



Eletromagnetismo

Eletromagnetismo

Rafael Schincariol da Silva

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

André Luís Delvas Fróes

Amélia Moreira Santos

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Rafael Schincariol da
S586e Eletromagnetismo / Rafael Schincariol da Silva. –
Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
216 p

ISBN 978-85-522-0672-9

1. Engenharia. 2. Elétrica. I. Silva, Rafael Schincariol da.
II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Eletrostática de meios contínuos _____	7
Seção 1.1 - Campo elétrico em distribuições contínuas de carga _____	9
Seção 1.2 - Lei de Gauss _____	25
Seção 1.3 - Energia e potencial eletrostático _____	41
Unidade 2 Correntes elétricas no meio contínuo _____	59
Seção 2.1 - Densidade de corrente elétrica _____	61
Seção 2.2 - Campos magnéticos estacionários _____	76
Seção 2.3 - Lei de Ampère _____	92
Unidade 3 Indutância e as equações de Maxwell _____	111
Seção 3.1 - Lei de Faraday e lei de Lenz _____	113
Seção 3.2 - Indutância _____	129
Seção 3.3 - Equações de Maxwell _____	144
Unidade 4 Ondas eletromagnéticas _____	161
Seção 4.1 - Equações de Maxwell e as ondas eletromagnéticas _____	163
Seção 4.2 - Propagação de ondas eletromagnéticas _____	179
Seção 4.3 - Reflexão e dispersão de ondas eletromagnéticas _____	197

Palavras do autor

O eletromagnetismo é uma área da física que estuda as interações entre os fenômenos elétricos e magnéticos. O estudo de cada fenômeno caminhou separadamente por muito tempo, até que no começo do século 19 um pesquisador chamado Hans Oersted descobriu algo interessante: ao submeter um condutor a um fluxo ordenado de cargas elétricas e colocar uma bússola em suas proximidades, ele verificou que este fluxo de cargas elétricas influenciava na direção do ponteiro da bússola. Dessa forma, o pesquisador concluiu que os dois fenômenos descritos estavam, na verdade, relacionados, e então surgiu o eletromagnetismo propriamente dito.

De lá para cá, o eletromagnetismo se fez presente na maioria das invenções e dos equipamentos utilizados no dia a dia. Você pode encontrar os fenômenos eletromagnéticos nas instalações elétricas da sua casa, nos aparelhos eletrônicos, nos eletrodomésticos, nas instalações industriais, nas ondas de TV e rádio, ou seja, é impossível se isolar dos seus efeitos. Ao ler este material, fazendo uso de um computador, tablet ou celular, você também está em contato com os efeitos do eletromagnetismo. Portanto, compreender seus fundamentos é essencial para qualquer engenheiro, independentemente da especialidade, pois o desempenho das atividades dentro do mercado de trabalho requer um amplo conhecimento de várias áreas da Ciência.

Ao decorrer deste curso, você irá compreender a eletrostática em meios contínuos, conhecendo mais sobre forças e campos elétricos e aplicando a Lei de Gauss. Além disso, irá aprender sobre as leis do eletromagnetismo que relacionam correntes elétricas a campos magnéticos e suas aplicações no contexto dos meios contínuos. Também irá analisar distribuições de cargas e correntes por meio das equações de Maxwell e aplicar os conhecimentos no contexto dos motores, geradores e transformadores elétricos. Por fim, serão apresentadas as ondas eletromagnéticas e sua importância nas telecomunicações, em especial com relação a sua energia e sua propagação.

A primeira unidade desta disciplina tratará a eletrostática em meios contínuos, permitindo que você saiba como calcular campos elétricos

e potenciais elétricos em distribuições contínuas de carga. Na segunda unidade serão estudadas as correntes elétricas e os campos magnéticos estacionários. A partir da Unidade 3, você irá estudar os fenômenos de indução e as equações de Maxwell aplicadas ao eletromagnetismo. Por fim, na Unidade 4, você descobrirá como deduzir as equações de ondas eletromagnéticas a partir das equações de Maxwell e, também, entenderá a propagação das ondas eletromagnéticas.

Com os conhecimentos adquiridos nesta disciplina, você certamente terá mais facilidade para lidar com tópicos mais avançados na sua formação. Entretanto, o sucesso na disciplina irá depender do seu esforço e da sua curiosidade. Por isso, realize o seu estudo com dedicação, passando não somente pelos tópicos apresentados aqui, mas também pelos materiais propostos no decorrer das unidades.

Bons estudos!

Eletróstática de meios contínuos

Convite ao estudo

Caro aluno!

Nesta unidade, você conhecerá os conceitos de eletroestática nos meios de distribuição contínuos de carga. Você deve estar ansioso para entender os fenômenos que explicam o que se passa nos motores e geradores elétricos e nas comunicações de TV, rádios, celulares e satélites. No entanto, é muito importante iniciar o estudo do eletromagnetismo pelas iterações das cargas elétricas, examinando os campos eletrostáticos.

Você verificará que os fenômenos eletrostáticos têm diversas aplicações práticas, tais como equipamentos e dispositivos eletrônicos (fotocopiadoras, impressores, capacitores, dispositivos de efeito de campo, etc.), além de serem importantes para compreender fenômenos atmosféricos.

Ao final desta unidade, você será capaz de realizar a análise de distribuições de cargas elétricas em diversas geometrias, de forma a obter os valores de campo elétrico e potencial elétrico, além das análises das linhas de campo elétrico.

Para contextualizar seu estudo, imagine uma multinacional que fabrica capacitores eletrolíticos. O capacitor eletrolítico internamente é composto por duas folhas de alumínio, entre as quais existe um material dielétrico. Suas dimensões variam de acordo com a capacitância e limite de tensão que suporta. É um tipo de capacitor que tem polaridade, ou seja, não funciona corretamente se for invertido (LIMA, 2011, [s.p.]).

Você está trabalhando na multinacional em um projeto de capacitores, no departamento de análise e mapeamento de materiais. Este mapeamento tem o objetivo de fornecer

informações de entrada para a equipe de projetos. Dentre as características analisadas, incluem-se os campos elétricos e os potenciais elétricos nas placas com cargas distribuídas. Você terá algumas responsabilidades no projeto, sendo seus conhecimentos de eletromagnetismo fundamentais, principalmente os conceitos de eletrostática de meios contínuos.

Com o objetivo de ampliar seus conhecimentos, na Seção 1.1 você aprenderá os conceitos para realizar o cálculo do campo elétrico em placas com distribuições uniformes de carga. Na Seção 1.2, após compreender a Lei de Gauss, você será desafiado a especificar um material dielétrico para utilização nos capacitores. Finalmente, na Seção 1.3, você deverá realizar o cálculo do potencial elétrico nas placas com distribuição uniforme de carga. Estes cálculos serão reportados em forma de relatório para a equipe de fabricação.

Mas de que forma a análise das partículas de cargas se relacionam com os capacitores? Qual a relação do dielétrico do capacitor na análise do campo elétrico?

Além de estudar o conteúdo apresentado, não se esqueça de resolver os exercícios propostos e consultar os materiais elencados nos itens *Pesquise Mais* de cada seção. Certamente esses recursos serão um diferencial na sua formação.

Seção 1.1

Campo elétrico em distribuições contínuas de carga

Diálogo aberto

Nesta seção, você estudará os campos elétricos em distribuições contínuas de carga, e, assim, poderá compreender como calcular o campo elétrico em diversas distribuições de carga, tais como as distribuições linear e superficial. Após ter contato com esse conteúdo, você estará apto a calcular o campo elétrico de placas que são utilizadas na fabricação dos capacitores.

Vamos, então, recordar a situação em que você é o engenheiro da multinacional fabricante de capacitores eletrolíticos. Você recebeu a primeira de três tarefas para o projeto do capacitor, e sua função é fazer a correta análise de materiais. A primeira tarefa consiste em mapear o campo elétrico produzido por placas circulares que serão utilizados na fabricação de capacitores. Os campos elétricos precisam ser mapeados na proximidade das placas, ou seja, em uma distância muito inferior ao raio das mesmas, a partir do centro destas chapas. Existem chapas com raios de 1 cm, 2 cm e 5 cm, cuja densidade de carga considerada é de $4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, $8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ e $6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, respectivamente. É necessário que o campo elétrico seja o maior possível nessas condições. Como você escolheria a chapa mais adequada?

Não pode faltar

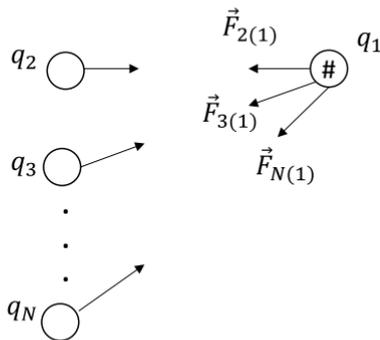
Lembre-se um pouco dos conceitos sobre interação entre cargas elétricas para que você possa entender o que é uma distribuição contínua de cargas. Primeiramente, considere duas cargas em uma localização do espaço, denominadas por q_1 e q_2 , separadas a uma distância r . Agirá sobre elas uma força que será determinada pela Lei de Coulomb, que pode ser de atração ou repulsão, dependendo do sinal das cargas, considerando que o sentido da força está indicado

pelo versor \hat{r} , conforme:

$$\vec{F}_{2(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

Imagine agora que existem várias cargas em uma certa região do espaço e nas proximidades delas é colocada uma carga q_1 , assim como mostra a Figura 1.1. Você consegue prever como será a resultante das forças que agem nesta carga q_1 ?

Figura 1.1 | Carga próxima a um conjunto de cargas



Fonte: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2668-8/cfi/6/201/4/102/24@0.100>>. Acesso em: 25 set. 2017.

Você pode verificar na figura que existe uma interação entre as cargas q_1 e q_2 , produzindo uma força de atração $\vec{F}_{2(1)}$. Da mesma forma, existe uma interação entre as cargas q_1 e q_3 , também produzindo uma força entre elas. Isso ocorre para todas as cargas com a qual a carga q_1 interage, até a carga q_N . Logo, pode-se verificar que a força total resultante na carga q_1 é dada pela soma vetorial das forças agindo sobre ela: $\vec{F}_{T(1)} = \vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_{3(1)} + \dots + \vec{F}_{N(1)} = \sum_{i=2}^N \vec{F}_{i(1)}$.

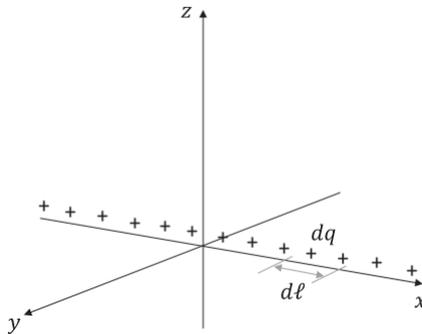
De fato, a força resultante em uma carga posicionada nas proximidades de um conjunto de cargas seguirá o princípio da superposição, ou seja, será a soma das interações de todas as cargas deste conjunto agindo sobre a carga.

Agora, considere uma distribuição contínua de cargas, ou seja, um corpo composto de um amontoado de partículas ou elementos infinitesimais de cargas que são tratadas como cargas individuais interligadas entre si. Dessa forma, em vez de ser tratada a carga

q de cada um dos elementos infinitesimais de carga, será usado um elemento dq , definido pela densidade de carga das distribuições contínuas. As distribuições contínuas de carga podem ser categorizadas como linear, superficial ou volumétrica, dependendo de como os elementos infinitesimais de carga se apresentam. A diferença entre esses tipos de distribuição está nas distribuições de carga apresentadas no plano de coordenadas.

Na Figura 1.2 é apresentado um plano de coordenadas x, y, z . Em uma distribuição linear de cargas, os elementos infinitesimais de carga estão distribuídos em apenas um dos eixos. Na figura, encontra-se uma distribuição linear e uniforme de cargas em um infinito que pode ser posicionado ao longo do eixo x .

Figura 1.2 | Distribuição linear de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

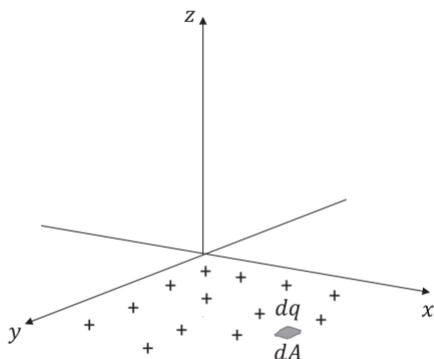
A densidade linear de cargas é definida pela quantidade de cargas que existe em um certo comprimento linear. Neste caso, para cada elemento infinitesimal de carga dq , pode-se associar um elemento infinitesimal de comprimento $d\ell$. Logo, a densidade linear de cargas é dada por: $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$.

Supondo uma distribuição uniforme de cargas linear em um fio de comprimento L , de um amontoado de cargas Q , pode-se definir a densidade de cargas como $\lambda = \frac{Q}{L}$.

Em uma distribuição superficial de cargas, a distribuição de cargas se encontra em um plano. Então, considera-se dois dos eixos do sistema de coordenadas. Por exemplo, imagine que uma distribuição uniforme de cargas é encontrada sobre um plano infinito, definido pelos eixos

x e y. Como seria a densidade de cargas neste caso? Essa distribuição pode ser visualizada na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Distribuição superficial de cargas

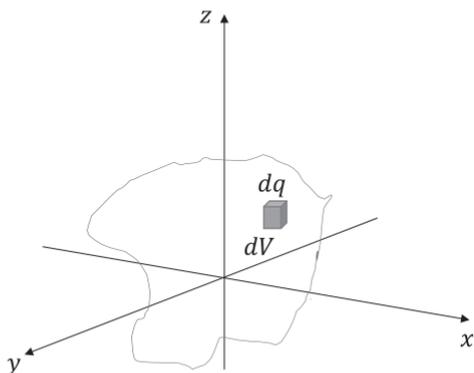


Fonte: elaborada pelo autor.

A densidade superficial de cargas é definida pela quantidade de cargas que existem em uma certa região de área. Neste caso, para cada elemento infinitesimal de carga dq , pode-se associar um elemento infinitesimal de área dA . Logo, a densidade superficial de cargas é dada por: $\sigma = \frac{dq}{dA}$.

Em uma distribuição volumétrica de cargas, os elementos infinitesimais de carga estão distribuídos em três eixos, formando um corpo que tem um certo volume. Na Figura 1.4 encontra-se uma distribuição volumétrica e uniforme de cargas em determinado corpo.

Figura 1.4 | Distribuição volumétrica de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

A densidade volumétrica de cargas é definida pela quantidade de cargas que existem em uma certa região de volume. Neste caso, para cada elemento infinitesimal de carga dq , pode-se associar um elemento infinitesimal de volume dV . Logo, a densidade volumétrica de cargas é dada por: $\rho = \frac{dq}{dV}$.



Assimile

As **distribuições contínuas de carga** consistem em um amontoado de cargas que estão distribuídas de forma linear, superficial ou volumétrica. Para cada tipo de distribuição está associada uma **densidade de carga**.



Exemplificando

Imagine um aglomerado de cargas que forma uma esfera de raio R . Como é possível calcular a carga total, sabendo que a densidade de carga é dada por ρ ?

Resolução: Basta rearranjar a equação da densidade volumétrica de carga, tal que: $dq = \rho dV$.

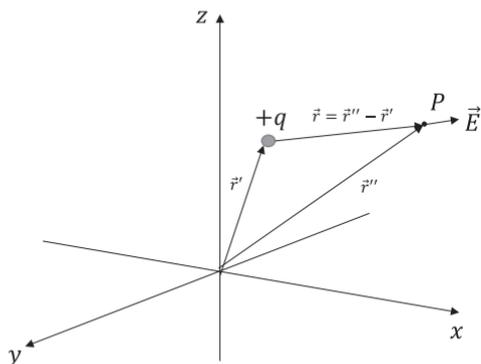
Para obter a carga total, deve-se integrar os dois lados da igualdade anterior. Logo:

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \text{sen}(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$Q = \rho \cdot \frac{1}{3} (R^3 - 0) (\cos(0) - \cos(\pi)) (2\pi - 0) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

Muito bem! Agora que você entendeu o que é uma distribuição contínua de cargas e o conceito de densidade de cargas, veja como é possível estudar o campo elétrico nessas distribuições. Recorde como calcular o campo elétrico de uma carga pontual: existe uma carga q em uma região do espaço distante \mathbf{r}' da origem do plano de coordenadas x, y, z . O campo elétrico em um ponto P localizado a uma distância \mathbf{r}'' da origem, conforme Figura 1.5, será dado por: $\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$.

Figura 1.5 | Partícula de carga q no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

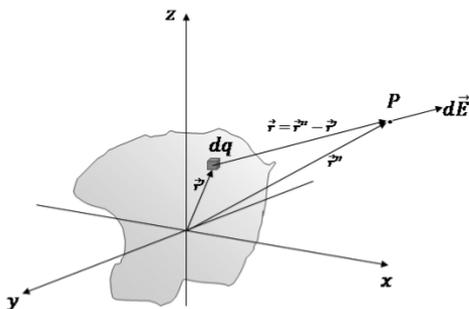


Refleta

Você notou que a equação do campo elétrico no ponto P independe da existência de uma carga? Como você explica isso?

Pode-se concluir que o campo elétrico de cargas distribuídas será uma superposição do campo gerado por cada um dos elementos infinitesimais de carga (o princípio da superposição também vale aqui!). Dessa forma, analise a Figura 1.6 que mostra um ponto P localizado a uma certa distância r de um elemento infinitesimal de carga dq . Neste caso, um campo elétrico $d\vec{E}$ existirá no ponto P , que pode ser calculado como segue:
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Figura 1.6 | Cálculo do campo elétrico em uma distribuição volumétrica de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

Seguindo o princípio da superposição, o campo total será dado pela integral de $d\vec{E}$:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Como cargas uniformemente distribuídas correspondem a um grande número de cargas puntiformes distribuídas linearmente, superficialmente ou em um volume, é possível expandir a equação do campo elétrico para esses três tipos de distribuição, pois cada uma deles tem um tipo de densidade de cargas distribuídas.

Para a distribuição linear de cargas: $dq = \lambda d\ell$. Logo, é possível desenvolver a equação do campo elétrico, sendo que ℓ' corresponde à região carregada do fio:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell'} \frac{\lambda d\ell}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Para a distribuição superficial de cargas: $dq = \sigma dA$. Logo, é possível desenvolver a equação do campo elétrico, sendo que A' corresponde à região carregada de área:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{A'} \frac{\sigma dA}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Para a distribuição volumétrica de cargas: $dq = \rho dV$. Logo, é possível desenvolver a equação do campo elétrico, sendo que V' corresponde à região carregada de volume:

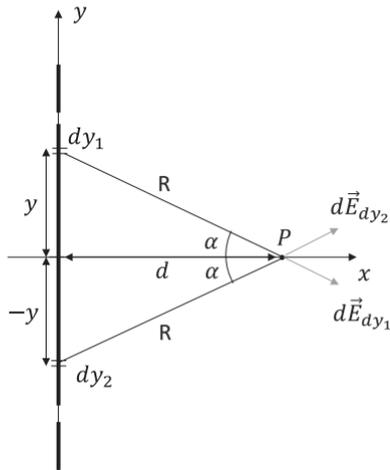
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho dV}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$



Exemplificando

Para ilustrar melhor, e para que você entenda como calcular a integral, considere que você deseja obter o campo elétrico em um ponto P a uma distância r de um condutor infinito carregado, conforme mostra a Figura 1.7.

Figura 1.7 | Fio infinito com cargas distribuídas



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: Nesse caso, você pode perceber que existe uma distribuição linear de cargas, sendo que as cargas estão distribuídas ao longo do condutor infinito. O fio tem uma densidade linear de carga constante dada por λ . Você pode verificar que é possível traçar um eixo vertical y ao longo deste fio e, também, um eixo horizontal x perpendicular ao eixo y na linha da distância d entre o fio e o ponto P .

Para uma parcela infinitesimal de comprimento dy , localizada em uma distância y da origem do plano determinado pelos eixos x e y , tem-se o campo $d\vec{E}_1$, enquanto que para uma parcela infinitesimal de mesmo comprimento dy , localizada a uma distância $-y$ da origem do plano, tem-se o campo $d\vec{E}_2$. Considerando que a mesma quantidade infinitesimal de carga está localizada em dy nos dois extremos, pode-se afirmar que $|d\vec{E}_1| = |d\vec{E}_2|$. A partir disso, é possível verificar que a projeção vertical de $d\vec{E}_1$ tem mesmo módulo e sentido oposto à projeção vertical de $d\vec{E}_2$. Então, a resultante dos campos dessas duas parcelas infinitesimais somente será diferente de zero no eixo horizontal x . Assim, é possível escrever para a distribuição linear de cargas:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_x = \int |d\vec{E}| \cos(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{R^2} \cos(\alpha) \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dy}{R^2} \cos(\alpha) \hat{x}$$

Perceba que tanto y quanto α são variáveis e, por isso, pode-se escrever

y em termos de α , conforme segue:

$$y = \tan(\alpha)d \rightarrow dy = \frac{d}{\cos(\alpha)} d\alpha$$

$$\cos(\alpha) = \frac{d}{R}$$

Substitua esses valores na equação, assim como o limite de integração, e veja como fica:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-90^\circ}^{+90^\circ} \frac{\cos^2(\alpha)}{d^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \cdot d \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha \cdot \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-90^\circ}^{+90^\circ} \frac{\cos(\alpha)}{d} \cdot d\alpha \cdot \hat{x}$$

Resolvendo a integral, obtêm-se:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi d \epsilon_0} [\text{sen}(90^\circ) - \text{sen}(-90^\circ)] \hat{x} = \frac{\lambda}{2\pi d \epsilon_0} \hat{x}$$



Pesquise mais

Os vídeos a seguir mostram uma aula do Prof. Luiz Marco Brescansin, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), abordando as distribuições contínuas de carga. No primeiro link, os principais conceitos são explicados. Já no segundo, o professor resolve alguns exemplos interessantes, com detalhes muito ricos.

1. Assistir a partir de 33:10.

UNIVESP. **Física Geral III** – Aula 2 – Campo Elétrico – Parte 1. 2013. Disponível em: <<https://youtu.be/njsGDadL09g>>. Acesso em: 4 out. 2017.

2. Assistir aos 12 primeiros minutos.

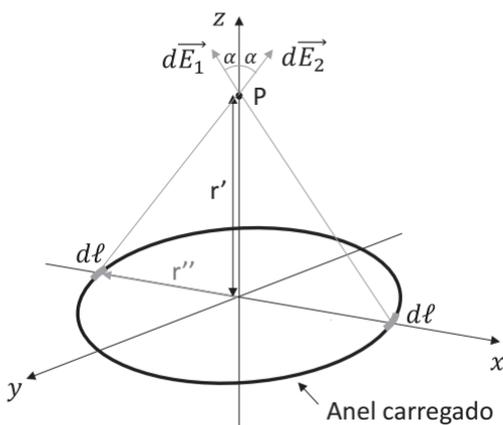
UNIVESP. **Física Geral III** – Aula 2 – Campo Elétrico – Parte 2. 2013. Disponível em: <<https://youtu.be/A01u84pUGVl>>. Acesso em: 4 out. 2017.

Sem medo de errar

Nesta unidade você está no lugar de um engenheiro que trabalha em uma multinacional fabricante de capacitores. Em sua primeira tarefa você deve mapear o campo elétrico produzido por placas circulares que serão utilizadas na fabricação de capacitores. Os campos elétricos precisam ser mapeados na proximidade das placas, ou seja, em

uma distância muito inferior ao raio das mesmas, a partir do centro destas chapas. Existem chapas com raios de 1 cm, 2 cm e 5 cm, cuja densidade de carga considerada é de $4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, $8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ e $6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, respectivamente. É necessário que o campo elétrico seja o maior possível dessas condições. Assim, para que você avance no projeto, é necessário compreender a situação, incluindo a placa nas coordenadas x , y e z , assim como mostra a Figura 1.8. A partir disso, você pode identificar um ponto P no eixo z , a uma distância do centro do anel de carga.

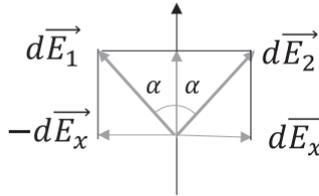
Figura 1.8 | Anel carregado



Fonte: elaborada pelo autor.

Tomando uma quantidade infinitesimal em dois lados opostos deste anel, tem-se dois campos $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$, que têm módulos iguais. Você consegue observar que, para qualquer quantidade infinitesimal de carga no anel, existe uma quantidade do lado oposto que gera dois vetores de campo elétrico simétricos, e isso ocorre por todo o perímetro do anel. Cada um destes vetores tem uma componente paralela ao anel (ou paralela ao plano xy) e uma componente no eixo z , com sentido para cima. Logo, pode-se concluir que as componentes de campo resultantes no plano xy serão iguais a zero. A resultante do campo será apenas no eixo z , e com sentido para cima, como mostrado na Figura 1.9.

Figura 1.9 | Componentes do campo elétrico



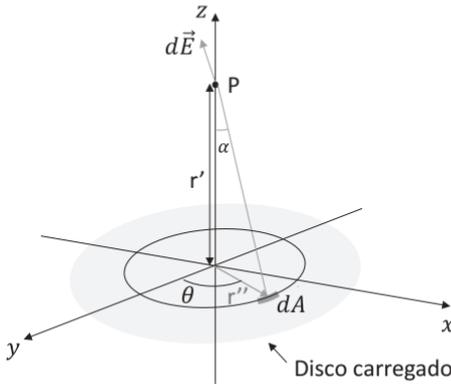
Fonte: elaborada pelo autor.:

Pode-se escrever a componente infinitesimal de campo no eixo z da seguinte forma:

$$d\vec{E}_z = |d\vec{E}| \cos(\alpha).$$

Entendido isso, é possível voltar às placas circulares. Na Figura 1.10 é mostrado um disco carregado com densidade de carga superficial σ , e o objetivo é calcular o campo elétrico em um ponto P acima do centro deste disco.

Figura 1.10 | Disco carregado



Fonte: elaborada pelo autor.:

Verifica-se que um disco carregado é a superposição de vários anéis carregados. Dessa forma, para o disco, apenas haverá a resultante no eixo z, também. Então é possível escrever:

$$d\vec{E}_z = |d\vec{E}| \cos(\alpha) \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{b^2} \cos(\alpha) \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dA}{b^2} \cos(\alpha) \hat{z}$$

$$b = \sqrt{(r')^2 + (r'')^2}$$

Fazendo $r' = z$, $r'' = r$, $dA = 2\pi r \cdot dr$, e $\cos(\alpha) = z/b$, substituíse esses valores e integra-se a equação anterior. Supondo que o disco tenha raio R , ocorrerá:

$$\vec{E}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \frac{\sigma dr 2\pi r}{(z^2 + r^2)(z^2 + r^2)^{1/2}} \hat{z} = \frac{\sigma 2\pi z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \hat{z} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \hat{z}$$

$$\vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \hat{z}$$

Assim, para pontos muito próximos da placa: $R \gg z$. Logo:

$$\vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Note que o campo elétrico, nesse caso, independe do raio e da distância da placa.

Sendo $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ a constante de permissividade do vácuo, é possível calcular o campo elétrico para cada distribuição de carga dada:

$$\sigma_1 = 4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow E_1 = 2,43 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$\sigma_2 = 8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow E_2 = 4,97 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$\sigma_3 = 6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow E_3 = 3,45 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Logo, você escolheu a placa de raio 2 cm, com densidade de carga igual a $8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$.

Avançando na prática

Cálculo do campo elétrico gerado por um plano carregado

Descrição da situação-problema

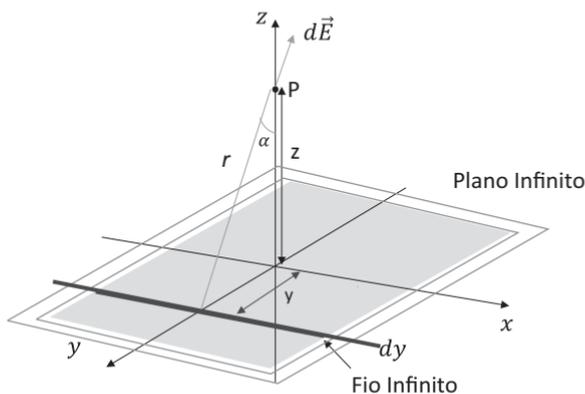
Imagine que você está trabalhando em um projeto nas instalações de um grande parque industrial. No momento, a instalação do parque conta com um assentamento e um dispositivo para-raios. Devido a uma tempestade e uma falha do dispositivo, um raio causou uma acumulação de cargas elétricas do plano do assentamento. Um estudo demonstrou que, devido ao raio, uma densidade de cargas de

$9 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$ ficou acumulada uniformemente no plano. Seu gestor solicitou que, com base nessa informação de densidade de cargas, você calcule o campo elétrico nas proximidades do piso, de forma que seja verificado se essa energização acidental poderia afetar de forma considerável os equipamentos que devem ser instalados no chão de fábrica. Se o campo elétrico for superior a 600 N/C , os equipamentos poderão ter o funcionamento comprometido.

Resolução da situação-problema

Modele essa situação como o cenário de um plano infinito de cargas, pois você deseja obter o campo nas proximidades do piso, e como se trata de um parque industrial, significa que as dimensões do terreno são muito maiores que a distância do piso em que o campo elétrico será calculado. Considere um plano infinito como uma superposição de fios infinitos no plano definido por dois eixos, como mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Plano infinito carregado



Fonte: elaborada pelo autor.

Voltando ao resultado do campo elétrico calculado a uma distância de um fio infinito, é possível escrever a equação de $d\vec{E}$ devido a um fio infinito de espessura dy , considerando que a densidade linear neste fio pode ser dada a partir da densidade superficial, conforme segue:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Sabe-se que $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, e que devido à simetria, apenas a componente de $d\vec{E}$ no eixo z produzirá uma resultante não nula. Logo, a expressão anterior pode ser integrada apenas para o eixo z, de forma a obter o campo total:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos(\alpha) \hat{z} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \hat{z} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dy}{(y^2 + z^2)} \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Para uma densidade de carga de $9 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$:

$$E = \frac{9 \times 10^{-9}}{2 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 508,5 \text{ N/C}.$$

Uma vez que o campo calculado é menor que 600 N/C, a densidade de carga não provocará prejuízos ao funcionamento dos equipamentos.

Faça valer a pena

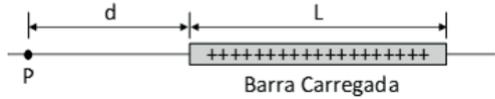
1. Quando um corpo se encontra em equilíbrio eletrostático, é possível definir uma densidade superficial de cargas, que é dada pela razão entre a carga total distribuída na superfície e a área desta superfície.

Considere uma placa uniforme quadrada de lado igual a 2 cm. Se sobre esta placa encontra-se um volume de cargas uniforme, cuja carga total é igual a $3 \times 10^{-3} \text{ C}$, a densidade de carga da placa será:

- a) $1,5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$.
- b) $7,5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$.
- c) $1,2 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$.
- d) $7,5 \text{ C/m}^2$.
- e) $1,3 \times 10^{-1} \text{ C/m}^2$.

2. Considere uma barra de comprimento L carregada com cargas uniformemente distribuídas, conforme mostrado na Figura 1.12. No eixo desta barra está localizado um ponto P distante de uma distância d da extremidade esquerda da barra.

Figura 1.12 | Barra com cargas uniformemente distribuídas



Fonte: elaborada pelo autor.

Se a barra tem um total de cargas igual à \$Q\$, considerando que $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, qual será o campo no ponto \$P\$?

a) $\frac{Q}{kL} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right]$.

b) $k \frac{Q}{L} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right]$.

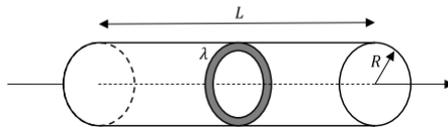
c) $k \frac{Q}{L} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d-L} \right]$.

d) $\frac{Q}{kL} \left[d - \frac{1}{d+L} \right]$.

e) $k \frac{Q}{L} \left[\frac{L}{d} + \frac{1}{d+L} \right]$.

3. Um acelerador de partículas instalado em um laboratório de análise de fenômenos eletromagnéticos tem um tubo de comprimento \$L\$ pelo qual passará a partícula. No ponto médio deste tubo existe um anel carregado com densidade de cargas igual à \$\lambda\$, conforme mostra a Figura 1.13:

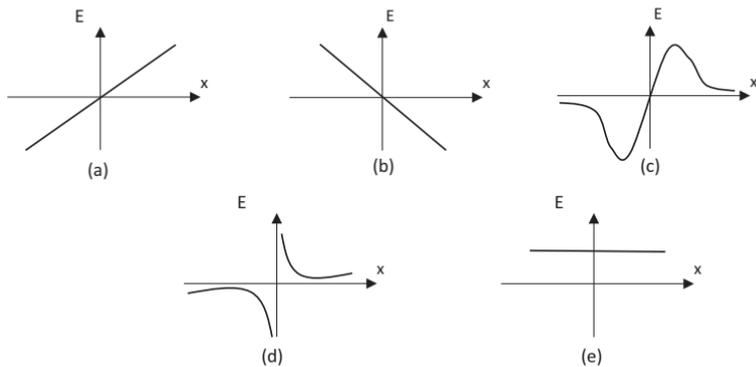
Figura 1.13 | Estrutura do acelerador de partículas com anel de densidade de carga \$\lambda\$



Fonte: elaborada pelo autor.

Das formas de onda mostradas na Figura 1.14, qual é a que melhor representa a magnitude do campo elétrico pelo qual a partícula atravessa ao ir da extremidade esquerda até a extremidade direita do tubo?

Figura 1.14 | Alternativas de gráfico da magnitude do campo elétrico da partícula ao passar pelo acelerador



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Figura a.
- b) Figura b.
- c) Figura c.
- d) Figura d.
- e) Figura e.

Seção 1.2

Lei de Gauss

Diálogo aberto

Na seção anterior, foi analisado o cálculo do campo elétrico em distribuições contínuas de carga. Em algumas aplicações, os cálculos podem envolver esforços matemáticos significativos. Agora, nesta seção, você irá estudar uma alternativa que ajudará a minimizar os esforços de cálculos em algumas situações mais complexas: a Lei de Gauss. Para isso, será necessário compreender a definição de fluxo de campo elétrico e, a partir dela, chegar nesta lei.

O problema que você deverá resolver agora envolve uma tomada de decisões. Na sua segunda tarefa, você foi designado a participar de um estudo para o emprego de diferentes materiais dielétricos na fabricação de capacitores eletrolíticos. Sua função é calcular o campo elétrico dentro do dielétrico destes capacitores, de forma que o campo elétrico mínimo seja de 1000 N/C para uma densidade de carga de $6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$. No entanto, os capacitores serão fabricados com três materiais dielétricos diferentes. A seguir é apresentada a Tabela 1.1 que mostra a constante dielétrica e o custo de cada um dos materiais que podem ser empregados.

Tabela 1.1 | Constante dielétrica e custo para diversos materiais

Material dielétrico	Constante dielétrica (k)	Custo (R\$)
Porcelana	5	100,00
Mica	7	300,00
Poliétileno	2,5	500,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nessas informações, qual tipo de material você escolheria?

Não pode faltar

Para calcular o campo elétrico em distribuições contínuas de carga, você viu na Seção 1.1 que é possível considerar o caso de uma partícula puntiforme e extrapolar para uma determinada distribuição de carga, integrando os efeitos de cada um dos elementos infinitesimais de carga presentes nesta distribuição. Entretanto, apenas com os conceitos de campo elétrico vistos na última seção, será muito complicado realizar essa tarefa. Por isso, agora, você será desafiado a aplicar a Lei de Gauss com a finalidade de simplificar os problemas de cálculo de campo e fluxo elétrico.

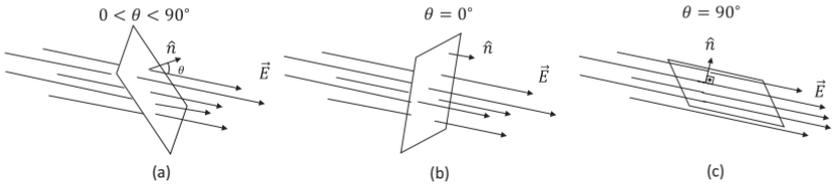
Primeiramente, entenda o conceito de fluxo de campo elétrico, fazendo uma analogia com o fluxo de água por um cano. A vazão (ou fluxo) de água pode ser definida pelo produto da velocidade da água pela área do cano em que ela atravessa. Quando se fala de fluxo de campo elétrico, automaticamente faz-se referência à passagem de outra grandeza vetorial – o campo elétrico – por determinada região de área. Apesar de neste caso não haver um movimento, a analogia do cálculo permite chamar o resultado do produto escalar entre o campo elétrico e a área vetorial da superfície de **fluxo de campo elétrico**.

Para entender melhor, considere a Figura 1.15a, que demonstra as linhas de um campo elétrico uniforme passando por um plano que possui certa angulação. O versor \hat{n} determina um vetor perpendicular ao plano e é chamado de normal. Este vetor converte a área do plano em uma grandeza vetorial ($\vec{A} = A\hat{n}$). O fluxo elétrico pode ser determinado pelo produto escalar:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A\hat{n} = EA \cos(\theta)$$

Assim, a direção do campo elétrico com relação à superfície considerada irá influenciar no ângulo θ e, portanto, no valor do fluxo. Quando o vetor de fluxo está no mesmo sentido da normal, assim como mostra a Figura 1.15b, o fluxo será máximo, pois $\cos(0^\circ) = 1$. Por outro lado, se o vetor de campo está perpendicular à normal como mostra a Figura 1.15c, o fluxo será nulo, pois $\cos(90^\circ) = 0$.

Figura 1.15 | Fluxo de campo elétrico em uma superfície plana



Fonte: elaborada pelo autor.

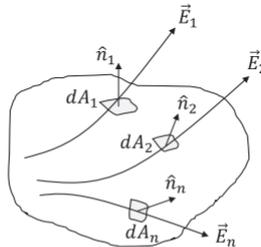


Assimile

Fluxo de campo elétrico é determinado pelo produto escalar entre o vetor de campo elétrico e o vetor área que este fluxo percorre. Por definição, o fluxo elétrico parte da carga positiva e termina na carga negativa. Na ausência de carga negativa, o fluxo segue infinitamente. O cálculo do fluxo de campo elétrico é dado por $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A\hat{n} = EA \cos(\theta)$.

Veja agora uma ideia generalizada de vazão para o fluxo de campo elétrico, conforme mostra a Figura 1.16. As diversas linhas de campo elétrico não estão necessariamente no mesmo sentido e cada uma passa por pequenas partes da superfície ($d\vec{A}_i$). Para cada uma dessas áreas existe uma quantidade infinitesimal de fluxo de campo elétrico ($d\Phi_i$), definido por: $d\Phi_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i \hat{n}_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i$

Figura 1.16 | Fluxo elétrico em uma superfície fechada



Fonte: elaborada pelo autor

Aplicando o princípio da superposição, é possível escrever o fluxo total somando os fluxos infinitesimais, ou seja, calculando a integral:

$$\Phi = \int_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i$$

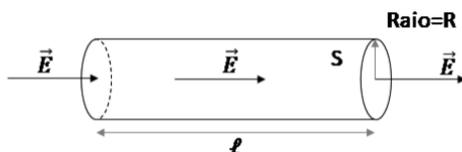
Em uma superfície fechada, é possível fazer uma integração e escrever:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E} \cdot n d\vec{A}$$



Considere a área S fechada, delimitada por um cilindro, conforme a figura a seguir, com um campo elétrico uniforme e perpendicular atravessando tangencialmente ao eixo deste cilindro. Qual o fluxo de campo total que passa através de S ?

Figura 1.17 | Campo elétrico percorrendo um cilindro



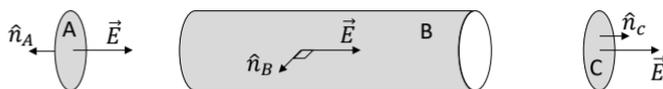
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: Inicialmente, determine três áreas que compõem a superfície S : a área A , B e C . As áreas A e C são definidas pelas tampas do cilindro, enquanto que a área B determina a superfície lateral. Dessa forma, o fluxo que passa pela área S é igual à soma do fluxo por cada uma das áreas.

$$\Phi_S = \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C$$

Por convenção, em uma superfície fechada, o vetor normal deve estar localizado externamente à superfície, por isso, para cada uma das áreas será feito o cálculo conforme a figura:

Figura 1.18 | Superfícies A , B e C do cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

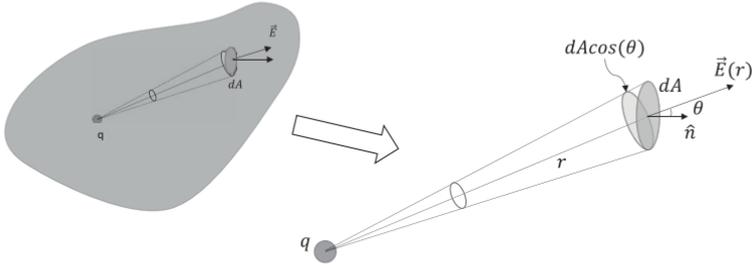
Logo, percebe-se que:

$$\Phi_S = E\pi R^2 \cos(180^\circ) + E\pi R^2 \ell \cos(90^\circ) + E\pi R^2 \cos(0^\circ).$$

$$\Phi_S = -E\pi R^2 + 0 + E\pi R^2 = 0$$

A Figura 1.19 a seguir mostra uma carga pontual no interior de uma superfície e o campo elétrico em determinado ponto da superfície a uma distância r da carga.

Figura 1.19 | Carga pontual no interior de uma superfície fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

No ponto de uma área infinitesimal dA , a normal não está necessariamente na mesma direção de r . Logo, é possível projetar uma área $dA \cos(\theta)$ perpendicular a r . Defina $d\Omega$, tal que:

$$d\Omega = \frac{dA \cos(\theta)}{r^2}$$

Dessa forma, o fluxo de campo elétrico pode ser reescrito assim:

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = E(r) \cdot dA \cos(\theta) = E(r) r^2 d\Omega$$

Entretanto, você deve se lembrar de que o campo de uma carga puntiforme a uma distância r é dado por:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Com base nisso, e sabendo que \int em uma esfera varia de 0 à 4π , integrando do lado direito e do lado esquerdo, ocorrerá:

$$\Phi = \int_S E(r) r^2 d\Omega = \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Logo, a Lei de Gauss pode ser definida como a relação entre o campo elétrico em uma superfície que envolve uma quantidade de carga a partir da equação a seguir:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) dA \hat{n} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

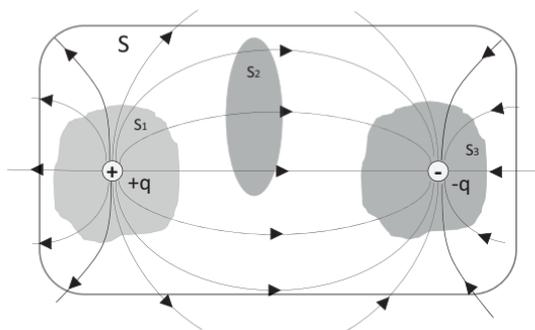
A equação considera a quantidade de carga total (q_{int}) no interior da superfície fechada. Mas o que ela significa?

