de apoio através das equações de equilíbrio.

Como proceder quando uma estrutura hiperestática está submetida a variações de temperatura, defeitos de fabricação ou recalques de apoio? A resposta é simples: essas situações devem ser consideradas no caso (0), junto ao carregamento original da estrutura. Assim, elas serão consideradas apenas na determinação dos termos de carga  $\delta_{i0}$ .



O Teorema de Maxwell (Lei de Betti) garante que  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ . Isso reduz a quantidade de cálculo que precisamos fazer no método das forças. No caso do pórtico anterior, temos  $\delta_{12} = \delta_{21}$ . Aprofunde seus conhecimentos no Capítulo 10, do livro *Fundamentos da análise estrutural*, disponível na biblioteca virtual.

LEET, Kenneth M.; UANG, Chia-Ming; GILBERT, Anne M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

### Método das forças: diagramas

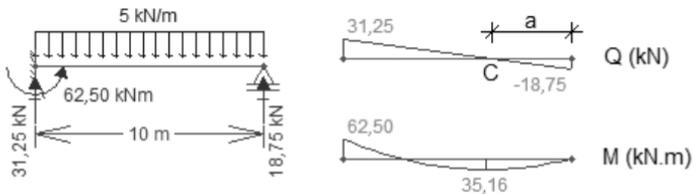
Uma vez determinadas as reações de apoio de uma estrutura hiperestática, é possível traçar os diagramas de esforços solicitantes da mesma forma como é feito para uma estrutura isostática.



### Exemplificando

Tomando como exemplo a viga da Figura 2.12, após a determinação de suas reações de apoio, basta traçar os diagramas de cortante e momento fletor, conforme a Figura 2.17. O diagrama de esforço normal não foi traçado, visto que não existe nenhuma força horizontal atuando na viga, ou seja, esse diagrama é nulo.

Figura 2.17 | Diagramas de esforço cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

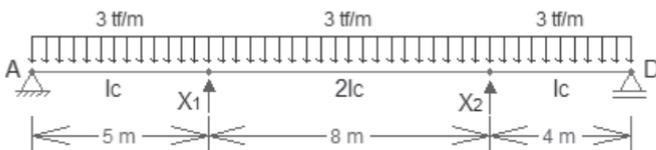
$$a = \frac{18,75}{5} = 3,75m$$

$$M_c = 18,75 \cdot 3,75 - 5 \cdot \frac{3,75^2}{2} = 35,16kN.m \text{ tração em baixo}$$

## Sem medo de errar

Agora que você conhece o método das forças, já tem todas as condições necessárias para continuar a sua busca pela vaga de professor da disciplina de *Estruturas hiperestáticas*. O seu segundo desafio consiste em obter o diagrama de momentos fletores para a viga da Figura 2.9. Como trata-se de uma viga duas vezes hiperestática, devemos retirar dois vínculos para obter a estrutura isostática fundamental, conforme a Figura 2.18.

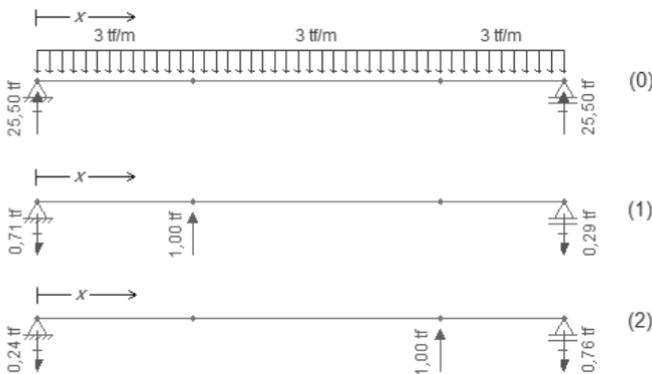
Figura 2.18 | Estrutura isostática fundamental



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2.19 representa os casos (0), (1) e (2), com suas respectivas reações de apoio.

Figura 2.19 | Casos (0), (1) e (2)



Fonte: elaborada pelo autor.

As duas equações de compatibilidade e o sistema de duas equações e duas incógnitas são:

$$\Delta_B^v = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2$$

$$\Delta_C^v = 0 \Rightarrow 0 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2$$

Determinam-se, então, as equações de momento fletor para cada um dos casos da Figura 2.19, adotando a convenção de momento anti-horário positivo.

Para o caso (0):

$$\text{- para } 0 \leq x \leq 17: M_0 = -25,5 \cdot x + 3 \cdot \frac{x^2}{2} = 1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x$$

Para o caso (1):

$$\text{- para } 0 \leq x \leq 5: M_1 = 0,71 \cdot x$$

$$\text{- para } 5 \leq x \leq 17: M_1 = 0,71 \cdot x - 1 \cdot (x - 5) = 5 - 0,29 \cdot x$$

Para o caso (2):

$$\text{- para } 0 \leq x \leq 13: M_2 = 0,24 \cdot x$$

$$\text{- para } 13 \leq x \leq 17: M_2 = 0,24 \cdot x - 1 \cdot (x - 13) = 13 - 0,76 \cdot x$$

Aplicando o PTV para determinar os termos de carga e coeficientes de flexibilidade:

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_0 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,71 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} + \int_5^{13} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_C} + \\ &+ \int_{13}^{17} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} = \frac{-1695,21}{E \cdot I_C} [m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{20} &= \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_0 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,24 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_C} + \\ &+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(1,5 \cdot x^2 - 25,5 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} = \frac{-1409,31}{E \cdot I_C} [m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_1 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,71 \cdot x \cdot \frac{0,71 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_C} + \int_5^{13} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_C} + \\ &+ \int_{13}^{17} (5 - 0,29 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} = \frac{47,79}{E \cdot I_C} [m/ff] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,71 \cdot x \cdot \frac{0,24 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_C} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_C} + \\ &+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(5 - 0,29 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_C} = \frac{31,61}{E \cdot I_C} [m/ff] \end{aligned}$$

$$\delta_{21} = \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_1 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^L M_1 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \delta_{12} = \frac{31,61}{E \cdot I_c} [m/tf]$$

$$\delta_{22} = \int_0^L M_2 \cdot \frac{M_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \int_0^5 0,24 \cdot x \cdot \frac{0,24 \cdot x \cdot dx}{E \cdot I_c} + \int_5^{13} 0,24 \cdot x \cdot \frac{0,24 \cdot x \cdot dx}{E \cdot 2 \cdot I_c} +$$

$$+ \int_{13}^{17} (13 - 0,76 \cdot x) \cdot \frac{(13 - 0,76 \cdot x) \cdot dx}{E \cdot I_c} = \frac{35,61}{E \cdot I_c} [m/tf]$$

Resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, o termo  $E \cdot I_c$  é cancelado, e encontram-se os valores dos dois hiperestáticos. Posteriormente, através das equações de equilíbrio, determinam-se as três reações de apoio restantes. O último passo consiste em traçar os diagramas dos esforços solicitantes, conforme a Figura 2.20.

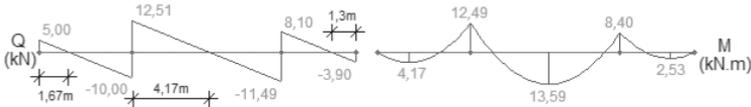
$$X_1 = B_y = 22,51tf \quad X_2 = C_y = 19,59tf$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -3 \cdot 17^2/2 + 22,51 \cdot 5 + 19,59 \cdot 13 + D_y \cdot 17 = 0 \Rightarrow D_y = 3,90tf$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3 \cdot 17 + A_y + 22,51 + 19,69 + 3,9 = 0 \Rightarrow A_y = 5tf$$

Figura 2.20 | Diagramas de esforço cortante e momento fletor



Fonte: elaborada pelo autor.

## Avançando na prática

### Uso da tabela da integral do produto de duas funções

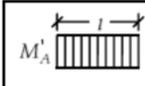
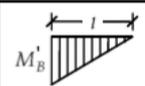
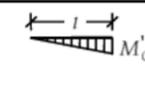
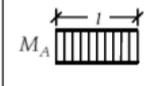
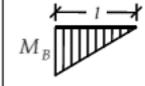
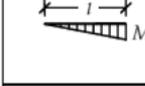
#### Descrição da situação-problema

Quando a aplicação do PTV envolve muitas integrações, podemos empregar um procedimento com o uso de uma tabela que apresenta o resultado da integral do produto de duas funções. Esse procedimento

facilita a resolução de estruturas hiperestáticas pelo método das forças. Para exemplificar, vamos utilizar a tabela da Figura 2.21 para determinar o deslocamento  $\delta_{11}$  da viga da Figura 2.12, que já foi determinado utilizando integrais.

### Resolução da situação-problema

Figura 2.21 | Integral do produto de duas funções  $\int_0^L M' \cdot M \cdot dx$

			
	$M'_A M_A l$	$\frac{1}{2} M'_B M_A l$	$\frac{1}{2} M'_C M_A l$
	$\frac{1}{2} M'_A M_B l$	$\frac{1}{3} M'_B M_B l$	$\frac{1}{6} M'_C M_B l$
	$\frac{1}{2} M'_A M_C l$	$\frac{1}{6} M'_B M_C l$	$\frac{1}{3} M'_C M_C l$
	$\frac{2}{3} M'_A M_D l$	$\frac{1}{3} M'_B M_D l$	$\frac{1}{3} M'_C M_D l$

Fonte: adaptado de Martha (2010).

Para encontrar o deslocamento  $\delta_{11}$ , basta determinar os diagramas de momentos fletores da viga para o caso (1), apresentado na Figura 2.22.

Figura 2.22 | Diagrama de momento fletor do caso (1) (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.

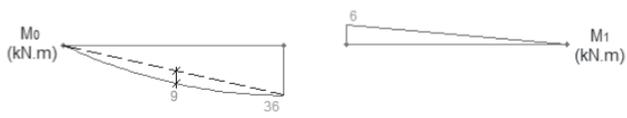
O uso da tabela consiste em combinar o diagrama do carregamento real com o diagrama do carregamento virtual. Como no caso da determinação de  $\delta_{11}$  o carregamento real é igual ao carregamento virtual, conforme a Figura 2.14b, temos  $M' = M$ , e basta combinar o diagrama triangular da Figura 2.22 com outro diagrama triangular igual (na tabela,  $M_B = M'_B = 10$  e  $L = 10$ ). Assim, temos:

$$1 \cdot \delta_{11} = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^L M' \cdot M \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow \delta_{11} = \frac{10^3}{3 \cdot E \cdot I} \text{ para cima [m/kN]}$$

## Faça valer a pena

**1.** Uma viga com seis metros de comprimento e  $E \cdot I = 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$  possui os diagramas de momentos fletores apresentados na figura a seguir para os casos (0) e (1).

Figura | Diagramas de momentos fletores dos caso (0) e (1)



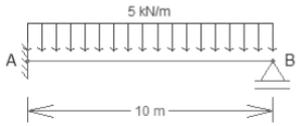
Fonte: elaborada pelo autor.

Determine o valor do termo de carga  $\delta_{10}$  desta viga com o uso da Figura 2.21 e assinale a alternativa correta.

- a) -0,00324 m.
- b) 0,00648 m.
- c) -0,01944 m.
- d) 0,00324 m.
- e) 0,01944 m.

**2.** A viga da figura a seguir possui  $E \cdot I = 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ , e seu apoio A apresentou um recalque de apoio vertical de 15 mm ( $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ).

Figura | Viga com recalque de apoio



Fonte: elaborada pelo autor.

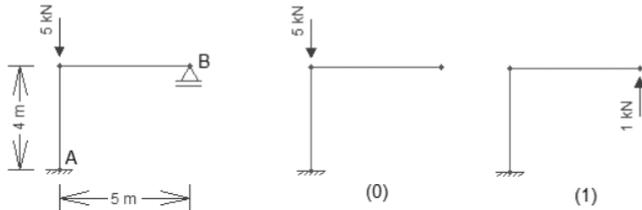
Determine a reação de apoio vertical em B ( $\ll u2s2\_Eqn116.eps \gg$ ) e assinale a alternativa correta.

- a) 28,125 kN para cima.
- b) 18,75 kN para cima.

- c) 28,125 kN para baixo.
- d) 18,75 kN para baixo.
- e) 23,27 kN para cima.

**3.** Considere o pórtico uma vez hiperestático e seus casos (0) e (1) obtidos pela retirada da vinculação correspondente à reação vertical em B, conforme a figura a seguir. Todas as barras possuem  $E \cdot I = 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ .

Figura | Pórtico hiperestático e casos (0) e (1)



Fonte: elaborada pelo autor.

Determine o valor do termo de carga  $\delta_{10}$  deste pórtico e assinale a alternativa correta.

- a) 5 m.
- b) 0.
- c) 0,05 m.
- d) 0,1 m.
- e) 0,4 m.

## Seção 2.3

### Método dos deslocamentos

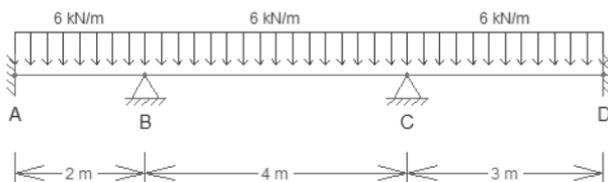
#### Diálogo aberto

Caro aluno, seja bem-vindo à terceira e última seção da Unidade 2. Na seção anterior, estudamos um método de resolução de estruturas hiperestáticas, o método das forças, porém este não é o único método que podemos utilizar para resolver esse tipo de estrutura. Outro método muito utilizado é o método dos deslocamentos, que estudaremos nesta seção.

O método das forças funciona muito bem quando desejamos resolver estruturas hiperestáticas com grau de hiperestaticidade pequeno. Quando estamos trabalhando com estruturas com grau de hiperestaticidade maior, esse método fica muito trabalhoso. São nessas situações que o método dos deslocamentos passa a ser mais vantajoso, principalmente quando desejamos implementar esse método em um programa de computador para resolver a estrutura mais rapidamente. Essa vantagem se dá pelo fato de o método dos deslocamentos trabalhar com soluções fundamentais já conhecidas, como iremos ver nesta seção, facilitando a programação computacional desse método. Por esse motivo, o método dos deslocamentos é a base de muitos programas computacionais que realizam a análise de diversos tipos de estruturas.

Sabendo aplicar esse método, você será capaz de cumprir o seu último desafio em busca da sua vaga de professor da disciplina de Estruturas hiperestáticas. Para tanto, você deverá determinar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.23, sabendo que  $E \cdot I = 10^4 \text{ kN.m}^2$ .

Figura 2.23 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Não deixe esta vaga escapar. Então, mãos à obra!

## Não pode faltar

### Definição do método dos deslocamentos

Tanto o método das forças quanto o método dos deslocamentos respeitam as condições de equilíbrio, as condições de compatibilidade e as que regem o comportamento dos materiais (leis constitutivas dos materiais). Porém, no caso geral, enquanto que no método das forças temos as forças (hiperestáticas) como incógnitas, que são determinadas pela resolução de um sistema de equações de compatibilidade, no método dos deslocamentos temos os deslocamentos como incógnitas, que são determinados pela resolução de um sistema de equações de equilíbrio. Dessa maneira, podemos dizer que o método dos deslocamentos é um método dual do método das forças.

No método dos deslocamentos, também utilizaremos a superposição de casos básicos, que ao serem somados, resultam na estrutura original. No método das forças, é feita a superposição de uma série de casos básicos que satisfazem as condições de equilíbrio, e as condições de compatibilidade são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de compatibilidade. Já no método dos deslocamentos, é feita a superposição de uma série de casos básicos que respeitam as condições de compatibilidade, e as condições de equilíbrio são respeitadas escrevendo-se uma série de equações de equilíbrio.

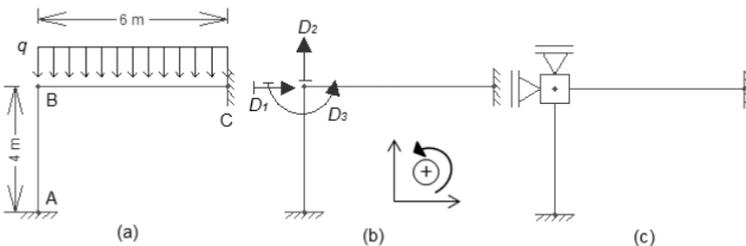


Método das forças: as incógnitas são forças, cujos deslocamentos associados recuperam as condições de compatibilidade.

Método dos deslocamentos: as incógnitas são deslocamentos, cujas forças associadas recuperam as condições de equilíbrio.

A primeira etapa do método dos deslocamentos consiste em identificar quais são os deslocamentos desconhecidos em cada nó da estrutura. No caso da Figura 2.24a, como os nós A e C são engastes (rotação e deslocamentos vertical e horizontal impedidos), os únicos deslocamentos desconhecidos são os deslocamentos vertical, horizontal e a rotação no nó B. Esses deslocamentos desconhecidos, que chamaremos de deslocabilidades, são incógnitas do nosso problema, e estão desenhados na Figura 2.24b, segundo a convenção de sinais positiva indicada. Essa será a convenção de sinais que adotaremos em todo o método dos deslocamentos.

Figura 2.24 | (a) Pórtico hiperestático; (b) Deslocabilidades; (c) Sistema hipergeométrico

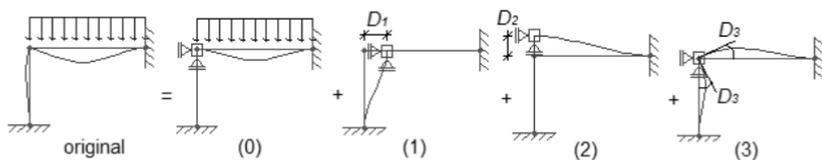


Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, devemos fazer a superposição de casos básicos, em que cada um desses casos são soluções cinematicamente determinadas, ou seja, são configurações deformadas conhecidas. Assim, cada um dos casos básicos isola o efeito que o carregamento e que cada uma das deslocabilidades provoca na estrutura. O ponto de partida para a determinação dos casos básicos é a definição do sistema hipergeométrico, representado na Figura 2.24c, que nada mais é do que a estrutura original com todos os deslocamentos nodais impedidos através da adição de apoios fictícios. A superposição dos casos básicos

está representada na Figura 2.25, na qual é possível notar que a soma da configuração deformada de cada caso resulta na configuração deformada da estrutura original.

Figura 2.25 | Superposição dos casos básicos

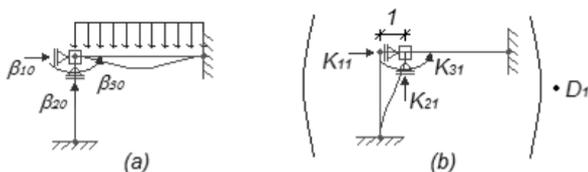


Fonte: elaborada pelo autor.

É possível notar que o caso (0) isola o efeito do carregamento em cada barra da estrutura, considerando a atuação desse carregamento no sistema hipergeométrico. Já os casos (1), (2) e (3) isolam o efeito de cada uma das deslocabilidades, liberando apenas um dos deslocamentos desconhecidos e mantendo todos os demais impedidos.

A seguir, deve-se resolver cada um dos casos básicos. A resolução do caso (0) consiste em determinar as reações nos apoios fictícios ( $\beta_{i0}$ ) provocadas pelos carregamentos, representadas na Figura 2.26a. A resolução dos demais casos consiste em determinar as forças ou os momentos que devem ser aplicados nos apoios fictícios ( $K_{ij}$ ) para manter a configuração deformada quando se aplica um deslocamento unitário na direção e no sentido da deslocabilidade liberada. Como estamos trabalhando com materiais elástico-lineares, podemos multiplicar cada valor de  $K_{ij}$  pela deslocabilidade correspondente ao caso analisado, e assim encontrar essas forças ou momentos nos apoios fictícios, quando essa deslocabilidade é aplicada, de maneira análoga, ao procedimento adotado no método das forças. Na Figura 2.26b, estão representadas as forças  $K_{ij}$  do caso (1).

Figura 2.26 | (a) Reações nos apoios fictícios para o caso (0); (b) Forças nos apoios fictícios para o caso (1)



Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, deve-se restabelecer as condições de equilíbrio. Como o nó que possui as deslocabilidades deve estar em equilíbrio, a resultante de forças e de momentos nesse nó deve ser nula. Assim, resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas a seguir, determinam-se os valores das deslocabilidades  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 + K_{13} \cdot D_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{30} + K_{31} \cdot D_1 + K_{32} \cdot D_2 + K_{33} \cdot D_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \beta_{30} + K_{31} \cdot D_1 + K_{32} \cdot D_2 + K_{33} \cdot D_3 = 0$$

### Método dos deslocamentos: vigas

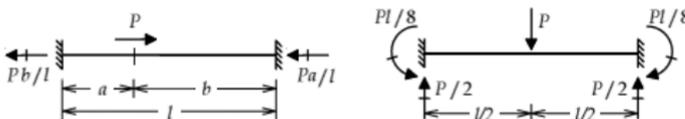
Agora que já sabemos quais são as etapas do método dos deslocamentos, vamos analisar com mais detalhes o seu emprego no caso de vigas hiperestáticas. Porém, para a utilização desse método, temos que determinar os valores das reações de apoio fictícias ( $\beta_{i0}$  e  $K_{ij}$ ) para diversas situações.

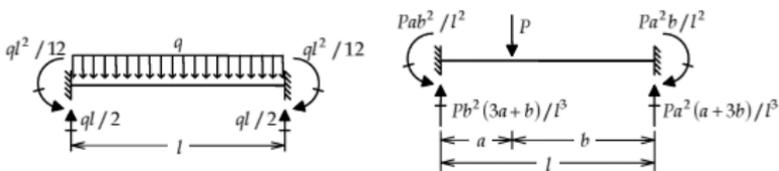
As reações nos apoios fictícios do caso (0) são chamadas de termos de carga  $\beta_{i0}$ , e são definidas como:

$\beta_{i0}$ : reação de apoio fictícia associada à deslocabilidade  $D_i$ , quando o carregamento original atua isoladamente no sistema hipergeométrico.

Essas reações de apoio de cada barra podem ser calculadas utilizando-se, por exemplo, o método das forças, supondo que o carregamento atua em uma barra engastada em ambas as extremidades, ou seja, essas são as reações de apoio das situações de engastamento perfeito, e seus valores são tabelados para cada tipo de carregamento, ou seja, são soluções já conhecidas. A Figura 2.27 apresenta esses valores para alguns tipos de carregamentos.

Figura 2.27 | Reações de engastamento perfeito para algumas situações de carregamentos





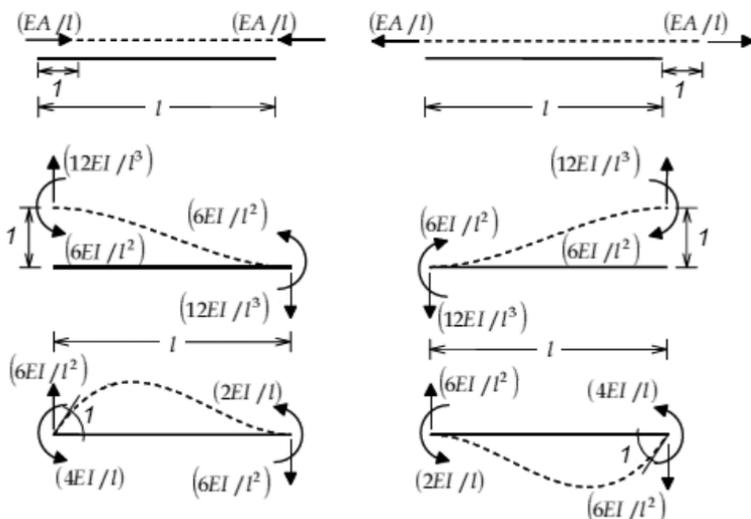
Fonte: adaptada de Marthá (2010, p. 292-293).

Já as forças ou momentos que aparecem nos apoios fictícios dos demais casos são chamadas de coeficientes de rigidez globais  $K_{ij}$ , e são definidas como:

$K_{ij}$ : força ou momento na direção da deslocabilidade  $D_i$ , que surge quando apenas um deslocamento  $D_j = 1$  é aplicado.

Os valores dos coeficientes de rigidez globais são obtidos somando-se os coeficientes de rigidez locais das barras adjacentes a um mesmo nó. A unidade do coeficiente de rigidez é dada pela unidade da força ou momento, dividida pela unidade da deslocabilidade unitária aplicada. Novamente, os valores dos coeficientes de rigidez locais são soluções já conhecidas, e seus valores são tabelados para cada tipo de deslocamento, conforme apresentado na Figura 2.28 para algumas situações.

Figura 2.28 | Coeficientes de rigidez locais para algumas situações de deslocamentos

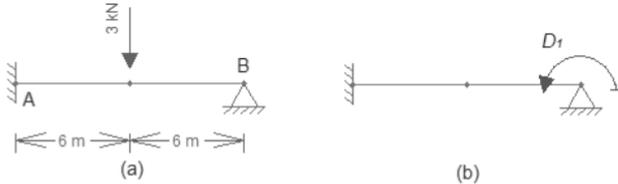


Fonte: adaptada de Marthá (2010, p. 276-278).



Determinar a rotação do apoio B da viga da Figura 2.29a, que possui  $E \cdot I = 10^5 \text{ kN.m}^2$ .

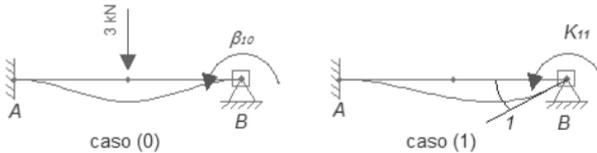
Figura 2.29 | (a) Viga; (b) Deslocabilidade



Fonte: elaborada pelo autor.

Como o único deslocamento nodal desconhecido é a rotação do apoio B, temos apenas uma deslocabilidade  $D_1$ , conforme a Figura 2.29b. Assim, teremos apenas os casos (0) e (1), representados na Figura 2.30.

Figura 2.30 | Casos (0) e (1)



Fonte: elaborada pelo autor.

Pela Figura 2.27 podemos determinar o valor de  $\beta_{10}$ , que é a reação de momento no apoio direito ( $M_{BA}^0$ ) de uma viga bi-engastada submetida a uma carga concentrada no meio do vão, além do valor da reação e momento no apoio esquerdo ( $M_{AB}^0$ ):

$$M_{AB}^0 = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{3 \cdot 12}{8} = 4,5 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{P \cdot L}{8} = -4,5 \text{ kN.m} = \beta_{10}$$

Pela Figura 2.28 encontramos o valor de  $K_{11}$ , que é o momento no apoio direito ( $M_{BA}^1$ ) de uma viga engastada no lado oposto, submetida a uma rotação unitária, e também encontramos o momento no apoio esquerdo ( $M_{AB}^1$ ):

$$M_{AB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^5}{12} = 1,67 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BA}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^5}{12} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad} = K_{11}$$

Montando a equação de equilíbrio de momentos do nó B, e resolvendo para  $D_1$ :

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0 \Rightarrow -4,5 + 3,33 \cdot 10^4 \cdot D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Como  $D_1$  é positivo, isso significa que o giro tem o mesmo sentido do giro unitário aplicado em B no caso (1), ou seja, o giro  $D_1$  é anti-horário.

### Método dos deslocamentos: pórticos

Em boa parte dos problemas envolvendo vigas no método dos deslocamentos, as únicas deslocabilidades são as rotações em alguns apoios da viga. Dessa forma, todos os termos de carga e coeficientes de rigidez são reações fictícias de momento. Já no caso de pórticos, é muito comum termos também deslocabilidades correspondentes a deslocamentos horizontais e verticais. Assim, os termos de carga e os coeficientes de rigidez podem ser reações fictícias de momento, força axial à barra ou força transversal à barra.

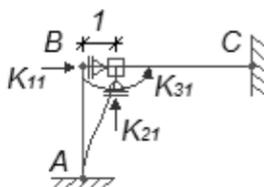
Os termos de carga e coeficientes de rigidez correspondentes a forças axiais e transversais também estão apresentados nas Figuras 2.26 e 2.27, portanto o processo de resolução de pórticos hiperestáticos pelo método dos deslocamentos é exatamente o mesmo apresentado para o caso de vigas.



#### Exemplificando

Para exemplificar, são determinados a seguir os coeficientes de rigidez do caso (1) do pórtico da Figura 2.24a. Pela Figura 2.31 nota-se que, ao aplicar um deslocamento unitário horizontal no nó B, a barra AB (vertical) apresenta um deslocamento transversal unitário, surgindo forças transversais e momentos nas suas extremidades para manter a configuração deformada da barra, mas sem o surgimento de nenhuma força axial. Já no caso da barra BC (horizontal), o deslocamento horizontal unitário em B provoca um deslocamento axial dessa barra, surgindo forças axiais em suas extremidades, mas sem o surgimento de forças transversais e momentos.

Figura 2.31 | Coeficientes de rigidez do caso (1)



Fonte: elaborada pelo autor.

Esses momentos e forças que surgem nas extremidades das barras são os coeficientes de rigidez locais, e são obtidos através da Figura 2.28, utilizando o caso de um deslocamento transversal unitário para a barra AB e o caso de um deslocamento axial unitário para a barra BC. Para encontrar os coeficientes de rigidez globais do nó B, basta somar os coeficientes de rigidez locais de mesma direção que ocorrem no nó B nas extremidades das duas barras:

$$K_{11} = \frac{E \cdot A}{6} + \frac{12 \cdot E \cdot I}{4^3} \quad K_{21} = 0 + 0 \quad K_{31} = 0 + \frac{6 \cdot E \cdot I}{4^2}$$

Para encontrar os termos de carga e os coeficientes de rigidez dos demais casos, deve-se proceder de maneira análoga.



**Pesquise mais**

O livro *Análise de estruturas*, de Luiz Fernando Martha, que consta nas referências desta seção, demonstra os procedimentos de cálculo para definir os valores dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez apresentados nas Figuras 2.26 e 2.27, além de outras situações de carregamentos e deslocamentos. Consulte esse material para aprofundar os seus conhecimentos a respeito do método dos deslocamentos.

### Método dos deslocamentos: diagramas

Uma vez determinados os deslocamentos nodais (deslocabilidades), é possível encontrar os momentos nas extremidades de cada barra da estrutura original utilizando-se a superposição:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2 + \dots + M_n \cdot D_n$$

Em que:

$M$ : momento na extremidade de uma barra para a estrutura original.

$M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ : momentos na extremidade de uma barra para os casos básicos

$D_1, D_2, \dots, D_n$ : deslocabilidades já encontradas.

Com os momentos nas extremidades de todas as barras da estrutura original, é possível traçar o diagrama de momentos fletores. Essa mesma superposição também é válida para traçar os diagramas de esforço normal e esforço cortante.



### Exemplificando

Para traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.29a, basta fazer a superposição dos momentos nas extremidades da viga para os casos (0) e (1):

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + M_{AB}^1 \cdot D_1 = 4,5 + 1,67 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} = 6,75 \text{ kN.m}$$

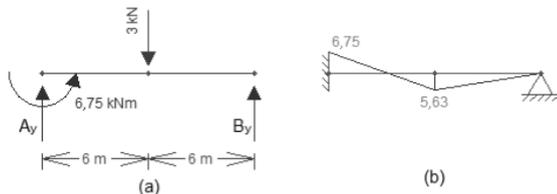
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + M_{BA}^1 \cdot D_1 = -4,5 + 3,33 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} = 0 \text{ kN.m}$$

As reações de apoio verticais em A e B são determinadas pelo equilíbrio das forças verticais e dos momentos fletores nas extremidades da viga, conforme a Figura 2.32a. Assim, é possível traçar o diagrama de momentos fletores da Figura 2.32b.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6,75 - 3 \cdot 6 + B_y \cdot 12 = 0 \Rightarrow B_y = 0,94 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 3 + 0,94 = 0 \Rightarrow A_y = 2,06 \text{ kN}$$

Figura 2.32 | (a) Equilíbrio da viga; (b) Diagrama de momentos fletores (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.



