

Cálculo Diferencial e Integral IV

Cálculo Diferencial e Integral IV

José de França Bueno
Ulisses Ferreira Kaneko

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

André Luis Delvas Fróes

Junior Francisco Dias

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B928c Bueno, José de França
Cálculo diferencial e integral IV / José de França
Bueno, Ulisses Ferreira Kaneko. – Londrina : Editora e
Distribuidora Educacional S.A., 2018.
216 p.

ISBN 978-85-522-0684-2

1. Cálculo. I. Bueno, José de França. II. Kaneko, Ulisses
Ferreira. III. Título.

CDD 600

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Séries	7
Seção 1.1 - Séries, séries de potências, séries de Taylor e de MacLaurin	9
Seção 1.2 - Séries de Fourier	27
Seção 1.3 - Aplicações das séries de Fourier	47
Unidade 2 Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares	67
Seção 2.1 - Autovalores e autovetores	68
Seção 2.2 - Introdução aos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares	83
Seção 2.3 - Método dos autovalores e dos autovetores para sistemas de EDOs	96
Unidade 3 Introdução ao cálculo vetorial	117
Seção 3.1 - Caminhos suaves e integrais de linha	119
Seção 3.2 - Campos vetoriais, rotacionais e divergentes	139
Seção 3.3 - Campos conservativos	156
Unidade 4 Aplicações do Cálculo Vetorial	173
Seção 4.1 - Integrais de Superfícies	175
Seção 4.2 - Teorema de Stokes	191
Seção 4.3 - Teorema da Divergência ou Lei de Gauss	204

Palavras do autor

Nesta disciplina você vai estudar um conjunto de ferramentas matemáticas que possuem enorme importância para a engenharia e o desenvolvimento da tecnologia: séries, séries de Taylor e Maclaurin, séries de Fourier, resolução de equações diferenciais com séries de Fourier, autovalores e autovetores, além de técnicas de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, divergente, rotacional, integral de linha, integral de superfície e os teoremas de Green, Stokes e da divergência.

Na primeira unidade, você trabalhará competências necessárias para determinar aproximações numéricas para funções e resolver equações diferenciais com séries de Fourier. Estas são fundamentais para seus estudos posteriores, tanto na resolução de equações diferenciais que modelam fenômenos de condução do calor e fenômenos vibratórios quanto em estudos de processamentos de sinais.

Na segunda unidade, você desenvolverá competências para resolver problemas, de autovalores e autovetores, e sistemas de equações diferenciais lineares. Esses sistemas de equações são importantes como modelos de fenômenos de ressonância em sistemas mecânicos e circuitos elétricos, por exemplo. São os primeiros modelos que os engenheiros estudam ao iniciar novos projetos e equipamentos.

Na terceira unidade, você estudará o rotacional, o divergente, os campos conservativos e o teorema de Green no plano. Divergente e rotacional são objetos matemáticos importantes, tanto na mecânica de fluidos quanto para estudos de campos elétricos ou magnéticos. São também algumas das ferramentas matemáticas fundamentais para seus estudos posteriores em eletromagnetismo. Campos de forças centrais (como os campos gravitacionais, por exemplo) são campos conservativos. Só por isso, já podemos intuir a importância de se estudar campos conservativos. Para esse fim, você deverá desenvolver as competências necessárias para aplicar o cálculo de integrais de linha. Você também determinará o rotacional e o divergente para campos vetoriais.

Por fim, na quarta unidade, você estudará as integrais de superfície e dois teoremas muito importantes no cálculo vetorial: de Stokes e divergência, que são importantes para cálculos de fluxos e circulação, tanto na mecânica de fluidos quanto no eletromagnetismo. As famosas Leis de Maxwell só podem ser expressas com o tratamento matemático apropriado, utilizando-se o cálculo vetorial e os teoremas Green, Stokes e da divergência.

Ao final desse livro, suas habilidades matemáticas certamente estarão em um patamar muito mais elevado. Você fará conexão com os tópicos já estudados nos outros "Cálculos", e isso será muito gratificante para você: assuntos que antes estavam um pouco obscuros, agora vão assumir novo significado. Como sempre, você deve estudar disciplinas de matemática com lápis, papel e, sempre que possível, um computador ao seu lado: rascunhe e faça cálculos, esboços, figuras e gráficos, além disso, pense em outros exemplos para adquirir maior compreensão sobre o material apresentado.

Séries

Convite ao estudo

Um engenheiro utiliza modelos matemáticos para estudar fenômenos e projetos na sua rotina de trabalho. Os modelos matemáticos permitem que o engenheiro simule a realidade, adquirindo conhecimento sobre sistemas reais de forma muito mais prática e barata. Tais modelos matemáticos podem ser, por exemplo, funções matemáticas ou equações diferenciais.

Nesta unidade, você estudará séries, séries de potências, Taylor, MacLaurin, séries de Fourier e como aplicar séries de Fourier na resolução de uma determinada classe de equações diferenciais.

Para relacionar os tópicos anteriores com a sua atividade profissional, suponha que você foi contratado como consultor para uma empresa que produz softwares técnico-científicos para engenheiros. Neste projeto, você deverá apresentar a fundamentação teórica para problemas de aproximação numérica de funções por meio de séries e polinômios de Taylor. Esse estudo teórico será utilizado para construir o código-fonte do software. Em algumas situações práticas, o usuário do programa deverá inserir uma precisão pré-especificada no software, dentro da qual a aproximação numérica será válida.

Por exemplo, suponha que, no caso das funções $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = \text{cos}(x)$ ou $f(x) = e^x$, queiramos determinar o valor de algumas dessas em um determinado ponto $x = x_0$, com um determinado número de casas decimais corretas. Como proceder? Esse é um tipo de problema que você estudará nesta unidade.

Outro problema que você estudará é para obter a solução aproximada por meio das séries de Fourier, para equações

diferenciais que modelam circuitos elétricos sujeitos a uma força eletromotriz $E(t)$.

Vejamos, a seguir, de forma sucinta, o que será tratado em cada seção desta unidade.

Na primeira seção, apresentaremos a definição do que é uma série e os principais testes para verificar se uma série é convergente. Em seguida, estudaremos um tipo específico de série: as séries de potências e, logo na sequência, as séries de Taylor e de MacLaurin. Finalmente, na última subseção desta primeira seção, trataremos dos polinômios de Taylor e o seu uso na aproximação numérica de valores de funções com uma precisão predefinida.

Na segunda seção desta unidade, estudaremos as séries de Fourier: sua definição, sob quais condições elas convergem, a determinação delas para funções pares, ímpares e periódicas. Por fim, nesta seção, ainda estudaremos a forma complexa das séries de Fourier.

Na terceira e última seção, veremos como aplicar o que aprendemos sobre séries de Fourier para determinar a solução de equações diferenciais bastantes usadas na engenharia.

Seção 1.1

Séries, séries de potências, séries de Taylor e de MacLaurin

Diálogo aberto

Muitos problemas da engenharia e da tecnologia não possuem uma “fórmula fechada” para a solução. Em matemática, quando não temos uma fórmula fechada, é impossível obter a resposta para o problema em questão simplesmente substituindo valores numéricos em uma fórmula. Nós temos, obrigatoriamente, de utilizar métodos de aproximação. Isso é bastante comum em equações diferenciais: a maior parte das equações diferenciais só pode ser resolvida por métodos aproximados.

Muitas vezes, os engenheiros, físicos, matemáticos ou economistas modelam um problema usando uma equação diferencial. Contudo, não é possível determinar uma fórmula fechada para indicar a solução da equação diferencial. Assim, determinamos a solução apenas por meio de aproximações com alguma ferramenta numérica. Uma das ferramentas mais usadas desde os tempos primórdios do cálculo diferencial e da integral são as séries. E, aqui, entramos na primeira seção desta unidade.

Apresentaremos o que são as séries na primeira subseção e os principais testes para decidir se uma série é convergente ou divergente: teste da integral, da comparação, da raiz e da razão.

Na subseção seguinte, trataremos das séries de potências (um tipo particular de série).

Continuando, na próxima subseção, apresentaremos as séries de Taylor e MacLaurin. Estas formam a base teórica para tratar a aproximação de funções em problemas de engenharia e física. Assim, elas são particularmente importantes para o seu trabalho como consultor da empresa de produção de softwares técnicos para o uso de engenheiros.

Por fim, na última subseção, trataremos dos polinômios de Taylor e o seu uso na determinação de valores numéricos de funções como seno, cosseno, exponencial, raízes e outras.

Dentro do contexto do seu trabalho de consultoria para a empresa que vai produzir o software científico a ser utilizado por engenheiros e técnicos especializados, você foi incumbido de apresentar os fundamentos teóricos de determinadas ferramentas matemáticas que serão adotadas por esse software.

Neste momento, você foi encarregado de apresentar estudos sobre aproximação de funções por séries de Taylor e Maclaurin. Dada a importância das funções seno e cosseno em fenômenos periódicos e problemas de condução do calor, a questão que você deve investigar é: como determinar até qual valor de x podemos aproximar a função $\text{sen}(x)$ por um polinômio de Taylor de grau 5, com um erro menor que 10^{-5} ?

Sugeriu-se que, para facilitar a visualização da convergência de polinômios de Taylor em relação à função seno, você plotasse no mesmo plano cartesiano os polinômios de Taylor de graus $n=1$, $n=3$, $n=5$, $n=7$ e $n=9$ e o gráfico da função seno. Para realizar tudo isso, faz-se necessário o estudo de alguns conceitos que veremos na sequência.

Não pode faltar

1.1.1 Séries

Você já estudou sequências numéricas e séries: as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG) são exemplos de sequências numéricas. Para lembrar o conteúdo de sequências, sugerimos a consulta aos capítulos sobre sequências em Stewart (2006) ou Guidorizzi (1997). Você também pode consultar videoaulas sobre sequências.

UNIVESP. **Cálculo IV - Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 2 de 4.** Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=-WXsYcWLR30>>. Acesso em: 1 set. 2017".

Se somarmos os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, teremos o que se chama de série infinita, ou, mais simplesmente, de série.

Costuma-se representar uma série com o símbolo somatório (a letra grega *sigma* maiúscula): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ou, excluindo-se os limites inferior e superior da soma, escrevemos sucintamente $\sum a_n$.

Certamente, se somarmos infinitos termos de uma sequência, como $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, ..., teremos a soma $2+4+6+\dots$, que é

infinita. Assim, não há interesse nesses tipos de soma. Por outro lado, você já efetuou somas de progressões geométricas, por exemplo, da sequência $a_n = \frac{1}{2^n}$. Aplicando-se a fórmula da soma de PG's infinitas,

$$\text{temos que } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Interessa, portanto, estudar se a soma de infinitos termos de uma sequência converge para um valor numérico ou não. Para isso, define-se o que se chama de somas parciais de uma série.

Considere uma sequência $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Definimos as somas parciais:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots$$

Em geral: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$. A partir das somas parciais, define-se uma nova sequência $\{s_n\}$. A caracterização sobre a convergência da soma da série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é realizada a partir da sequência $\{s_n\}$ das somas parciais.



Assimile

Definição de convergência de séries, segundo Stewart (2006): seja a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e suas somas parciais $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. A série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ será denominada convergente se a sequência $\{s_n\}$ convergir, ou seja, se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Dizemos que a soma da série é igual a S e escrevemos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$. Se a sequência $\{s_n\}$ não convergir, dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é divergente.

Um exemplo de série convergente é o da série geométrica, constituída pela soma de infinitos termos de uma progressão geométrica com o primeiro termo igual a a_0 e razão $|q| < 1$. Para a PG $a_1, a_2, a_3, \dots = a_0, a_0q, a_0q^2, \dots$, com razão $|q| < 1$, vale que $\sum_{i=1}^{\infty} a_0q^{i-1} = \frac{a_0}{1-q}$. Se $|q| \geq 1$ a série geométrica será divergente.

Note que, antes de "sair somando" os termos de uma série, devemos verificar se a série é convergente ou divergente. Vejamos um primeiro teorema relativo à convergência de séries.

Teorema: suponha que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ seja convergente. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Com esse teorema, se pudermos mostrar que o termo geral da série dado por a_n for tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é divergente. Contudo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, nada podemos afirmar sobre a convergência da série.



Refleta

A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e é verdadeiro que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Por que essas duas afirmações verdadeiras não contradizem o teorema anterior?

Dois séries convergentes podem ser somadas ou subtraídas termo a termo, ou podemos multiplicar cada termo por uma constante, resultando em outras séries também convergentes. Esse resultado vem exposto no próximo teorema.

Teorema: considere as séries convergentes $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, e c um número real. Então, também serão convergentes as séries $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i + b_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - b_i$, e vale que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i - b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Vejamos, agora, três testes de convergência de séries: o teste da comparação, o teste da razão e o teste da raiz.

O teste da comparação é usado quando temos informação sobre a convergência (ou divergência de uma série) e sabemos ainda que cada termo seu é sempre maior ou menor que outra série.

Teste de comparação: sejam as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, em que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$.

Então:

i) Se $a_n \leq b_n$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergir, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

ii) Se $a_n \geq b_n$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergir, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Convergência absoluta, condicional e séries alternadas

Não existem apenas séries nas quais todos os termos sejam positivos. Podem existir séries nas quais existam termos positivos e negativos. São as chamadas séries alternadas. Um exemplo de série alternada é a série harmônica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

A partir do conceito de séries alternadas, faz sentido falar em convergência em módulo ou em convergência absoluta.



Assimile

Definição de série absolutamente convergente, segundo Stewart (2006):

a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.

Definição de série condicionalmente convergente: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ não convergir.

A série harmônica alternada é um exemplo de série condicionalmente convergente, mas que não é absolutamente convergente.

Para algumas séries, podemos determinar sua convergência absoluta ou divergência usando os testes da razão e da raiz a seguir.