A equação para Lei de Gauss relaciona uma quantidade de carga com o campo elétrico de forma generalizada e pode ser aplicada em diversas situações. Para isso, é necessário considerar a região

na qual a equação será aplicada, traçando sobre ela uma superfície fechada, tridimensional e imaginária, que é denominada **superfície gaussiana**. O fluxo através de uma superfície fechada produzido por cargas interiores é igual à soma algébrica das cargas interiores dividida pela permissividade do meio. Por outro lado, o fluxo através de uma superfície fechada produzido por cargas exteriores é nulo.

Para entender melhor o conceito, considere a Figura 1.20, que mostra as linhas de fluxo entre duas partículas de cargas $+q$ e $-q$ e quatro superfícies gaussianas desenhadas. Você consegue visualizar o valor do fluxo em cada uma delas? Basta aplicar o lado direito da equação da Lei de Gauss. Veja que, na superfície S_1 , há uma carga $+q$ e, por isso, o fluxo será $\frac{+q}{\epsilon_0}$. Já na superfície S_2 não existe carga, logo, o fluxo é zero. No interior da superfície S_3 existe uma carga $-q$, logo, o fluxo será $\frac{-q}{\epsilon_0}$.

Figura 1.20 | Linhas de fluxo elétrico e superfícies gaussianas entre duas cargas



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Com base no que você aprendeu até agora sobre fluxo elétrico e Lei de Gauss, qual será o fluxo na superfície S da Figura 1.20?



Assimile

A Lei de Gauss relaciona o campo elétrico em uma superfície fechada, imaginária e tridimensional, denominada superfície gaussiana, com a

soma total de cargas no interior desta superfície (q_{int}) sendo dada por:

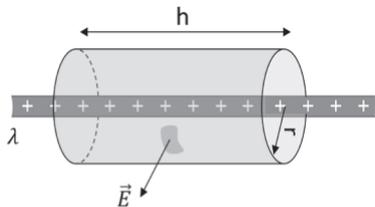
$$\Phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) dA \hat{n} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Dessa forma, se uma carga no exterior de uma superfície gaussiana gera um campo cujas linhas a atravessam, o fluxo total por essa superfície será igual a zero.

A Lei de Gauss é uma lei geral que pode ser utilizada amplamente para o cálculo do campo elétrico, contudo, deve-se atentar para a utilização da simetria adequada quando a superfície gaussiana for determinada.

A Lei de Gauss pode ser uma grande aliada para minimizar cálculos. Por exemplo, para determinar o campo elétrico a uma certa distância de um fio infinito, na seção anterior foram utilizadas diversas relações trigonométricas. No entanto, a obtenção de uma expressão para esse campo elétrico utilizando a Lei de Gauss é muito mais simples: basta considerar uma simetria cilíndrica, adotando como superfície gaussiana um cilindro de raio qualquer, envolvendo este fio infinito, conforme mostra a Figura 1.21.

Figura 1.21 | Exemplo de simetria cilíndrica com fio infinito carregado



Fonte: elaborada pelo autor.

Se existe uma certa distribuição linear uniforme de cargas neste fio, pode-se visualizar que na região do cilindro tem-se uma carga total dada por: $Q = \lambda h$.

Para calcular o fluxo elétrico por meio de um ponto da superfície lateral do cilindro, é necessário resolver a integral do lado esquerdo da Lei de Gauss. Porém é importante visualizar que, em todos os elementos de área da superfície lateral, o vetor área dA tem uma

direção radial para fora da superfície gaussiana, assim como o campo elétrico uniforme. Portanto, o produto escalar que aparece na Lei de Gauss será:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint E dA \cos(0^\circ) = E \oint dA = E(2\pi rh)$$

Completando a equação com o lado direito, é possível encontrar o campo elétrico:

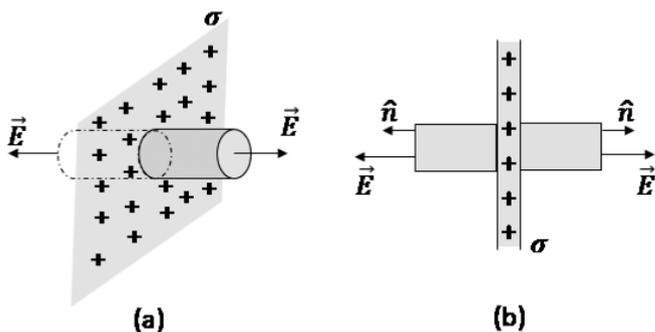
$$E(2\pi rh) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Outra situação em que pode-se simplificar significativamente os cálculos é o problema de uma placa infinita com uma densidade superficial de carga positiva σ . O campo elétrico em uma distância r da placa pode ser calculado utilizando a Lei de Gauss e uma superfície gaussiana simétrica ao plano, como mostra a Figura 1.22.

Para esse tipo de problema, podemos utilizar como superfície gaussiana um cilindro com o eixo perpendicular à placa e fechado em suas extremidades. Nesse caso, resulta um campo perpendicular à placa e às bases do cilindro. A figura ainda mostra uma placa com cargas positivas, logo, a direção do campo é saindo da mesma, atravessando as duas bases do cilindro no sentido de dentro para fora. Na superfície lateral do cilindro, o produto escalar do fluxo será igual a zero. Logo, basta calcular os fluxos nas bases do cilindro utilizando a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Figura 1.22 | Exemplo de simetria plana com placa infinita carregada



Fonte: elaborada pelo autor.

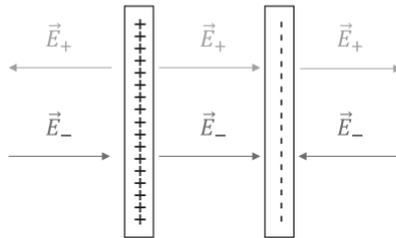


Exemplificando

Duas placas carregadas, uma positivamente e outra negativamente, possuem densidades de carga de $6 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ e $3 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$, respectivamente. Qual será o campo elétrico entre as placas?

Resolução: O sentido dos campos elétricos devido às placas com cargas positivas e negativas são dados na figura a seguir por \vec{E}_+ e \vec{E}_- , respectivamente.

Figura 1.23 | Campos elétricos entre duas placas carregadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere que o comprimento das placas é suficientemente extenso. Logo, no interior das placas, o valor do campo será dado por:

$$E_{in} = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2\epsilon_0} = \frac{(6 + 3) \times 10^{-6}}{8,85 \times 10^{-12}} = 1,02 \times 10^6 \text{ N/C}$$

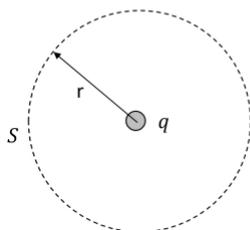


Faça você mesmo

No problema anterior, qual será o valor do campo elétrico nos dois lados externos das placas?

Finalmente, um dos casos que ajudam muito na simplificação de cálculos é o uso da simetria esférica. Inicialmente, considere o cálculo do campo de uma carga puntiforme a uma distância r qualquer. É possível pensar em uma simetria esférica, como mostra a Figura 1.24.

Figura 1.24 | Exemplo de simetria esférica com carga puntiforme



Fonte: elaborada pelo autor.

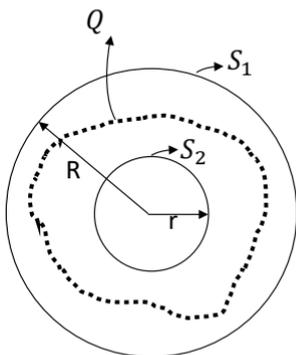
Logo, ao calcular o campo a uma distância r da carga, pode-se pensar em uma superfície esférica de raio r e aplicar a Lei de Gauss da forma como mostrada a seguir:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) dA \hat{n} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Veja que o resultado é exatamente o campo derivado da Lei de Coulomb. Entretanto, esse caso é trivial. Nos casos mais complexos de distribuições contínuas de carga, é indicado a utilização da Lei de Gauss para simplificar os cálculos.

Pense em outras situações que permitem utilizar a Lei de Gauss traçando uma superfície gaussiana de simetria esférica. Considere exista um amontoado uniformemente distribuído em uma superfície no formato de casca, não necessariamente esférica. No entanto, é possível traçar duas gaussianas de formato esférico, conforme mostrado na Figura 1.25, nomeadas de S_1 , de raio R , e S_2 , de raio r .

Figura 1.25 | Exemplo de simetria esférica com casca carregada



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplice a Lei de Gauss para calcular o campo elétrico no interior e exterior da casca com distribuição uniforme de cargas. Para calcular o campo no exterior, utilize a superfície esférica S_1 :

$$\oint_{S_1} \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E \oint_{S_1} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0}$$

Em qualquer ponto distante de um raio R do centro da casca, cuja superfície esférica cubra toda a distribuição, o campo se comporta como o de uma partícula de mesma carga a uma distância r .

No interior da casca esférica, é possível utilizar novamente a Lei de Gauss na superfície S_2 :

$$\oint_{S_2} \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E \oint_{S_2} d\vec{A} = 0 \rightarrow E 4\pi R^2 = 0 \rightarrow E = 0$$

Uma vez que a carga interna a esta superfície é igual a zero, o campo também será. Os dois resultados compõem a lei das cascas, que determina que o campo no interior de uma casca carregada eletricamente e uniformemente é igual a zero, enquanto que a carga no exterior da casca é igual à carga de uma carga puntiforme, de mesmo valor de carga total, localizada a uma distância do ponto em que se deseja obter o campo elétrico até o centro.



Pesquise mais

A Lei de Gauss relaciona o campo elétrico em uma superfície fechada, ou seja, o fluxo do campo elétrico pode ser determinado por uma integral de volume envolvendo a divergência do campo elétrico. Assim, é possível determinar uma forma da Lei de Gauss que envolve o divergente do campo e a distribuição volumétrica de carga:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

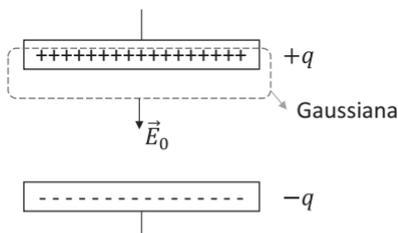
Para mais informações sobre essa relação, consulte em sua biblioteca virtual a Seção 1.7 do livro a seguir:

REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Sem medo de errar

Relembre agora a tarefa que você precisa realizar no projeto dos capacitores. Com os conceitos aprendidos nesta seção, você será capaz de utilizar a Lei de Gauss, indicando ao seu gestor qual material deve ser adquirido, com base nas informações da Tabela 1.1. Entretanto, algumas considerações importantes devem ser feitas. Por exemplo, onde você traçaria a superfície gaussiana neste caso? Como se trata de um capacitor sem dielétrico, é possível considerar uma das placas carregadas e traçar uma gaussiana para obter o campo elétrico internamente, conforme a Figura 1.26.

Figura 1.26 | Placas do capacitor sem dielétrico



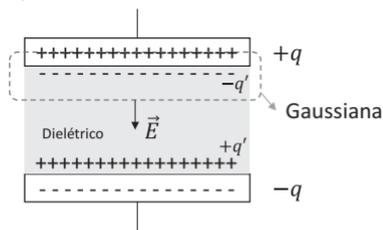
Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a Lei de Gauss, obtém-se o campo no interior das placas:

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA = \frac{+q}{\epsilon_0} \rightarrow E_0 A = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

Com dielétrico, haverá uma concentração de cargas negativas $-q'$ no dielétrico muito próximo da placa carregada, conforme mostra a Figura 1.27. Neste caso, a carga interna dentro da superfície gaussiana não será mais somente q , mas, sim, a diferença das cargas.

Figura 1.27 | Placas do capacitor com dielétrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a Lei de Gauss, obtém-se o campo no interior das placas:

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA = \frac{q - q'}{\epsilon_0} \rightarrow E_0 A = \frac{q - q'}{\epsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

Percebe-se que o valor da magnitude de campo E é menor que E_0 . Essa redução é proporcional à constante dielétrica. Assim:

$$q - q' = \frac{q}{k}$$

E também:

$$E = \frac{E_0}{k} = \frac{q}{k\epsilon_0 A}$$

Considere, inclusive, que a densidade superficial de carga é dada por $\frac{q}{A}$, logo:

$$E = \frac{\sigma}{k\epsilon_0}$$

Para os materiais descritos, ocorrerá:

$$E_{\text{porcelana}} = \frac{6,1 \times 10^{-8}}{5 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 1,3785 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_{\text{mica}} = \frac{6,1 \times 10^{-8}}{7 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 985 \text{ N/C}$$

$$E_{\text{polietileno}} = \frac{6,1 \times 10^{-8}}{2,5 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 2,7571 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Ao analisar os requisitos (considerando que o campo deve ser maior que 1000 N/C), você pode perceber que a porcelana e o polietileno são os materiais mais adequados. A partir da tabela de custo fornecida, você verificará que o custo da porcelana é menor que o do polietileno. Logo, é preferível escolher a porcelana pelo menor custo (R\$100,00).

Avançando na prática

Condutor carregado – exemplo de um container de aço

Descrição da situação-problema

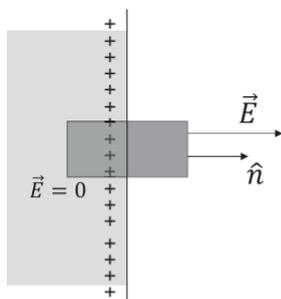
Em uma obra de construção civil, existem containers de aço maciço que são utilizados para estocagem de material. Percebeu-se que

um container acumula cargas nas superfícies de sua parede externa. Considerando que a distribuição de carga possui uma densidade superficial de $7 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$, foi solicitado que você, como responsável pela obra, apresente os cálculos de campo elétrico nas proximidades da parede desse container.

Resolução da situação-problema

Uma forma de resolver o problema é aplicar a Lei de Gauss para o condutor carregado traçando uma superfície gaussiana (um cilindro, por exemplo), como mostrado na Figura 1.28:

Figura 1.28 | Parede do container carregada eletricamente



Fonte: elaborada pelo autor.t

Você pode perceber que o campo elétrico a uma distância da superfície do condutor carregado também será perpendicular a esta superfície. Na superfície gaussiana não há fluxo através da base que se encontra dentro do condutor, pois o campo elétrico é nulo. Na superfície lateral do cilindro o campo é nulo no lado de dentro do condutor e perpendicular à normal da superfície do lado de fora. O único fluxo que atravessa a superfície gaussiana é o da base que se encontra fora do condutor. Suponha que a área da base seja A . Então, o fluxo através da base do cilindro será dado pela Lei de Gauss, que permite descrever o campo:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint_S \hat{n} dA = EA \cos(0^\circ) = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_{\text{int}}}{A\epsilon_0}$$

Entretanto, carga envolvida pela superfície gaussiana está na superfície do condutor e ocupa uma área A . A partir disso, é possível obter uma relação entre a carga e a densidade de carga superficial:

$$\sigma = \frac{q_{\text{int}}}{A} \rightarrow q_{\text{int}} = \sigma A$$

Substituindo o valor de q_{int} e os valores dados, ocorrerá:

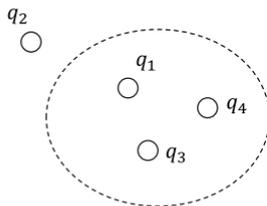
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{7 \times 10^{-6}}{8,85 \times 10^{-12}} = 7,909 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Assim, você pode reportar o valor obtido e partir para um novo desafio.

Faça valer a pena

1. Considere que a figura a seguir apresenta quatro cargas puntiformes. A região tracejada define uma superfície gaussiana esférica que envolve as cargas q_1 , q_3 e q_4 . Para que o fluxo de campo elétrico seja _____ na região da gaussiana, é necessário que a soma de q_1 , q_3 e q_4 seja _____, e que a carga q_2 _____ para o fluxo na superfície gaussiana.

Figura 1.29 | Cargas puntiformes e superfície gaussiana



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa com as palavras que completam corretamente as lacunas:

- a) Positivo - negativa - colabore.
- b) Negativo - positiva - colabore.
- c) Nulo - zero - colabore.
- d) Nulo - zero - não colabore.
- e) Positivo - zero - não colabore.

2. Em um equipamento são colocados dois cilindros de raios iguais a 3 cm e 6 cm. Estes cilindros estão eletricamente carregados com uma densidade linear de carga de $5,0 \times 10^{-6} \text{ C/m}$ para o primeiro e $-7,0 \times 10^{-6} \text{ C/m}$ para o segundo. Os cilindros são concêntricos, ou seja, o cilindro menor está posicionado no interior do maior e ambos compartilham o mesmo eixo.

Com base nos dados, os campos elétricos situados a um raio de 4 cm e 8 cm do centro dos cilindros são, em N/C, respectivamente.

- a) $-4,5 \times 10^5$ e $2,25 \times 10^6$.
- b) $4,5 \times 10^5$ e $-2,25 \times 10^6$.
- c) $2,25 \times 10^5$ e $-4,5 \times 10^6$.
- d) $2,25 \times 10^6$ e $-4,5 \times 10^5$.
- e) $2,5 \times 10^6$ e $-2,5 \times 10^6$.

3. Considere uma esfera oca de raio igual a 10 cm e carregada eletricamente com uma carga igual a $-q$. Dentro da esfera existe outra esfera maciça de raio igual a 5 cm e que está carregada eletricamente com carga igual a $+q$. Ambas as esferas são concêntricas, ou seja, possuem o centro de raio na mesma localização.

Determine o campo elétrico na região de raio igual a 7 cm que está no interior da esfera oca e exterior da esfera menor:

- a) $0,54q \times 10^{12} \text{ N/C}$.
- b) $1,84q \times 10^{12} \text{ N/C}$.
- c) $0,54q \times 10^{-12} \text{ N/C}$.
- d) $1,84q \times 10^{-12} \text{ N/C}$.
- e) $2q \times 10^{-12} \text{ N/C}$.

Seção 1.3

Energia e potencial eletrostático

Diálogo aberto

Nas seções anteriores você estudou o cálculo do campo elétrico em distribuições contínuas de carga, assimilando conceitos importantes, como a Lei de Gauss. Nesta seção serão definidos os conceitos de potencial elétrico (ou eletrostático) e energia de potencial elétrico para distribuições contínuas de carga.

O estudo da energia e do potencial elétrico quantifica a quantidade de energia necessária para uma partícula se mover em um campo elétrico. Dessa forma, uma grande diferença de potencial em dois pontos de um campo elétrico significa que, quando uma partícula carregada é colocada em um destes pontos, será utilizada uma grande quantidade de energia (ou trabalho) para movê-la. Assim, o estudo do potencial é muito importante em situações da eletroestática.

Dando continuidade ao seu trabalho em uma multinacional que produz capacitores eletrolíticos, você foi chamado novamente pelo grupo de projetos em que executou a sua primeira tarefa. Dessa vez, é necessário que seja calculado o potencial elétrico nas chapas circulares a uma distância igual ao raio das mesmas. O critério de projeto é que sejam utilizadas as placas com o maior potencial elétrico nestas condições. Existem chapas com raios de 1 cm, 2 cm e 5 cm, cuja densidade de carga considerada é de $4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, $8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ e $6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, respectivamente. Com esse novo critério, seriam utilizadas as mesmas placas? Essa decisão dependerá dos conhecimentos sobre potencial elétrico e energia potencial elétrica, que você aprenderá nesta seção. Assim, será possível sintetizar as informações referentes ao projeto e finalizar o relatório para a equipe de fabricação.

Não pode faltar

Nas últimas seções, você aprendeu sobre força elétrica e campo elétrico em distribuições contínuas de carga. Estas são grandezas vetoriais, ou seja, são representadas por meio de vetores. Já a energia e o potencial elétrico são grandezas escalares. Isso significa que a representação destas grandezas é definida apenas pela magnitude, não havendo direção e sentido, como no caso de força e campo elétrico.

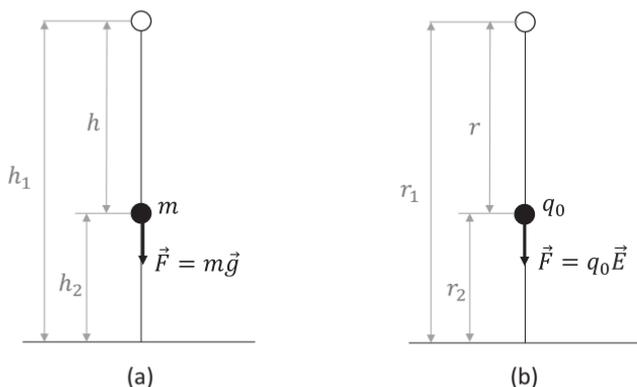


Assimile

Força e campo elétrico são **grandezas vetoriais**, enquanto **energia e potencial elétrico** são **grandezas escalares**.

Para falar de potencial elétrico, é interessante compreender inicialmente o conceito de energia potencial eletrostática. Para isso, será feita uma analogia com a energia potencial gravitacional. Imagine que uma partícula de massa m está em um campo gravitacional e sobre ela age uma força dada por $m\vec{g}$, com sentido indicado na Figura 1.30a. No caso análogo, quando uma partícula de carga q_0 está em um campo elétrico, age sobre ela uma força dada por $q_0\vec{E}$, como mostra a Figura 1.30b.

Figura 1.30 | Analogia da ação de forças em uma partícula de massa m (a) em um campo gravitacional em uma partícula de carga q_0 no campo elétrico (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com os conceitos de Mecânica, para saber a diferença de energia potencial, no caso gravitacional, quando o corpo se desloca de uma altura h_1 até uma altura h_2 , deve-se calcular:

$$\Delta U = -mg(h_2 - h_1) = -mgh$$

No caso de uma partícula em um campo elétrico, é possível calcular essa energia de forma análoga, substituindo a força gravitacional, dada por $m\vec{g}$, pela força elétrica, dada por $q_0\vec{E}$. Note que a quantidade $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ é um produto escalar, ou seja, existe um ângulo entre esses vetores. Dessa forma, ao calcular uma diferença de energia potencial ou de potencial elétrico, pode-se escolher o caminho mais conveniente para fazê-lo, como dado na equação a seguir:

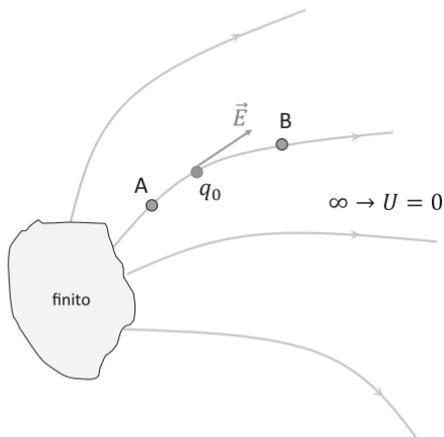
$$\Delta U = -\int q_0\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q_0E \int_{r_1}^{r_2} d\ell = -q_0E(r_2 - r_1) = -q_0Er$$

Assim, uma partícula que se movimenta em um campo elétrico terá uma energia potencial associada a ela. Resta entender como obter a energia de uma partícula em um determinado ponto do campo elétrico e, para isso, é necessário considerar o movimento desta partícula no campo elétrico.

Generalize o campo elétrico (que não será uniforme necessariamente) que mostra um corpo finito, carregado eletricamente, e, portanto, produzindo um determinado campo elétrico, cujas linhas estão representadas Figura 1.31. Imagine que uma partícula de carga q_0 se desloca de um ponto A para um ponto B neste campo. No decorrer da trajetória, pode-se obter o vetor de campo elétrico \vec{E} , que pode variar em direção e sentido em cada valor infinitesimal de trajetória $d\vec{\ell}$. Assim, conforme visto, pode-se obter a diferença de energia potencial da seguinte forma:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B q_0\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Figura 1.31 | Movimento de uma partícula em um campo elétrico gerado por um corpo finito carregado



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez que o corpo carregado é a origem do campo elétrico, sabe-se que a intensidade do campo elétrico é maior nas proximidades deste corpo e reduz à medida que se afasta dele. Portanto, em uma distância infinita deste corpo, a energia potencial é zero, conforme mostra a Figura 1.31. Neste caso, se o ponto A for levado ao infinito, é possível escrever para o ponto B:

$$U_B - 0 = - \int_{\infty}^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow U_B = - \int_{\infty}^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Para um ponto qualquer do campo elétrico, sendo que R é a distância deste ponto até a origem do campo, é possível escrever a **função energia potencial** para uma carga q_0 neste ponto:

$$U(R) = - \int_{\infty}^R q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

A função potencial também pode ser definida a partir da diferença de energia potencial (DDP). Por definição, ao dividir a diferença de energia potencial de uma partícula pela sua carga, obtém-se a diferença de potencial elétrico, conforme segue:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

Inicialmente, a diferença de potencial elétrico do ponto A ao ponto B na Figura 1.31 pode ser representada da seguinte forma:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Analogamente, levando o ponto A para o infinito, sendo que o potencial é zero, haverá a **função potencial elétrico** para qualquer ponto no campo elétrico distante de R da origem, dado por:

$$V(R) = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Refleta

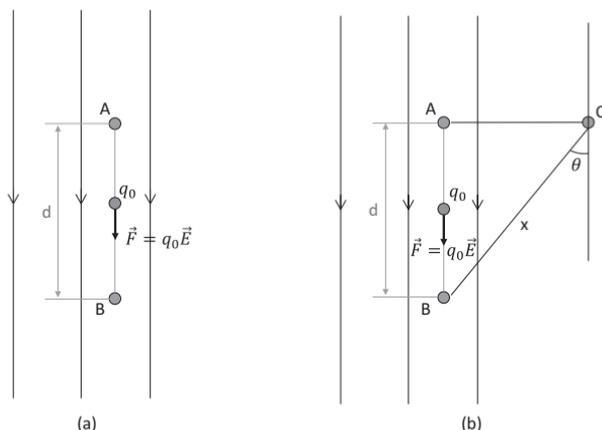
Na Figura 1.30b o maior potencial elétrico seria encontrado no ponto r_1 ou no ponto r_2 ?



Exemplificando

Considere uma partícula de carga q_0 em um campo elétrico uniforme e vertical que se desloca do ponto A ao ponto B. Calcule a diferença de energia potencial e a diferença de potencial elétrico utilizando o caminho dado pela reta AB, como mostra a Figura 1.32a, e pelos segmentos AC e CB, como mostra a Figura 1.32b.

Figura 1.32 | Partícula de carga se deslocando em um campo uniforme: (a) caminho AB; (b) caminho ACB



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: Para a Figura 1.32a, aplicando diretamente a equação para calcular a diferença de potencial elétrico, considerando que o ângulo entre \vec{E} e $d\vec{\ell}$ é igual a zero (deslocamento e campo no mesmo sentido), tem-se:

$$V_a - V_b = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b E \cdot d\ell \cos(0^\circ) = -E \int_a^b d\ell = -E(b-a) = -Ed$$

Para a Figura 1.32b, analogamente, considere que o ângulo entre o campo elétrico e a trajetória no segmento AC é igual a 90° , enquanto que na trajetória CA o ângulo é igual a θ , logo:

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^C E \cdot d\ell \cos(90^\circ) - \int_C^B E \cdot d\ell \cos(\theta) \\ &= 0 - E \int_C^B \cos(\theta) d\ell = -Ex \cos(\theta). \end{aligned}$$

Mas note que, das relações trigonométricas, $x \cos(\theta) = d$, logo:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = q_0 (V_A - V_B) = -q_0 Ed$$

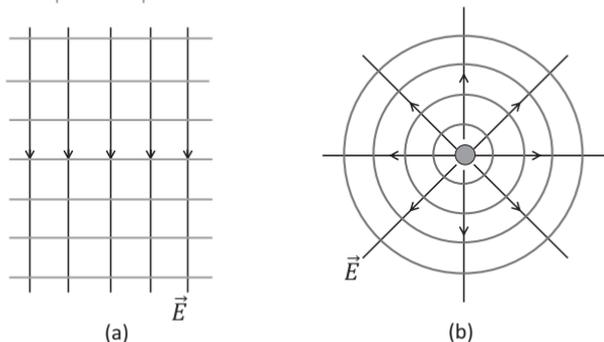
O resultado mostra que o resultado do cálculo independe do caminho.

O potencial elétrico a uma distância R de certa carga puntiforme pode ser calculado considerando a função potencial, conforme segue:

$$V(R) = -\int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} E(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Um ponto importante a se destacar é que a existência de um campo elétrico gera regiões equipotenciais, ou seja, regiões em que o potencial elétrico é o mesmo. Elas são determinadas por linhas equipotenciais que são perpendiculares à direção do vetor de campo elétrico e, para alguns casos, são bem definidas. Por exemplo, a Figura 1.33 mostra dois casos de linhas equipotenciais bem definidas: no caso de um campo elétrico uniforme vertical (Figura 1.33a), as linhas equipotenciais são horizontais (de forma semelhante, para um campo elétrico horizontal, as linhas serão verticais). Para o caso de uma carga puntiforme, as linhas equipotenciais são definidas por cascas de esferas concêntricas à carga, conforme mostra a Figura 1.33b. O trabalho para mover uma carga de um ponto a outro de uma superfície equipotencial é nulo, ou seja, não haverá diferença de potencial ou de energia potencial.

Figura 1.33 | Superfícies equipotenciais: (a) campo elétrico uniforme vertical; (b) campo gerado por uma partícula puntiforme



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

Para uma carga qualquer que se desloca saindo de um ponto de uma superfície equipotencial e chega a outro ponto desta mesma superfície, a diferença de energia potencial é zero, independentemente do caminho percorrido.



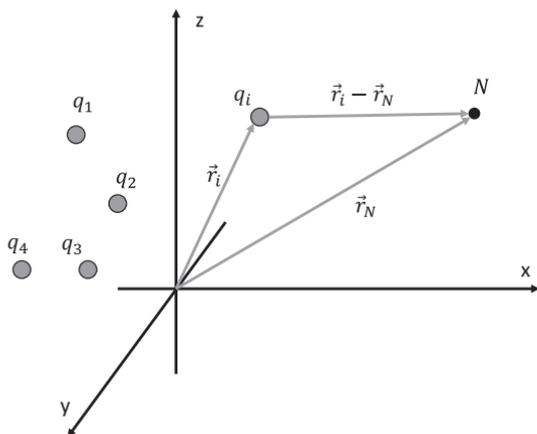
Refleta

Considerando que as superfícies equipotenciais são perpendiculares às linhas do campo elétrico, como serão as linhas equipotenciais de um dipolo elétrico?

Os conceitos vistos até aqui são importantes, mas ainda é necessário saber calcular a energia potencial e o potencial elétrico, devido às distribuições contínuas de carga. Nesse caso, utilize o princípio da superposição. Compreenda, primeiramente, a densidade de energia potencial em um sistema de cargas puntiformes, para que, posteriormente, possa expandir o conceito para as distribuições uniformes de carga. Considere a Figura 1.34 a seguir, que mostra um sistema de partículas formados por cargas puntiformes. O potencial no ponto P é definido pela soma do potencial de cada uma das cargas indicadas, seguindo o princípio da superposição:

$$V_N^i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_N - \vec{r}_i|} \rightarrow V_N = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_N - \vec{r}_i|}$$

Figura 1.34 | Sistema de cargas puntiformes



Fonte: elaborada pelo autor.

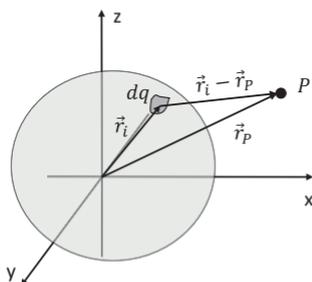
Da mesma forma, a densidade de energia potencial do sistema de carga, para uma carga no ponto N, será dada por:

$$U^i = q_N V^i \rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

Os índices i e j se referem aos pares de cargas no sistema. Deve-se somar a energia dos pares de carga na equação apenas uma vez, por isso, divide-se o somatório por 2 na equação apresentada.

Imagine agora uma distribuição uniforme de carga, da qual deseja-se obter o potencial elétrico no ponto P a uma certa distância de um elemento infinitesimal de carga, conforme mostra a Figura 1.35. Lembre-se de que esta distribuição contínua de cargas pode ser linear, superficial ou volumétrica.

Figura 1.35 | Ponto P próximo a uma distribuição contínua de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

O elemento diferencial de carga pode ser considerado como uma carga puntiforme, de valor dq . Logo, existe um elemento diferencial do potencial elétrico no ponto P devido a esta carga, que está escrito da seguinte forma:

$$dV_P = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_P|}$$

Pelo princípio da superposição, pode-se integrar dV_P em toda distribuição de carga para obter o potencial no ponto P . Essa integral deve ser feita sobre uma linha (ℓ'), uma área (A') ou um volume (V') dependendo do tipo de distribuição de carga considerada:

$$V_P = \int_{\ell', A', V'} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_P|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell', A', V'} \frac{dq}{|\vec{r}_i - \vec{r}_P|}$$

Uma vez reconhecido o potencial no ponto P , pode-se calcular a energia potencial de uma carga qualquer q_0 , multiplicando o potencial pela carga, como na equação a seguir:

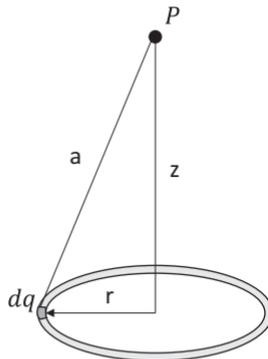
$$U_P = q_0 V_P$$



Exemplificando

Para ilustrar o cálculo do potencial elétrico em uma distribuição contínua de carga, considere o exemplo de um anel carregado com densidade linear de carga igual a $\lambda = 3 \times 10^{-2} \text{ C/m}$. O anel tem raio $r = 2 \text{ cm}$, como mostra a Figura 1.36. Como é possível obter o potencial elétrico no ponto P a uma distância $z = 3 \text{ cm}$ do centro deste anel?

Figura 1.36 | Ponto P próximo a um anel com distribuição contínua de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: A Figura 1.36 mostra que a distância a entre o ponto P e a quantidade infinitesimal de carga dq é dada pela hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais a r e z . O anel tem uma distribuição linear de cargas. Logo, o potencial determinado pela quantidade infinitesimal de carga dq pode ser escrito, em qualquer ponto distante de z , por:

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Note que este potencial é também uma quantidade infinitesimal, logo, para determinar o potencial total no ponto P é necessário integrar dV_p em todo o anel, conforme segue:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{Anel} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Entretanto, integrando dq em todo o anel, tem-se a carga do mesmo. No entanto, a carga do anel pode ser escrita como: $q_{anel} = \lambda \cdot 2\pi r$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{anel}}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot 2\pi r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Agora, para obter o potencial do ponto P , basta substituir os valores dados:

$$V(0,03) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 8,82 \times 10^{-12}} \frac{0,02}{\sqrt{0,02^2 + 0,03^2}} = 9,4337 \times 10^8 V$$



Pesquise mais

Quando se sabe o campo elétrico em uma determinada região do espaço, é possível determinar o potencial em qualquer ponto deste campo elétrico. De forma análoga, é possível determinar o campo elétrico sabendo como se comporta V em todo o espaço. Essa relação entre campo e potencial se dá através de derivadas V .

De forma geral, pode-se escrever que:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Para mais informações sobre como obter esta relação, consulte a Seção 1.8.4 do livro a seguir, que está disponível gratuitamente na biblioteca virtual:

REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

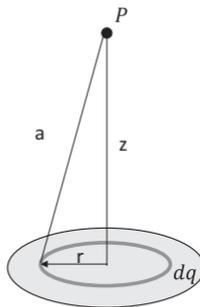
Sem medo de errar

Retome suas tarefas na empresa fabricante de capacitores. Lembre-se de que você está atuando como membro da equipe de projeto e, nesta etapa, será necessário revisar a escolha das chapas circulares com base no potencial elétrico. Para realizar a tarefa, você deve utilizar os conceitos apresentados nesta seção.

Calcule o potencial elétrico nas chapas circulares a uma distância igual ao raio das mesmas, sendo que é recomendado que seja escolhida a chapa que apresenta o maior potencial elétrico. As chapas têm raios de 1 cm, 2 cm e 5 cm, cuja densidade de carga considerada é de $4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, $8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ e $6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$, respectivamente.

A Figura 1.37 mostra um disco de raio r eletricamente carregado e um ponto P distante de uma certa distância z .

Figura 1.37 | Ponto P próximo a um disco com distribuição contínua de cargas



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme já visto na Seção 1.1, um disco com uma distribuição superficial de cargas pode ser entendido como uma superposição de vários anéis com uma distribuição uniforme de cargas. No último exemplo apresentado em *Não pode faltar* foi calculado o potencial elétrico de um anel com uma distribuição linear de cargas. É interessante que você retorne a este exemplo e o entenda bem, pois o resultado obtido é similar ao cálculo do potencial elétrico de um disco com distribuição uniforme de cargas. Se você não tem dúvidas quanto ao exemplo do anel, prossiga os estudos.

É possível selecionar uma parte infinitesimal de área do disco dado por um anel qualquer situado no mesmo e associar a ela uma

quantidade infinitesimal de carga dq , que pode ser calculada por meio da densidade superficial de carga e da parcela infinitesimal da área, como segue:

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

A partir disso, utiliza-se a equação do potencial elétrico para um ponto P situado a uma distância z do centro do anel de carga. Logo, o potencial devido no ponto P pode ser escrito da seguinte forma:

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Note que tal equação é similar à obtida para um anel com distribuição de cargas e, de fato, dV_P é o potencial gerado por um dos infinitos anéis que compõem o disco. Entretanto, no caso do anel, é necessário integrar todo o seu perímetro e utiliza-se a densidade linear de carga. Para o caso do disco, utiliza-se a densidade superficial de carga.

O potencial elétrico no ponto P pode ser obtido calculando a integral de dV_P com o raio variando de zero até R , sendo que R é o raio do disco. O valor de R deverá ser substituído posteriormente pelo raio das placas:

$$V_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{r^2 + z^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$$

A expressão obtida é geral para qualquer distância z do centro das placas. Entretanto, a análise deve ser feita considerando uma distância igual ao raio das placas, portanto, a expressão ficará expressa assim:

$$V_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + R^2} - R) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} (\sqrt{2} - 1)$$

Com a equação obtida, basta fazer a substituição adequada dos valores das placas.

Para a placa de 1 cm, tem-se:

$$\sigma_1 = 4,3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow V_P = \frac{4,3 \times 10^{-8} \times 0,01}{2 \times 8,82 \times 10^{-12}} (\sqrt{2} - 1) = 10,1 \text{ V}$$

Para a placa de 2 cm, calcula-se o potencial elétrico no ponto P, conforme segue:

$$\sigma_2 = 8,7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow V_P = \frac{8,7 \times 10^{-8} \times 0,02}{2 \times 8,82 \times 10^{-12}} (\sqrt{2} - 1) = 40,7 \text{ V}$$

E, finalmente, o potencial para a placa de 5 cm é dado conforme a equação seguir:

$$\sigma_3 = 6,1 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \rightarrow V_P = \frac{6,1 \times 10^{-8} \times 0,05}{2 \times 8,82 \times 10^{-12}} (\sqrt{2} - 1) = 71,4 \text{ V}$$

Com base nos resultados obtidos, e considerando o critério de projeto (escolher a placa que produz o maior potencial elétrico no ponto P), você poderia então escolher a placa de 5 cm.

Pronto! As tarefas que lhe foram delegadas foram cumpridas com sucesso. Primeiramente, você calculou o campo elétrico acima das placas e escolheu a placa mais adequada de acordo com o critério de maior campo elétrico. Posteriormente, você analisou os materiais dielétricos na dentro da melhor relação custo-benefício e recomendou o melhor material. Finalmente, com base em um novo critério para escolha das placas (maior potencial no ponto P), tomou sua decisão. Agora, você precisa compilar todas essas etapas e apresentar o relatório ao seu gestor. As informações ajudarão a equipe na fabricação dos capacitores.

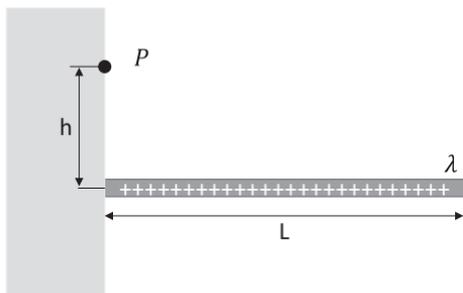
Avançando na prática

Análise do potencial elétrico gerado por um fio carregado

Descrição da situação-problema

Suponha que você está trabalhando no projeto de uma instalação elétrica e uma de suas responsabilidades é analisar as condições das instalações devido à carga presente nos condutores. Nesta análise, um condutor de comprimento L igual a 2 m está fixado a uma parede, conforme mostra a Figura 1.38. A análise do campo elétrico deve ser realizada em um ponto de uma parede localizada a uma distância de 30 cm acima do condutor. Para que as instalações continuem em boas condições, o máximo valor do potencial elétrico não pode exceder 10 V. Nessas condições, você deve obter o valor da máxima distribuição linear de cargas, de forma que as condições da instalação sejam monitoradas pelo valor da distribuição de cargas.

Figura 1.38 | Estrutura da instalação elétrica para análise



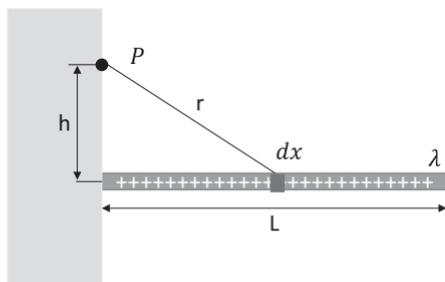
Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, você deve obter a expressão de forma a calcular o potencial elétrico na distribuição de cargas. Na Figura 1.39, é mostrada uma quantidade infinitesimal do comprimento do condutor, dada por dx . Este ponto tem a ele uma quantidade infinitesimal de carga dada por dq e está distante do ponto P de uma distância r . O valor de dq pode ser calculado por:

$$dq = \lambda dx$$

Figura 1.39 | Estrutura da instalação elétrica para análise



Fonte: elaborada pelo autor.

O potencial elétrico no ponto P pode ser escrito em função da quantidade infinitesimal de carga, conforme segue:

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Para obter o potencial total no ponto P , basta integrar o valor de dV_P com o comprimento do condutor, variando de zero até L , e, dessa

forma, a expressão do potencial ficará assim:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + h^2}\right) \Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2 + h^2}}{h}\right]$$

Para obter a distribuição de cargas para os valores dados, basta substituir as informações na equação:

$$V_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2 + h^2}}{h}\right] \rightarrow 10 = \frac{\lambda}{4\pi \times 8,82 \times 10^{-12}} \ln\left[\frac{2 + \sqrt{2^2 + 0,3^2}}{0,3}\right]$$

$$\lambda = \frac{10 \times 4\pi \times 8,82 \times 10^{-12}}{2,6} = 4.2629 \times 10^{-10} \text{ C/m}$$

Dessa forma, é necessário que a densidade de carga não exceda $4.2629 \times 10^{-10} \text{ C/m}$. Com esse resultado, a tarefa foi concluída com êxito!

Faça valer a pena

1. Na eletrostática de meios contínuos estudam-se as forças e campos elétricos, os potenciais elétricos e a energia potencial elétrica. Resumidamente, uma partícula de carga em um campo elétrico sofre ação de forças elétricas e, dessa forma, executa um trabalho ao se mover de um ponto a outro no campo elétrico. Considere as afirmações a seguir:

- I. Energia e campo elétrico são grandezas escalares.
- II. Força e potencial elétrico são grandezas vetoriais.
- III. Energia potencial é uma grandeza escalar enquanto campo elétrico é uma grandeza vetorial.