Os passos para a utilização do método dos deslocamentos são:

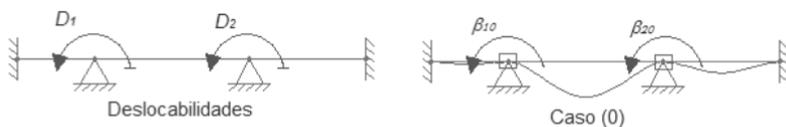
- Determinar as deslocabilidades de cada nó, no sentido positivo.
- Definir o sistema hipergeométrico, resolver o caso (0) e encontrar cada  $\beta_{j0}$ .
- Resolver os demais casos básicos, aplicando deslocamentos unitários isolados para encontrar cada  $K_{ij}$ .
- Montar o sistema de equações de equilíbrio, resolver e determinar cada  $D_i$ .
- Determinar os esforços na extremidades das barras e traçar os diagramas.

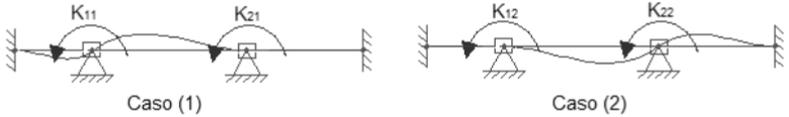
### Sem medo de errar

Com os conhecimentos adquiridos nesta seção, você já tem condições de resolver o último desafio proposto pelo seu coordenador. Na busca pela tão sonhada vaga de professor, deve demonstrar o seu domínio do conteúdo da disciplina de *Estruturas hiperestáticas*, obtendo o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 2.23, utilizando o método dos deslocamentos.

Essa viga possui duas deslocabilidades. Assim, são necessários três casos básicos, (0), (1) e (2), para resolver o problema. As deslocabilidades e os casos básicos são apresentados na Figura 2.33, com a representação dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez no sentido positivo.

Figura 2.33 | Deslocabilidades e três casos básicos





Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar os termos de carga  $\beta_{10}$  e  $\beta_{20}$ , devemos determinar os momentos de engastamento perfeito nas extremidades das barras AB, BC e CD, para o caso (0), utilizando o caso de carregamento uniformemente distribuído da Figura 2.27:

$$M_{AB}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 2^2}{12} = 2 \text{ kN.m} \quad M_{BA}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -2 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 4^2}{12} = 8 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -8 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD}^0 = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{6 \cdot 3^2}{12} = 4,5 \text{ kN.m} \quad M_{DC}^0 = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -4,5 \text{ kN.m}$$

O termo de carga  $\beta_{10}$  é a soma dos momentos de engastamento perfeito na extremidade B da barra AB e na extremidade B da barra BC. Já  $\beta_{20}$  é a soma dos momentos de engastamento perfeito na extremidade C da barra BC e na extremidade C da barra CD:

$$\beta_{10} = M_{BA}^0 + M_{BC}^0 = -2 + 8 = 6 \text{ kN.m} \quad \beta_{20} = M_{CB}^0 + M_{CD}^0 = -8 + 4,5 = -3,5 \text{ kN.m}$$

Para os casos (1) e (2), devemos usar a situação de giro unitário da Figura 2.28 para encontrar os momentos nas extremidades das barras AB, BC e CD. De maneira análoga à determinação dos termos de carga,  $K_{11}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{12}$  e  $K_{22}$  são obtidos pela soma dos momentos nas extremidades das barras adjacentes ao nó em que o coeficiente de rigidez está atuando. Lembrando que, neste caso,  $E \cdot I = 10^4 \text{ kN.m}^2$ .

- Para o caso (1):

$$M_{AB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{2} = 10^4 \text{ kN.m / rad} \quad M_{BA}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{2} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BC}^1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{4} = 10^4 \text{ kN.m / rad} \quad M_{CB}^1 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{4} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CD}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{DC}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CD}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{DC}^1 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{11} = M_{BA}^1 + M_{BC}^1 = 3 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{21} = M_{CB}^1 + M_{CD}^1 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

- Para o caso (2):

$$M_{AB}^2 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BA}^2 = 0 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{BC}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{4} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CB}^2 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{4} = 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{CD}^2 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot 10^4}{3} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$M_{DC}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{2 \cdot 10^4}{3} = 0,67 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{12} = M_{BA}^2 + M_{BC}^2 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

$$K_{22} = M_{CB}^2 + M_{CD}^2 = 2,33 \cdot 10^4 \text{ kN.m / rad}$$

Escrevendo as equações de equilíbrio de momentos dos nós B e C, e resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, temos:

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 = 0 \Rightarrow 6 + 3 \cdot 10^4 \cdot D_1 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot D_2 = 0$$

$$\beta_{20} + K_{21} \cdot D_1 + K_{22} \cdot D_2 = 0 \Rightarrow -3,5 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot D_1 + 2,33 \cdot 10^4 \cdot D_2 = 0$$

$$D_1 = -2,33 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad D_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Com as deslocabilidades determinadas, basta encontrar os momentos nas extremidades de cada barra pela superposição, e então traçar o diagrama de momentos fletores, apresentado na Figura 2.34.

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + M_{AB}^1 \cdot D_1 + M_{AB}^2 \cdot D_2 = 2 + 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0 = -0,33 \text{ kN.m giro horário}$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0 + M_{BA}^1 \cdot D_1 + M_{BA}^2 \cdot D_2 = -2 + 2 \cdot 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0 = -6,67 \text{ kN.m giro horário}$$

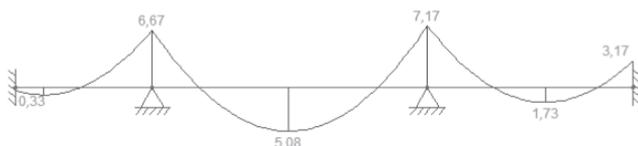
$$M_{BC} = M_{BC}^0 + M_{BC}^1 \cdot D_1 + M_{BC}^2 \cdot D_2 = 8 + 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 0,5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6,67 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + M_{CB}^1 \cdot D_1 + M_{CB}^2 \cdot D_2 = -8 + 0,5 \cdot 10^4 \cdot (-2,33 \cdot 10^{-4}) + 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -7,17 \text{ kN.m horário}$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + M_{CD}^1 \cdot D_1 + M_{CD}^2 \cdot D_2 = 4,5 + 0 + 1,33 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 7,17 \text{ kN.m anti-horário}$$

$$M_{DC} = M_{DC}^0 + M_{DC}^1 \cdot D_1 + M_{DC}^2 \cdot D_2 = -4,5 + 0 + 0,67 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -3,17 \text{ kN.m horário}$$

Figura 2.34 | Diagrama de momentos fletores (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar os valores dos momentos máximos, é necessário traçar o diagrama de esforço cortante, permitindo encontrar os pontos de cortante nula, conforme será apresentado na sequência.

## Avançando na prática

### Determinação das reações de apoio e do diagrama de esforço cortante

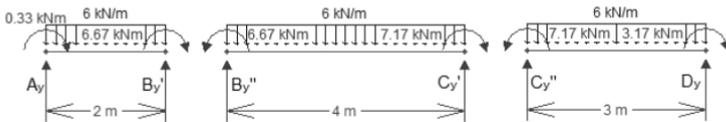
#### Descrição da situação-problema

Uma vez obtido o diagrama de momentos fletores pelo método dos deslocamentos, é preciso determinar as reações de apoio da viga para, então, traçar o diagrama de esforço cortante. Veremos como realizar esse procedimento para a viga da Figura 2.32.

#### Resolução da situação-problema

Para encontrar as reações de apoio, faremos o equilíbrio de cada trecho da barra separadamente. Na Figura 2.35, estão representados os três trechos (AB, BC e CD) da viga, com suas respectivas reações de apoio, carregamentos atuantes ao longo do trecho e momentos nas extremidades das barras, já calculados anteriormente ( $M_{AB}$ ,  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ ,  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ ,  $M_{DC}$ ). Note que a reação vertical total no apoio B é a soma das reações no apoio B dos trechos AB e BC. De maneira análoga, a reação vertical total no apoio C é a soma das reações no apoio C dos trechos BC e CD. Para o equilíbrio de momentos, adotou-se a convenção de que o momento no sentido anti-horário é positivo.

Figura 2.35 | Equilíbrio dos trechos da viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Trecho AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -0,33 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 6,67 + B_y' \cdot 2 = 0 \Rightarrow B_y' = 9,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 6 \cdot 2 + 9,5 = 0 \Rightarrow A_y = 2,5 \text{ kN}$$

Trecho BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 6,67 - 6 \cdot 4 \cdot 2 - 7,17 + C_y' \cdot 4 = 0 \Rightarrow C_y' = 12,13 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y'' - 6 \cdot 4 + 12,13 = 0 \Rightarrow B_y'' = 11,88 \text{ kN}$$

Trecho CD:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 7,17 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3,17 + D_y \cdot 3 = 0 \Rightarrow D_y = 7,67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y'' - 6 \cdot 3 + 7,67 = 0 \Rightarrow C_y'' = 10,33 \text{ kN}$$

Reações verticais totais em B e C:

$$B_y = B_y' + B_y'' = 21,38 \text{ kN} \quad C_y = C_y' + C_y'' = 22,46 \text{ kN}$$

Com as reações de apoio verticais encontradas, basta traçar o diagrama de esforço cortante, conforme a Figura 2.36. Note que desta forma é possível determinar os pontos de cortante nula, e assim encontrar os valores dos momentos fletores máximos, da mesma forma como é feito em uma viga isostática.

Figura 2.36 | Diagrama de esforço cortante (kN)

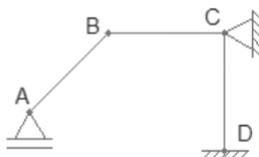


Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

**1.** Você é o responsável pelo projeto de uma indústria, e deve determinar os esforços que atuam nas barras da estrutura da figura a seguir, que será utilizada para apoiar alguns equipamentos. Para iniciar o cálculo da estrutura pelo método dos deslocamentos, deve-se determinar o número de deslocabilidades dessa estrutura.

Figura | Estrutura de uma indústria



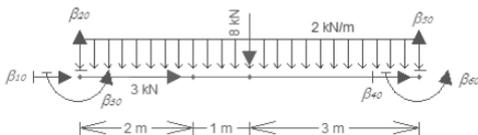
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a resposta que contém o número correto de deslocabilidades da estrutura.

- a) 1.
- b) 2.
- c) 0.
- d) 8.
- e) 6.

**2.** A barra da figura a seguir faz parte de uma estrutura hiperestática, e está submetida aos carregamentos indicados. Durante a resolução da estrutura pelo método dos deslocamentos, é necessário determinar os valores dos termos de carga dessa barra para o caso básico (0).

Figura | Barra de uma estrutura hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

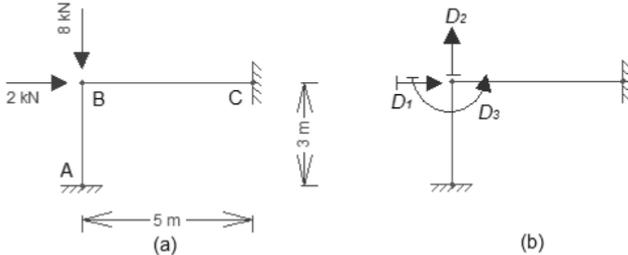
Assinale a alternativa com os valores corretos dos termos de carga  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{20}$ ,  $\beta_{30}$ ,  $\beta_{40}$ ,  $\beta_{50}$  e  $\beta_{60}$ , respectivamente.

- a) -2kN, -1 kN, 10kN.m, 10kN, 12 kN e -12 kN.m.

- b) -1kN, 10 kN, -12kN.m, -2kN, 10 kN e 12 kN.m.
- c) -2kN, 10 kN, 12kN.m, -1kN, 10 kN e -12 kN.m.
- d) 2kN, 10 kN, 12kN.m, 1kN, 10 kN e 12 kN.m.
- e) -2kN, 12 kN, 10kN.m, -1kN, 12 kN e -10 kN.m.

**3.** O pórtico da figura (a) está submetido às cargas nodais indicadas. Durante o cálculo deste pórtico, a sua equipe de projetistas determinou as deslocabilidades da estrutura conforme a figura (b). Neste momento, você foi consultado pela equipe para ajudar na determinação dos coeficientes de rigidez  $K_{11}$ ,  $K_{21}$  e  $K_{31}$ . Todas as barras possuem  $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $I = 10^{-4} \text{ m}^4$  e  $A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Figura | Pórtico



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto dos coeficientes de rigidez  $K_{11}$ ,  $K_{21}$  e  $K_{31}$ , respectivamente.

- a)  $4,44 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$ , 0 e  $6,67 \cdot 10^3 \text{ kN.m/m}$ .
- b)  $8,44 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$ , 0 e  $6,67 \cdot 10^3 \text{ kN.m/m}$ .
- c)  $4 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$ ,  $4,44 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$  e 0.
- d)  $6,67 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$ , 0 e  $8,44 \cdot 10^3 \text{ kN.m/m}$ .
- e) 0,  $4,44 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$  e  $10,67 \cdot 10^3 \text{ kN.m/m}$ .

# Referências

- ASSAN, A. E. **Resistência dos materiais**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2013. v. 2.
- HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.
- LEET, K. M.; UANG, C. M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
- LEET, Kenneth M.; UANG, Chia-Ming; GILBERT, Anne M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
- MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. Disponível em: <https://www.alis-sol.com.br/Ftool/>. Acesso em: 31 ago. 2017.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural 3: método das deformações - Processo de Cross**. 7. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.
- TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos materiais**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1972. v. 1.



# Linhas de influência: estruturas hiperestáticas

## Convite ao estudo

Caro(a) aluno(a),

Seja bem-vindo à Unidade 3 da disciplina de Estruturas Hiperestáticas! Após estudarmos alguns princípios e métodos importantes para a resolução de estruturas hiperestáticas, passaremos a estudar, nesta unidade, as linhas de influência.

Até o momento analisamos apenas estruturas submetidas às cargas estáticas, ou seja, que estão sempre no mesmo lugar, porém, você já parou para pensar em como é feito o dimensionamento de uma estrutura submetida a uma carga móvel, ou seja, uma carga que pode atuar em várias posições diferentes ao longo da vida útil da estrutura? E que tipo de estrutura é essa que está submetida à uma carga móvel? É exatamente isso que veremos nesta unidade, na qual utilizaremos as linhas de influência para determinar as reações de apoio e os esforços em estruturas submetidas às cargas móveis, como, por exemplo, os viadutos, as pontes rodoviárias, ferroviárias ou de pedestres. Ou seja, sem o conhecimento da linha de influência, você não conseguirá projetar uma ponte ou um viaduto durante a sua vida profissional, nem mesmo uma simples ponte rolante em uma indústria. Assim, fica clara a importância desse assunto para um engenheiro civil.

Iniciaremos o estudo das linhas de influência pelo caso mais simples, as vigas isostáticas. Posteriormente, passaremos para as vigas hiperestáticas e, por fim, estudaremos o traçado das envoltórias de esforços, que são de grande importância na definição dos esforços extremos atuantes na estrutura bem como empregados no dimensionamento dela.

Com os conhecimentos adquiridos nesta unidade, você será capaz de desenvolver o seu primeiro projeto no seu novo emprego. Desde que estava no curso de engenharia, você já gostava de estudar como eram feitas as grandes estruturas, e após algumas entrevistas, você foi contratado por uma empresa de construção de grande porte. No seu primeiro projeto, você foi chamado para determinar as linhas de influência de uma ponte. Essa ponte atravessa um grande lago e será construída com 3 faixas em cada sentido, em cujo tráfego passarão veículos de tamanhos e pesos diversos. Quais serão as linhas de influência se parte da estrutura for isostática? E se for hiperestática, como resolver essa questão? Além disso, você deverá entregar as representações gráficas das envoltórias de esforços para que a estrutura seja dimensionada corretamente.

Pronto para projetar a sua primeira ponte?

## Seção 3.1

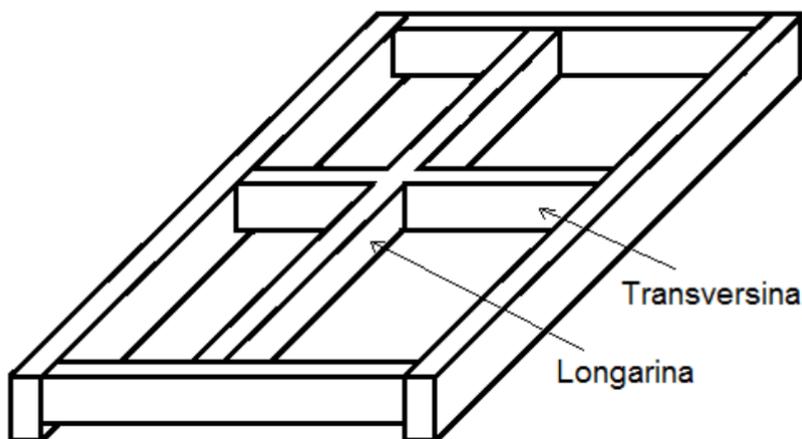
### Linhas de influência de vigas

#### Diálogo aberto

Vamos iniciar o nosso estudo de linhas de influência pela análise de vigas isostáticas, para, nas seções seguintes, passarmos ao estudo de linhas de influência em vigas hiperestáticas. O nosso primeiro passo será entender o que a linha de influência representa, para depois conseguirmos traçar as linhas de influência, o que permitirá que você comece a trabalhar no projeto da sua primeira ponte no seu novo emprego.

Para projetar a ponte, você deve analisar todos os seus elementos estruturais, ou seja, tanto as transversinas quanto as longarinas da ponte. Para exemplificar, na Figura 3.1 é apresentada a localização de uma longarina e de uma transversina de uma ponte qualquer.

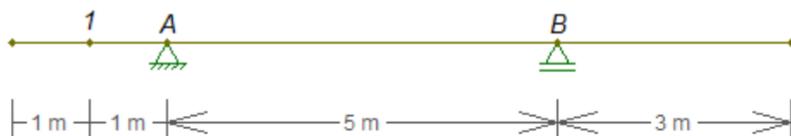
Figura 3.1 | Indicação de uma longarina e de uma transversina



Fonte: elaborada pelo autor.

O seu primeiro desafio será analisar a transversina apresentada na Figura 3.2, que é uma viga isostática, apresentando dois balanços.

Figura 3.2 | Transversina da ponte em estudo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como veremos nesta seção, para realizar o dimensionamento correto dessa transversina, é fundamental que você consiga traçar algumas linhas de influência dela. Para tanto, você deve determinar a linha de influência da reação vertical  $B_y$ , as linhas de influência de esforço cortante nas seções 1,  $B_{esq}$  e  $B_{dir}$ , e as linhas de influência de momento fletor nas seções 1 e B.

Para conseguir cumprir esse objetivo, estudaremos em detalhes as linhas de influência de reações de apoio, esforço cortante e momento fletor. Ao final da seção você perceberá que esses estudos facilitarão muito o desenvolvimento do projeto dessa ponte.

## Não pode faltar

### Definição de linha de influência

As cargas que atuam em uma estrutura podem ser classificadas em cargas permanentes ou cargas acidentais. As cargas permanentes são aquelas que atuam ao longo de toda a vida útil da estrutura, como, por exemplo, o seu peso próprio. As cargas acidentais, por sua vez, são aquelas que podem atuar ou não ao longo da vida útil da estrutura, como, por exemplo, ações de vento, sobrecargas (cargas de utilização) em edificações e cargas de veículos em pontes rodoviárias ou ferroviárias.

No estudo das estruturas, as cargas permanentes e a maioria das cargas acidentais são chamadas de cargas fixas, pois o seu ponto de atuação na estrutura é sempre o mesmo. Porém algumas cargas acidentais são chamadas de cargas móveis, uma vez que o ponto de atuação delas pode variar ao longo do tempo, como é o caso de um veículo passando sobre uma ponte.

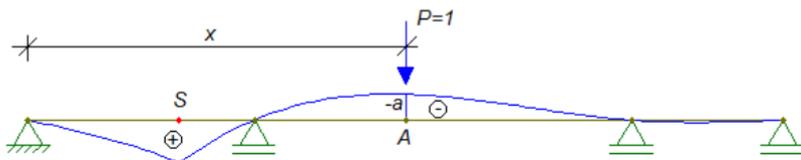
A determinação das reações de apoio e dos esforços internos em uma estrutura, provocados por cargas fixas (permanentes ou

acidentais), é feita conforme os métodos já apresentados para estruturas isostáticas ou hiperestáticas, que incluem o traçado dos diagramas dos esforços solicitantes. Dessa forma, é possível determinar quais são os maiores esforços que ocorrem na estrutura e dimensioná-la para que resista a essas solicitações.

No caso das cargas móveis, no entanto, a intensidade dos esforços varia conforme a posição da carga, o que torna inviável o método de determinação dos maiores esforços solicitantes por meio do traçado dos diagramas, pois isso incluiria o traçado de um diagrama para cada posição da carga móvel, a fim de determinar qual a posição que resulta no maior esforço. Portanto, para estruturas submetidas a cargas móveis, utiliza-se outro método para determinar a posição mais desfavorável da carga e os valores extremos (máximos e mínimos) dos esforços solicitantes, que inclui o traçado das linhas de influência.

Uma linha de influência representa a variação de um determinado efeito elástico (por exemplo, uma reação de apoio, um esforço cortante ou um momento fletor) em uma seção específica da estrutura à medida que uma carga concentrada unitária a percorre. Para exemplificar, considere a linha de influência (LI) de momento fletor em uma seção  $S$  de uma viga, representada na Figura 3.3. Quando a carga unitária  $P = 1$  estiver localizada no ponto  $A$ , a uma distância  $x$  da extremidade esquerda da viga, o momento fletor na seção  $S$  será dado pela ordenada da linha de influência no ponto  $A$ , ou seja,  $M_S = -a$ .

Figura 3.3 | Linha de influência de momento fletor na seção  $S$  de uma viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez conhecida a linha de influência de um determinado esforço para uma seção específica, percebe-se facilmente que a posição mais desfavorável da carga unitária é aquela que apresenta a maior ordenada da linha de influência. Assim, podemos definir os

valores extremos (maior valor positivo e maior valor negativo) dos esforços provocados pela carga móvel unitária, que são as ordenadas da linha de influência com maiores valores positivo e negativo.

As linhas de influência podem ser traçadas para diversos tipos de estrutura, como vigas, pórticos ou treliças, sejam elas isostáticas ou hiperestáticas. Como uma das principais aplicações das linhas de influência é no dimensionamento de vigas de pontes, estudaremos como é feito o traçado das linhas de influência para esse tipo de estrutura, começando pelas vigas isostáticas, passando posteriormente para as vigas hiperestáticas. Por convenção, desenharemos os valores positivos da linha de influência no lado de baixo, e os valores negativos no lado de cima, conforme representado na Figura 3.3.

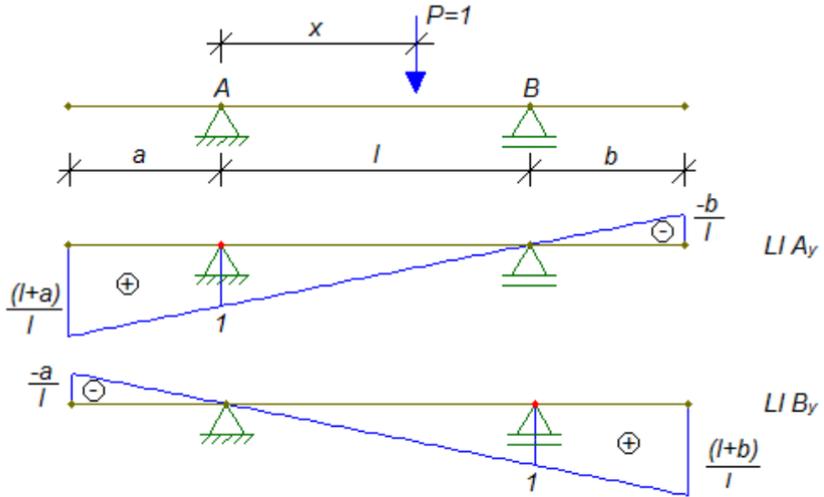
### Determinação das reações de apoio para vigas

Para determinar as reações de apoio de uma viga isostática submetida a uma carga móvel, devemos, primeiramente, traçar as linhas de influência dessas reações de apoio. Para tanto, iremos aplicar uma carga unitária em uma posição variável  $x$  e determinar os valores das reações de apoio em função dessa posição  $x$ , utilizando as equações de equilíbrio estático. Assim, para a viga isostática com balanços da Figura 3.4, submetida a uma carga unitária  $P = 1$ , temos as reações de apoio a seguir, notando que a reação de apoio horizontal no apoio  $A$  será sempre nula, uma vez que não existe nenhuma carga horizontal. Para o equilíbrio de momentos, foi adotada a convenção de momento anti-horário positivo.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y \cdot l + 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{(l - x)}{l}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{(l - x)}{l} + B_y - 1 = 0 \Rightarrow B_y = 1 - \frac{(l - x)}{l} = \frac{l - (l - x)}{l} = \frac{x}{l}$$

Figura 3.4 | Viga isostática e linhas de influência de  $A_y$  e  $B_y$



Fonte: elaborada pelo autor.

As relações de  $A_y$  e de  $B_y$  em função de  $x$  são as expressões analíticas da linha de influência de  $A_y$  ( $LI A_y$ ) e da linha de influência de  $B_y$  ( $LI B_y$ ), respectivamente. Portanto, para traçar essas linhas de influência, basta representar graficamente essas duas expressões, que nada mais são do que equações de retas. Para encontrar o valor da ordenada da linha de influência em um ponto específico da viga, basta substituir o valor de  $x$  pela posição desejada. Dessa forma é possível traçar as linhas de influência conforme apresentado na Figura 3.4. Para exemplificar, são determinadas as ordenadas da  $LI A_y$  de alguns pontos:

$$\text{- Para } x = -a \Rightarrow A_y = \frac{(l+a)}{l}$$

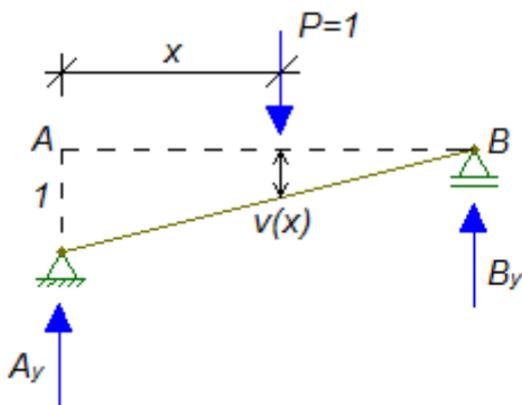
$$\text{- Para } x = 0 \Rightarrow A_y = \frac{(l-0)}{l} = 1$$

$$\text{- Para } x = l \Rightarrow A_y = \frac{(l-l)}{l} = 0$$

$$\text{- Para } x = l + b \Rightarrow A_y = \frac{(l-(l+b))}{l} = -\frac{b}{l}$$

Um método mais direto para a determinação da linha de influência é o denominado método cinemático, ou princípio de Müller-Breslau, que faz uso do princípio dos trabalhos virtuais para traçar as linhas de influência. Considere que o apoio A da viga da Figura 3.5 sofreu um deslocamento unitário virtual para baixo, fazendo com que toda a viga sofra um deslocamento, conforme a função  $v(x)$ .

Figura 3.5 | Viga com deslocamento virtual unitário no apoio A



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a viga apresentou um deslocamento de corpo rígido, ou seja, ela não apresentou deformações (continua reta), o seu trabalho virtual interno é zero. Assim, pelo PTV, temos:

$$U_e = U_i \Rightarrow -A_y \cdot 1 + P \cdot v(x) = 0 \Rightarrow A_y = 1 \cdot v(x) \Rightarrow A_y = v(x)$$

Com isso, podemos concluir que a configuração deslocada da viga ( $v(x)$ ) é igual à reação de apoio  $A_y$ . Ou seja, a linha de influência de  $A_y$  é a própria configuração deslocada da viga. Assim, para traçar a linha de influência de um determinado efeito (como uma reação de apoio ou um esforço solicitante), basta seguir o procedimento apresentado a seguir:



### Assimile

Procedimento para traçar a linha de influência de uma viga isostática:

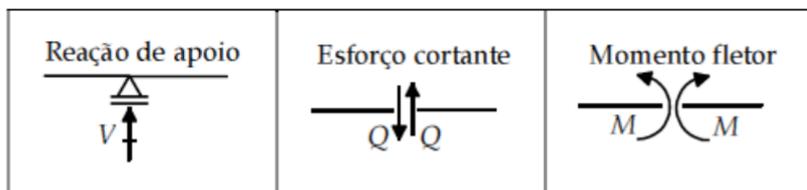
- 1) Retirar o vínculo que transmite o efeito cuja linha de influência se deseja determinar.

2) Aplicar, no ponto em que atua o efeito analisado, um deslocamento unitário (considerado muito pequeno) no sentido contrário ao da convenção positiva do efeito analisado.

3) A linha de influência será a configuração deslocada da viga.

No caso de vigas isostáticas, as linhas de influência sempre serão linhas retas, o que facilita o seu traçado e a determinação dos valores das ordenadas, que podem ser obtidos por simples semelhança de triângulos, sabendo-se que o deslocamento aplicado no ponto em que atua o efeito analisado é unitário. A convenção de sentido positivo de alguns efeitos é apresentada na Figura 3.6.

Figura 3.6 | Convenção positiva de alguns efeitos



Fonte: adaptada pelo autor.

Uma vez determinada a linha de influência da reação de apoio, sabe-se que, ao posicionar a carga móvel no ponto de maior ordenada da linha de influência, teremos o valor máximo (positivo ou negativo) da reação de apoio. Como a linha de influência foi traçada para uma carga unitária, caso a carga móvel possua valor diferente do unitário, basta multiplicar a ordenada da linha de influência pelo valor da carga móvel para encontrar o valor da reação de apoio quando a carga móvel estiver sobre aquele ponto. Esse procedimento será apresentado em mais detalhes posteriormente.



**Reflita**

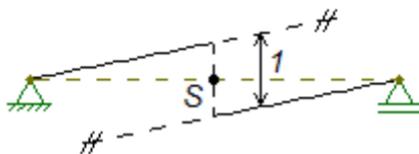
Caso a carga móvel não seja uma força concentrada, mas sim uma carga uniformemente distribuída, como determinamos o valor da reação de apoio provocada por essa carga ao utilizarmos a linha de influência? Pense na carga uniformemente distribuída como uma sucessão de cargas concentradas afastadas entre si por uma distância infinitesimal.

## Linha de influência de esforço cortante em viga

Para determinar a linha de influência de esforço cortante em uma viga isostática, podemos encontrar as equações que definem o valor do esforço cortante em função da posição  $x$  da carga unitária, empregando as equações de equilíbrio de maneira semelhante ao procedimento realizado para a determinação das linhas de influência das reações de apoio. Alternativamente, também podemos traçar a linha de influência de esforço cortante utilizando-nos do método cinemático, seguindo o procedimento já apresentado; e como esse é o método mais simples e intuitivo, que permite traçar as linhas de influência de vigas isostáticas rapidamente, passará a ser utilizado daqui em diante.

O primeiro passo do método cinemático é a retirada do vínculo que transmite o efeito analisado. No caso da linha de influência da reação de apoio, foi retirado o vínculo que transmite a reação de apoio vertical, ou seja, para traçar a LI  $A_y$ , foi retirada a vinculação que impede o apoio  $A$  de deslocar verticalmente. Agora, para traçar a linha de influência de esforço cortante, devemos retirar a vinculação que transmite o esforço cortante, ou seja, retirar a vinculação que impede o deslocamento vertical relativo entre duas partes de uma viga. Com a retirada desse vínculo em uma seção  $S$  qualquer, a viga se divide em dois trechos inclinados, paralelos entre si, apresentando o deslocamento relativo da Figura 3.7.