Teste da razão (STEWART, 2006): seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Então existem três possibilidades:

i) Se $K < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

ii) Se $K > 1$ ou se $K = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

iii) Se $K = 1$, então nada podemos concluir pelo teste da razão sobre a convergência ou a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teste da raiz (STEWART, 2006): seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Três situações podem ocorrer:

- i) Se $K < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
- ii) Se $K > 1$ ou se $K = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
- iii) Se $K = 1$, então nada podemos concluir pelo teste da raiz.

Destacamos que: se o limite do teste da razão $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ for igual a 1, então você não deve tentar o teste da raiz, pois o limite $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ também será igual a 1. O teorema a seguir é específico para testar convergência de séries alternadas.

Teorema (de Leibniz) para séries alternadas (STEWART, 2006): uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$ é convergente se as condições a seguir forem atendidas:

- i) Todos os a_n são positivos.
- ii) Para todo $n \geq n_0$, vale que $a_n \geq a_{n+1}$.
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1.1.2 Séries de potências

Existe um tipo particular de série bastante importante em aplicações de engenharia e física. São as séries de potências. Veja a definição a seguir.



Assimile

Definição de série de potências, segundo Stewart (2006): sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ números reais. A série representada por $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ é denominada série de potências centrada em $x = 0$. Já a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ é uma série de potências centrada em $x = x_0$.

Nós já vimos um exemplo de série de potências. É a série geométrica. Seja $|x| < 1$, isto é, $-1 < x < 1$. Se fizermos todos os coeficientes $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$, na série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, então teremos uma série geométrica convergente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$
 . Da fórmula para a soma infinita de uma PG, temos que
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$
 . Essa igualdade é válida para $|x| < 1$. Ou seja, para $|x| < 1$ a série acima possui uma fórmula fechada e pode ser escrita como a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Em outras palavras, podemos escrever que $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

Uma série de potências pode convergir apenas em um único ponto, pode convergir para todo x real ou, ainda, convergir em um intervalo real. Associado a toda série de potências, existe um número real $R > 0$ denominado raio de convergência. É o que veremos no próximo resultado.

Teorema (convergência de série de potências), segundo Stewart (2006): considere a série de potência $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$. Então pode ocorrer apenas uma dentre as possibilidades a seguir:

- i) A série será convergente para $x = x_0$. Diz-se, neste caso, que o raio de convergência é $R = 0$.
- ii) A série converge para todo x tal que $|x - x_0| < R$, com $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ e a série diverge para $|x - x_0| > R$.
- iii) A série converge para todo x real. Neste caso, dizemos que o raio de convergência é $R = \infty$.

Destacamos que, no caso ii), se $x = x_0 - R$ ou $x = x_0 + R$ (ou seja, se estivermos em um dos extremos do intervalo de convergência), a série pode convergir nos dois extremos, pode divergir nos dois extremos ou pode convergir em um dos extremos e divergir no outro. Os testes da razão e da raiz nunca são conclusivos nos extremos do intervalo de convergência de uma série de potências.



Pesquise mais

No link a seguir, você encontrará videoaulas sobre séries de potências apresentadas pelo Prof. Dr. Cláudio Possani do IME-USP. É um ótimo complemento a esse assunto.

USP. **Séries de Potências (Parte 1 de 5)**. Disponível em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=7017>. Acesso em: 8 ago. 2017."

Séries de potências podem ser derivadas ou integradas para valores de x dentro do raio de convergência da série. Temos o seguinte teorema.

Teorema (derivação e integração de séries de potências): suponha que a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ tenha raio de convergência $R > 0$. Então, a função $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ pode ser derivada termo a termo para todo x tal que $|x - x_0| < R$ e vale que: $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i (x - x_0)^{i-1}$.

Também vale que a função $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ pode ser integrada termo a termo para todo x tal que $|x - x_0| < R$ e vale que:

$$\int_0^x f(x') dx' = C + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i (x - x_0)^{i+1}}{i + 1}.$$

Seja a série de potências $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$.

Podemos derivá-la termo a termo:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

1.3.3 Séries de Taylor e MacLaurin

Acabamos de estudar séries de potências e vimos que é possível representar funções por meio delas. As funções que podem ser representadas por séries de potências são extremamente importantes para os engenheiros e físicos. São tão importantes que recebem um nome especial: são as séries de Taylor. Sobre essas séries vale o teorema a seguir.

Teorema (STEWART, 2006): sempre que uma função $f(x)$ puder ser escrita como uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ em torno do ponto x_0 , com raio de convergência R , ou seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, com a série convergindo para $|x - x_0| < R$, então os coeficientes da série serão dados por $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, em que $f^{(n)}(x_0)$ representa a n -ésima derivada da função f calculada no ponto x_0 e $n!$ representa o fatorial no número natural n .

Se f possui expansão em série de potências convergente para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, costuma-se escrever:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n = f(\mathbf{x}_0) + \frac{f'(\mathbf{x}_0)}{1!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{f''(\mathbf{x}_0)}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \frac{f'''(\mathbf{x}_0)}{3!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^3 \dots$$

Essa expansão é chamada de série de Taylor da função f em torno de \mathbf{x}_0 .

Se o ponto \mathbf{x}_0 for a origem (ou seja, se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$), a série de Taylor fica:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mathbf{0})}{n!} \mathbf{x}^n = f(\mathbf{0}) + \frac{f'(\mathbf{0})}{1!} \mathbf{x} + \frac{f''(\mathbf{0})}{2!} \mathbf{x}^2 + \dots$$
 e recebe o nome de série

de Maclaurin.



Exemplificando

Vejam como obter a série de Maclaurin para $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$. Por ser uma série de Maclaurin, então $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Todas as derivadas de ordem n de $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$ são iguais a $f^{(n)}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$. Tais derivadas calculadas em $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ são iguais a $f^{(n)}(\mathbf{0}) = e^{\mathbf{0}} = 1$. Então, a série de Maclaurin de $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$ será:

$$e^{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mathbf{0}) \mathbf{x}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot \mathbf{x}^n}{n!} = 1 + \frac{\mathbf{x}}{1!} + \frac{\mathbf{x}^2}{2!} + \frac{\mathbf{x}^3}{3!} + \dots$$

1.1.4. Polinômios de Taylor

Podemos representar as funções como exponencial, seno, cosseno, logaritmo, entre outras em termos de sua série de Taylor (ou Maclaurin). Contudo, isso não é prático, pois teremos que lidar com uma soma infinita. Muitas vezes queremos representar uma função por uma soma finita de sua série de Taylor. Essa soma finita recebe o nome de polinômio de Taylor.



Assimile

Definição de polinômio de Taylor de grau n (STEWART, 2006): Seja $f(\mathbf{x})$ uma função que possui, no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, derivadas até ordem n .

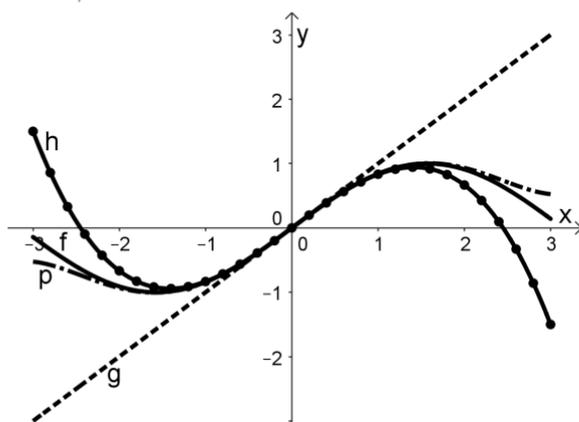
Então, o polinômio de grau n $T_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(\mathbf{x}_0)}{i!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^i =$

$$f(\mathbf{x}_0) + \frac{f'(\mathbf{x}_0)}{1!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{f''(\mathbf{x}_0)}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n$$

é denominado polinômio de Taylor de grau n para a função $f(\mathbf{x})$.

A figura a seguir, desenvolvida no software GeoGebra (Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 30 ago. 2017), apresenta o gráfico da função seno e dos polinômios de Taylor para a função seno $T_1(x) = x$, $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ e $T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Conforme aumentamos o grau do polinômio de Taylor, a convergência fica cada vez melhor para valores cada vez mais distantes de $x_0 = 0$. Por outro lado, à medida que aumentamos o grau do Polinômio de Taylor, são necessários mais cálculos. É mais trabalhoso calcular um polinômio de grau 5 do que um polinômio de grau 3.

Figura 1.1 | Gráficos dos polinômios de Taylor para a função seno (f) de graus 1 (g), 3 (h) e 5 (p).



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando a função $f(x)$ pode ser representada em termos de uma série de Taylor no ponto $x = x_0$, também define-se a função resto de ordem de f no ponto $x = x_0$. É a definição a seguir.



Assimile

Definição de resto de ordem n da função f no ponto $x = x_0$, (STEWART, 2006): seja $f(x)$ uma função que possui, no ponto $x = x_0$, derivadas até ordem n . Então a função pode ser escrita como $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, em que $T_n(x)$ é o polinômio de grau n para a função $f(x)$ e $R_n(x)$ recebe o nome de resto de ordem n de $f(x)$ no ponto $x = x_0$.

O resultado a seguir é de extrema importância para aproximações numéricas de funções com n derivadas.

Teorema: sejam C e $L \in \mathbb{R}$. Suponha que seja válida a desigualdade $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ para todo x tal que $|x - x_0| \leq L$. Então, a função resto da série de Taylor de ordem n atende à desigualdade $|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$ para todo x tal que $|x - x_0| \leq L$.

Com esse teorema, podemos obter aproximações para uma função com uma precisão prefixada.



Exemplificando

Neste exemplo, veremos como utilizar o teorema para a desigualdade do resto da série de Taylor para obter uma aproximação de e (base dos logaritmos neperianos) com quatro casas decimais de precisão. Para isso, faremos a expansão em série de MacLaurin da função $f(x) = e^x$.

Lembremos que a expansão em série de MacLaurin para $f(x) = e^x$ é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Como queremos aproximar o número e , tomamos $x = 1$ e nosso problema é determinar para qual n a aproximação a

$$e^1 \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

está correta com cinco casas decimais.

Queremos determinar o valor n tal que o resto da série de Taylor atenda à desigualdade $|R_n(x)| \leq 0,00005$. Substituindo $x = 1$ na fórmula do resto, teremos: $|R_n(1)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |1-0|^{n+1} \leq \frac{C}{(n+1)!}$. O valor C é uma quantidade

que majora a derivada de ordem $n+1$ da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ (intervalo no qual queremos aproximar a função). Como essa função é crescente, neste intervalo, seu valor máximo é o próprio número e . Como esse é o número que queremos aproximar, não podemos utilizá-lo. Mas sabemos que e é limitado superiormente por 3. Então:

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}. \text{ Queremos } n \text{ tal que } |R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0,00005. \text{ O}$$

que é equivalente a resolver a inequação $(n+1)! \geq 60000$. O menor n que atende a essa exigência é $n = 8$.

$$\text{Portanto: } e^1 \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \cong 2,71828.$$

Sem medo de erro

Vamos relembrar a situação-problema desta seção.

Neste ponto do seu trabalho de consultoria, você deve mostrar como determinarmos o maior valor de x para o qual podemos substituir a função $\text{sen}(x)$ por um polinômio de Taylor de grau 5, com um erro menor que 10^{-5} . Para facilitar a visualização da aproximação de uma função pelos seus polinômios de Taylor, também foi solicitado que você apresentasse, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de $\text{sen}(x)$ e dos polinômios de Taylor de graus $n=1, n=3, n=5, n=7$ e $n=9$.

Para tratar essa situação, em primeiro lugar, precisamos dos polinômios de Taylor da função seno dos graus solicitados.

Temos que as derivadas da função seno na origem são $\text{sen}^{(1)}(0)=1, \text{sen}^{(3)}(0)=-1, \text{sen}^{(5)}(0)=1, \text{sen}^{(7)}(0)=-1$ e $\text{sen}^{(9)}(0)=1$.

O polinômio de grau n para a função seno é:

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Como a questão solicita que se forneça até qual valor de x podemos substituir seno pelo polinômio de Taylor de grau 5 com erro menor que 10^{-5} , queremos determinar o valor de x que atende à desigualdade:

$$\left| \frac{x^7}{7!} \right| \leq 10^{-5}$$

Na desigualdade anterior, observe que o valor $n+1$ seria igual a 6. Contudo, como neste exemplo específico que estamos tratando a derivada é nula, passamos para o próximo termo da série.

Resolvendo a desigualdade anterior:

$$|x^7| \leq 7!10^{-5} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt[7]{7!10^{-5}} = \sqrt[7]{0,0504} = 0,6526$$

No gráfico a seguir, plotamos a função seno e os gráficos dos polinômios de Taylor para o seno até grau 9.



Pesquise mais

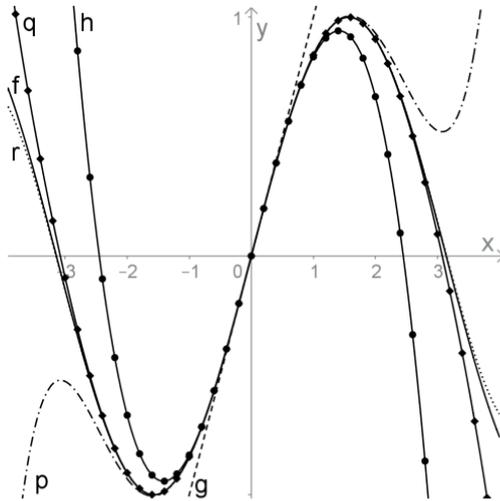
Fica este objeto como sugestão para você consultar e manusear. Neste link você poderá experimentar vários graus para os polinômios de Taylor para a função seno. Vai facilitar muito a sua compreensão.

"GEOGEBRA. **Discover Math with GeoGebra**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/pyXKjfq2>>. Acesso em: 13 set. 2017."