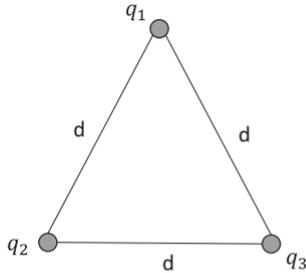
Das afirmativas anteriores, quais são as corretas?

- a) Apenas a afirmativa I é correta.
- b) Apenas a afirmativa II é correta.
- c) Apenas a afirmativa III é correta.
- d) Apenas as afirmativas I e II são corretas.
- e) As afirmativas I, II e III são corretas.

2. Um sistema de partículas carregadas dispostas a uma certa distância umas das outras tem tendência a se movimentar, atraindo ou afastando as partículas de acordo com a carga de cada uma. Se estas partículas são

fixadas, o sistema possuirá uma energia potencial. O sistema de cargas a seguir está disposto no espaço na forma de um triângulo equilátero de lado d . As cargas elétricas têm valores $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ e $q_3 = 3q$.

Figura 1.40 | Sistema de cargas puntiformes



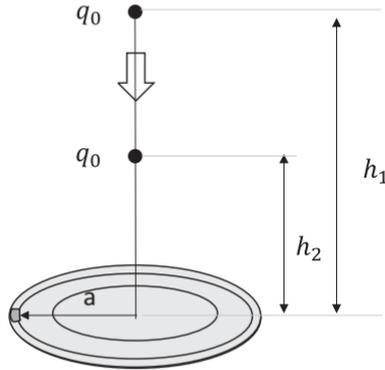
Fonte: elaborada pelo autor.

Se a distância entre as partículas dobrar, a energia potencial total do sistema de partículas ficará:

- a) $\frac{6q^2}{8\pi d\epsilon_0}$.
- b) $\frac{11q^2}{8\pi d\epsilon_0}$.
- c) $\frac{11q^2}{4\pi d\epsilon_0}$.
- d) $\frac{6q^2}{4\pi d\epsilon_0}$.
- e) $\frac{4q^2}{6\pi d\epsilon_0}$.

3. Um disco está eletricamente carregado e possui uma distribuição uniforme de cargas com densidade superficial dada por σ . Este disco está em um plano sobre o qual é abandonada uma partícula puntiforme de carga q_0 , que se desloca de uma altura h_1 até uma altura h_2 , como mostra a figura:

Figura 1.41 | Movimento de uma partícula sobre um disco carregado



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma equipe de pesquisa constatou que a diferença de energia potencial entre os pontos de altura h_1 e h_2 é dada por:

$$\Delta U = K \cdot q_0 \sigma$$

Para que isso seja verdade, a constante K deve ser igual a:

- a) $\frac{1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + h_1^2} + h_2^2 + h_1 - h_2 \right]$.
- b) $2\epsilon_0 \left[\sqrt{a^2 + h_1^2} - \sqrt{a^2 + h_2^2} + h_2 - h_1 \right]$.
- c) $\frac{1}{2\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{a^2 + h_2^2} - h_2}{\sqrt{a^2 + h_1^2} - h_1} \right]$.
- d) $\frac{1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + h_1^2} - \sqrt{a^2 + h_2^2} + h_2 - h_1 \right]$.
- e) $\frac{1}{2\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{a^2 + h_1^2} - h_1}{\sqrt{a^2 + h_2^2} - h_2} \right]$.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física**. 10. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HAYT, JR.; WILLIAM, H. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

LIMA, R. **Capacitor eletrolítico**. 2011. Disponível em: <<http://www.pontociencia.org.br/experimentos/visualizar/capacitor-eletrolitico/711>>. Acesso em: 4 out. 2017.

REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

UNIVESP. Disponível em: <<https://univesp.br/>>. Acesso em: 4 out. 2017.

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos do eletromagnetismo com aplicações na engenharia**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Correntes elétricas no meio contínuo

Convite ao estudo

Caro aluno!

Seja bem-vindo à Unidade 2 da disciplina Eletromagnetismo. Na unidade anterior, foram abordados conceitos de eletrostática que tratam de cargas estacionárias. Nesta unidade, você estudará as **correntes elétricas**, portanto as cargas em movimento.

Os exemplos de situações em que as correntes elétricas estão presentes são incontáveis, afinal, ao acender uma luz ou ao ligar um eletrodoméstico, as cargas se movimentam nos condutores da instalação elétrica. No trabalho de um engenheiro, correntes elétricas estão presentes na análise de circuitos elétricos ou em projetos de instalações elétricas. Profissionais que trabalham com sistemas elétricos, como redes de energia elétrica e equipamentos de proteção, responsáveis por instalação ou manutenção, certamente terão um contato mais próximo e diário com a corrente elétrica. Por isso, o estudo e o domínio dos conceitos que serão vistos nesta unidade serão muito importantes e contribuirão para o seu desenvolvimento profissional.

Imagine agora uma empresa fabricante de transformadores com um departamento que estuda os condutores e bobinas que serão aplicados para a fabricação dos equipamentos. Neste departamento, suas atividades de rotina irão demandar conhecimentos de eletromagnetismo.

Em uma primeira tarefa, você será desafiado a calcular a intensidade de corrente elétrica dos condutores, dada a característica de densidade de corrente elétrica no condutor. Em seguida, você utilizará os valores de corrente para determinar o campo magnético produzido por bobinas. Essa atividade exigirá,

inicialmente, que você utilize a Lei de Biot-Savart e, depois, o cálculo do campo magnético utilizando a Lei de Ampère.

Para completar sua tarefa, na Seção 2.1, você aprenderá os conceitos de corrente elétrica e densidade de corrente elétrica em meios contínuos, aplicados, por exemplo, na caracterização de parâmetros dos condutores. Na Seção 2.2, serão estudados os conceitos por trás dos campos magnéticos estacionários, e você será desafiado a analisar os campos magnéticos, utilizando a Lei de Biot-Savart. Finalmente, na Seção 2.3, você deverá usar a Lei de Ampère para o cálculo das correntes elétricas.

Mas de que forma a análise das correntes elétricas está relacionada com os campos magnéticos?

Resolva os exercícios propostos e consulte os materiais elencados nos itens Pesquise Mais de cada seção. Certamente, esses recursos serão um diferencial na sua formação e ampliarão o conhecimento transmitido neste material.

Seção 2.1

Densidade de corrente elétrica

Diálogo aberto

Você iniciará os estudos sobre a densidade de corrente elétrica, e isso significa conhecer os conceitos de eletrostática e eletrodinâmica, ou seja, o estudo das cargas em movimento. Esse tema é de grande importância na indústria e na engenharia, e você irá vê-lo de forma prática nas situações e tarefas que são propostas nesta seção.

Além dos conceitos elencados, você estudará os campos magnéticos gerados por corrente elétrica, que por sua vez são a base de funcionamento de vários equipamentos elétricos e, principalmente, das máquinas rotativas que encontram ampla aplicação na indústria atual.

Nesta primeira seção, imagine que você trabalha no departamento de caracterização de materiais de uma empresa fabricante de transformadores. Esse departamento é responsável por descrever as características físicas e elétricas dos condutores e bobinas dos transformadores comercializados, de forma que a informação possa ser catalogada e que o departamento de vendas possa desenvolver os potenciais clientes, indicando os melhores materiais e soluções para as aplicações específicas de cada consumidor. Os clientes dessa empresa são compostos, principalmente, por empresas do segmento de sistemas de energia elétrica, que aplicam os transformadores nos sistemas de transmissão e distribuição.

Sua responsabilidade é analisar os materiais e fazer os cálculos das características elétricas, com a finalidade de catalogar essas características de acordo com os produtos que são comercializados pela empresa. Dessa forma, nas suas atividades de rotina nesse departamento, os conhecimentos adquiridos nesta unidade serão de grande importância.

Seu gestor o incumbiu da caracterização da corrente elétrica nos condutores que serão utilizados na fabricação das bobinas, a

partir da densidade de corrente. Você recebe três condutores de cobre, de seção circular de 4 mm, 6 mm e 10 mm de diâmetro, que são submetidos a uma densidade de corrente dada por $J = 30(5 - 4e^{-400r})$, sendo que r corresponde ao raio da seção transversal do condutor.

Em cada caso, indique a intensidade de corrente elétrica que deve passar pelo condutor, anotando em seu relatório qual é o valor da resistência por cada condutor de 1 m de comprimento, considerando cada um dos tipos de condutores em cada caso.

Para realizar essa tarefa, prossiga com seus estudos nesta seção, obtendo os conhecimentos necessários para realizar as tarefas que lhe foram delegadas.

Bons estudos!

Não pode faltar

Na unidade anterior, você estudou os problemas de eletrostática, caracterizados pela condição estática das cargas elétricas, ou seja, cargas paradas. Imagine, entretanto, que as cargas em um condutor são temporariamente perturbadas, de modo que algumas delas se espalham no interior desse condutor. Os campos elétricos gerados pelas cargas negativas não são contrabalanceados por nenhuma carga positiva e, assim, os elétrons sofrem forças de repulsão e se movem no condutor até atingirem a superfície. Nesse ponto, os elétrons permanecem acumulados na superfície. A menos que o condutor esteja em contato com outro condutor, os elétrons não conseguirão se mover em um meio não condutor e, então, as cargas estarão dispostas em uma fronteira entre material condutor e isolante, conforme mostra a Figura 2.1.

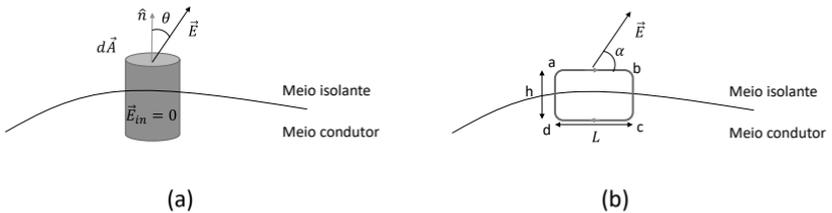
Em condições estáticas, as condições de fronteira utilizando a Lei de Gauss e o divergente do rotacional do campo são definidos. Aplicando a Lei de Gauss, é possível considerar uma superfície gaussiana cilíndrica, conforme mostrado na Figura 2.1a. O campo elétrico no interior do condutor será igual a zero, no entanto o campo no exterior é dado pelo vetor \vec{E} , mas com intensidade de campo constante igual a E . Esse vetor forma um ângulo com a normal da superfície determinada pela

tampa superior, de forma que todas as componentes perpendiculares do campo elétrico a $d\vec{A}$ se somam. Na superfície determinada pelas laterais do cilindro, as componentes do campo elétrico formam uma soma vetorial cuja resultante é nula. Portanto, a Lei de Gauss pode ser representada simplesmente por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow EA \cos(\theta) = \frac{A\sigma_s}{\epsilon_0} \rightarrow E \cos(\theta) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

Na equação anterior, σ_s corresponde à densidade superficial de cargas.

Figura 2.1 | Condições de contorno em problemas de eletrostática



Fonte: elaborada pelo autor.

De forma análoga, na mesma superfície, é possível utilizar a equação do divergente do campo elétrico, que define tanto da forma diferencial como integral:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Considerando o caminho fechado mostrado na Figura 2.1b, verifica-se que a componente do campo tangente aos caminhos ad e bc, com h tendendo a zero produzem um produto escalar nulo que não contribui para o produto escalar resultante. Dessa forma, o produto escalar resultante utilizando a integral anterior será dado por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cos(\alpha)L = 0 \Rightarrow E \cos(\alpha) = 0$$

É possível definir as seguintes condições de contorno nos problemas de eletrostática:

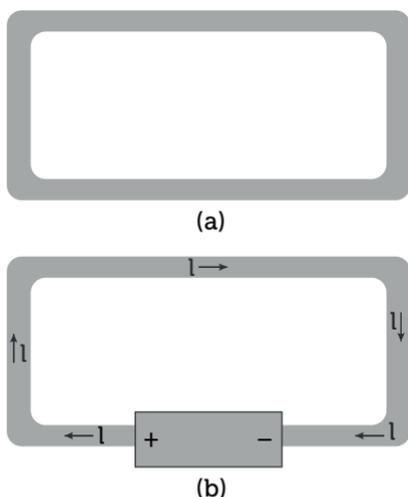
$$E \cos(\theta) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}, \text{ na Figura 2.1 (a)}$$

$E \cos(\alpha) = 0$, na Figura 2.1 (b)

Entretanto, conforme foi visto na Seção 1.3, uma carga puntiforme abandonada em um campo elétrico qualquer apresentará uma tendência de entrar em movimento, pois estará submetida a uma energia potencial eletrostática. Assim, ao aplicar uma diferença de potencial em um corpo que apresenta cargas livres, existirá uma tendência de movimento das cargas. Para ilustrar melhor, considere um condutor qualquer, conforme representado na Figura 2.2a. Nesse condutor, existe uma quantidade de elétrons livres, que podem ou não estar em movimento. Considerando que o campo elétrico no interior de um condutor é igual a zero, mesmo que exista algum tipo de movimento de cargas elétricas, esse movimento será desordenado.

Se aplicamos uma diferença de potencial nas extremidades desse condutor, definindo um caminho fechado, surgirá um campo elétrico no interior do condutor, fazendo com que esse movimento se ordene. O movimento de elétrons se dará do polo negativo para o polo positivo da bateria, no entanto, por convenção, o sentido da corrente elétrica é dado pelo caminho que as cargas positivas percorrem, ou seja, ocupando pontos de menor potencial. Assim, um campo elétrico estabelece um movimento ordenado de cargas em um condutor.

Figura 2.2 | Material condutor: (a) Caminho fechado com cargas estáticas; (b) Caminho sendo percorrido por uma corrente elétrica



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, [s/p]).

A corrente elétrica pode ser definida como a variação de cargas no tempo, tal como escrito a seguir:

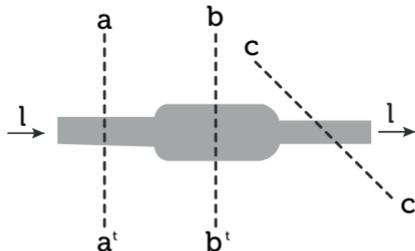
$$I = \frac{dq}{dt}$$

A unidade de corrente é dada em Coulombs por segundo (**C/s**), ou em Ampères (A), sendo que **1 C/s = 1 A**. Esse movimento de cargas ocorre não só em condutores, mas também em meios líquidos e gasosos. A medição da intensidade de corrente pode ser feita por um aparelho denominado amperímetro. Dessa forma, se uma quantidade de carga Δq se move em um condutor, ordenadamente, durante um período de tempo Δt , sabendo qual o comportamento da corrente elétrica no tempo, é possível calcular essa quantidade de carga por meio da integral a seguir:

$$\Delta q = \int_t^{t+\Delta t} I \cdot dt$$

Existe um conceito importante que deve ser entendido, que é o conceito de conservação de cargas no caso de uma corrente contínua atravessando um corpo condutor. Isso significa que, apesar do movimento, o valor das cargas não se perde, independentemente do caminho percorrido por elas. Como exemplo, observe a Figura 2.3. A corrente elétrica percorre um condutor que tem uma área de seção transversal determinada pelo corte aa', que é menor que no corte bb'. A corrente percorre o condutor e, tanto na seção aa' como na seção bb', possui o mesmo valor i . Ainda, quando a corrente percorre a seção cc', nesse ponto também terá o mesmo valor i . Isso significa que, independentemente do plano percorrido, haverá sempre o mesmo número de elétrons atravessando este plano.

Figura 2.3 | Seções transversais em um condutor com a passagem de corrente



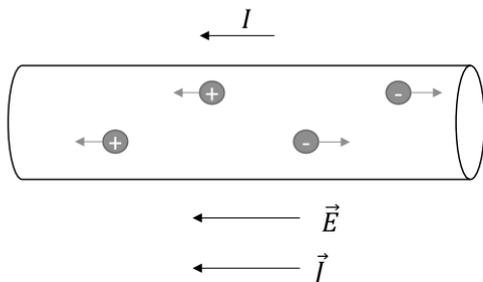
Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, [s/p]).

Embora a representação da corrente no desenho da Figura 2.3 seja feita por meio de uma seta, é importante ressaltar que corrente elétrica é uma grandeza escalar. Conforme foi visto, a corrente elétrica em um condutor em meio contínuo é a mesma independentemente da área que ela percorre.

Observe o que acontece com as cargas internamente no condutor, para entender o conceito de densidade de corrente elétrica. Essa é uma grandeza vetorial que possui a mesma direção e sentido do campo elétrico gerado pela diferença de potencial aplicada ao condutor, de acordo com a Figura 2.4. O vetor define uma relação entre a corrente elétrica e a área que ela atravessa, e, no desenho, ela está representada pelo vetor J . Se a densidade de corrente é uniforme, pode-se definir:

$$J = \frac{I}{A}$$

Figura 2.4 | Cargas em um condutor percorrido por corrente elétrica

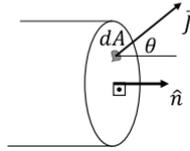


Fonte: elaborada pelo autor.

Entretanto, suponha que o condutor apresente uma área de seção transversal da qual é considerada uma quantidade infinitesimal de área dA , e que o vetor de densidade de corrente está em uma direção diferente do vetor normal à área, formando um ângulo θ com a normal, conforme mostra a Figura 2.5. Pode-se definir a corrente elétrica em função da densidade de corrente da seguinte forma:

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Figura 2.5 | Seção transversal do condutor representando a densidade de corrente elétrica



Fonte: elaborada pelo autor.

O princípio de conservação de cargas determina que as cargas não podem ser criadas ou destruídas e a equação da continuidade da corrente pode ser derivada desse princípio. Para isso, considere uma região que é delimitada por uma superfície fechada, cuja corrente flui para fora dessa superfície. O número de cargas que flui para fora dessa superfície deve ser contrabalanceado pelo número de cargas que decresce no interior da superfície (dQ_m). Logo, a corrente nessa superfície será dada por:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = -\frac{dQ_m}{dt}$$

Aplicando o teorema da divergência no lado esquerdo da equação anterior, e substituindo no lado direito pela integral que define a carga em determinado volume, por meio da densidade volumétrica de cargas, tem-se:

$$\oint_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV = -\frac{d}{dt} \oint_V \rho_V dV = -\oint_V \frac{d}{dt} \rho_V dV$$

Logo, é possível obter a equação pontual da continuidade dada pela equação a seguir:

$$(\nabla \cdot \vec{J}) = -\frac{d}{dt} \rho_V$$

No caso de um movimento desordenado de elétrons, a velocidade média na qual as cargas se movem é da ordem de 10^6 . Já no movimento ordenado de cargas elétricas, a velocidade em que as cargas se movem é chamada de **velocidade de deriva**. Essa velocidade é supostamente constante. Considerando que o condutor da Figura 2.4 tenha uma largura L , e que as cargas demorem um período de tempo Δt para irem de um extremo ao outro desse condutor, a velocidade de deriva é dada por:

$$v_d = \frac{L}{\Delta t}$$



Um condutor de cobre, cujo raio da área de seção transversal é igual a $R = 3 \text{ mm}$, percorre uma corrente constante de $I = 9 \text{ A}$. Qual será a velocidade de deriva dos portadores deslocados nesse condutor?

Resolução: Inicialmente, calcule a densidade de corrente elétrica constante nesse condutor.

$$J = \frac{I}{A} = \frac{9}{9\pi \times 10^{-6}} = 10^6 \pi^{-1} \text{ A/m}^2$$

Considere o número de portadores por unidade de volume dado por n . O número de portadores total no condutor, considerando um comprimento L , será dado por $N = nAL$.

Logo, o número total de cargas nesse condutor, considerando a carga de um elétron e , é: $\Delta q = Ne = neAL$.

A corrente elétrica é dada por:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se:

$$I = \frac{neAL}{L/v_d} = nev_d$$

Como $I = JA$, então:

$$J = nev_d$$

Sendo no cobre aproximadamente $n = 10^{29} \text{ elétrons/m}^3$:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{10^6 \pi^{-1}}{10^{29} \times 1,6 \times 10^{-19}} = \frac{1}{1,6\pi \times 10^4} = 2 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

A corrente elétrica não é uma variável que depende apenas da diferença de potencial. As propriedades dos materiais influenciam de forma direta tanto na intensidade de corrente como na densidade de corrente elétrica. Existe uma propriedade dos materiais que é chamada de **condutividade**. Como o próprio nome diz, a condutividade indica o quanto um tipo de material pode conduzir corrente elétrica, ou seja, quanto maior a condutividade do material, mais fácil será para ele conduzir corrente elétrica. Em um meio contínuo, a condutividade de um material se relaciona com a do campo elétrico e com a densidade de corrente elétrica da seguinte forma:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Tal forma é denominada de Lei de Ohm na forma pontual.

Além disso, existe uma outra propriedade dos materiais que é denominada de **resistividade**. A resistividade é a propriedade dos materiais que indica o quanto esse material pode se opor à passagem de um fluxo de elétrons, de forma que a intensidade de corrente seja baixa. Quanto menor for a resistividade do material, mais fácil será o movimento das cargas elétricas no material. Logo, é possível concluir que a condutividade se relaciona de forma inversa com relação à resistividade, conforme indicado a seguir:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$



Refleta

Como a condutividade de um material se relaciona com o campo elétrico e com a densidade de corrente elétrica?

A resistividade e a condutividade são propriedades que independem das dimensões do material, no entanto são muito importantes para analisar materiais com dimensões definidas. Imagine que um condutor de comprimento L e área de seção igual a A é submetido a uma diferença de potencial V , e como consequência surge uma corrente elétrica I . Pode-se definir a resistência elétrica (R) como sendo a razão entre a diferença de potencial e a corrente elétrica que surge nesse condutor, como a seguir:

$$R = \frac{V}{I}$$

Analisando a relação anterior, você perceberá que, se for aplicada uma diferença de potencial constante em materiais diferentes, e se a resistência elétrica for muito alta, significa que a intensidade de corrente elétrica que surge no condutor é muito baixa. Do contrário, se uma corrente elétrica muito alta surge no condutor, então tem-se um condutor com alta resistência elétrica. Rearranjando a equação, obtém-se uma relação do potencial elétrico com a corrente elétrica através da resistência elétrica:

$$V = RI$$

Tal relação é a forma mais comum da Lei de Ohm.



A Lei de Ohm, na forma pontual, relaciona a condutividade com o campo elétrico e a densidade de corrente elétrica da seguinte forma:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

A forma mais comum da Lei de Ohm relaciona a diferença de potencial elétrico com a intensidade de corrente elétrica através da resistência elétrica:

$$V = RI$$

Considerando ainda o condutor cilíndrico mostrado, é possível calcular a corrente que flui nesse condutor, como visto anteriormente. Se a densidade de corrente e o campo elétrico são uniformes no condutor, têm-se as seguintes equações:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{L} = EL$$

Dividindo V por I , utilizando o resultado das equações anteriores, teremos:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{EL}{JA}$$

Mas como foi visto anteriormente, a relação de E com J é a condutividade (ou a resistividade) do material; logo, define-se como calcular a resistência elétrica através da resistividade e das dimensões do condutor, conforme segue:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$



Os conceitos de resistência elétrica, corrente elétrica e potencial elétrico são largamente utilizados na análise de circuitos elétricos. Circuitos elétricos estão presentes em diversas aplicações do dia a dia, como nos circuitos de instalação elétrica e nos circuitos internos de aparelhos eletrônicos e eletrodomésticos.

Na análise de circuitos elétricos, é importante saber as correntes e tensões que estão sobre os resistores ou conjunto de resistores associados. Por isso, procure conhecer e aprofundar algumas técnicas de análise de circuitos, tais como as Leis de Kirchhoff, dos nós e das malhas.

Para mais informações sobre como obter essa relação, consulte o capítulo 27 do livro a seguir:

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos da Física*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 3.

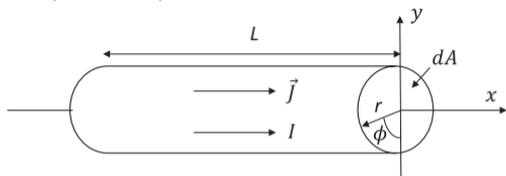
Sem medo de errar

Após este estudo inicial sobre a densidade de corrente elétrica em meios contínuos de carga, fica mais fácil entender a tarefa que você precisa realizar na empresa de transformadores. Utilize os conceitos desta seção para calcular a corrente elétrica dos condutores e lembre-se de que seu gestor o incumbiu da caracterização da corrente elétrica nos condutores que serão utilizados na fabricação das bobinas, a partir da densidade de corrente. Dessa forma, existem três condutores de cobre, de seção circular de 4 mm, 6 mm e 10 mm de diâmetro, que são submetidos a uma densidade de corrente dada por $\vec{J} = 30(5 - 4e^{-400r})\hat{x}$, sendo que r corresponde ao raio da seção transversal do condutor.

Para visualizar melhor esse cenário, considere a figura a seguir, que mostra um condutor de comprimento genérico L . Nesse condutor, percorre uma corrente elétrica I , que é a que se deseja obter. A densidade de corrente elétrica está na direção do eixo x ; logo, é possível escrever o vetor de densidade de corrente elétrica da seguinte forma:

$$\vec{J} = 30(5 - 4e^{-400r})\hat{x}$$

Figura 2.6 | Condutor percorrido por corrente



Fonte: elaborada pelo autor.

É possível considerar uma quantidade infinitesimal de corrente em função de uma quantidade infinitesimal de área, tal como a seguir:

$$dI = 30(5 - 4e^{-400r}) \cdot dA \cdot \hat{x}$$

Entretanto, dA está na seção do condutor que tem formato circular. Assim, pode-se escrever essa quantidade de infinitesimal de área em função do raio da seção transversal como sendo:

$$dA = r \cdot dr \cdot d\phi$$

Reescrevendo a equação, obtém-se:

$$dI = 30(5 - 4e^{-400r})r \cdot dr \cdot d\phi \cdot \hat{x}$$

Para obter a corrente i em função do raio da seção, deve-se integrar dI :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R 30(5 - 4e^{-400r})r \cdot dr \cdot d\phi$$

Substituindo os valores:

$$\int_0^R 30(5 - 4e^{-400r})r \cdot dr = 30 \left[\frac{(400r + 1)e^{-400r}}{40000} + \frac{5r^2}{2} \right]_0^R = 30 \left[\frac{(400R + 1)e^{-400R}}{40000} + \frac{5R^2}{2} - \frac{1}{40000} \right] = K$$

$$I = \int_0^{2\pi} K d\phi = 2\pi K = 2\pi \cdot 30 \left[\frac{(400R + 1)e^{-400R}}{40000} + \frac{5R^2}{2} - \frac{1}{40000} \right]$$

$$I(R) = 60\pi \left[\frac{(400R + 1)e^{-400R} - 1}{40000} + \frac{5R^2}{2} \right]$$

Finalmente, é possível substituir os valores e obter as correntes elétricas para cada condutor, considerando os diferentes raios de seção transversal. Além disso, calcula-se a resistência do condutor por metro, considerando $L = 1$ m e a condutividade do cobre igual a $6,17 \times 10^7$ S/m.

Para $R = 2$ mm, tem-se:

$$I(0,002) = 60\pi \left[\frac{(400 \times 0,002 + 1)e^{-400 \times 0,002} - 1}{40000} + \frac{5 \times 0,002^2}{2} \right] \approx 9,8 \times 10^{-4} A$$

$$R = \frac{L}{\sigma \times \pi R^2} = \frac{1}{6,17 \times 10^7 \times \pi \times 0,002^2} = 0,0013 \Omega$$

Para $R = 3 \text{ mm}$, tem-se:

$$I(0,003) = 60\pi \left[\frac{(400 \times 0,003 + 1)e^{-400 \times 0,003} - 1}{40000} + \frac{5 \times 0,003^2}{2} \right] \approx 2,7 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$R = \frac{L}{\sigma \times \pi R^2} = \frac{1}{6,17 \times 10^7 \times \pi \times 0,003^2} = 0,0006 \Omega$$

Para $R = 5 \text{ mm}$, tem-se:

$$I(0,005) = 60\pi \left[\frac{(400 \times 0,005 + 1)e^{-400 \times 0,005} - 1}{40000} + \frac{5 \times 0,005^2}{2} \right] \approx 9,0 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$R = \frac{L}{\sigma \times \pi R^2} = \frac{1}{6,17 \times 10^7 \times \pi \times 0,005^2} = 0,0002 \Omega$$

Note que as correntes são demasiadamente altas, dadas as resistências dos condutores. Dessa forma, os condutores submetidos a essa densidade de corrente poderiam ser danificados. Entretanto, ao calcular esses valores e reportar em seu relatório, a tarefa foi cumprida com êxito.

Avançando na prática

Condutor composto

Descrição da situação-problema

Em uma instalação elétrica, estão sendo utilizados condutores compostos formados por dois materiais diferentes e unidos por uma emenda, conforme mostra a figura. Um condutor de alumínio tem raio igual a 5 cm, enquanto que o condutor de cobre tem um diâmetro de 2 cm. Esse condutor será utilizado para alimentar uma carga resistiva que, funcionando corretamente, consome 400 A, quando ligada em uma fonte de tensão contínua de 100 V. Ambos os condutores têm um comprimento de 3 m cada um, totalizando 6 m de cabo, que é a distância entre a fonte e a localização da carga.

Figura 2.7 | Condutor composto de alumínio e cobre



Fonte: elaborada pelo autor.

Seu gestor solicitou que você analisasse se esse cabo pode ser utilizado sem perdas significativas na potência elétrica. Como você faria a análise?

Resolução da situação-problema

Inicialmente, é necessário calcular qual a resistência elétrica da carga utilizada. Uma vez que a carga consome 400 W, quando ligada a uma fonte de tensão contínua de 100 V, temos que a corrente elétrica consumida por essa carga será:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{400}{100} = 4 \text{ A.}$$

Com essa corrente, é possível calcular a resistência elétrica da carga:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{100}{4} = 25 \Omega$$

Agora, calcule a resistência elétrica de cada um dos condutores que estão conectados em série. Para isso, é necessário considerar a resistividade de cada material:

$$R_{Al} = \frac{L}{\sigma_{Al} \pi R_1^2} = \frac{3}{3,42 \times 10^7 \pi 0,05^2} = 1,12 \times 10^{-5} \Omega$$

$$R_{Cu} = \frac{L}{\sigma_{Cu} \pi R_2^2} = \frac{3}{6,17 \times 10^7 \pi 0,03^2} = 1,71 \times 10^{-5} \Omega$$

Verifica-se que ambas as resistências são muito baixas com relação à resistência da carga. A resistência total será dada por:

$$R_{Al} + R_{Cu} = 1,12 \times 10^{-5} + 1,71 \times 10^{-5} = 2,83 \times 10^{-5} \Omega$$

A resistência do cabo será muito pequena, de forma que a tensão aplicada na carga será praticamente igual a 100 V. A corrente total na carga será:

$$I = \frac{100}{2,83 \times 10^{-5} + 25} = 4,0 \text{ A.}$$

Assim, verifica-se que a corrente na carga não será afetada. Logo, pode-se reportar ao seu gestor que, utilizando esses condutores, é possível alimentar a carga com o condutor indicado, sem perder parte significativa da potência elétrica.

Faça valer a pena

1. No estudo da eletrodinâmica, é possível definir as grandezas de intensidade de corrente elétrica e densidade de corrente. Apesar de estarem relacionadas, a densidade de corrente é uma grandeza _____, podendo ser dada em _____, enquanto que a intensidade de corrente é uma grandeza _____, dada em _____.

Escolha a alternativa que completa corretamente as lacunas do texto anterior:

- a) Vetorial, A/m^2 , escalar, A.
- b) Escalar, A/m^2 , vetorial, A.
- c) Vetorial, A, escalar, A/m^2 .
- d) Escalar, A, vetorial, A/m^2 .
- e) Vetorial, A/m^4 , escalar, A/m^2 .

2. Um fusível é um dispositivo de proteção de circuitos elétricos. Sua principal função é limitar a passagem de corrente, de forma que essa não se torne excessiva a ponto de danificar os equipamentos do circuito elétrico. Caso a corrente exceda um determinado valor para o qual o fusível é projetado, esse se funde, abrindo o circuito elétrico.

Se um fusível é projetado para que sua corrente elétrica não exceda $220 A/m^2$, qual deve ser o diâmetro do fio para que a corrente não exceda 1 A?

- a) 0,2 mm d) 0,8 mm
- b) 0,4 mm e) 1,0 mm
- c) 0,6 mm

3. Um tubo de descarga cilíndrico a gás de raio igual a 30 cm é submetido a uma diferença de potencial muito alta entre os dois eletrodos no tubo. Quando isso é feito, o gás é ionizado e os elétrons se deslocam em direção ao terminal positivo, formando uma corrente elétrica.

Considerando a densidade de corrente elétrica no tubo dada por $J = \frac{100}{3}r$, quando a diferença de potencial aplicada é de 1000 V e r é o raio do tubo, determine a potência elétrica dissipada:

- a) $0,3\pi kW$ c) $0,9\pi kW$ e) $1,5\pi kW$
- b) $0,6\pi kW$ d) $1,2\pi kW$

Seção 2.2

Campos magnéticos estacionários

Diálogo aberto

Na seção anterior, você iniciou os estudos das cargas em movimento e o conceito de corrente elétrica e densidade de corrente elétrica. Nesta seção, serão estudados os campos magnéticos gerados pelas correntes elétricas em meios contínuos. Tal assunto é muito importante, e os conceitos que serão vistos aqui serão fundamentais para o entendimento do funcionamento de equipamentos, como os transformadores, motores e geradores elétricos. Esses equipamentos estão intimamente relacionados aos campos magnéticos gerados pelas correntes que percorrem seus enrolamentos.

Ademais, serão explorados os efeitos da corrente, ou seja, a geração do campo magnético pela corrente elétrica que percorre um condutor. Dessa forma, os conhecimentos adquiridos nesta seção serão de extrema importância para cumprimento da segunda etapa do seu trabalho.

Lembre-se de que você está trabalhando como engenheiro no departamento de caracterização de materiais de uma empresa fabricante de transformadores. Esse departamento é responsável por descrever as características físicas e elétricas dos condutores e bobinas dos transformadores comercializados, de forma que a informação possa ser catalogada e que o departamento de vendas possa desenvolver os potenciais clientes, indicando os melhores materiais e soluções para as aplicações específicas de cada consumidor. Os clientes dessa empresa são compostos, principalmente, por empresas do segmento de sistemas de energia elétrica, que aplicam os transformadores nos sistemas de transmissão e distribuição.

Na segunda etapa do seu trabalho, foi designado que você determinasse as características magnéticas das bobinas de cobre. Existe um lote de bobinas de cobre, com 1500 espiras, cujo raio

das espiras é de 30 cm e o comprimento é de 70 cm. Sua tarefa é determinar o campo magnético no interior das bobinas para diferentes valores de corrente, sendo que a corrente máxima que o condutor suporta é de 20 A. Então, faça os cálculos para as correntes nos valores de 5 A, 10 A, 15 A e 20 A. Utilizando a Lei de Biot-Savart, como você realizaria a tarefa?

Para passar por esse desafio, você precisará, inicialmente, entender os conceitos e como chegar à Lei de Biot-Savart e, a partir disso, calcular os campos magnéticos das bobinas. A seguir, você irá se familiarizar com esses conceitos.

Não pode faltar

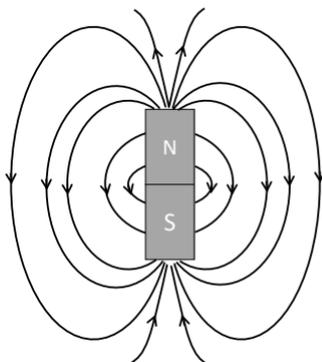
Você estudará agora os campos magnéticos. Este é o momento em que o estudo da eletricidade se encontra com o estudo do magnetismo propriamente dito. Assim sendo, antes de falar dos campos magnéticos produzidos por correntes, é necessário lembrar que o campo magnético é uma propriedade intrínseca de qualquer partícula elementar, assim como é o elétron. Em alguns tipos de materiais, os elétrons possuem campos magnéticos que se somam, produzindo um campo magnético resultante que cerca o material. Esses são os chamados ímãs permanentes. Entretanto, em outros tipos de materiais, os campos magnéticos gerados pelos elétrons formam uma resultante nula.

Vale ressaltar que os campos magnéticos apresentam muitas similaridades com o campo elétrico. Por exemplo, tanto os campos elétricos quanto os campos magnéticos são grandezas vetoriais, representadas por linhas de campo, não reais, que indicam que o sentido do campo é tangente a essas linhas. Portanto, um campo de grande intensidade pode ser representado por uma maior densidade de linhas e, ainda, essas linhas não se cruzam.

Diferentemente dos campos elétricos, cujas linhas de campo partem de uma carga positiva em direção a uma carga negativa, os campos magnéticos formam os polos norte e sul, e as linhas de campo partem do polo norte em direção ao polo sul, conforme mostra a Figura 2.8. Esse efeito pode ser visualizado quando, por exemplo, são

espalhadas limalhas de ferro sobre uma folha de papel e, embaixo dela, coloca-se um ímã permanente.

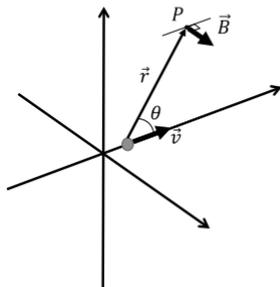
Figura 2.8 | Linhas de campo magnético em um ímã permanente



Fonte: elaborada pelo autor.

Os campos magnéticos têm a unidade de medida Tesla (T) no sistema internacional de medidas (SI). Para medir o campo magnético gerado por uma partícula em movimento, pode-se considerar uma partícula solta em um espaço, com velocidade \vec{v} , e determinada direção, conforme mostra a Figura 2.9. Supostamente, haverá um campo magnético \vec{B} em uma certa posição P, com distância r da carga, sendo que $|\vec{r}| = r$. Forma-se, então, um ângulo θ com a direção do movimento da carga. Alguns experimentos mostraram que, nessas condições, a força atuando na partícula será perpendicular ao plano formado por \vec{v} e \vec{r} .

Figura 2.9 | Campo magnético gerado por uma partícula em movimento



Fonte: elaborada pelo autor.

Foi observado que a magnitude do campo magnético era proporcional também à carga, e inversamente proporcional à distância r . Também percebeu-se que o campo magnético na direção da velocidade era nulo e, quando o ângulo θ aumenta, a magnitude do campo aumenta. Todas essas informações sugerem que o campo magnético pode ser escrito por meio de um produto vetorial. De fato, ao longo dos anos, formalizou-se a seguinte expressão para o campo magnético no ponto P :

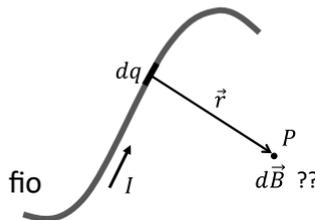
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Na equação anterior, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e tem valor igual a $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$; \hat{r} corresponde ao versor (vetor unitário) que indica a direção e o sentido de \vec{r} ; e \vec{B} é o campo gerado por uma carga em movimento. Mas como é possível definir o campo magnético gerado por uma corrente elétrica?

Isso é muito simples, e parte de uma extensão do caso da partícula. Ao considerar uma corrente elétrica, consideram-se as cargas elétricas em movimento e, conseqüentemente, é possível falar de campos magnéticos gerados por correntes elétricas.

Imagine um fio percorrido por corrente elétrica, conforme mostra a Figura 2.10. Nesta figura, tem-se um elemento infinitesimal de carga em movimento contínuo que produz um campo $d\vec{B}$ a uma certa distância do fio, no ponto P .

Figura 2.10 | Campo magnético gerado por um elemento de carga em um fio percorrido por corrente

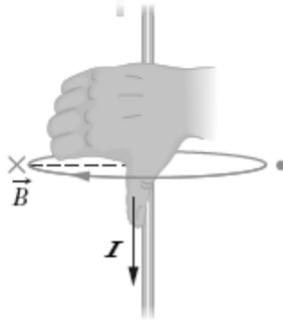


Fonte: elaborada pelo autor.

O sentido do campo elétrico, nesse caso, pode ser dado pela regra da mão direita. Primeiramente, posicione o dedo polegar no sentido da corrente do fio, utilizando a mão direita, conforme a Figura 2.11. O

sentido do campo magnético será dado pelos demais dedos da mão, abraçando o condutor.

Figura 2.11 | Sentido do campo magnético em um fio percorrido por corrente



Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2016, [s/p]).

Partindo da equação anterior para um campo gerado por uma carga q , pode-se escrever uma equação similar para dq . Assim, tem-se:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Contudo, a corrente elétrica em um fio é dada por:

$$I = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = Idt$$

Se a carga tem uma velocidade \vec{v} , significa que ela percorrerá uma distância $d\vec{\ell}$, que é representada por um vetor, pois a direção dessa distância infinitesimal acompanhará a tangencial do comprimento do fio. Sabendo que $d\vec{\ell}$ tem a mesma direção e sentido de \vec{v} , em um certo tempo dt , é possível escrever que a velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Assim, a equação do campo magnético é reescrita como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idt\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idt}{r^2} \frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

A equação anterior é denominada Lei de Biot-Savart, na forma diferencial. Assim, o campo magnético total gerado pelo fio percorrido por corrente pode ser obtido a partir da seguinte integral:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\ell \sin(\theta)}{r^2}$$

Na equação anterior, θ é o ângulo formado por $d\vec{\ell}$ e \hat{r}



Assimile

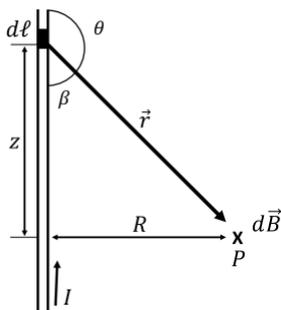
A Lei de Biot-Savart permite calcular o campo magnético gerado pela corrente elétrica em um meio contínuo, sendo essa dada pelo produto vetorial conforme as equações dadas na forma diferencial e na forma integral, conforme a seguir:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Forma diferencial})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\ell \sin(\theta)}{r^2} \quad (\text{Forma integral})$$

A Lei de Biot-Savart pode ser usada para calcular o campo magnético devido a algumas configurações de corrente elétrica. Por exemplo, considere um fio infinito percorrido por corrente e determine o campo magnético a uma distância R desse fio. Tal situação está ilustrada na Figura 2.12 a seguir:

Figura 2.12 | Fio longo percorrido por corrente



Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2016, [s/p]).

Aqui, o tipo de dificuldade é muito semelhante com a dificuldade encontrada ao estudar o campo elétrico em um fio com cargas distribuídas. Supondo que esse fio seja infinito, considere um elemento

do fio $d\ell$ e trace o vetor \vec{r} até o ponto P . Novamente, pela regra da mão direita, é possível concluir que o campo magnético entra na figura e, por isso, é apresentado como um "x".



Refleta

Qual seria a direção e o sentido do campo elétrico em um ponto P' simétrico ao ponto P na Figura 2.12?