Figura 3.7 | Retirada do vínculo de cortante e aplicação de deslocamento unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

O próximo passo consiste na aplicação de um deslocamento unitário contrário à convenção de esforço cortante positivo. Pela Figura 3.6, o esforço cortante é positivo quando ele provoca um giro horário no elemento em que atua, ou seja, à esquerda da seção analisada o esforço cortante positivo tem sentido para baixo, e a direita da seção analisada o esforço cortante positivo tem sentido para cima. Assim, aplicamos um deslocamento contrário, ou seja:

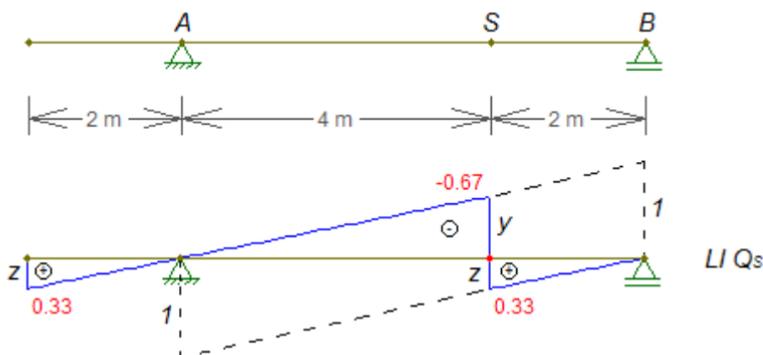
à esquerda da seção analisada, o deslocamento tem sentido para cima, e à direita da seção analisada, o deslocamento tem sentido para baixo. Como aplicamos um deslocamento à esquerda e outro à direita da seção analisada, o deslocamento relativo entre os dois lados deve ser unitário, ou seja, a soma do deslocamento para cima (à esquerda da seção) e do deslocamento para baixo (à direita da seção) deve ser unitário. Ao aplicar um deslocamento na viga, devemos sempre identificar quais pontos da viga não podem apresentar deslocamentos verticais ou giros, para que possamos traçar a configuração deslocada da viga corretamente, obtendo a sua linha de influência. A determinação das ordenadas da linha de influência é feita por simples semelhança de triângulos.



### Exemplificando

A seguir, para a viga da Figura 3.8, será explicado o procedimento adotado para traçar a linha de influência de esforço cortante para a seção  $S$ .

Figura 3.8 | Viga isostática e LI  $Q_S$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para traçar a LI  $Q_S$ , retira-se o vínculo que transmite o esforço cortante em  $S$ , aplicando um deslocamento para cima, no trecho à esquerda de  $S$ , e para baixo, no trecho à direita de  $S$ . Como os pontos  $A$  e  $B$  são apoios, eles não podem apresentar deslocamentos verticais, porém, a viga pode girar em torno desses pontos. Assim, ao serem aplicados os deslocamentos, o trecho à esquerda de  $S$  gira em torno do ponto  $A$  e o trecho à direita gira em torno do ponto  $B$ , apresentando uma

descontinuidade de valor unitário na seção S. Sabendo-se que a ordenada do prolongamento da linha de influência de esforço cortante sobre os apoios tem valor unitário (o deslocamento relativo é unitário), as ordenadas y e z podem ser obtidas conforme apresentado a seguir, sendo utilizada a semelhança de triângulos. Dessa forma, é obtida a LI  $Q_S$  apresentada na Figura 3.8.

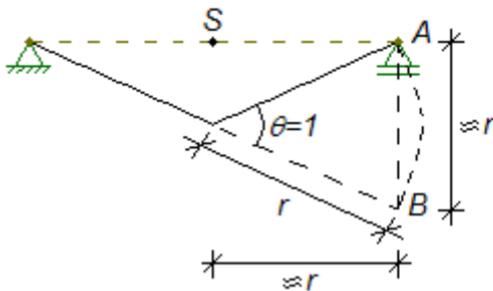
$$\frac{1}{y} = \frac{6}{4} \Rightarrow y = 0,67 \qquad z = 1 - y = 0,33$$

Como, pela convenção adotada para linhas de influência, os valores positivos são desenhados no lado de baixo e os valores negativos são desenhados no lado de cima, a ordenada y deve ser negativa no diagrama de linha de influência da Figura 3.8, uma vez que ela está localizada no lado de cima.

### Linha de influência de momento fletor em viga

Para traçar a linha de influência de momento fletor, devemos retirar o vínculo que transmite o momento fletor, ou seja, o vínculo que impede o giro relativo entre duas partes de uma viga. Com a retirada desse vínculo em uma seção S qualquer, a viga pode apresentar o deslocamento relativo da Figura 3.9.

Figura 3.9 | Retirada do vínculo de momento fletor e aplicação de giro unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, aplica-se um giro unitário relativo entre os dois trechos, ou seja,  $\theta = 1\text{rad}$ , com sentido contrário à convenção de momento fletor positivo, apresentado na Figura 3.6. Ou seja, no trecho à esquerda da seção analisada, aplica-se um giro horário, e no trecho à direita da seção analisada, aplica-se um giro anti-horário. Como estamos trabalhando com pequenos deslocamentos, a corda AB

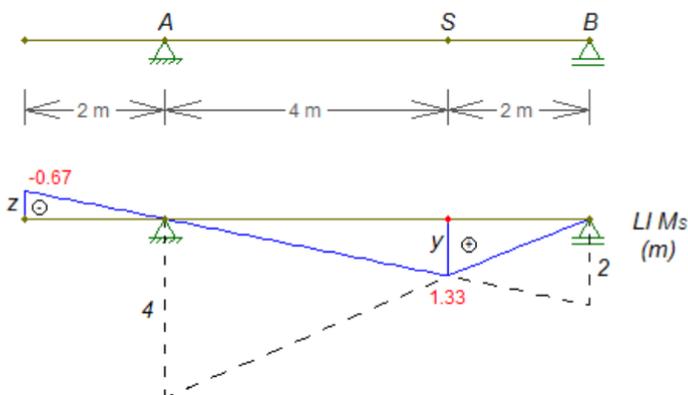
da Figura 3.9 é aproximadamente igual ao comprimento do arco de circunferência  $AB$ . Sendo  $r$  o raio da circunferência, o comprimento do arco é calculado por:  $\theta \cdot r = 1 \cdot r = r$ . Assim, a corda  $AB$  é igual ao raio da circunferência (que para pequenos deslocamentos é aproximadamente igual à distância horizontal entre  $S$  e  $A$  na Figura 3.9), o que permite determinar as ordenadas da linha de influência de momento fletor por simples semelhança de triângulos.



### Exemplificando

A seguir será explicado o procedimento adotado para traçar a linha de influência de momento fletor para a seção  $S$  da viga da Figura 3.10.

Figura 3.10 | Viga isostática e LI  $M_S$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para traçar a LI  $M_S$ , como o trecho à esquerda possui apenas um apoio, ao aplicar um giro horário, o trecho irá girar em torno do apoio  $A$ , no sentido horário. No trecho à direita, por sua vez, que também possui apenas um apoio, ao ser aplicado um giro anti-horário, o trecho irá girar em torno do apoio  $B$ , no sentido anti-horário, conforme a linha de influência da Figura 3.10. Como estamos trabalhando com pequenos deslocamentos, prolongando-se a linha de influência, a ordenada sobre os apoios é igual à distância horizontal do apoio até a seção (conforme a Figura 3.9). Assim, achamos as ordenadas  $y$  e  $z$  por semelhança de triângulos:

$$\frac{2}{y} = \frac{6}{4} \Rightarrow y = 1,33$$

$$\frac{2}{z} = \frac{6}{2} \Rightarrow z = 0,67$$



As vigas Gerber, que são associações de vigas apoiadas umas sobre as outras, ligadas por meio de rótulas, também são vigas isostáticas, portanto, o traçado das linhas de influência para esses tipos de vigas pode ser feito aplicando o método cinemático.

Leia o capítulo 14 do livro *Análise de Estruturas – Conceitos e Métodos Básicos* sobre cargas acidentais e cargas móveis.

(MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas** - Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010. Cap. 14).

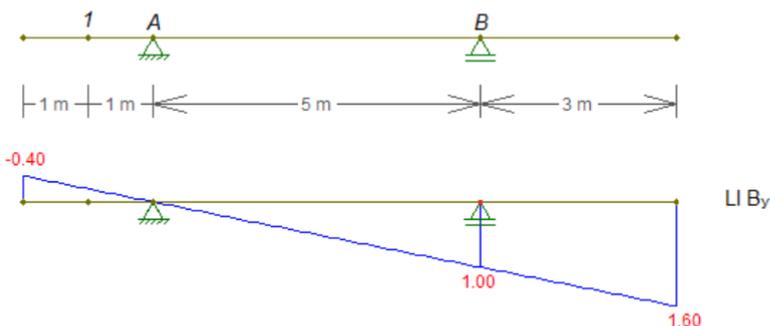
E o estudo das cargas móveis em estruturas isostáticas em:

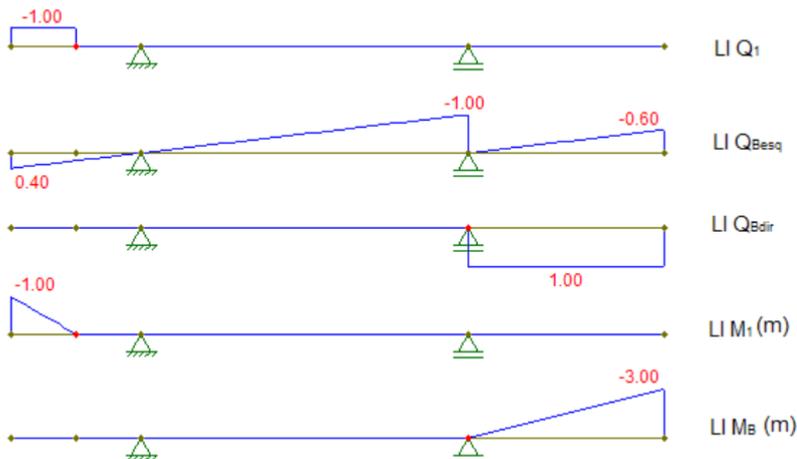
SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural 1**. Método das deformações. Processo de Cross. 6. ed. Porto Alegre / Rio de Janeiro: Globo, 1981. Capítulo VI.

## Sem medo de errar

Você inicia a análise da estrutura da ponte do seu projeto pelo estudo da transversina da Figura 3.1. Para essa viga, é necessário determinar a linha de influência da reação de apoio  $B_y$ , as linhas de influência de esforço cortante para as seções 1,  $B_{esq}$  e  $B_{dir}$ , bem como as linhas de influência de momento fletor nas seções 1 e B. Essas seis linhas de influência e o procedimento para a determinação de cada uma delas estão representados na figura a seguir.

Figura 3.11 | Transversina e linhas de influência





Fonte: elaborada pelo autor.

Para traçar a LI  $B_y$ , deve-se aplicar um deslocamento unitário para baixo em  $B$ . Dessa forma, toda a viga irá girar em relação ao ponto  $A$ . Sabendo-se que a ordenada da linha de influência no ponto  $B$  é  $1,0$ , as demais ordenadas são encontradas facilmente por semelhança de triângulos.

Para a LI  $Q_1$ , aplica-se um deslocamento para cima no trecho à esquerda de  $1$ , e um deslocamento para baixo no trecho à direita de  $1$ . Como o trecho à direita possui dois apoios ( $A$  e  $B$ ), não existe um ponto em torno do qual o trecho possa girar; assim, ele permanece horizontal, ou seja, a linha de influência desse trecho é nula. Como o trecho à esquerda não possui nenhum apoio, ele também não apresenta nenhum giro, porém, todo o trecho apresenta um deslocamento vertical por igual. Como o deslocamento relativo entre os trechos deve ser unitário e o trecho à direita não apresentou deslocamento, todo o deslocamento unitário foi aplicado no trecho à esquerda, resultando na LI  $Q_1$ , apresentada na Figura 3.11.

A seção  $B_{esq}$  está localizada um infinitesimal à esquerda do apoio  $B$ , ou seja, está na região entre apoios. Portanto, o traçado da sua linha de influência é feito da mesma maneira como apresentando na Figura 3.8. Como essa seção está localizada em um infinitesimal à esquerda de  $B$ , o deslocamento aplicado para baixo à direita da seção é praticamente nulo. Consequentemente, pode-se admitir que o deslocamento aplicado à esquerda da seção será  $1,0$ . Prolongando

a linha de influência nas seções em balanço e fazendo a semelhança de triângulos, encontra-se a LI  $B_{\text{esq}}$ , conforme a Figura 3.11.

Já a seção  $B_{\text{dir}}$  está localizada um infinitesimal à direita do apoio  $B$ , ou seja, está na região do balanço. Assim a sua forma é semelhante à da LI  $Q_1$ , porém, com deslocamento à direita da seção para baixo e o trecho à esquerda da seção sem deslocamento algum, já que possui dois apoios.

Para a LI  $M_1$ , como o trecho à direita da seção possui dois apoios, ele permanece horizontal. Dessa forma, a linha de influência de momento fletor é nula nesse trecho. Assim, todo o giro unitário é aplicado no trecho à esquerda da seção, no sentido horário. Como esse trecho não possui nenhum apoio, ele irá girar em torno de 1, no sentido horário. Admitindo pequenos deslocamentos, a ordenada da linha de influência na extremidade do trecho à esquerda será igual à distância horizontal entre a extremidade do trecho e a seção 1, conforme a Figura 3.11.

Na determinação da LI  $M_B$ , o giro unitário será todo aplicado à direita da seção (sentido anti-horário), semelhante ao traçado da LI  $M_1$ . No trecho à esquerda não é possível aplicar nenhum giro, pois a seção em análise está exatamente sobre um apoio. Assim, não é possível que o trecho à esquerda gire em relação ao ponto  $A$ , pois, para isso, o ponto  $B$  precisaria descer, o que não é possível.

É interessante que, se analisadas duas seções na região do balanço, as formas de suas linhas de influência de esforço cortante serão muito semelhantes. A mesma semelhança é observada para as linhas de influência de momento fletor em seções na região do balanço. Para seções na região entre apoios, a semelhança também existe, tanto para linhas de influência de cortante como de momento fletor, sempre ocorrendo o prolongamento da linha de influência nas regiões do balanço.

## Avançando na prática

### Determinação dos valores extremos para uma carga móvel uniformemente distribuída.

#### Descrição da situação-problema

Você foi informado que no projeto da ponte, uma carga móvel de 15 kN/m (uniformemente distribuída) irá passar sobre a

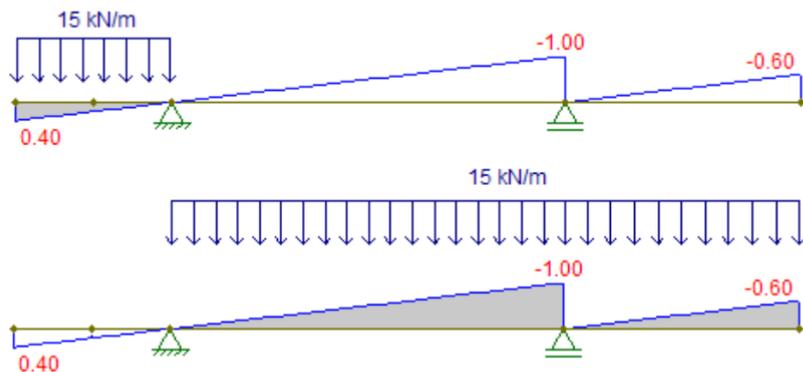
transversina da Figura 3.11. Para fazer o dimensionamento desse elemento estrutural da ponte é necessário determinar os valores extremos (máximo e mínimo) do esforço cortante que atua na seção à esquerda do apoio B ( $B_{\text{esq}}$ ).

### Resolução da situação-problema

Como as linhas de influência são definidas para uma carga concentrada móvel unitária, para que o valor extremo de um esforço (ou reação de apoio) seja encontrado, devido a uma carga concentrada móvel de intensidade diferente de 1,0, basta que essa carga seja posicionada sobre a maior ordenada da linha de influência e multiplicar essa ordenada pela intensidade da carga concentrada móvel. No caso da carga móvel uniformemente distribuída, podemos imaginar que ela é composta por infinitas cargas concentradas posicionadas lado a lado. Ou seja, para que seja encontrado o valor extremo, devido a essas infinitas cargas concentradas, teríamos que multiplicar cada uma das infinitas cargas por suas respectivas ordenadas da linha de influência e somar os resultados. Isso nada mais é do que multiplicar a carga uniformemente distribuída pela área da linha de influência. Assim, para que o valor extremo de um esforço (ou reação de apoio) seja identificado, devido a uma carga móvel uniformemente distribuída, basta que a carga, uniformemente distribuída, seja posicionada sobre a linha de influência e que o valor da carga seja multiplicado pela área da linha de influência.

Como a LI  $Q_{B_{\text{esq}}}$  possui valores positivos e negativos, posicionaremos, primeiramente, a carga uniformemente distribuída sobre a região positiva da linha de influência para determinarmos o valor do esforço cortante máximo positivo. Posteriormente, posicionaremos a carga uniformemente distribuída sobre a região negativa da linha de influência para determinarmos o valor do esforço cortante máximo negativo (ou mínimo). A Figura 3.12 apresenta essas duas situações.

Figura 3.12 | Posicionamento da carga uniformemente distribuída sobre a LI  $Q_{Besq}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Os valores extremos são, então, encontrados multiplicando-se a carga pela área da linha de influência em destaque na Figura 3.12:

$$Q_{Besq}^+ = 15 \cdot \left( \frac{2 \cdot 0,4}{2} \right) = 6 \text{ kN}$$

$$Q_{Besq}^- = 15 \cdot \left[ \frac{5 \cdot (-1)}{2} + \frac{3 \cdot (-0,6)}{2} \right] = -51 \text{ kN}$$

## Faça valer a pena

**1.** Para traçar a linha de influência de esforço cortante em uma determinada seção de uma viga, deve-se retirar a vinculação que transmite o esforço cortante e aplicar um deslocamento à esquerda e outro à direita da seção analisada (deslocamento relativo unitário).

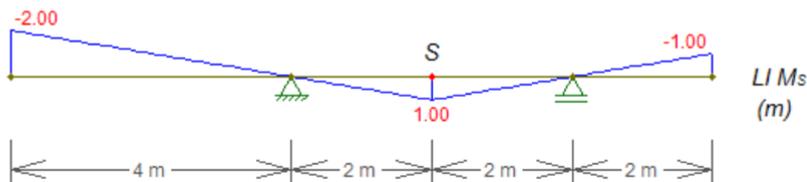
Assinale a resposta que apresenta o sentido correto de aplicação dos deslocamentos para traçar a linha de influência de esforço cortante.

- Aplicar um deslocamento no sentido contrário à convenção de esforço cortante positiva, ou seja, deslocamento para baixo, à esquerda da seção, e para cima, à direita da seção.
- Aplicar um deslocamento no sentido contrário à convenção de esforço cortante positiva, ou seja, deslocamento para cima, à esquerda da seção, e para baixo, à direita da seção.

- c) Aplicar um deslocamento no mesmo sentido da convenção de esforço cortante positiva, ou seja, deslocamento para baixo, à esquerda da seção, e para cima, à direita da seção.
- d) Aplicar um deslocamento no mesmo sentido da convenção de esforço cortante positiva, ou seja, deslocamento para cima, à esquerda da seção, e para baixo, à direita da seção.
- e) Aplicar um deslocamento no mesmo sentido da convenção de esforço cortante positiva, ou seja, deslocamento para cima, em ambos os lados da seção.

**2.** A linha de influência de momento fletor da seção S de uma viga isostática de concreto armado é apresentada na Figura 3.13. Sabe-se que uma carga concentrada móvel de 25 kN irá percorrer essa viga durante a sua utilização. Para o correto dimensionamento das armaduras dessa viga, é necessário determinar os valores extremos de momento fletor que podem ocorrer na seção S da viga.

Figura 3.13 | Viga isostática e LI  $M_S$



Fonte: elaborada pelo autor.

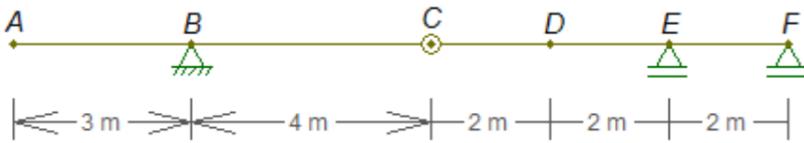
Marque a resposta que contém os valores extremos (maior positivo e maior negativo, respectivamente) de momento fletor na seção S, devido a carga concentrada móvel de 25 kN.

- a) 50 kN.m e -100 kN.m.
- b) 25 kN.m e -75 kN.m.
- c) 50 kN.m e -125 kN.m.
- d) 25 kN.m e -50 kN.m.
- e) 50 kN.m e -50 kN.m.

**3.** A viga Gerber da Figura 3.14 será utilizada na estrutura de uma ponte e possui uma rótula no ponto C. Está sendo feita a análise dos momentos fletores extremos que podem ocorrer na seção D desta viga devido a uma

carga móvel. Para essa finalidade, é necessário traçar a linha de influência de momento fletor na seção  $D$ .

Figura 3.14 | Viga Gerber



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correspondente à informação correta em relação ao formato da linha de influência de momento fletor na seção  $D$ .

- a) Apenas o trecho  $ABC$  permanece horizontal.
- b) Nenhum trecho da viga permanece horizontal.
- c) Os trechos  $AB$  e  $EF$  permanecem horizontais.
- d) Apenas o trecho  $DEF$  permanece horizontal.
- e) A viga inteira permanece horizontal.

## Seção 3.2

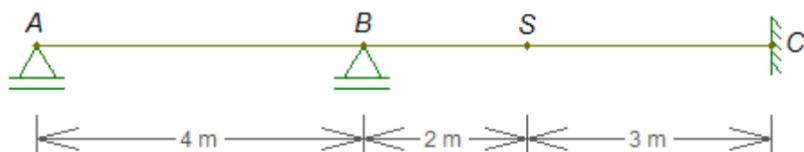
### Linhas de influência para estruturas com vários graus de indeterminação

#### Diálogo aberto

Agora que já sabemos o que são as linhas de influência e também já somos capazes de traçar a linha de influência de vigas isostáticas, podemos avançar para o estudo de linhas de influência em vigas hiperestáticas.

Os conhecimentos que serão adquiridos nesta seção permitirão que você avance nos cálculos da ponte que está projetando, já que uma das longarinas dela é duas vezes hiperestática. O seu croqui está representado na Figura 3.15.

Figura 3.15 | Croqui da longarina da ponte



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que o projeto dessa longarina seja feito corretamente, você deve determinar a linha de influência de esforço cortante e de momento fletor na seção S dessa viga.

Vamos entender quais são as diferenças entre as linhas de influência de vigas isostáticas e hiperestáticas, para que você consiga resolver esse problema.

#### Não pode faltar

### Linhas de influência para estruturas com vários graus de indeterminação

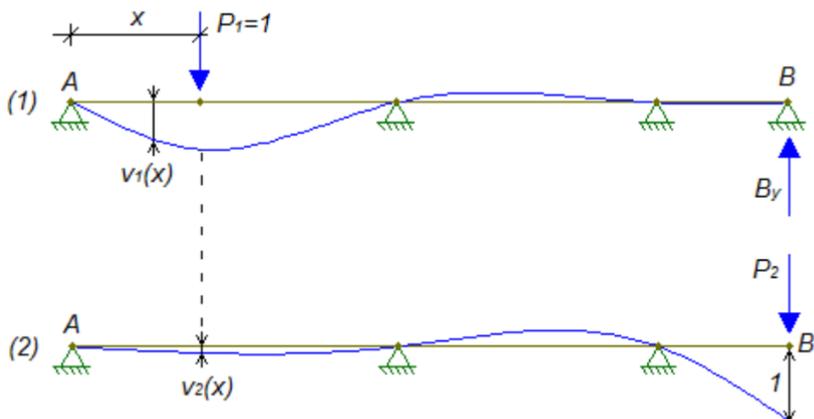
Assim como nas estruturas isostáticas, a linha de influência de uma estrutura hiperestática também representa a variação de um efeito elástico (reação de apoio, esforço cortante ou momento fletor, por exemplo) em uma determinada seção quando uma carga

concentrada unitária percorre toda a estrutura. Dessa forma, as linhas de influência de estruturas hiperestáticas também são utilizadas para determinar os valores extremos (máximos e mínimos) de um esforço ou reação de apoio, já que, com o traçado da linha de influência, pode-se determinar facilmente em que posição devemos aplicar o carregamento para que sejam obtidos esses valores extremos.

Vimos na seção anterior que a maneira mais rápida e prática para traçar as linhas de influência de estruturas isostáticas é o emprego do método cinemático (Princípio de Müller-Breslau). Esse método consiste em, na seção analisada, aplicar um deslocamento unitário no sentido contrário à convenção positiva do esforço ou reação em estudo e traçar a configuração deslocada da estrutura para esse deslocamento unitário. Essa configuração deslocada será a linha de influência procurada.

O método cinemático também é válido para estruturas hiperestáticas, ou seja, também podemos determinar a forma das linhas de influência dessas estruturas por meio da aplicação de deslocamentos unitários no sentido contrário à convenção de esforços ou reação positiva. A demonstração da validade desse método para estruturas hiperestáticas pode ser feita com a aplicação do teorema de Betti, que diz que o trabalho virtual produzido por um sistema de forças (1), devido às deformações provocadas por um sistema de forças (2), é igual ao trabalho virtual produzido pelo sistema de forças (2), devido às deformações provocadas pelo sistema de forças (1). Consideremos duas vigas hiperestáticas, conforme a Figura 3.16.

Figura 3.16 | Vigas hiperestáticas



Fonte: elaborada pelo autor.

Na viga (1), a aplicação de uma força unitária  $P_1 = 1$  a uma distância  $x$  do apoio  $A$  da viga gera a elástica (configuração deformada)  $v_1(x)$ . Já na viga (2), a aplicação de uma força  $P_2$  em  $B$ , que provoca um deslocamento unitário para baixo nesse mesmo ponto, gera a elástica  $v_2(x)$ . Assim, pelo teorema de Betti temos:

$$\sum F_1 \cdot v_2 = \sum F_2 \cdot v_1$$

$$-B_y \cdot 1 + P_1 \cdot v_2(x) = P_2 \cdot 0 \Rightarrow B_y = v_2(x) \quad \therefore \quad LI B_y = v_2(x)$$

Como a reação  $B_y$  é igual à ordenada da elástica  $v_2(x)$  e essa elástica é obtida pela imposição de um deslocamento unitário no sentido oposto à reação  $B_y$  positiva, fica demonstrado que o método cinemático também é válido para estruturas hiperestáticas.

Entretanto, diferentemente do que ocorre nas estruturas isostáticas, em que as linhas de influência são compostas por trechos retos, como visto na seção anterior, no caso das estruturas hiperestáticas, as linhas de influência são compostas por trechos curvos, como apresentado na Figura 3.16. O próprio método cinemático explica essa diferença. No caso de uma estrutura isostática, ao retirar o vínculo que transmite o efeito analisado, a estrutura passa a ser hipostática, ou seja, ao aplicar um deslocamento unitário, essa estrutura apresenta um movimento de corpo rígido. Assim sendo, não oferece resistência ao deslocamento, permanecendo reta.

Já no caso de uma estrutura hiperestática, ao retirar o vínculo que transmite o efeito analisado, a estrutura não se torna hipostática, ou seja, ainda apresenta resistência ao deslocamento unitário aplicado, apresentando deformações que tornam as barras curvas. Desprezando-se as deformações devidas ao esforço cortante, a equação diferencial das deformações por flexão para barras prismáticas (que possuem seção transversal constante) é definida pela Resistência dos Materiais, pela teoria de vigas de Navier:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I}$$

Em que:

$v(x)$ : deslocamento transversal da barra (elástica);

$q(x)$ : taxa de carregamento transversal distribuído na barra;

$E$ : módulo de elasticidade do material;

$I$ : momento de inércia da seção transversal.

Como, para traçar a linha de influência, não existe nenhuma carga distribuída, uma vez que aplicamos apenas uma carga concentrada unitária, temos  $q(x) = 0$ . Além disso, já vimos que a elástica da viga é a própria linha de influência. Portanto:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{d^4 LI}{dx^4} = 0$$

Como a quarta derivada da linha de influência é nula, essa linha de influência pode ser descrita matematicamente por um polinômio do terceiro grau do tipo  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , uma vez que a sua quarta derivada em relação a  $x$  é nula. Com isso, fica comprovado que a linha de influência de uma estrutura hiperestática é composta por trechos curvos.



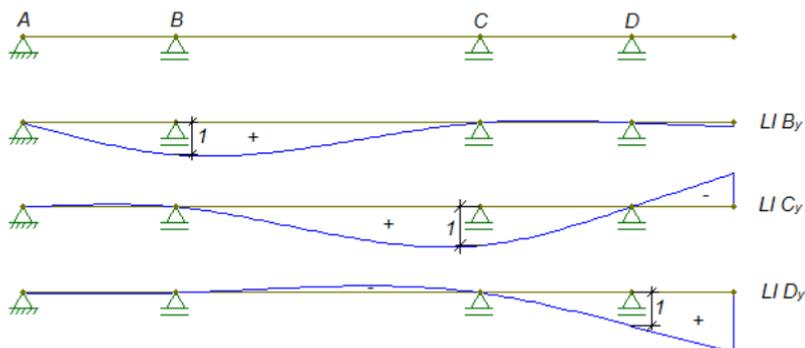
### Assimile

As linhas de influência de estruturas isostáticas são compostas por trechos retos. As linhas de influência de estruturas hiperestáticas, por sua vez, são compostas por trechos curvos. Em ambos os casos podemos utilizar o método cinemático para determinar o aspecto das linhas de influência.

## Determinação das reações de apoio para vigas contínuas

Para determinar o valor de uma reação de apoio de uma viga hiperestática submetida a uma carga móvel, devemos, inicialmente, traçar a linha de influência correspondente a essa reação de apoio. Utilizaremos o método cinemático para traçar a linha de influência, assim como foi feito no caso das vigas isostáticas. Dessa forma, para se determinar a linha de influência de uma reação de apoio vertical, basta que seja removido o vínculo que transmite essa reação de apoio vertical e aplicado um deslocamento unitário no sentido contrário à convenção de reação de apoio positiva, ou seja, aplicado um deslocamento unitário para baixo. De maneira intuitiva, pode-se perceber como o restante da viga se deforma, sendo possível traçar o aspecto da linha de influência da reação de apoio em questão. A Figura 3.17 apresenta as linhas de influência de três reações de apoio verticais para uma viga hiperestática.

Figura 3.17 | Linhas de influência de reações de apoio verticais para viga hiperestática



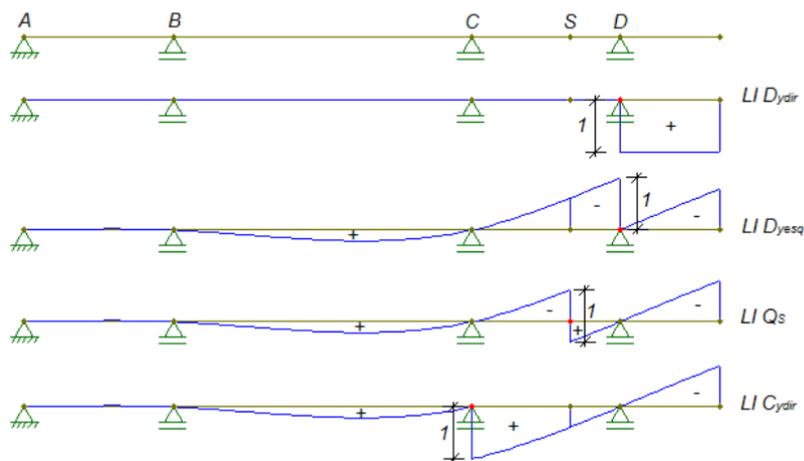
Fonte: elaborada pelo autor.

Note que a ordenada da linha de influência de uma reação de apoio sempre terá valor unitário na posição desse mesmo apoio e valores nulos nos demais apoios. Dessa forma, é fácil determinar como a viga irá se deformar, sabendo-se que os seus trechos são curvos e sempre irão girar em relação aos demais apoios móveis ou fixos, que não sejam o apoio da reação analisada. Uma vez traçada a linha de influência, é possível identificar onde devem ser posicionadas as cargas móveis para que sejam obtidos os valores extremos da reação de apoio, da mesma forma como é feito no caso de uma viga isostática.