Neste vídeo, comenta-se sobre a construção de um objeto semelhante a esse e é dado destaque à diferença entre a série e a função.

"APROXIMAÇÃO de $\sin(x)$ por polinômios de Taylor utilizando o GeoGebra. Disponível em: <<https://youtu.be/6cdRYPJ-uEg>>. Acesso em: 19 set. 2017."

Figura 1.2 | Comparação entre a função $\sin(x)$ e polinômios de Taylor até grau 9



$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x, \quad h(x) = -\frac{x^3}{6} + x, \quad p(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x,$$

$$q(x) = -\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x, \quad r(x) = \frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x.$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora que você realizou esta etapa, sintetize os resultados obtidos e envie-os na forma de um relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do software.

Avançando na prática

Usando o teste da razão com funções de Bessel

Descrição da situação-problema

Uma das principais aplicações de séries (e, em particular, séries de potências) é na resolução de equações diferenciais ordinárias para as quais métodos mais simples não podem ser aplicados. Um dos exemplos históricos de resolução de equação diferencial com uma série de potências é a equação diferencial de Bessel (p é um número real):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

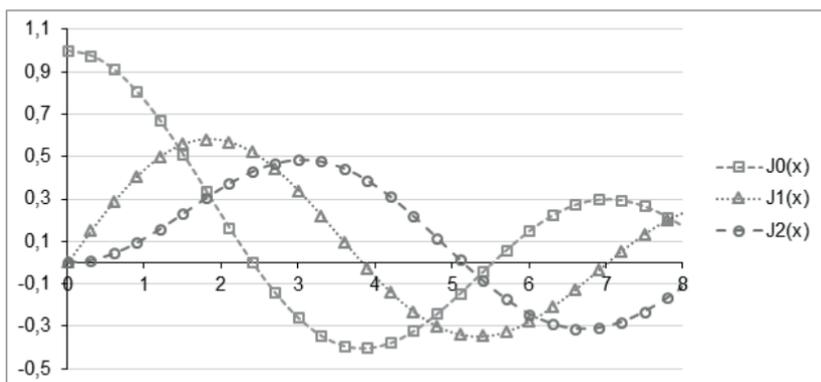
Pode-se resolver essa equação diferencial com séries de potências, obtendo-se as chamadas funções de Bessel. Essas equações diferenciais são utilizadas para modelar fenômenos em diversas áreas da física e da engenharia: eletromagnéticos, vibratórios, de condução de calor, difusão e processamento de sinais, entre outros. A sua resolução em série de potências produz uma função chamada função de Bessel de primeira espécie, dada a seguir:

$$J_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i)!(i+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Se fizermos $m = 0$, temos $J_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i} (i!)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}$.

Na Figura 1.3 a seguir, apresentamos o gráfico das funções de Bessel de 1ª espécie para $m = 0$ até $m = 2$. Observe o caráter oscilatório amortecido destas funções. Para produzir este gráfico, usamos a função BESSELJ do Excel®.

Figura 1.3 | Funções de Bessel de 1ª espécie ($m = 0$ até 2)



Fonte: elaborada pelo autor.

A empresa de produção de softwares de engenharia produzirá um módulo do novo software específico sobre funções de Bessel.

Sua tarefa é elaborar um texto mostrando que a série de potências para a função de Bessel converge para todos os valores de x . Este texto será incluído no manual de uso do software e, por esse motivo, é preciso que você seja sucinto e explicativo, pensando no usuário final.

Resolução da situação-problema

Dada a própria característica da função de Bessel, determinaremos o seu raio de convergência usando o teste da razão. Fazemos uso desse teste porque ele permitirá o cancelamento de fatores comuns. Veja!

Para aplicar o teste da razão, devemos avaliar o limite $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Se esse limite for nulo, então o raio de convergência será, por definição, infinito e a série de potências para a função de Bessel converge para todo x real. Substituindo a expressão dos coeficientes da série de potências para a função de Bessel:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{x}{2}\right) \frac{n!n!}{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}}{(n+1) \cdot n! (n+1) \cdot n!} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right| = 0 < 1, \text{ para todo } x \text{ real. Assim, mostramos} \end{aligned}$$

que o raio de convergência é infinito.

Agora, basta você elaborar o texto conforme as necessidades expressas anteriormente, pensando que ele será um texto apresentado ao usuário do futuro software.

Faça valer a pena

1. Um exemplo de série importante é a chamada série telescópica. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
 é uma série desse tipo.

Uma soma telescópica é uma soma do tipo:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1.$$

Denominam-se séries telescópicas aquelas que são o limite de uma soma telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1.$$

Portanto, se a série telescópica for convergente, então existe e é finito o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1$.

Por outro lado, se existir e for finito o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1$, então a série telescópica será convergente.

Outros exemplos de séries telescópicas são: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)(2n+1)}$.

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. Então, é correto afirmar que:

a) Essa série é convergente pelo teste da raiz.

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ é convergente, pois é uma série de potências.

c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ é divergente, pois vale que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{n+1}$ e o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{n+1}$ não é finito.

d) Essa série é divergente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ é finito.

e) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ é convergente.

2. Lembremos a definição de série convergente.

Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é convergente se a sequência $\{s_n\}$ de suas somas

parciais, definida por $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, for convergente. Se a sequência das somas parciais não for convergente, dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é divergente.

Existe um outro critério para a verificação de convergência de séries. É o teste da Integral.

Teste da Integral: considere f uma função contínua, decrescente para todo $x \in [1, \infty)$ e tal que $f(x) > 0$. Para aplicar o teste da Integral, adotamos $a_n = f(n)$. Então vale que:

i) Se a Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

ii) Se a Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.

O teste da Integral pode ser utilizado para demonstrar a convergência das p -séries: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Uma p -série será convergente se $p > 1$ e será divergente se $p \leq 1$.

Existem vários testes para determinar se uma série é convergente, divergente ou absolutamente convergente.

A seguir, apresentamos uma sugestão de estratégia para testar a convergência de séries:

1. Teste se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, a série diverge. Se o limite for nulo, a série pode convergir ou divergir.
2. Avalie se a série é uma série geométrica.

3. Avalie se a série é uma p-série.
4. Avalie se é possível efetuar o teste da Integral.
5. Avalie se os testes da razão ou da raiz são conclusivos.
6. Se a série for alternada, efetue o teste da série alternada.

Usando os testes para convergência de séries estudados nesta seção, assinale a alternativa correta.

- a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ é divergente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.
- b) A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2}$ é convergente pelo teste de Leibniz para séries alternadas, apesar de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} \neq 0$.
- c) Usando o teste da comparação, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}$ é divergente, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ também é divergente e vale que $\frac{2^{-n}}{n+1} \leq 2^{-n}$.
- d) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$ é condicionalmente convergente e absolutamente convergente.
- e) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é convergente pelo teste da integral, pois é uma p-série com $p < 1$.

3. A expansão em série de Taylor de uma função f no ponto $x = x_0$ é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + (\dots)$$

Além disso, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ para $|x - x_0| \leq L$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor atende à desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Facilitará seus cálculos neste exercício utilizar o resultado a seguir.

Se f e g são duas funções cujas séries de potências sejam $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, então, a série de potências da função $f(x) \cdot g(x)$ é obtida pelo produto das séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Considere a função $f(x) = 7x^2 \cos(x)$. Assinale a alternativa que apresenta a série de Maclaurin para a função anterior.

$$\text{a) } 7x^2 \cos(x) = 7x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots$$

$$\text{b) } 7x^2 \cos(x) = 7x^2 - \frac{7x^4}{2!} + \frac{7x^6}{4!} - \frac{7x^8}{6!} + \dots$$

$$\text{c) } 7x^2 \cos(x) = 7x^3 - \frac{7x^5}{3!} + \frac{7x^7}{5!} - \frac{7x^9}{7!} + \dots$$

$$\text{d) } 7x^2 \cos(x) = 7x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\text{e) } 7x^2 \cos(x) = \frac{7x^2}{1!} + \frac{7x^4}{3!} - \frac{7x^6}{5!} + \dots$$

Seção 1.2

Séries de Fourier

Diálogo aberto

Nesta seção, você será apresentado às séries de Fourier. O matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi aluno de Lagrange, Laplace e Monge. Fourier publicou seu trabalho, *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor), em 1822. Nesse trabalho, Fourier propõe que é possível representar uma função por somas trigonométricas infinitas. Embora essa teoria apresente deficiências de rigor (o que é compreensível historicamente), foram justamente essas imprecisões e as investigações subsequentes, para tratar de forma rigorosa as afirmações de Fourier, que conduziram a extensas pesquisas com resultados altamente relevantes na atualidade nas aplicações da engenharia e da física. As aplicações atuais do trabalho iniciado por Fourier envolvem, além da condução do calor em uma barra, equação da corda vibrante, oscilações forçadas em sistemas mecânicos e em circuitos elétricos, música, equação da onda, estudo da equação da membrana, processamento de sinais, telecomunicações e cálculo numérico. Assim, não tenha a menor dúvida: você está iniciando seus estudos em uma área histórica da matemática e da engenharia.

Como as séries de Fourier são somas infinitas de senos e cossenos, elas exigem, entre outros, os conceitos de periodicidade de funções e a discussão sobre a convergência dessas somas infinitas. Além disso, se soubermos que a função a ser representada pela série de Fourier é par (ou ímpar), poderemos simplificar os cálculos utilizando certas propriedades de integrais de funções pares (ou ímpares).

Você verá, nesta seção, algumas funções que são bastante frequentes em aplicações da engenharia: as funções de onda quadrada, onda triangular e funções do tipo “dente de serra”. Essas funções aparecem, por exemplo, em circuitos elétricos ou processamento de sinais. Daí sua relevância.

A obtenção de aproximações do π com cada vez mais casas decimais sempre foi perseguida ao longo da história da Matemática.

Com o advento de computadores e calculadoras, não foi diferente. Cada novo modelo de computador mais potente ou software com novos algoritmos oferecia espaço para mais investigações acerca da aproximação do π . Utilizam-se essas aproximações do π para validar algoritmos e softwares científicos. Esse é o seu papel nesta nova etapa do contexto que lhe apresentamos no início desta unidade. Como você foi contratado para produzir o conteúdo teórico para os fundamentos do software científico, a ser desenvolvido por uma empresa prestadora de serviços de engenharia, você decidiu utilizar esse aspecto histórico para apresentar como utilizar séries de Fourier em aproximações numéricas.

O matemático francês Joseph Fourier desenvolveu as séries de Fourier para resolver o problema da condução do calor em uma barra. No entanto, os matemáticos, físicos e engenheiros, ao longo do tempo, foram descobrindo inúmeros aspectos interessantes, surpreendentes e aplicáveis dessas séries. Uma aplicação inicialmente inesperada para as séries de Fourier é sua utilização na aproximação do π .

Como você poderia, utilizando séries de Fourier para a função $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, mostrar que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$?

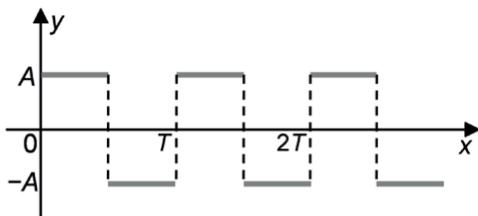
Não pode faltar

1.2.1 Definição de Séries de Fourier

Antes de iniciarmos propriamente nosso estudo sobre séries de Fourier, é necessário nos atentarmos a alguns aspectos sobre funções periódicas.

Observe a Figura 1.4, na qual vemos o gráfico de uma função periódica de período genérico T e amplitude de onda A , com valor médio igual a zero.

Figura 1.4 | Onda quadrada: exemplo de função periódica descontínua



Fonte: elaborada pelo autor.

A onda quadrada da Figura 1.4 é um exemplo de função periódica descontínua. As funções seno e cosseno são exemplos de funções periódicas contínuas. Fenômenos periódicos fazem parte da vida dos engenheiros. A voltagem sobre um circuito elétrico pode consistir de uma sequência de pulsos periódicos, como mostrado na Figura 1.4. Fenômenos periódicos também aparecem em sistemas mecânicos (a amplitude do ângulo de oscilação de um trem pode aumentar com a velocidade se o sistema não foi cuidadosamente projetado ou operado), em sistemas biológicos e também econômicos. Portanto, precisamos definir claramente o que são funções periódicas.

Veja a definição a seguir.



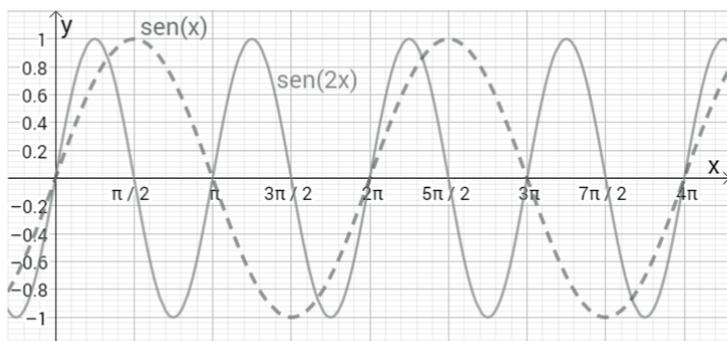
Assimile

Definição de função periódica: seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é periódica se, e somente se, existir um número positivo P tal que para todo t no domínio de f vale que $f(t+P) = f(t)$. O número P é chamado de período de f (WYLIE e PRATT, 1985).

As séries de Fourier são definidas a partir de somas infinitas de senos e cossenos. Por esse motivo, trataremos a seguir, com um pouco mais de detalhe, sobre estas duas funções.