O elemento infinitesimal $d\ell$ está representado no fio ao longo de um eixo vertical z . O vetor \vec{r} forma com o fio dois ângulos para os quais pode-se escrever as seguintes relações geométricas, utilizando radianos:

$$\beta = 180^\circ - \theta \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \text{sen}(\beta)$$

$$r = |\vec{r}| = R \text{cosec}(\beta)$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{R}{r}$$

$$z = R \cotg(\beta) \Rightarrow dz = -R \text{cosec}^2(\beta) d\beta$$

Com base nessas relações, pode-se escrever dB (apenas o módulo) como sendo:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \text{sen}(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \text{sen}(\beta)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-R \text{cosec}^2(\beta) d\beta \text{sen}(\beta)}{R^2 \text{cosec}^2(\beta)} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\text{sen}(\beta)}{R} d\beta$$

Para calcular o campo total, é necessário integrar dB com dz , variando de $-\infty$ até $+\infty$, que equivale a fazer duas vezes a integral de dB com $d\beta$, variando de $\frac{\pi}{2}$ até zero, conforme mostrado a seguir:

$$B = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\pi/2}^0 \text{sen}(\beta) d\beta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} (-\cos(\beta)) \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Exemplificando

Um fio longo é percorrido por uma corrente de 5 A. Qual será o campo magnético gerado por essa corrente a uma distância $R=0,025$ m desse fio? Como serão as linhas do campo magnético B nesse fio longo?

Resolução:

Para calcular o campo, basta aplicar diretamente a equação obtida para o cálculo da magnitude do campo magnético no ponto P apresentado para a Figura 2.12. Fazendo isso, tem-se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{2\pi \times 0,025} = \frac{4 \times 10^{-7}}{0,01} = 4 \times 10^{-7} \times 10^2 = 4 \times 10^{-5} \text{ T}$$

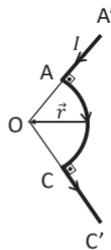


Refleta

O que ocorre com o campo magnético gerado por um fio infinito à medida que se afasta radialmente desse fio? A intensidade do campo aumenta ou diminui?

Uma segunda aplicação simples da Lei de Biot-Savart é a determinação do campo magnético em um arco circular. Considere a figura que mostra um arco circular percorrido por uma corrente elétrica i . Essa corrente entra no ponto A e sai no ponto B do arco, mas deseja-se calcular o campo magnético gerado no ponto O.

Figura 2.13 | Arco percorrido por corrente



Fonte: elaborada pelo autor.

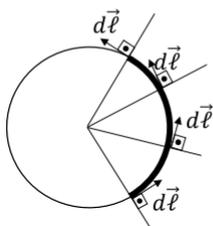
Note que, devido ao sentido da corrente, o campo magnético deve ter o sentido entrando na figura. Então, é necessário calcular esse campo utilizando a Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Se você prestar atenção ao desenho, verificará duas coisas muito importantes. A primeira é que a distância r do arco ao ponto O corresponde ao raio de uma circunferência determinada pelo arco AC . Dessa forma, o vetor \hat{r} na equação terá a direção indicada pelo raio da circunferência. A segunda é que existem dois segmentos, AA' e CC' , nos quais o elemento infinitesimal do fio estará sempre paralelo ao vetor \hat{r} , indicando que o produto vetorial para esses segmentos será nulo (pois o ângulo é igual a zero). Logo, o cálculo do campo gerado no ponto O pelo fio percorrido por corrente é dado unicamente pelo cálculo da forma integral da Lei de Biot-Savart, no arco AC .

Entretanto, é necessário descobrir qual o ângulo formado pela distância dos elementos $d\vec{\ell}$ nesse arco até o ponto O . Para isso, observe a Figura 2.14 a seguir. Nela, é possível observar que, para qualquer ponto do arco, além da distância entre o ponto O e o arco ser constante e igual ao raio da circunferência, considera-se que essa é perpendicular ao elemento $d\vec{\ell}$.

Figura 2.14 | Ângulo formado por $d\vec{\ell}$ e o raio



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, o produto vetorial na integral pode ser calculado da seguinte forma:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\ell \text{sen}(90^\circ)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\ell}{r^2}$$

Também é possível escrever $d\ell$ em função do ângulo do arco:

$$d\ell = R d\theta$$

Substituindo e supondo que o ângulo do arco seja igual a φ , tem-se o campo magnético no ponto O dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_{\text{arco}} R d\theta = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R}$$



Um arco de raio $R = 0,025 \text{ m}$ é percorrido por uma corrente de 5 A . Qual será o campo magnético gerado por essa corrente no ponto O localizado no centro da circunferência desse arco, considerando que o ângulo formado por esse arco é de 45° ?

Resolução:

Para calcular esse campo, basta aplicar diretamente a equação obtida para o cálculo da magnitude do campo magnético no ponto O de um arco. É necessário lembrar que 45° corresponde a $\frac{\pi}{4}$ radianos. Substituindo os valores na equação, tem-se:

$$B = \frac{\mu_0 i \varphi}{4\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times \frac{\pi}{4}}{2\pi \times 0,025} = \frac{4 \times 10^{-7} \times \pi}{0,01 \times 4} = \pi \times 10^{-7} \times 10^2 = \pi \times 10^{-5} \text{ T}$$

Ainda, considere que, quando uma corrente elétrica percorre um fio ou condutor, e esse está imerso em um campo magnético, uma força magnética deve atuar nesse fio. Por exemplo, em um fio de comprimento L , área transversal A e por onde passam N cargas, atuará uma força total, dada pela soma das forças que atuam em cada uma das cargas, ou seja:

$$\vec{F}_B = N\vec{F}_q = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

Levando em conta que $N = nAL$, em que n é a densidade volumétrica de cargas do material do fio, tem-se que:

$$\vec{F}_B = nALq\vec{v} \times \vec{B} = AL\vec{J} \times \vec{B} = LI\hat{e} \times \vec{B}$$

O versor \hat{e} aponta na direção e sentido da corrente I . Num comprimento de fio infinitesimal, tem-se:

$$d\vec{F}_B = Id\ell\hat{e} \times \vec{B} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Normalmente, a corrente elétrica num circuito se localiza num caminho fechado (C). Assim, pode-se fazer a integral nesse caminho fechado, obtendo a força total no condutor:

$$\vec{F}_B = I \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}$$



As forças geradas em um condutor quando esse é percorrido por uma corrente elétrica, e é imerso em um campo magnético, é o princípio de funcionamento de um motor elementar. O vídeo a seguir mostra como essas forças atuam em uma espira e como um motor deve ser construído de forma a girar continuamente:

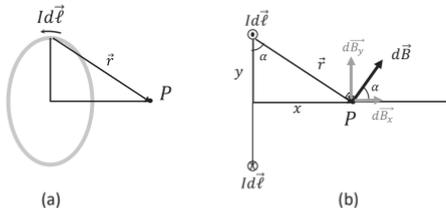
SILVA, R. S. da. **Como funcionam os motores CC**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=mNUJzOnbaNM>>. Acesso em: 22 nov. 2017.

Sem medo de errar

Com os conhecimentos adquiridos, você pode dar sequência na segunda etapa do seu trabalho, que consiste em determinar as características magnéticas das bobinas de cobre. O lote de bobinas é composto por bobinas de 1500 espiras cada, com raio de 30 cm e o comprimento é de 70 cm. Você deve fazer os cálculos para as correntes nos valores de 5 A, 10 A, 15 A e 20 A, utilizando a Lei de Biot-Savart.

O primeiro passo nessa tarefa é entender como calcular o campo magnético em um ponto do eixo de uma única espira. Para isso, considere um elemento de corrente, conforme mostra a Figura 2.15a. O triângulo formado pela distância do eixo, o raio da espira e a distância entre um elemento da espira e o ponto P formam um plano, conforme mostra a Figura 2.15b. O campo magnético \vec{B} deve ser perpendicular tanto a $d\vec{\ell}$ quanto a \vec{r} ; logo, a direção e o sentido de um elemento de campo $d\vec{B}$ serão dados conforme Figura 2.15b.

Figura 2.15 | Campo magnético de uma única espira



Fonte: elaborada pelo autor.

O elemento de campo magnético pode ser decomposto em duas componentes, $d\vec{B}_x$ e $d\vec{B}_y$, dados pela relação trigonométrica com o ângulo que $d\vec{B}$ forma com o eixo x. Por meio das relações na figura, tem-se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \cdot \text{sen}(90^\circ)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell}{r^2}$$

Entretanto, é possível ver pela figura que as componentes de $d\vec{B}$ no eixo y se cancelam, restando apenas as componentes no eixo x. Como $dB_x = dB \cos(\alpha)$, a integral anterior deve ficar como:

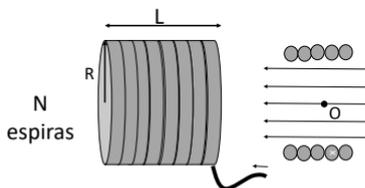
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \cos(\alpha)}{y^2 + x^2}$$

Mas $\cos(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$, logo:

$$B = \frac{\mu_0 I y}{4\pi(y^2 + x^2)^{3/2}} \int d\ell = \frac{\mu_0 I y}{4\pi(y^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi y = \frac{\mu_0 I y^2}{2(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

Na bobina, existem N espiras justapostas, conforme mostra a figura a seguir. Nesse caso, há uma corrente NI distribuída ao longo do comprimento L . Então, é possível reescrever a equação anterior na forma diferencial para a bobina de N espiras.

Figura 2.16 | Bobina de N espiras



Fonte: elaborada pelo autor.

A fórmula será:

$$dB = \frac{\mu_0 y^2}{2(y^2 + x^2)^{3/2}} dI$$

Considere o fato que: $dI = \frac{NI}{L} dx$. Portanto:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{NI}{L} dx$$

Integrando por todo o comprimento da espira, haverá o campo magnético no interior da bobina:

$$B = \frac{\mu_0}{2} y^2 \frac{NI}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

Basta que agora sejam substituídos os valores dados para cada caso:

$$I = 5A \rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 5}{(0,7^2 + 4 \times 0,3^2)^{1/2}} = 0,0102 \text{ T}$$

$$I = 10A \rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 10}{(0,7^2 + 4 \times 0,3^2)^{1/2}} = 0,0204 \text{ T}$$

$$I = 15A \rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 15}{(0,7^2 + 4 \times 0,3^2)^{1/2}} = 0,0306 \text{ T}$$

$$I = 20A \rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 20}{(0,7^2 + 4 \times 0,3^2)^{1/2}} = 0,0408 \text{ T}$$

Logo, você pode perceber que o campo magnético no interior da bobina é diretamente proporcional à intensidade da corrente elétrica que percorre a bobina. Dessa forma, você concluiu a tarefa com êxito e deve apresentar esses dados obtidos no seu relatório.

Avançando na prática

Campo magnético de uma linha de transmissão HVDC

Descrição da situação-problema

Em sistemas de transmissão de energia elétrica, a maioria das linhas transporta corrente alternada. Entretanto, é possível encontrar links de linhas de alta tensão cuja transmissão ocorre utilizando-se corrente contínua. São chamadas as linhas HVDC (*High Voltage Direct Current*). Esse tipo de transmissão é utilizado como uma alternativa para transportar grandes blocos de energia, ou para fazer a conexão entre sistemas de diferentes frequências, como entre Brasil e Paraguai.

Sendo assim, esse tipo de linha não tem derivações. Ainda, as linhas HDVC apresentam menor custo, uma vez que, enquanto em linhas CA são necessárias três linhas (referentes às fases), para as linhas HVDC são necessárias apenas uma ou duas linhas.

Suponha que você está trabalhando em um empreendimento que será instalado próximo de uma linha HVDC. Entretanto, a empresa está procurando um local para suas instalações, de modo que o campo magnético gerado pela linha HVDC não tenha interferência nos equipamentos da empresa. É necessário que a magnitude do campo magnético não ultrapasse $1,0 \times 10^{-7} \text{ T}$. Seu gestor requisitou que você utilize seus conhecimentos de eletromagnetismo para determinar essa distância, sabendo que a máxima corrente que passa por essa linha é de 200 A. Como você realizaria essa tarefa?

Resolução da situação-problema

De fato, para resolver esse problema, você deverá utilizar os conceitos de eletromagnetismo que foram estudados aqui. Recorde como é calculado o campo magnético gerado por uma linha percorrida por corrente, em um ponto a uma distância D dessa linha:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$$

A equação anterior pode ser alterada para obter a distância, conforme segue:

$$D = \frac{\mu_0 I}{2\pi B}$$

Substituindo os valores, obtém-se:

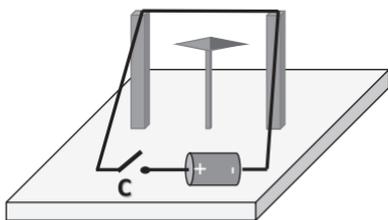
$$D = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200}{2\pi \times 1 \times 10^{-7}} = 400 \text{ m}$$

Os cálculos mostram que a menor distância na qual a empresa poderia ser instalada é de 400 m longe da instalação das linhas HVDC. De fato, se a distância aumenta, o campo magnético diminui. Assim, é interessante acrescentar uma margem de erro, de forma que um aumento na corrente das linhas não cause um campo magnético que possa prejudicar os equipamentos. Assim sendo, você pode escolher indicar uma distância de duas vezes o valor calculado, por exemplo, 800 m. Apresentando esses cálculos e as justificativas ao seu gestor, o seu trabalho foi realizado com êxito!

Faça valer a pena

1. Os campos magnéticos criados por correntes elétricas têm sua base nos experimentos realizados por Oersted. Em um dos experimentos, | montou-se um aparato conforme mostrado na Figura 2.17. Esse aparato consiste em um fio condutor ligado em série com uma bateria e uma chave inicialmente aberta. O fio é suspenso sobre duas hastes e, abaixo e paralelamente a esse fio, é posicionada uma bússola. Ao fechar a chave, percebe-se que a bússola se movimenta. Ao realizar esse experimento, Oersted concluiu que a corrente elétrica no fio gera _____ que é em uma direção _____ ao sentido da corrente.

Figura 2.17 | Aparato da experiência de Oersted



Fonte: elaborada pelo autor.

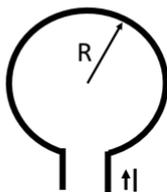
Escolha a alternativa que completa corretamente as lacunas do texto anterior:

- a) campo elétrico, perpendicular.
- b) campo magnético, igual.
- c) campo elétrico, igual.
- d) campo magnético, perpendicular.
- e) campo magnético, oposta.

2. Na fabricação de geradores hidrelétricos de grande porte, é comum que as bobinas que compõem os polos do gerador sejam construídas da seguinte forma:

Inicialmente, cada uma das espiras é forjada e, na sequência, são empilhadas sobre um núcleo de material ferromagnético. Considere uma das espiras do gerador representada na figura, com raio igual a 50 cm. Se uma corrente de 10 A percorre essa espira, o vetor de indução magnética no centro dessa espira tem _____ T de magnitude.

Figura 2.18 | Espira circular de raio R



Fonte: elaborada pelo autor.

Marque a alternativa que completa corretamente a lacuna do texto anterior:

- a) $4\pi \times 10^{-5}$.
- b) $4\pi \times 10^{-6}$.
- c) $4\pi \times 10^{-7}$.
- d) $4\pi \times 10^{-8}$.
- e) $4\pi \times 10^{-9}$.

3. Em um projeto de uma bobina, é necessário que essa apresente uma relação de intensidade de campo magnético por corrente de $3,5 \times 10^{-3}$. A bobina deve ser construída com um comprimento de 0,5 m e um raio de 0,2 m, para que ela seja corretamente alocada em um núcleo de material ferromagnético.

Nas condições de projeto indicadas, assinale a alternativa que apresenta o número de espiras da bobina:

- a) 1000
- b) 1400
- c) 1800
- d) 2200
- e) 2600

Seção 2.3

Lei de Ampère

Diálogo aberto

Caro aluno, você está chegando ao final do estudo das correntes elétricas em meios contínuos. Nas últimas duas seções, foram abordadas as densidades de corrente elétrica e os campos magnéticos gerados por correntes elétricas. Nesta seção, será aprofundado o cálculo do campo magnético gerado por correntes elétricas utilizando a Lei de Ampère.

Esse conhecimento é a base para a compreensão do funcionamento de equipamentos que utilizam os princípios de conversão de energia como transformadores, motores e geradores. Pelo amplo emprego desses equipamentos na indústria, é essencial que esses conhecimentos sejam bem consolidados, de forma a ampliar as oportunidades no mercado de trabalho.

Lembre-se de que você se colocou no lugar de engenheiro no departamento de caracterização de materiais de uma empresa fabricante de transformadores. Sua atividade neste momento consiste em caracterizar o campo magnético das bobinas utilizadas em transformadores. Antes da apresentação do relatório contendo as informações de campo magnético das bobinas, você percebeu que pode calcular o campo magnético no interior de uma bobina utilizando a Lei de Ampère ao invés da Lei de Biot-Savart para os cálculos realizados anteriormente. Utilizando a Lei de Ampère, os cálculos não somente podem ser simplificados, como também oferecem um melhor entendimento do seu gestor. Entretanto, não são em todas as situações que a Lei de Ampère pode ser aplicada para o cálculo do campo magnético, somente naquelas que apresentem uma simetria adequada.

Você possui bobinas de 1500 espiras, com raio de 30 cm e comprimento de 70 cm. Para determinar o campo magnético no interior das bobinas, você deve considerar diferentes valores de corrente, sendo que a corrente máxima que o condutor suporta

é de 20 A. Então, faça os cálculos para as correntes nos valores de 5 A, 10 A, 15 A e 20 A. Como você aplicaria a Lei de Ampère para determinar o campo magnético no interior das bobinas? Existe alguma diferença nos valores encontrados? Como você explica essa diferença? Quais valores de campo magnético você deve mostrar ao seu gestor como o mais adequado: os cálculos utilizando a Lei Biot-Savart ou a Lei de Ampère?

Para resolver a tarefa, a fim de analisar os resultados e tomar a melhor decisão sobre os cálculos que serão apresentados no relatório, inicialmente, você conhecerá a Lei de Ampère e suas formas de aplicação. Em seguida, serão abordados os conceitos de rotacional e o Teorema de Stokes aplicado ao eletromagnetismo, para observar a Lei de Ampère em sua forma pontual.

Bons estudos e sucesso na realização da sua tarefa!

Não pode faltar

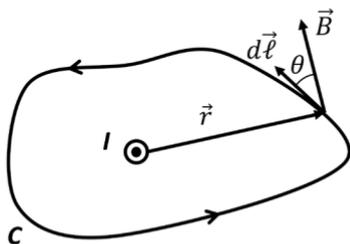
No estudo da eletrostática, existem duas leis importantes para o cálculo de campos elétricos: a Lei de Coulomb e a Lei de Gauss. A Lei de Coulomb é a precursora da Lei de Gauss, sendo que a aplicação dessa última para cálculo do campo elétrico minimiza os esforços de cálculos. Analogamente, no estudo do magnetismo, existem duas leis que são utilizadas para o cálculo do campo magnético. A primeira delas foi vista anteriormente: a Lei de Biot-Savart. Entretanto, dependendo da situação em que se deseja obter o campo magnético, pode ser que a aplicação dessa lei resulte em cálculos demasiadamente complexos. Por isso, a Lei de Biot-Savart tornou-se precursora de uma segunda lei que auxilia muito no cálculo dos campos magnéticos, reduzindo os esforços de cálculo: a Lei de Ampère.

A Lei de Ampère permite que os cálculos de campo magnético sejam feitos mais rapidamente e de forma mais simples e direta. No entanto, para que essa simplificação de cálculo seja possível, o problema examinado deve ter uma distribuição de corrente que apresente uma determinada simetria, favorecendo, assim, a aplicação da lei.

Para entender a Lei de Ampère, é necessário saber o que é a circuitação de um campo vetorial (que no caso aqui é o vetor densidade

de campo magnético \vec{B}). Considere o caso de uma corrente I em um condutor, conforme a Figura 2.19. É necessário fazer a integral de linha deste campo em um caminho fechado C , como mostra a mesma figura. Percebe-se que em qualquer ponto desse caminho existe um elemento $d\vec{\ell}$ que é tangente a C e o campo magnético que é produzido pela corrente forma um determinado ângulo θ com $d\vec{\ell}$. O campo \vec{B} é perpendicular ao vetor da distância \vec{r} entre a origem de I e a posição do vetor \vec{B} . Assumindo que esse campo magnético tenha intensidade B constante, ao longo do caminho C haverá uma variação de \vec{r} e θ . Logo, deve-se calcular a integral do produto $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$.

Figura 2.19 | Circuitação do campo \vec{B} de uma corrente em um condutor



Fonte: elaborada pelo autor.

Pode-se descrever a integral do campo magnético no caminho fechado C como sendo:

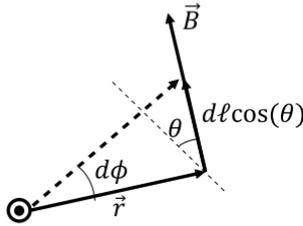
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B d\ell \cos(\theta)$$

A expressão anterior determina que cada linha de campo é uma curva fechada, e a determinação de B pode ser feita em termos de sua circuitação.

A quantidade $d\ell \cos(\theta)$ pode ser também escrita como a projeção do vetor $d\vec{\ell}$ sobre o vetor \vec{B} . Essa projeção determina uma abertura infinitesimal de um ângulo $d\phi$ com relação ao vetor \vec{r} , conforme mostra a Figura 2.20, e determinada por:

$$d\ell \cos(\theta) = r d\phi$$

Figura 2.20 | Projeção de $d\vec{l}$ sobre o vetor \vec{B}



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao continuar desenvolvendo a equação da circuitação do campo magnético, considerando que $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, obtém-se:

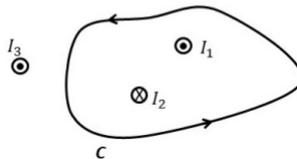
$$\oint_C \vec{B} d\ell \cos(\theta) = \oint_C B r d\phi = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

E então pode-se escrever para esse caso específico que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Você pode perceber que essa última equação apresenta uma certa semelhança com a Lei de Gauss, mas, ao invés do campo elétrico integrado em uma superfície gaussiana, integra-se o campo magnético em uma circuitação, ou seja, em um caminho fechado, utilizando uma integral de linha. Analise a situação da Figura 2.21, que mostra as seções transversais de três fios percorridos por corrente e um circuito fechado em torno de apenas dois deles.

Figura 2.21 | Circuitação aplicada a duas correntes I_1 e I_2



Fonte: elaborada pelo autor.

Pode-se verificar que o sentido adotado para o caminho C é o sentido anti-horário, e que as correntes I_1 e I_2 estão envolvidas por este caminho. Logo, conclui-se, ao aplicar a regra da mão direita para I_1 e I_2 , que o campo magnético gerado por I_1 está no mesmo sentido

do caminho, enquanto que o campo magnético gerado por I_2 está na direção oposta. Portanto, a circuitação é positiva para I_1 e negativa para I_2 , resultando na seguinte equação:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2) = \mu_0 I_T$$

Note que há uma corrente total (I_T) circuitada dada pela diferença das correntes I_1 e I_2 . Já a corrente I_3 não contribui para a circuitação, portanto não deve ser incluída no equacionamento.



Refleta

Se as correntes I_1 e I_2 tivessem o mesmo sentido, como seria dada a corrente total obtida dentro da circuitação?

A última equação obtida pode ser generalizada para qualquer distribuição de corrente elétrica em um meio condutor. Contudo, será aproveitada a definição da Lei de Ampère para falar um pouco sobre as fontes de campo magnético. Conforme visto anteriormente, um campo magnético pode ser produzido por uma corrente elétrica, mas como se explica o campo magnético gerado por um ímã permanente?

Num ímã permanente, a organização da estrutura eletrônica interna faz com que surjam, internamente, correntes de magnetização. Assim, é possível separar a situação de um campo produzido por uma corrente elétrica de um campo produzido por um material magnetizado.

Num condutor percorrido por corrente, o campo magnético \vec{B}_C escrito como em função de um vetor de intensidade de campo magnético (\vec{H}):

$$\vec{B}_C = \mu_0 \vec{H}$$

Já em um material magnetizado, como no caso de um ímã permanente, tem-se o vetor magnetização (\vec{M}) responsável por gerar um campo magnético \vec{B}_M :

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M}$$

Quando um condutor percorrido por corrente magnetiza um determinado material (como no caso de um eletroímã), o campo total

será dado pela soma do campo gerado pela corrente elétrica e do material magnetizado, que, na verdade, é mais comumente chamado de densidade de campo magnético (\vec{B}):

$$\vec{B} = \vec{B}_C + \vec{B}_M = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Assim, a Lei de Ampère pode ser reescrita considerando os vetores \vec{H} e \vec{M} , tal como:

$$\oint_C \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_T \rightarrow \oint_C (\vec{H} + \vec{M}) \cdot d\vec{\ell} = I_T$$

Note que, se $\vec{M} = \mathbf{0}$ (ou seja, se não existe magnetização de um meio material), então:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_T$$



Assimile

A Lei de Ampère, **na forma integral**, permite calcular o campo magnético a partir de uma corrente elétrica total estacionária, podendo ser dada pelas seguintes equações:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_T, \text{ ou ainda } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_T$$

Assim como a Lei de Gauss, a Lei de Ampère pode ser aplicada em situações que apresentam uma simetria favorável para definir um circuito fechado que englobe as correntes elétricas das distribuições contínuas de carga.



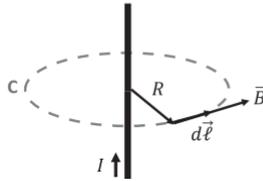
Exemplificando

Um fio infinito é percorrido por uma corrente elétrica de 20 A. Utilizando a Lei de Ampère, calcule o campo magnético a um raio de 40 cm desse fio.

Resolução:

Analise o caso de um fio retilíneo e infinito, tal como mostra a Figura 2.22.

Figura 2.22 | Corrente em um fio retilíneo infinito



Fonte: elaborada pelo autor.

As linhas de campo desse fio são circunferências de raio R , e os vetores de campo magnético estão perpendiculares ao raio dessas circunferências. Pode-se, então, definir uma das circunferências como o caminho C , e logo será possível constatar que $d\vec{\ell}$ estará na mesma direção e sentido de \vec{B} . Nos pontos de C , acontecem duas situações que contribuem para a aplicação da Lei de Ampère: uma é que, em C , o vetor \vec{B} é paralelo ao vetor $d\vec{\ell}$. O outro fator é que, em todos os pontos de C , o módulo do campo B é uniforme e pode sair da integral. Assim, têm-se os seguintes cálculos para o campo B em um fio retilíneo infinito:

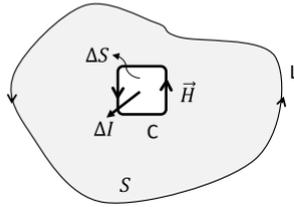
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \rightarrow B \oint_C d\ell = \mu_0 I \rightarrow B 2\pi R = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Note que a equação é a mesma que a obtida utilizando a Lei de Biot-Savart, entretanto foram aplicados apenas dois procedimentos de cálculo. Utilizando os valores dados, tem-se:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0,4} = 10^{-5} \text{ T}$$

Na teoria de campos magnéticos, é interessante que as relações envolvam as grandezas em pontos infinitesimais do espaço. Dessa forma, pode-se utilizar o conceito de rotacional para determinar uma relação pontual a ser utilizada para aplicar a Lei de Ampère em uma região de dimensões infinitesimais de espaço. Para ilustrar esse conceito, observe a Figura 2.23, que mostra uma região de um meio condutor, de superfície S e delimitada por um contorno L , na qual é selecionada uma área incremental ΔS , que, por sua vez, é atravessada perpendicularmente por uma corrente ΔI . O objetivo é tornar o caminho C o mais pequeno possível, de forma que ΔS se torne como um ponto infinitesimal no meio condutor.

Figura 2.23 | Meio condutor delimitado por um caminho L



Fonte: elaborada pelo autor.

Para atingir esse objetivo, é possível aplicar a Lei de Ampère no caminho C e dividir por ambos os lados da equação por ΔS , conforme mostrado na equação:

$$\frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\ell}{\Delta S} = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

Com o intuito de tornar ΔS o menor possível, pode-se aplicar o limite com ΔS tendendo a zero, para os dois lados da equação, da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\ell}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

Do lado direito da equação, o que se obtém é nada menos que a densidade de corrente \vec{J} . Já do lado esquerdo, define-se uma operação vetorial sobre um campo vetorial, que é denominada de rotacional. Assim, depois de aplicar os limites, é possível escrever:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

A formulação anterior é denominada de forma pontual da Lei de Ampère. Considerando um campo $\vec{H} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z}$, a operação do rotacional pode ser dada pelo determinante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$



Assimile

A Lei de Ampère, **na forma pontual**, permite calcular o campo magnético a partir de uma densidade corrente elétrica, escrita pelas seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \text{ ou ainda: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



Exemplificando

Seja um campo magnético definido por $\vec{H} = 5\hat{x} + 2x\hat{y} + 6y\hat{z}$, determine o vetor densidade de corrente elétrica.

Resolução:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (6 - 0)\hat{x} + (0)\hat{y} + (2 - 0)\hat{z} = 6\hat{x} + 2\hat{z}$$

Logo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = 6\hat{x} + 2\hat{z}$$

Considerando ainda a superfície incremental da Figura 2.23, a partir das deduções anteriores, é possível escrever a seguinte relação:

$$\frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\ell}{\Delta S} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\ell = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \Delta S$$

Considerando que um meio condutor seja formado por várias áreas incrementais ΔS , e que essas áreas sejam reduzidas em elementos infinitesimais de superfície dS , pode-se realizar o circuitamento para todos esses elementos no meio condutor e somar os resultados. A maioria dos termos se cancela, com exceção dos que estão no contorno da superfície S dada por L . Chega-se, então, ao chamado de **Teorema de Stokes**, válido para qualquer campo vetorial:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\ell = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) dS$$

Incluindo a Lei de Ampère na formulação, tem-se:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

Olhando as duas equações, nota-se que é possível facilmente partir da Lei de Ampère na forma integral e chegar à sua forma pontual, e vice-versa, utilizando o Teorema de Stokes.

Na eletrostática, foi visto o conceito de potencial escalar eletrostático (ou potencial elétrico), que permite simplificar os problemas de cálculo de campo elétrico, pois, se há uma configuração de carga, é possível obter inicialmente o potencial elétrico para, em seguida, obter a intensidade de campo elétrico. No estudo do magnetismo, também é possível traçar um paralelo e definir uma função potencial que é obtida a partir de uma distribuição de corrente elétrica. Esse potencial será denominado de **potencial escalar magnético**, e, a partir dele, pode-se obter os campos magnéticos de forma mais simplificada. Entretanto, a aplicação desse potencial escalar magnético é limitada às situações em que a densidade de corrente elétrica é igual a zero, conforme você verá adiante.

Considerando a existência de um potencial escalar magnético, designado por V_m , tem-se que o negativo do gradiente é igual à intensidade de campo magnético. O negativo foi escolhido para ter uma maior analogia com o caso do potencial elétrico.

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}V_m$$

Essa definição deve satisfazer às leis do magnetismo, tal como a Lei de Ampère na forma pontual. Dessa forma, tem-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V_m)$$

Existe uma propriedade da álgebra que determina que o rotacional do gradiente de qualquer escalar é igual a zero. Assim, ao definir a existência de um potencial escalar magnético diferente de zero, a densidade de corrente deverá ser zero em toda a região em que o potencial escalar magnético for definido, sendo possível escrever:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}V_m \quad (\vec{J} = 0)$$

Além da definição do potencial escalar magnético, pode-se definir um potencial vetor magnético, que consiste em um campo vetorial

muito importante para o estudo de radiação de antenas e perdas por radiação de linhas de transmissão, guias de onda e fornos de micro-ondas. Diferente do potencial escalar magnético, o potencial vetor magnético pode ser utilizado em meios nos quais existe ou não uma densidade de corrente elétrica.

Para definir esse potencial vetor magnético, utiliza-se das equações básicas do magnetismo, que definem que a divergência do campo magnético \vec{B} é nula e que o rotacional do campo \vec{B} é proporcional à densidade de corrente \vec{J} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

As equações anteriores compõem algumas das equações de Maxwell em termos de carga e corrente totais no vácuo. Dado que a divergência de \vec{B} é nula, pode-se dizer que existe um vetor potencial definido por A , de forma que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Substituindo na equação do rotacional de \vec{B} , tem-se que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

Logo, desenvolvendo a equação anterior, obtém-se:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$



Pesquise mais

O **potencial vetor magnético** pode ser calculado de acordo com uma densidade de corrente elétrica. Para o cálculo do potencial vetor, é necessário estabelecer uma liberdade de calibre, que consiste em fazer uma substituição vetorial na expressão de forma que o campo magnético B não se altere. Mais informações podem ser encontradas no vídeo a seguir:

ELETROMAGNETISMOUFF. **Aula 1.26** – Liberdade de calibre, calibre de Coulomb, solução geral para o potencial vetor. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Om4IM-TtmE0>>. Acesso em: 5 dez. 2017.

Sem medo de errar

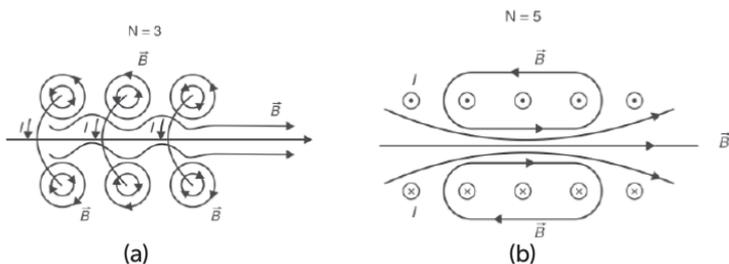
Muito bem, com os conceitos apresentados nesta seção, agora você está apto a realizar a tarefa que lhe foi proposta.

Você já calculou o campo magnético das bobinas utilizando a Lei de Biot-Savart, mas decide verificar os cálculos que fez anteriormente utilizando a Lei de Ampère. Como você aplicaria a Lei de Ampère para determinar o campo magnético no interior das bobinas? Existe alguma diferença nos valores encontrados?

As bobinas que lhe foram entregues têm 1500 espiras, com raio de 30 cm e comprimento de 70 cm. Para determinar o campo magnético no interior das bobinas, considere diferentes valores de corrente, sendo que a corrente máxima que o condutor suporta é de 20 A. Então, faça os cálculos para as correntes nos valores de 5 A, 10 A, 15 A e 20 A.

Inicialmente, pense na simetria adequada para esse cálculo. Na figura a seguir, é apresentado um exemplo de solenoide com três espiras, a fim de visualizar o campo magnético em cada uma delas, que internamente se somam. Na Figura 2.24b, é apresentado um solenoide de 5 espiras, que permite observar também esse efeito. Além disso, nota-se que, para as três espiras mais ao meio do solenoide, as linhas de campo são quase paralelas. Ainda, o campo total será dado pela soma vetorial de todos os campos produzidos por cada uma das voltas do fio que compõem essa bobina, ou seja, é igual à soma dos campos de todas as espiras existentes.

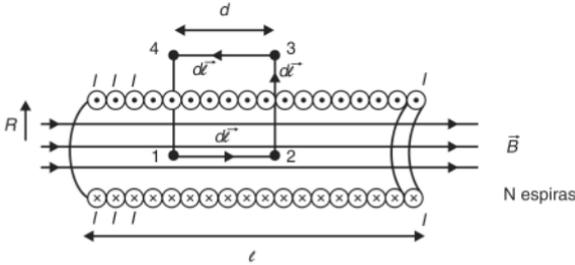
Figura 2.24 | Campo magnético em um solenoide: (a) com 3 espiras; (b) com 5 espiras



Fonte: Rego (2010, [s/p]).

Considere um solenoide com um número maior de espiras e determine uma região composta por N espiras para fazer uma circuitação e aplicar a Lei de Ampère. Isso é mostrado na Figura 2.25:

Figura 2.25 | Campo magnético em uma bobina



Fonte: Rego (2010, [s/p]).

Suponha o campo paralelo e uniforme internamente e nulo na região fora da bobina. Defina, então, um caminho fechado por 1-2-3-4. Considerando I_T como sendo toda a corrente envolvida nesse caminho, escreva a Lei de Ampère:

$$\oint_{1-2-3-4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_T$$

A corrente total envolvida no caminho é dada por $I_T = \frac{N \cdot I \cdot h}{L}$; logo:

$$\oint_{1-2-3-4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_T = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot h}{L}$$

Basta então solucionar a integral de linha no caminho especificado. A integral pode ser quebrada em quatro subintegrais, conforme segue:

$$\oint_{1-2-3-4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{1-2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{2-3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{3-4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{4-1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Entretanto, como é considerado o campo igual a zero na parte exterior do solenoide, tem-se que a integral no caminho 3-4 é igual a zero. Já nos caminhos 4-1 e 2-3, por terem sentidos de integração opostos, as integrais se anulam, restando apenas a integral no caminho 1-2. Assim:

$$\int_{1-2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot h}{L} \rightarrow B \cdot h = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot h}{L} \rightarrow B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{L}$$

Aplicando os valores dados, tem-se:

$$B(5A) = 4\pi \times 10^{-7} \frac{1500 \cdot 5}{0,7} = 0,0135 \text{ T}$$

$$B(10A) = 4\pi \times 10^{-7} \frac{1500 \cdot 10}{0,7} = 0,0269 \text{ T}$$

$$B(15A) = 4\pi \times 10^{-7} \frac{1500 \cdot 15}{0,7} = 0,0404 \text{ T}$$

$$B(20A) = 4\pi \times 10^{-7} \frac{1500 \cdot 20}{0,7} = 0,0539 \text{ T}$$

Percebe-se que os valores são diferentes de quando se aplica a Lei de Biot-Savart, e essa diferença aumenta à medida que aumenta a intensidade da corrente elétrica. Isso ocorre porque no cálculo utilizando a Lei de Ampère foram feitas algumas simplificações (campo no exterior nulo, o que não é verdade). Logo, a Lei de Ampère considera para fins de cálculo uma bobina ideal. Entretanto, para bobinas reais, como o número de espiras é muito grande e o comprimento é maior que o raio das espiras, a Lei de Ampère é uma boa aproximação.

Como nesse caso o comprimento não é muito maior que o raio ($L = 70 \text{ cm}$ e $R = 30 \text{ cm}$), você poderá concluir que a Lei de Biot-Savart expressa mais fielmente os valores de campo e, dessa forma, poderá escolher os resultados obtidos na seção anterior. Depois de realizar os cálculos dos campos magnéticos em todas as bobinas, é possível concluir que a tarefa foi realizada com êxito. Portanto, agora, você possui todas as informações para escrever o seu relatório.

Avançando na prática

Campo magnético de um toroide

Descrição da situação-problema

Suponha que você trabalha em uma empresa que realiza manutenção de equipamentos de radiodifusão. Esses equipamentos geralmente apresentam indutores no formato toroidal, pois apresentam vantagens com relação a outros tipos construtivos. Por exemplo, uma

bobina toroidal representa um indutor quase ideal. Dentro do seu enrolamento, o campo se encontra quase que totalmente confinado no interior e, conseqüentemente, a maior parte de suas linhas de campo é mantida no interior do enrolamento, com densidade de fluxo essencialmente uniforme ao longo de todo o circuito magnético. Assim, quando se precisa de um indutor de valor preciso, opta-se pelo indutor toroidal.

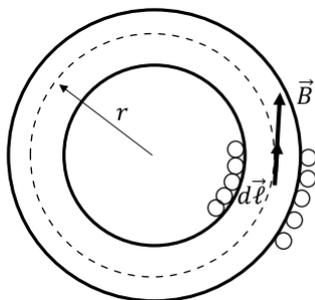
Em um determinado circuito elétrico, o espaço para encaixe de um indutor permite um indutor toroidal de raio de 2 cm. A especificação nesse ponto do circuito é que existe um campo magnético de $1,5 \times 10^{-4} \text{ T}$ para uma corrente de 30 mA. Nessas condições, qual deve ser o número de espiras desse indutor toroidal? Apresente ao seu gestor o seu projeto, de forma a especificar a construção do equipamento nas condições descritas.

Resolução da situação-problema

A figura a seguir mostra um indutor toroidal indicando o caminho de circuitação. Partindo da premissa que o campo esteja confinado no interior desse indutor, pode-se traçar um caminho de forma a englobar sua corrente total, que será dada por:

$$I_T = NI$$

Figura 2.26 | Solenoide toroidal



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse caminho, percebe-se que \vec{B} e $d\vec{\ell}$ têm a mesma direção e sentido. O campo magnético não será constante, mas dependerá do valor do raio \vec{r} . Aplicando a Lei de Ampère, tem-se:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_T \rightarrow B2\pi r = \mu_0 NI \rightarrow N = \frac{B2\pi r}{\mu_0 I}$$

Com os valores, obtém-se o número de espiras necessárias para o projeto:

$$N = \frac{1,5 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 0,02}{4\pi \times 10^{-7} \times 30 \times 10^{-3}} = \frac{10^3}{2} = 500$$

Logo, no projeto desse indutor serão necessárias 500 espiras. Ao apresentar esses cálculos e suas conclusões ao seu gestor, você concluirá a tarefa da forma adequada.

Faça valer a pena

1. O estudo da eletrostática e do magnetismo apresenta um paralelo interessante das equações para determinar o campo elétrico e o campo magnético. Em cada uma das áreas de estudo, uma dessas equações requer um esforço maior de cálculo, enquanto que a segunda permite um cálculo simplificado se houver uma simetria adequada. Considere a Quadro 2.1, que apresenta um paralelo das equações:

Quadro 2.1 | Paralelo entre as leis da eletrostática e do eletromagnetismo

Eletrostática	Magnetismo	Característica
A	B	Cálculos mais elaborados e complexos
C	D	Cálculos simplificados em determinadas simetrias

Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que completa corretamente a tabela nas posições A, B, C e D, respectivamente:

- Lei de Coulomb, Lei de Gauss, Lei de Ampère e Lei de Biot-Savart.
- Lei de Gauss, Lei de Coulomb, Lei de Biot-Savart e Lei de Ampère.
- Lei de Biot-Savart, Lei de Gauss, Lei de Ampère e Lei de Coulomb.
- Lei de Coulomb, Lei de Biot-Savart, Lei de Gauss e Lei de Ampère.
- Lei de Gauss, Lei de Ampère, Lei de Coulomb e Lei de Biot-Savart.

2. Um aparelho de rádio que possui um solenoide toroidal de diâmetro igual a 5 cm em seu circuito foi aberto para manutenção, e o técnico decidiu calcular o campo magnético concatenado no interior desse

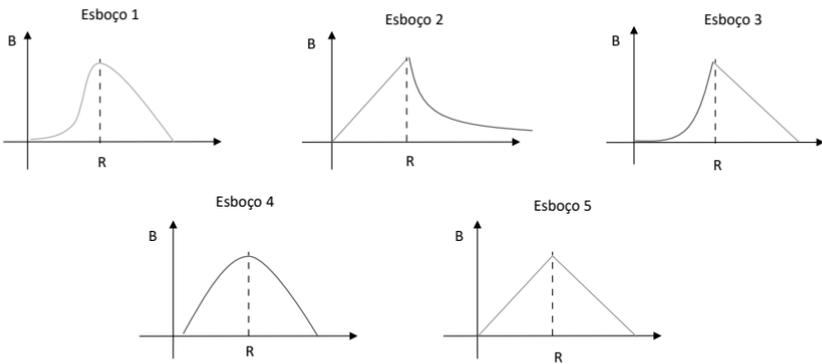
solenóide. Para isso, o técnico conectou um amperímetro que marcou uma corrente de 10 mA.