### Linha de influência de esforço cortante em viga contínua

Para traçar a linha de influência de esforço cortante em uma viga contínua utilizando-se o método cinemático, basta que seja removido o vínculo correspondente ao esforço cortante e aplicado um deslocamento relativo unitário entre o lado esquerdo e o lado direito da seção analisada, da mesma forma como foi feito para as vigas isostáticas. Como o deslocamento deve ser aplicado no sentido contrário à convenção de esforço cortante positivo, no lado esquerdo da seção deve-se aplicar um deslocamento para cima e no lado direito deve-se aplicar um deslocamento para baixo. Dessa forma, os dois lados da viga irão se deformar, girando em relação aos apoios móveis e fixos, resultando em trechos curvos. Alguns exemplos de linhas de influência de esforço cortante em uma viga contínua são apresentados na Figura 3.18.

Figura 3.18 | Linhas de influência de esforço cortante para viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Um detalhe importante para se destacar é que não é possível traçar a linha de influência de esforço cortante sobre um apoio, visto que nesse ponto há uma descontinuidade do esforço cortante. Portanto, da mesma forma como foi feito para as vigas isostáticas, deve-se analisar as seções imediatamente à esquerda e à direita do apoio.



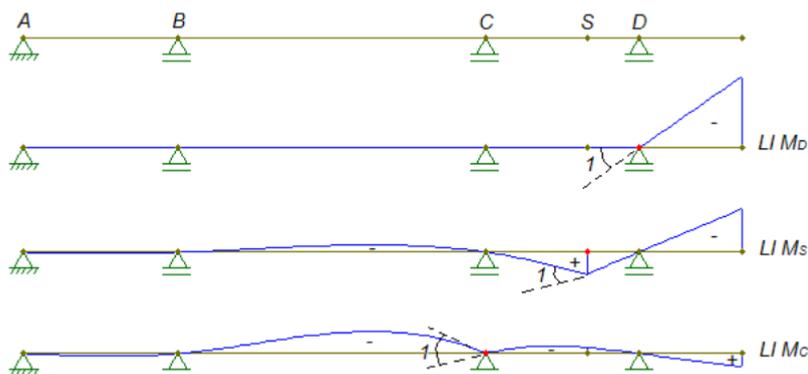
**Refleta**

Todas as seções localizadas entre dois apoios possuem linhas de influência com o mesmo comportamento. O mesmo ocorre para as seções localizadas no trecho em balanço.

### Linha de influência de momento fletor em viga contínua

De maneira análoga, para traçar a linha de influência de momento fletor de uma viga hiperestática, deve-se remover o vínculo que transmite esse esforço e aplicar um giro relativo unitário no sentido horário à esquerda da seção analisada bem como no sentido anti-horário à direita da seção analisada, já que esse giro deve ser contrário à convenção de momento fletor positivo. Os dois lados da viga irão apresentar trechos curvos, girando em relação aos apoios móveis e fixos. Na Figura 3.19 são apresentadas algumas linhas de influência para uma viga hiperestática.

Figura 3.19 | Linhas de influência de momento fletor para viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

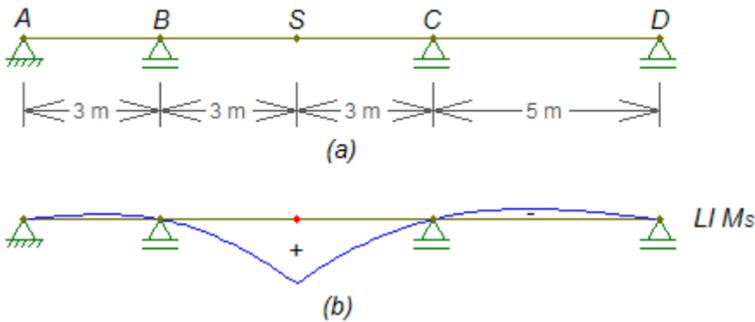
Como as linhas de influência de vigas hiperestáticas são compostas por trechos curvos, não podemos utilizar a semelhança de triângulos para encontrar as ordenadas da linha de influência em qualquer ponto, como foi feito no caso das vigas isostáticas. Porém, o uso do método cinemático nas vigas hiperestáticas nos permite encontrar o aspecto da linha de influência, o que possibilita determinar o posicionamento adequado de uma carga móvel uniformemente distribuída para obter os valores extremos (máximo e mínimo) de um determinado efeito em uma seção da viga. Sabendo onde devemos posicionar a carga móvel, não precisamos determinar o valor extremo do esforço usando a linha de influência. Para isso, podemos posicionar a carga móvel no local desejado e resolver a viga hiperestática com essa carga, utilizando-se qualquer método de resolução de vigas hiperestáticas, como o método das forças ou o método dos deslocamentos.



### Exemplificando

Para exemplificar esse procedimento, vamos determinar onde devemos posicionar uma carga móvel uniformemente distribuída de 8 kN/m na viga da Figura 3.20a, para que se obtenha o máximo valor positivo de momento fletor na seção S.

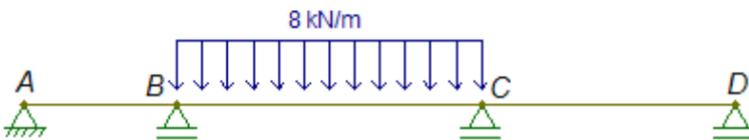
Figura 3.20 | (a) Viga hiperestática; (b) Linha de influência de momento fletor na seção S



Fonte: elaborada pelo autor.

Para traçar a linha de influência de momento fletor na seção S, basta aplicar um giro horário no lado esquerdo da seção S e um giro anti-horário no lado direito da seção S, resultando na linha de influência apresentada na Figura 3.20b. Podemos perceber que o único trecho positivo da linha de influência está entre os apoios B e C. Dessa forma, para encontrar o momento fletor máximo positivo na seção S, devido a uma carga móvel de 8 kN/m, basta a resolução da viga da Figura 3.21 pelo método das forças ou dos deslocamentos. Com isso, é possível traçar o diagrama de momentos fletores dessa viga, permitindo o encontro do valor do momento fletor na seção S.

Figura 3.21 | Viga hiperestática com carga móvel entre os apoios B e C



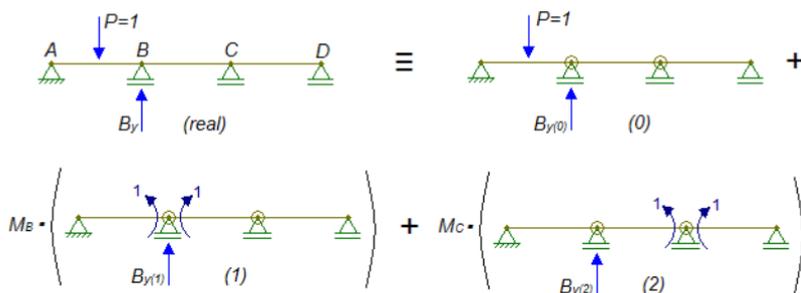
Fonte: elaborada pelo autor.

Caso se deseje determinar as ordenadas de uma linha de influência de uma viga hiperestática, podemos utilizar um procedimento que envolve a superposição de outras linhas de influência previamente conhecidas dessa mesma viga. Suponha que uma viga duas vezes hiperestática, da qual se conhece as linhas de influência de dois esforços, ao se remover os vínculos que transmitem esses dois esforços, passa a ser isostática. Nesse caso é possível determinar a

linha de influência de qualquer outro esforço por meio dessas duas linhas de influência conhecidas.

Para demonstrar esse procedimento, tomemos a viga real da Figura 3.22, da qual conhecemos as linhas de influência de momentos fletores em  $B$  e  $C$  e queremos determinar a linha de influência da reação  $B_y$  para qualquer posição da carga  $P = 1$ .

Figura 3.22 | Viga hiperestática e superposição de efeitos



Fonte: elaborada pelo autor.

Na superposição da Figura 3.22, o caso (0) corresponde a uma viga isostática obtida pela remoção dos vínculos que transmitem os momentos fletores em  $B$  e  $C$ , que são os esforços dos quais já se conhecem as linhas de influência. O caso (1) corresponde à mesma viga isostática do caso (0), porém, com a aplicação de um momento unitário no sentido da convenção positiva em  $B$ . Já no caso (2) é aplicado um momento unitário em  $C$ .

$B_{y(0)}$ ,  $B_{y(1)}$  e  $B_{y(2)}$  correspondem às reações de apoio em  $B$  para cada um desses casos isostáticos.  $B_y$ ,  $M_B$  e  $M_C$ , por sua vez, são a reação de apoio em  $B$  e os momentos fletores em  $B$  e em  $C$  da viga hiperestática. Assim, temos:

$$B_y = B_{y(0)} + B_{y(1)} \cdot M_B + B_{y(2)} \cdot M_C$$

Essa mesma superposição pode ser utilizada para traçar a linha de influência de  $B_y$ :

$$(LI B_y)_{hip} = (LI B_{y(0)})_{isost} + B_{y(1)} \cdot (LI M_B)_{hip} + B_{y(2)} \cdot (LI M_C)_{hip}$$

Ou seja, para encontrar o valor da ordenada da linha de influência de  $B_y$  em um ponto da viga hiperestática, basta somar a ordenada da linha de influência de  $B_y$  da viga isostática às ordenadas das linhas de influência de  $M_B$  e  $M_C$  multiplicadas pelas

reações de apoio em  $B$  da viga isostática para os casos (1) e (2). Assim podemos concluir que, para se determinar qualquer linha de influência de uma viga  $n$  vezes hiperestática, é preciso conhecer as linhas de influência de  $n$  esforços.



### Pesquise mais

Com o crescente uso da informática na engenharia, programas computacionais podem ser utilizados para determinar as linhas de influência de estruturas hiperestáticas. Um programa gratuito e muito utilizado para esse fim é o Ftool (<[www.alis-sol.com.br/Ftool/](http://www.alis-sol.com.br/Ftool/)>. Acesso em: 7 jun. 2018.).



### Atenção

As bibliografias de autores consagrados da área utilizam convenções de unidades diferentes para as linhas de influência, por exemplo:

- Kenneth M. Leet: LI Q em kN e LI M em "kN.m";
- Luiz Fernando Martha e Russel Charles Hibbeler: LI Q e LI M sem unidade;
- José Carlos Sussekind e José Luiz F. de Arruda Serra: LI Q sem unidade e LI M em "m".

Nesse material a convenção adotada é a do Sussekind, pois, para encontrar o valor do esforço multiplicamos a carga concentrada pela ordenada da linha de influência, como a LI  $Q_s$  é adimensional, multiplicando uma carga de 10 kN, por exemplo, pela ordenada 0,5, temos  $Q_s = 10 \text{ kN} \cdot 0,5 = 5 \text{ kN}$ .

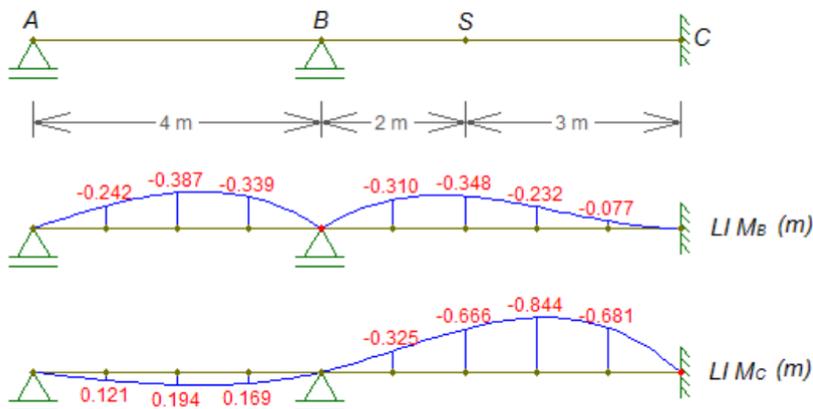
Para o momento, a unidade de LI  $M_s$  é m, então para uma carga de 10 kN e uma ordenada de 0,5 m temos  $M_s = 10 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

## Sem medo de errar

Dando sequência ao projeto da ponte em seu novo emprego, você deve agora analisar uma de suas longarinas, duas vezes hiperestáticas, apresentada na Figura 3.23. Para fazer o correto dimensionamento dessa longarina, você deve determinar as linhas de influência de esforço cortante e de momento fletor na seção  $S$  para que, posteriormente, a sua equipe possa encontrar os valores extremos desses esforços nesta seção. Seu colega de trabalho já

determinou as linhas de influência de momentos fletores nas seções *B* e *C* para essa mesma longarina, conforme a Figura 3.23, com os valores das ordenadas indicadas a cada um metro.

Figura 3.23 | Longarina e linhas de influência de momentos fletores nas seções *B* e *C*



Fonte: elaborada pelo autor.

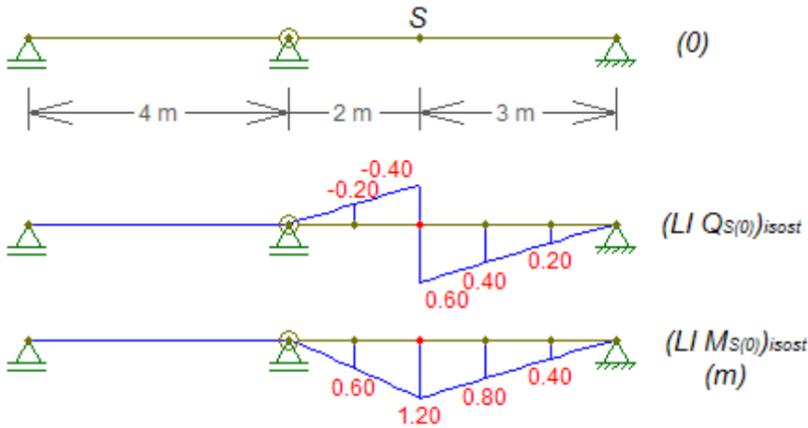
Como essa viga é duas vezes hiperestática, as duas linhas de influência de momentos fletores já conhecidas são suficientes para determinar qualquer linha de influência dessa mesma viga. Para isso, utilizaremos as seguintes superposições:

$$(LI Q_S)_{hip} = (LI Q_{S(0)})_{isost} + Q_{S(1)} \cdot (LI M_B)_{hip} + Q_{S(2)} \cdot (LI M_C)_{hip}$$

$$(LI M_S)_{hip} = (LI M_{S(0)})_{isost} + M_{S(1)} \cdot (LI M_B)_{hip} + M_{S(2)} \cdot (LI M_C)_{hip}$$

As linhas de influência de esforço cortante e de momento fletor na seção *S* para o caso (0) são apresentadas na Figura 3.24. Lembrando que o caso (0) corresponde à viga isostática obtida pela remoção dos vínculos que transmitem os momentos fletores nas seções *B* e *C*. Como trata-se de uma viga isostática, é possível obter as ordenadas da linha de influência a cada um metro por simples semelhança de triângulos, como já visto na seção anterior.

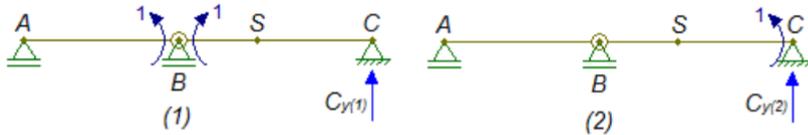
Figura 3.24 | Linhas de influência de esforço cortante e momento fletor na seção S para a viga isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

Também é necessário determinar os valores de  $Q_{S(1)}$ ,  $Q_{S(2)}$ ,  $M_{S(1)}$  e  $M_{S(2)}$ , que correspondem aos valores do esforço cortante na seção S para os casos (1) e (2) e aos valores do momento fletor na seção S para os casos (1) e (2), respectivamente. Os casos (1) e (2) correspondem à mesma viga isostática do caso (0), porém, com a aplicação de um momento fletor unitário positivo nos pontos B e C, respectivamente, conforme a Figura 3.25.

Figura 3.25 | Vigas isostáticas com momentos fletores unitários em B e C



Fonte: elaborada pelo autor.

Os casos (1) e (2) correspondem a duas vigas Gerber. Portanto, é possível determinar as reações de apoio  $C_{y(1)}$  e  $C_{y(2)}$  fazendo-se o equilíbrio de momentos fletores, no ponto B para o trecho BC de cada um dos dois casos, considerando giro anti-horário positivo.

$$\text{Para o caso (1): } \sum M_B = 0 \Rightarrow -1 + C_{y(1)} \cdot 5 = 0 \Rightarrow C_{y(1)} = 0,2$$

$$\text{Para o caso (2): } \sum M_B = 0 \Rightarrow -1 + C_{y(2)} \cdot 5 = 0 \Rightarrow C_{y(2)} = -0,2$$

Com as reações de apoio no ponto C para os casos (1) e (2), pode-se determinar facilmente os valores de esforço cortante e momento fletor na seção S para ambos os casos, considerando-se que o momento fletor positivo é aquele que traciona o lado debaixo da viga, e que o esforço cortante positivo é aquele que provoca giro horário:

$$Q_{S(1)} = -0,2 \quad M_{S(1)} = 0,2 \cdot 3 = 0,6$$

$$Q_{S(2)} = 0,2 \quad M_{S(2)} = 1 + C_{y(2)} \cdot 3 = 1 - 0,2 \cdot 3 = 0,4$$

Utilizando-se a superposição, pode-se determinar o valor da ordenada das linhas de influência de esforço cortante e de momento fletor na seção S para a viga hiperestática a cada um metro.

$$(LI Q_S)_{hip} = (LI Q_{S(0)})_{isost} - 0,2 \cdot (LI M_B)_{hip} + 0,2 \cdot (LI M_C)_{hip}$$

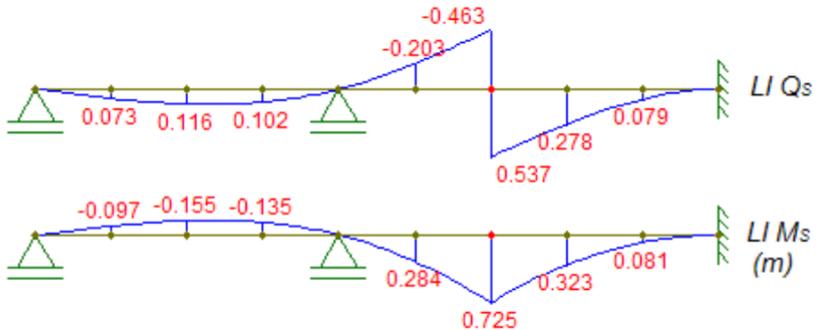
$$(LI M_S)_{hip} = (LI M_{S(0)})_{isost} + 0,6 \cdot (LI M_B)_{hip} + 0,4 \cdot (LI M_C)_{hip}$$

Essas duas linhas de influência são apresentadas na Figura 3.26. Para exemplificar, são demonstrados os cálculos para obtenção das ordenadas dessas duas linhas de influência à cinco metros do apoio A:

$$Q_S = -0,2 - 0,2 \cdot (-0,31) + 0,2 \cdot (-0,325) = -0,203$$

$$M_S = 0,6 + 0,6 \cdot (-0,31) + 0,4 \cdot (-0,325) = +0,284$$

Figura 3.26 | Linhas de influência de esforço cortante e momento fletor na seção S



Fonte: elaborada pelo autor.

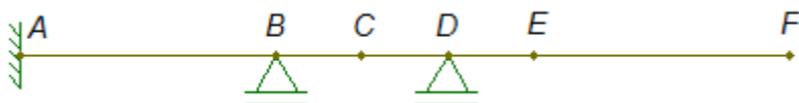
## Avançando na prática

### Traçado do aspecto de linhas de influência de vigas hiperestáticas

#### Descrição da situação-problema

A viga da Figura 3.27 será utilizada como viga de rolamento de uma ponte rolante, sobre a qual irá transitar uma carga móvel correspondente a um carro de içamento movido a motor. Para dimensionar essa viga submetida a uma carga móvel, você deve traçar o aspecto das linhas de influência da reação de apoio em  $B$ , do momento fletor em  $C$  e do esforço cortante em  $E$ .

Figura 3.27 | Viga hiperestática

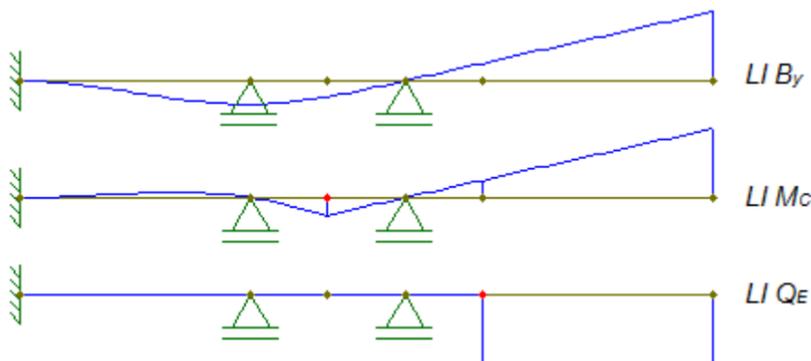


Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Como desejamos apenas definir o aspecto das linhas de influência, podemos utilizar o método cinemático, retirando os vínculos que transmitem a reação e os esforços dos quais se deseja traçar as linhas de influência e aplicar um deslocamento no sentido contrário à convenção positiva. A seguir, basta traçar a elástica da viga após a aplicação desses deslocamentos para obter as linhas de influência apresentadas na Figura 3.28.

Figura 3.28 | Linhas de influência



Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena

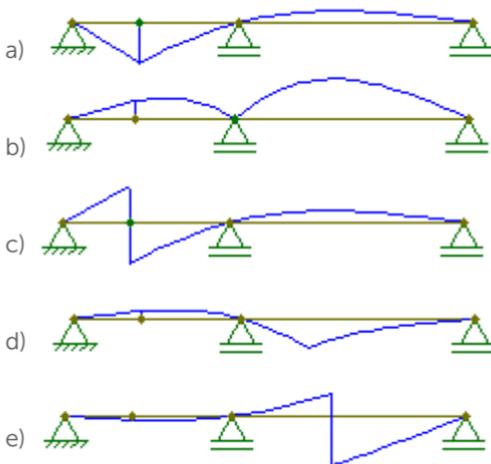
**1.** A viga da Figura 3.29 será empregada como longarina de uma ponte. Durante o projeto dessa ponte, você foi requisitado a determinar o aspecto da linha de influência de esforço cortante na seção  $S$  da viga.

Figura 3.29 | Longarina da ponte



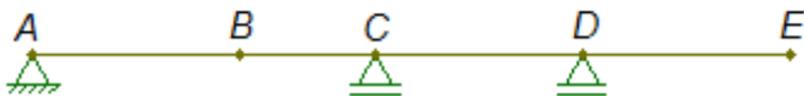
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que corresponde ao aspecto correto da linha de influência de esforço cortante na seção  $S$  da viga da Figura 3.29.



**2.** A viga da Figura 3.30 será submetida a uma carga móvel uniformemente distribuída. O seu escritório de engenharia precisa determinar onde deve ser posicionada essa carga móvel para que ela provoque o valor máximo de momento fletor negativo na seção  $B$  da viga.

Figura 3.30 | Viga que será submetida a uma carga móvel uniformemente distribuída



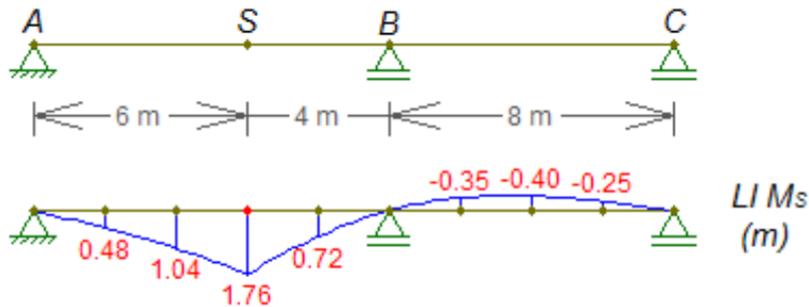
Fonte: elaborada pelo autor.

Escolha a alternativa correta que apresenta o trecho em que deve ser posicionada a carga móvel uniformemente distribuída para obter o valor máximo de momento fletor negativo na seção  $B$ .

- a) Trecho  $CD$ .
- b) Trecho  $AB$ .
- c) Trecho  $DE$ .
- d) Trecho  $BC$ .
- e) Trecho  $AC$ .

**3.** A linha de influência de momento fletor na seção  $S$  de uma viga é apresentada na Figura 3.31, com os valores de suas ordenadas a cada dois metros.

Figura 3.31 | Linha de influência de momento fletor na seção  $S$  (m)



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma carga móvel concentrada unitária irá percorrer essa viga e você deve determinar qual o valor do momento fletor em  $B$  quando a carga móvel unitária estiver a quatro metros do apoio  $A$ .

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto do momento fletor em  $B$  quando a carga móvel unitária estiver a quatro metros do apoio  $A$ .

- a)  $- 0,93 \text{ kN.m}$ .
- b)  $+ 1,04 \text{ kN.m}$ .
- c)  $0$ .
- d)  $- 0,80 \text{ kN.m}$ .
- e)  $+ 4,00 \text{ kN.m}$ .

## Seção 3.3

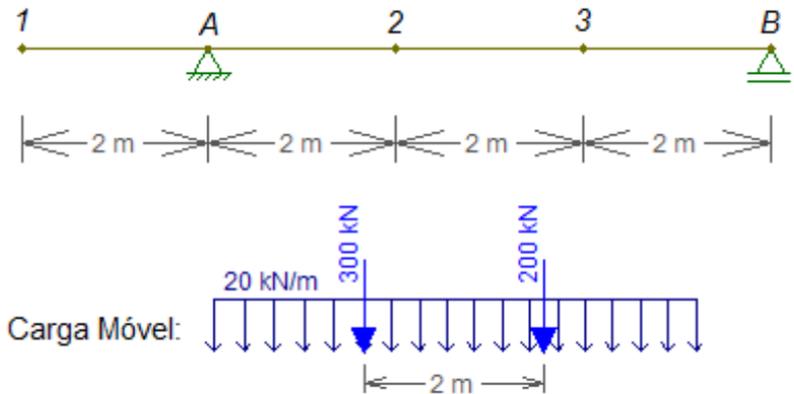
### Representação esquemática das linhas de influência

#### Diálogo aberto

Agora que já aprendemos a traçar as linhas de influência de vigas isostáticas e hiperestáticas, veremos como são representadas as cargas móveis que ocorrem em pontes rodoviárias ou ferroviárias. Também aprenderemos a representar graficamente os valores extremos de um esforço solicitante que ocorrem ao longo de uma viga submetida a cargas permanentes e móveis. Essa representação dos valores extremos dos esforços é chamada de envoltória de esforços.

Esse estudo permitirá que você execute mais uma etapa do dimensionamento da ponte em que você está trabalhando. Uma das vigas dessa ponte está representada na Figura 3.32 e está submetida à carga móvel indicada, além de uma carga permanente, uniformemente distribuída, de 40 kN/m.

Figura 3.32 | Viga e carga móvel



Fonte: elaborada pelo autor.

Para fazer o dimensionamento dessa viga, seu chefe pediu para você traçar a envoltória de momentos fletores da viga, analisando seções a cada dois metros, ou seja, as seções 1, A, 2, 3 e B.

Para que você consiga cumprir essa tarefa, vamos estudar qual é o significado dessa carga móvel e como traçar as envoltórias de esforços solicitantes. Somente com o traçado dessa envoltória é que a sua equipe de projeto conseguirá dimensionar essa viga, que será utilizada na ponte.

Bons estudos!

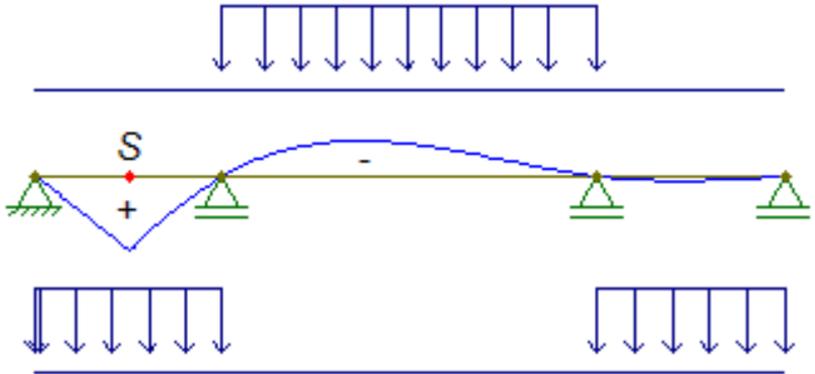
## Não pode faltar

### Representação esquemática das linhas de influência

Para realizar o projeto de uma estrutura de maneira adequada, devemos determinar os valores extremos (máximo positivo e máximo negativo) dos esforços solicitantes que atuam nessa estrutura. A determinação desses esforços, devidos às cargas fixas (cargas que possuem sempre o mesmo ponto de atuação), é feita de maneira relativamente simples, traçando-se os diagramas de esforços solicitantes, utilizando-se as equações de equilíbrio, no caso de estruturas isostáticas, ou os métodos das forças ou dos deslocamentos, no caso de estruturas hiperestáticas. Entretanto, esse mesmo procedimento torna-se inviável no caso das cargas móveis, pois, como essa carga pode atuar em qualquer ponto, teríamos que traçar diversos diagramas de esforços solicitantes, variando a posição da carga, para conseguirmos determinar os valores dos esforços extremos.

Assim, quando uma carga móvel atua em uma estrutura, devemos, primeiramente, determinar em que ponto posicionar a carga móvel para que ela provoque o máximo valor positivo ou negativo do esforço solicitante. Esse procedimento é feito utilizando-se as linhas de influência. Como a ordenada da linha de influência em um ponto  $x$  de uma viga corresponde ao valor do esforço na seção analisada quando uma carga unitária móvel está sobre esse mesmo ponto  $x$ , para encontrar o máximo valor positivo desse esforço na seção analisada, basta posicionar a carga móvel sobre o trecho positivo da linha de influência. A determinação do máximo valor negativo é feita de maneira análoga, conforme apresentado na Figura 3.33.

Figura 3.33 | Posicionamento da carga móvel



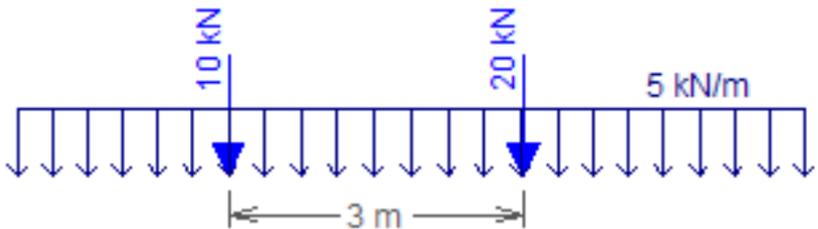
Fonte: elaborada pelo autor.

Repetindo esse mesmo procedimento para outras seções da viga, é possível encontrar os valores máximos e mínimos do esforço para cada uma dessas seções. Isso nos permite fazer a representação gráfica dos valores máximos e mínimos de um determinado esforço em uma viga. A curva obtida, unindo-se esses pontos de máximo ou de mínimo, é chamada de envoltória de esforço.

### Representação esquemática das forças

A representação esquemática das cargas móveis que ocorrem em pontes rodoviárias e ferroviárias, normalmente, é feita utilizando-se cargas concentradas e cargas uniformemente distribuídas, conforme a Figura 3.34. Essa carga móvel também é chamada de trem-tipo.

Figura 3.34 | Trem-tipo



Fonte: elaborada pelo autor.

No trem-tipo, as cargas concentradas representam os eixos de um veículo de grande porte, enquanto que a carga uniformemente distribuída representa os demais veículos de menor porte que circulam na ponte (também conhecida como carga de multidão). As cargas concentradas podem ter as suas posições invertidas, já que o veículo pode transitar nos dois sentidos. A carga de multidão, por sua vez, pode ser interrompida ao longo de alguns trechos da viga, visando maximizar ou minimizar os valores do esforço solicitante desejado.

Os valores das cargas concentradas e uniformemente distribuídas de um trem-tipo são definidos por normas, de acordo com a categoria da rodovia ou da ferrovia.



### Refleta

Caso o trem-tipo possua mais do que duas cargas concentradas (veículo com mais de dois eixos), como é feito o posicionamento delas sobre a linha de influência para obter os esforços extremos? Uma carga concentrada intermediária pode ser colocada na extremidade do trem-tipo?