A função $f_1(x) = \text{sen}(x)$ é periódica de período 2π , pois $f_1(x) = f_1(x+2\pi)$ para todo x . Já a função $f_2(x) = \text{sen}(2x)$ é periódica de período π , pois $f_2(x) = f_2(x+\pi)$. Observe que, ao multiplicarmos o argumento do seno por 2, é como se estivéssemos percorrendo o domínio da função seno com o "dobro da velocidade" com que este domínio é percorrido pela função $\text{sen}(x)$. Se estamos "andando" com o dobro da velocidade, o tempo para repetirmos os valores da função $f_2(x)$ será a metade do período da função $f_1(x) = \text{sen}(x)$. Veja a seguir os gráficos das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ na Figura 1.5.

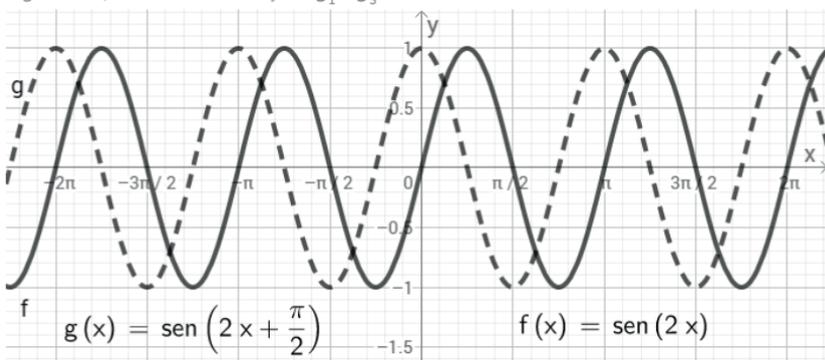
Figura 1.5 | Gráficos das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Em geral, vale que o período da função $g_1(x) = \text{sen}(\omega x)$ é $\frac{2\pi}{\omega}$ e que o período da função $g_2(x) = \text{cos}(\omega x)$ é $\frac{2\pi}{\omega}$. Considere a função $g_3(x) = \text{sen}(\omega x + \phi)$. Na Figura 1.6, plotamos os gráficos das funções g_1 e g_3 com $\omega = 2$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. A constante ϕ tem o efeito de deslocar o gráfico da função g_1 para à esquerda de ϕ unidades. Ela não altera o período da função g_1 . Assim, o período da função g_3 também é $\frac{2\pi}{\omega}$.

Figura 1.6 | Gráficos das funções g_1 e g_3



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Use softwares como wxMaxima ou GeoGebra para fazer os gráficos das funções g_1 e g_3 com vários valores para ω e ϕ . Será que modificar ϕ altera o período de g_1 e g_3 ?

Observe que vale a identidade $\text{sen}\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \text{sen}(\omega x + 2\pi) = \text{sen}(\omega x)$ para todo x . Assim, $\frac{2\pi}{\omega}$ é o período da função $g_1(x) = \text{sen}(\omega x)$. Também vale a identidade semelhante para a função cosseno: $\cos\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos(\omega x)$.



Pesquise mais

Você pode conhecer um pouco mais sobre J. B. Fourier consultando os links indicados a seguir:

ALENCAR, M. S. de. **ANálise de Fourier e o Aquecimento Global**. Disponível em: <http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Aquecimento_Global_Fourier.pdf>. Acesso em: 9 set. 2017.

JEAN Baptiste Joseph Fourier (Traduzido pelo GooGle). Disponível em: <<https://goo.gl/vMbgFN>>. Acesso em: 23 set. 2017.

1.2.2 Convergência de séries de Fourier

Agora que já expusemos como lidar com os argumentos das funções seno e cosseno, vejamos a definição das séries de Fourier.



Assimile

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida sobre o intervalo $(-L, L)$. Supomos que essa função seja periódica de período $2L, L \in \mathbb{R}$.

A expansão em série de Fourier da função f é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] + b_n \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] \right),$$

em que os coeficientes a_n e b_n

são dados por:

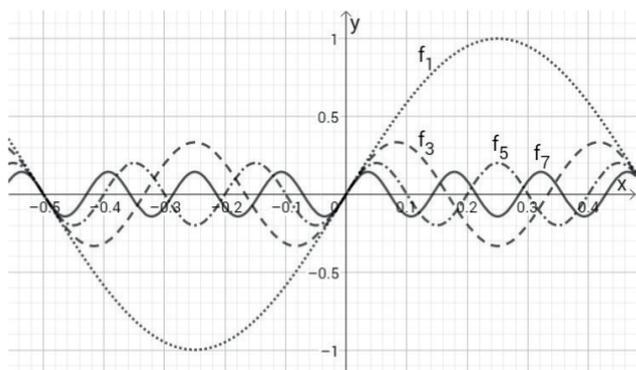
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$\text{e } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx \text{ e } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vejamos um exemplo de utilização das séries de Fourier para aproximar a onda quadrada.

Podemos aproximar, com o grau desejado de aproximação, uma onda quadrada por uma série de Fourier. Veja os gráficos da Figura 1.7. Nela vemos gráficos de funções seno para a frequência fundamental $k=1$ e para os harmônicos $k=3, k=5, k=7, k=9, k=11$. Adotamos, para estes gráficos, que o período é $T=1$.

Figura 1.7 | Gráficos para as funções $f_k(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right)$ com $k=1$, $k=3$, $k=5$, $k=7$ e $T=1$



Fonte: elaborada pelo autor.

Pesquise mais

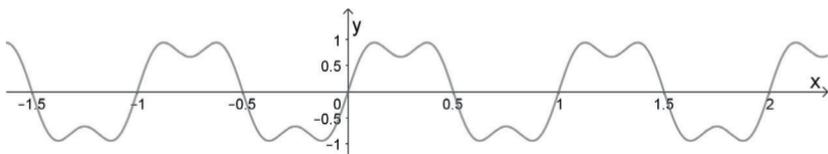
Para melhor compreensão do exposto na Figura 1.7, recomendamos que você acesse o link indicado a seguir para experimentar outros valores para k e observar o que ocorre com o gráfico das funções $f_k(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right)$.

GEOGEBRA. **Gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right)$.** Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hMWZH5PW>>. Acesso em: 9 set. 2017.

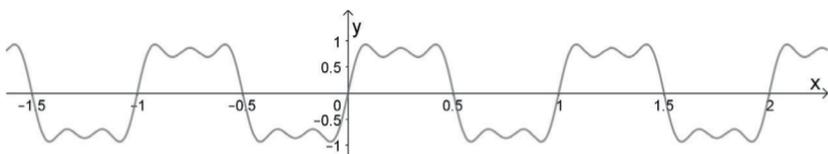
GEOGEBRA. **Gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right)$.** Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hMWZH5PW>>. Acesso em: 9 set. 2017.

Na Figura 1.8, temos os gráficos, da esquerda para a direita, respectivamente, para as funções $g_3(x) = f_1(x) + f_3(x)$, $g_5(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x)$ e $g_{11}(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x) + f_{11}(x)$.

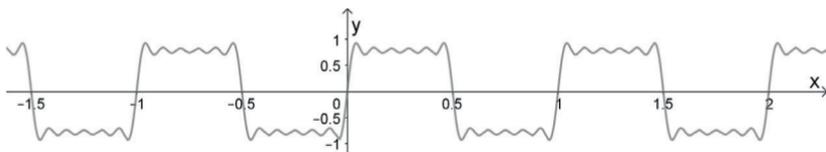
Figura 1.8 | Gráficos das funções $g_3(x)$, $g_5(x)$ e $g_{11}(x)$



$$g_3(x) = \sum_{i=1}^3 f_{2i-1}(x) = \frac{1}{1} \text{sen}\left(1 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{3} \text{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right)$$



$$g_5(x) = \sum_{i=1}^5 f_{2i-1}(x) = \frac{1}{1} \text{sen}\left(1 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{3} \text{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right)$$



$$g_{11}(x) = \sum_{i=1}^6 f_{2i-1}(x) = \frac{1}{1} \operatorname{sen}\left(1 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}\left(5 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{7} \operatorname{sen}\left(7 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{9} \operatorname{sen}\left(9 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right) + \frac{1}{11} \operatorname{sen}\left(11 \cdot \frac{2\pi}{1} x\right)$$

Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Para que sua experiência de visualização da Figura 1.8 seja mais completa, recomendamos que você acesse o link apresentado a seguir.

GEOGEBRA. **Séries de Fourier para aproximar a onda quadrada.**

Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/VwAvymzr>>. Acesso em: 25 set. 2017.

Note que nos pontos de descontinuidade da função f , a aproximação obtida pela série de Fourier apresenta oscilações. Esse fenômeno é conhecido como fenômeno de Gibbs.

Observe, ainda, nos gráficos da Figura 1.8, que à medida que adicionamos funções seno com harmônicos mais elevados, melhor fica nossa aproximação de uma onda quadrada. Essa é a ideia básica de séries de Fourier: somas de senos (e cossenos) para representarem funções contínuas ou descontínuas com descontinuidades finitas em um número finito de pontos.

Mas surge aqui uma questão matemática de extrema importância: sob quais condições a série de Fourier para a função f efetivamente se aproxima da função f que queremos aproximar? O matemático alemão Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi o primeiro a apresentar condições suficientes relativas à convergência das séries de Fourier. Nesse trabalho, Dirichlet acabou por propor a definição moderna do conceito de função. Essas condições são conhecidas atualmente como Condições de Dirichlet.



Assimile

Teorema (Condições de Dirichlet)

Suponha que f seja uma função contínua por partes em um intervalo $[-L, L]$, e que os pontos $-L = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = L$ sejam os pontos em $[-L, L]$, para os quais a função é estritamente decrescente ou estritamente crescente entre cada t_i e t_{i+1} . Então, a série de Fourier de f converge para

$$\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)], x \in]-L, L[\text{ e } \frac{1}{2}[f(-L_+) + f(L_-)], x = -L \text{ ou } x = L.$$

Além disso, se f for contínua em qualquer intervalo fechado contido em $[-L, L]$, a convergência será uniforme (BUTKOV, 1978).

Em outras palavras, se a função f for descontínua apenas em um número finito de pontos no intervalo $[-L, L]$, e estritamente crescente ou estritamente decrescente em subintervalos de $[-L, L]$, a série de Fourier de f converge para f nos pontos em que f é contínua e converge para o valor médio de f nos seus pontos de descontinuidade. Deve ser destacado, ainda, do Teorema acima, que ele fornece apenas condições suficientes para a convergência de séries de Fourier e não condições necessárias.



Pesquise mais

No vídeo indicado, você vai ver um exemplo de como encontrar a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0 \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$.

SÉRIE de Fourier. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=8xjK2l-WhWk>>. Acesso em: 26 ago. 2017.

No link indicado, você encontrará uma sequência de videoaulas sobre séries de Fourier: <<https://www.youtube.com/watch?v=JFdBfemyXRU>>. Acesso em: 29 ago. 2017.

UNIVESP. **Cálculo IV - Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 1 de 8**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JFdBfemyXRU>>. Acesso em: 29 ago. 2017.

1.2.3 Séries de Fourier de funções pares, ímpares e extensões periódicas

Nesta subseção, veremos as séries de Fourier em senos e cossenos e a sua determinação para extensões periódicas de uma função.

Existem dois tipos de funções para os quais as séries de Fourier podem ter os cálculos dos coeficientes a_n e b_n facilitados: são as funções pares e ímpares.



Assimile

Definição função par: uma função f é denominada de função par se, sempre que o domínio de f contiver o ponto x , ele também contiver o ponto $-x$ e valer que $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Definição função ímpar: uma função f é denominada de função ímpar se, sempre que o domínio de f contiver o ponto x , ele também contiver o ponto $-x$ e valer que $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Valem as seguintes propriedades para funções pares e ímpares: a soma (e a diferença) de funções pares também é uma função par; a soma (e a diferença) de funções ímpares também é uma função ímpar; o produto de uma função ímpar por outra ímpar resulta em uma função par; o produto (ou quociente) de uma função par com uma ímpar resulta em uma função ímpar.



Exemplificando

São exemplos de funções pares: $f(x) = 2$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = x^2$.

São exemplos de funções ímpares: $f(x) = x$, $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = x^3$.

A característica importante de funções pares relacionada às séries de Fourier é que se f é uma função par, vale que $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$. Se a função for ímpar, vale que $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$.



Refleta

Por que a igualdade $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$ é válida para funções pares?

Em função da observação anterior para funções pares, se soubermos que a função com relação a qual precisamos determinar a série de Fourier é uma função par, nossos cálculos ficarão bastante simplificados.

Série de Fourier em cossenos (BOYCE; DIPRIMA, 2015): seja f uma função par, periódica de período $2L$ e contínua por partes, com sua primeira derivada também contínua por partes. Então, como o produto de funções pares é uma função par, a função $f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$ também é um função par. Então, os coeficientes $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$ serão iguais a $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$. Como o produto de função par por função ímpar resulta em função ímpar, temos que a integral

$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right] dx = 0$. Portanto, a série de Fourier para uma função par é $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left[\frac{n\pi x}{L} \right]$.

Vale um resultado análogo para funções ímpares, para as quais teremos séries de Fourier em senos. Veja o resultado a seguir.

Série de Fourier em senos (BOYCE; DIPRIMA, 2015): seja f uma função ímpar, periódica de período $2L$ e contínua por partes, com sua primeira derivada também contínua por partes. Então, como o produto de funções ímpares é uma função par, as funções $f(x) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right]$

são funções pares. Então os coeficientes $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right] dx$ serão iguais a $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right] dx$. Como o produto de função

ímpar por função par resulta em função ímpar, temos que a integral

$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left[\frac{n\pi x}{L} \right] dx = 0$. Portanto, a série de Fourier para uma

função ímpar é $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right]$.

Em muitas situações práticas, temos uma função f definida apenas para o intervalo $]0, L[$ e queremos representar essa função por uma série de Fourier de período $2L$. Temos duas alternativas usuais: a extensão par de período $2L$ da função f e a extensão ímpar de período $2L$ da função f . A escolha de uma ou outra extensão é dada pelo problema em particular que estivermos tratando.