Sabendo que o solenóide é de 300 espiras, o valor de densidade de campo magnético obtido é de:

- a) $1,4 \times 10^{-6} \text{ T}$
- b) $2,4 \times 10^{-6} \text{ T}$
- c) $2,7 \times 10^6 \text{ T}$
- d) $1,8 \times 10^{-5} \text{ T}$
- e) $2,4 \times 10^{-5} \text{ T}$

3. Um condutor cilíndrico é utilizado em uma instalação elétrica e tem seção transversal de raio igual a R . Numa situação de demanda alta de energia elétrica, uma determinada corrente I percorre o condutor. Alguns estudantes esboçaram o campo magnético produzido pela distribuição de corrente elétrica nesse condutor, representados na Figura 2.27.

Figura 2.27 | Esboços de um campo magnético num condutor cilíndrico de raio R



Fonte: elaborada pelo autor.

Nessas condições, pode-se afirmar que o esboço correto do campo magnético em função da distância do centro do eixo do condutor é o:

- a) Esboço 1
- b) Esboço 2
- c) Esboço 3
- d) Esboço 4
- e) Esboço 5

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 3.

HAYT JR., W. H.; BUCK, J. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Indutância e as equações de Maxwell

Convite ao estudo

Olá, caro aluno, seja bem-vindo à terceira unidade do curso de Eletromagnetismo. Nas unidades anteriores estudamos os fundamentos da eletrostática e do magnetismo, e nesta unidade continuaremos a aprofundar os conhecimentos estudando as indutâncias e as equações de Maxwell.

Este tema está muito presente nas nossas atividades cotidianas, uma vez que muitos dos equipamentos que utilizamos são compostos por indutores magnéticos ou têm o princípio de funcionamento baseado nas leis de indução. Ao final desta unidade você será capaz de realizar a análise de distribuições de correntes elétricas e dos campos magnéticos envolvidos, em contextos gerais e em aplicações específicas tais como motores, geradores e transformadores elétricos. Além disso, será capaz de aplicar as equações de Maxwell na engenharia.

Para motivar os estudos desta unidade, iremos imaginar que você foi contratado por um laboratório de testes para trabalhar em um ensaio contratado por uma empresa fabricante de materiais eletromagnéticos. Nas atividades do laboratório, é comum realizar atividades, tais como: o planejamento de experimentos, descrição teórica dos resultados experimentais esperados, análise e cálculos de parâmetros relacionados aos materiais magnéticos, entre outros ensaios. Nestas atividades será necessário ser persistente e colaborar com a equipe para o sucesso nos trabalhos que precisam ser desenvolvidos. Os resultados devem ser reportados em relatórios e descritivos dos ensaios realizados.

Você participará da análise teórica e do planejamento dos experimentos. Na primeira etapa você irá colaborar propondo uma solução para que os testes possam ser realizados, na segunda etapa irá analisar teoricamente os ensaios realizados em um toroide para determinar a indutância deste, e finalmente em uma terceira etapa irá analisar o campo magnético produzido em um capacitor de placas circulares. Ao final dos testes, você será responsável por elaborar um relatório para o cliente, contendo a descrição dos ensaios realizados juntamente com as comprovações teóricas destes testes. Desta forma, você deverá utilizar os conhecimentos adquiridos nesta unidade, tais como: lei de Faraday e lei de Lenz, indutâncias magnéticas e as equações de Maxwell. Você está preparado para este desafio? Sabe onde buscar o conhecimento necessário?

Nesta unidade, apresentaremos o conhecimento que é necessário para realizar as tarefas que lhe forem delegadas. Na Seção 3.1 você será apresentado às leis de Faraday da indução magnética e à lei de Lenz, que são fundamentais para compreensão do princípio de funcionamento de equipamentos como motores, geradores e transformadores.

Na Seção 3.2 estudaremos o conceito de indutância magnética a partir do aprofundamento do estudo da natureza dos materiais magnéticos e dos conceitos de magnetização e permeabilidade.

Na Seção 3.3 serão introduzidas e contextualizadas as equações de Maxwell a partir das leis fundamentais da eletrostática e do eletromagnetismo.

Estes conhecimentos serão um diferencial na sua formação.

Seção 3.1

Lei de Faraday e lei de Lenz

Diálogo aberto

Olá, aluno, nesta seção iniciaremos o estudo do fenômeno da indução magnética, isso quer dizer que trataremos de um assunto extremamente importante e relevante em nossa vida cotidiana. O fenômeno da indução eletromagnética foi descoberto inicialmente por Michael Faraday (1791-1867), mas também recebeu uma contribuição importante de um físico chamado Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865).

Este tema é de grande importância na indústria e na engenharia, assim como você verá nas situações e tarefas que são propostas nesta seção. Motores elétricos que são empregados nas indústrias têm a lei de indução magnética como princípio fundamental para o seu funcionamento.

Para motivar os seus estudos, você foi convidado a imaginar que foi contratado por um laboratório para trabalhar em um ensaio contratado por um cliente que fabrica materiais eletromagnéticos. Sua empresa recebeu um lote de espiras e solenoides, toroides e capacitores para análise, e neste ensaio você participará da análise teórica e do planejamento dos experimentos. Ao final dos testes, você será responsável por elaborar um relatório para o cliente, contendo a descrição dos ensaios realizados juntamente com as comprovações teóricas destes testes.

Contudo, para realizar estes ensaios é necessário realizar uma etapa de planejamento, de forma que você se certifique que não faltará nenhum material para o sucesso dos testes. Nessa etapa, a equipe do laboratório identifica um problema: um dos instrumentos utilizados deve ser alimentado com 440V em CA, contudo, os pontos de alimentação do laboratório fornecem apenas 220V. Vocês não possuem transformador para que a tensão possa ser aumentada, mas existem bobinas de 1500 espiras e núcleos de material ferromagnético. Como você criaria uma solução para que o instrumento possa ser utilizado?

Para realizar a sua tarefa com sucesso, você deverá utilizar os conhecimentos adquiridos nesta seção: lei de Faraday e lei de Lenz. Apesar de estar na etapa de planejamento, se você for capaz de resolver esta situação de forma a permitir que os ensaios sejam realizados, você estará exercitando a sua capacidade de raciocínio crítico e tomando uma iniciativa para solução de problemas, e dessa forma irá colaborar com a sua equipe. Assim, convido você a estudar com muita atenção o conteúdo desta seção, onde você obterá os conhecimentos necessários para realizar as tarefas que lhe foram delegadas. Bons estudos.

Não pode faltar

Na unidade anterior nós aprendemos que quando um condutor percorrido por corrente elétrica é colocado em meio a um campo magnético, surge nele uma força e, conseqüentemente, um torque eletromagnético. Você já se perguntou se o contrário também ocorre?



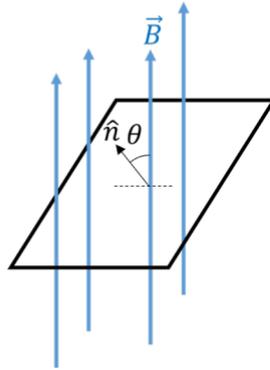
Refleta

Se um condutor for colocado em meio a um campo magnético sob ação de um torque que provoque um movimento, surgirá nele uma corrente elétrica?

Para poder entender o que ocorre ao movimentar um condutor em um campo magnético, como uma espira, vamos inicialmente conceituar o *fluxo de um campo magnético*. Você deve se lembrar que, quando abordamos a Lei de Gauss, definimos o fluxo de campo elétrico, sendo este a integral do produto escalar de um campo elétrico por uma determinada área. Podemos definir analogamente o fluxo de campo magnético como a integral do produto escalar entre o campo magnético e uma determinada área pela qual as linhas deste campo magnético passam, como mostra a Figura 3.1. Podemos escrever o fluxo de campo magnético (Φ_B) como:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Figura 3.1 | Demonstração do fluxo de campo magnético em uma determinada área



Fonte: elaborada pelo autor.

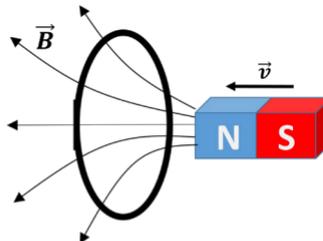
Considerando um campo magnético constante e que o vetor de campo magnético faça um determinado ângulo θ com o versor \hat{n} , podemos escrever:

$$\Phi_B = \int_S B \cos(\theta) dA$$

A expressão acima nos mostra que o fluxo Φ_B pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo do ângulo θ . A unidade de fluxo de campo elétrico é Tesla metro quadrado [$T \cdot m^2$] que é igual a 1 Weber [Wb].

Podemos visualizar mentalmente o fluxo de um campo magnético, por exemplo, ao aproximar um ímã permanente de uma espira circular, conforme mostra a Figura 3.2. Ao aproximar o polo norte deste ímã em direção ao centro da espira, como as linhas saem do polo norte em direção ao polo sul, poderemos observar as linhas de campo magnético passando pelo centro da espira. Quanto mais linhas de campo estiverem passando por dentro da espira, maior será o fluxo magnético.

Figura 3.2 | Fluxo de campo magnético de um ímã permanente no interior de uma espira



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, é possível visualizar que ao aproximar o ímã do interior da espira, o fluxo aumenta, e ao afastar o ímã da espira o fluxo diminui. Além disso, Michael Faraday percebeu em seu experimento uma outra característica: ao conectar um multímetro nos terminais de uma espira (fechando um circuito) ele notou que ao aproximar o polo norte do ímã do interior da espira surge uma corrente positiva, mas com um detalhe: esta corrente somente surge quando o ímã é aproximado com uma alta velocidade. Se o ímã for movido muito vagarosamente, a corrente não aparece. Da mesma forma, ao afastar o ímã do centro da espira, surge uma corrente negativa, mas somente se o movimento do ímã for muito rápido. Desta forma, Michael Faraday constatou que uma tensão (força eletromotriz) era induzida nos terminais da espira quando ocorria uma variação temporal do fluxo, ou seja:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$



Assimile

A **Lei de Faraday** da indução magnética relaciona a força eletromotriz induzida (ε_{ind}) em um condutor com a taxa de variação do fluxo magnético através deste condutor.

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

O sinal negativo se deve ao que foi identificado pouco depois pelo físico Friedrich Lenz. Ele percebeu que o sentido da corrente induzida era tal que o seu campo magnético se opunha à variação do fluxo magnético que produziu esta corrente, ou em uma outra interpretação, em oposição ao movimento do ímã permanente.

Se consideramos que a corrente se opõe à aproximação, então o campo magnético gerado pela corrente na espira deve produzir um polo igual ao polo que se aproxima, gerando assim uma força de repulsão. Isso está ilustrado na Figura 3.3 (a). Por outro lado, se observarmos a variação do fluxo magnético do ímã permanente, perceberemos que ao aumentar o fluxo, o campo gerado irá se opor a este aumento, como mostra na Figura 3.3 (b), estando em uma mesma direção e sentido contrário ao campo que o gerou. De outra forma, ao diminuir o fluxo, o campo gerado irá agir de forma a aumentar o campo total assim como na Figura

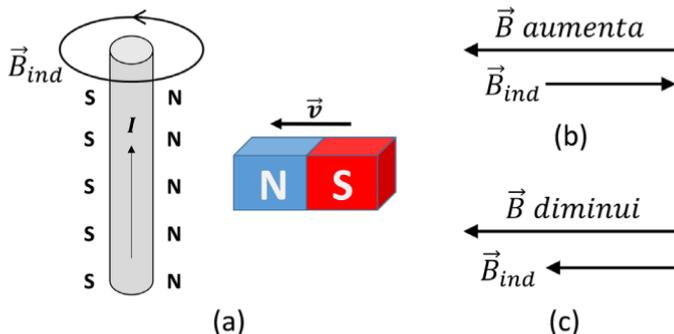
3.3 (c), estando o campo gerado na mesma direção e sentido que o campo que o gerou.



Refleta

Na Figura 3.2, qual o sentido da corrente elétrica ao aproximar o ímã do centro da espira? E ao afastar?

Figura 3.3 | Interpretação da Lei de Lenz (a) oposição ao movimento, (b) oposição à variação negativa do fluxo e (c) oposição à variação positiva do fluxo.



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

De acordo com a **Lei de Lenz** a corrente induzida terá o sentido oposto à variação de fluxo de campo magnético.



Exemplificando

Seja uma espira de raio R em um campo magnético que varia no tempo conforme $B = -Kt$. Neste caso, qual será o valor da força eletromotriz induzida nesta espira?

Resolução:

Neste caso, podemos calcular inicialmente o fluxo de campo magnético de acordo com a integral dada a seguir. Como a espira é circular de raio R , a área total pela qual o fluxo passa é igual à πR^2 , logo:

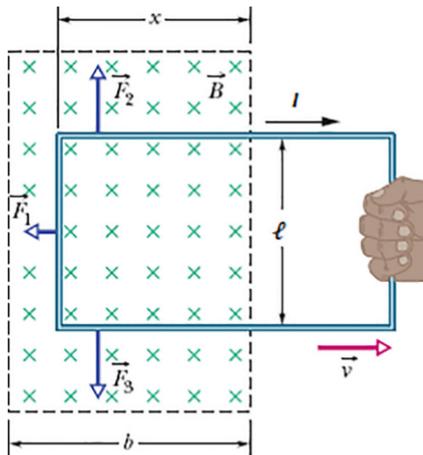
$$\Phi_B = \int_S B \cos(\theta) dA = B \cos(\theta) \pi R^2$$

Em seguida, aplica-se a equação da Lei de Faraday para determinar a força eletromotriz induzida:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt} \cos(\theta) \pi R^2 = -\frac{d(-Kt)}{dt} \cos(\theta) \pi R^2 = K \cos(\theta) \pi R^2$$

Assim, percebemos que a força eletromotriz induzida pode surgir em situações nas quais o campo magnético é variante no tempo em uma área fixa pela qual o campo magnético passa. Vamos agora analisar uma situação em que o campo magnético é fixo, confinado em um determinado espaço, no qual existe uma espira retangular que se movimenta, conforme mostrado na Figura 3.4. Nesta situação entenderemos melhor a indução magnética segundo a Lei de Faraday, além de assimilar um conceito importante que é a transferência de energia no processo de indução.

Figura 3.4 | Espira retangular movimentando-se em um campo magnético constante



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, [s.p.]).

Quando o ímã é aproximado ou afastado da espira, uma força magnética se opõe ao movimento e, portanto, é preciso realizar um trabalho positivo. Como existe uma resistência característica da espira, uma energia térmica é produzida devido à corrente induzida na espira pelo movimento. Assim, existe uma transferência de energia mecânica no sistema ímã-espira para energia térmica.

Na situação da espira que se movimenta linearmente em um campo magnético constante da Figura 3.4, quanto mais a espira é puxada para fora da região de confinamento do campo magnético,

menor será o fluxo de campo magnético pela espira, pois a área diminui. Ou seja, existe uma variação negativa de área, e o fluxo será dado conforme o cálculo da integral a seguir, onde o ângulo θ é igual a zero, pois tanto o campo quanto a normal à superfície estão no mesmo sentido. Como x diminui, e sendo B a magnitude do campo magnético constante, o fluxo diminui.

$$\Phi_B = \int_S B \cos(\theta) dA = B \ell x.$$

Ao calcular a força eletromotriz induzida neste caso, teremos que:

$$|\varepsilon_{ind}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = B \ell \frac{dx}{dt} = B \ell v.$$

Como a espira tem uma resistência elétrica surgirá uma corrente induzida que se opõe à variação do campo magnético. Como uma variação negativa de fluxo magnético é a que induz a corrente, um campo na mesma direção e sentido do campo indutor irá surgir. Logo, a corrente deve percorrer a espira no sentido horário. Supondo uma resistência elétrica R na espira, pode-se calcular a corrente por:

$$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{B \ell v}{R}.$$

Sobre cada parte da espira aparecerá forças induzidas dadas por: $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$. Integrando esta equação em cada um dos lados da espira retangular, serão obtidas as resultantes \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 . Ainda, existe uma força que é aplicada por quem puxa a espira, dada por \vec{F}_x . Como a espira se movimenta em uma velocidade v constante, então podemos concluir que a resultantes das forças é nula, ou seja:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3.$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_x = \int_0^\ell (I d\vec{\ell} \times \vec{B}) = I \ell B = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}.$$

Podemos calcular a potência aplicada na movimentação à espira que é igual ao produto escalar da força aplicada pela velocidade, que por sua vez possuem mesma direção e sentido, logo:

$$P_{ap} = \vec{F}_x \cdot \vec{v} = F_x v = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}.$$

Entretanto, a potência dissipada é dada por:

$$P_{diss} = R I^2 = R \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R^2} = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}.$$

Ou seja, em velocidade constante, toda a energia injetada na espira é consumida na forma de dissipação térmica.



Correntes de Foucault: na situação que vimos tratamos de uma espira que está se movimentando em um campo magnético, entretanto, você consegue imaginar a situação em que uma chapa metálica se movimenta em meio a um determinado campo magnético? Como seriam as correntes? O que ocorre é que surgem correntes induzidas em várias partes do material, causando assim uma dissipação térmica, o que são denominadas correntes de Foucault. Para saber mais acesse a Seção 3.10.5 do livro:

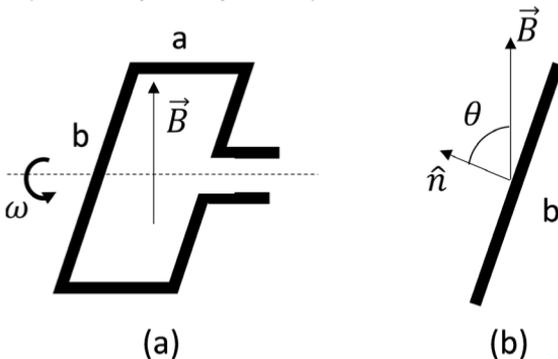
REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Lembrando que você possui acesso gratuito ao livro na biblioteca virtual. Acesse diretamente a seção através do link:

<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2668-8/cfi/6/24!/4/1068@0:0>>. Acesso em: 28 nov. 2017.

Com o que foi visto até aqui, podemos analisar o funcionamento de um gerador elementar, que se trata de uma espira girando em meio a um campo magnético. Vamos considerar então um campo uniforme e uma espira retangular conforme mostra a Figura 3.5 (a). Esta espira gira em torno de um eixo com determinada velocidade angular ω . Neste caso, é possível verificar que a orientação do campo magnético varia com relação ao versor normal à superfície por onde o fluxo magnético passa. Isso pode ser melhor visualizado na Figura 3.5 (b) ao lado.

Figura 3.5 | Espira girando em um campo uniforme (a) fluxo no centro da espira (b) direção do campo em relação à seção da espira



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando a espira gira, o ângulo entre a normal e B varia, e por isso podemos calcular o fluxo magnético da seguinte forma:

$$\Phi_B = \int_S B \cos(\theta) dA = B \cos(\omega t) ab.$$

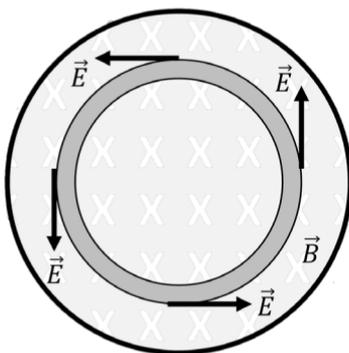
Na equação acima definimos que $\theta = \omega t$. Dessa forma, podemos definir a força eletromotriz induzida tal que:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} B \cos(\omega t) ab = -\frac{d \cos(\omega t)}{dt} Bab = \omega \text{sen}(\omega t) Bab$$

Ou seja, percebe-se que a uma tensão induzida é gerada e se comporta como uma tensão senoidal. Desta forma, se os terminais da bobina forem ligados a uma carga, surgirá uma corrente elétrica. Este é o princípio de funcionamento dos geradores elétricos.

Vamos agora estudar os efeitos de um campo magnético variável sobre um condutor. A situação que podemos analisar é de um anel na presença de um campo magnético variável. Neste caso surgirá um campo elétrico induzido. Seja um anel em um cilindro em que existe um campo magnético que cresce com o tempo, conforme mostra a Figura 3.6.

Figura 3.6 | Anel na presença de um campo magnético variável



Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2016, [s.p.]).

Como na região cilíndrica o campo magnético cresce com o tempo, então podemos escrever que o fluxo magnético é crescente. Esse anel tem raio R e delimita a área pela qual o fluxo está crescendo. Então irá aparecer em seu contorno uma corrente induzida, cujo sentido é dado pela Lei de Lenz. Se o fluxo está aumentando, a corrente induzida irá gerar um campo que se oporá ao aumento do fluxo do campo aplicado, ou seja, haverá uma corrente circulando no sentido anti-horário. Irá aparecer no

condutor um campo elétrico que é tangente em cada ponto do anel. Este campo elétrico é chamado de campo elétrico induzido.



Refleta

Como serão as linhas de campo elétrico no caso de um anel em um campo magnético variável (conforme mostra a Figura 3.6)?

A Lei de Faraday permite então afirmar que um campo magnético variante no tempo irá produzir um campo elétrico. Se considerarmos as cargas no interior do anel, sobre elas agirá uma força dada por $\vec{F} = q\vec{E}$.

Conforme visto em outras seções, o trabalho realizado por esta força pode ser calculado pela integral do produto escalar entre a força e o deslocamento, conforme mostrado a seguir:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int q\vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Por outro lado, se existe uma força eletromotriz induzida, podemos escrevê-la como:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{W}{q} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

No entanto, a força eletromotriz também foi definida como a variação do fluxo magnético no tempo, portanto, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

A igualdade acima trata de uma reformulação da Lei de Faraday para um campo variante no tempo. É importante você atentar, entretanto, que não se pode associar um potencial elétrico a um campo elétrico induzido.



Exemplificando

Seja uma espira quadrada de lado igual a 3 cm colocada em meio a um campo, de forma que o fluxo seja perpendicular à área da espira. Determine o campo elétrico se o campo magnético é igual a:

$$\vec{B} = 9t.$$

Resolução:

Neste caso, podemos calcular inicialmente o fluxo de campo magnético uma vez que a área da espira é $A=0,003^2=9 \times 10^{-4} \text{m}^2$, e como o campo magnético e a área da espira estão na mesma direção:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cos(\theta) dA = B \cos(\theta) A = 9t \cos(0^\circ) 9 \times 10^{-4} = 81t \times 10^{-4}$$

Em seguida, aplica-se a equação da Lei de Faraday reformulada para determinar o campo elétrico. Sendo L o perímetro da espira, temos:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow EL = 81 \times 10^{-4}$$

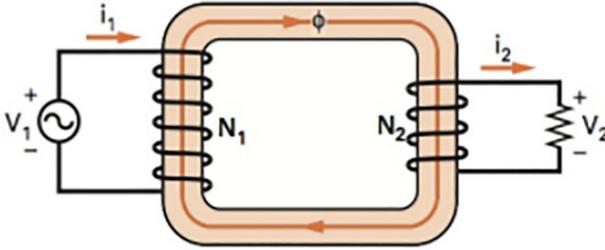
$$E \times 4 \times 3 \times 10^{-2} = 81 \times 10^{-4} \rightarrow E = \frac{81 \times 10^{-4}}{12 \times 10^{-2}} = 6,75 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

Sem medo de errar

Vamos inicialmente lembrar da tarefa que você precisa desempenhar. Existe um problema para realização de um experimento que demanda o uso de um instrumento alimentado em 440V em corrente alternada. No entanto, os pontos de alimentação do laboratório fornecem apenas 220V. Vocês não possuem transformador para que a tensão possa ser aumentada, mas existem bobinas de 1500 espiras e núcleos de material ferromagnético. Será que você conseguiria com os materiais disponíveis elaborar um transformador de forma que seja possível ligar o equipamento que deve ser utilizado?

Vamos inicialmente entender como é a estrutura de um transformador de corrente alternada. Na Figura 3.7 é apresentada a estrutura de um transformador monofásico, constituído por uma bobina de primário com N_1 espiras, e uma bobina de secundário, com N_2 espiras. A bobina de primário é alimentada com uma tensão V_1 , alternada, que faz com que uma corrente elétrica alternada I_1 percorra o enrolamento, enquanto a bobina do secundário é ligada a uma resistência elétrica. O núcleo de material ferromagnético tem a função de concatenar o fluxo de campo magnético gerado pela bobina de primário, de forma que este fluxo passe pela bobina do secundário. Desta forma, como o campo magnético gerado pela bobina do primário é um campo variante no tempo, uma força eletromotriz também é gerada na bobina do secundário.

Figura 3.7 | Estrutura de um transformador monofásico



Fonte: Wentworth (2008, p. 310).

Conforme vimos, a força eletromotriz gerada por uma espira do enrolamento do primário pode ser dada pela variação do fluxo magnético, de forma que a força eletromotriz resultante é dada pela soma das forças eletromotriz gerada em cada espira, de forma que, desprezando as perdas nas resistências dos enrolamentos, podemos escrever:

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} = V_1.$$

Da mesma forma, a força eletromotriz resultante na bobina de secundário é dada pela superposição das forças eletromotrizes induzidas em cada uma das espiras do secundário. Novamente, desprezando-se as resistências do enrolamento do secundário, e considerando que todo o fluxo magnético está concatenado no núcleo de material ferromagnético, podemos escrever:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = V_2.$$

Uma vez que não há dispersão de fluxo, a variação temporal do fluxo magnético é a mesma. Assim, dividindo ε_1 por ε_2 temos:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

A equação obtida nos mostra uma relação de transformação, ou seja, dependendo do número de espiras nas bobinas de primário e secundário, pode-se obter uma transformação da tensão. Ao substituir os valores de tensão, podemos então obter a relação de transformação desejada para um transformador que aumente a tensão:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{220}{440} = \frac{1}{2} \rightarrow N_2 = 2N_1.$$

Ou seja, para obter a tensão desejada, é necessário que exista um número de espiras no secundário do transformador que

corresponde ao dobro do número de espiras encontrado no primário. Como o laboratório dispõe de bobinas de 1500, e materiais ferromagnéticos para compor o núcleo do transformador, pode-se então ligar uma das bobinas no primário e duas bobinas conectadas em série no secundário, sendo estas bobinas colocadas no núcleo de material ferromagnético para concatenar o fluxo.

Contudo, pode-se utilizar mais bobinas, sempre respeitando a relação de transformação, dependendo de como você deseja construir o seu transformador. Uma informação importante é atentar para a tensão permitida em cada uma das bobinas, de forma que a tensão da rede não danifique a bobina e o seu transformador. Uma vez que você construa este transformador, o equipamento do laboratório pode ser ligado, e a sua tarefa será concluída com êxito.

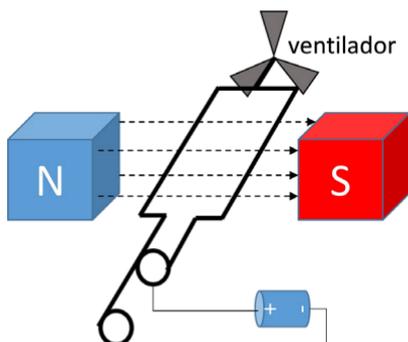
Avançando na prática

Ventilador alimentado à bateria

Descrição da situação-problema

Imagine que você trabalha em uma empresa de equipamentos elétricos que podem ser conectados à porta USB de computadores pessoais. Seu colega é um projetista que está trabalhando no projeto de um ventilador que pode ser conectado a uma bateria ou à porta USB do computador. Um aparato foi montado com uma espira em meio a um campo magnético de um ímã permanente como mostra a Figura 3.8. Os terminais da espira se ligam a anéis de forma que a espira possa girar e movimentar as hélices do ventilador.

Figura 3.8 | Projeto inicial do ventilador



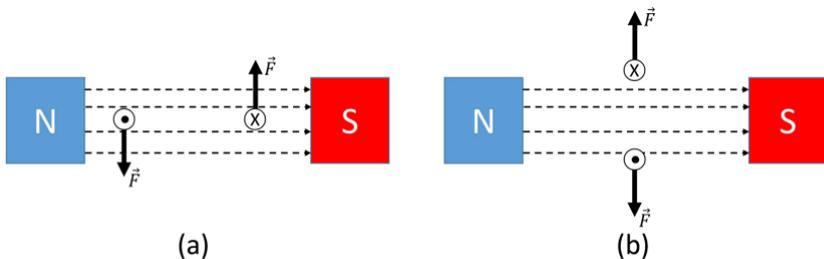
Fonte: elaborada pelo autor.

O projetista deste ventilador imaginou que, ao ligar a bateria nos terminais da espira, a corrente que percorre o condutor em meio a um campo magnético produz uma força com sentido para cima no condutor do lado direito, e para baixo no condutor do lado esquerdo, fazendo assim a espira girar. No entanto, a espira apenas deu uma meia volta e parou na vertical. Utilizando os seus conhecimentos de eletromagnetismo, você conseguiria melhorar o projeto?

Resolução da situação-problema

No projeto deste ventilador existe basicamente dois problemas: o primeiro se refere à conexão da bateria nos terminais da espira utilizando os anéis. Inicialmente, a ação de forças nos condutores contribui para o início do movimento, mas quando a espira estiver na posição vertical. A ação de forças na espira torna a resultante nula.

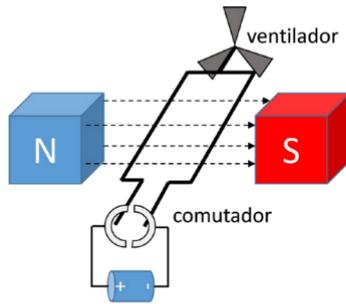
Figura 3.9 | Ação das forças na espira (a) posição horizontal, (b) posição vertical



Fonte: elaborada pelo autor.

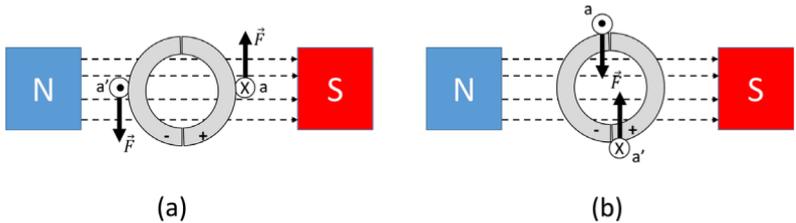
Para corrigir este problema, é necessário colocar nas espiras um elemento chamado comutador conectado à bateria por meio de escovas, conforme mostra a Figura 3.10. Este elemento inverte o sentido da corrente que passa pela espira, viabilizando a rotação da espira. Na Figura 3.11 é mostrado o funcionamento do comutador, na posição inicial, a correntes entrando e saindo da espira favorecendo a ação de forças nos condutores e causando um torque de rotação. Ao chegar na posição vertical ocorre a comutação, com a inversão do sentido das forças nos condutores, de forma que o movimento continue. Ainda, uma medida adicional é acrescentar mais espiras no projeto, dispostas perpendicularmente, de forma a aumentar o conjugado e permitir um movimento mais suave. Com estas medidas implementadas, o projeto do ventilador é viabilizado e a tarefa é finalizada com êxito.

Figura 3.10 | Projeto do ventilador com comutador



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.11 | Funcionamento do comutador (a) posição inicial (b) instante da comutação



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

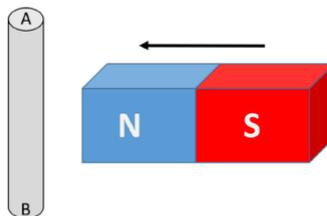
1. De acordo com a Lei de Faraday-Lenz, se um ímã permanente for aproximado de um condutor tal como mostra a figura, se os pontos das seções transversais A e B deste condutor forem curto-circuitados, então surgirá uma corrente induzida neste condutor.

I. A corrente elétrica terá a direção de B para A.

II. Surgirá um campo magnético com o polo norte no lado direito do condutor, se opondo ao polo do ímã.

III. Ao afastar o ímã, o polo norte no condutor irá gerar uma força de atração, dificultando o movimento.

Figura 3.12 | Ímã se aproximando do condutor



Fonte: elaborada pelo autor.

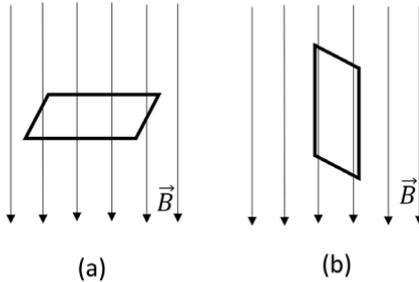
Assinale alternativa que indica quais as afirmativas verdadeiras:

- a) I apenas.
- b) II apenas.

- c) III apenas.
- d) I e II apenas.
- e) II e III apenas.

2. Na figura apresentada a seguir, tem-se uma espira no formato quadrangular com lado medindo 0,2 m que está disposta em um campo magnético constante de intensidade igual à $B = 10,0 \text{ Wb/m}^2$, sendo que a área quadrangular está perpendicular às linhas do campo. Em determinado momento, a espira sofre uma leve rotação de forma que ela fique na posição vertical, paralela às linhas de campo.

Figura 3.13 | Espira quadrangular em meio a um campo magnético constante (a) na posição horizontal e (b) na posição vertical



Fonte: elaborada pelo autor.

O tempo gasto para a espira ir da posição inicial até a final é 0,4 segundos. Logo, o módulo da força eletromotriz induzida na espira, em volts, é:

- a) 1 V.
- b) 2 V.
- c) 3 V.
- d) 4 V.
- e) 5 V.

3. Um campo magnético variante no tempo está disposto na direção vertical, em algum ponto do espaço, e apresenta a variação de acordo com a equação a seguir, onde t representa o tempo em segundos, e a magnitude do campo magnético é dada em Tesla (T). Neste campo, é colocada uma espira de raio igual a 3 cm de forma que o fluxo seja perpendicular à área circular da espira.

$$\vec{B} = 16 \cos(10^3 t)$$

No tempo igual a 10 segundos, qual será a intensidade do vetor de campo elétrico, em V/m?

- a) 55,66.
- b) 73,34.
- c) 82,43.
- d) 100,23.
- e) 124,22.

Seção 3.2

Indutância

Diálogo aberto

Caro aluno, na última seção nós estudamos as leis de Faraday e Lenz para a indução magnética. Nesta seção daremos continuidade a este estudo, e entraremos na definição de um conceito muito importante: a indutância.

Quando lidamos com materiais e equipamentos eletromagnéticos, como por exemplo os motores elétricos que são empregados em fábricas, ou geradores e transformadores que são empregados em sistemas de energia elétrica, utilizamos indutâncias nos modelos. Entretanto, para entender melhor o conceito, será necessário aprofundar alguns conhecimentos sobre os materiais magnéticos. Ainda, analisaremos as indutâncias próprias e também aquelas indutâncias que são produzidas devido às interações de fluxos magnéticos, as chamadas indutâncias mútuas.

Para que você se motive ainda mais no estudo desta seção, vamos lembrar que você foi contratado como engenheiro de testes de um laboratório para trabalhar em um ensaio contratado por uma empresa fabricante de materiais eletromagnéticos. Neste ensaio o laboratório deverá caracterizar um lote de espiras e solenoides, toroides e capacitores. Você está participando da análise teórica e do planejamento dos experimentos. Ao final dos testes, você deverá escrever um relatório para o cliente, contendo a descrição dos ensaios realizados juntamente com as comprovações teóricas destes testes.

Para o ensaio contratado pela empresa fabricante de materiais eletromagnéticos, existe um lote de toroides, com 500 espiras cada, que devem ser testados. Estes toroides foram submetidos a ensaios que demonstraram que a indutância é de 2,8 mH com uma margem de erro de $\pm 0,2$ mH. Os toroides têm 10 cm de raio interno e uma seção quadrangular de lado igual a 5 cm. A sua tarefa é verificar se o valor experimental está coerente com o valor teórico, de forma que este parecer possa constar no relatório de ensaios. Como você acha que pode realizar esta tarefa?

Para realizar a sua tarefa com sucesso, você deverá utilizar os conhecimentos adquiridos nesta seção para fazer o cálculo da indutância em um solenoide em formato toroidal.

A comprovação dos resultados experimentais através de cálculos teóricos, apresentando as devidas justificativas para eventuais desvios encontrados, é de extrema importância em um ensaio experimental, e assim o seu papel neste procedimento é primordial. Por isso, convido você a estudar com muita atenção o conteúdo desta seção, assim como resolver as atividades de consolidação que forem propostas e buscar por mais conhecimentos no Pesquise mais. Com isso, você obterá os conhecimentos necessários para realizar as tarefas que lhe foram delegadas. Bons estudos!

Não pode faltar

Quando estudamos eletroestática, você estudou capacitores, que são dispositivos capazes de armazenar campo elétrico. Os capacitores possuem uma propriedade que define esta capacidade de armazenamento: a carga elétrica acumulada entre as duas placas de um capacitor é proporcional à diferença de potencial entre estas placas, e a este coeficiente de proporcionalidade dá-se o nome de capacitância (C), cuja unidade é o Faraday (F):

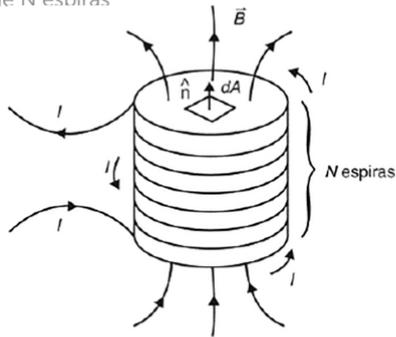
$$q = CV.$$

Analogamente, quando estudamos os campos magnéticos, poderemos falar dos indutores, que são dispositivos que têm a capacidade de armazenar campos magnéticos. O fluxo magnético total em um indutor é proporcional ao campo magnético, que por sua vez é proporcional à corrente elétrica, e dessa forma podemos escrever a seguinte relação, onde L é a letra designada para a indutância, dada em Henry (H):

$$\Phi_B = LI.$$

Para entender melhor, considere a Figura 3.14 que mostra um solenoide composto por N espiras e percorrido por uma determinada corrente I. Esta corrente produz um campo magnético que percorre o solenoide internamente. Este fluxo atravessa a região definida pela área do solenoide.

Figura 3.14 | Bobina de N espiras



Fonte: Rego (2010, [s.p.]).

Também vimos na Seção 3.1 que um fluxo magnético variante no tempo induzirá em um condutor uma força eletromotriz. Assim, é intuitivo que o campo magnético gerado por um solenoide percorrido por uma corrente I (variante no tempo) é capaz de atuar no próprio solenoide. Este fenômeno é conhecido como autoindução. Então, se um campo qualquer Φ' atravessa a área A do solenoide, podemos escrever:

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA.$$

No entanto, o fluxo no interior de um solenoide longo, de comprimento ℓ e contendo N espiras pode ser escrito por $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$. Como estamos considerando uma área circular do solenoide podemos escrever a equação do fluxo que passa por ele mesmo conforme segue:

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \frac{\mu_0 N I A}{\ell}.$$

O fluxo concatenado será dado pela somatória de Φ' em cada uma das N espiras, logo:

$$\Phi = N \Phi' = \frac{\mu_0 N^2 A I}{\ell}.$$

Assim, a autoindutância de um solenoide será:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}.$$

A autoindutância corresponde à capacidade que certo condutor ou solenoide possui de induzir nele mesmo uma força eletromotriz a partir de um campo magnético variante no tempo que foi produzida por uma corrente magnética que também é variante no tempo.



Exemplificando

Seja um solenoide de 1500 espiras com seção circular de 5 cm de raio, calcule a autoindutância deste solenoide para cada unidade de metro.

Resolução:

Neste caso temos um indutor de área de seção circular, dada por:

$$A = \pi R^2 = \pi \times 0,05^2 = 2,5\pi \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Utilizando a área calculada, podemos calcular a autoindutância considerando para o cálculo o comprimento de um metro:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \frac{4 \times 10^{-7} \times 1500^2 \times 2,5\pi \times 10^{-3}}{1} \approx 7,0 \times 10^{-3} \text{ H}$$

Assim, uma bobina de N espiras pode ser definida como um *indutor*. Se este indutor é percorrido por uma corrente I variante no tempo ($I = I(t)$) podemos definir a força eletromotriz (fem) autoinduzida como:

$$\varepsilon_L = - \frac{d(N\Phi)}{dt}$$



Assimile

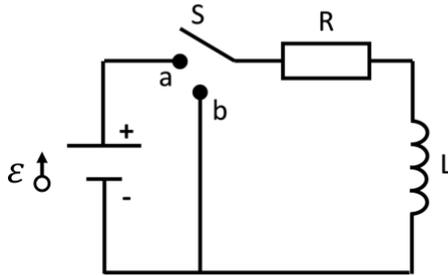
A **autoindutância** de um solenoide corresponde à capacidade que este solenoide possui de produzir uma força eletromotriz quando percorrido por uma corrente variante no tempo.

Na ausência de materiais magnéticos, o fluxo concatenado é proporcional à corrente que passa no indutor, sendo a autoindutância o coeficiente de proporcionalidade. Logo, $N\Phi = LI$, e a equação da fem autoinduzida será:

$$\varepsilon_L = - \frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Vamos imaginar que o indutor seja conectado a uma fonte de tensão V por meio de uma chave S como mostra a Figura 3.15.

Figura 3.15 | Circuito RL

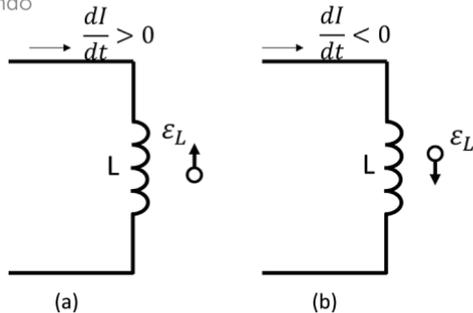


Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar da fonte de tensão ser constante, no momento de fechamento da chave S para a posição a , a corrente que surge irá variar no tempo. Assim, a fem autoinduzida ε_L que surge no indutor é devido à Lei de Faraday da indução, enquanto a tensão V é proveniente da conversão da energia interna da fonte. Se a resistência elétrica R for nula, no momento do fechamento da chave estas tensões serão iguais em magnitude, mas são provenientes de fontes diferentes! Além disso, é importante entender que o valor num dado instante do tempo da corrente não afeta a fem autoinduzida. O que afeta é a variação da corrente no tempo.

O sentido da força eletromotriz é dado pela lei de Lenz, ou seja, ela deve ser oposta à variação da corrente que a originou. Na Figura 3.16, é mostrada a representação de uma indutância, assim como o sentido da força eletromotriz nela induzida, dependendo de como varia a corrente que passa por este indutor.

Figura 3.16 | Sentido da força eletromotriz induzida (a) corrente crescendo (b) corrente diminuindo



Fonte: elaborada pelo autor.

A propriedade da indutância é, de certa forma, suavizar as variações de corrente, ou impedir que as variações de corrente

ocorram bruscamente. Em outras palavras, a indutância promove uma inércia de corrente elétrica.

Na Figura 3.15, a conexão entre os elementos representados como resistor (elemento que possui uma resistência elétrica) e indutor é chamado de circuito RL. No modelo de equipamentos como transformadores, geradores e motores elétricos, este tipo de circuito é muito utilizado. Desta forma, convém que nós façamos uma análise das características deste circuito.