## Representação gráfica da força cortante

Sabendo qual o trem-tipo e qual a carga permanente que atuam sobre uma viga, podemos fazer a representação gráfica dos valores extremos da força cortante, que é chamada de envoltória de força cortante. Para isso, deve-se traçar a linha de influência de vários pontos da seção, e, em cada uma dessas linhas de influência, posicionar a carga móvel de forma a obter os valores máximo e mínimo da força cortante para cada seção.

O valor da força cortante provocada pela carga móvel em cada seção também deve ser somado ao valor da força cortante provocada pela carga permanente, obtido facilmente por meio do diagrama de força cortante. Dessa forma, cada seção analisada da viga terá um valor máximo (maior positivo) e um valor mínimo (maior negativo). Para uma seção  $S$  qualquer, teremos:

$$Q_{Sm\acute{a}x} = Q_S^{perm} + Q_{Sm\acute{a}x}^{m\acute{o}vel}$$

$$Q_{Smin} = Q_S^{perm} + Q_{Smin}^{m\acute{o}vel}$$

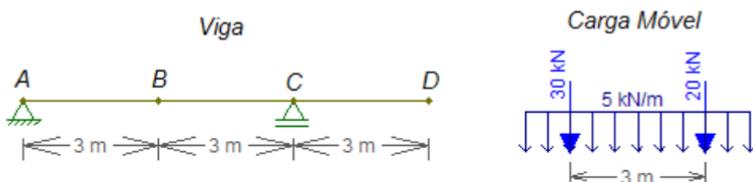
Plotando em um gráfico os valores máximos e mínimos da força cortante em cada seção, é possível traçar a envoltória de força cortante para a viga.



### Exemplificando

Determinar a envoltória de força cortante para a viga da Figura 3.35, analisando as seções  $A_{dir}$ ,  $B$ ,  $C_{esq}$ ,  $C_{dir}$  e  $D$ , supondo que a viga está submetida à carga móvel indicada e a uma carga permanente, uniformemente distribuída, de 10 kN/m.

Figura 3.35 | Viga e carga móvel



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, será feita a análise da carga permanente. Como trata-se de uma viga isostática, determinam-se as reações de apoio por meio das equações de equilíbrio (admitindo momento anti-horário positivo), permitindo traçar o diagrama de força cortante, apresentado na Figura 3.36. Dessa forma, é possível determinar o valor da força cortante provocada pela carga permanente em cada uma das cinco seções analisadas.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 7,5 + C_y \cdot 6 = 0 \Rightarrow C_y = 67,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - 10 \cdot 9 = 0 \Rightarrow A_y = 22,5 \text{ kN}$$

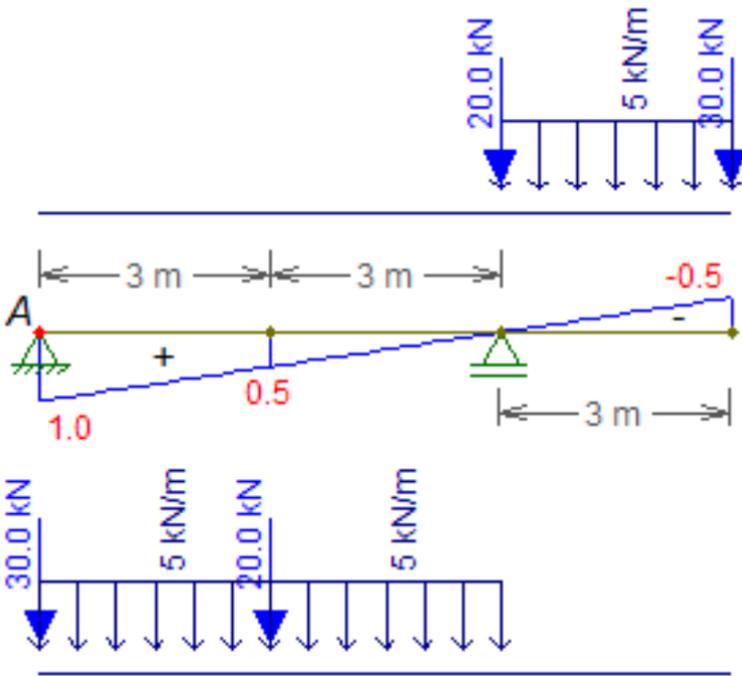
Figura 3.36 | Diagrama de força cortante (kN)



Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, deve ser feita a análise da carga móvel, para encontrar os valores máximos e mínimos da força cortante provocados pela carga móvel em cada uma das cinco seções. Para isso, basta que seja traçada a linha de influência de força cortante para cada seção e posicionada a carga móvel de forma a obter-se os valores máximo e mínimo da força cortante em cada seção. A linha de influência de força cortante da seção  $A_{dir}$ , com o posicionamento da carga móvel para determinar os valores máximo e mínimo da força cortante nesta seção, é apresentada na Figura 3.37.

Figura 3.37 | Linha de influência de força cortante para a seção  $A_{dir}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar o valor máximo da força cortante nesta seção, devemos posicionar o trem-tipo somente no trecho positivo da linha de influência. A maior carga concentrada deve ser colocada sobre a maior ordenada da linha de influência, e a três metros à direita ou à esquerda deve-se posicionar a outra carga concentrada. Nesse caso, para obter o maior valor possível, a outra carga concentrada foi posicionada à direita.

A seguir, basta multiplicar cada carga concentrada pela respectiva ordenada da linha de influência e multiplicar a carga distribuída pela área positiva da linha de influência (área de um triângulo):

$$Q_{A_{dir},máx}^{móvel} = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 0,5 + 5 \cdot \left( \frac{6 \cdot 1}{2} \right) = 55 \text{ kN}$$

Para encontrar o valor mínimo da força cortante nessa seção, deve-se fazer o mesmo procedimento, porém, posicionando o trem-tipo somente no trecho negativo da linha de influência:

$$Q_{A_{dir},mín}^{móvel} = 30 \cdot (-0,5) + 20 \cdot 0 + 5 \cdot \left( \frac{-3 \cdot 0,5}{2} \right) = -18,75 \text{ kN}$$

Por fim, para que sejam encontrados os valores máximo e mínimo da força cortante na seção Adir, basta que sejam somados os valores extremos provocados pela carga móvel ao valor da força cortante em Adir, devido à carga permanente (obtido da Figura 3.36):

$$Q_{A_{dir},máx} = Q_{A_{dir}}^{perm} + Q_{A_{dir},máx}^{móvel} = 22,5 + 55 = 77,5 \text{ kN}$$

$$Q_{A_{dir},mín} = Q_{A_{dir}}^{perm} + Q_{A_{dir},mín}^{móvel} = 22,5 - 18,75 = 3,75 \text{ kN}$$

Procedimento análogo deve ser feito para determinar os valores máximo e mínimo da força cortante nas outras quatro seções da viga. Esses procedimentos para as demais seções ficam como estudo para os alunos, sendo que os resultados podem ser conferidos na Tabela 3.1, que apresenta um resumo dos resultados desses cálculos, com os valores finais máximo e mínimo para cada seção.

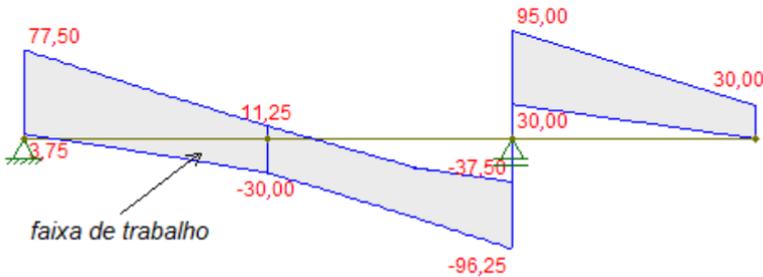
Tabela 3.1 | Tabela resumo

Seção	Força Cortante (kN)				
	Permanente	Móvel		Envoltória	
		máx.	mín.	máx.	mín.
$A_{dir}$	22,50	55,00	-18,75	77,50	3,75
B	-7,50	18,75	-22,50	11,25	-30,00
$C_{esq}$	-37,50	0,00	-58,75	-37,50	-96,25
$C_{dir}$	30,00	65,00	0,00	95,00	30,00
D	0,00	30,00	0,00	30,00	0,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Plotando as duas últimas colunas da Tabela 3.1, obtêm-se a envoltória de força cortante da viga, conforme a Figura 3.38.

Figura 3.38 | Envoltória de força cortante (kN)



Fonte: elaborada pelo autor.



## Assimile

Procedimento para determinar os valores máximos ou mínimos de um esforço em uma seção da viga, sujeita a uma carga permanente e a uma carga móvel:

- Determinar o valor do esforço, devido à carga permanente na seção analisada, traçando o diagrama de esforço;
- Traçar a linha de influência do esforço para a seção analisada;
- Posicionar o trem-tipo somente no trecho positivo ou negativo;
- Posicionar a maior carga concentrada na maior ordenada;
- Multiplicar as cargas concentradas pelas respectivas ordenadas;
- Multiplicar a carga distribuída pela área da linha de influência;
- Somar o resultado das multiplicações para encontrar o esforço, devido à carga móvel;
- Somar os esforços, devido às cargas permanente e móvel.

## Representação gráfica do momento fletor

A representação gráfica dos momentos fletores máximos e mínimos, que corresponde à envoltória de momento fletor, é feita de forma análoga à envoltória de força cortante, ou seja, traçando a linha de influência em várias seções ao longo da viga, determinam-se os valores máximos e mínimos de momento fletor para essas seções, provocados pela carga móvel. Esses valores são somados ao momento fletor provocado pela carga permanente, permitindo traçar a envoltória de momento fletor.

Para as vigas isostáticas, o método cinemático nos permite traçar e determinar as ordenadas de qualquer linha de influência, facilmente. Entretanto, no caso de vigas hiperestáticas, o método cinemático nos permite apenas determinar o aspecto da linha de influência, mas não as suas ordenadas. Portanto, para traçar a envoltória de esforços de uma viga hiperestática, devemos determinar o aspecto da linha de influência do esforço em várias seções ao longo da viga. Isso nos permite identificar onde devemos posicionar a carga móvel para encontrar os valores máximo e mínimo do esforço em cada seção.

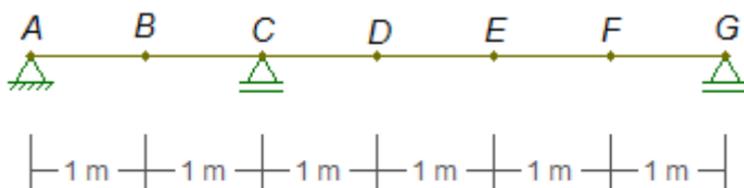
Para encontrar esses valores, basta que a carga móvel seja posicionada no local adequado e que a viga hiperestática seja resolvida por algum dos métodos de resolução de estruturas hiperestáticas (método das forças ou método dos deslocamentos). Repetindo esse processo para várias seções e somando os valores provocados pela carga móvel aos valores provocados pela carga permanente (obtido, também, pelo método das forças ou dos deslocamentos), é possível traçar a envoltória de um determinado esforço para a viga hiperestática.



### Exemplificando

Considere a viga da Figura 3.39, que possui  $E \cdot I = 10^4 \text{ kN/cm}^2$ , da qual se deseja traçar a envoltória de momento fletor, analisando as seções indicadas. A viga está submetida a uma carga permanente, uniformemente distribuída, de 6 kN/m bem como a uma carga móvel, uniformemente distribuída, de 10 kN/m.

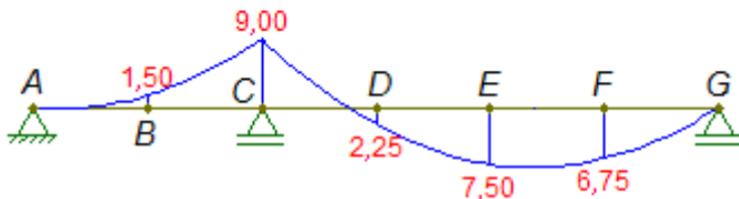
Figura 3.39 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolvendo a viga, apenas para a carga permanente (usando o método das forças ou dos deslocamentos), obtemos o diagrama de momento fletor da viga, conforme a Figura 3.40. Essa resolução fica a cargo dos alunos, para relembra e exercitar os conceitos aprendidos na Unidade 2.

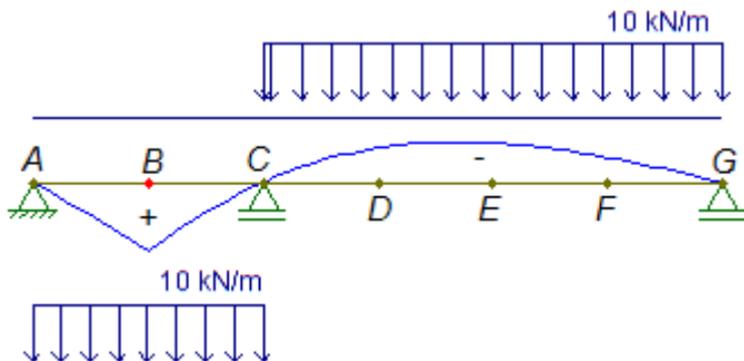
Figura 3.40 | Diagrama de momento fletor (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para determinar o valor máximo e mínimo do momento fletor provocado pela carga móvel na seção B, traçamos o aspecto da linha de influência de momento fletor nesta seção por meio do método cinemático. Dessa forma, fica claro onde devemos posicionar a carga móvel para obter os valores máximo e mínimo de momento fletor, conforme a Figura 3.41.

Figura 3.41 | LI  $M_B$ , com posicionamento da carga móvel



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, o valor máximo de momento fletor na seção  $B$ , devido à carga móvel, é encontrado com a resolução da viga hiperestática (pelo método das forças ou dos deslocamentos) com a carga de  $10 \text{ kN/m}$ , posicionada entre as seções  $A$  e  $C$ . Já o valor mínimo de momento fletor na seção  $B$ , devido à carga móvel, é encontrado por meio da resolução da viga hiperestática com a carga de  $10 \text{ kN/m}$ , posicionada entre as seções  $C$  e  $G$ . Novamente, os cálculos ficam como estudo para os alunos, e os resultados são:

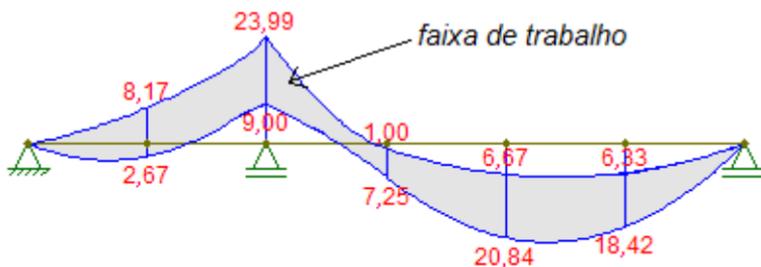
$$M_{B_{\text{máx}}}^{\text{móvel}} = 4,17 \text{ kN.m} \quad M_{B_{\text{mín}}}^{\text{móvel}} = -6,67 \text{ kN.m}$$

Somando-se esses valores com o momento provocado pela carga permanente (considerando momento positivo aquele que traciona o lado de baixo da viga):

$$M_{B_{\text{máx}}} = -1,5 + 4,17 = 2,67 \text{ kN.m} \quad M_{B_{\text{mín}}} = -1,5 - 6,67 = -8,17 \text{ kN.m}$$

Repetindo o procedimento para as demais seções, é possível traçar a envoltória de momento fletor apresentada na Figura 3.42.

Figura 3.42 | Envoltória de momento fletor (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.

## Pesquise mais

O traçado de envoltória de esforços é fundamental para o dimensionamento de pontes rodoviárias. Bons exemplos podem ser encontrados na literatura.

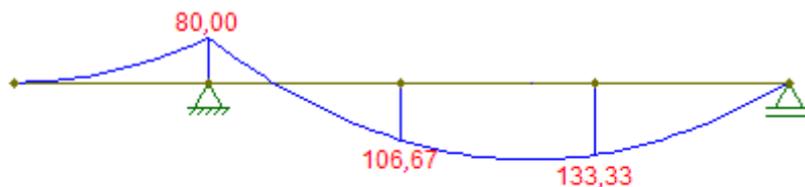
Martha, L. F. **Análise de Estruturas**: Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010. Capítulo 14.

## Sem medo de errar

Para finalizar o projeto da ponte em que está trabalhando, você deve traçar a envoltória de momento fletor da viga da Figura 3.32. Isso irá permitir que sejam encontrados os momentos fletores extremos que atuam nas seções da viga, o que possibilita realizar o seu correto dimensionamento. O primeiro passo consiste em determinar as reações de apoio e traçar o diagrama de momento fletor da viga, conforme a Figura 3.43, quando ela está submetida a uma carga permanente, uniformemente distribuída, de 40 kN/m. Foi adotada a convenção de momento anti-horário positivo. Dessa forma, é possível determinar o valor do momento fletor provocado pela carga permanente nas seções afastadas a cada dois metros.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow A_x = 0 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow 40 \cdot 2 \cdot 1 - 40 \cdot 6 \cdot 3 + B_y \cdot 6 = 0 \Rightarrow B_y = 106,67 \text{ kN} \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 \cdot 8 = 0 \Rightarrow A_y = 213,33 \text{ kN}\end{aligned}$$

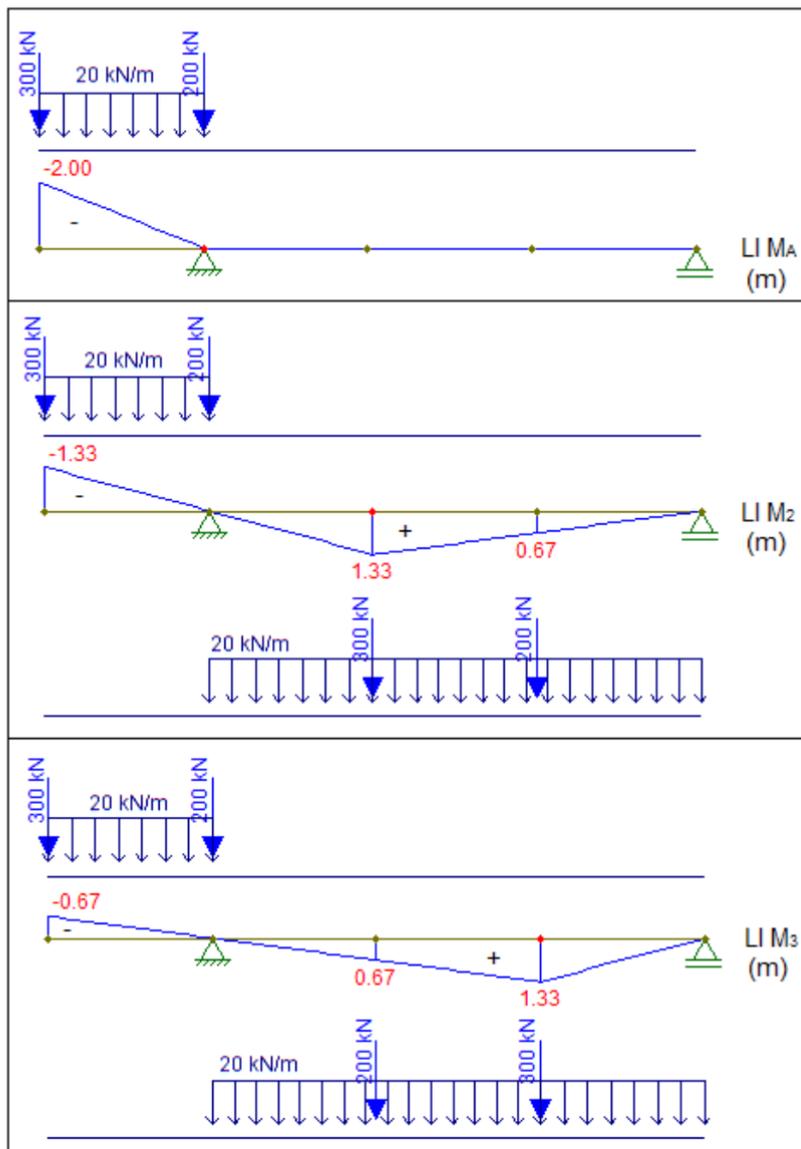
Figura 3.43 | Diagrama de momento fletor (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, deve-se traçar a linha de influência de momento fletor em cada uma das seções e posicionar a carga móvel de maneira a obter-se o momento fletor máximo e mínimo em cada seção. Como nas seções 1 e B o momento fletor é sempre nulo, independentemente da posição da carga, por ser a extremidade de uma viga, sem nenhum momento aplicado nessas extremidades, serão traçadas as linhas de influência apenas das outras três seções: A, 2 e 3. Essas linhas de influência, já com o posicionamento adequado da carga móvel, são apresentadas na Figura 3.44. Os valores dos momentos extremos são apresentados na sequência.

Figura 3.44 | Linhas de influência e posicionamento da carga móvel



Fonte: elaborada pelo autor.

$$M_{Amáx}^{móvel} = 0 \quad M_{Amin}^{móvel} = 300 \cdot (-2) + 20 \cdot \left( -\frac{2 \cdot 2}{2} \right) = -640 \text{ kN.m}$$

$$M_{2máx}^{móvel} = 300 \cdot 1,33 + 200 \cdot 0,67 + 20 \cdot \left( \frac{1,33 \cdot 6}{2} \right) = 612,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{2mín}^{móvel} = 300 \cdot (-1,33) + 20 \cdot \left( -\frac{1,33 \cdot 2}{2} \right) = -425,6 \text{ kN.m}$$

$$M_{3máx}^{móvel} = 300 \cdot 1,33 + 200 \cdot 0,67 + 20 \cdot \left( \frac{1,33 \cdot 6}{2} \right) = 612,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{3mín}^{móvel} = 300 \cdot (-0,67) + 20 \cdot \left( -\frac{0,67 \cdot 2}{2} \right) = -214,4 \text{ kN.m}$$

Somando-se os momentos provocados pela carga permanente aos momentos provocados pela carga móvel, chegamos nos valores da envoltória de momentos fletores, conforme a Tabela 3.2. A envoltória encontra-se na Figura 3.45.

Tabela 3.2 | Tabela de momento fletor

Seção	Momento fletor (kN.m)				
	Permanente	Móvel		Envoltória	
		máx.	mín.	máx.	mín.
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A	-80,00	0,00	-640,00	-80,00	-720,00
2	106,67	612,80	-425,60	719,47	-318,93
3	133,33	612,80	-214,40	746,13	-81,07
B	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.45 | Envoltória de momento fletor (kN.m)



Fonte: elaborada pelo autor

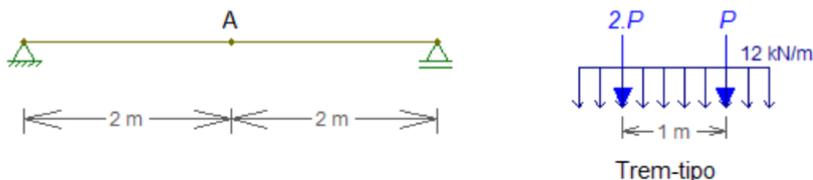
## Avançando na prática

Determinação da máxima carga móvel que pode ser aplicada em uma viga.

### Descrição da situação-problema

A viga da Figura 3.46 faz parte de uma ponte que já foi previamente dimensionada há alguns anos e já está em uso. Sabe-se que uma carga permanente, uniformemente distribuída, de 8 kN/m está atuando sobre a viga. Uma empresa de transporte rodoviário deseja passar com um de seus caminhões sobre essa ponte e precisa saber qual o peso máximo de veículo que a viga suporta. Ao consultar a memória de cálculo da viga, você identificou que parte dos cálculos foi perdido, sendo encontrada apenas a informação de que, na sua seção central (seção A), a viga suporta um momento máximo de 65 kN.m. Para o trem-tipo apresentado na Figura 3.46, determine o valor de  $P$ .

Figura 3.46 | Viga e trem-tipo



Fonte: elaborada pelo autor.

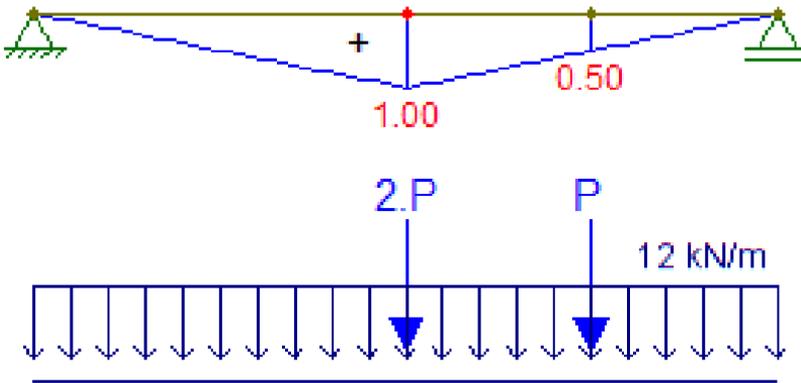
### Resolução da situação-problema

O momento na seção central da viga (seção A) provocado pela carga permanente é dado por:

$$M_A^{perm} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{8 \cdot 4^2}{8} = 16 \text{ kN.m}$$

Para o encontro do momento máximo na seção A provocado pela carga móvel, deve-se traçar a linha de influência de momento em A e posicionar a carga móvel adequadamente, conforme a Figura 3.47.

Figura 3.47 | Linha de influência de momento fletor em A (m)



Fonte: elaborada pelo autor.

$$M_{Amáx}^{móvel} = 2 \cdot P \cdot 1 + P \cdot 0,5 + 12 \cdot \left( \frac{1 \cdot 4}{2} \right) = 2,5 \cdot P + 24 \quad [kN \cdot m]$$

Somando o momento em A, provocado pela carga permanente, ao máximo momento em A, provocado pela carga móvel, temos o valor máximo da envoltória nessa seção, ou seja, o máximo momento solicitante que ocorre em A. Igualando o momento solicitante com o momento resistente de 65 kN.m, encontramos o valor de P:

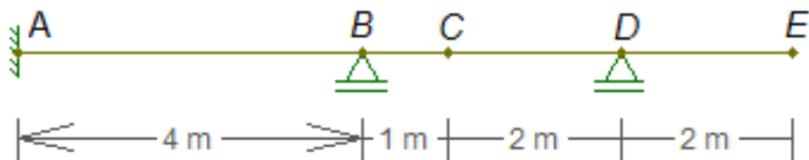
$$M_{Amáx} = M_{Rd} \Rightarrow M_{Amáx} = 65 kN \cdot m$$

$$M_{Amáx} = M_A^{perm} + M_{Amáx}^{móvel} \Rightarrow 65 = 16 + 2,5 \cdot P + 24 \Rightarrow P = 10 kN$$

## Faça valer a pena

**1.** A viga hiperestática da Figura 3.48 está submetida a uma carga móvel, uniformemente distribuída, de 5 kN.m. Para fazer o dimensionamento da armadura negativa dessa viga (armadura posicionada na parte superior da seção transversal da viga para resistir ao momento negativo que tracionar as fibras dessa região), é necessário determinar em que trecho da viga deve ser aplicada essa carga móvel para se obter o valor mínimo (maior valor negativo) do momento fletor na seção C.

Figura 3.48 | Viga hiperestática



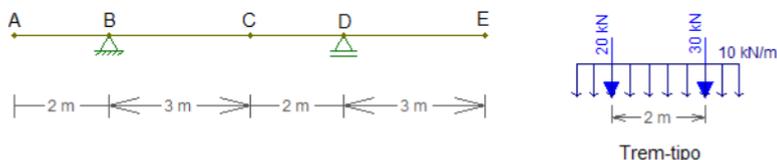
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta que contém o(s) trecho(s) em que a carga móvel deve ser aplicada para se obter o valor mínimo de momento fletor na seção C.

- a) No trecho AB.
- b) Nos trechos BC e DE.
- c) No trecho BD.
- d) Nos trechos AB e DE.
- e) Nos trechos AB e BD.

**2.** A viga da Figura 3.49 será utilizada em uma ponte rodoviária e está submetida ao trem-tipo indicado. Para o dimensionamento da viga, é necessário determinar os valores máximo e mínimo de momento fletor que ocorrem na seção C, provocados pelo trem-tipo indicado.

Figura 3.49 | Viga e trem-tipo



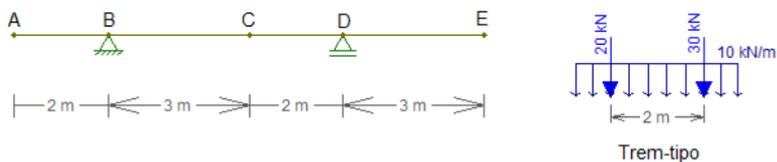
Fonte: elaborada pelo autor.

Marque a alternativa correta que apresenta os valores máximo e mínimo de momento fletor na seção C, provocados pelo trem-tipo.

- a) 74 kN.m e -101 kN.m.
- b) 55 kN.m e -90 kN.m.
- c) 148 kN.m e -150 kN.m.
- d) 130 kN.m e -58 kN.m.
- e) 201 kN.m e -120 kN.m.

**3.** A viga da Figura 3.50 está submetida a uma carga permanente, uniformemente distribuída, de  $12 \text{ kN/m}$  e ao trem-tipo indicado. Para dimensionar a viga ao cisalhamento, você deve encontrar quais são o máximo e o mínimo esforço cortante que atuam na seção C da viga.

Figura 3.50 | Viga e trem-tipo



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta os valores máximo e mínimo de esforço cortante para a seção C da viga.

- $25 \text{ kN}$  e  $-12 \text{ kN}$ .
- $8 \text{ kN}$  e  $-52 \text{ kN}$ .
- $12 \text{ kN}$  e  $-36 \text{ kN}$ .
- $35 \text{ kN}$  e  $-35 \text{ kN}$ .
- $42 \text{ kN}$  e  $-33 \text{ kN}$ .

# Referências

HIBBELER, R.C. **Análise das Estruturas**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas** - Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010.

SERRA, J. L. F. de A. **Estática das Estruturas II** – Estudo de Vigas Contínuas. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Limeira-SP, 1985.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural 1**. Método das deformações. Processo de Cross. 6. ed. Porto Alegre – Rio de Janeiro: Globo, 1981.

\_\_\_\_\_. **Curso de Análise Estrutural 2**. Deformações em estruturas. Método das forças. 4. ed.. Porto Alegre: Globo, 1980.



# Método da Rigidez e Processo de Cross

## Convite ao estudo

Caro aluno, bem-vindo à última unidade da disciplina de Estruturas Hiperestáticas! Neste momento, iremos nos aprofundar no Método dos Deslocamentos, que já estudamos na Unidade 2, aprendendo outros métodos para a resolução de estruturas hiperestáticas que se baseiam no Método dos Deslocamentos.

O primeiro método que veremos nesta unidade, o Método da Rigidez, é amplamente empregado em programas computacionais de análise estrutural. Você já pensou em como esses programas resolvem os mais variados tipos de estruturas? A resposta está no Método da Rigidez, que é empregado nos mais complexos e elaborados programas computacionais de análise estrutural. Portanto, o estudo desse método é fundamental para que, ao utilizar um programa desse tipo, você tenha o conhecimento de como ele está resolvendo o problema.

Já o segundo método que estudaremos nesta unidade, o Processo de Cross, é um método extremamente rápido e prático para a resolução de vigas hiperestáticas. Portanto, o conhecimento desse método irá facilitar muito a sua vida profissional na resolução de vigas hiperestáticas, que são um elemento estrutural muito comum nas mais diversas estruturas. Mas o Processo de Cross não se resume apenas a vigas, ele também pode ser empregado em pórticos.

Com os estudos desta unidade, você será capaz de resolver os mais variados tipos de estruturas hiperestáticas. Além disso, os conhecimentos desta unidade podem abrir as portas para uma nova área de atuação, na qual você talvez ainda não tenha pensado em trabalhar antes de estudar esse assunto: a área de desenvolvimento de programas computacionais para análise estrutural.