Assimile

Extensão par de período $2L$ (BOYCE; DIPRIMA, 2015): a extensão periódica

par da função f é dada por: $f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(x), & -L < x < 0 \end{cases}$

Extensão ímpar de período $2L$ (BOYCE; DIPRIMA, 2015): a extensão

periódica ímpar da função f é dada por: $f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$
e $f_{\text{ímpar}}(0) = f_{\text{ímpar}}(L) = 0$.

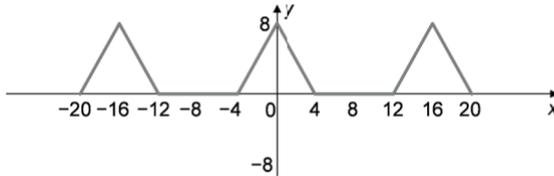
Suponha que a função f satisfaça às condições de convergência de Dirichlet. Então, a série de Fourier em cossenos convergirá para a extensão par da função f , e a série de Fourier em senos convergirá para a extensão ímpar da função f .



Exemplo adaptado de Boyce e Diprima (2015): seja $f(x) = \begin{cases} 8 - 2x, & 0 < x \leq 4 \\ 0, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$.

A expansão em cossenos dessa função convergirá para a extensão periódica par de $f(x)$ cujo gráfico é dado pela Figura 1.9.

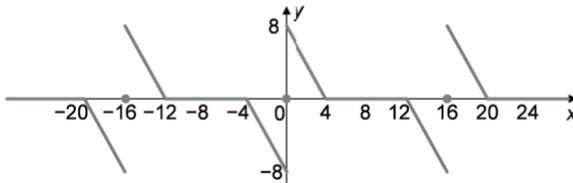
Figura 1.9 | Extensão periódica par de $f(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Já a expansão em senos de $f(x)$ convergirá para a extensão periódica ímpar de $f(x)$ cujo gráfico é dado pela Figura 1.10.

Figura 1.10 | Extensão periódica ímpar de $f(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

1.2.4 Forma complexa das séries de Fourier

O matemático suíço Leonhard Euler (1717-1783) apresentou contribuições para inúmeras áreas da Matemática: Geometria, Análise, Topologia, Teoria dos Números, e, ainda, colaborou para a Física e a Astronomia. Euler apresentou a identidade que se denomina atualmente como a identidade de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$$

Da identidade acima, temos que $e^{-ix} = \cos(x) - i\text{sen}(x)$. Se definirmos os coeficientes C_n por $-$ aqui, seguimos a notação utilizada por Butkov (1988):

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n), n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0, n = 0 \end{cases}, \text{ podemos reescrever a s\u00e9rie de Fourier na sua forma}$$

$$\text{complexa: } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}, \text{ com } x \in [-L, L] \text{ e } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx.$$

A vantagem dessa notação \u00e9 que ela \u00e9 mais compacta.

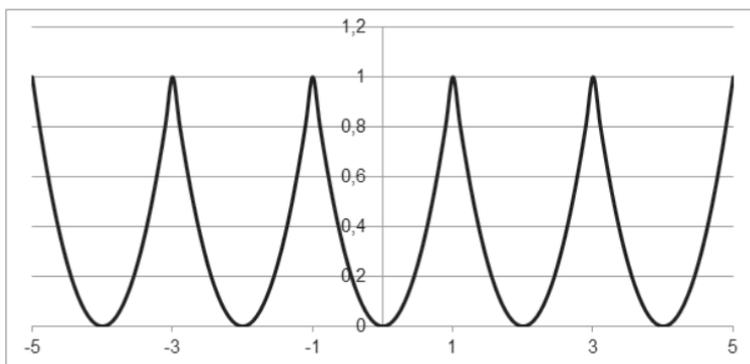
Sem medo de errar

Lembre-se de que, nessa unidade, estamos supondo que voc\u00ea est\u00e1 trabalhando na produ\u00e7\u00e3o de um novo software especializado em aplica\u00e7\u00f5es cient\u00edficas e de engenharia. Sua atribui\u00e7\u00e3o nesse processo \u00e9 apresentar os desenvolvimentos te\u00f3ricos e as aplica\u00e7\u00f5es das s\u00e9ries de Fourier.

Uma das ideias para o conte\u00fado que ser\u00e1 utilizado no manual do novo software \u00e9 sobre como utilizar s\u00e9ries de Fourier na aproxima\u00e7\u00e3o do π . De forma mais espec\u00edfica, \u00e9 necess\u00e1rio que voc\u00ea mostre, utilizando s\u00e9ries de Fourier para a fun\u00e7\u00e3o $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, como validar o seguinte resultado: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

Consideremos a fun\u00e7\u00e3o $f(x) = x^2$ com sua extens\u00e3o per\u00edodica par, tal como observamos na Figura 1.11. O per\u00edodo \u00e9 2, portanto $L = 1$.

Figura 1.11 | Gr\u00e1fico da extens\u00e3o per\u00edodica par de $f(x) = x^2$



Fonte: elaborada pelo autor

Como a função é par, a expansão em série de Fourier será uma série em cossenos (ou seja, os coeficientes $b_n = 0, \forall n > 0$). A seguir, estão os cálculos dos coeficientes a_0 e a_n :

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Efetuamos integração por partes para determinar os a_n :

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n$$

$$\text{Então, } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Fazendo $x = 1$ teremos $1^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi)$, em que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi).$$

$$\text{Finalmente: } \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Você pode utilizar uma planilha Excel® para avaliar a velocidade de convergência dessa série.

Na tabela a seguir, apresentamos os valores aproximados para π com essa série comparados ao valor correto de π , que é 3,1415926536, com dez casas decimais corretas.



Pesquise mais

O valor do π com muito mais do que dez casas decimais pode ser obtido, por exemplo, no link indicado.

Disponível em: <<http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/digits.html>>. Acesso em: 23 set. 2017.

Para saber mais detalhes sobre a história do π , sugerimos a consulta ao link apresentado.

WENDPAP, B. G.; BASTIANI, F. De ; GUZZO, S. M. **Uma abordagem histórico-matemática do número pi (π)**. Disponível em: <<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxisam/artigos/19.pdf>>. Acesso em: 23 set. 2017.

Tabela 1.1 | Comparação π_n e $|\pi - \pi_n|$

N	π_n	$ \pi - \pi_n $ (π com 10 casas decimais corretas)
10	3,049362	0,092231
100	3,132077	0,09516
500	3,139684	0,001909
1000	3,140638	0,000955

Fonte: elaborada pelo autor.

Neste ponto, você concluiu mais uma etapa do seu desenvolvimento teórico para a documentação do software especializado da empresa de consultoria de Engenharia para a qual seus serviços foram contratados. Sintetize os resultados obtidos e envie um relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do **software**.

Avançando na prática

Expansão em série de senos e cossenos para $f(x) = x, 0 < x < 4$

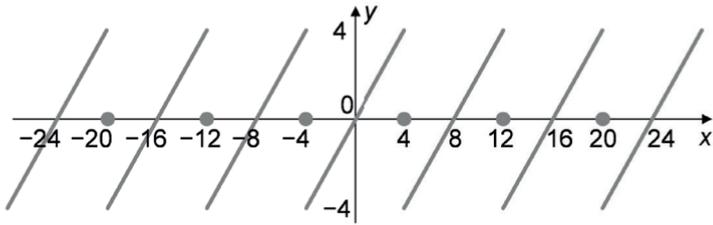
Descrição da situação-problema

Dentro do seu contrato para produzir os desenvolvimentos teóricos para o novo software especializado para cientistas e engenheiros, a empresa solicitou que você apresentasse alguns exemplos ilustrativos de cálculos de expansão de uma função em série de Fourier de senos e de cossenos. Quais você poderia incluir?

Resolução da situação-problema

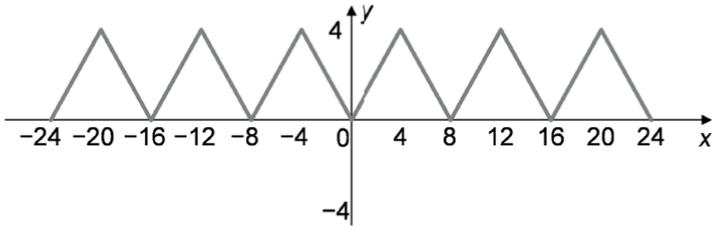
Antes de iniciar os cálculos para determinar as expansões em série de senos e de cossenos, seria interessante apresentar, por exemplo, os gráficos de $f(x) = x, 0 < x < 4$ para cada um dos casos. Para a expansão em série de senos, teremos a expansão periódica ímpar da função f e, para a expansão em série de cossenos, teremos a expansão periódica par de f .

Figura 1.12 | Expansão periódica ímpar de f



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.13 | Expansão periódica par de f



Fonte: elaborada pelo autor.

Determinação da expansão em série de senos.

Neste caso, os coeficientes a_n são todos nulos. Resta calcular os b_n :

$$b_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx$$

Efetuamos integração por partes:

$$\frac{1}{2} \int_0^4 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left[x \frac{(-4)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) - \frac{4^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_0^4 = -\frac{1}{2} \frac{16}{n\pi} \cos(n\pi)$$

Assim,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n\pi} \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

Determinação da expansão em série de cossenos.

Neste caso, os coeficientes b_n são todos nulos. Resta calcular os a_n :

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x dx = 4;$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx.$$

Efetuamos integração por partes:

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx ;$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left[x \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) + \frac{4^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_0^4 = \frac{1}{2} \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - 1 ;$$

$$a_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - 1 .$$

Assim,

$$f(x) = \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) .$$

Observe que a função $f(x) = x, 0 < x < 4$ é igualmente bem aproximada, tanto pela série de Fourier em senos quanto pela série de Fourier em cossenos.

Faça valer a pena

1. Uma função f é par se, sempre que seu domínio contiver x , seu domínio também contiver $-x$ e valer que $f(-x) = f(x), \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$.

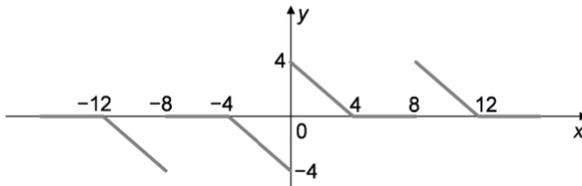
Uma função f é ímpar se, sempre que seu domínio contiver x , seu domínio também contiver $-x$ e valer que $f(-x) = -f(x), \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$.

Se f é uma função par, então, vale que $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$, e, se f é função ímpar, vale que $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$.

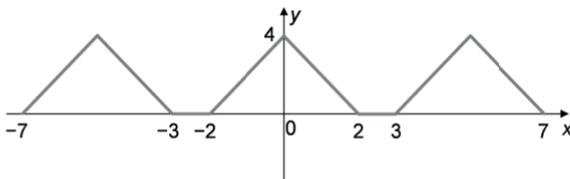
Seja $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, 0 < x \leq 2 \\ 0, 2 < x \leq 3 \end{cases}$, então a extensão periódica par e a extensão

periódica ímpar de f são dadas, respectivamente, pela alternativa:

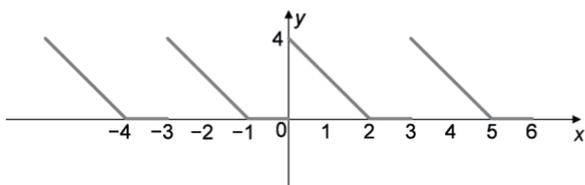
a) Extensão par:



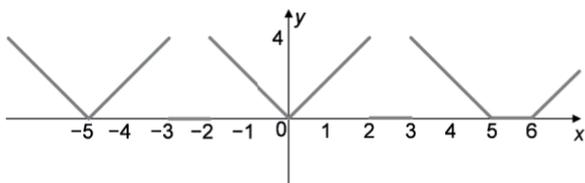
Extensão ímpar:



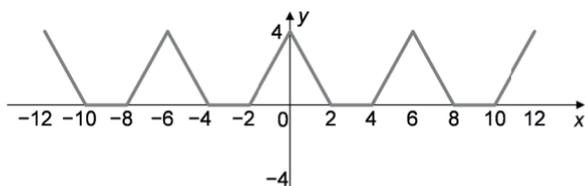
b) Extensão par:



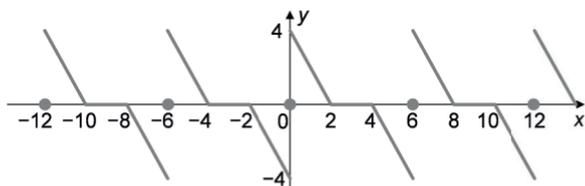
Extensão ímpar:



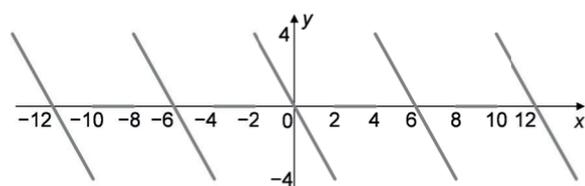
c) Extensão par:



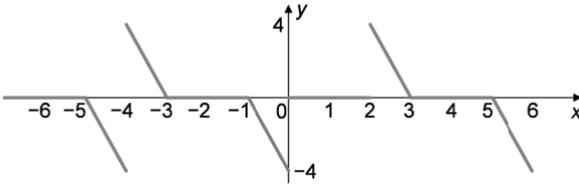
Extensão ímpar:



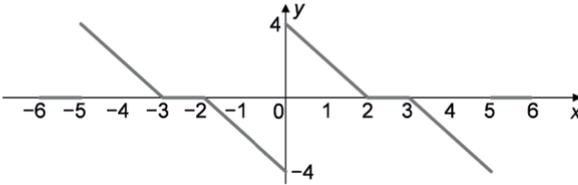
d) Extensão par:



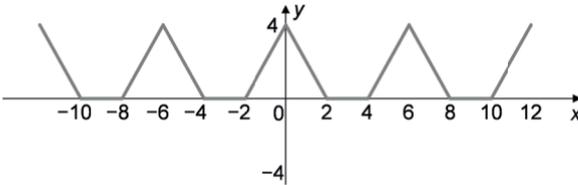
Extensão ímpar:



e) Extensão par:



Extensão ímpar:



2. Se uma função f é periódica com período $T = 2L$, os coeficientes de sua expansão em série de Fourier serão dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx, n = 1, 2, \dots$$

A série de Fourier para f é dada por $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] + b_n \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$.

Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } -4 < x < 0 \\ C, & \text{para } 0 < x < 4 \end{cases}, \text{ com período igual a } 8. \text{ Os coeficientes da}$$

expansão em série de Fourier para esta função são dados pela alternativa:

a) $\frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[\cos\left[\frac{\pi x}{4}\right] + \frac{1}{3} \cos\left[\frac{3\pi x}{4}\right] + \frac{1}{5} \cos\left[\frac{5\pi x}{4}\right] + \dots \right]$.

b) $\frac{C}{2} + \frac{3C}{\pi} \left[\text{sen}\left[\frac{3\pi x}{4}\right] - \frac{1}{3} \text{sen}\left[\frac{5\pi x}{4}\right] + \frac{1}{5} \text{sen}\left[\frac{7\pi x}{4}\right] + \dots \right]$.

c) $\frac{C}{2} + \frac{C}{3\pi} \left[-\text{sen}\left[\frac{\pi x}{4}\right] + \frac{1}{3} \text{sen}\left[\frac{3\pi x}{4}\right] - \frac{1}{5} \text{sen}\left[\frac{5\pi x}{4}\right] + \dots \right]$.

$$d) \frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[\text{sen} \left[\frac{\pi x}{4} \right] + \frac{1}{3} \text{sen} \left[\frac{3\pi x}{4} \right] + \frac{1}{5} \text{sen} \left[\frac{5\pi x}{4} \right] + \dots \right].$$

$$e) \frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[\frac{1}{4} \text{sen} \left[\frac{\pi x}{1} \right] + \frac{3}{4} \text{sen} \left[\frac{\pi x}{3} \right] + \frac{5}{4} \text{sen} \left[\frac{\pi x}{5} \right] + \dots \right].$$

3. Se as funções f e f' são contínuas por partes no intervalo $] -L, L[$ e f é uma função periódica par com período $2L$, teremos, das propriedades das funções pares e ímpares, que o produto $f(x) \cos \left[\frac{n\pi x}{L} \right]$ é uma função par e que o produto $f(x) \text{sen} \left[\frac{n\pi x}{L} \right]$ é uma função ímpar.

Portanto, os coeficientes de Fourier da função f são dados por $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 0$ e $b_n = 0, \forall n > 0$ e f possui série de Fourier apenas em cossenos.

Resultado análogo vale se as funções f e f' são contínuas por partes no intervalo $] -L, L[$ e f for periódica ímpar de período $2L$. Então a função f possui série de Fourier apenas em senos.

Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} + x, & -5 \leq x \leq 0 \\ \frac{5}{2} - x, & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Considere a extensão periódica

desta função (você terá uma "onda triangular").

Denote por $f_1(x)$ a série de Fourier para f sobre todo o domínio de f ; denote

por $f_2(x)$ a série em senos de Fourier para a função $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ e

por $f_3(x)$ a série em cossenos de Fourier para a função $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$.

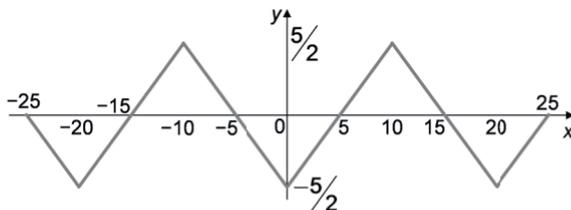
Então, é correto afirmar que:

a) $f_1(x)$ possui expansão em série de Fourier dada por

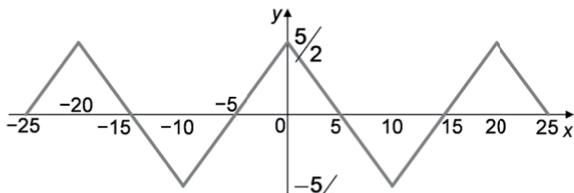
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n\pi)^2} (1 - \cos(5n\pi)) \text{sen}(n\pi x) = \frac{10}{\pi^2} \text{sen}(\pi x) + \frac{10}{9\pi^2} \text{sen}(3\pi x) + \frac{10}{25\pi^2} \text{sen}(5\pi x) + \dots$$

b) $f_2(x)$ converge para a extensão periódica par da função

$g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$, cujo gráfico é dado por:



c) $f_3(x)$ converge para a extensão periódica ímpar da função $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$, cujo gráfico é dado por:



d) Os coeficientes para a série de Fourier em cossenos de $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ são $a_0 = 0$, $a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} (1 - \cos(5n\pi)), \forall n > 0$ e $b_n = 0, \forall n > 0$.

e) Os coeficientes para a série de Fourier em senos de $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ são $a_n = 0, \forall n \geq 0$, $b_n = \frac{4}{(n\pi)^2} \left(7 - \text{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right), \forall n > 0$.

Seção 1.3

Aplicações das séries de Fourier

Diálogo aberto

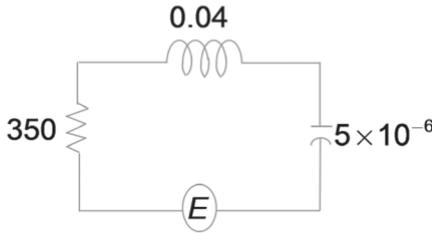
Após estudar as séries de Fourier, chegou a hora de aplicá-las na resolução de problemas de engenharia. É o que faremos nesta seção.

As séries de Fourier podem ser utilizadas para resolver um tipo de equação diferencial chamado de equação a derivadas parciais (costuma-se utilizar a abreviação EDP). Nesse tipo de equação diferencial, temos a presença de derivadas parciais de uma função desconhecida. Existem muitos problemas importantes na física e na engenharia nos quais temos uma geometria específica: pode ser a condução do calor em uma barra (que nos levará a um problema em um retângulo) ou a vibração de uma membrana circular. Tais configurações geométricas impõem condições sobre os valores da função incógnita nos bordos da figura geométrica. Esses problemas recebem, então, o nome de problemas de valores de contorno (abrevia-se para PVC). É interessante você recordar que, quando estudamos as equações diferenciais ordinárias (EDO's), estudamos problemas de condição inicial (precisamos informar os valores da função incógnita para $t = 0$). Observe que temos agora uma mudança de "qualidade" no tipo de problema que estamos estudando.

As séries de Fourier foram desenvolvidas, inicialmente, para resolver equações diferenciais que modelam a condução do calor em uma barra. Mas elas também podem ser utilizadas na resolução de outras equações diferenciais, como equações diferenciais que modelam uma viga, simplesmente, apoiada.

Além dessas aplicações, as séries de Fourier também podem ser aplicadas para se obter a resposta de um circuito elétrico, como apresentado na Figura 1.14, sujeito a uma força eletromotriz periódica $E(t)$.

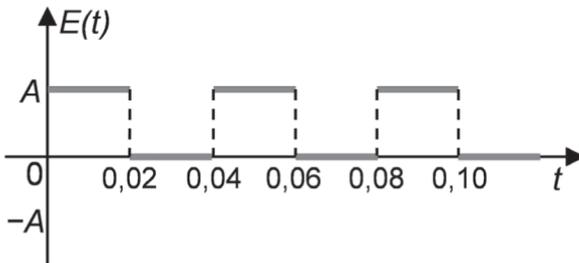
Figura 1.14 | Circuito elétrico com força eletromotriz periódica



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que a força eletromotriz $E(t)$ seja como apresentada no gráfico da Figura 1.15:

Figura 1.15 | Força eletromotriz



Fonte: elaborada pelo autor.

Lembremos de suas atribuições na empresa de software científico: você deve produzir conteúdo teórico para os fundamentos do programa a ser desenvolvido por uma empresa prestadora de serviços de engenharia. Nesse sentido, a ideia é que você apresente a resolução de um problema com valores numéricos como sendo um exemplo dos desenvolvimentos teóricos. É proposto ainda que você exponha a resolução das seguintes questões: como a corrente desse sistema depende do valor A da força eletromotriz? Se A duplicar, então é correto concluir que a corrente resposta também será duplicada?

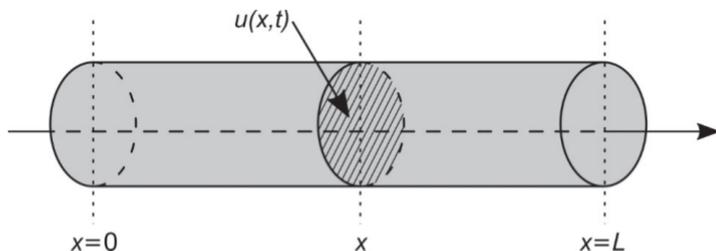
Não pode faltar

1.3.1 Problemas de valores de contorno e séries de Fourier

Joseph-Baptiste Fourier apresentou para a Academia Francesa de Ciência, em 1807, uma primeira memória de suas pesquisas sobre o calor. Em 1822, ele publicou sua notável obra *Theorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor), na qual ele expôs seus trabalhos sobre a condução do calor em uma barra homogênea utilizando o que

chamamos atualmente de séries de Fourier. Considere a Figura 1.16, a função representa o calor em uma barra homogênea na posição x e no instante t .

Figura 1.16 | Condução do calor em uma barra homogênea



Fonte: elaborada pelo autor.

A modelagem matemática desse problema recai numa equação a derivadas parciais (abreviadamente, EDP) do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

denominada **equação unidimensional do calor** (unidimensional porque temos apenas uma variável para representar o espaço). Mas nos referiremos a ela simplesmente como **equação do calor**.



Pesquise mais

A equação do calor não será deduzida nesse texto, mas você pode consultá-la no apêndice A do capítulo 10 do seguinte livro:

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 416 p.

A dedução está também disponível nas obras de Edwards e Penney (1999) e Zill (2001).

Em EDP's temos a presença de derivadas parciais da função incógnita, algo que não está presente em equações diferenciais ordinárias (EDO's), tema possivelmente já de seu conhecimento. Na equação do calor, consideramos u como uma função das variáveis x e t , isto é, $u = u(x, t)$, e k uma constante que depende do material e está associada com a forma como o calor se difunde nele.

Com o conhecimento que temos até o momento, não é possível resolvermos a equação do calor, e é preciso, ainda, detalhar as condições auxiliares do problema.

Nessa classe de problemas, precisamos definir dois tipos de condições:

i) Condições iniciais (ou seja, qual a temperatura inicial da barra).

ii) Condições de contorno (neste caso, quais são as temperaturas nas extremidades da barra em qualquer instante de tempo, ou seja, em $x = 0$ e $x = L$).

A **condição inicial** é dada por uma condição do tipo $u(x,0) = f(x)$. Essa condição significa que, no instante inicial, $t = 0$, a temperatura u da barra é dada por uma função $f(x)$.

Já como **condições de contorno**, vamos assumir, por enquanto, que, nas extremidades da barra, a temperatura é zero: $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Temos, então, o que é denominado de um problema de valores de contorno, dado pelas equações:

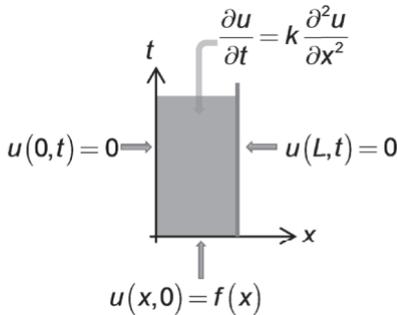
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \end{aligned}$$

para $x \in]0, L[, t > 0$.

Na Figura 1.17, ilustramos geometricamente as condições anteriores.

Figura 1.17 | Geometria do problema de contorno representado pelas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x) \text{ e } u(0,t) = u(L,t) = 0$$



Fonte: elaborada pelo autor.

Não é possível escrever a solução da maior parte das equações diferenciais (sejam EDO's ou EDP's) em termos de funções elementares. Em algumas poucas situações, dependendo do tipo da EDP e da geometria do problema (retangular, circular, são situações frequentes), existem procedimentos para determinar uma solução da

EDP. Mesmo assim, essa solução será escrita como uma série infinita ou alguma integral não trivial. A vantagem de obtermos estas soluções nessas situações especiais é que elas proporcionam um entendimento e uma compreensão mais qualitativa das situações mais complexas. Existem poucos métodos gerais para a resolução de EDP's. Um desses métodos é o **método da separação de variáveis**, que se baseia no princípio da superposição. A aplicação do método de separação de variáveis nos conduz às séries de Fourier.

Para aplicar o método, vamos supor que a solução do problema de valores de contorno, dado pelas equações $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = f(x)$ e $u(0,t) = u(L,t) = 0$ possui uma solução $u(x,t)$ que possa ser escrita na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, em que a função X depende apenas da variável x e a função T depende apenas de t . Como a função X depende apenas da variável x , vale que $\frac{\partial u}{\partial x} = X'T$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$. Assim, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$. Aqui, a notação X'' significa que estamos efetuando a derivada da função $X(x)$ duas vezes e, como ela é apenas função da variável x , não é uma derivada parcial. Além disso, vamos assumir que as funções X e T não sejam identicamente nulas. Substituindo as expressões para $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$ em $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, temos:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

Então, temos que:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

A equação $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}$ é válida para todo $x \in]0, L[, t > 0$. Portanto, tem de ser igual a uma mesma constante. Vamos denominá-la de **constante de separação** e representá-la pela letra grega $-\lambda$ (veremos que é conveniente adotar o sinal negativo). Logo: $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ e $\frac{T'(t)}{T(t)} = -k\lambda$.