Ao fechar a chave S em a, surgirá uma corrente no circuito RL, e dessa forma a lei de Kirchhoff para as tensões em um circuito fechado se aplica. Esta lei diz que a soma das tensões existentes em um circuito fechado deve ser igual a zero. De outra forma, a soma da tensão da fonte com as tensões na resistência R e na indutância L (a fem autoinduzida) deve ser nula. Então podemos escrever a seguinte equação:

$$0 = -\varepsilon + \varepsilon_L + RI = -V + L \frac{dI}{dt} + RI.$$

Rearranjando a equação, tem-se a equação diferencial de primeira ordem que representa o comportamento dinâmico do circuito.

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}.$$

A equação diferencial acima tem uma solução na forma:

$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Na equação da solução, tem-se uma que a corrente máxima é dada por $I_M = \frac{V}{R}$. É fácil verificar que corresponde à tensão da fonte (V) exclusivamente sobre o resistor (R). Assim, esta corrente é estabelecida somente após o período transitório da corrente que é determinada pela constante de tempo expressa na exponencial ($-\frac{R}{L}t$). Quando a exponencial se aproxima de um valor muito próximo de zero, o indutor se comporta como um curto-circuito, e toda a tensão da fonte estará sobre o resistor. Para indutores com L pequenos com relação à R, a corrente máxima é atingida em tempos menores. Ao contrário, para L relativamente grande a corrente máxima demora para ser estabelecida. A partir do estabelecimento desta corrente máxima, não existirá mais variação de corrente até que uma nova perturbação ocorra no circuito.

Vamos supor agora que, após o indutor ser carregado, a chave é aberta sendo posicionada em b, o que faz com que o indutor seja

descarregado. Neste caso, a corrente irá circular variando com o tempo, e da mesma forma que quando o indutor foi carregado, a lei das tensões de Kirchhoff em uma malha se aplicam, então temos que escrever:

$$0 = +\varepsilon_L + RI = L \frac{dI}{dt} + RI.$$

Rearranjando os termos da equação diferencial, tem-se:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

E neste caso, a solução da equação será simplesmente dada por:

$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Pesquise mais

Para mais esclarecimentos sobre a solução de equações diferenciais de primeira ordem, é sugerido assistir ao vídeo do canal *Toda a Matemática*, disponível no link a seguir:

<<https://www.youtube.com/watch?v=YSsoA-zR-EQ>>. Acesso em: 13 dez. 2017.



Exemplificando

Seja o circuito da Figura 3.15 com $V = 10 \text{ V}$, $R = 1\Omega$ e $L = 2 \text{ H}$. Determine a equação da corrente e a forma de onda desta corrente quando a chave é fechada no ponto a.

Resolução:

Substituindo diretamente os valores na equação da corrente elétrica variante no tempo, teremos:

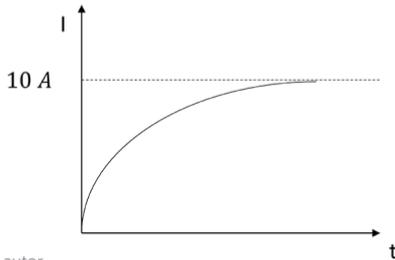
$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 10 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t} \right) = 10 - 10e^{-\frac{1}{2}t}$$

Para $t = 0 \text{ s}$, o valor da corrente será: $I(0) = 10 - 10e^0 = 10 - 10 = 0 \text{ A}$.

Para $t = \infty \text{ s}$, o valor da corrente será: $I(\infty) = 10 - 10e^\infty = 10 - 0 = 10 \text{ A}$.

A forma de onda da corrente elétrica será conforme mostra a Figura 3.16.

Figura 3.16 | Forma de onda da corrente no carregamento do indutor



Fonte: elaborada pelo autor.

No início desta seção, foi falado que o indutor é um dispositivo capaz de armazenar campo magnético. Assim, pressupõe-se que ele armazena algum tipo de energia. Por isso, apresentamos o comportamento dinâmico do indutor, e este comportamento será importante agora para entender como o indutor armazena energia do campo magnético. A existência de uma corrente elétrica circulando no circuito quando o indutor é descarregado, sem fonte de tensão externa, já evidencia que no carregamento do indutor alguma energia foi armazenada. Para verificar esta energia, vamos manipular a equação diferencial de primeira ordem que expressa o comportamento do carregamento do indutor e multiplicar pela corrente I . Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$VI = LI \frac{dI}{dt} + RI^2.$$

Sabemos que VI representa a potência da fonte externa, e RI^2 é a potência dissipada no resistor. Logo, a quantidade $LI \frac{dI}{dt}$ representa uma variação de energia magnética no tempo, conforme segue:

$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Integrando a equação acima, podemos obter a energia magnética armazenada em um indutor:

$$U = \int_0^t \frac{dU}{dt} dt = \int_0^U dU = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2.$$



Exemplificando

Seja um solenoide de 500 espiras e área circular de seção com raio igual a 1 cm, se esse solenoide tem 5 cm de comprimento, determine a energia armazenada para uma corrente de 2 A.

Resolução:

A indutância do solenoide pode ser calculado conforme a expressão:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} = \frac{4 \times 10^{-7} \times 500^2 \pi \times 0,01^2}{5 \times 10^{-2}} = 2\pi \times 10^{-4} \text{ H}.$$

A energia armazenada então, será:

$$U = \frac{1}{2} 2\pi \times 10^{-4} \times 4 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ J}.$$

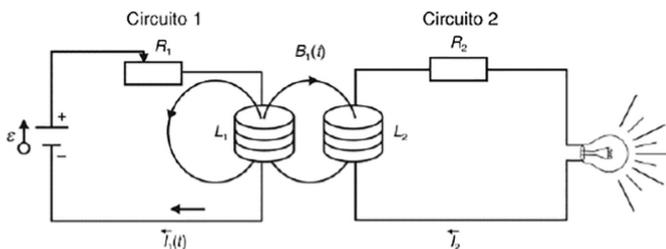


Refleta

Considere que duas bobinas sejam colocadas próximas uma da outra, sendo uma percorrida por corrente elétrica. Qual seria o alinhamento mais eficiente entre as duas bobinas de forma a permitir uma maior eficiência na indução magnética na segunda bobina?

Ao refletir sobre a pergunta acima, podemos concluir adicionalmente que é possível transferir energia entre duas bobinas. Isso ocorre porque existirá entre os indutores uma *indutância mútua*. Para entender isso, considere o circuito da Figura 3.17.

Figura 3.17 | Transferência de energia de um solenoide em um circuito 1 para o solenoide do circuito 2



Fonte: Rego (2010, [s.p.]).

Pela lei de Faraday uma fem é induzida num indutor do circuito 2 quando se varia no tempo seu fluxo magnético. No entanto, a variação de $B_1(t)$ se deve à corrente I_1 no circuito 1, o que nos permite escrever, onde Φ_{12} corresponde ao fluxo mútuo dos circuitos 1 e 2:

$$\varepsilon_2 = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

E neste caso o coeficiente M^{12} é conhecido como indutância mútua. Esta indutância acopla os circuitos 1 e 2 induzindo fem

no circuito 2 a partir da corrente variável no tempo do circuito 2. Quando os indutores estão em meios materiais lineares ou no vácuo, pode-se então escrever:

$$\Phi_{12} = M_{12}I_1.$$

É importante ressaltar que nas relações descritas de autoindutância, indutância mútua e energia armazenada no indutor, estamos considerando que os indutores estão em meios materiais lineares ou no vácuo. Entretanto, em outros meios materiais deve-se levar em consideração a natureza dos materiais magnéticos.

Para classificar os materiais em termos de suas propriedades magnéticas, pode-se considerar *Suscetibilidade Magnética* (χ_m) ou a *Permeabilidade Magnética* (μ) de cada material.

A suscetibilidade magnética mede a capacidade do material de se magnetizar quando estimulado magneticamente (por meio de um campo magnetizante). Esta é uma grandeza adimensional, dada pela razão entre a magnetização (\vec{M}) e o vetor de intensidade de campo magnético (\vec{H}):

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}.$$

A magnetização ocorre quando materiais com propriedades ferromagnéticas são utilizados de forma a exibirem propriedades magnéticas. Isso ocorre, por exemplo, quando um solenoide é construído ao redor de um núcleo ferromagnético, intensificando o fluxo no interior deste.

Já a permeabilidade magnética mede o campo magnético no interior de um material devido a um campo magnetizante existente (\vec{H}). Assim, quando o material estiver em meio magnetizante, no interior deste material surgirá um campo magnético devido ao campo magnetizante e à magnetização induzida no material. Nestas condições permeabilidade absoluta é definida pela relação: $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Além disso, a permeabilidade absoluta se relaciona com , conforme segue:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H} \right)$$

Da relação acima, verifica-se que na ausência de magnetização $\mu = \mu_0$.



Propriedades magnéticas da matéria: em termos genéricos, os materiais magnéticos podem ser agrupados em três categorias principais: diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos. Para aprofundar mais neste tema, sugere-se a seção 3.16 (Propriedades magnéticas da matéria) do livro que está disponível na biblioteca virtual:

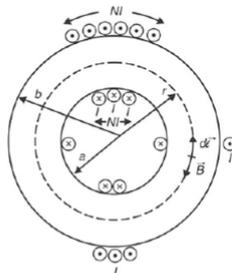
REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010, [s.p.]. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2668-8/cfi/6/24!/4/1720@0:0>>. Acesso em: 6 dez. 2017.

Sem medo de errar

Vamos lembrar a tarefa que você precisa realizar: seu laboratório testa materiais magnéticos e existe um lote de toroides, com 500 espiras cada, que devem ser avaliados. Estes toroides foram submetidos a ensaios que demonstraram que a indutância é de 2,8 mH com uma margem de erro de $\pm 0,2$ mH. Os toroides têm 10 cm de raio interno e uma seção quadrangular de lado igual 5 cm. A sua tarefa é verificar se o valor experimental está coerente com o valor teórico, de forma que este parecer possa constar no relatório de ensaios.

Inicialmente, você já deve ter percebido que alguns conhecimentos adquiridos na Unidade 2 devem ser utilizados. Isso por que é necessário que, primeiramente, seja identificado qual o campo magnético produzido no interior de um solenoide em formato toroidal. Assim, podemos calcular este campo magnético utilizando a Lei de Ampère. Ao olhar um toroide por cima, observaremos algo como mostrado na Figura 3.18, que nos mostra a seção transversal das espiras dentro e fora da região circular.

Figura 3.18 | Vista superior de um toroide



Fonte: Rego (2010, [s.p.]).

Assim, percebe-se que o toroide apresenta campo magnético com simetria ao longo da circunferência de raio r da figura, de forma que podemos escrever:

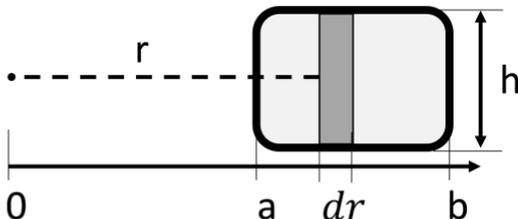
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -B2\pi r$$

Veja que, se $0 \leq r \leq a$, nenhuma corrente atravessa a área da circunferência, de forma que o campo magnético será nulo. Assim, o campo magnético no interior de um toroide é dado quando $r \geq a$, ou seja, quando a corrente total for $-NI$ entrando na página, e então teremos:

$$-B2\pi r = -\mu_0 NI \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Vamos analisar mais a fundo a seção transversal do toroide cuja indutância deve ser calculada: trata-se de uma seção transversal quadrangular de 5 cm de lado, e o raio do toroide é igual a 10 cm. Assim, ao fazer um corte neste toroide, teremos a seção como dada na Figura 3.19. Nesta figura, o centro do toroide está na origem do eixo horizontal, e a seção transversal forma um quadrado de altura h e a base dada pela distância entre os pontos a e b . Desta forma, pode-se escrever que o raio do solenoide é igual a b , e a altura corresponde à diferença entre b e a , ou seja: $r = b$ e $h = b - a$.

Figura 3.19 | Seção transversal do toroide



Fonte: elaborada pelo autor.

Logo, pode-se calcular o fluxo magnético no interior do solenoide resolvendo a integral, onde dA corresponde a um elemento infinitesimal de área da seção transversal:

$$\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \int B(r) \cos(0^\circ) dA = N \int B(r) dA$$

No entanto, o elemento infinitesimal de área dA pode ser reescrito como $h dr$, e desta forma pode-se reescrever a integral incluindo a equação do campo magnético para o toroide conforme anteriormente obtida:

$$\Phi = N \int \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot h dr = N \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

A indutância do toroide, por sua vez, é dada pela derivada do fluxo com relação à corrente. Logo podemos escrever:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Finalmente, basta substituir os valores de h, a, e b conforme foram definidos, ou seja, h = 5 cm, a = 5 cm e b = 10 cm. Assim, obtém-se a indutância do toroide em valores numéricos:

$$L = \frac{4 \times 10^{-7} \times 500^2 \times 0,05}{2\pi} \ln\left(\frac{0,1}{0,05}\right) = 0,0017 = 1,7 \text{ mH}.$$

Assim, pelos cálculos efetuados, pode-se perceber que os resultados experimentais não estão de acordo com o esperado. Desta forma, você pode alertar a equipe do laboratório para que ela repita o experimento se certificando de que as medições estão corretas. O erro entre o resultado teórico e o experimental pode ter sido devido a um erro na medição das dimensões do toroide ou até mesmo um erro de paralaxe na medição da indutância. Uma vez que você reportar estes cálculos no seu relatório, a segunda tarefa nos ensaios contratados estará cumprida.

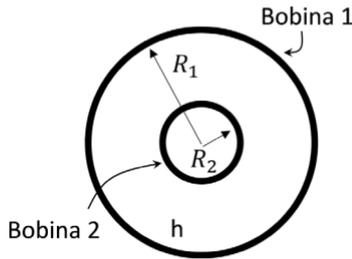
Avançando na prática

Indutância mútua de um transformador de núcleo de vácuo

Descrição da situação-problema

Em uma indústria será necessário construir um transformador com uma relação de transformação de 1:2. O gestor da sua área lhe incumbiu de realizar esta tarefa, mas será preciso que você utilize duas bobinas presentes no almoxarifado, sendo uma bobina de raio igual a 2 cm e 500 espiras e uma de 1000 espiras e raio igual a 15 cm. Com ajuda de uma câmara de vácuo, você deverá montar um transformador como mostra a Figura 3.20, em um meio de vácuo:

Figura 3.20 | Vista superior do transformador improvisado



Fonte: elaborada pelo autor.

Como parte da especificação do transformador, você precisa determinar a indutância mútua deste conjunto. Como você faria este cálculo?

Resolução da situação-problema

Considerando a estrutura na qual o transformador é montado, ilustrado na figura, e considerando que todo o fluxo da bobina se concentra no interior dela, é possível perceber que os fluxos das bobinas 1 e 2 encontram uma região de intersecção, dada pela região circular da bobina de raio menor. Supondo que uma corrente percorra a bobina 1, o fluxo que passa pela área da bobina 2 será de:

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}.$$

Temos também que a área da espira menor será igual à $A_2 = \pi R_2^2$. Assim, o fluxo mútuo da bobina 1 em relação à bobina 2 será dado por:

$$\Phi_{12} = B_1 A_2 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \pi R_2^2.$$

Note que estamos considerando que o fluxo que passa na área da bobina de raio menor será uniforme. Esta consideração é razoável, uma vez que o raio da bobina 2 é muito menor que o da bobina 1. Assim, podemos escrever a equação da força eletromotriz induzida na bobina 2:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 N_1 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \frac{dI_1}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Logo, concluímos que a indutância mútua será: $M_{12} = N_2 N_1 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$. Substituindo os valores:

$$M_{12} = N_2 N_1 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} = 500 \times 1000 \frac{4 \times 10^{-7} \times \pi \times 0,02^2}{2 \times 0,15} = 83,73 \mu H$$

Você conseguiu especificar corretamente as indutâncias mútuas, tendo cumprido sua tarefa com êxito.

Faça valer a pena

1. Uma bobina será utilizada na confecção de um transformador monofásico. Esta bobina é formada por fios enrolados de forma muito compacta, formando assim um número de 200 espiras. A indutância desta bobina é igual a 20 mH em condições normais de operação.

Calcule o fluxo magnético através de cada espira da bobina quando a corrente é de 5 mA.

- a) $2,5 \times 10^{-7}$ Wb.
- b) $5,0 \times 10^{-7}$ Wb.
- c) $7,5 \times 10^{-7}$ Wb.
- d) $1,0 \times 10^{-6}$ Wb.
- e) $5,0 \times 10^{-6}$ Wb.

2. Considere uma bobina com enrolamento compacto, perfazendo um indutor que apresenta uma força eletromotriz induzida de 15 mV para uma variação de corrente de 3 A/s. Se uma corrente constante de 4 A percorrer esta bobina, será produzido um fluxo magnético por espira de 20 μ Wb.

Nestas condições, a indutância e o número de espiras desta bobina serão, respectivamente.

- a) 1 mH, 5000.
- b) 2 mH, 4000.
- c) 3 mH, 3000.
- d) 4 mH, 2000.
- e) 5 mH, 1000.

3. Tem-se uma bobina que apresenta uma indutância igual a 4 H e uma resistência dos enrolamentos que corresponde à 20 Ohms. Esta bobina é ligada em uma fonte de tensão de 200 Volts. Nestas condições considere as seguintes afirmativas:

I. Se antes de atingir a corrente de equilíbrio, a taxa de variação da corrente é de 50 A/s.

II. A corrente que passa pela bobina é igual a 10 A.

III. A quantidade de energia armazenada é de 200 J.

Estão corretas as alternativas.

- a) I somente.
- b) II somente.
- c) III somente.
- d) I e III somente.
- e) I, II e III.

Seção 3.3

Equações de Maxwell

Diálogo aberto

Caro aluno, você já estudou os princípios da indução magnética, passando pelo estudo das indutâncias. Além disso, nesta unidade e nas unidades anteriores, você estudou os princípios fundamentais da eletrostática e do eletromagnetismo. Esta seção é uma espécie de fechamento dos conhecimentos fundamentais adquiridos até aqui, em que sintetizaremos as leis do eletromagnetismo e descreveremos as equações de Maxwell. Estas equações serão fundamentais para entendimento de como as ondas eletromagnéticas se propagam, princípio que é utilizado nos principais equipamentos de comunicação hoje existentes. Por isso, este conhecimento é muito importante para o mercado de trabalho.

Para motivar os estudos desta seção, vamos retomar a situação em que você foi contratado por um laboratório de testes de materiais eletromagnéticos. Em um novo pedido de ensaios, o laboratório recebeu um capacitor de placas planas e paralelas que estão separadas por uma distância d muito menor que o tamanho das placas, cuja área é $1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$. As placas do capacitor estão ligadas a uma fonte de corrente alternada de tal modo a produzirem uma carga Q alternada no tempo, tal que se comporta de acordo com a equação $Q = 6\text{sen}(377t) \times 10^{-5}$. Nestas condições, você deve realizar a análise teórica de forma a determinar qual será o campo B que surge entre as placas, devido à variação temporal do campo elétrico. Mas é possível determinar o campo magnético no interior de um capacitor, uma vez que a corrente elétrica de condução é nula nesta região? Como você realizaria esta tarefa? Lembre-se de que esta é a última tarefa a ser realizada, de modo que todos os resultados devem ser reportados em relatórios e descritivos dos três ensaios realizados.

Convidamos você para estudar com muita dedicação o conteúdo desta seção, e resolver as atividades propostas. Bons estudos!

Não pode faltar

Desde o início deste curso viemos estudando os princípios da eletroestática e da eletrodinâmica, e neste processo, pudemos chegar em equações e leis muito importantes para entendimento dos fenômenos eletromagnéticos. Estamos falando das principais leis do eletromagnetismo que já nos foram apresentadas anteriormente no decorrer do nosso estudo. Neste momento, é importante recordar estas leis, pois elas se tratam de um conjunto de equações que irão compor as famosas equações de Maxwell.

Para chegarmos nas equações do eletromagnetismo na forma diferencial, deveremos utilizar não somente os conceitos de rotacional e o teorema de Stokes, que foram vistos na Seção 2.3, mas também as definições matemáticas de gradiente e divergente, e o teorema de Gauss. Vamos então brevemente lembrar destes conceitos antes de seguir adiante:



Lembre-se

O operador diferencial Nabla é definido no plano cartesiano, sendo útil na definição dos conceitos de rotacional (visto na Seção 2.3), gradiente e divergente:

$$\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial()}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial()}{\partial z} \hat{z}$$

O **gradiente** de uma função escalar $f(x,y,z)$ no espaço ³ é definido pela expressão de $\nabla(f)$, sendo este um campo vetorial em função das mesmas variáveis da função f e com as mesmas propriedades.

$$\nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

O **divergente** de uma função vetorial contínua $\vec{v}(x,y,z)$, suave e bijetora com derivada contínua, suave e bijetora no espaço ³, é definido por:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial()}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial()}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial()}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

onde $\nabla \cdot \vec{v}$ é um campo escalar, função das mesmas variáveis da função $\vec{v}(x,y,z)$. Para esse mesmo vetor, o Teorema de Gauss define que:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

De acordo com James Clerk Maxwell (1831-1879), a aplicabilidade das leis do eletromagnetismo deveria ser generalizada, ou seja, as equações poderiam ser aplicadas a quaisquer sistemas físicos eletromagnéticos, tais como, capacitores, resistores, bobinas, etc. Ele também achava que as equações deveriam incluir a representação da propagação dos campos elétrico e magnético. Neste momento, as equações de propagação de perturbações mecânicas em meio material, tais como as equações de ondas de som, já eram conhecidas. Para que fosse possível determinar uma equação para as ondas eletromagnéticas, a investigação de Maxwell sobre as leis fundamentais do eletromagnetismo, principalmente a Lei de Faraday e a correção da equação de continuidade de cargas, tiveram um papel muito importante.

Primeiramente, devemos lembrar da Lei de Gauss, que relaciona o campo elétrico em uma superfície fechada, denominada gaussiana, com o total de cargas envolvidas por esta superfície, de forma que podemos escrever:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Uma vez que a carga total distribuída em um volume V pode ser descrita pela integral da densidade volumétrica de carga neste volume, temos que: $q_{\text{int}} = \int_V \rho dV$, e assim a equação fica:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV.$$

Entretanto, do Teorema de Gauss, tem-se que $\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV$, de forma que pode-se reescrever o lado esquerdo da equação e rearranjar os termos em uma única integral de volume, tal como mostrado a seguir:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV = 0.$$

A equação acima nos permite escrever para um determinado volume definido, contínuo e não nulo, que $(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) \Delta V = 0$. Considerando que as funções envolvidas são definidas, suaves e bijetoras com primeira e segunda derivadas definidas também contínuas, suaves e bijetoras, podemos escrever a Lei de Gauss na forma diferencial igualando o termo $(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0})$ a zero, e logo a equação da Lei de Gauss na forma diferencial é obtida:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Uma lei que decorre da Lei de Gauss é a chamada Lei de Gauss para o magnetismo. Ela determina que a integral de superfície de um campo magnético é igual a zero, o que significa que os campos magnéticos não são gerados por cargas elétricas que formam um monopolo, mas sim por um dipolo magnético:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Analogamente ao que foi feito para a Lei de Gauss na eletrostática, podemos aplicar o Teorema de Gauss, de forma a escrever que

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV \text{ e aplicando na equação teremos que:}$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

Novamente, a equação acima nos permite escrever para um determinado volume definido, contínuo e não nulo, que $(\nabla \cdot \vec{B}) \Delta V = 0$, e considerando que as funções envolvidas são definidas, suaves e bijetoras com primeira e segunda derivadas definidas também contínuas, suaves e bijetoras, podemos escrever a equação da Lei de Gauss para o magnetismo na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Também conhecemos a Lei de Faraday, que nos mostrou como um campo magnético variante no tempo induz um campo elétrico, conforme a equação:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Sabemos que o fluxo de campo magnético é dado pela integral $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$. Sendo o campo magnético variante no tempo, podemos reescrever a Lei de Faraday, tal que:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} dA$$

Usando o teorema de Stokes conforme visto na Seção 3.2, podemos substituir o lado esquerdo da equação, tal que $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA$, e desta forma escrevemos:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} dA$$

Da última equação obtemos a Lei de Faraday na forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

e finalmente, a Lei de Ampère que relaciona a corrente elétrica envolvida em um circuito fechado com o campo magnético gerado por ela:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}.$$

Usando novamente o teorema de Stokes, conforme foi visto na Seção 2.3, e analogamente ao desenvolvimento para obter a Lei de Faraday na forma diferencial, utilizamos a equação da corrente elétrica em termos da integral da densidade de corrente elétrica, sendo $I_{\text{int}} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$, para obter a Lei de Ampère na forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Note que, enquanto as equações da Lei de Gauss para a eletrostática e para o magnetismo se tratam de integrais de superfície, as equações da Lei de Faraday e da Lei de Ampère são integrais de linha em circuitos fechados. Na forma diferencial, as leis de Lei de Gauss se tratam da operação com divergente dos campos elétrico e magnético, enquanto as Leis de Faraday e de Ampère se referem à operação com o rotacional destes campos.

As equações que estudamos até aqui compõem as leis do eletromagnetismo na forma diferencial, as quais podem ser resumidas nas seguintes equações, utilizando a operação de divergente e rotacional dos campos elétrico e magnético:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss da eletrostática})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss do magnetismo})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{Lei de Faraday})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{Lei de Ampère})$$

Apesar de a Lei de Ampère na forma diferencial ter sido escrita com bases matemáticas bem consistentes, é possível verificar que se ela for escrita desta forma, o princípio da conservação de cargas é violado. O princípio de conservação de cargas diz que uma corrente elétrica somente existirá quando houver o deslocamento de cargas de uma região para outra, ou, na forma de equação:

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Note que a equação acima não consiste na definição de corrente elétrica, mas representa a conservação de cargas, pois indica que a corrente elétrica em uma determinada região depende da variação de cargas naquela região, de forma que as cargas são perdidas de uma região para outra, e por isso a variação é negativa. Contudo, podemos escrever:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

e também:

$$\frac{dq}{dt} = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Assim, a equação da conservação de cargas fica:

$$\int_s \vec{J} \cdot \hat{n} dA = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Neste momento, podemos aplicar o teorema de Gauss do lado esquerdo da equação. Como pelo teorema de Gauss teremos que:

$$\int_s \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV, \text{ podemos então concluir que:}$$

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Esta última é a equação de continuidade de corrente. Essa equação é a representação diferencial da lei de conservação de cargas. Contudo, existe uma propriedade matemática que indica que, seja um vetor qualquer arbitrário v , o divergente do rotacional deste vetor será igual a zero, ou seja:

$$\nabla(\nabla \times \vec{v}) = 0.$$

Então, se extrairmos o divergente do rotacional presente na Lei de Ampère, encontraremos a seguinte relação:

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla(\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \nabla \vec{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Da relação obtida, teríamos que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é igual a zero sempre, o que não se sustenta, pois isso significaria dizer que as correntes elétricas não existem em nenhuma situação possível.



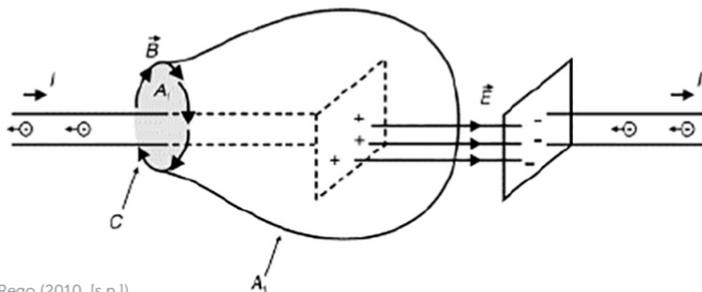
Refleta

Com base no que foi visto até aqui, o problema encontrado por Maxwell que indicaria uma descontinuidade na corrente elétrica está na equação da Lei de Ampère, ou no teorema matemático?

Para ilustrar melhor o que está acontecendo e entender a solução dada por Maxwell a este problema, vamos considerar o

caso de um capacitor de placas planas paralelas conforme mostra a Figura 3.21. Nos condutores conectados a cada uma das placas, existe uma corrente de condução I , e estas correntes geram um campo magnético ao seu redor. Entretanto, no interior das placas não existe movimento de cargas, o que nos levaria a afirmar que a corrente elétrica é igual a zero no interior do capacitor. No entanto, existe comprovação experimental da existência de um campo magnético no interior das placas.

Figura 3.21 | Capacitor de placas planas paralelas – circulação das regiões



Fonte: Rego (2010, [s.p.]).

Se considerarmos em um dado instante a quantidade de cargas que passa pelo condutor em direção às placas do capacitor, podemos escrever com o auxílio da Lei de Gauss, sendo Φ_E o fluxo de campo elétrico pela área A

$$q = \epsilon_0 \Phi_E.$$

Logo, a corrente elétrica de condução será dada por:

$$I = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Como no interior das placas não há movimento de cargas, não há uma corrente de condução. No entanto, Maxwell viu a necessidade de propor um modelo que garantisse a continuidade da corrente elétrica, então propôs a existência entre estas placas de uma corrente de deslocamento, que deveria ser igual à corrente de condução, conforme:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$



Considere um capacitor de placas paralelas preenchido pelo vácuo, cuja área de cada uma das placas é A e a distância entre elas é dada por d . Determine a corrente de deslocamento em termos do potencial elétrico entre as placas.

Resolução:

A corrente de deslocamento é igual a corrente de condução, ou seja:

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Sendo o fluxo de campo elétrico na área da placa do capacitor em um determinado instante dado por: $\Phi_E = AE$, onde E é a magnitude do campo elétrico que é perpendicular à área das placas, então podemos escrever:

$$I_D = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}.$$

Contudo, a magnitude do campo elétrico tem relação direta com o potencial elétrico entre as placas do capacitor e a distância entre elas, sendo:

$$E = \frac{V}{d}.$$

Logo pode-se escrever a corrente de deslocamento como:

$$I_D = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}.$$

Na equação acima tem-se que $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ é a capacitância do capacitor de placas paralelas com área A e distância d , preenchido por vácuo.

Pudemos perceber que a equação de Faraday nos diz que uma variação de campo magnético no tempo irá produzir um campo elétrico. No entanto, na equação de Ampère falta um termo que indique que, mesmo na ausência de corrente elétrica, existe uma fonte de campo magnético de forma a viabilizar a propagação de B e E no espaço. Isso será importante para obter uma equação de propagação de ondas. Dessa forma, Maxwell propôs acrescentar a corrente de deslocamento no equacionamento da lei de Ampère, de forma que:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Ou na forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_D) = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}.$$

Essas novas equações são conhecidas como Lei de Ampère-Maxwell.



Assimile

As **Equações de Maxwell** podem ser resumidas nas seguintes equações:

Na forma diferencial temos:

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Lei de Gauss da eletrostática)}$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$(3) \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \text{ (Lei de Faraday)}$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \text{ (Lei de Ampère-Maxwell)}$$

Na forma integral, temos:

$$(1) \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ (Lei de Gauss da eletrostática)}$$

$$(2) \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \text{ (Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$(3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \text{ (Lei de Faraday)}$$

$$(4) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \text{ (Lei de Ampère-Maxwell)}$$

Note que se o meio é o vácuo, a corrente elétrica de condução é igual a zero, e dessa forma a Lei de Ampère-Maxwell terá apenas um termo do lado direito da equação, correspondente à corrente de deslocamento conforme foi visto.



Exemplificando

Seja um campo elétrico no vácuo que tem os seguintes valores em coordenadas retangulares.

$$E_x = 0 \quad E_y = 10^{-5} \text{sen}(\pi \times 10^7 t) \quad E_z = 0$$

Se o campo magnético somente possui valor diferente de zero ao longo do eixo z, qual o valor do campo magnético?

Resolução:

Podemos aplicar diretamente a lei de Ampère-Maxwell na forma diferencial. Uma vez que o campo elétrico está no vácuo, não existe corrente de condução, logo $\vec{J} = 0$.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Desenvolvendo em coordenadas retangulares teremos:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}$$

Como $B_x = 0$ então $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$, e assim:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 10^{-5} \omega \cos(\omega t)$$

Integrando dois lados é possível obter o campo magnético:

$$\int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = -\int \mu_0 \varepsilon_0 10^{-5} \omega \cos(\omega t) dx \rightarrow B_z = \mu_0 \varepsilon_0 10^{-5} \omega x \cos(\omega t)$$

Substituindo os valores temos:

$$B_z = 4\pi \times 10^{-7} \times 8,85 \times 10^{-12} \varepsilon_0 10^{-5} \pi \times 10^7 x \cos(\pi \times 10^7 t)$$

$$B_z = 3,54\pi^2 \times 10^{-16} x \cos(\pi \times 10^7 t) \quad [T]$$



Pesquise mais

A discussão que tivemos aqui sobre as equações de Maxwell foi breve, no entanto, você pode expandir os seus conhecimentos fazendo uma leitura do capítulo 9 do livro:

HAYT, JR.; WILLIAM, H. **Eletromagnetismo**. ed. 8. Porto Alegre: AMGH, 2014.

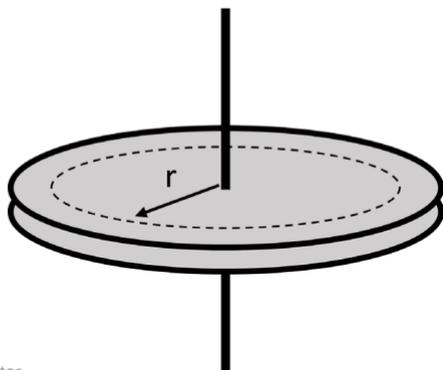
Este livro está disponível gratuitamente na biblioteca virtual, e você pode acessá-lo diretamente através do link a seguir:

<<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580551549/cfi/291!/4/4@0.00:7.11>>. Acesso em: 28 fev. 2018.

Sem medo de errar

Com os conhecimentos adquiridos nesta seção, agora você poderá realizar a tarefa que lhe foi atribuída. Vamos então lembrar qual a sua responsabilidade nesta etapa dos ensaios dos materiais eletromagnéticos: o laboratório recebeu um capacitor de placas planas e paralelas que estão separadas por uma distância d muito menor que o tamanho das placas, cuja área é $1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$. As placas do capacitor estão ligadas a uma fonte de corrente alternada de tal modo a produzirem uma carga Q alternada no tempo, tal que se comporta de acordo com a equação $Q(t) = 6 \text{ sen}(377t) \times 10^{-5}$. Nestas condições, você deve realizar a análise teórica de forma a determinar qual será o campo B que surge entre as placas, devido à variação temporal do campo elétrico. A situação descrita está ilustrada na Figura 3.22.

Figura 3.22 | Capacitor de placas planas circulares usado no ensaio



Fonte: elaborada pelo autor.

O campo elétrico pode ser obtido pela expressão obtida para determinar o campo elétrico do capacitor, que foi vista ainda na primeira unidade. No entanto, deve-se considerar um campo elétrico variante no tempo, utilizando uma densidade de carga que também é variante no tempo $\sigma(t)$, conforme a seguir:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{2\epsilon_0}.$$

Como: $\sigma(t) = \frac{Q(t)}{A}$, então podemos reescrever a equação do campo elétrico:

$$E(t) = \frac{Q(t)}{2A\epsilon_0} = \frac{Q \text{ sen}(\omega t)}{2A\epsilon_0}.$$

Neste caso estamos considerando as variáveis literais, mas é fácil perceber que $Q = 6 \times 10^{-5} \text{ C}$, $\omega = 377 \text{ rad/s}$ e $A = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$.

No interior do capacitor não há corrente de condução, logo a equação da Lei de Ampère-Maxwell pode ser escrita como:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}$$

Contudo, tem-se que o campo elétrico é variante no tempo, portanto é necessário derivar a equação do campo elétrico, de onde obteremos que:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{Q\omega \cos(\omega t)}{2A\varepsilon_0}$$

Substituindo esta derivada na equação anterior, obteremos a expressão para o cálculo do campo magnético no interior das placas em função da distância entre o eixo do capacitor até o ponto onde se deseja obter o campo magnético:

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{Q\omega \cos(\omega t)}{2A\varepsilon_0} = \mu_0 r \frac{Q\omega \cos(\omega t)}{4A}$$

Basta agora substituir os valores dados:

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \text{ r} \frac{6 \times 10^{-5} \times 377 \cos(377t)}{4 \times 10^{-2}} \approx 7,1 \text{ r} \cos(377t) \times 10^{-7} \text{ [T]}$$

Como pode-se notar, o campo magnético entre as placas do capacitor é em função da distância radial do eixo do capacitor até o ponto onde se deseja obter o campo elétrico

Você deve incluir em seu relatório esta equação obtida, com os cálculos utilizados para justificar a aplicação desta equação com fundamento nas Equações de Maxwell. Assim, a tarefa foi cumprida utilizando os conhecimentos adquiridos nesta seção. O relatório contendo os resultados dos três ensaios pode agora ser finalizado.

Avançando na prática

Testes em um laboratório de alta tensão

Descrição da situação-problema

Vamos imaginar o caso em que você trabalhe em um laboratório de testes de alta tensão. Você está estudando o comportamento de um condutor cilíndrico de raio de seção transversal igual a 3 cm, que será utilizado em linhas de alta tensão. No teste que

você está trabalhando, o condutor é cortado e posicionado com as faces de da seção transversal do corte separando as partes do condutor de uma distância de 50 cm. Nos terminais deste condutor é conectada uma fonte de corrente elétrica que varia a sua corrente a uma taxa de 10 A/s. No início do teste o condutor é colocado em uma câmara de vácuo. A corrente se inicia em zero e aumenta com o tempo até que sejam visualizados arcos de corrente na região com a fissura. Foi verificado que os arcos de corrente aparecem em 2,3 minutos depois do início dos testes. Nestas condições você deve determinar o campo magnético na região entre as faces do condutor. No momento em que os arcos começam a aparecer como você realizaria esta tarefa?

Resolução da situação-problema

Inicialmente precisamos definir uma equação que descreva o comportamento do campo magnético no espaço entre os condutores. Neste sentido, considerando que a corrente aumenta a uma taxa de 10 A/s, podemos descrever a seguinte equação temporal que define a corrente elétrica aplicada:

$$I(t) = 10t.$$

A quantidade de carga acumulada nas faces do condutor no ponto da separação, à medida que o tempo passa, é dada por:

$$q = \int I(t)dt = \int kt \cdot dt = \frac{10}{2}t^2 = 5t^2.$$

Assim, podemos inicialmente utilizar a lei de Gauss para determinar a expressão do campo elétrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E\pi r^2 = \frac{5}{\epsilon_0}t^2 \rightarrow E(t) = \frac{5}{\epsilon_0\pi r^2}t^2.$$

Aplicando a Lei de Ampère-Maxwell na forma integral, obtemos a expressão do campo magnético entre as faces. Devemos ter atenção que este campo magnético é variável com o tempo e com a distância radial do centro do condutor \textcircled{R} :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\pi R^2 dE}{dt} \rightarrow B \times 2\pi R = \mu_0\epsilon_0\pi R^2 \frac{5}{\epsilon_0\pi r^2} \frac{d}{dt}t^2 \rightarrow B = \mu_0 R \frac{5}{\pi r^2} t.$$

Sendo o campo magnético no momento do arco, teremos o tempo de $t = 2,3 \times 60 \text{ s} = 138 \text{ s}$, logo:

$$B = 4 \times 10^{-7} R \frac{5}{\pi 0,03^2} 138 = 4 \times 10^{-3} R \frac{5}{\pi 9} 138 = 9,76 R \times 10^{-2} \quad [T].$$

Ou seja, o campo magnético irá variar conforme o raio da seção circular do condutor, de acordo com a equação acima. Aplicando estes cálculos você cumpriu a sua tarefa com êxito.

Faça valer a pena

1. Entre os anos de 1861 e 1862, o matemático escocês James Clerk Maxwell publicou um artigo com o título *On the Physical lines of Force* (Acerca das linhas de força físicas), no qual as equações fundamentais do eletromagnetismo estão presentes em outras representações matemáticas, assim como também a forma matemática da força de Lorentz.

Considere as afirmativas a seguir sobre as equações de Maxwell:

I. A Lei de Ampère-Maxwell difere da lei original de Ampère pela inclusão de um termo referente à corrente de deslocamento, que não havia sido considerado na equação original.

PORQUE

II. Se for calculado o divergente do rotacional presente na Lei de Ampère original, será encontrada uma relação que viola o princípio de conservação de cargas.

- a) I e II são proposições verdadeiras e a II é uma justificativa da I.
- b) I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- c) I é uma proposição verdadeira, mas a II é uma proposição falsa.
- d) II é uma proposição falsa, mas a I é uma proposição verdadeira.
- e) I e II são falsas.

2. Seja um capacitor de placas planas paralelas, cuja capacitância é igual a 1 micro-Farad. Deseja-se obter uma corrente de deslocamento de 1 A no espaço entre as placas. Para isso se faz necessário variar a tensão aplicada nos terminais do capacitor.

A taxa de variação de tensão requerida neste caso será:

- a) 10^5 V/s.
- b) 10^6 V/s.
- c) 10^7 V/s.
- d) 10^8 V/s.
- e) 10^9 V/s.

3. Seja um capacitor de placas circulares na qual o dielétrico considerado é o espaço livre. A área das placas do capacitor é de $0,4 \text{ m}^2$. O capacitor foi conectado a uma fonte de corrente alternada senoidal e foi verificado que a máxima corrente de deslocamento é de $8,85 \times 10^{-5} \text{ A}$.

Nestas condições o campo magnético máximo no interior do capacitor, entre as placas, a uma distância de 0,2 m do centro da placa será de:

- a) $8,85\pi \times 10^{-4}$.
- b) $8,85\pi \times 10^{-6}$.
- c) $8,85\pi \times 10^{-8}$.
- d) $8,85\pi \times 10^{-10}$.
- e) $8,85\pi \times 10^{-12}$.

Referências

REGO, R. A. **Eletrromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física**. ed. 10. Rio de Janeiro: LTC, 2016, v. 3.

HAYT, JR.; WILLIAM, H. **Eletrromagnetismo**. ed. 8. Porto Alegre: AMGH, 2014.

WENTWORTH, S. M. **Eletrromagnetismo aplicado**: abordagem antecipada das linhas de transmissão, Porto Alegre: Bookman, 2008.

Ondas eletromagnéticas

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores, aprofundamos nossos conhecimentos de eletrostática, eletrodinâmica e das relações entre eletricidade e magnetismo, o que resultou nas equações de Maxwell. Na presente unidade, aplicaremos nossos conhecimentos estudando ondas eletromagnéticas.

Você sabia que no nosso dia a dia estamos imersos em ondas eletromagnéticas? O exemplo mais evidente é o Sol, pois o calor e a luz que são importantes para os seres vivos da Terra chegam na forma de ondas eletromagnéticas. Além disso, recebemos também do espaço a radiação de ondas eletromagnéticas provenientes de outros objetos e estrelas que se encontram a grandes distâncias de nós. Aqui na Terra, alguns exemplos mais evidentes de radiação eletromagnética são as provenientes das estações de rádio e de TV e os sinais de telecomunicações (micro-ondas), mas também encontramos essas ondas na luminosidade de lâmpadas, nos corpos aquecidos, etc.