Por saber que você está estudando esse assunto, uma empresa de elaboração de software para estruturas o contratou. Dentre os desafios nessa área de trabalho, está o uso de matrizes no cálculo das estruturas. Como este será o foco principal do novo programa da empresa, seu novo trabalho requer que você se dedique a aprender como analisar as estruturas hiperestáticas por meio de matriz. Quais os parâmetros do Método da Rigidez? Como aplicar o Processo de Cross em diferentes estruturas?

Esta é a hora de encontrar as respostas a essas perguntas e vencer esse novo desafio!

# Seção 4.1

## Análise matricial de treliças

### Diálogo aberto

O Método da Rigidez é muito empregado no desenvolvimento de programas computacionais de análise estrutural. Isso se deve ao fato de ser um método que pode ser facilmente programável e que pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de estrutura. Esse método nada mais é do que a aplicação do Método dos Deslocamentos, já estudado na Seção 2.3 desta disciplina. Porém, no Método da Rigidez, usamos a notação matricial, o que facilita a programação do método. Dessa forma, esse método também é conhecido como análise matricial.

Para iniciar os estudos, iremos verificar como aplicar o Método da Rigidez em treliças planas. Como os únicos esforços que atuam nas barras das treliças são os esforços axiais, isso simplifica um pouco a aplicação desse método. Um dos pontos mais importantes desse método é a definição da matriz de rigidez da estrutura, que leva em consideração a rigidez de todas as barras que fazem parte da estrutura.

Em seu primeiro projeto, você foi contratado para utilizar a análise matricial na determinação dos esforços axiais que atuam nas barras de uma treliça. Como o Método da Rigidez pode ser usado no cálculo de treliças? Qual a metodologia?

Para conseguir responder a esses questionamentos, você deve compreender todas as etapas que fazem parte do Método da Rigidez (análise matricial) aplicado em treliças. Ao final desta seção, tendo os conhecimentos adequados de programação, você será capaz de desenvolver o seu próprio programa de análise de treliças!

### Não pode faltar

## Método da Rigidez: treliças

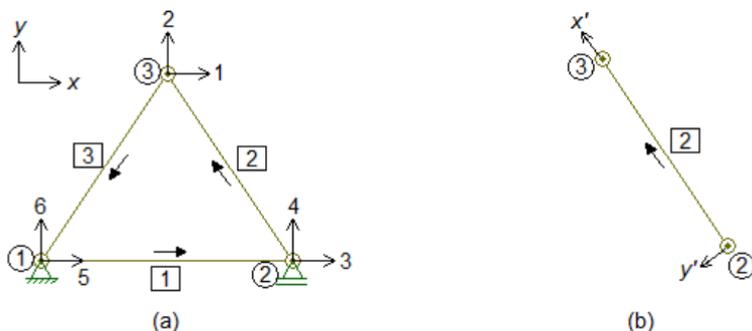
O Método da Rigidez pode ser empregado para a resolução dos mais diversos tipos de estruturas, sejam elas isostáticas ou hiperestá-

ticas, incluindo treliças, vigas ou pórticos, tanto em duas quanto em três dimensões. Esse método é uma simplificação do Método dos Elementos Finitos, utilizado pelos mais sofisticados programas computacionais de análise estrutural, e para a sua aplicação a estrutura é dividida em uma série de elementos. No caso das treliças, cada barra é um elemento, e esses elementos são conectados pelos nós da treliça.

Como o Método da Rigidez nada mais é do que a aplicação do Método dos Deslocamentos, as etapas básicas de cálculo são as mesmas apresentadas na Seção 2.3, ou seja, primeiramente são determinados os deslocamentos nos nós da estrutura. Posteriormente, são encontrados os esforços que atuam na estrutura, que, no caso das treliças, se resumem aos esforços axiais nas barras. Como o enfoque do Método da Rigidez é a sua implementação computacional, os cálculos serão desenvolvidos na forma matricial, o que facilita a programação desse método. Por esse motivo, esse método de análise estrutural também pode ser chamado de análise matricial.

Para iniciar a aplicação do Método da Rigidez em treliças, devemos fazer a identificação e a numeração dos membros (barras) e dos nós da treliça. Na Figura 4.1(a), os membros estão numerados dentro de um quadrado, enquanto os nós estão numerados dentro de um círculo. Para definir os nós inicial e final de cada membro, uma seta voltada para o nó final é desenhada em cada membro.

Figura 4.1 | (a) Treliça; (b) Coordenadas locais de um membro



Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir, devem ser definidas as coordenadas globais e locais. O sistema de coordenadas globais  $x$  e  $y$ , conforme definido na Figura 4.1(a), será usado para definir a direção e o sentido dos deslocamentos nodais e das forças externas aplicadas na treliça. Já o sistema

de coordenadas locais  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{y}'$  será usado para definir a direção e o sentido dos deslocamentos e esforços internos ao longo do comprimento de cada membro. Conforme a Figura 4.1(b), a origem do sistema de coordenadas locais de um membro sempre é posicionado no nó inicial desse membro.

Os deslocamentos que podem ocorrer em um nó de uma dada estrutura são denominados de graus de liberdade. Em uma treliça plana, cada nó pode apresentar três deslocamentos: um deslocamento horizontal, um deslocamento vertical e uma rotação. Porém, como os nós de uma treliça possuem a rotação totalmente livre, esse deslocamento não fará parte das incógnitas do nosso problema, já que a rotação dos nós não transmitirá momentos fletores para as barras da treliça. Assim, cada nó da treliça possui dois graus de liberdade (deslocamento horizontal e deslocamento vertical). Cada um desses graus de liberdade nos nós da treliça deve ser numerado segundo a orientação das coordenadas globais, conforme a Figura 4.1(a). Para facilitar a resolução posterior do problema, os graus de liberdade desconhecidos (deslocamentos livres) são numerados primeiro, deixando por último a numeração dos graus de liberdade conhecidos (deslocamentos nulos devido aos apoios).

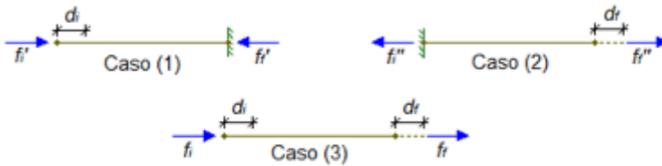
As próximas etapas do Método da Rigidez são análogas às etapas do Método dos Deslocamentos, porém desenvolvidas na forma matricial. A seguir essas etapas serão apresentadas em detalhes.

## Matriz de rigidez do membro

A matriz de rigidez de um membro, segundo a orientação das coordenadas locais  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{y}'$ , representa a relação entre força e deslocamento de uma barra da estrutura. No caso de barras de treliça, temos apenas forças e deslocamentos atuando ao longo do eixo longitudinal da barra (eixo  $\mathbf{x}'$ ). Conforme estudado na Seção 2.3, ao aplicarmos um deslocamento unitário ao longo do eixo longitudinal de uma barra de comprimento  $L$ , as forças que aparecem nas extremidades da barra, para que o deslocamento unitário seja mantido, são dadas por seu coeficiente de rigidez local  $\frac{E \cdot A}{L}$ , apresentando sentidos opostos em cada extremidade da barra. Assim, caso o deslocamento aplicado na extremidade da barra seja diferente do valor unitário, basta multiplicar esse coeficiente de rigidez local pelo valor

do deslocamento aplicado. A Figura 4.2 apresenta três casos possíveis de deslocamentos axiais que podem ocorrer em uma barra de treliça.

Figura 4.2 | Deslocamentos axiais em uma barra de treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso (1), um deslocamento  $d_i$  é aplicado no nó inicial da barra, surgindo as forças  $f_i'$  e  $f_i''$  nos nós inicial e final da barra, respectivamente. A força  $f_i'$  é positiva, pois está no sentido positivo do eixo  $x'$ , enquanto a força  $f_i''$  é negativa, pois está no sentido negativo do eixo  $x'$ , e seus valores são:

$$f_i' = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i \qquad f_i'' = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i$$

No caso (2), um deslocamento  $d_f$  é aplicado no nó final da barra, surgindo as forças  $f_i''$  e  $f_i'$  nos nós inicial e final da barra, respectivamente, dadas por:

$$f_i'' = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f \qquad f_i' = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f$$

Assim, no caso (3), que é o caso mais geral, quando são aplicados deslocamentos em ambas as extremidades da barra, as forças  $f_i$  e  $f_i'$  que aparecem em suas extremidades são obtidas pela superposição dos casos (1) e (2):

$$f_i = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i - \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f \qquad f_i' = -\frac{E \cdot A}{L} \cdot d_i + \frac{E \cdot A}{L} \cdot d_f$$

Essas equações podem ser escritas na forma matricial:

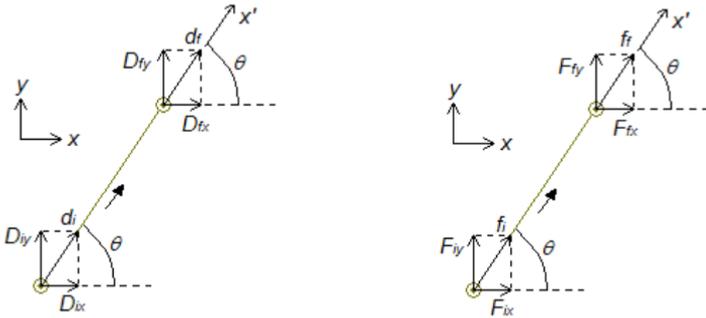
$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_i' \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \quad \text{onde} \quad \mathbf{k}' = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{k}'$  é chamada de matriz de rigidez do membro e é semelhante para qualquer barra de uma treliça. Uma vez conhecidos os deslocamentos nas extremidades de uma barra, pode-se

usar a relação anterior para encontrar o valor do esforço axial que atua nessa barra.

Essa matriz  $\mathbf{k}'$  tem como referência as coordenadas locais da barra. Porém, como normalmente cada barra da treliça pode apresentar um posicionamento e um sistema de coordenadas locais diferente do global, devemos fazer a transformação para as coordenadas globais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Considere uma barra inclinada de uma treliça, conforme a Figura 4.3.

Figura 4.3 | Barra inclinada de uma treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

Os deslocamentos axiais nas extremidades inicial ( $d_i$ ) e final ( $d_f$ ), que estão orientados segundo o eixo local  $\mathbf{x}'$ , podem ser expressos segundo o sistema global  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . De maneira semelhante, as forças que atuam segundo o sistema de eixos global  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  podem ser expressas em função das forças axiais nas extremidades inicial ( $f_i$ ) e final ( $f_f$ ), que estão orientadas segundo o eixo local  $\mathbf{x}'$ :

$$\begin{cases} d_i = D_{ix} \cdot \cos \theta + D_{iy} \cdot \text{sen} \theta \\ d_f = D_{fx} \cdot \cos \theta + D_{fy} \cdot \text{sen} \theta \end{cases} \quad \begin{cases} F_{ix} = f_i \cdot \cos \theta & F_{iy} = f_i \cdot \text{sen} \theta \\ F_{fx} = f_f \cdot \cos \theta & F_{fy} = f_f \cdot \text{sen} \theta \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} d_i \\ d_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ix} \\ D_{iy} \\ D_{fx} \\ D_{fy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{fx} \\ F_{fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D} \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}$$

A matriz  $T$ , que contém o seno e o cosseno do ângulo de inclinação da barra, é chamada de matriz de transformação de coordenadas e é responsável por transformar os deslocamentos do sistema de coordenadas global (vetor  $D$ ) para o sistema de coordenadas local (vetor  $d$ ). De maneira semelhante, a matriz  $T^T$  (matriz de transformação transposta) transforma as forças do sistema de coordenadas local (vetor  $f$ ) para o sistema de coordenadas global (vetor  $F$ ). Substituindo as equações anteriores na equação que contém a matriz de rigidez  $k'$  do membro e multiplicando ambos os lados da expressão por  $T^T$ :

$$f = k'd \Rightarrow f = k'TD \Rightarrow T^T f = T^T k'TD \Rightarrow F = kD$$

Onde  $k$  é a matriz de rigidez do membro escrita no sistema de coordenadas global:

$$k = T^T k' T = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \text{sen} \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta \\ \cos \theta \text{sen} \theta & \text{sen}^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \text{sen} \theta \\ -\cos \theta \text{sen} \theta & -\text{sen}^2 \theta & \cos \theta \text{sen} \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

Os valores de  $\cos \theta$  e  $\text{sen} \theta$  podem ser positivos ou negativos, dependendo de qual quadrante está localizado o ângulo  $\theta$ .

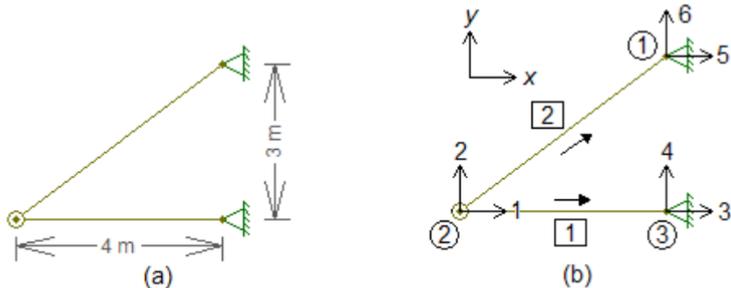
## Matriz de rigidez da treliça

Uma vez conhecida a matriz de rigidez global ( $k$ ) de cada membro, podemos determinar a matriz de rigidez da treliça ( $K$ ). Esse procedimento é feito somando-se a matriz de rigidez de todos os membros da treliça. A matriz de rigidez da treliça ( $K$ ) terá ordem igual ao número de graus de liberdade da treliça. Dessa forma, a matriz de rigidez de um membro ( $k$ ) irá contribuir nas posições relativas aos graus de liberdade de suas extremidades.



Para exemplificar a montagem da matriz de rigidez da estrutura, iremos determinar a matriz de rigidez da treliça da Figura 4.4(a), que possui  $E \cdot A$  constante. O primeiro passo consiste em numerar os nós, as barras, os graus de liberdade e definir os nós inicial e final de cada barra, conforme a Figura 4.4(b). Os graus de liberdade desconhecidos (1 e 2) foram numerados primeiro, seguidos dos graus de liberdade conhecidos (3, 4, 5 e 6), para facilitar os cálculos posteriores, conforme já comentado.

Figura 4.4 | (a) Treliça; (b) Numeração dos graus de liberdade



Fonte: elaborada pelo autor.

Prossegue-se com a determinação da matriz de rigidez de cada membro já nas coordenadas globais, onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos que as barras 1 e 2 fazem com a horizontal (eixo global  $x$ ). Os valores do cosseno e do seno desses ângulos são obtidos facilmente por trigonometria, uma vez que são fornecidas as cotas de localização dos nós da treliça. As linhas e as colunas das matrizes de rigidez dos membros estão identificadas com a numeração dos graus de liberdade dos nós inicial e final de cada membro.

**Membro 1:**

$$L_1 = 4m \quad \cos \theta_1 = 1 \quad \text{sen} \theta_1 = 0$$

Graus de liberdade: 1 e 2 para o nó inicial; 3 e 4 para o nó final.

$$k_1 = \frac{E \cdot A}{L_1} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & -\cos^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 \\ \cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & \text{sen}^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & -\text{sen}^2 \theta_1 \\ -\cos^2 \theta_1 & -\cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & -\text{sen}^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 & \text{sen}^2 \theta_1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$k_1 = E \cdot A \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Membro 2:

$$L_2 = 5m \quad \cos\theta_2 = 0,8 \quad \text{sen}\theta_2 = 0,6$$

Graus de liberdade: 1 e 2 para o nó inicial; 5 e 6 para o nó final.

$$k_2 = \frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \cos^2\theta_2 & \cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & -\cos^2\theta_2 & -\cos\theta_2\text{sen}\theta_2 \\ \cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & \text{sen}^2\theta_2 & -\cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}^2\theta_2 \\ -\cos^2\theta_2 & -\cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cos\theta_2\text{sen}\theta_2 \\ -\cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}^2\theta_2 & \cos\theta_2\text{sen}\theta_2 & \text{sen}^2\theta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$k_2 = E \cdot A \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Como a treliça possui seis graus de liberdade, a matriz de rigidez dessa treliça terá dimensão 6x6. As matrizes de rigidez dos dois membros são somadas e cada uma delas contribui nas posições de seus respectivos graus de liberdade. Assim,  $k_1$  irá contribuir nas linhas e colunas 1, 2, 3 e 4 da matriz de rigidez da treliça, enquanto  $k_2$  irá contribuir nas linhas e colunas 1, 2, 5 e 6:

$$K = E \cdot A \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,378 & 0,096 & -0,25 & 0 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 & 0 & 0 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0 & 0 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



Embora o processo de montagem da matriz de rigidez da estrutura seja trabalhoso de ser feito manualmente, reflita em como esse processo pode ser facilmente utilizado na elaboração de programas de computadores que realizam análises estruturais, o que permite a resolução de estruturas complexas de forma rápida e eficiente.

## Aplicação do Método da Rigidez

Uma vez determinada a matriz de rigidez da treliça, pode-se montar a equação de rigidez global da treliça, que na forma matricial, supondo uma estrutura com seis graus de liberdade, fica:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K}\mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Onde:

- $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da treliça.
- $\mathbf{F}_g$  é o vetor global de forças externas que atuam em cada grau de liberdade da treliça.
- $\mathbf{D}_g$  é o vetor global de deslocamentos que atuam em cada grau de liberdade da treliça.

Como os graus de liberdade desconhecidos foram numerados primeiro, os primeiros deslocamentos do vetor  $\mathbf{D}_g$  são desconhecidos (incógnitas do problema), enquanto os últimos deslocamentos já são conhecidos e correspondem aos deslocamentos nos apoios, que usualmente são nulos. Já no vetor  $\mathbf{F}_g$ , as primeiras forças correspondem às cargas aplicadas nos nós da treliça (forças conhecidas), enquanto as últimas forças correspondem às reações de apoio (forças desconhecidas). Portanto, esse é um problema de seis equações e seis incógnitas (algumas incógnitas são deslocamentos e outras são forças, ou seja, as reações de apoio) e pode ser solucionado.

Para resolver o problema de uma maneira mais fácil, eliminam-se as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade dos apoios, já que os deslocamentos nesses graus de liberdade são nulos. Caso, por exemplo, os apoios estejam impedindo os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade 3, 4, 5 e 6, essas

linhas e colunas podem ser eliminadas, já que  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  são nulos. Assim, o sistema de equações fica:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Como  $F_1$  e  $F_2$  são conhecidos (forças aplicadas nos nós da treliça), resolvendo esse sistema encontram-se os deslocamentos desconhecidos  $D_1$  e  $D_2$ . Para determinar as reações de apoio, basta substituir os valores de  $D_1$  e  $D_2$  no sistema de equações global e encontrar as forças  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$ . Uma vez que  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  são nulos, a determinação das reações de apoio se resume em resolver:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ K_{41} & K_{42} \\ K_{51} & K_{52} \\ K_{61} & K_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

A última etapa do problema consiste em determinar os esforços que atuam nas barras da treliça. Como já conhecemos os deslocamentos em todos os nós das barras, basta utilizar a equação definida para cada membro da treliça, seguindo coordenadas locais. Lembrando que, como temos os deslocamentos orientados segundo as coordenadas globais (vetor  $D$ ), devemos utilizar a matriz de transformação  $T$  para transformar esses deslocamentos segundo as coordenadas locais (vetor  $d$ ). Para uma barra que, por exemplo, possui os graus de liberdade 1, 2, 3 e 4 nas suas extremidades, teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \mathbf{k}'\mathbf{d} &\Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} f_i \\ f_f \end{bmatrix} &= \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como as forças nos nós inicial ( $f_i$ ) e final ( $f_f$ ) são iguais em módulo, apresentando apenas sinais opostos (para manter o equilíbrio da barra), basta determinar  $f_f$  (que pela Figura 4.2 traciona a barra) para termos o esforço que atua na barra:

$$f_f = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\text{sen} \theta & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$



O Método da Rigidez segue os mesmos passos do Método dos Deslocamentos, porém utilizando a forma matricial. Os passos principais dos dois métodos são:

- 1) A determinação da matriz de rigidez local do membro ( $\mathbf{k}'$ ) no Método da Rigidez é equivalente à determinação dos coeficientes de rigidez locais no Método dos Deslocamentos.
- 2) A determinação da matriz de rigidez global da estrutura ( $\mathbf{K}$ ) no Método da Rigidez equivale à determinação dos coeficientes de rigidez globais no Método dos Deslocamentos.
- 3) Em ambos os métodos, a determinação dos deslocamentos desconhecidos é feita pela resolução de um sistema de equações.



O procedimento apresentado também pode ser empregado para a resolução de treliças espaciais, treliças com barras submetidas à variação de temperatura e defeitos de fabricação ou treliças com recalque de apoio. Para conhecer exemplos dessas situações, leia o capítulo 14 do seguinte livro disponível na Biblioteca Virtual:

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

## Sem medo de errar

Após estudar o Método da Rigidez, você já tem condições de desenvolver o seu primeiro projeto na empresa de elaboração de software para estruturas, onde você acaba de ser contratado. Nesse primeiro projeto, você deve utilizar a análise matricial para determinar os esforços que atuam nas barras de uma treliça. Para executar esse projeto é fundamental que você especifique a metodologia que deve ser utilizada para o cálculo de treliças pelo Método da Rigidez.

O primeiro passo consiste em numerar os nós e as barras (membros) da treliça, definindo quais são os nós inicial e final de cada barra. A seguir, os graus de liberdade também devem ser numerados. São dois graus de liberdade por nó de treliça: um deslocamento horizontal e um deslocamento vertical. Para facilitar os cálculos posteriores, os graus de liberdade desconhecidos são numerados

primeiro e, em seguida, são numerados os graus de liberdade conhecidos, ou seja, aqueles correspondentes aos deslocamentos impedidos pelos apoios.

O próximo passo consiste em determinar a matriz de rigidez de cada membro da treliça, ou seja, determinar a matriz de rigidez de cada barra da treliça, lembrando que devemos transformar essas matrizes para as coordenadas globais. Como nas barras das treliças atuam somente esforços axiais, a matriz de rigidez de uma barra ( $\mathbf{k}$ ), já com relação às coordenadas globais, é dada por:

$$\mathbf{k} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

Onde:

- $E$ : módulo de elasticidade do material da barra da treliça.
- $A$ : área da seção transversal da barra da treliça.
- $L$ : comprimento da barra da treliça.
- $\theta$ : ângulo de inclinação da barra da treliça.

A determinação da matriz de rigidez da treliça ( $\mathbf{K}$ ) é feita pela soma das matrizes de rigidez de todas as barras da treliça, sendo que cada barra contribui nas posições referentes aos graus de liberdade dos seus nós inicial e final. Se uma treliça possui  $n$  graus de liberdade, a matriz de rigidez dessa treliça será de ordem  $n$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \cdots & K_{3n} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & \cdots & K_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & K_{n4} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

A determinação dos deslocamentos desconhecidos nos nós da treliça e das reações de apoio é feita pela resolução do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \dots & K_{3n} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & \dots & K_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & K_{n4} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Onde:

- $\mathbf{F}_g$ : vetor de cargas na direção de cada grau de liberdade.
- $\mathbf{D}_g$ : vetor de deslocamentos na direção de cada grau de liberdade.

Como alguns deslocamentos do vetor  $\mathbf{D}_g$  são nulos (deslocamentos nos apoios), podemos eliminar as linhas e as colunas referentes a esses deslocamentos nulos, para reduzir o sistema de equações e facilitar a resolução. Tendo determinado todos os deslocamentos nos nós, o vetor  $\mathbf{D}_g$  não terá mais nenhuma incógnita, portanto, basta substituir os valores dos deslocamentos encontrados no sistema de equações anterior para encontrar as forças desconhecidas do vetor  $\mathbf{F}_g$ , que são as reações de apoio.

A última etapa consiste em determinar os valores dos esforços em cada barra da treliça. Para isso, basta voltar na equação da barra analisada, segundo o sistema de coordenadas locais:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_i \\ f_f \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

Onde:

- $f_i$ : esforço axial no nó inicial da barra.
- $f_f$ : esforço axial no nó final da barra.
- $D_1, D_2, D_3$  e  $D_4$ : deslocamentos, segundo as coordenadas globais, nos quatro graus de liberdade das extremidades da barra.

Como os esforços axiais nos nós inicial e final da barra são iguais, basta determinar uma delas, por exemplo, o esforço no nó final:

$$f_f = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\text{sen}\theta & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

Como na definição da formulação anterior  $f_f$  foi definida como uma força de tração, caso o resultado seja positivo, a barra estará tracionada e, caso o resultado seja negativo, a barra estará comprimida.

Com essa metodologia definida, é possível fazer a implementação computacional do Método da Rigidez para treliças, permitindo resolver qualquer tipo de treliça.

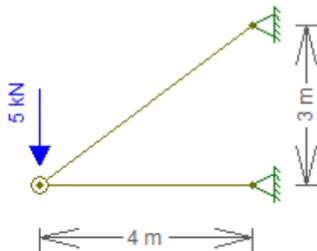
## Avançando na prática

### Determinação dos esforços nas barras de uma treliça pelo Método da Rigidez

#### Descrição da situação-problema

A treliça da Figura 4.5 está sendo utilizada para suportar uma carga de 5 kN em sua extremidade livre. Utilizando o Método da Rigidez, determine os esforços que atuam nas barras dessa treliça, sabendo que  $E \cdot A = 8 \cdot 10^6 \text{ kN}$  para todas as barras da treliça.

Figura 4.5 | Treliça suportando carga de 5 kN



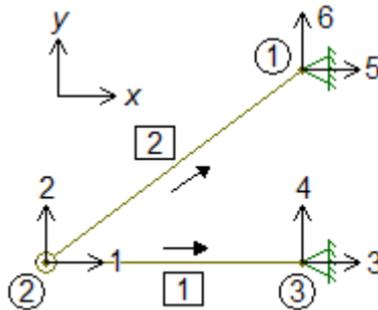
Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Pode-se notar que a treliça da Figura 4.5 possui a mesma geometria da treliça da Figura 4.4(a), para a qual já foi determinada a

matriz de rigidez  $K$ . Portanto, podemos utilizar esse resultado para encontrar os esforços nas barras da treliça na qual é aplicada uma carga de 5 kN em sua extremidade livre. É importante salientar que, para que possamos usar a mesma matriz de rigidez da treliça  $K$ , devemos adotar as mesmas numerações de nós, barras e graus de liberdade utilizadas na determinação da matriz de rigidez. Essa numeração é apresentada na Figura 4.6.

Figura 4.6 | Numeração de nós, barras e graus de liberdade



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar os deslocamentos e as reações de apoio desconhecidos, basta resolver o seguinte sistema de equações:

$$F_g = KD_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Os deslocamentos  $D_1$  e  $D_2$  são desconhecidos, enquanto  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  são nulos, já que os deslocamentos referentes aos graus de liberdade 3, 4, 5 e 6 estão impedidos devido aos apoios. Conseqüentemente, as forças  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$  são desconhecidas, pois são as reações de apoio. Como não temos nenhuma carga

aplicada na direção do grau de liberdade 1, a força  $F_1$  é nula. Já na direção do grau de liberdade 2, temos  $F_2 = -5kN$  (negativo, pois a carga está no sentido contrário ao grau de liberdade 2 positivo). Substituindo esses valores na equação anterior, assim como a matriz de rigidez já determinada, usando  $E \cdot A = 8 \cdot 10^6 kN$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0,378 & 0,096 & -0,25 & 0 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & 0 & 0 & -0,096 & -0,072 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 & 0 & 0 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0 & 0 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando as linhas 3, 4, 5 e 6, correspondentes aos graus de liberdade com deslocamentos nulos, temos o seguinte sistema com sua respectiva solução:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0,378 & 0,096 \\ 0,096 & 0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 3,33 \cdot 10^{-6} m$$

$$D_2 = -13,125 \cdot 10^{-6} m$$

Substituindo os valores de D1 e D2 no sistema de equações original, encontramos as reações de apoio:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,128 & -0,096 \\ -0,096 & -0,072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$F_3 = -6,67kN$$

$$F_4 = 0kN$$

$$F_5 = 6,67kN$$

$$F_6 = 5kN$$

Por fim, determinam-se os esforços nas barras 1 e 2, usando a equação. Para a barra 1:

$$f_1 = \frac{E \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & \text{sen} \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{8 \cdot 10^6}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -6,67 \text{ kN (compressão)}$$

Para a barra 2:

$$f_2 = \frac{E \cdot A}{L_2} \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 & -\text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 & \text{sen} \theta_2 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \frac{8 \cdot 10^6}{5} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 3,33 \cdot 10^{-6} \\ -13,125 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8,33 \text{ kN (tração)}$$

## Faça valer a pena

1. Uma barra de uma treliça possui 2 metros de comprimento e  $E \cdot A = 4 \cdot 10^6 \text{ kN}$ . Seu eixo forma um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. A matriz de rigidez  $k$  dessa barra, segundo as coordenadas globais  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical), é dada por:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que contém os valores corretos dos elementos  $k_{22}$  e  $k_{43}$  da matriz de rigidez dessa barra.

- $k_{22} = 0,5 \cdot 10^6$  e  $k_{43} = 0,87 \cdot 10^6$ .
- $k_{22} = -1,5 \cdot 10^6$  e  $k_{43} = -0,87 \cdot 10^6$ .
- $k_{22} = -0,5 \cdot 10^6$  e  $k_{43} = -0,87 \cdot 10^6$ .
- $k_{22} = 1,5 \cdot 10^6$  e  $k_{43} = 0,87 \cdot 10^6$ .
- $k_{22} = 0,87 \cdot 10^6$  e  $k_{43} = 0,5 \cdot 10^6$ .

**2.** A treliça da figura a seguir será utilizada em uma cobertura de um galpão industrial. A sua empresa foi contratada para projetar a treliça, e a determinação dos esforços solicitantes em cada barra da treliça será feita pelo Método da Rigidez. Para tanto, é necessário saber qual o tamanho da matriz de rigidez da treliça.

Treliça da cobertura de um galpão industrial



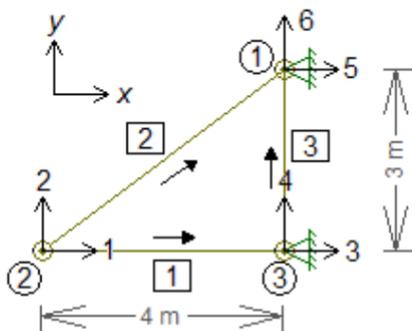
Fonte: elaborada pelo autor.

Marque a alternativa que apresenta a dimensão correta da matriz de rigidez da treliça.

- a) 30x30.
- b) 10x30.
- c) 10x10.
- d) 20x10.
- e) 20x20.

**3.** A treliça da figura a seguir, que possui  $E \cdot A = 10^6 \text{ kN}$  para todas as suas barras, tem a numeração de seus nós, barras e graus de liberdade conforme indicado.

Treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

A matriz de rigidez de cada barra, já segundo as coordenadas globais, já foi determinada:

$$k_1 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,33 & 0 & 0,33 \end{bmatrix}$$

Para resolver essa treliça pelo Método da Rigidez, deve-se determinar a matriz de rigidez da treliça, que tem o seguinte formato:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que contém os valores corretos dos elementos  $K_{25}$ ,  $K_{31}$  e  $K_{66}$  da matriz de rigidez da treliça da figura apresentada.

- $K_{25} = 0$ ,  $K_{31} = 0$  e  $K_{66} = 0,128 \cdot 10^6$ .
- $K_{25} = -0,096 \cdot 10^6$ ,  $K_{31} = -0,25 \cdot 10^6$  e  $K_{66} = 0,402 \cdot 10^6$ .
- $K_{25} = 0,25 \cdot 10^6$ ,  $K_{31} = -0,072 \cdot 10^6$  e  $K_{66} = 0,33 \cdot 10^6$ .
- $K_{25} = -0,33 \cdot 10^6$ ,  $K_{31} = 0$  e  $K_{66} = 0,402 \cdot 10^6$ .
- $K_{25} = 0,096 \cdot 10^6$ ,  $K_{31} = -0,33 \cdot 10^6$  e  $K_{66} = 0,25 \cdot 10^6$ .