Temos, agora, as duas equações diferenciais: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ e $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$.

Neste ponto, usamos as condições de contorno nas equações $u(0,t) = u(L,t) = 0$: $X(0)T(t) = 0$ e $X(L)T(t) = 0$.

Como estamos supondo que T não é identicamente nula, necessariamente devemos ter $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$. Assim, a função X satisfaz ao problema de valor de contorno:

$$\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$$



Assimile

O problema de contorno apresentado em $\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$ recebe o nome de **problema de autovalor**. Para cada solução não trivial em $\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$, temos associados valores de λ que recebem o nome de **autovalores**. As soluções associadas a esses autovalores são denominadas **autofunções**.

Para apresentar a solução do problema de autovalor $\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$, consideraremos as três possibilidades para λ : positivo, negativo e nulo. Vejamos cada uma delas.

i) Se $\lambda = 0$, a equação diferencial do **problema de autovalor**

$\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$ reduz-se a $\mathbf{x}''(x) = \mathbf{0}$, cuja solução é $\mathbf{x}(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$. Lembrando das condições de contorno $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$, forçosamente $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, o que implica na solução identicamente nula $\mathbf{x}(x) = \mathbf{0}, \forall x \in]0, L[$. Assim, $\lambda = 0$ não é autovalor para o **problema de autovalor** $\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$.

ii) Se $\lambda < 0$, a solução da equação diferencial é $\mathbf{x}(x) = \mathbf{a}_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + \mathbf{a}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Também, neste caso, em função das condições de contorno $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$, teremos $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ e a única solução será a solução trivial. Assim, o **problema de autovalor** $\mathbf{x}''(x) + \lambda \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(L) = \mathbf{0}$ não possui autovalores negativos.

iii) Se $\lambda > 0$, seguiremos o padrão adotado pela literatura e escreveremos $\lambda = \alpha^2$. A solução geral da equação

diferencial $\mathbf{x}''(x) + \alpha^2 \mathbf{x}(x) = \mathbf{0}$ é $\mathbf{X}(x) = \mathbf{a}_1 \cos(\alpha x) + \mathbf{a}_2 \sen(\alpha x)$.

A condição de contorno $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Para que $\mathbf{X}(L) = \mathbf{a}_2 \sen(\alpha L) = \mathbf{0}$ com $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, devemos ter

$$\alpha L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Portanto:} \quad \alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ou seja, neste caso, teremos infinitos autovalores positivos:

$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$ cujas autofunções associadas são

$$\mathbf{X}_n(x) = \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{adotamos } \mathbf{a}_2 = 1).$$

Voltando à equação $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$, temos que uma solução dessa equação é $T(t) = e^{-k\lambda t}$. Temos então $u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Contudo, não temos como assegurar que $u_n(x, t)$ satisfaça à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Pelo princípio da superposição, a função $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$ satisfará $u(x, 0) = f(x)$ para valores a determinar dos coeficientes c_n . Da condição inicial, temos $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$. Do que já estudamos sobre séries de Fourier, temos que $c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$. Com isso, resolvemos o **problema de autovalor** $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(L) = 0$, sendo a solução dada por $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$, com $u_n(x, t)$ e c_n descritos anteriormente.



Pesquise mais

Para saber mais sobre o Princípio da Superposição sugerimos a consulta à página 110 do seguinte livro-texto:

ÇENGEL, Yunus A.; III, William J. Palm. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Porto Alegre, 2014. 600 p.

Esta videoaula da Univesp TV aborda a explicação anterior sobre o Método de Separação de variáveis.

UNIVESP. **Cálculo III - Aula 21 - Introdução ao estudo das equações diferenciais parciais**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=u_UZuWXNfu8&list=PLyMTbTyU2PsSxyp05lKNlmvXWVh5jfxIH>. Acesso em: 29 set. 2017.

1.3.2 Aplicação de séries de Fourier: circuito elétrico

Veremos, agora, um exemplo de utilização das séries de Fourier, na forma complexa, em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Na sequência, particularizamos a solução para um circuito elétrico RLC. Considere a EDO:

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ uma função eletromotriz periódica (que pode ser descontínua, por exemplo, uma onda quadrada).

A ideia básica para resolver uma equação diferencial com séries de Fourier consiste em substituir na equação a expansão em série de Fourier das funções incógnitas e da força externa na equação, igualar os coeficientes da expansão e, então, expressar os coeficientes da função incógnita em termos dos coeficientes da função que representa a força

externa. Vejamos, neste exemplo, o passo a passo desse procedimento.

Para determinar a função $x(t)$, admitimos que tanto $x(t)$ quanto $f(t)$ tenham desenvolvimento em série de Fourier, dados, a seguir, na forma complexa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t} \text{ e } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \text{ onde } \omega = \frac{2\pi}{2L}.$$

Para que possamos utilizar séries de Fourier na resolução de equações diferenciais, é necessário efetuar a derivação da função incógnita representada por série de Fourier na equação. Contudo, não é qualquer série infinita que pode ser derivada termo a termo. O teorema seguinte fornece as condições para a diferenciação termo a termo de uma série de Fourier.



Assimile

Edwards e Penney (1999): **Teorema (diferenciação termo a termo de séries de Fourier)**: considere a função f contínua em toda reta, periódica com período $2L$. Considere, ainda, que a derivada de f é derivável por partes para toda reta real. Então, podemos derivar a série de Fourier da função $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right)$ e vale que:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n\pi}{L} a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{n\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right].$$

Derivando $x(t)$ termo a termo, temos $x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega \beta_n e^{in\omega t}$ e

$$x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 \omega^2 \beta_n e^{in\omega t}.$$

Substituímos as expressões para $f(t)$, $x(t)$, $x'(t)$ e $x''(t)$ na equação diferencial $ax'' + bx' + cx = f(t)$:

$$a \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 \omega^2 \beta_n e^{in\omega t} \right] + b \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} in \beta_n e^{in\omega t} \right] + c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-an^2 \omega^2 + bin\omega + c) \beta_n e^{in\omega t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$$

Vale a igualdade coeficiente a coeficiente: $(-an^2 \omega^2 + bin\omega + c) \beta_n = \alpha_n$, ou seja, teremos a expressão a seguir para os coeficientes de $x(t)$:

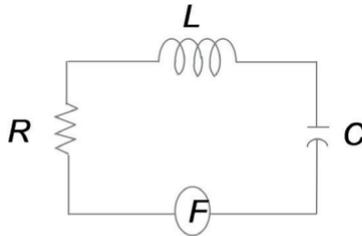
$$\beta_n = \frac{1}{(-an^2 \omega^2 + bin\omega + c)} \alpha_n$$

Os coeficientes α_n são os coeficientes da expansão em série de Fourier da função eletromotriz, dados por $\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\omega t} dt$.

Um dos problemas no qual as séries de Fourier podem ser aplicadas é a determinação da corrente elétrica $I(t)$ em um circuito elétrico RLC.

Nesse ponto, vamos particularizar nossa solução para a EDO definida a partir do circuito apresentado na Figura 1.18:

Figura 1.18 | Circuito elétrico RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que uma força eletromotriz periódica $f(t)$ atue sobre esse circuito. Queremos determinar a corrente $I(t)$ neste circuito elétrico. A equação diferencial que modela a corrente $I(t)$ é:

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{CL}I(t) = f(t).$$

A corrente $I(t)$ será periódica com o mesmo período que a força eletromotriz $f(t)$. Esta pode ser, por exemplo, uma onda quadrada.

Suponha que a função $f(t)$ seja definida por $f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < 1 \\ 0, & t = 1 \text{ ou } t = 2, \\ -A, & 1 < t < 2 \end{cases}$ em que A é um número real positivo.

Comparando as equações $ax'' + bx' + cx = f(t)$ e $I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{CL}I(t) = f(t)$, temos que $a = 1$, $b = \frac{R}{L}$ e $c = \frac{1}{CL}$.

Substituindo em $\beta_n = \frac{1}{(-an^2\omega^2 + bin\omega + c)}\alpha_n$, temos:

$$\beta_n = \frac{1}{(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL})}\alpha_n. \text{ Falta determinar os coeficientes da}$$

expansão, em série de Fourier, da força eletromotriz. Eles são dados

$$\text{por } \alpha_n = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Concluindo, a corrente será dada por $I(t) = \sum_{n=-\infty, n \text{ ímpar}}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$ com $\beta_n = \frac{1}{(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL})} \frac{4A}{n\pi}$, n ímpar.

1.3.3 Aplicação de séries de Fourier: condução do calor em uma barra

Considere uma barra metálica de 80 cm de comprimento, aquecida lateralmente a 40 °C ao longo da barra. As extremidades da barra são mantidas a 0 °C para todo $t > 0$. Determine a expressão para a temperatura $u(x,t)$ da barra ao longo do tempo.

No item 1 desta seção, vimos que a solução do problema de valor de contorno apresentado nas equações $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = f(x)$

e $u(0,t) = u(L,t) = 0$ é dada por $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$, em que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ e } u_n(x,t) = e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

No nosso caso, temos que $L = 80$ e $f(x) = 40^\circ$, para $0 < x < 80$. Substituindo esses valores:

$$\text{então } u_n(x,t) = e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{6400}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{80}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e}$$

$$c_n = \frac{2}{80} \int_0^{80} 40 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{80}\right) dx = \int_0^{80} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{80}\right) dx = \frac{80}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

$$\text{Logo, fica } c_n = \begin{cases} \frac{160}{n\pi}, n \text{ ímpar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}.$$

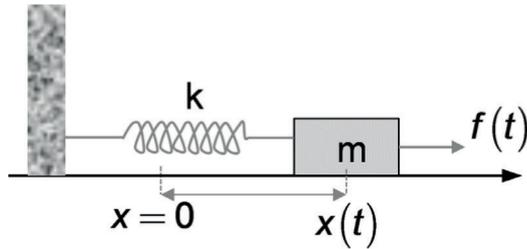
Finalmente, a solução $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ será dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{160}{n\pi} e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{6400}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{80}\right)$$

1.3.4 Aplicação de séries de Fourier: sistemas mecânicos

Considere um sistema com uma massa m e uma mola de constante k , com uma força externa periódica f ímpar de período 4. A hipótese de paridade da força externa é utilizada apenas para facilitar os cálculos nesse exemplo. Representamos por $x(t)$ o deslocamento da massa a partir do ponto de equilíbrio. Esse sistema está representado na Figura 1.19.

Figura 1.19 | Sistema mecânico com força externa



Fonte: elaborada pelo autor.

O deslocamento $x(t)$ satisfaz à equação diferencial $mx'' + kx = f(t)$, cuja solução geral é dada por $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + x_{part}(t)$, em que $x_{part}(t)$ representa uma solução particular da equação diferencial e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural. A partir das condições iniciais do problema, é possível determinar os valores para a e b. Não nos ocuparemos desse aspecto aqui. Nosso foco, neste momento, é a determinação de $x_{part}(t)$ periódica usando séries de Fourier. Devemos supor que, para todo n, $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$.



Refleta

Qual o significado físico da hipótese $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$? Existe alguma situação na Engenharia para a qual a igualdade $\frac{n\pi}{L} = \omega_0$ possa resultar em algum problema?

Como a força externa é supostamente ímpar, vamos determinar uma solução particular periódica da forma $x_{part}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Para resolvermos um problema específico, suponha que a força externa seja uma onda quadrada dada por: $f(t) = \begin{cases} 3, 0 < x < 2 \\ -3, 2 < x < 4 \end{cases}$.

Como assumimos f de período 4, então $2L = 4$, portanto $L = 2$. Sua

expansão em série de Fourier é $f(t) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

Substituímos as expressões para $x_{part}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ e $f(t) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ na equação diferencial $mx'' + kx = f(t)$.

$$m \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{4} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k \alpha_n - \frac{mn^2 \pi^2}{4} \alpha_n \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Então, os coeficientes α_n são dados por:

$$\alpha_n = \frac{1}{\left[k - \frac{mn^2 \pi^2}{4} \right]} \frac{6}{\pi} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}$$

Sem medo de errar

Recordemos que você foi contratado por uma empresa de prestação de serviços em engenharia para produzir conteúdo teórico para os fundamentos de um software de resolução de equações diferenciais em estudo pela empresa. Você já entregou parte desse material teórico e, para concluir o projeto, a ideia é que você apresente a eles um exemplo com valores numéricos. É nesse contexto que se insere a questão de como obter a resposta do circuito elétrico apresentado na Figura 1.14 desta seção, sujeito a uma força eletromotriz do tipo onda quadrada (apresentada na Figura 1.15 desta seção).

Seguindo a exposição feita na Subseção 1.3.2 (Aplicação de séries de Fourier: circuito elétrico), temos que a equação diferencial que modela este circuito é $I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{CL} I(t) = E(t)$, em que a força eletromotriz é a onda quadrada apresentada na Figura 1.18, e na figura 1.14 temos os valores $R = 350 \Omega$, $L = 0,04 H$ e $C = 5 \mu F$.