O conhecimento dos fundamentos das ondas eletromagnéticas é essencial para o seu desenvolvimento profissional, e muito importante para o mercado de trabalho na área de tecnologia. Dessa forma, ao final desta unidade você estará apto a fazer a análise das ondas eletromagnéticas, da energia transportada e de sua propagação em meios livres e dispersivos bem como da sua reflexão, difração, transmissão e refração.

Para motivar o estudo desta unidade, vamos imaginar uma agência espacial que possui um departamento de engenharia

de comunicações que está envolvida em um grande projeto. Esse projeto consiste em enviar a Marte uma sonda para comunicação e processamento de dados, de forma que auxilie na pesquisa a respeito do planeta. Além desse equipamento, será colocado em órbita um satélite geossíncrono, que possibilitará uma interface da agência espacial na terra com o equipamento de comunicação localizado em Marte. Um projeto como esse exige a colaboração entre diversos departamentos da agência, assim como entre todos os membros da equipe de projeto. Imagine que você passou por um processo seletivo para trabalhar como integrante desse projeto. Com base nisso, você irá conduzir uma série de tarefas para o sucesso desse projeto, tais como: realizar a escolha do material para uma antena do satélite, depois, realizar alguns estudos referentes à transmissão de potência em uma onda plana uniforme e finalmente irá projetar um filtro para a recepção do sinal na sonda que será enviada ao planeta Marte.

Como seria possível obter uma equação de onda eletromagnética a partir dos conhecimentos que foram adquiridos até aqui? E como extrair informações importantes referentes às ondas eletromagnéticas para compreender a propagação destas?

Para responder à essas e à muitas outras questões, na Seção 4.1 iremos compreender como partir das equações de Maxwell para determinar uma equação de onda e, a partir dela e das características do meio no qual a onda se propaga, determinar a velocidade da luz no vácuo e compreender como as ondas planas uniformes se propagam. Na Seção 4.2, estudaremos mais a fundo a propagação das ondas eletromagnéticas e também aspectos como a transferência de potência da onda e a polarização. Na Seção 4.3, estudaremos os aspectos relativos à propagação e reflexão de ondas em meios, tais como o espaço livre, meios condutores e dielétricos com e sem perdas.

Dedique-se! Bons estudos.

Seção 4.1

Equações de Maxwell e as ondas eletromagnéticas

Diálogo aberto

Caro aluno, estamos chegando na última unidade do curso de Eletromagnetismo, e na primeira seção, iremos estudar as ondas eletromagnéticas a partir das equações de Maxwell. Ondas eletromagnéticas estão presentes a todo momento no seu dia a dia. A luz elétrica é um exemplo mais recorrente da existência de ondas eletromagnéticas em nosso meio, mas elas também estão presentes quando pensamos no funcionamento das telecomunicações. Seja em aparelhos celulares, TVs, rádios ou comunicações por satélite, o funcionamento das tecnologias modernas não seria possível sem a existência das ondas eletromagnéticas. Por isso, o entendimento do conteúdo desta seção é essencial para o domínio das tecnologias atuais.

Para motivar os estudos desta seção, vamos imaginar que você está trabalhando no projeto da agência espacial, a qual está se preparando para o envio de satélite geostacionário. Na primeira etapa desse projeto, será realizado o estudo de um material que será utilizado na fabricação da antena desse satélite. Como esse projeto exige um grande grau de colaboração entre seus participantes, foi necessário conseguir uma lista de materiais possíveis para a construção dessa antena, e isso pode ser obtido com o departamento de materiais da agência. Existem dois materiais que deverão ser testados, conforme a Quadro 4.1:

Quadro 4.1 – Dados dos materiais para a construção da antena

	Condutividade (σ) [S/m]	Permeabilidade relativa (μ_r)	Permissividade relativa (ϵ_r)
Material 1	0,100	1,00	9,00
Material 2	0,050	5,00	7,00

Fonte: elaborado pelo autor.

Para fazer isso, você pode calcular as constantes de propagação, de atenuação, de fase e a impedância intrínseca dos materiais para uma onda de 10GHz. Deve-se escolher o material com menor constante de atenuação para a fabricação da antena. Nesse caso, qual dos dois materiais seria o apropriado?

No decorrer desta seção encontraremos os conceitos teóricos necessários para o cumprimento dessa tarefa. Sendo assim, eu convido você para uma leitura atenta e realização das atividades propostas de forma a assimilar o conhecimento apropriadamente.

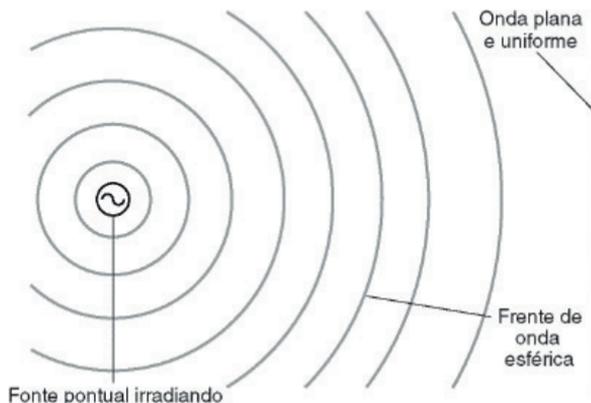
Não pode faltar

Na última unidade, estudamos as indutâncias e as equações de Maxwell, que serão importantes para o que estudaremos nesta unidade. Isso por que a correção da equação de continuidade feita por Maxwell teve um papel muito relevante por demonstrar que os campos elétrico e magnético podem se propagar em meios como o vácuo, em que não existe uma corrente elétrica de condução e, conseqüentemente, $\vec{J} = 0$. Essa propagação se dá na forma das **ondas eletromagnéticas**, objeto de estudo desta unidade.

Para iniciar, vamos fazer uma analogia com o caso de uma onda mecânica se propagando na água, como quando jogamos uma pedra em um rio. Quando a pedra atinge a superfície da água, será possível notar que as ondas se deslocam concêntricamente ao ponto onde a pedra atingiu o rio, sendo esse ponto a fonte da onda mecânica. Da mesma forma, se em algum ponto do espaço existe uma fonte de campo elétrico variante no tempo, um campo magnético é induzido ao redor desse ponto.

Uma vez que o campo magnético induzido também será variante no tempo, conforme vimos pela Lei de Faraday, ocorrerá a indução de um campo elétrico. A troca de energia entre \vec{E} e \vec{B} ocorre enquanto a onda se afasta da fonte com a velocidade da luz. Nas proximidades da fonte, essas ondas irradiam em formato esférico (todas as direções), mas em uma região distante da fonte, a irradiação será observada em um formato plano, conforme mostra a Figura 4.1. Assim, nós visualizaremos uma onda praticamente plana e uniforme, na qual os planos referentes aos campos \vec{E} e \vec{B} são ortogonais com relação à direção da propagação. Assim, podemos tratar as ondas eletromagnéticas nessas regiões em um eixo de coordenadas cartesianas, o que será mais simples do que em coordenadas esféricas.

Figura 4.1 | Propagação da onda desde a fonte até um certo ponto do espaço



Fonte: Wentworth (2006).

Nesta seção, iniciaremos por definir uma equação de onda a partir das equações de Maxwell. Conforme já falamos, as equações de Maxwell são muito importantes na correção da equação de conservação das cargas, mas, além disso, existe uma outra consequência importante que resulta da formulação das equações de Maxwell na forma diferencial. Essa formulação, através da utilização das propriedades do operador ∇ , nos permite escrever equações que desacoplam os campos \vec{E} e \vec{B} . Você se lembra que nas equações de Maxwell na forma diferencial as componentes dos campos sempre aparecem juntas em uma mesma equação? Isso quer dizer que uma componente de um campo relaciona uma componente de outro campo e vice-versa, ou seja, estão acoplados. Vamos relembrar as equações de Maxwell na forma pontual.

Lembre-se

As **Equações de Maxwell** na forma diferencial podem ser resumidas nas seguintes equações:

- (1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Lei de Gauss da eletrostática)
- (2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (Lei de Gauss do magnetismo)
- (3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ (Lei de Faraday)
- (4) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ (Lei de Ampère-Maxwell)

Embora as equações de Maxwell estejam escritas para o espaço livre, podemos considerar um meio simples (lineares, isotrópicos, homogêneos e invariantes no tempo) livre de cargas, ou seja, no qual a densidade de carga seja igual à zero. Isso permite que as equações de Maxwell sejam reescritas considerando-se a permeabilidade e permissividade do meio e substituindo-se o vetor densidade de corrente elétrica pela sua relação da Lei de Ohm pontual ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$). Assim, teremos as seguintes equações:

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ (Lei de Gauss da eletrostática)}$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$(3) \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \text{ (Lei de Faraday)}$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \text{ (Lei de Ampère-Maxwell)}$$

Vamos utilizar essas equações de forma a obter uma equação geral de onda. Iremos iniciar por calcular o rotacional em ambos os lados da equação da Lei de Faraday, ou seja, faremos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

Como do lado direito temos uma derivada espacial, agindo sobre uma derivada temporal em um material homogêneo, iremos reescrever:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{d}{dt} (\nabla \times \vec{B})$$

Substituindo o rotacional do campo magnético pelo indicado na Lei de Ampère-Maxwell, teremos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{d}{dt} \left(\mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = -\mu\sigma \frac{d\vec{E}}{dt} - \mu\varepsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

Para chegar na equação de onda que queremos, precisaremos manipular o lado esquerdo da equação. Isso será possível aplicando a identidade vetorial do rotacional do rotacional de qualquer campo vetorial \vec{A} .



Lembre-se

O rotacional do rotacional de qualquer campo vetorial \vec{A} será dado pelo divergente do campo vetorial menos o seu **Laplaciano**:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

no qual o operador Laplaciano será iguala o divergente do gradiente, ou seja: $\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \vec{A})$.

Aplicando a propriedade, teremos a equação como segue:

$$\nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\sigma \frac{d\vec{E}}{dt} - \mu\epsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

E como o meio que estamos considerando é livre de cargas, então o divergente do campo elétrico é igual a zero, obteremos a equação geral da onda chamada também de **equação de onda de Helmholtz**. De forma análoga, pode-se obter uma equação de onda do campo magnético.



Faça você mesmo

Encontre uma equação de onda para o campo magnético a partir das equações de Maxwell.



Assimile

A **equação de Helmholtz** é utilizada no estudo de fenômenos físicos que envolvem equações diferenciais parciais. Essa equação é utilizada para descrever os fenômenos físicos que são dependentes do tempo. A equação geral da onda é dada por essa equação para o campo elétrico e o campo magnético, conforme a seguir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu\epsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{d\vec{B}}{dt} + \mu\epsilon \frac{d^2\vec{B}}{dt^2}$$

Ao solucionar essas equações diferenciais, obtém-se a equação temporal dos campos que se propagam em uma onda plana uniforme.

Vamos agora aprofundar a análise das equações de Helmholtz para campos harmônicos no tempo. Neste sentido, podemos utilizar a derivada temporal do campo \vec{E} como o número complexo $j\omega\vec{E}$, assim teremos:

$$\nabla^2\vec{E} = j\omega\mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon(j\omega)^2\vec{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

O termo que multiplica o campo elétrico do lado direito da equação é a **constante de propagação da onda** (γ). Entretanto, a raiz quadrada de um número complexo é complexa de forma que a constante de propagação γ pode ser escrita como um número complexo onde a parte real corresponde à **constante de atenuação** (α), dada em Neper por metro, e a parte imaginária corresponde à **constante de fase** (β), dada em radianos por metro. Então, temos

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$



Refleta

Como seria a relação entre as constantes de propagação, atenuação e fase para um meio de propagação correspondente ao vácuo, onde $\sigma = 0$?

Utilizando o operador nabla a equação da onda obtida corresponde à equação de Helmholtz para campos elétricos harmônicos no tempo, conforme segue:

$$\nabla^2\vec{E} = \gamma^2\vec{E}.$$

Analogamente, pode-se escrever uma equação para campos magnéticos harmônicos no tempo, conforme segue:

$$\nabla^2\vec{B} = \gamma^2\vec{B}.$$

Seria interessante obter uma solução geral para uma onda plana uniforme, digamos, que o campo elétrico esteja polarizado em um eixo x e variando em um eixo z de um plano cartesiano. Assim, podemos escrever o campo elétrico dessa onda como sendo:

$$\mathbf{E}(z) = E_x(z)\hat{x}.$$

Considerando que para uma onda uniforme plana o campo não varia na direção transversa, então o campo elétrico sendo somente função de z permite escrever o laplaciano do vetor campo elétrico como uma derivada segunda direta, logo:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} - \gamma^2 E_x(z) = 0$$

o que corresponde a uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, cuja solução possível é dada na forma:

$$E_x(z) = Ae^{\lambda z}$$

Na equação da solução K e λ são constantes arbitrárias. A equação característica da equação diferencial nos mostrará que:

$$(\lambda + \gamma)(\lambda - \gamma) = 0$$

Isso significa que temos uma solução para $\lambda = +\gamma$ e uma solução para $\lambda = -\gamma$. Considerando a para $\lambda = -\gamma$, teremos a solução na forma:

$$E_x(z) = Ae^{-\gamma z} = Ae^{-(\alpha + j\beta)z} = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Nesse caso, A corresponde à amplitude máxima do campo elétrico para quando z está no sentido positivo, para $z = 0$, o que substituímos por E_0^+ , então escrevemos:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

De forma análoga, escolhendo $\lambda = +\gamma$, obteríamos a equação onde E_0^- é a amplitude em $z=0$ para propagação no sentido negativo de z .

$$E_x(z) = E_0^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

A solução geral instantânea será dada então por:

$$E_x(z, t) = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + E_0^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

Usando a Lei de Faraday, podemos obter o campo magnético, sabendo que $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -j\omega\mu\vec{H}$$



Faça você mesmo

Utilizando a Lei de Faraday, obtenha a equação para o campo magnético $H(z,t)$.

Comparando as equações dos campos elétrico e magnético, poderíamos encontrar uma relação entre eles. A essa relação daremos o nome de impedância intrínseca (η) do meio, cuja unidade de medida é a mesma da resistência elétrica, ou seja, Ohms.

$$\eta = \frac{E_o^+}{H_o^+} = -\frac{E_o^-}{H_o^-} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\mu}}$$



Faça você mesmo

Qual seria a impedância intrínseca para o vácuo?



Exemplificando

Seja um material com condutividade igual a 0,100 S/m, permeabilidade relativa igual a 1,00, e permissividade relativa igual a 9,00. Se uma onda se propaga nesse meio com $f = 1,00$ GHz, queremos encontrar as constantes de propagação, atenuação, fase, e impedância intrínseca.

Resolução:

Inicialmente devemos saber calcular a velocidade angular da onda que será dada por $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9$ rad/s. Com base nesse valor encontrado, pode-se determinar as quantidades $j\omega\mu$ e $j\omega\varepsilon$.

$$j\omega\mu = j(2\pi \times 10^9)(1)(4\pi \times 10^{-7}) = j7896$$

$$j\omega\varepsilon = j(2\pi \times 10^9)(9)(8,85 \times 10^{-12}) = j0,5$$

Com esses valores fica mais fácil o cálculo da constante de propagação da onda, que é dada pela seguinte fórmula:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

Observamos que calculando a constante de propagação obteremos também a constante de atenuação e constante de fase da onda. 

Logo, fazemos:

$$\gamma = \sqrt{j7896(0,1 + j0,5)} = 6,25 + j63,1 \text{ m}^{-1}$$

De onde obtem-se as constantes de atenuação e de fase:

$$\alpha = 6,25 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 63,1 \text{ rad/m}$$

Agora, para encontrar a impedância intrínseca utilizamos a equação:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j7896}{0,1 + j0,5}} = 124e^{j12,3^\circ} \Omega$$

Vamos considerar um caso específico das ondas eletromagnéticas no vácuo, em que $\sigma = 0$. Nesse caso, a equação de Helmholtz para o campo elétrico ficaria simplesmente conforme mostrado na equação a seguir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

Analogamente ao que foi visto anteriormente, quando consideramos uma onda uniforme plana em que o campo não varia na direção transversa, então o campo elétrico sendo somente função de z permite escrever o laplaciano do vetor campo elétrico como uma derivada de segunda ordem:

$$\frac{d^2 \vec{E}_x}{dz^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}_x}{dt^2}$$

A equação obtida caracteriza uma onda no vácuo que tem a equação característica:

$$E_x(z, t) = E_0 \text{sen}(kz - \omega t)$$

Nessa equação, o coeficiente k corresponde ao número de onda, que se relaciona com o comprimento de onda na forma:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e ω é a frequência angular da onda. Entretanto, note que:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{T} = kv$$

onde v é a velocidade de propagação da onda.

Derivando a função correspondente ao campo elétrico dessa onda com relação às variáveis z e t , poderemos obter as derivadas parciais de segunda ordem presentes na equação diferencial que descreve a onda no vácuo. Assim temos:

$$\frac{d^2 \vec{E}_x}{dz^2} = -E_0 k^2 \text{sen}(kz - \omega t)$$

e ainda:

$$\frac{d^2 \vec{E}_x}{dt^2} = \omega^2 E_0 \text{sen}(kz - \omega t) = k^2 v^2 E_0 \text{sen}(kz - \omega t)$$

Comparando essas equações, obteremos a velocidade de propagação das ondas magnéticas no vácuo, também denominada de velocidade da luz no vácuo:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$



Exemplificando

Sendo que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ e $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, determine a velocidade de propagação da luz no vácuo.

Resolução:

A solução é uma aplicação direta da equação apresentada:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 8,85 \times 10^{-12}}} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Curiosidade: a velocidade de propagação do campo elétrico no vácuo é representada pela letra c devido à inicial da palavra latina *celer*, que significa "rápido".



Conforme vimos, as ondas eletromagnéticas são ondas transversais, onde os campos elétrico e magnético se propagam com oscilação perpendicular ao sentido de propagação. Assim, existe uma relação entre os campos que estão em fase. A principal diferença entre as ondas eletromagnéticas se refere ao comprimento de onda. Se a onda tem apenas um comprimento de onda, esta é um feixe, mas se ela apresenta diferentes comprimentos de onda, são pulsos. As diferentes ondas, por exemplo as ondas de rádio, TV, etc., ocupam certo espaço no **espectro de frequências** de ondas eletromagnéticas. Mais sobre esse assunto pode ser pesquisado na seção 30-4 Radiação magnética, do livro a seguir:

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**: Eletricidade e Magnetismo, Ótica, 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. V. 2.

Também é possível acessar diretamente no link a seguir, na sua biblioteca virtual: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2622-0/cfi/364!/4/4@0.00:31.7>>. Acesso em: 9 dez. 2017.

Sem medo de errar

Com os conhecimentos que você adquiriu até agora, já será possível cumprir uma das tarefas que foi delegada a você pelo seu gestor. Nesta etapa, você deverá realizar um estudo minucioso dos materiais que poderão ser utilizados na fabricação da antena do satélite que permitirá a comunicação da sonda espacial em Marte com a agência espacial na Terra. Dessa forma, existem dois materiais que deverão ser testados, conforme indicado a seguir:

- Material 1: possui uma condutividade de 0,100 S/m, uma permeabilidade relativa igual a 1 e uma permissividade relativa igual a 9,0.
- Material 2: possui uma condutividade de 0,050 S/m, uma permeabilidade relativa igual a 5,0 e uma permissividade relativa igual a 7,0.

Você deve escolher o material utilizado para construção da antena com base nos parâmetros da constante de propagação das ondas para uma onda de 10GHz. Nesse caso, é possível que você utilize os

conhecimentos obtidos quando obtemos a equação de Helmholtz de uma onda eletromagnética. Com base nessa equação, foi possível determinar fórmulas para o cálculo da constante de propagação da onda, que nos dará também as constantes de atenuação e de fase. Ainda, foi possível obter uma fórmula para calcular a impedância intrínseca do meio de propagação.

Vamos iniciar por utilizar a frequência da onda para calcular a velocidade angular de propagação, como a seguir:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^{10} \text{ rad/s}$$

Com base neste valor encontrado, determina-se $j\omega\mu$ e $j\omega\varepsilon$ para o material 1:

$$j\omega\mu = j(2\pi \times 10^{10})(1)(4\pi \times 10^{-7}) = j78960$$

$$j\omega\varepsilon = j(2\pi \times 10^{10})(9)(8,85 \times 10^{-12}) = j5$$

A constante de propagação da onda que é dada pela seguinte fórmula:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

$$\gamma = \sqrt{j78960(0,1 + j5)} = \sqrt{j7896 - 394800} = 6,28 + j628,36 \text{ m}^{-1}$$

De onde obtem-se as constantes de atenuação e de fase:

$$\alpha = 6,28 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 628,36 \text{ rad/m}$$

Agora, para encontrar a impedância intrínseca, utilizamos a equação:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j78960}{0,01 + j5}} = 125,66e^{j0,05^\circ} \Omega$$

Para o Material 2, fazemos:

$$j\omega\mu = j(2\pi \times 10^{10})(5)(4\pi \times 10^{-7}) = j394784,2$$

$$j\omega\varepsilon = j(2\pi \times 10^{10})(7)(8,85 \times 10^{-12}) = j3,89$$

A constante de propagação da onda que é dada pela seguinte fórmula:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$$

$$\gamma = \sqrt{j394784,2(0,05 + j3,39)} = 7,96 + j1239,26 \text{ m}^{-1}$$

De onde obtem-se as constantes de atenuação e de fase:

$$\alpha = 7,96 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 1239,26 \text{ rad/m}$$

Novamente encontraremos a impedância intrínseca, utilizamos a equação com os valores obtidos para o material 2:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j394784,2}{0,05 + j3,89}} = 318,56e^{j0,36^\circ} \Omega$$

Assim, conforme os dados obtidos, o material 1 é o que apresenta menor constante de atenuação, sendo esse o melhor candidato para a escolha segundo os critérios determinados. Uma vez que esses cálculos forem apresentados em seu relatório, sua tarefa estará concluída com êxito.

Avançando na prática

Obtenção das equações de campo para uma onda eletromagnética

Descrição da situação-problema

Imagine que você foi contratado por uma empresa de telecomunicações que está estudando o comportamento de uma onda eletromagnética. Nesse estudo, é definido um eixo cartesiano e a onda se propaga no vácuo na direção negativa do eixo y . O campo magnético H tem uma constante de fase 30 rad/s e apresenta uma intensidade máxima de $\frac{1}{3\pi} \text{ A/m}$. O sentido no eixo y negativo do campo é observado para o tempo inicial do experimento e para a origem do plano cartesiano. Imagine que você faz parte da equipe que está realizando esse estudo. Sua tarefa será utilizar os dados do experimento que foi conduzido para obter uma equação para ambos

os campos elétrico e magnético e, além disso, obter a frequência e o comprimento de onda do sinal. Como você procederia para obter essas informações da onda eletromagnética em estudo?

Resolução da situação-problema

Se o meio tivesse alguma condutividade, a impedância intrínseca, que relaciona os campos elétrico e magnético, seria um número complexo. No entanto, estamos lidando com o vácuo onde a condutividade é nula e, dessa forma, a impedância intrínseca será um número real puro, pois:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{0 + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Omega$$

Utilizando a função cosseno, podemos escrever a equação do campo magnético H na direção negativa do eixo y , como indicado a seguir:

$$H(\mathbf{z}, t) = -\frac{1}{3\pi} \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

No vácuo, a impedância intrínseca será:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

Então podemos obter a equação do campo magnético sabendo que:

$$\eta_0 = -\frac{E_0^-}{H_0^-} \rightarrow E_0^- = -\eta_0 H_0^- = 120\pi \times \frac{1}{3\pi} = 40$$

Logo teremos:

$$E(\mathbf{z}, t) = 40 \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$$

Para obter os parâmetros ω e β , basta aplicar diretamente as relações. Já se sabe que $\beta = 30 \text{ rad/s}$ e que esta é também o número de onda da equação, então:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{30} m$$

Podemos então obter a frequência:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\pi / 30} = \frac{45}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 90 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

E as equações de H e B serão:

$$E(\mathbf{z}, t) = 40 \cos(90 \times 10^8 t - 30z) \hat{x}$$

$$H(\mathbf{z}, t) = -\frac{1}{3\pi} \cos(90 \times 10^8 t - 30z) \hat{y}$$

Assim, você pôde obter uma equação para os campos elétrico e magnético, e também foi possível obter a frequência e o comprimento de onda do sinal, finalizando sua tarefa com êxito.

Faça valer a pena

1. Considere as seguintes assertivas acerca da obtenção da equação de onda por meio das equações de Maxwell:

I – A correção na equação da Lei de Ampère por meio da continuidade da corrente feita por Maxwell permite comprovar que existe propagação de campo elétrico e magnético no espaço livre.

PORQUE

II – Os campos elétricos e magnéticos se propagam em mesma direção e sentido em uma onda plana uniforme.

Considerando as assertivas I e II, pode-se afirmar que:

- as assertivas I e II estão corretas e a II é uma justificativa da I.
- as assertivas I e II estão corretas e a I é uma justificativa da II.
- apenas a assertiva I está correta.
- apenas a assertiva II está correta.
- nenhuma das assertivas está correta.

2. Em geral, uma onda eletromagnética plana e uniforme possui um número de onda que é uma grandeza física inversamente proporcional ao comprimento de onda. Considere uma emissora de rádio que transmite com uma frequência de 100MHz.

O valor aproximado do comprimento de onda será de:

- a) 1 m.
- b) 2 m.
- c) 3 m.
- d) 4 m.
- e) 5 m.

3. No espaço livre se propaga um vetor de intensidade de campo elétrico que é polarizado na direção do eixo y positivo, conforme mostra a função vetor de campo elétrico a seguir:

$$E(z,t) = 10^2 \text{sen}(2\pi \times 10^7 t - 4z) \hat{y}$$

Com base nessa equação, é possível utilizar as equações de Maxwell para determinar o vetor $H(z,t)$. Esse vetor terá uma magnitude máxima de _____ e será na direção do eixo _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente a última frase do texto.

- a) $6,37 \times 10^{-5}, x$.
- b) $6,37 \times 10^{-4}, y$.
- c) $6,37 \times 10^{-6}, z$.
- d) $6,37 \times 10^{-6}, x$.
- e) $6,37 \times 10^{-7}, y$.

Seção 4.2

Propagação de ondas eletromagnéticas

Diálogo aberto

Caro aluno, na última seção iniciamos o estudo das ondas eletromagnéticas. Esse assunto é de extrema importância para a área de tecnologia, principalmente nas aplicações da área de Telecomunicações, como em sistemas de rádio e televisão, redes de celulares, comunicações de satélite, internet. Já aprendemos como obter uma equação de onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell e já analisamos a solução da equação de onda em meios com perda e no espaço livre, que corresponde a um meio sem perdas. Nessa ocasião, determinamos o valor da velocidade da luz, que corresponde à velocidade de propagação das ondas magnéticas.

Nesta seção, continuaremos a estudar a propagação das ondas eletromagnéticas, tanto no espaço livre como em outros tipos de meios. Dessa forma, para motivar os estudos desta seção, vamos continuar imaginando a situação em que você faz parte de uma equipe de projetos em uma agência espacial. Na sua última tarefa você contribuiu para uma tomada de decisão a respeito do material utilizado na fabricação de uma antena. Imagine que essa antena foi projetada e agora será necessário que ela passe por alguns testes. Assim, foram realizados alguns testes com a antena escolhida com aparelhos de medição localizados na saída dela. Nesse teste, o campo elétrico emitido tem a seguinte forma senoidal:

$$E(t) = 10\cos(2\pi \times 10^7 t) \text{ V/m}$$

Quando esse sinal for recebido pela sonda espacial ao redor de Marte, deve-se verificar o que ocorre com ele ao incidir sobre uma placa de cobre que está montada sobre a sonda espacial. Dessa forma, para a correta caracterização desse comportamento, sua tarefa agora será obter a equação do campo elétrico incidente na placa, a equação do campo magnético incidente e a potência média da onda incidente. Ainda, você deve verificar o que ocorre com essa onda quando ela atinge a superfície da placa de forma a

apresentar um relatório detalhado com os resultados do seu estudo. Como você realizaria essa tarefa?

Para que você consiga completar essa etapa do seu trabalho, analisaremos, além da propagação da onda no espaço livre e em outros meios, a transferência de potência de uma onda eletromagnética a partir da aplicação do Teorema de Poynting. Também estudaremos a polarização das ondas eletromagnéticas.

Você deve passar com muita atenção pelo estudo desses tópicos, realizando as atividades propostas e elencando os conhecimentos necessários para o desempenho da sua tarefa através das leituras complementares recomendadas. Bons estudos!

Não pode faltar

Vamos continuar analisando a propagação das ondas eletromagnéticas no espaço livre, de forma a obter os coeficientes de propagação, atenuação e fase de um campo harmônico. Vamos lembrar que o espaço livre é um meio sem perdas, livre de cargas, o que significa dizer que a condutividade é nula ($\sigma = \mathbf{0}$). Sendo assim, podemos calcular o coeficiente de propagação da forma:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\mathbf{0} + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j^2\omega^2\mu\epsilon} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \alpha + j\beta$$

Da equação apresentada, podemos obter informações importantes a respeito das constantes de atenuação e fase. A primeira delas é que a constante de atenuação é igual a zero ($\alpha = \mathbf{0}$). De fato, se estamos falando de um meio livre de perdas, então em nenhum ponto desse meio irá ocorrer a atenuação da onda, e era esperado então que a constante de atenuação refletisse esse comportamento. A segunda informação é relacionada à constante de fase que corresponde a $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Lembrando ainda que no espaço livre $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ e $c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$, onde k corresponde ao número de onda, podemos concluir que o número de onda e a constante de fase de uma onda são equivalentes.

Na seção anterior, concluímos que a velocidade da onda no vácuo é a velocidade da luz c . Entretanto, se considerarmos um meio dielétrico sem perdas, podemos também escrever a velocidade de propagação da onda no meio dielétrico sem perdas, considerando

a permissividade relativa desse meio (ϵ_r), conforme segue:

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

E da mesma forma que foi visto na seção anterior para o espaço livre, a impedância intrínseca para o meio sem perdas será dada por:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{0 + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\eta_0$$

onde μ_r é a permeabilidade relativa do meio dielétrico sem perdas e η_0 é a impedância intrínseca do espaço livre, que calculamos na seção anterior ($\eta_0 = 120\pi \Omega$).

Esses parâmetros são importantes para se determinar as equações dos campos elétrico e magnético que se propagam ortogonalmente. Além disso, é importante compreender que a ortogonalidade significa que, se a direção de uma onda eletromagnética for definida por um versor $\hat{\rho}$, então a relação entre os campos propagantes será dada pelo produto vetorial com esse versor.



Assimile

A relação entre os campos \vec{E} e \vec{H} de uma onda eletromagnética que se propaga na direção dada por um versor $\hat{\rho}$, é dada pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\eta\hat{\rho} \times \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\eta}\hat{\rho} \times \vec{E}\end{aligned}$$

Dessa forma, se considerarmos, por exemplo, uma onda eletromagnética polarizada no eixo x e se propagando na direção do eixo z, no caso de um meio dielétrico sem perdas teremos as seguintes equações para o campo elétrico e o campo magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = \left(\mathbf{E}_0^+ \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{E}_0^- (\omega t + \beta z) \right) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}, t) = \left(\frac{\mathbf{E}_0^+}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) + \frac{\mathbf{E}_0^-}{\eta} (\omega t + \beta z) \right) \hat{\mathbf{y}}$$



Qual é a direção do campo elétrico de uma onda propagante na direção do eixo x , em que o campo magnético está polarizado no eixo z ?



Seja um campo elétrico de uma onda definido pela equação $\mathbf{E}(z,t) = 5e^{-7z} \cos(2\pi \times 10^9 - 50z) \hat{x}$. Sabendo que a onda se propaga em um material de impedância intrínseca igual à $125e^{j8^\circ} \Omega$, determine a equação do campo magnético.

Resolução:

Para calcular a equação da onda do campo magnético, devemos aplicar:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}$$

Assim, teremos que:

$$H(z,t) = \left(\frac{1}{\eta} \hat{z} \times 5e^{-7z} e^{-50z} \hat{x} \right) = \left(\frac{1}{125e^{j8^\circ}} \hat{z} \times 5e^{-7z} e^{-50z} \hat{x} \right)$$

$$H(z,t) = \left(\frac{5}{125} e^{-j8^\circ} e^{-7z} e^{-50z} \right) \hat{y} = 0,04e^{-j8^\circ} e^{-7z} e^{-50z} \hat{y} \text{ A/m}$$

Apesar de até aqui termos considerado um meio dielétrico sem perdas, devido à condutividade finita ocorrerão perdas joule. Isso por que o campo elétrico irá gerar corrente de condução no material dielétrico ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), de forma que as perdas joule causam atenuação da onda. Além disso, podem também existir perdas de polarização devido à energia que é precisa para que o campo gire os dipolos relutantes, sendo essa perda proporcional à frequência. A representação dessas perdas por polarização pode ser feita por meio da adição de uma componente complexa à permissividade do meio dielétrico, conforme segue:

$$\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$$

As componentes de ϵ são a parte real da permissividade definida por $\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon_r$, a parte imaginária que corresponde às perdas de

polarização ($j\varepsilon''$). Assim, reescrevendo a Lei de Ampère na forma pontual considerando essa permissividade, teremos:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\vec{E}$$

Rearranjando os termos da equação, teremos:

$$\nabla \times \vec{H} = [(\sigma + \omega\varepsilon'') + j\omega\varepsilon']\vec{E}$$

Podemos concluir que é possível definir uma condutividade efetiva que pode ser dada por $\sigma_{ef} = \sigma + \omega\varepsilon''$. Substituindo essa condutividade nas equações para determinação da constante de propagação e da impedância intrínseca, teremos valores complexos, resultando em uma constante de atenuação diferente de zero e uma diferença de fase entre os campos E e H, sendo o contrário do obtido para o meio dielétrico sem perdas.

Então, se o meio for considerado com perdas, a constante de atenuação e a constante de fase podem ser bem definidas pelos parâmetros de condutividade, permissividade e permeabilidade do material, conforme as equações a seguir:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right)}$$

Os materiais com perdas que possuem permissividade complexa podem utilizar dessas mesmas equações, substituindo σ por σ_{ef} .



Pesquise mais

Em meios dielétricos com pequenas perdas, as equações da constante de atenuação (α) e constante de fase (β) podem ser aproximadas por:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

Nesses casos, resulta em uma baixa tangente de perdas (dada pela relação $\sigma/\omega\varepsilon$). Os conceitos por trás dessa aproximação e a definição

da tangente de perdas pode ser estudada na Seção 5.3 do livro:

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Você pode encontrar esse livro na biblioteca virtual, podendo ser acessada diretamente pelo link a seguir: <[https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2670-1/epubcfi/6/34\[vnd.vst.idref=chapter5\]!/4/266/4/2/2@0:0](https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2670-1/epubcfi/6/34[vnd.vst.idref=chapter5]!/4/266/4/2/2@0:0)>. Acesso em: 17 dez. 2017.

Os meios condutores são meios materiais que possuem uma tangente de perda muito maior do que um ($\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$) para uma determinada frequência. Assumindo isso para o cálculo das constantes de atenuação e constante de fase, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \pm 1 \right) \approx \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Com essa aproximação é possível obter uma expressão aproximada para o cálculo das constantes α e β em meios condutores, conforme segue:

$$\alpha = \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

Também a equação para a impedância intrínseca pode ser aproximada, conforme segue:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega\mu}{\omega\epsilon}}{\frac{\sigma}{\omega\epsilon} + j1}} \approx \sqrt{\frac{j\mu}{\frac{\epsilon}{\sigma}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

Como assumir uma tangente de perdas muito maior do que 1 significa que $\sigma \gg \omega\epsilon$, então pode-se escrever, considerando

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}e^{j45^\circ}$$



Faça você mesmo

Com algumas manipulações da equação obtida para cálculo da impedância intrínseca em meios condutores, mostre que ela pode ser escrita como:

$$\eta = \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} e^{j45^\circ}$$

As equações da impedância intrínseca para meios condutores nos mostra que, para um bom condutor, o campo magnético estará atrasado de 45° do campo elétrico. Ocorrerá ainda um decrescimento da velocidade de propagação que pode ser verificado utilizando-se constante de fase com alta tangente de perdas no cálculo desta, conforme mostrado a seguir:

$$\nu = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

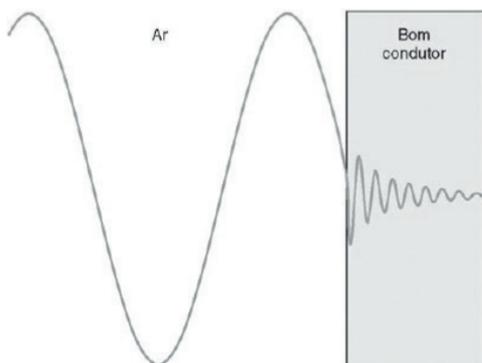
Uma breve análise da grandeza dos parâmetros envolvidos na equação anterior para bons condutores, nos mostra que $\frac{\sigma}{2\omega} > \epsilon$.

O alto valor da condutividade resulta em uma atenuação significativa (alto α) e redução da velocidade de propagação da onda, conforme vimos. Além disso, o valor do comprimento de onda também será menor quando comparado a um meio sem perdas pois, partindo da equação do comprimento de onda, temos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{2\pi}{1} \sqrt{\frac{2}{2\pi f \mu\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f \mu\sigma}}$$

Na Figura 4.2, uma onda que se propaga no espaço livre atinge a superfície de um bom condutor. Nessa figura podemos perceber a atenuação do sinal, além da diminuição do comprimento de onda.

Figura 4.2 | Efeito da propagação de uma onda eletromagnética em um bom condutor



Fonte: Wentworth (2006).



Pesquise mais

É possível encontrar uma equação para a resistência elétrica em condutores em altas frequências, quando a corrente é confinada na superfície externa desse. Os conceitos por trás dessa dedução podem ser estudados na Seção 5.4 do livro:

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Você pode encontrar esse livro na biblioteca virtual, podendo ser acessada diretamente pelo link a seguir: <[https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2670-1/epubcfi/6/34\[;vnd.vst.idref=chapter5\]!/4/372/4/2/2@a0:0](https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2670-1/epubcfi/6/34[;vnd.vst.idref=chapter5]!/4/372/4/2/2@a0:0)>. Acesso em: 17 dez. 2017.

Em 1884, um físico inglês chamado John H. Poynting estudou as equações de Maxwell e obteve um teorema importante para se encontrar uma equação para o fluxo de potência associado a uma onda eletromagnética. Esse teorema ganhou o nome de seu inventor, ou seja, é o Teorema de Poynting.

O desenvolvimento desse teorema parte da equação da Lei Ampere-Maxwell que já nos foi apresentada, aplicando as identidades vetoriais e matemáticas de forma a obter a seguinte expressão, denominada Teorema de Poynting:

$$-\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 dV$$

À direita, tem-se, na ordem das integrais apresentadas, uma potência ôhmica total instantânea dissipada no volume, a energia total armazenada no campo elétrico e a energia total armazenada no campo magnético. Pode-se observar que os resultados expressam as taxas temporais, dado que temos derivadas em função do tempo. Essas taxas temporais expressam um aumento da energia armazenada. Conclui-se que, ao lado direito da equação, a soma das componentes das integrais é a potência total fluindo no volume considerado. Como consequência, a potência que flui para fora desse volume, seguindo o princípio da conservação de energia, será dada pela integral do lado esquerdo da equação, ou seja:

$$\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

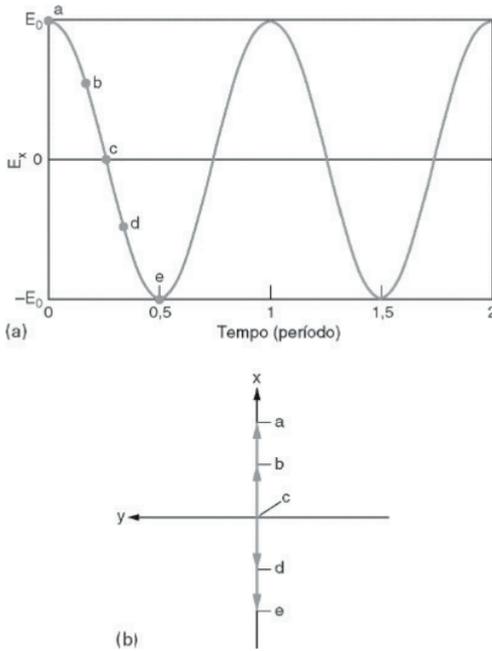
Nessa integral, o produto vetorial apresentado é conhecido como vetor de Poynting, que é definido como uma densidade de potência medida em Watts por metro quadrado. Nota-se que a direção do vetor de Poynting, dado pelo produto vetorial, indica a direção do fluxo de potência instantâneo em determinado ponto, e é perpendicular à direção de ambos os vetores de campo elétrico e magnético, ou seja, aponta para a direção de propagação da onda plana uniforme.

Com algumas deduções de cálculos, pode-se verificar que a potência média temporal da onda plana uniforme é definida pela equação a seguir, em que \Re significa a parte real do produto vetorial.

$$P_{med} = \frac{1}{2} \Re [\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

Perceba que, até aqui, estamos tratando as ondas que são linearmente polarizadas em algum dos eixos do plano cartesiano. Como exemplo, a Figura 4.3 (a) apresenta um gráfico de uma onda polarizada no eixo x, e, conforme pode ser verificado, a intensidade do campo elétrico no eixo x varia conforme o tempo. A Figura 4.3 (b) mostra o vetor do campo em cada um dos instantes marcados na Figura 4.3 (a), em que se verifica que a direção do vetor é fixa no eixo x.

Figura 4.3 | Onda polarizada linearmente no eixo x: (a) comportamento da intensidade do vetor campo elétrico no tempo; (b) direção do vetor campo elétrico nos instantes a, b, c e d



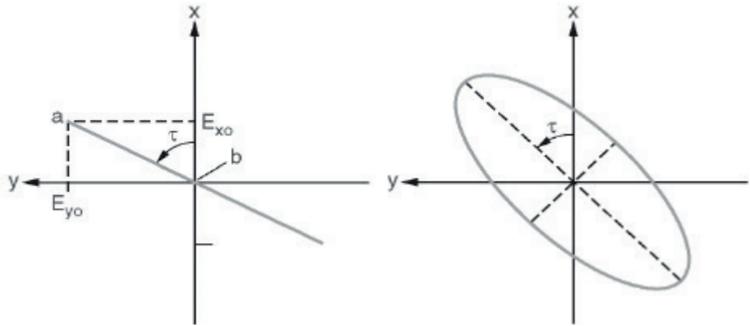
Fonte: Wentworth (2006).

Se considerarmos duas ondas polarizadas, cada uma em um eixo diferente, por exemplo nos eixos x e y, podemos escrever a superposição dos campos como indicado a seguir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{\mathbf{x}} + E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) \hat{\mathbf{y}}$$

Com base nessa equação, pode-se verificar que, para $z = 0$ e considerando as ondas em fase ($\phi_x - \phi_y = 0$) ou fora de fase de 180 graus ($\phi_x - \phi_y = \pm 180^\circ$), então a intensidade de E irá variar sobre a reta mostrada na Figura 4.4 (a), sendo esta também uma polarização linear, onde o ângulo de inclinação τ é definido pelas intensidades máximas dos campos E_{x0} e E_{y0} . Contudo, para uma diferença de fase, quando fixamos $\phi_x = 0$ e atribuímos outros valores para ϕ_y , a polarização será de outra forma. Como exemplo, temos uma onda elipticamente polarizada quando $\phi_y = 45^\circ$, assim como mostrado na Figura 4.4 (b).