## Seção 4.2

### Análise matricial de vigas e pórticos

#### Diálogo aberto

Tendo compreendido a aplicação do Método da Rigidez para treliças, podemos partir para a utilização desse mesmo método na resolução de vigas e pórticos. Esse método, também chamado de análise matricial, pode ser empregado para os mais diversos tipos de estruturas. Como se trata do mesmo método estudado anteriormente, o seu procedimento é muito semelhante.

Veremos nesta seção que a principal diferença entre a análise matricial de treliças, vigas ou pórticos está na determinação da matriz de rigidez dos elementos que compõem a estrutura. Dessa forma, sabendo montar a matriz de rigidez do elemento, você terá condições de resolver qualquer viga ou pórtico pelo Método da Rigidez.

Isso permitirá que você desenvolva o seu segundo projeto na empresa de elaboração de softwares para estruturas na qual está trabalhando. Nesse novo projeto, você deve utilizar a análise matricial na determinação dos esforços que atuam em uma viga. Como o Método da Rigidez pode ser usado no cálculo de vigas? Qual a metodologia?

Ao final desta seção, você será capaz não só de resolver os mais diversos tipos de estruturas pelo Método da Rigidez, mas também, tendo conhecimentos básicos de programação, de desenvolver o seu próprio programa computacional de análise de estruturas, sejam elas treliças, vigas ou pórticos!

Pronto para mais esse desafio?

#### Não pode faltar

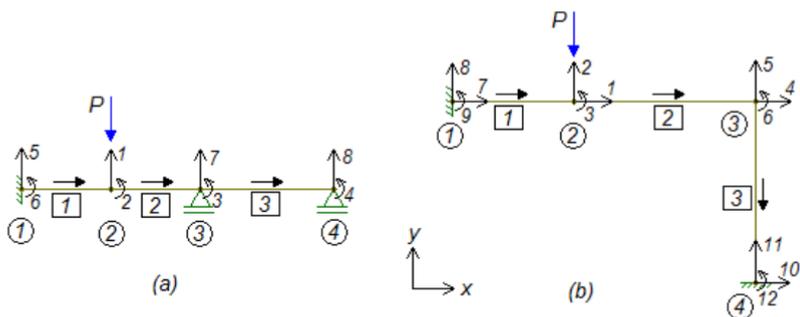
### Método da Rigidez: vigas e pórticos

O procedimento de resolução de vigas e pórticos pelo Método da Rigidez é muito semelhante ao procedimento apresentado na Seção 4.1, na qual analisamos a resolução de treliças pelo Método da Rigi-

dez. Primeiramente, devemos definir e numerar os nós e os elementos da estrutura. No caso das treliças, cada barra é considerada como um elemento, ou seja, os nós são os pontos de encontro de duas ou mais barras. Já no caso de vigas e pórticos, para facilitar a resolução do problema, consideramos como nós os pontos de aplicação de cargas concentradas, os pontos de início e fim de cargas distribuídas, os pontos com apoios, os pontos onde existe mudança da seção transversal da barra e os pontos com mudança de inclinação da barra. Dessa forma, dividimos as vigas e os pórticos em elementos finitos, e cada elemento é delimitado por um nó inicial e um nó final.

Na Figura 4.7, são apresentados exemplos da numeração dos nós (dentro de um círculo) e dos elementos (dentro de um quadrado) para uma viga e para um pórtico. Também estão indicados os nós inicial e final de cada elemento, com uma seta na direção do eixo do elemento e com sentido do nó inicial para o nó final.

Figura 4.7 | (a) Viga; (b) Pórtico



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, deve-se definir e numerar os graus de liberdade de cada nó, lembrando que iremos trabalhar com estruturas planas (em duas dimensões). Para as treliças, são considerados dois graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento horizontal e um deslocamento vertical. Para as vigas, iremos considerar também dois graus de liberdade por nó, porém sendo eles um deslocamento vertical e uma rotação, para serem considerados os efeitos de flexão e de cisalhamento na viga. Já para os pórticos, iremos considerar três graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento vertical, um deslocamento horizontal e uma rotação, ou seja, além do efeito

da flexão e do cisalhamento, também consideraremos o efeito do esforço normal (ou axial).

A numeração dos graus de liberdade é feita como no caso das treliças: primeiro, numeramos os graus de liberdade desconhecidos (deslocamentos e rotações desconhecidas) e, por último, numeramos os graus de liberdade conhecidos (deslocamentos e rotações referentes aos apoios, que usualmente são nulos, com exceção dos casos com recalques de apoio). Os exemplos da Figura 4.7 já apresentam a numeração dos graus de liberdade.

Adotaremos as coordenadas locais e globais da mesma maneira como foi feito para as treliças. As coordenadas locais têm origem no nó inicial do elemento, com: o eixo  $x'$  posicionado ao longo do eixo do elemento e orientado do nó inicial para o nó final; o eixo  $y'$  perpendicular ao eixo  $x'$ ; e o eixo  $z'$  saindo do plano da estrutura. Para as coordenadas globais, o eixo  $x$  é posicionado na horizontal, o eixo  $y$  na vertical e o eixo  $z$  está saindo do plano da estrutura. No caso de vigas horizontais, os eixos do sistema local são todos paralelos aos eixos do sistema, para todos os elementos da viga. Já para os pórticos, isso não ocorre com todos os elementos, pois alguns não são horizontais.

A próxima etapa consiste na determinação da matriz de rigidez de cada elemento. A matriz de rigidez de um elemento de viga é diferente da matriz de rigidez de um elemento de treliça. Enquanto na treliça leva-se em consideração apenas a rigidez axial do elemento para a determinação de sua matriz de rigidez, no caso das vigas leva-se em consideração a rigidez à flexão e também a rigidez ao cisalhamento. Consequentemente, a matriz de rigidez de um elemento de pórtico também será diferente da matriz de rigidez de um elemento de viga e de um elemento de treliça, pois para o pórtico leva-se em consideração a rigidez axial, a rigidez à flexão e a rigidez ao cisalhamento.

Outro ponto que merece destaque diz respeito à aplicação da matriz de transformação (também chamada "matriz de rotação"), que no caso de treliças e pórticos é necessária para transformar a matriz de rigidez do elemento das coordenadas locais para as globais, uma vez que podem existir barras inclinadas e verticais. Já para as vigas horizontais, essa matriz de transformação não é necessária, uma vez que os eixos locais são paralelos aos eixos globais.

Com a matriz de rigidez de cada elemento já transformada para as coordenadas globais, basta montar a matriz de rigidez da estrutura, feita da mesma maneira como apresentado para o caso de treliças, ou seja, somando-se a matriz de rigidez de cada elemento, contribuindo nas posições referentes aos graus de liberdade dos nós inicial e final de cada elemento. Por fim, são determinados os deslocamentos e as reações de apoio por meio da álgebra de matrizes.

## Álgebra de matrizes

A utilização do Método da Rigidez (análise matricial) envolve operações com matrizes. Os principais conceitos da álgebra de matrizes necessários para a aplicação do Método da Rigidez são a multiplicação de uma matriz por um escalar, a multiplicação de matrizes e a definição de matriz transposta. Esses conceitos serão revisados brevemente a seguir, com a apresentação de alguns exemplos.

Para obter a matriz resultante da multiplicação de uma matriz por um escalar, basta multiplicar cada elemento da matriz por esse escalar.

No caso da multiplicação de duas matrizes, primeiro devemos verificar se é possível realizar a multiplicação dessas duas matrizes, ou seja, nem todas as matrizes podem ser multiplicadas uma pela outra. Isso vai depender da ordem da matriz. A multiplicação **AB** de duas matrizes só é possível se elas forem conformáveis, ou seja, se o número de colunas da matriz **A** for igual ao número de linhas da matriz **B**. Assim, se a matriz **A** tiver ordem ( $m \times n$ ) e a matriz **B** tiver ordem ( $n \times p$ ), a matriz resultante da multiplicação de **AB** será uma matriz de ordem ( $m \times p$ ). É importante destacar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, o resultado da multiplicação de **AB** é diferente do resultando da multiplicação de **BA** (caso as matrizes **A** e **B** tenham as ordens apresentadas, a multiplicação **BA** nem mesmo pode ser feita).

A matriz resultante da multiplicação de **AB** é obtida multiplicando primeiramente cada elemento da linha da matriz **A** pelo respectivo elemento da coluna da matriz **B**; em seguida, somam-se os valores resultantes das multiplicações para obter um elemento da matriz resultante. Os demais elementos são obtidos da mesma forma.

Dada uma matriz **A**, a sua matriz transposta **A<sup>T</sup>** é obtida trocando de posição as linhas pelas colunas de **A**.



Considere as matrizes **A** e **B** a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

1) Determine a matriz resultante da multiplicação da matriz **A** pelo escalar  $k = -3$ .

$$k\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -6 & -15 \\ -12 & -21 \end{vmatrix}$$

2) Verifique se a multiplicação das matrizes **AB** é possível. Caso seja possível, determine a matriz resultante dessa multiplicação.

Como o número de colunas da matriz **A** (2 colunas) é igual ao número de linhas da matriz **B** (2 linhas), a multiplicação **AB** é possível. A ordem da matriz resultante será:

$$(2 \times 2)(2 \times 4) = (2 \times 4)$$

Portanto, a matriz **C** resultante será:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 32 & 11 & 50 \\ 18 & 52 & 19 & 76 \end{vmatrix}$$

A obtenção dos elementos da matriz **C** é feita multiplicando-se cada linha da matriz **A** pela respectiva coluna da matriz **B**. Por exemplo, para a obtenção do elemento  $c_{12}$ , multiplicamos os elementos da linha 1 da matriz **A** pelos respectivos elementos da coluna 2 da matriz **B**; em seguida, soma-se o resultado dessas multiplicações:

$$c_{12} = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 32$$

Os demais elementos são obtidos de maneira análoga.

3) Obtenha  $\mathbf{B}^T$  (matriz transposta de **B**).

Para obter a matriz transposta, basta trocar as linhas pelas colunas, ou seja, a linha 1 passa a ser a coluna 1, enquanto a linha 2 passa a ser a coluna 2:

$$\mathbf{B}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

## Análise matricial de vigas

Para determinarmos a matriz de rigidez de um elemento (membro) de uma viga, considere o elemento da Figura 4.8, na qual está indicado o sistema de coordenadas local  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  (este último está saindo do plano da figura). Como um elemento de viga leva em consideração a rigidez ao cisalhamento e à flexão, em cada extremidade do elemento existem duas reações, sendo uma força cortante e um momento fletor, representados na Figura 4.8 no sentido positivo das coordenadas locais (para o momento fletor, considera-se o sentido anti-horário positivo, pela regra da mão direita). Para os deslocamentos lineares e angulares, também adotaremos essa mesma convenção de sinais.

Figura 4.8 | Coordenadas locais e reações positivas

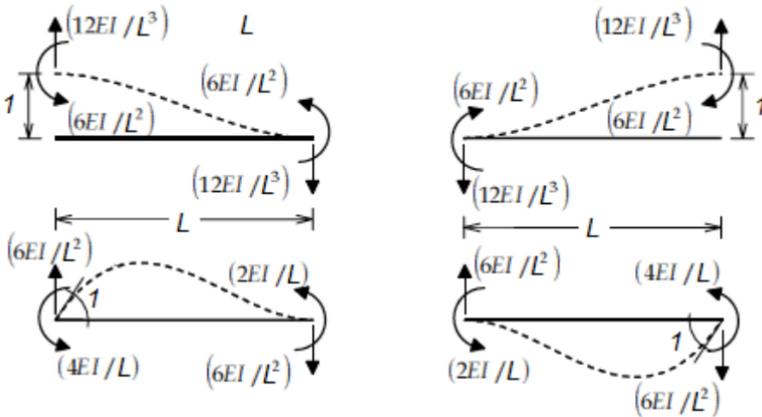


Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme já apresentado na seção anterior para o elemento de barra de treliça, a matriz de rigidez de um elemento representa os esforços que surgem nas extremidades do elemento quando são aplicados deslocamentos unitários nessas extremidades. Para o elemento de barra de treliça, vimos que a matriz de rigidez local do elemento é de tamanho  $2 \times 2$ , visto que cada extremidade pode apresentar um único deslocamento axial, resultando em um total de dois deslocamentos possíveis. Já no caso do elemento de viga, cada extremidade pode apresentar dois deslocamentos, um transversal ao elemento e outro angular (rotacional). Dessa forma, são quatro deslocamentos possíveis em um elemento de viga, o que resulta em uma matriz de rigidez de tamanho  $4 \times 4$ .

Os valores de cada posição da matriz de rigidez do elemento de viga são obtidos pelos coeficientes de rigidez locais já apresentados na Seção 2.3 e estão exibidos na figura a seguir.

Figura 4.9 | Coeficientes de rigidez locais para elemento de viga



Fonte: adaptada de Martha (2010, p. 278).

Os valores de cada posição da matriz de rigidez do elemento de viga são obtidos pelos coeficientes de rigidez locais já apresentados na Seção 2.3 e estão exibidos na figura a seguir.

Pode-se notar que, quando um deslocamento unitário transversal é aplicado na extremidade inicial do elemento e todos os demais deslocamentos nas extremidades são impedidos, surgem as seguintes reações nas extremidades:

$$v_i = \frac{12E \cdot I}{L^3} \quad m_i = \frac{6E \cdot I}{L^2} \quad v_f = -\frac{12E \cdot I}{L^3} \quad m_f = \frac{6E \cdot I}{L^2}$$

Aplicando os outros três deslocamentos unitários possíveis, obtemos os valores das reações de maneira análoga. Representando essas relações de força-deslocamento na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ m_i \\ v_f \\ m_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ \phi_i \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{d}$$

Onde:

- $t_i$  e  $t_f$  são os deslocamentos transversais ao elemento nas extremidades inicial e final, respectivamente.

- $\phi_i$  e  $\phi_f$  são as rotações (deslocamentos rotacionais) nas extremidades inicial e final, respectivamente.

A matriz quadrada simétrica  $\mathbf{k}$  é a matriz de rigidez do elemento de viga. Nota-se que essa matriz, no caso de vigas horizontais, é a mesma tanto para as coordenadas locais quanto para as coordenadas globais. Por esse motivo, não há a necessidade de transformar essa matriz para as coordenadas globais, bastando apenas somar as matrizes de todos os elementos finitos da viga para obter a matriz de rigidez da estrutura, da mesma forma como foi feito no caso das treliças. Lembrando que cada elemento contribui na matriz de rigidez da estrutura nas posições referentes aos graus de liberdade de suas extremidades.

Uma vez determinada a matriz de rigidez da estrutura, basta resolver o sistema de equações a seguir, apresentado na forma matricial para uma viga com seis graus de liberdade, para encontrar os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio, de maneira análoga ao procedimento adotado para a resolução de treliças:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Onde:

- $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da viga.
- $\mathbf{F}_g$  é o vetor global de forças externas que atuam em cada grau de liberdade da viga.
- $\mathbf{D}_g$  é o vetor global de deslocamentos que atuam em cada grau de liberdade da viga.



### Refleta

Se, ao invés da viga ser horizontal, ela for inclinada, o que muda? A matriz de rigidez local do elemento será a mesma da matriz de rigidez com relação ao sistema de eixos global do elemento? A utilização da matriz de transformação  $\mathbf{T}$  continua sendo desnecessária?

## Análise matricial de pórticos

Para a análise matricial de pórticos, devemos definir a matriz de rigidez de um elemento de pórtico, para o qual levamos em consideração a rigidez axial, a rigidez ao cisalhamento e a rigidez à flexão. Dessa forma, são três os deslocamentos e forças possíveis em cada extremidade dos elementos, conforme a Figura 4.10.

Figura 4.10 | Forças e deslocamentos nas extremidades de um elemento de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor.

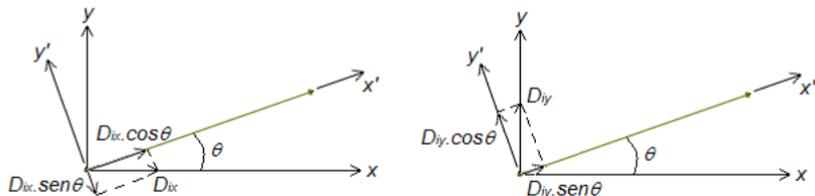
A matriz de rigidez do elemento de pórtico é obtida pelos mesmos coeficientes de rigidez locais já utilizados anteriormente. Nota-se que essa matriz é obtida pela superposição das matrizes de rigidez do elemento de barra da treliça e do elemento de viga, conforme apresentado a seguir, resultando em uma matriz 6x6 para considerar os seis deslocamentos possíveis no elemento:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ v_i \\ m_i \\ f_f \\ v_f \\ m_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ t_i \\ \phi_i \\ d_f \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{k}'\mathbf{d}$$

Como nem todos os elementos de pórtico são horizontais, devemos transformar essa matriz de rigidez local do elemento ( $\mathbf{k}'$ ) na matriz de rigidez com relação ao sistema de eixos global do elemento ( $\mathbf{k}$ ), usando a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , que é obtida por

meio da decomposição dos deslocamentos globais horizontal e vertical nas direções axial e transversal em cada nó do elemento, lembrando que as rotações no sistema local ( $\phi$ ) e no sistema global ( $D_\phi$ ) são as mesmas. A Figura 4.11 apresenta a decomposição dos deslocamentos globais ( $D_{ix}$  e  $D_{iy}$ ) nas direções axial ( $d_i$ ) e transversal ( $t_i$ ) do nó inicial de um elemento de pórtico.

Figura 4.11 | Decomposição dos deslocamentos globais no nó inicial de um elemento de pórtico



Fonte: elaborada pelo autor.

$$d_i = D_{ix} \cdot \cos\theta + D_{iy} \cdot \text{sen}\theta \quad t_i = -D_{ix} \cdot \text{sen}\theta + D_{iy} \cdot \cos\theta \quad \phi_i = D_{i\phi}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} d_i \\ t_i \\ \phi_i \\ d_f \\ t_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ix} \\ D_{iy} \\ D_{i\phi} \\ D_{fx} \\ D_{fy} \\ D_{f\phi} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$$

Da mesma forma como apresentado no caso das barras de treliça, a matriz de rigidez do elemento escrita no sistema de eixos global ( $\mathbf{k}$ ) é dada por:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

Uma vez obtida a matriz de rigidez escrita no sistema de eixos global de cada elemento do pórtico, basta fazer a contribuição dessas matrizes na matriz de rigidez do pórtico, de maneira análoga ao procedimento realizado para as treliças e para as vigas. Também de maneira semelhante, são determinados os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio do pórtico.



## Assimile

Cada tipo de elemento tem um tipo de matriz de rigidez: um elemento de treliça leva em consideração somente a rigidez axial; um elemento de viga leva em consideração a rigidez ao cisalhamento e à flexão; e um elemento de pórtico leva em consideração a rigidez axial, ao cisalhamento e à flexão.



## Pesquise mais

Caso haja cargas distribuídas ao longo dos elementos, transferimos as reações de engastamento perfeito dessa carga, já apresentadas na Seção 2.3, para as extremidades do elemento. Para verificar alguns exemplos, leia os capítulos 15 e 16 do seguinte livro, disponível na Biblioteca Virtual: HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

O software TQS utiliza o método dos elementos finitos para fazer análises estruturais. Como a análise matricial é uma simplificação do método dos elementos finitos, os resultados obtidos manualmente por meio da análise matricial são iguais, ou muito próximos, aos obtidos pelo TQS, que utiliza o método dos elementos finitos. Faça esse teste comparando os resultados obtidos para uma viga ou um pórtico resolvido manualmente por meio da análise matricial e os resultados obtidos pela modelagem dessa mesma viga ou pórtico no TQS. Lembre-se de considerar o peso próprio da estrutura no cálculo manual para que os resultados sejam o mais próximo possível.

## Sem medo de errar

Depois de ampliar os conceitos do Método da Rigidez para vigas e pórticos, você já é capaz de partir para o seu segundo projeto, que consiste em utilizar a análise matricial para encontrar os esforços que atuam em uma viga. Para tanto, você deve determinar a metodologia que deve ser adotada para a aplicação do Método da Rigidez em uma viga.

A metodologia neste caso é muito semelhante à metodologia utilizada para a determinação dos esforços nas barras de uma treliça. Ou seja, os passos para a resolução de uma estrutura pelo Método da Rigidez são muito semelhantes, independentemente do tipo

de estrutura analisada. A principal diferença diz respeito à matriz de rigidez do elemento, que é diferente para um elemento de treliça, um elemento de viga e um elemento de pórtico.

O primeiro passo consiste em numerar os nós, os elementos e os graus de liberdade da viga, lembrando que, para facilitar a resolução, numeramos os graus de liberdade desconhecidos primeiro, deixando para numerar por último os graus de liberdade conhecidos (correspondentes aos deslocamentos impedidos pelas reações de apoio). Em seguida, determina-se a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  de cada elemento da viga, lembrando que, no caso de vigas horizontais, essa já é a matriz de rigidez com relação às coordenadas globais, não havendo a necessidade de utilizar a matriz de transformação:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} & -\frac{12E \cdot I}{L^3} & \frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ -\frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{12E \cdot I}{L^3} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{2E \cdot I}{L} & -\frac{6E \cdot I}{L^2} & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

Depois, deve-se fazer a contribuição da matriz de rigidez de cada elemento ( $\mathbf{k}$ ) na matriz de rigidez da viga ( $\mathbf{K}$ ). Cada elemento irá contribuir nas posições da matriz de rigidez da viga correspondentes aos graus de liberdade dos nós das extremidades do elemento, exatamente como no caso das treliças. Assim, é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{D}_g \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \cdots & K_{3n} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & \cdots & K_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & K_{n4} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Onde:

- $\mathbf{F}_g$ : vetor de cargas na direção de cada grau de liberdade.
- $\mathbf{D}_g$ : vetor de deslocamentos na direção de cada grau de liberdade.

A resolução desse sistema de equações nos permite encontrar os valores dos deslocamentos desconhecidos nos nós da viga e também as reações de apoio. Com essas reações, pode-se traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga.

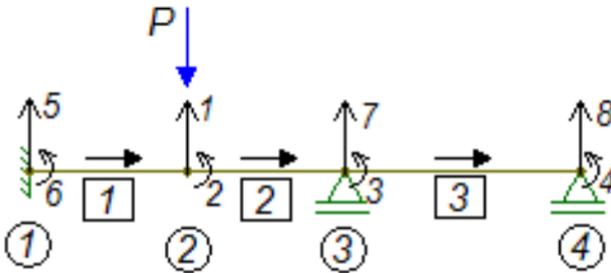
## Avançando na prática

### Montagem da matriz de rigidez da viga

#### Descrição da situação-problema

Uma viga é composta por três elementos. Os seus nós, elementos e graus de liberdade já foram numerados, conforme a Figura 4.12.

Figura 4.12 | Viga com três elementos



Fonte: elaborada pelo autor.

As matrizes de rigidez de cada elemento já foram calculadas e são dadas por:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Sabendo que a matriz de rigidez dos elementos 1, 2 e 3 são  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$ , respectivamente, determine a matriz de rigidez da viga.

#### Resolução da situação-problema

Como a viga possui oito graus de liberdade, a matriz de rigidez da viga terá dimensão  $8 \times 8$ . Cada elemento irá contribuir nas posições referentes aos graus de liberdade dos nós inicial e final deste elemento.

Para facilitar, a seguir são indicadas, nas linhas e colunas de  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$ , os graus de liberdade das extremidades de cada elemento:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 3 & 8 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para montar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da viga, basta fazer a contribuição da matriz de rigidez de cada elemento nas posições adequadas:

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{33} + b_{11} & a_{34} + b_{12} & b_{14} & 0 & a_{31} & a_{32} & b_{13} & 0 \\ a_{43} + b_{21} & a_{44} + b_{22} & b_{24} & 0 & a_{41} & a_{42} & b_{23} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} + c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & b_{43} + c_{21} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{42} & c_{44} & 0 & 0 & c_{41} & c_{43} \\ a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} + c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & b_{33} + c_{11} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{32} & c_{34} & 0 & 0 & c_{31} & c_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Faça valer a pena!

- Um elemento de uma viga possui 4 metros de comprimento e  $E \cdot I = 4 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ . A matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  desse elemento é dada por:

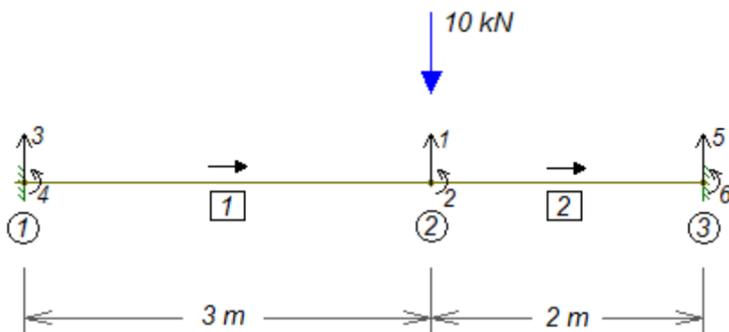
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que contém os valores corretos dos elementos  $k_{12}$ ,  $k_{31}$  e  $k_{44}$  da matriz de rigidez desse elemento.

- a)  $k_{12} = 1,5 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = -0,75 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 4 \cdot 10^4$ .
- b)  $k_{12} = -0,75 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = -0,75 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 2 \cdot 10^4$ .
- c)  $k_{12} = 0,75 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = 2 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 4 \cdot 10^4$ .
- d)  $k_{12} = 4 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = 0,75 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = -1,5 \cdot 10^4$ .
- e)  $k_{12} = -4 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = 2 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 4 \cdot 10^4$ .

**2.** Uma viga será utilizada para suportar a carga indicada na figura a seguir.

Viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base na numeração dos nós, elementos e grau de liberdade indicados, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da viga já foi calculada:

$$\mathbf{K} = 5 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1,94 & 0,83 & -0,44 & -0,67 & -1,5 & 1,5 \\ 0,83 & 3,33 & 0,67 & 0,67 & -1,5 & 1 \\ -0,44 & 0,67 & 0,44 & 0,67 & 0 & 0 \\ -0,67 & 0,67 & 0,67 & 1,33 & 0 & 0 \\ -1,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 1,5 & 1 & 0 & 0 & -1,5 & 2 \end{bmatrix}$$

Escolha a alternativa que apresenta os valores corretos das reações de apoio da viga (reação vertical  $R_1$  no nó 1, momento fletor  $M_1$  no nó 1, reação vertical  $R_3$  no nó 3 e momento fletor  $M_3$  no nó 3).

- a)  $R_1 = 5,0kN$   $M_1 = 5,83kN.m$   $R_3 = 5,0kN$   $M_3 = -8,50kN.m$ .
- b)  $R_1 = 6,00kN$   $M_1 = 3,25kN.m$   $R_3 = 3,00kN$   $M_3 = 9,25kN.m$ .
- c)  $R_1 = 4,33kN$   $M_1 = 5,55kN.m$   $R_3 = 5,67kN$   $M_3 = 6,78kN.m$ .
- d)  $R_1 = 3,50kN$   $M_1 = 4,83kN.m$   $R_3 = 6,50kN$   $M_3 = -7,22kN.m$ .
- e)  $R_1 = 2,80kN$   $M_1 = -2,40kN.m$   $R_3 = 7,20kN$   $M_3 = -6,59kN.m$ .

3. Um elemento de um pórtico possui 2 metros de comprimento,  $E \cdot I = 4 \cdot 10^4 kN.m^2$  e  $E \cdot A = 7,5 \cdot 10^6 kN$ . Esse elemento está inclinado, e o seu eixo longitudinal forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. A matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  desse elemento, segundo as coordenadas globais  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical), é dada por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que contém os valores corretos dos elementos  $k_{12}$ ,  $k_{31}$  e  $k_{44}$  da matriz de rigidez desse elemento, segundo as coordenadas globais.

- a)  $k_{12} = -3 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = 8 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 5,14 \cdot 10^5$ .
- b)  $k_{12} = 7,86 \cdot 10^5$ ,  $k_{31} = 5,2 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 4 \cdot 10^4$ .
- c)  $k_{12} = 7,86 \cdot 10^5$ ,  $k_{31} = -3 \cdot 10^4$  e  $k_{44} = 1,42 \cdot 10^6$ .
- d)  $k_{12} = 3 \cdot 10^4$ ,  $k_{31} = -5,14 \cdot 10^5$  e  $k_{44} = 4 \cdot 10^4$ .
- e)  $k_{12} = 1,42 \cdot 10^6$ ,  $k_{31} = -7,86 \cdot 10^5$  e  $k_{44} = 5,14 \cdot 10^5$ .

## Seção 4.3

### Processo de Cross

#### Diálogo aberto

Caros alunos, bem-vindos à última seção da disciplina Estruturas Hiperestáticas!

Após todos os conceitos aprendidos ao longo das seções desta disciplina, fica clara a importância dos métodos de resolução dessas estruturas na engenharia. Também ficou evidente que a análise das estruturas hiperestáticas é mais complexa e trabalhosa do que a análise de estruturas isostáticas.

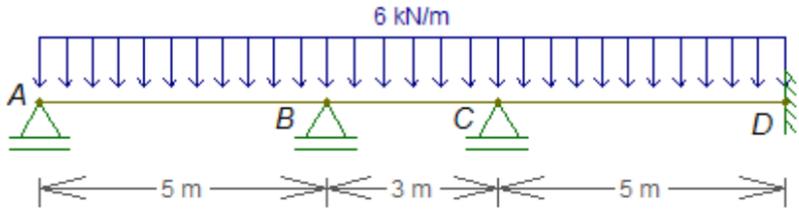
Nesta seção, aprenderemos um método de resolução de estruturas hiperestáticas rápido, prático e eficiente, sobretudo quando estamos trabalhando com vigas hiperestáticas: o Processo de Cross.

O procedimento de resolução pelo Processo de Cross faz uso do Método dos Deslocamentos e também pode ser chamado de Distribuição de Momentos. O motivo de usarmos este nome ficará claro ao longo desta seção. O Processo de Cross é um método iterativo de resolução de estruturas hiperestáticas. Isso significa que devemos repetir alguns ciclos para chegar à solução do problema. A cada ciclo, a resposta se aproxima mais da solução exata. O momento em que se deve encerrar o processo iterativo vai depender da precisão desejada, que é definida por meio do critério de parada. Quanto mais passos forem realizados, maior será a precisão da resposta.

As etapas que devem ser desenvolvidas para a utilização do Processo de Cross são relativamente simples e rápidas, o que o torna uma ferramenta extremamente útil para a solução de estruturas hiperestáticas mais simples, como vigas. E é exatamente uma viga hiperestática que você deve analisar em seu terceiro desafio na empresa de desenvolvimento de softwares de análise estrutural.

O seu chefe solicitou que você utilize o Processo de Cross para traçar o diagrama de momentos fletores da viga da figura a seguir. Todas as barras da viga possuem  $E \cdot I$  constante.

Figura 4.13 | Viga



Fonte: elaborada pelo autor.

Não desista agora, no seu último desafio!

Vamos aos estudos?

## Não pode faltar

### Processo de Cross

O Processo de Cross, também chamado de Distribuição de Momentos, é um procedimento que, assim como o Método da Rigidez, utiliza o Método dos Deslocamentos para a análise de estruturas hiperestáticas, sejam elas vigas, pórticos planos, grelhas ou até mesmo pórticos espaciais. No caso de vigas hiperestáticas, a aplicação do Processo de Cross é bastante rápida e prática, como veremos nesta seção.

A ideia básica desse processo é a de que, como os nós de uma estrutura devem estar em equilíbrio, a soma dos momentos aplicados pelas extremidades das barras que chegam a um nó deve ser nula. O Processo de Cross é um método iterativo e, portanto, aproximado, e o critério de parada do processo é definido pela precisão desejada para a resposta.

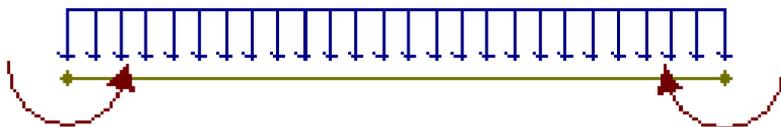
Inicialmente, admite-se que todos os nós da estrutura estão fixos, ou seja, não podem girar. Dessa forma, são obtidos os momentos de engastamento perfeito nas extremidades das barras, provocados pelos carregamentos aplicados. Depois, a rotação de um dos nós da estrutura é liberada, permitindo que ele gire e, desse modo, faça a distribuição dos momentos que atuam nesse nó para as barras adjacentes, em função da rigidez de cada barra. Esse nó é novamente bloqueado, liberando-se outro nó para reiniciar o processo, que deve ser repetido até que se atinja o critério de parada definido, quando todos os nós terão girado para a sua posição final.

Com a finalização da distribuição dos momentos, são obtidos os momentos finais nas extremidades de cada barra, o que permite determinar as reações de apoio e também traçar os diagramas de momento fletor e força cortante da estrutura.

### Convenção de sinais

Para o desenvolvimento do Processo de Cross, adotaremos a seguinte convenção de sinais: momentos que atuam no sentido anti-horário são considerados positivos, enquanto os momentos que atuam no sentido horário são negativos. Por essa convenção, na Figura 4.14, o momento na extremidade esquerda da barra é positivo, enquanto o momento na extremidade direita da barra é negativo.

Figura 4.14 | Viga



Fonte: elaborada pelo autor.

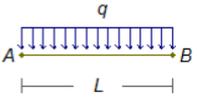
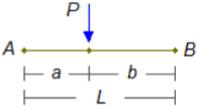
### Estruturas indeslocáveis

Estruturas indeslocáveis são aquelas que não apresentam deslocamento lateral. Pórticos que possuem algum mecanismo que impeça o deslocamento lateral de seus nós, como, por exemplo, os contraventamentos, são chamados de pórticos indeslocáveis. Também consideraremos que as vigas são estruturas indeslocáveis, apresentando somente força cortante e momento fletor ao longo da viga. Antes de aplicar o Processo de Cross nesse tipo de estrutura, serão apresentadas algumas definições.

- **Momentos de engastamento perfeito (MEPs)**

São os momentos que aparecem nas extremidades de uma barra carregada, quando essas extremidades estiverem fixas (engastadas). Esses momentos são os mesmos apresentados na Seção 2.3, quando foram chamados de reações de engastamento perfeito. Na Figura 4.15, são apresentados os MEPs para as duas situações mais comuns de carregamentos.

Figura 4.15 | Momentos de engastamento perfeito (MEPs)

Condições de contorno Carregamento			
	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{12}$ $M_B = -\frac{q \cdot L^2}{12}$	$M_A = +\frac{q \cdot L^2}{8}$	$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{8}$
	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$	$M_A = +\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L+b)$	$M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L+a)$

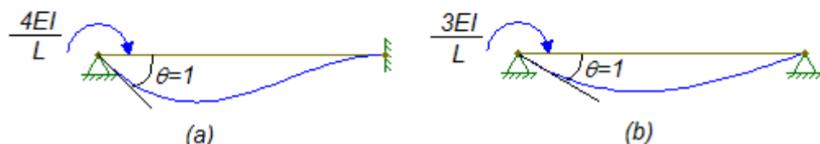
Fonte: elaborada pelo autor.

## Coeficiente de rigidez

Esse coeficiente também já foi apresentado na Seção 2.3 (coeficiente de rigidez local). Vimos que, quando aplicamos um giro unitário em uma extremidade de uma barra e a extremidade oposta está engastada, um momento de  $\frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$  deve atuar na extremidade em que o giro foi aplicado para manter a configuração deformada da barra, conforme a Figura 4.16(a), para uma viga de comprimento  $L$ . Esse é o valor do coeficiente de rigidez ( $k$ ) de uma barra quando a extremidade oposta for engastada.

Uma outra situação que não foi apresentada na Seção 2.3, mas que ocorre com frequência, é termos a extremidade oposta da barra articulada. Nesse caso, o coeficiente de rigidez ( $k$ ) da barra é  $\frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$ , conforme a Figura 4.16(b), para uma barra de comprimento  $L$ .

Figura 4.16 | Coeficiente de rigidez: (a) extremidade oposta engastada; (b) extremidade oposta articulada



Fonte: elaborada pelo autor.

## • Fator de propagação

Conforme vimos na Seção 2.3, na situação da Figura 4.16(a), um momento de  $\frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$  deve atuar na extremidade engastada da barra para que seja mantida a configuração deformada correta dessa barra. Perceba que esse momento é exatamente a metade do momento que atua na extremidade oposta. Logo, quando a extremidade oposta da barra está engastada, existe um fator de propagação de valor  $\alpha = 0,5$ , que representa a parcela de momento que foi "propagada" de uma extremidade para a outra. Já no caso da Figura 4.16(b), esse fator de propagação não existe, pois a extremidade oposta é articulada, ou seja, nenhuma parcela de momento foi "propagada" para essa extremidade.

## • Coeficiente de distribuição

Quando um nó está conectado a  $n$  barras e um momento  $M$  é aplicado nesse nó, cada barra irá resistir a uma parcela desse momento, dependendo da rigidez da barra. Ou seja, cada barra apresentará um momento resistente diferente, que é uma parcela do momento total  $M$  no nó, de forma que a soma dos momentos na extremidade de todas as barras seja igual ao momento no nó, para manter o equilíbrio.

A parcela do momento total resistida por uma barra é denominada de coeficiente de distribuição e é calculada por:

$$\gamma = \frac{k}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

Onde:

- $k$ : coeficiente de rigidez da barra analisada.
- $k_i$ : coeficiente de rigidez de uma das  $n$  barras ligadas ao nó da estrutura.

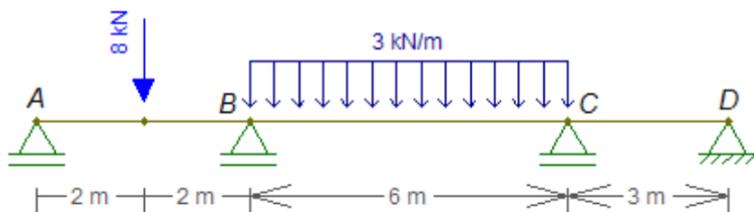
Assim, um nó com, por exemplo, três barras terá três coeficientes de distribuição, sendo um para cada barra conectada a ele.

Com essas definições, podemos aplicar o Processo de Cross para resolver uma estrutura hiperestática, como, por exemplo, uma viga.



Determine o momento em cada apoio da viga da Figura 4.17, sabendo que todas as barras possuem  $E \cdot I$  constante. Como critério de parada do processo iterativo, considere que momentos inferiores à 0,1 kN.m podem ser aproximados para zero.

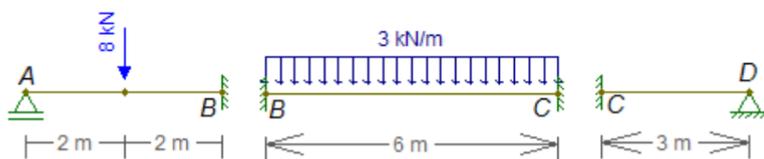
Figura 4.17 | Viga hiperestática



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiramente, devemos determinar os MEPs e os coeficientes de rigidez de cada uma das três barras que formam a viga. Essas barras foram isoladas e estão representadas na Figura 4.18. Nota-se que, ao isolar as barras, os apoios intermediários são tratados como engastes.

Figura 4.18 | Vigas isoladas



Fonte: elaborada pelo autor.

- Trecho AB:

$$M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} \cdot (L + a) = -\frac{8 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 4^2} \cdot (4 + 2) = -6 \text{ kN.m}; e$$

$$k_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{4} = 0,75 \cdot E \cdot I$$

- Trecho *BC*

$$M_B = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{3 \cdot 6^2}{12} = 9 \text{ kN.m}; M_C = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -9 \text{ kN.m}; e$$

$$k_{BC} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{6} = 0,67 \cdot E \cdot I$$

- Trecho *CD*

$$k_{CD} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{3} = E \cdot I$$

Em seguida, determinam-se os coeficientes de distribuição dos nós com duas ou mais barras, ou seja, dos nós intermediários **B** e **C**. Esses nós terão um coeficiente de distribuição para cada barra que chega ao nó, ou seja, cada nó terá dois coeficientes de distribuição.

- Nó **B**

$$\gamma_{BA} = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0,75 \cdot E \cdot I}{0,75 \cdot E \cdot I + 0,67 \cdot E \cdot I} = 0,53$$

$$\gamma_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0,67 \cdot E \cdot I}{0,75 \cdot E \cdot I + 0,67 \cdot E \cdot I} = 0,47$$

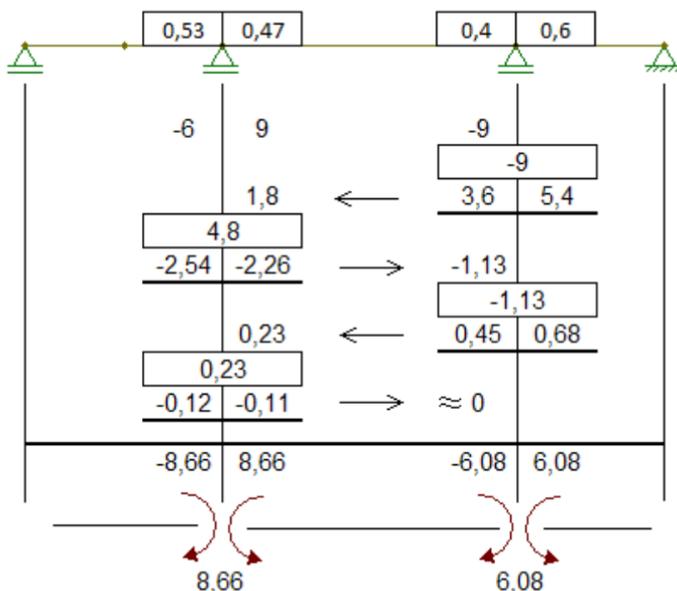
- Nó **C**

$$\gamma_{CB} = \frac{k_{BC}}{k_{BC} + k_{CD}} = \frac{0,67 \cdot E \cdot I}{0,67 \cdot E \cdot I + E \cdot I} = 0,4$$

$$\gamma_{CD} = \frac{k_{CD}}{k_{BC} + k_{CD}} = \frac{E \cdot I}{0,67 \cdot E \cdot I + E \cdot I} = 0,6$$

Dessa forma, parte-se para a distribuição dos momentos utilizando o processo iterativo. Para organizar o processo, desenha-se a viga indicando os coeficientes de distribuição sobre os nós intermediários, conforme a Figura 4.19.

Figura 4.19 | Distribuição de momentos



Fonte: elaborada pelo autor.

Abaixo da viga são indicados os momentos de engastamento perfeito já calculados nas extremidades de cada barra. Na sequência, é feita a distribuição de momentos, representada na Figura 4.19. Essa distribuição de momentos é feita somente nos nós com duas ou mais barras, ou seja, somente nos nós intermediários (**B** e **C**).

Para tornar o processo iterativo mais rápido, devemos começar a distribuição de momentos pelo nó mais desequilibrado, ou seja, o nó com maior valor de momento em módulo:

Momento total no nó **B**:  $-6 + 9 = 3 \text{ kN.m}$

Momento total no nó **C**:  $-9 \text{ kN.m}$

Assim, o processo é iniciado pelo nó **C**. Primeiro, representa-se o momento total no nó dentro de um retângulo. Depois, esse momento é distribuído para as barras adjacentes ao nó, multiplicando-se o momento no nó pelo coeficiente de distribuição. Como estamos transmitindo o momento do nó para a barra, nesse instante é necessário alterar o sinal do momento, pelo princípio da ação e reação: Momento distribuído para a barra **BC**:  $9 \cdot 0,4 = 3,6 \text{ kN.m}$

Momento distribuído para a barra **CD**:  $9 \cdot 0,6 = 5,4 \text{ kN.m}$

Em seguida, devemos fazer a propagação desses momentos de uma extremidade da barra para a outra. Como na barra **CD** a extremidade **D** é articulada, nenhum momento será propagado para essa extremidade. Já no caso da barra **BC**, como a extremidade **B** é um nó intermediário, considerado um engaste, metade do momento é transmitido da extremidade **C** para a extremidade **B**, ou seja, 1,8 kN.m. Dessa forma, o equilíbrio do nó **C** está concluído, o que é representado desenhando-se uma linha abaixo dos momentos desse nó, conforme a Figura 4.19.

O próximo passo consiste em fazer o equilíbrio do nó **B**, que, ao receber o momento de 1,8 kN.m do nó **C**, passou a ter um momento total de:

$$-6 + 9 + 1,8 = 4,8 \text{ kN.m}$$

O procedimento de equilíbrio do nó **B** é exatamente o mesmo descrito para o nó **C**, lembrando-se sempre de trocar o sinal do momento no instante de transmiti-lo do nó para a barra. Como ao final do processo de equilíbrio do nó **B** houve uma propagação de um momento de -1,13 kN.m para o nó **C**, é necessário equilibrar o nó **C** novamente. Como o nó **C** recebeu apenas um momento de -1,13 kN.m, este é o momento total no nó que deve ser equilibrado, uma vez que os momentos anteriores que atuam no nó **C** já foram equilibrados.

Repetindo a distribuição de momentos por quatro vezes, chegamos ao final do processo iterativo, já que na última distribuição o momento propagado do nó **B** para o nó **C** é inferior a 0,1 kN.m, que, pelo critério de parada definido, pode ser aproximado para zero.

Para encontrar os momentos finais nas extremidades de cada barra, basta somar os momentos de todas as etapas do processo:

Direita da barra **AB**:  $-6 - 2,54 - 0,12 = -8,66 \text{ kN.m}$

Esquerda da barra **BC**:  $9 + 1,8 - 2,26 + 0,23 - 0,11 = 8,66 \text{ kN.m}$

Direita da barra **BC**:  $-9 + 3,6 - 1,13 + 0,45 = -6,08 \text{ kN.m}$

Esquerda da barra **CD**:  $5,4 + 0,68 = 6,08 \text{ kN.m}$

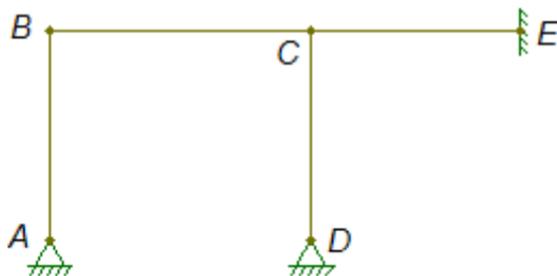
Note que os momentos que atuam nas extremidades das barras à esquerda e à direita de um nó devem possuir o mesmo módulo, porém sinais (sentidos) opostos. Isso garante que o nó está em equilíbrio, pois a somatória dos momentos é igual a zero. Essa é uma maneira de conferir se não foi cometido nenhum erro no processo de distribuição dos momentos. Esses são os momentos nos apoios da viga, que podem ser usados para traçar o diagrama de momentos fletores.



Quando uma estrutura apresenta um trecho em balanço, devemos considerar o nó que suporta o balanço como um nó intermediário e fazer a distribuição de momentos para esse nó ou existe a possibilidade de simplificar esse problema? Será que não seria mais prático retirar o balanço e substituir as forças que atuam no trecho em balanço por uma força e um momento aplicados no nó que suporta o balanço?

O procedimento para a resolução de pórticos hiperestáticos com nós indeslocáveis é exatamente o mesmo apresentado para as vigas hiperestáticas. A única diferença é que alguns nós de pórticos podem apresentar mais do que duas barras concorrentes. Dessa forma, em um mesmo nó pode haver mais do que dois coeficientes de distribuição. O pórtico hiperestático da Figura 4.20 é indeslocável, pois o engaste no nó **E** impede o deslocamento horizontal dos nós **B** e **C**.

Figura 4.20 | Pórtico hiperestático indeslocável



Fonte: elaborada pelo autor.

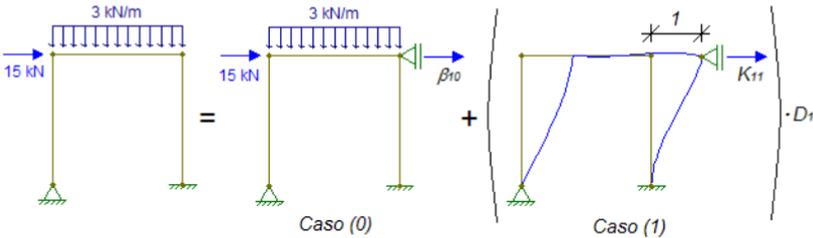


Em uma estrutura hiperestática, os momentos fletores que atuam nas barras são influenciados pela rigidez das barras, que, além do comprimento delas, leva em consideração o tipo de material utilizado e o momento de inércia da seção transversal das barras (relação  $E \cdot I$ ). Ou seja, se no caso da viga da Figura 4.17, as três barras tiverem relação  $E \cdot I$  diferentes entre si, os valores dos momentos fletores nos apoios da viga serão diferentes dos obtidos no exemplo apresentado. Já no caso de estruturas isostáticas, a relação  $E \cdot I$  das barras não influencia nos momentos fletores da estrutura.

## Estruturas deslocáveis

Para resolver estruturas deslocáveis (estruturas com deslocamentos laterais dos seus nós) pelo Processo de Cross, aplicamos o Método dos Deslocamentos, considerando como deslocabilidade apenas o deslocamento lateral de seus nós. Utilizando a superposição de efeitos, o pórtico deslocável da Figura 4.21 pode ser obtido pela soma de dois casos básicos.

Figura 4.21 | Pórtico hiperestático deslocável



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, o diagrama de momentos fletores real da estrutura é dado por:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1$$

Os diagramas de momentos fletores  $M_0$  e  $M_1$  são obtidos aplicando-se o Processo de Cross para os casos (0) e (1), respectivamente, da mesma maneira como já explicado anteriormente. Uma vez determinados esses diagramas de momentos fletores, também é possível encontrar as reações de apoio dos casos (0) e (1), fazendo-se o equilíbrio de cada barra de forma isolada, como já apresentado na Seção 2.3. Assim, encontram-se as reações de apoio  $\beta_{10}$  e  $K_{11}$  dos casos (0) e (1), respectivamente.

Para encontrar  $D_1$ , basta aplicar o mesmo conceito usado no Método dos Deslocamentos: o nó que possui as deslocabilidades deve estar em equilíbrio. Assim, fazendo-se o equilíbrio das forças horizontais no nó com a deslocabilidade, temos a expressão a seguir, com a qual se encontra o valor de  $D_1$  para determinar o diagrama de momentos fletores  $M$  da estrutura:

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0$$



Estude o capítulo 12 do livro *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos* (MARTHA, 2010) e o capítulo 5 do livro *Curso de análise estrutural 3* (SÜSSEKIND, 1987) para encontrar exemplos da resolução de estruturas deslocáveis pelo Processo de Cross.

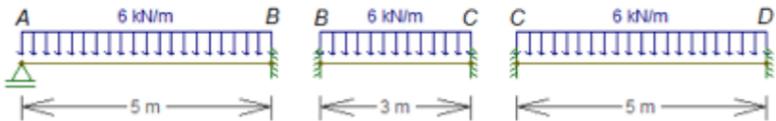
O capítulo 12 do livro *Análise das estruturas* (HIBBELER, 2013), disponível na Biblioteca Virtual, também possui exemplos de aplicação do Processo de Cross, tanto para estruturas indeslocáveis como para estruturas deslocáveis.

## Sem medo de errar

Agora que você já sabe todas as etapas do Processo de Cross, pode utilizá-lo para resolver o seu terceiro desafio, que consiste em determinar o diagrama de momentos fletores para a viga da Figura 4.13. Para definir quando terminar o processo iterativo, adotaremos como critério de parada que momentos inferiores a 0,1 kN.m podem ser aproximados para zero.

Primeiramente, isolamos os três trechos da viga, conforme a Figura 4.22, e determinamos os momentos de engastamento perfeito e os coeficientes de rigidez de cada trecho:

Figura 4.22 | Trechos da viga analisada



Fonte: elaborada pelo autor.

- Trecho AB

$$M_B = -\frac{6 \cdot 5^2}{8} = -18,75 \text{ kN.m} \quad k_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{5} = 0,6 \cdot E \cdot I$$

- Trecho BC

$$M_B = \frac{6 \cdot 3^2}{12} = 4,5 \text{ kN.m} \quad M_C = -4,5 \text{ kN.m} \quad k_{BC} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} = 1,33 \cdot E \cdot I$$

- Trecho CD

$$M_C = \frac{6 \cdot 5^2}{12} = 12,5 \text{ kN.m} \quad M_D = -12,5 \text{ kN.m} \quad k_{CD} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{5} = 0,8 \cdot E \cdot I$$

Os coeficientes de distribuição dos nós **B** e **C** são, então, calculados:

• **Nó B**

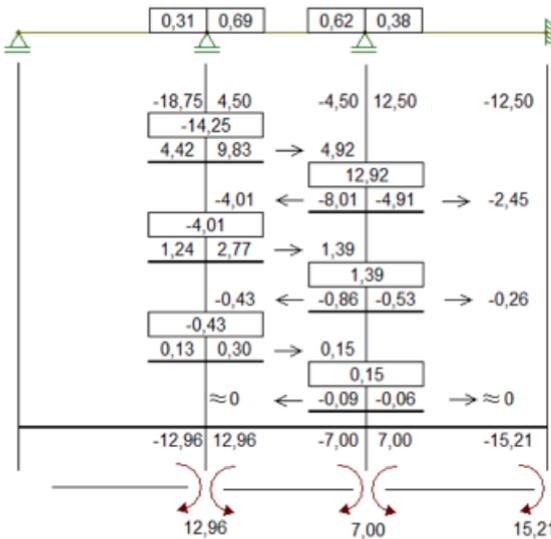
$$\gamma_{BA} = \frac{0,6 \cdot E \cdot I}{0,6 \cdot E \cdot I + 1,33 \cdot E \cdot I} = 0,31 \quad \gamma_{BC} = \frac{1,33 \cdot E \cdot I}{0,6 \cdot E \cdot I + 1,33 \cdot E \cdot I} = 0,69$$

• **Nó C:**

$$\gamma_{CB} = \frac{1,33 \cdot E \cdot I}{1,33 \cdot E \cdot I + 0,8 \cdot E \cdot I} = 0,62 \quad \gamma_{CD} = \frac{0,8 \cdot E \cdot I}{1,33 \cdot E \cdot I + 0,8 \cdot E \cdot I} = 0,38$$

A distribuição de momentos é realizada, conforme a figura a seguir.

Figura 4.23 | Distribuição de momentos

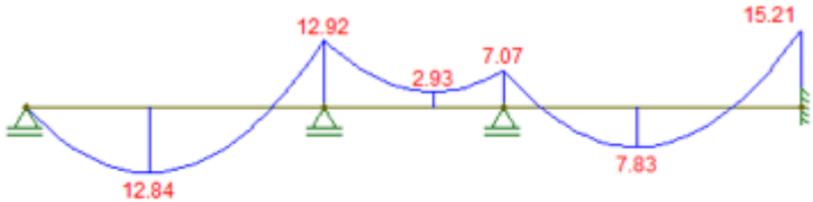


Fonte: elaborada pelo autor.

Vale destacar que, como se trata de um processo iterativo com aproximações sucessivas, pequenas diferenças entre os momentos nos lados esquerdo e direito de um nó podem ser tolerados.

Sabendo o valor do momento fletor em cada nó da viga, pode-se traçar o diagrama de momentos fletores. Novamente, como o Processo de Cross é um método aproximado, o seu resultado final pode ser ligeiramente diferente do resultado exato. Quanto mais etapas forem realizadas, mais próximo o resultado será do exato. Para demonstrar essa diferença, na Figura 4.24 é apresentado o diagrama de momentos fletores exato para a viga em questão, obtido pelo programa Ftool.

Figura 4.24 | Diagrama de momentos fletores (kN.m) (valores exatos pelo Ftool)



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar os valores dos momentos máximos em cada trecho da viga, é necessário determinar primeiro as reações de apoio e o diagrama de força cortante dessa viga, como será apresentado na sequência.

## Avançando na prática

### Determinação do diagrama de força cortante.

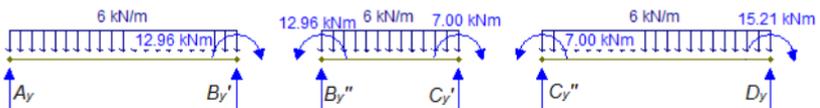
#### Descrição da situação-problema

Traçar o diagrama de força cortante para a viga da Figura 4.13.

#### Resolução da situação-problema

Primeiramente, deve-se determinar as reações de apoio da viga. Para isso, basta fazer o equilíbrio de cada trecho da barra separadamente, considerando o momento anti-horário positivo, conforme a Figura 4.25.

Figura 4.25 | Equilíbrio dos trechos da viga



Fonte: elaborada pelo autor.

#### • Trecho AB

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 12,96 + B_y' \cdot 5 = 0 \Rightarrow B_y' = 17,59 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 6 \cdot 5 + 17,59 = 0 \Rightarrow A_y = 12,41 \text{ kN}$$

- Trecho BC

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 12,96 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 - 7 + C_y' \cdot 3 = 0 \Rightarrow C_y' = 7,01 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y'' - 6 \cdot 3 + 7,01 = 0 \Rightarrow B_y'' = 10,99 \text{ kN}$$

- Trecho CD

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 7 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15,21 + D_y \cdot 5 = 0 \Rightarrow D_y = 16,64 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y'' - 6 \cdot 5 + 16,64 = 0 \Rightarrow C_y'' = 13,36 \text{ kN}$$

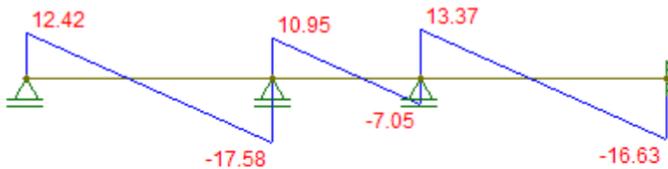
Reações verticais totais em **B** e **C**:

$$B_y = B_y' + B_y'' = 28,58 \text{ kN}$$

$$C_y = C_y' + C_y'' = 20,37 \text{ kN}$$

Uma vez encontradas as reações de apoio verticais, podemos traçar o diagrama de força cortante, conforme a Figura 4.26, obtido pelo Ftool, com os valores exatos. Assim, é possível determinar os pontos de cortante nula e encontrar os valores dos momentos fletores máximos.

Figura 4.26 | Diagrama de força cortante (kN) (valores exatos pelo Ftool)

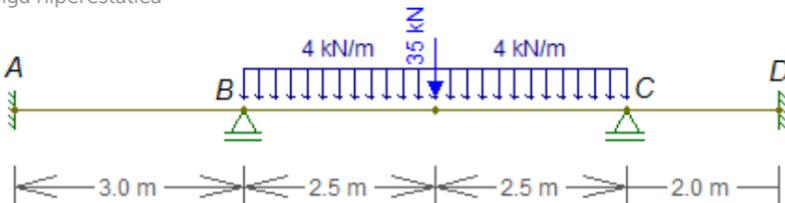


Fonte: elaborada pelo autor.

## Faça valer a pena!

**1.** Uma viga hiperestática está submetida a uma carga uniformemente distribuída e a uma carga concentrada, conforme a figura a seguir.

Viga hiperestática



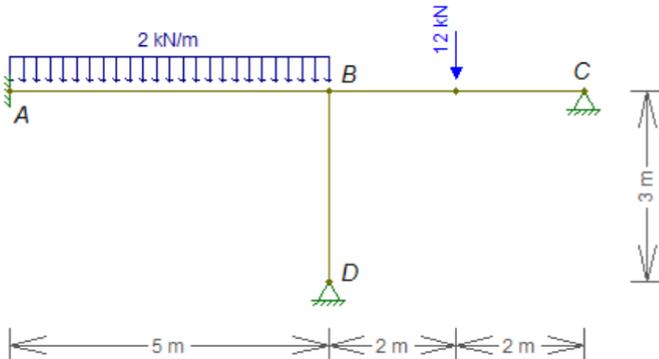
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que apresenta os valores corretos de momentos de engastamento perfeito para o trecho **BC** da viga da figura apresentada.

- a)  $M_B = 21,875\text{kN.m}$       $M_C = -21,875\text{kN.m}$  .  
 b)  $M_B = 8,33\text{kN.m}$       $M_C = -21,875\text{kN.m}$  .  
 c)  $M_B = -30,205\text{kN.m}$       $M_C = -30,205\text{kN.m}$  .  
 d)  $M_B = 30,205\text{kN.m}$       $M_C = -30,205\text{kN.m}$  .  
 e)  $M_B = 8,33\text{kN.m}$       $M_C = 30,205\text{kN.m}$  .

**2.** Um pórtico hiperestático de uma indústria está submetido ao carregamento indicado na figura a seguir. Todas as barras possuem  $E \cdot I$  constante.

Pórtico hiperestático



Fonte: elaborada pelo autor.

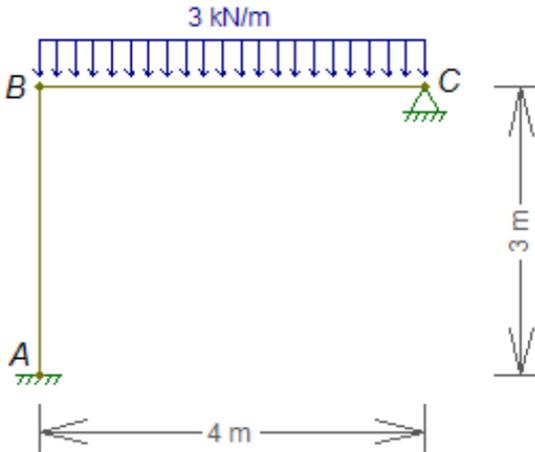
Para resolver esse pórtico pelo Processo de Cross, você deve determinar os coeficientes de distribuição do nó B.

Marque a alternativa correta que apresenta os valores dos coeficientes de distribuição do nó B do pórtico da figura apresentada.

- a)  $\gamma_{BA} = 0,31$       $\gamma_{BC} = 0,29$       $\gamma_{BD} = 0,39$  .  
 b)  $\gamma_{BA} = 0,8$       $\gamma_{BC} = 0,39$       $\gamma_{BD} = 0,49$  .  
 c)  $\gamma_{BA} = 0,31$       $\gamma_{BC} = 0,69$       $\gamma_{BD} = 0$  .  
 d)  $\gamma_{BA} = 1$       $\gamma_{BC} = 0,61$       $\gamma_{BD} = 0,39$  .  
 e)  $\gamma_{BA} = 0,8$       $\gamma_{BC} = 0,75$       $\gamma_{BD} = 1$  .

3. Um pórtico de uma obra que está em sua fase de projeto está submetido ao carregamento indicado na figura a seguir. Todas as barras possuem  $E \cdot I$  constante.

Pórtico hiperestático



Fonte: elaborada pelo autor.

Um dos seus colegas de trabalho já iniciou o cálculo do pórtico pelo Processo de Cross e obteve os seguintes coeficientes de distribuição do nó B:

$$\gamma_{BA} = 0,64 \quad \gamma_{BC} = 0,36$$

Agora, você deve finalizar os cálculos e encontrar os momentos que atuam no engaste A ( $M_A$ ) e nas extremidades adjacentes ao nó B para as duas barras ( $M_{BA}$  e  $M_{BC}$ ).

Escolha a alternativa que apresenta os valores corretos dos momentos  $M_A$ ,  $M_{BA}$  e  $M_{BC}$ .

- a)  $M_A = -1,33kN.m$     $M_{BA} = -6kN.m$     $M_{BC} = 6kN.m$ .
- b)  $M_A = -1,92kN.m$     $M_{BA} = -3,84kN.m$     $M_{BC} = 3,84kN.m$ .
- c)  $M_A = 0kN.m$     $M_{BA} = -6kN.m$     $M_{BC} = 3,84kN.m$ .
- d)  $M_A = -1,33kN.m$     $M_{BA} = 0kN.m$     $M_{BC} = 0kN.m$ .
- e)  $M_A = 6kN.m$     $M_{BA} = -6kN.m$     $M_{BC} = -2,16kN.m$ .

# Referências

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

LEET, Kenneth M.; UANG, Chia-Ming; GILBERT, Anne M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural 3**. Método das deformações. Processo de Cross. 7. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.













ISBN 978-85-522-0735-1



9 788552 207351 >