Figura 4.4 | Duas ondas polarizadas linearmente (a) e elipticamente (b)



Fonte: Wentworth (2006).



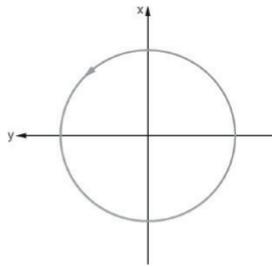
Exemplificando

Qual a polarização de duas ondas quando $E_{x0} = E_{y0}$ e $\phi_x - \phi_y = \pm 90^\circ$?

Resolução:

Nesse caso, teremos uma polarização circular, e essa polarização será caracterizada pelo gráfico a seguir:

Figura 4.5 | Polarização circular



Fonte: WENTWORTH (2006).



Pesquise mais

O sentido de rotação da polarização de uma onda é descrito como sendo no sentido da mão direita (RHCP) ou no sentido da mão esquerda (LHCP). Como determinar esse sentido está detalhado na Seção 5.6 do livro:

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Sem medo de errar

Vamos continuar imaginando a situação em que você faz parte de uma equipe de projetos em uma agência espacial. Com os conhecimentos adquiridos nesta seção, você está apto a desempenhar as tarefas que lhe foram delegadas nessa agência. Você precisa realizar alguns testes com a antena que foi projetada, sendo que com aparelhos de medição localizados na saída da antena foi identificado que o campo elétrico emitido tem a seguinte forma senoidal:

$$E(t) = 10 \cos(2\pi \times 10^7 t) \text{ V/m}$$

Quando esse sinal for recebido pela sonda espacial na órbita de Marte, deve-se verificar o que ocorre com o sinal ao incidir sobre uma placa de cobre que está montada sobre a sonda espacial. Dessa forma, para a correta caracterização desse comportamento, sua tarefa agora será obter a equação do campo elétrico incidente na placa, a equação do campo magnético incidente e a potência média da onda incidente.

Primeiramente, devemos perceber que a equação temporal do campo elétrico apresentado corresponde à onda medida na antena. Essa onda é a onda que irá se propagar no espaço livre até chegar na sonda espacial localizada em Marte. Podemos considerar então que, ao incidir sobre a superfície da placa de cobre, a onda sofrerá uma atenuação. A equação temporal para um campo elétrico que atinge um meio condutor pode ser escrita da seguinte forma:

$$E(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \hat{x}$$

Se considerarmos $t = 0$ como o momento que a onda incide na placa e $z = 0$ como o plano da placa (considerando incidência normal à placa), então a equação apresentada se reduz a:

$$E(0,0) = E_0 \cos(\omega t + \phi) \hat{x}$$

Essa equação corresponde à equação apresentada, com $E_0 = 10$, $\omega = 2\pi \times 10^7$, e $\phi = 0$. A equação temporal da onda

incidente na placa será:

$$E(0,t) = 10e^{-\alpha t} \cos(2\pi \times 10^7 t) \hat{x}$$

Consequentemente, a onda propagada no cobre será:

$$E(z,t) = 10e^{-\alpha t} \cos(2\pi \times 10^7 t - \beta z) \hat{x}$$

Como o cobre é um bom condutor, podemos obter a constante de atenuação e a constante de fase para definir completamente a expressão do campo elétrico, uma vez que de $\omega = 2\pi \times 10^7$ sabemos que a frequência da onda é 10^7 Hz e, assim, para o cobre teremos os coeficientes:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5,8 \times 10^7} = 47,8 \times 10^3$$

E então podemos escrever:

$$E(z,t) = 10e^{-47,8 \times 10^3 t} \cos(2\pi \times 10^7 t - 47,8 \times 10^3 z) \hat{x} = 10e^{-47,8 \times 10^3 t} e^{-47,8 \times 10^3 z} \hat{x}$$

Para o campo magnético, basta aplicar a equação dos campos propagantes:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E} \rightarrow H(z,t) = \frac{10}{\eta} e^{-47,8 \times 10^3 t} \cos(2\pi \times 10^7 t - 47,8 \times 10^3 z) \hat{y}$$

A impedância intrínseca do cobre pode ser calculada como:

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j45^\circ} = 1,17 \times 10^{-3} e^{j45^\circ} \Omega$$

E assim temos definida a equação do campo magnético:

$$H(z,t) = 8,54 \times 10^{-3} e^{-47,8 \times 10^3 t} e^{-j45^\circ} \cos(2\pi \times 10^7 t - 47,8 \times 10^3 z) \hat{y} \quad [A/m]$$

$$H(z,t) = 8,54 \times 10^{-3} e^{-47,8 \times 10^3 z} e^{-47,8 \times 10^3 t} e^{-j45^\circ} \hat{y} \quad [A/m]$$

Para o campo incidente teremos:

$$H(0,t) = 8,54 \times 10^{-3} e^{-47,8 \times 10^3 t} e^{-j45^\circ} \hat{y} \quad [A/m]$$

A potência média pode ser calculada conforme a equação a seguir:

$$P_{med} = \frac{1}{2} \Re[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

Utilizando os valores literais para as equações, podemos deduzir a expressão para a potência média da onda plana:

$$P_{med} = \frac{1}{2} \Re \left[E_0 e^{-\alpha t} e^{-\beta z} e^{-j\phi} \hat{x} \times \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha t} e^{\beta z} e^{-j\phi} e^{j\theta_\eta} \hat{y} \right] = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta) \hat{z}$$

Substituindo os valores, a potência média da onda será

$$P_{med} = \frac{10^2}{2|1,17 \times 10^{-3}|} e^{-2 \times 47,8z} \cos(45^\circ) \hat{z} = 30218 e^{-96z} \hat{z} \text{ W / m}^2$$

Ainda, você deve verificar o que ocorre com essa onda quando ela atinge a superfície da placa de forma a apresentar um relatório detalhado com os resultados do seu estudo. Na superfície da placa de cobre, quando $z = 0$, a densidade de potência é **30218 W/m²**. Mas, após uma certa profundidade de penetração da ordem de micrometros, a densidade de potência da onda cai para abaixo de 15% do seu valor na superfície. Sendo assim, o cobre atenua significativamente essa onda.

Esses resultados devem ser detalhados no seu relatório, inclusive mostrando os cálculos e as conclusões a que você chegou, de forma a concluir o seu trabalho com êxito.

Avançando na prática

Propagação de ondas nas águas do mar

Descrição da situação-problema

A marinha brasileira está trabalhando em um projeto de transmissão de informações para submarinos que estarão em missão submersos. Essa transmissão de informação deve ser feita por meio de ondas eletromagnéticas de frequências mais altas do que as ELF (da ordem de 10Hz, utilizada na comunicação de submarinos). Idealmente, na água, uma onda magnética se propagando sofre poucas perdas. Na água do mar, entretanto, a presença de cloreto de sódio estabelece uma característica condutiva à água, ou seja, esta possui alguma condutividade. Como consequência, existirá uma constante de atenuação diferente de zero.

Você foi chamado pelo departamento da marinha para auxiliar nesse projeto. Sua função será realizar alguns cálculos para determinar a profundidade de penetração da onda, sendo essa a profundidade na qual a onda sofre uma atenuação para 13,5% do seu valor. Com base nesse valor, será recomendado que os submarinos não posicionem suas antenas para recepção a uma profundidade 50% maior do que a profundidade de penetração. Considere que uma onda de 1kHz deverá ser propagada entre a torre de comando e o submarino submerso. Como você faria para determinar essa profundidade? Que conceitos aprendidos nesta seção serão necessários?

Resolução da situação-problema

A profundidade de penetração para um meio condutor será determinada pelo inverso da constante de atenuação, ou seja:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \epsilon}}$$

Entretanto, primeiramente é necessário saber se é possível considerar a água do mar como um bom condutor. Para isso, devemos calcular a tangente de perdas para essa onda a ser propagada. Como na água do mar a condutividade é igual a 4 S/m, e permissividade relativa é igual a 81, calculamos:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} = \frac{4}{2\pi \times 10^3 \times 81 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 8,9 \times 10^5 \gg 1$$

Como a tangente de perdas é muito maior do que um, podemos considerar um bom condutor. Logo, podemos calcular a profundidade de penetração utilizando a equação apresentada, substituindo os valores que estão considerados para a água do mar:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4}} = 7,95m$$

Assim, as antenas deverão ser posicionadas a uma profundidade máxima de aproximadamente 4 metros para recepção do sinal.

Entretanto, como você realizou esses estudos e já sabe como obter a profundidade de penetração, é possível também que você sugira em seu relatório diferentes profundidades para diferentes frequências.

Faça valer a pena

1. Considere um meio no qual uma onda eletromagnética de 1 MHz se propaga e que apresenta os seguintes parâmetros: $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 1$. Sobre esse meio, são feitas as seguintes afirmativas:

I. A magnitude da impedância intrínseca pode ser calculada pela expressão

$$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

PORQUE

II. A tangente de perdas do material é um valor muito maior do que um.

Assinale a alternativa que relaciona corretamente as afirmativas.

- a) A afirmativa I está errada e a II está correta.
- b) A afirmativa I está correta e a II está errada.
- c) Ambas as afirmativas estão corretas, sendo que a I justifica a II.
- d) Ambas as afirmativas estão corretas, sendo que a II justifica a I.
- e) As duas afirmativas estão erradas.

2. Considere uma onda eletromagnética, cujo campo elétrico se propaga polarizado no eixo z, na direção do eixo y, de acordo com a seguinte expressão:

$$E(t) = 5 \cos(\pi \times 10^8 t + 40000y) \hat{z}$$

A onda se propaga em um meio dielétrico sem perdas, com permissividade relativa igual a 5.

A direção de propagação e o valor máximo do campo magnético H, será:

- a) eixo x, $1,73 \times 10^{-3} \text{ A/m}$
- b) eixo y, $1,73 \times 10^{-3} \text{ A/m}$
- c) eixo z, $1,73 \times 10^{-3} \text{ A/m}$
- d) eixo x, $1,73 \text{ A/m}$
- e) eixo y, $1,73 \text{ A/m}$

3. As ondas planas normalmente se propagam com uma polarização linear, em que os campos elétricos e magnéticos se propagam na direção de um eixo, sendo os campos perpendiculares entre si. Considere duas ondas polarizadas linearmente nos eixos x e y , conforme mostrado a seguir:

$$E(z,t) = 4 \cos(2\pi \times 10^6 t) \hat{x} + 3 \cos(2\pi \times 10^6 t) \hat{y}$$

Com base na polarização das ondas, assinale a alternativa correta.

- a) As ondas têm polarização linear, com ângulo de inclinação igual a 45 graus.
- b) As ondas têm polarização elíptica e a frequência da onda é igual a 1 GHz.
- c) As ondas têm polarização circular, com raio igual a 5.
- d) As ondas têm polarização linear, com ângulo de inclinação igual a 36,86 graus.
- e) As ondas têm polarização elíptica e o sentido de rotação é RHCP.

Seção 4.3

Reflexão e dispersão de ondas eletromagnéticas

Diálogo aberto

Caro aluno, esta é a última seção desta última unidade sobre as ondas eletromagnéticas. Já estamos cientes de que nas aplicações da área de comunicações esse assunto é de extrema importância. Já aprendemos como obter uma equação de onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell, analisamos a solução da equação de onda em meios com perda e no espaço livre, determinamos a velocidade da luz e estudamos a propagação das ondas eletromagnéticas no espaço livre e em outros meios.

Agora, iremos estudar os fenômenos de reflexão e dispersão das ondas eletromagnéticas. Esses fenômenos ocorrem por que as ondas eletromagnéticas não se propagam indefinidamente nos meios, mas podem ser atenuadas e além disso terem parte de sua onda refletida, e as características dessa reflexão dependerão de como a onda incide na fronteira de separação dos meios, assim como da quantidade de meios.

Vamos dar continuidade à situação em que você faz parte de uma equipe de projetos em uma agência espacial. Você já tomou uma decisão para escolher o material de fabricação de uma antena e além disso auxiliou nos testes necessários para essa antena. Nesta, que será a última etapa do projeto antes do envio dos equipamentos, será necessário projetar um filtro que será responsável por filtrar um espectro ótico de largura total medida no espaço livre correspondente à 40 nm. Nesse espectro, o comprimento de onda central estará em 1000 nm. Para esse projeto você possui placas de vidro sem perdas no ar com índice de refração $n = 1,45$. Qual tipo de filtro você utilizaria nesse projeto? Ainda, será importante para esse projeto que você determine como ajustar as espessuras do vidro para que ordens múltiplas do comprimento de onda não sejam transmitidas. Você imagina como poderia fazer isso?

Para que você complete seu trabalho com excelência, nesta seção iniciaremos por analisar a reflexão de ondas quando a

incidência é normal e, em seguida, analisaremos a incidência oblíqua. Além disso, estudaremos a reflexão das ondas em múltiplos meios, situação na qual será viabilizada a aplicação de um material para construção de um filtro.

Sugerimos muita atenção e dedicação aos tópicos de estudo nesta seção, que você realize as atividades propostas e elenque os conhecimentos necessários para o desempenho da sua tarefa.

Bons estudos!

Não pode faltar

As ondas eletromagnéticas não se propagam indefinidamente devido aos muitos obstáculos pelo caminho que percorrem e esses obstáculos interferem na propagação, podendo não só atenuar como também refletir essas ondas. Os parâmetros dos meios definem se ocorrerá uma propagação sem perdas ou se a propagação ocorrerá com perdas devido à atenuação até uma pequena profundidade, definida como profundidade pelicular.



Refleta

Como base no que estudamos na seção anterior, como a constante de atenuação interfere na profundidade pelicular?

Além da atenuação, a incidência de ondas planas em diferentes meios irá causar o efeito da reflexão. Isso é o que ocorre quando observamos a nossa imagem em um espelho, por exemplo. A onda de luz incide no espelho e quase que sua totalidade é refletida para nossos olhos. Uma pequena parte da luz apenas passa pelo espelho e é rapidamente atenuada.

A forma como as ondas incidem em um tipo diferente de meio define como será a reflexão. Nós iniciaremos com o estudo da incidência normal, ou seja, quando a direção de propagação da onda incide perpendicularmente na superfície do meio. Estudaremos a reflexão de ondas em interfaces múltiplas e também estudaremos a situação quando a incidência ocorre obliquamente na superfície de separação entre os meios. Vamos tomar como exemplo um

caso geral de uma onda plana uniforme com o campo elétrico harmônico se propagando de acordo com a equação:

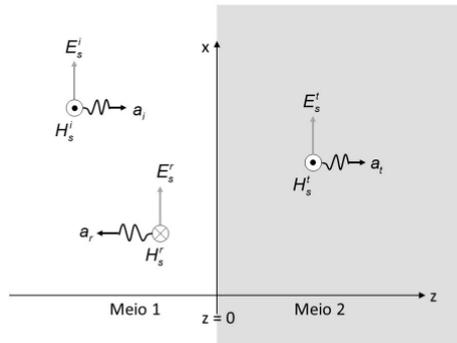
$$E^i(z,t) = E_0^i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta_1 z) \hat{x}$$

Conforme pode ser observado, esse campo elétrico se propaga na direção do eixo z polarizado no eixo x. Com base nas informações que tivemos na última seção, podemos observar que o meio indicado por 1, no qual essa onda se propaga, é um meio com constante de atenuação igual a α_1 e constante de fase igual a β_1 , conforme mostra a Figura 4.6. A intensidade do campo elétrico, quando este incide sobre a superfície de separação com um meio 2 ($z=0$) é igual a E_0^i . Considerando essa situação, tem-se uma incidência normal. Em notação de fasor, podemos representar os campos incidentes, conforme segue:

$$E_s^i = E_0^i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{x}$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{y}$$

Figura 4.6 | Incidência normal de onda plana uniforme



Fonte: Wentworth (2006).

Ainda, teremos os campos transmitidos, correspondendo àqueles que passam a se propagar no segundo meio, em $z>0$:

$$E_s^t = E_0^t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x}$$

$$H_s^t = \frac{E_0^t}{\eta_1} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{y}$$

No caso dos campos transmitidos, considera-se um meio com constante de atenuação igual a α_2 e a constante de fase igual a β_2 . Ainda, E_0^t é o valor máximo do campo elétrico transmitido para o meio 2, correspondente ao valor quando $z = 0$.

Supondo que toda a onda incidente se propaga do meio 1 para o meio 2, significa que algumas condições de fronteira em $z = 0$ precisam ser satisfeitas. Essas condições partem do princípio de que tanto o campo elétrico como o campo magnético devem ser iguais dos dois lados da superfície de separação dos meios. Se isso for verdade, teremos para o campo elétrico que:

$$E_s^i = E_s^t \Rightarrow E_0^i = E_0^t$$

A princípio, essa condição nos parece razoável. Entretanto, o mesmo deve valer para o campo magnético, ou seja:

$$H_s^i = H_s^t \Rightarrow \frac{E_0^i}{\eta_1} = \frac{E_0^t}{\eta_2}$$

Da relação anterior, só teremos as condições de fronteira satisfeitas se a impedância intrínseca dos meios 1 e 2 forem iguais, o que não é verdade para todos os casos em geral. Dessa forma, para que as condições de fronteira sejam satisfeitas, se faz necessário que exista uma onda refletida. Essa onda pode ser representada por meio dos campos refletidos (E_s^r e H_s^r). Na notação de fasor, considerando que E_0^r é o valor máximo do campo elétrico, esses campos podem ser representados conforme segue:

$$E_s^r = E_0^r e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{x}$$

$$H_s^r = -\frac{E_0^r}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{x}$$

Note que o sinal negativo do campo magnético indica a propagação na direção oposta ao campo magnético incidente. Agora, considerando a existência desses campos, podemos reescrever as condições de fronteira conforme segue:

$$E_s^i + E_s^r = E_s^t \Rightarrow E_0^i + E_0^r = E_0^t$$

$$H_s^i + H_s^r = H_s^t \Rightarrow \frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = \frac{E_0^t}{\eta_2}$$

Combinando as equações podemos fazer:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} E_0^i - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_0^r = E_0^t = E_0^i + E_0^r$$

Manipulando de forma a obter uma relação entre o campo refletido e incidente, temos o coeficiente de reflexão dado por Γ

$$\Gamma = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi}$$

O coeficiente de reflexão pode ser um número complexo, uma vez que as impedâncias intrínsecas dos meios podem ser complexas. Além do coeficiente de reflexão, podemos obter uma relação entre as ondas incidentes e transmitidas, chamada de coeficiente de transmissão.

$$\tau = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma = |\tau| e^{j\phi_\tau}$$



Assimile

Em uma incidência normal, a relação das amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida determinam os coeficientes de reflexão e de transmissão, conforme indicado a seguir:

$$\Gamma = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma = |\tau| e^{j\phi_\tau}$$



Exemplificando

Obtenha os coeficientes de reflexão e de transmissão para uma onda incidente de um meio com impedância intrínseca de 120Ω para um meio de impedância intrínseca igual a 360Ω . Ainda, considerando um campo elétrico incidente com amplitude igual a 30 V/m , calcule as amplitudes dos campos elétricos refletidos e transmitidos.

Resolução:

Aplicando diretamente as equações para o cálculo dos coeficientes, teremos:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{360 - 120}{360 + 120} = \frac{160}{400} = 0,4$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \times 280}{400} = 1,4$$

As amplitudes dos campos refletidos e transmitidos podem ser calculadas utilizando-se estes coeficientes:

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = 0,4 \rightarrow \frac{E_0^r}{30} = 0,4 \rightarrow E_0^r = 12 \text{ V/m}$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i} = 1,4 \rightarrow \frac{E_0^t}{30} = 1,4 \rightarrow E_0^t = 42 \text{ V/m}$$

Vamos considerar o caso em que o meio 1 é um dielétrico perfeito enquanto o meio 2 é um condutor perfeito. Nesse caso, a condutividade do meio 2 é infinita e a impedância intrínseca é nula ($\eta_2 = 0$). Logo, os coeficientes de reflexão e transmissão serão:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{-\eta_1}{\eta_1} = -1 \quad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0$$

Com base nisso, podemos concluir que as magnitudes das ondas refletidas e transmitidas são:

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = -1 \rightarrow E_0^r = -E_0^i$$

Isso significa que todo o campo incidente é refletido pelo condutor perfeito. Se calcularmos a profundidade de penetração, veremos que ela é zero.

$$\frac{E_0^t}{E_0^i} = 0 \rightarrow E_0^t = 0$$



Pesquise mais

Note que, devido à reflexão da onda, no mesmo meio teremos uma onda incidente e uma onda refletida. A superposição dessas duas ondas forma uma **onda estacionária**. Essa onda possui um padrão de

vibração estacionário devido a essa superposição, sendo caracterizada por mínimos e máximos fixos. A razão desses mínimos e máximos é chamada de razão de onda estacionária e pode ser determinada por meio do coeficiente de reflexão, conforme segue:

$$SWR = \frac{E_{m\acute{a}x}}{E_{m\acute{i}n}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

Mais sobre esse assunto pode ser estudado nos livros a seguir, que estão disponíveis na sua biblioteca virtual nos links relacionados:

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

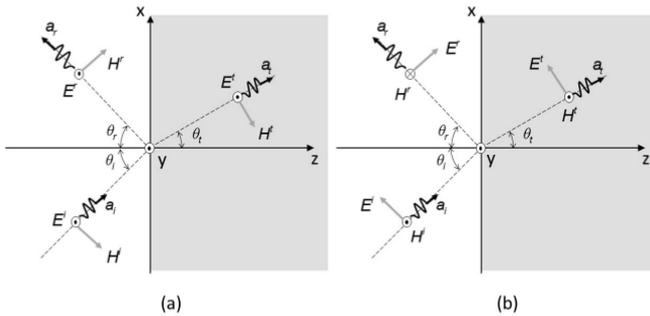
Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2670-1/cfi/6/34!/4/860/2/18@0:83.6>>. Acesso em: 25 jan. 2018.

HAYT JUNIOR, W. H. et al. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580551549/cfi/427!/4/4@0.00:56.7>>. Acesso em: 25 jan. 2018.

Mas, e se a incidência da onda na superfície não for a normal, ou seja, não for perpendicular ao plano do meio incidente? Nesse caso, iremos falar da **incidência oblíqua**, onde teremos que as direções de incidência dos campos formam um ângulo no plano incidente, conforme mostrado na Figura 4.7. Os ângulos de incidência, reflexão e transmissão são denominados por θ_i , θ_r e θ_t . Nessa figura, vemos que existe um plano de incidência determinado pelos eixos x e z, e a direção de propagação das ondas incidente, refletida e transmitida são determinadas nas direções \mathbf{a}_i , \mathbf{a}_r e \mathbf{a}_t , respectivamente. A superfície de incidência da onda é representada pelo plano x-y. Quando uma incidência é oblíqua, pode-se decompor em um par de polarização: uma é a polarização TE (transversal elétrica) (a), em que a direção de propagação do campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência, e outra a polarização TM (transversal magnética) (b), em que o campo magnético é perpendicular ao plano de incidência.

Figura 4.7 | Onda com incidência oblíqua. (a) Polarização transversal elétrica – TE, (b) polarização transversal magnética - TM



Fonte: Wentworth (2006).

Assim como a reflexão em incidência normal, estaremos interessados em determinar a relação entre as amplitudes dos campos incidente, refletido e transmitido, mas também estamos interessados em determinar a relação entre os ângulos θ_i , θ_r e θ_t . Após uma análise da geometria das polarizações, podemos chegar nas equações para os campos incidente (\mathbf{E}_s^i e \mathbf{H}_s^i), refletido (\mathbf{E}_s^r e \mathbf{H}_s^r) e transmitido (\mathbf{E}_s^t e \mathbf{H}_s^t). Primeiramente, para a polarização TE teremos:

$$\mathbf{E}_s^i = E_0^i e^{-j\beta_1(x \text{sen}\theta_i + z \text{cos}\theta_i)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H}_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \text{sen}\theta_i + z \text{cos}\theta_i)} (-\text{cos}\theta_i \hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\theta_i \hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{E}_s^r = E_0^r e^{-j\beta_1(x \text{sen}\theta_r - z \text{cos}\theta_r)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H}_s^r = \frac{E_0^r}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \text{sen}\theta_r - z \text{cos}\theta_r)} (\text{cos}\theta_r \hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\theta_r \hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{E}_s^t = E_0^t e^{-j\beta_2(x \text{sen}\theta_t + z \text{cos}\theta_t)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H}_s^t = \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \text{sen}\theta_t + z \text{cos}\theta_t)} (-\text{cos}\theta_t \hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\theta_t \hat{\mathbf{z}})$$

E, assim, a relação entre as amplitudes dos campos é dada conforme indicado a seguir:

$$E_0^r = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0^i = \Gamma_{TE} E_0^i$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0^i = \tau_{TE} E_0^i$$

Já para a polarização TM, teremos os seguintes campos:

$$E_s^i = E_0^i e^{-j\beta_1(x \text{sen} \theta_i + z \text{cos} \theta_i)} (\cos \theta_i \hat{x} - \text{sen} \theta_i \hat{z})$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \text{sen} \theta_i + z \text{cos} \theta_i)} \hat{y}$$

$$E_s^r = E_0^r e^{-j\beta_1(x \text{sen} \theta_r - z \text{cos} \theta_r)} (\cos \theta_r \hat{x} + \text{sen} \theta_r \hat{z})$$

$$H_s^r = \frac{E_0^r}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \text{sen} \theta_r - z \text{cos} \theta_r)} \hat{y}$$

$$E_s^i = E_0^i e^{-j\beta_2(x \text{sen} \theta_t + z \text{cos} \theta_t)} (\cos \theta_t \hat{x} - \text{sen} \theta_t \hat{z})$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \text{sen} \theta_t + z \text{cos} \theta_t)} \hat{y}$$

E as relações entre as amplitudes serão dadas por:

$$E_0^r = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_0^i = \Gamma_{TM} E_0^i$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_0^i = \tau_{TM} E_0^i$$

Além disso, a Lei de Snell para reflexão e refração determina as relações entre os ângulos conforme segue:

$$\theta_i = \theta_r \text{ e } \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\text{sen} \theta_t}{\text{sen} \theta_i}$$

A partir dessas relações, pode-se achar na polarização TM o ângulo na qual toda onda incidente é transmitida, denominado ângulo de Brewster, conforme segue:

$$\text{sen}\theta_{BA} = \sqrt{\frac{\beta_2^2(\eta_2^2 - \eta_1^2)}{\beta_1^2\eta_2^2 - \beta_2^2\eta_1^2}}$$



Assimile

Em uma incidência oblíqua, a relação das amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida determinam os coeficientes de reflexão e de transmissão, para as polarizações TE e TM, conforme segue.

$$E_0^r = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0^i = \Gamma_{TE} E_0^i$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_0^i = \tau_{TE} E_0^i$$

$$E_0^r = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_0^i = \Gamma_{TM} E_0^i$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_0^i = \tau_{TM} E_0^i$$

O ângulo na qual toda onda incidente é transmitida na polarização TM é denominado de ângulo Brewster:

$$\text{sen}\theta_{BA} = \sqrt{\frac{\beta_2^2(\eta_2^2 - \eta_1^2)}{\beta_1^2\eta_2^2 - \beta_2^2\eta_1^2}}$$



Pesquise mais

É interessante que você aprofunde seus estudos com explicação mais detalhada sobre como as equações das ondas incidente, refletida e transmitida podem ser obtidas, assim como os coeficientes de reflexão e transmissão nas polarizações TE e TM. Isso pode ser feito por meio de uma leitura atenta da Seção 5.8 – Reflexão e transmissão em ondas oblíquas, do livro a seguir:

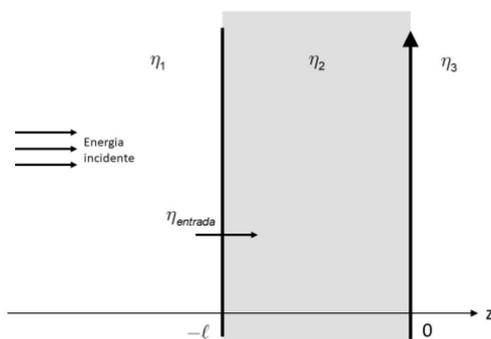
WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Você também pode encontrar esse livro acessando a biblioteca virtual, através do link a seguir:

<<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2670-1/cfi/6/34!/4/886/2@0:100>>. Acesso em: 24 jan. 2018.

Por fim, precisamos compreender como ocorre o fenômeno da reflexão em meios múltiplos. Isso ocorre, por exemplo, quando uma onda intercepta do ar para a superfície de um vidro de espessura grossa, sendo transmitida por ele e novamente intercepta a superfície do ar, sendo refletida no vidro. A Figura 4.8 mostra a interface entre três meios, cujo meio incidente é o meio 1, com impedância intrínseca η_1 .

Figura 4.8 | Incidência em múltiplos meios



Fonte: adaptado de Hayt Junior et al. (2014).

Estamos considerando $z = 0$ para a localização da interface entre os meios 2 e 3, sendo que a fronteira entre os meios 1 e 2 está localizada em $z = -\ell$. Nesse caso, supondo que os meios sejam sem perdas, temos uma onda incidente (consideraremos a incidência normal) e refletida no meio 1, uma onda transmitida no meio 3 e no meio 2 a onda transmitida do meio 1 para o meio 2, que incide na superfície de separação dos meios 2 e 3 e também reflete, sendo um total de cinco ondas quando em regime permanente. Podemos então concluir que no meio 2 existe uma superposição dos campos em sentidos opostos, conforme as equações a seguir,

em que o sinal superscrito positivo indica a onda se propagando no sentido positivo do eixo, e o sinal negativo superscrito o oposto:

$$E_{s2} = E_{20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{20}^- e^{-j\beta_2 z}$$

$$H_{s2} = \frac{E_{20}^+}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} + \frac{E_{20}^-}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}$$

Podemos definir uma impedância de onda, como a razão entre os campos E_{s2} e H_{s2} :

$$\eta_w = \frac{E_{s2}}{H_{s2}} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 z - j\eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 z}{\eta_2 \cos \beta_2 z - j\eta_3 \operatorname{sen} \beta_2 z}$$

Na fronteira do meio 1 com o meio 2, os campos H e E são tangenciais e contínuos, de forma que estabelecendo as condições de fronteira podemos calcular uma impedância de entrada quando $z = -\ell$, conforme abaixo:

$$\eta_{ent} = \eta_w(z = -\ell) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 \ell + j\eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 \ell}{\eta_2 \cos \beta_2 \ell + j\eta_3 \operatorname{sen} \beta_2 \ell}$$

E o coeficiente de reflexão no meio incidente considera as amplitudes do campo incidente e refletido no meio 1, logo:

$$\frac{E_{10}^r}{E_{10}^i} = \Gamma = \frac{\eta_{ent} - \eta_1}{\eta_{ent} + \eta_1}$$

Um outro conceito importante quando trabalhamos com ondas de frequência ótica é o índice de refração. Esse índice expressa a constante dielétrica do meio na forma:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Em meios sem perdas, pode-se expressar a constante de fase e a impedância intrínseca através do índice de refração, tal como mostrado a seguir, em que η_0 é a impedância intrínseca do espaço livre:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega n}{c} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n}$$

Finalmente, podemos obter a velocidade de fase e a largura de comprimento de onda:

$$\nu_p = \frac{c}{n} \text{ e } \lambda = \frac{\nu_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Sem medo de errar

Apenas para relembrar, nessa última etapa do projeto da agência espacial, será necessário projetar um filtro para um espectro ótico de largura total medida no espaço livre correspondente a 40 nm, com o comprimento de onda central em 1000 nm. Para esse projeto, você possui placas de vidro sem perdas no ar com índice de refração $n = 1,45$.

Tomando como exemplo a Figura 4.8 que foi apresentada, poderíamos considerar o meio 2 como uma placa de vidro de espessura ℓ , enquanto os meios 1 e 3 se referem ao espaço livre, ou seja, $\eta_1 = \eta_3$. Nesse caso, existe a possibilidade de se atingir uma transmissão total, o que ocorre quando o coeficiente de reflexão for nulo, ou que $\eta_{ent} = \eta_1$. Assim, a espessura da região 2 será tal que $\beta_2 \ell = m\pi$, com m sendo um número inteiro, e $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$, de forma que:

$$\frac{m\pi}{\ell} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \rightarrow \ell = \frac{m\lambda_2}{2}$$

A relação nos diz que a espessura será igual a um múltiplo de meio comprimento de onda na região do vidro. O efeito de uma espessura igual a um múltiplo de meio comprimento de onda é que essa região não tenha influência na reflexão e transmissão. Esse é o princípio de funcionamento de um interferômetro de Fabry-Perot.

Assim, uma sugestão é o projeto de um interferômetro de Fabry-Perot, que consiste em um bloco de material transparente, por exemplo o vidro. A espessura é projetada de forma que os comprimentos de onda transmitidos satisfaçam a relação a seguir, onde ℓ corresponde à espessura do material e m é o número de meio comprimento de onda no material utilizado para construir o interferômetro:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\ell}{m}$$

O objetivo do filtro é separar os comprimentos de onda adjacentes que passassem pelo dispositivo, restando apenas o espectro de frequência de entrada. A largura de comprimento de onda para esse filtro então pode ser descrita por:

$$\lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda = \frac{2\ell}{m-1} - \frac{2\ell}{m} = \frac{2\ell}{m(m-1)} \doteq \frac{2\ell}{m^2}$$

Como $m = \frac{2\ell}{\lambda_2}$, então:

$$\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_2^2}{2\ell}$$

Pode-se considerar o comprimento de onda no espaço livre, sabendo que $m = \frac{2n\ell}{\lambda_0}$. Obtém-se então a faixa espectral livre para o interferômetro de Fabry-Perot, dada por $\Delta\lambda_{f0}$.

$$\Delta\lambda_{f0} = n\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2n\ell}$$

Dessa forma, pode-se projetar o interferômetro para atuar como um filtro passa-faixa, de forma a transmitir um espectro estreito em torno de um comprimento de onda específico. Para isso, o espectro a ser filtrado deve ser mais estreito do que a faixa espectral livre.

Para determinar a faixa necessária de espessuras do vidro para que ordens múltiplas do comprimento de onda não sejam transmitidas, necessitamos que $\Delta\lambda_{f0} > \Delta\lambda_s$, onde $\Delta\lambda_s$ corresponde à largura espectral ótica, logo:

$$\ell < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_s 2n}$$

Substituindo os valores, teremos que:

$$\ell < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_s 2n} = \frac{1000^2}{40 \times 2 \times 1,45} = 8,62 \mu\text{m}$$

Logo, a espessura do vidro deveria ser menor do que **8,62 μm** . No entanto, uma placa de vidro dessa espessura é infactível. Para contornar essa situação, deve-se utilizar duas placas grossas com um espaçamento de ar entre elas, da ordem da espessura calculada. As superfícies nos lados opostos ao espaçamento de ar devem

ser revestidas de um material antirrefletivo, conferindo assim uma versatilidade para o ajuste do comprimento de onda a ser transmitido e da faixa espectral livre pelo ajuste do espaçamento entre as placas.

Dessa forma, você pode propor a solução mais indicada para a construção do filtro. Agora, basta reportar todo o seu desenvolvimento ao longo do projeto em seu relatório e a tarefa terá sido concluída com sucesso.

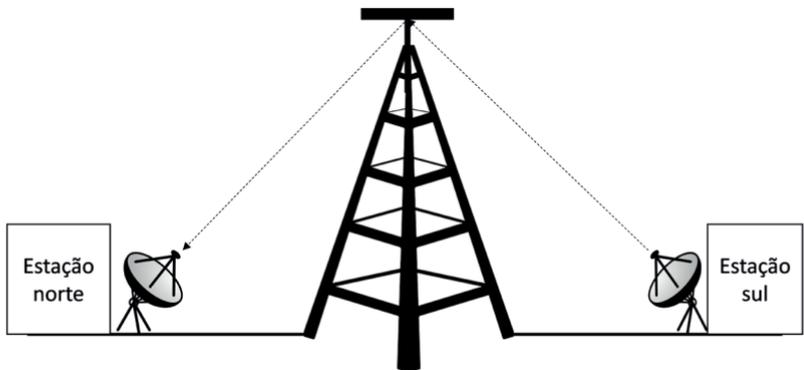
Avançando na prática

Cálculo dos campos em uma incidência oblíqua

Descrição da situação-problema

Uma estação de TV localizada na região sul de um certo território pretende expandir a abrangência de seu sinal para a região norte. Para isso, montou um esquema para reflexão do sinal, redirecionado por um refletor que está localizado em uma torre, conforme mostra o esquema da Figura 4.9. O esquema permite que, a partir da região sul, a estação transmita o seu sinal para a região norte pelo ar.

Figura 4.9 | Esquema para transmissão do sinal



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabe-se que o sinal transmitido é uma onda plana que possui frequência de 100 MHz com amplitude de 5 V/m e polarização TE. O material do refletor é não magnético sem perdas e possui $\epsilon_r = 4$. Nessas condições, você foi chamado para realizar os

cálculos e determinar os campos incidentes, refletidos e transmitidos, sabendo que o ângulo de incidência é de 60° . Como você realizaria essa tarefa?

Resolução da situação-problema

Para que você desempenhe essa tarefa, será necessário conhecer os coeficientes de reflexão e transmissão. Sabemos que no ar a impedância intrínseca é de $120\pi \Omega$. Como a onda é de 100 MHz e se propaga no espaço livre, podemos obter o comprimento de onda e em seguida o coeficiente de fase dado por:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3\text{m} \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m}$$

Logo, os campos incidentes são (considerando a polarização TE):

$$E_s^i = 5e^{-j\frac{2\pi}{3}(x\text{sen}60^\circ + z\text{cos}60^\circ)} \hat{y}$$

$$H_s^i = \frac{5}{120\pi} e^{-j\frac{2\pi}{3}(x\text{sen}60^\circ + z\text{cos}60^\circ)} (-\text{cos}60^\circ \hat{x} + \text{sen}60^\circ \hat{z})$$

Para o meio do refletor, teremos o coeficiente de fase dado por:

$$\beta_2 = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \times 100 \times 10^6 \sqrt{4}}{3 \times 10^8} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad/m}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \eta_0 = \frac{120\pi}{2} = 60\pi \Omega$$

O ângulo de transmissão será obtido da Lei de Snell:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\text{sen}\theta_t}{\text{sen}\theta_i} \leftrightarrow \theta_t = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \text{sen}\theta_i\right) = 25,65^\circ$$

Assim, é possível calcular os coeficientes de reflexão e transmissão:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\eta_2 \text{cos}\theta_i - \eta_0 \text{cos}\theta_t}{\eta_2 \text{cos}\theta_i + \eta_0 \text{cos}\theta_t} = \frac{60 \times 0,5 - 120 \times 0,9}{60 \times 0,5 + 120 \times 0,9} = -0,565$$

$$\tau_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \times 60 \times 0,5}{60 \times 0,5 + 120 \times 0,9} = 0,435$$

Então, as amplitudes podem ser obtidas:

$$E_0^r = \Gamma_{TE} E_0^i = -0,565 \times 5 = -2,825 \text{ V/m} \rightarrow H_0^r = \frac{E_0^r}{\eta_0} = \frac{-2,825}{120\pi} = -7,5 \text{ mA/m}$$

$$E_0^t = \tau_{TE} E_0^i = 0,435 \times 5 = 2,175 \text{ V/m} \rightarrow H_0^t = \frac{E_0^t}{\eta_2} = \frac{2,175}{60\pi} = 11,53 \text{ mA/m}$$

E, escrevendo as equações para os campos refletidos e transmitidos, teremos:

$$E_s^r = -2,825 e^{-j\frac{2\pi}{3}(x \text{sen}60^\circ - z \text{cos}60^\circ)} \hat{y}$$

$$H_s^r = -7,5 e^{-j\frac{2\pi}{3}(x \text{sen}60^\circ - z \text{cos}60^\circ)} (\text{cos}60^\circ \hat{x} + \text{sen}60^\circ \hat{z})$$

$$E_s^i = 2,175 e^{-j\frac{4\pi}{3}(x \text{sen}25,65^\circ + z \text{cos}25,65^\circ)} \hat{y}$$

$$H_s^i = 11,53 e^{-j\frac{4\pi}{3}(x \text{sen}25,65^\circ + z \text{cos}25,65^\circ)} (-\text{cos}25,65^\circ \hat{x} + \text{sen}25,65^\circ \hat{z})$$

Dessa forma, ao apresentar esses cálculos, sua tarefa estará cumprida com êxito.

Faça valer a pena

1. As ondas eletromagnéticas não se propagam indefinidamente, mas dependem das características do meio de propagação, além das características dos diversos meios que fazem fronteira no qual pode ocorrer a incidência das ondas e, conseqüentemente, a reflexão. Com base nisso, considere as assertivas a seguir:

I. No estabelecimento das condições de fronteira para a incidência de ondas planas em meios múltiplos, não é possível considerar na fronteira que o campo incidente é igual ao campo transmitido.

PORQUE

II. A incidência de uma onda plana em uma fronteira entre dois

meios fará com que a onda seja transmitida do primeiro para um segundo meio, a menos que a incidência seja oblíqua, situação em que ocorre a reflexão da onda.

Com base nas assertivas, pode-se afirmar que:

- a) A assertiva I está correta e a II está errada.
- b) A assertiva I está errada e a II está correta.
- c) Ambas estão corretas e a II justifica a I.
- d) Ambas estão corretas e a II não justifica a I.
- e) Nenhuma das assertivas está correta.

2. Uma onda plana se propaga de um meio 1 e incide em um meio 2, sendo que parte da onda é transmitida e outra parte é refletida. Sabe-se que o meio 1 possui uma impedância intrínseca de 100 Ohms e que o coeficiente de transmissão é igual a 1,5.

Nessas condições, o coeficiente de reflexão e a impedância intrínseca do meio 2 em Ohms serão respectivamente:

- a) 0,22 e 150.
- b) 0,22 e 300.
- c) 0,33 e 150.
- d) 0,33 e 300.
- e) 0,33 e 450.

3. Uma onda plana uniforme se propaga no ar incidindo em um meio não magnético sem perdas com $\epsilon_r = 9,00$. Essa onda tem frequência de 50 MHz e o campo elétrico incidente tem amplitude de 10 V/m. O ângulo de incidência é de 60° e a onda possui uma polarização TE.

Nessas condições, as amplitudes dos campos magnéticos incidente, refletido e transmitido são, em mA/m, respectivamente:

- a) 5; 20; 30.
- b) 24,5; 19; 30.
- c) 26,5; 20; 27.
- d) 26,5; 17,5; 27.
- e) 30; 40; 50.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. V. 3.

HAYT JUNIOR, W. H. et al. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

REGO, R. A. **Eletromagnetismo básico**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros: Eletricidade e Magnetismo, Ótica**, 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. V. 2.

WENTWORTH, S. M. **Fundamentos de eletromagnetismo** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ISBN 978-85-522-0672-9



9 788552 206729 >