Os coeficientes da expansão em série de Fourier da força eletromotriz são dados por $\alpha_n = \frac{1}{2P} \int_{-P}^P E(t) e^{-in\omega t} dt$, no qual estamos adotando, neste caso, P para representar o período da força eletromotriz. No caso da onda quadrada apresentada na Figura 1.17, temos $P = 0,02$ e $2P = 0,04$. Assim,

$$\alpha_n = \frac{1}{0,04} \int_0^{0,02} A e^{-in\omega t} dt = 25A \left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right]_0^{0,02} = 25A \left[\frac{e^{-in\frac{\pi}{0,02}t}}{-in\frac{\pi}{0,02}} \right]_0^{0,02} = A \left[\frac{1 - e^{-in\pi}}{2in\pi} \right]$$

$$\alpha_n = A \frac{[1 - e^{-in\pi}]}{2in\pi} = \frac{A}{2in\pi} [1 - (\cos n\pi - i \operatorname{sen} n\pi)] = \frac{A}{in\pi}, n \text{ ímpar}.$$

$$\text{Logo, fica } \alpha_n = \begin{cases} \frac{A}{in\pi}, n \text{ ímpar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}.$$

$$\text{Temos ainda: } \alpha_0 = \frac{1}{0,02} \int_0^{0,04} A dt = 2A.$$

Como mostramos na Subseção 1.3.2, os coeficientes da função corrente serão dados por $\beta_n = \frac{1}{\left(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL}\right)} \alpha_n$. A frequência

natural do circuito é dada por $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$. Então, a expressão para os coeficientes β_n pode ser reescrita como $\beta_n = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - n^2\omega^2\right) + \frac{R}{L}in\omega} \alpha_n$.

Agora, você pode substituir os valores para R , L e C na expressão anterior para os coeficientes β_n . Assim, se duplicarmos o valor de A , a corrente também será duplicada.

Neste momento, você pode sintetizar os resultados obtidos nesta seção junto aos resultados já obtidos nas duas primeiras seções desta unidade e enviar seu relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do software.

Avançando na prática

Equações diferenciais com oscilações forçadas descontínuas ímpares

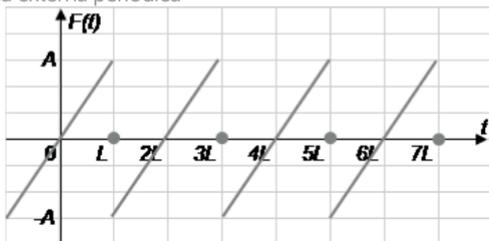
Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja prestando serviços para um escritório de engenharia que vem desenvolvendo análises para a indústria de máquinas e equipamentos industriais. Para modelar tais situações, são utilizados problemas de contorno do tipo:

$mx'' + kx = F(t)$, $0 < t < L$, $x(0) = x(L) = 0$, em que $F(t)$ representa uma força externa descontínua ímpar.

Considere que a função $F(t) = \frac{A}{L}t$, $A > 0$ seja periódica de período $2L$, como vemos na Figura 1.20 a seguir.

Figura 1.20 | Força externa periódica



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

A extensão periódica da função $F(t)$ é ímpar de período $2L$. Os coeficientes a_n da série de Fourier para $F(t)$ são todos nulos. Os coeficientes b_n para $F(t)$ são dados por:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{A}{L} t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt.$$

Efetuada a integração por partes, teremos

$$b_n = \frac{2A}{L} \int_0^L t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

A série de Fourier para $F(t)$ será $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$.

Uma solução particular da equação diferencial pode ser escrita como uma soma de senos:

$$x_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

A segunda derivada de $x_{\text{part}}(t)$ é $x''_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$.

Substituindo na equação diferencial, temos:

$$m \left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] + k \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Igualando os coeficientes de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right) c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Então: $\left(-\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right) c_n = \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1}$.

Podemos escrever os coeficientes c_n : $c_n = \frac{2A}{n\pi \left(-\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right)} (-1)^{n+1}$.

Finalmente, temos que: $x_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi \left(-\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right)} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$.

Faça valer a pena

1. A seguir, apresentamos, nos itens de (A) até (D), vários comprimentos de barras, indicados por L (em centímetros), e a temperatura inicial da barra, indicada por t_0 (em graus Celsius). Nos itens identificados pelos algarismos romanos de (I) até (IV), temos problemas de valores de contorno que representam as condições dadas pelos itens (A) a (D).

(A) $L = 120, \quad t_0 = 30$

$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(B) $L = 30, \quad t_0 = 120$

$$u(x, 0) = 40$$

(C) $L = 80, \quad t_0 = 40$

$$u(0, t) = u(80, t) = 0$$

(D) $L = 150, \quad t_0 = 75$

$$(II) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 30$$

$$u(0, t) = u(120, t) = 0$$

$$(III) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 120$$

$$u(0, t) = u(30, t) = 0$$

$$(IV) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 75$$

$$u(0, t) = u(150, t) = 0$$

A alternativa que contém a associação correta das letras com os algarismos romanos é:

a) A – I; B – II; C – III; D – IV.

b) B – I; A – II; D – III; C – IV.

c) C – I; A – II; B – III; D – IV.

d) B – I; C – II; D – III; A – IV.

e) D – I; A – II; C – III; B – IV.

2. O problema do calor com condições de contorno homogêneas é dado pelas equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

A constante k é denominada difusividade térmica. Na tabela a seguir, apresentamos o valor de k para alguns materiais (BOYCE e DIPRIMA, 2002).

Tabela 1.2 | Valores de difusividade térmica para materiais selecionados

Material	$k \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right)$
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Tijolo	0,0038

Fonte: Boyce e Diprima, 2002.

Considere que uma barra de cobre com 40 cm de comprimento seja submetida a um ambiente com temperatura de 120 °C. No instante inicial, as laterais da barra são colocadas em contato com um resfriador à temperatura de 0 °C e mantidas assim para todo $t > 0$.

A expressão para a solução $u(x,t)$ é dada por:

$$a) u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1600}{n^2 \pi^2} e^{-1,14 \frac{n\pi t}{4800}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{60} \right).$$

$$b) u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1600}{n\pi} e^{-1,14 \frac{n^2 \pi^2 t}{4800}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{120} \right).$$

$$c) u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1200}{n\pi} e^{-\frac{n\pi t}{40}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{80} \right).$$

$$d) u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{480}{n\pi} e^{-1,14 \frac{n^2 \pi^2 t}{1600}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right).$$

$$e) u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2400}{n^2 \pi^2} e^{-\sqrt{1,14} \frac{n^2 \pi^2 t}{3200}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{220} \right).$$

3. No problema de valores de contorno estudado nesta seção, diz-se que as condições de contorno são homogêneas (iguais a zero). Apenas para relembrarmos, esse problema é dado pelas equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1a)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (1b)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad (1c)$$

para $x \in]0, L[, t > 0$.

Dizemos que temos condições de contorno não homogêneas se o problema de valores de contorno for dado pelas equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2a)$$

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L \quad (2b)$$

$$u(0,t) = f_1(t), t > 0 \text{ e } u(L,t) = f_2(t), t > 0 \quad (2c)$$

para $x \in]0, L[, t > 0$, em que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são as temperaturas nas extremidades da barra.

No caso particular em que $f_1(t) = A$ e $f_2(t) = B$, se tomarmos

$v(x,t) = A + \frac{(B-A)}{L}x$ a função $u(x,t) = u^*(x,t) + v(x,t)$ será solução da equação

não homogênea dada pelas equações $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < L$

e $u(0,t) = f_1(t), t > 0$ e $u(L,t) = f_2(t), t > 0$ com $f_1(t) = A$ e $f_2(t) = B$ sendo

$u^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{L} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, na qual os coeficientes c_n são os coeficientes

seno da função $f(x) - v(x) = f(x) - A - \frac{(B-A)}{L}x$:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - A - \frac{(B-A)}{L}x \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Considere o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 2, 0 < x < 6$$

$$u(0,t) = 2, t > 0 \text{ e } u(6,t) = 5, t > 0$$

para $x \in]0, 6[, t > 0$.

Considere as afirmações a seguir:

I. A solução deste problema é dada por $u(x,t) = 2 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{6} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{6}\right)$,

em que $c_n = \frac{6 \cos(n\pi)}{n\pi}$.

II. A solução deste problema é dada por $u(x,t) = \frac{5x}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{6} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{6}\right)$,

em que $c_n = \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

III. A solução deste problema é dada por $u(x,t) = \frac{x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{3} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$,

em que $c_n = \frac{n^2 \pi^2}{6} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Agora, marque a alternativa correta:

- a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
- b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
- c) São verdadeiras apenas as afirmações II e III.
- d) São verdadeiras apenas as afirmações I e III.
- e) As afirmações I, II e III são falsas.

Referências

- ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1168 p. v. 2.
- ARFKEN, George. **Física Matemática**: métodos matemáticos para Engenharia e Física. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 900 p.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 680 p.
- BUTKOV, Eugene. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: LTC, 1978. 724 p.
- ÇENGEL, Yunus A.; III, William J. Palm. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Porto Alegre, 2014. 600 p.
- EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Equações diferenciais elementares**: com problemas de contorno. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-hall do Brasil, 1995. 642 p.
- EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com Geometria Analítica**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 216 p. v. 3.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 2. ed. Rio de Janeiro: CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico)/ IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1977. 274 p.
- GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo B**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011. 435 p.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 481 p. v. 4.
- SPIEGEL, Murray. **Cálculo avançado**. Rio de Janeiro: Mcgraw-hill, 1971. 400 p. (Coleção Schaum).
- STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1164 p. v. 2.
- THOMAS, George B. et al. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 570 p. v. 2.
- WYLIE, C. Ray; BARRETT, Louis C. **Advanced Engineering Mathematics**. 5. ed. Singapore: McGraw-Hill International Editions, 1985. 1103 p.
- ZILL, Dennis. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 433 p.
- ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007. 380 p.

Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares

Convite ao estudo

Olá, estudante! Na primeira unidade você teve a oportunidade de estudar as séries de Taylor e Fourier e suas aplicações. O foco da Unidade 2 é fornecer as ferramentas matemáticas necessárias para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. Esses sistemas envolvem problemas contendo um vetor de variáveis dependentes, no qual cada uma das componentes depende de um conjunto de variáveis independentes, e essas equações estão interligadas por alguns vínculos.

Como uma situação de aprendizagem, você será o engenheiro de uma empresa que desenvolve projetos de circuitos eletrônicos de acordo com a exigência do cliente. Essa empresa tem vários setores e profissionais, de modo que cada pessoa contribui com uma parte do processo até a concepção do produto final. Nesse contexto, sua tarefa é analisar partes específicas de três projetos diferentes que estão em andamento. No primeiro, você deverá encontrar os autovalores e autovetores de um circuito. Para o segundo projeto, será necessário resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares por meio do método da eliminação. Finalmente, no último projeto, sua parte será resolver um sistema EDO linear utilizando o método dos autovalores e autovetores.

Iniciaremos a Seção 2.1 apresentando o problema de autovalor e autovetor de uma matriz, bem como sua solução. Na Seção 2.2, classificaremos e apresentaremos exemplos de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e um método simples de solução. Na última seção, utilizaremos o método dos autovalores e autovetores para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares.

Seção 2.1

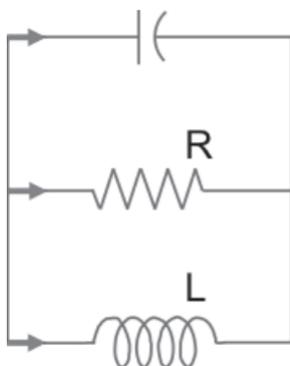
Autovalores e autovetores

Diálogo aberto

Aprender e aplicar modelos físicos com soluções e técnicas matemáticas conhecidas a problemas reais é uma tarefa que um engenheiro realiza constantemente. Nesta seção, vamos descrever técnicas de resolução de problemas de autovalores e autovetores. À primeira vista pode parecer apenas uma técnica matemática. Porém, com o passar das seções, você perceberá sua importância na solução de sistemas de equações diferenciais, os quais são utilizados para modelar problemas reais.

Lembre-se de que nesta unidade você é um dos engenheiros de uma empresa que desenvolve circuitos eletrônicos de acordo com a exigência do cliente. Um dos projetos que a empresa está desenvolvendo consiste em modelar um trecho RLC paralelo do circuito. A Figura 2.1 mostra esquematicamente esse circuito, assim como os sentidos das correntes, arbitrariamente escolhidos como positivos.

Figura 2.1 | Par de um circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que a tensão fornecida para esse trecho em paralelo é V e a corrente no indutor é I , você consegue escrever o seguinte sistema de equações que envolve a corrente e a tensão, bem como suas derivadas primeiras.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}$$

Para facilitar a visualização do sistema, podemos escrevê-lo na sua correspondente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} I' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

Na sua bancada existem os componentes eletrônicos com as seguintes especificações: $R = 4 \Omega$, $L = 0,1H$ e $C = 0,001F$. Primeiramente, sua tarefa será determinar os autovalores e os autovetores associados com os componentes disponíveis para essa parte do circuito. Com esses valores será possível, em um segundo momento, resolver o sistema de equações diferenciais lineares do circuito RLC paralelo. Dessa forma, você precisa aprender essa técnica para poder começar a trabalhar nessa parte do projeto. Vamos começar?

Não pode faltar

O prefixo "auto" nas palavras autovalor e autovetor refere-se à palavra em alemão "eigen", que significa próprio, característico. Vamos definir a classe de escalares e vetores que recebem o nome de autovalores e autovetores, respectivamente, da seguinte forma:



Assimile

Definição de autovalores e autovetores: seja A uma matriz $n \times n$, x vetor não-nulo em \mathbb{R}^n e λ um escalar. Se a seguinte equação é satisfeita:

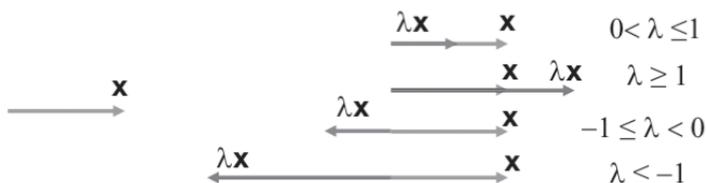
$$Ax = \lambda x.$$

Então, λ é autovalor de A e x é autovetor de A associado a λ .

Em geral, a aplicação de uma matriz A sobre um vetor x rotaciona tal vetor no espaço. Contudo, se x é autovetor de A , então, a ação de A sobre x será apenas uma compressão ou uma expansão por um fator $|\lambda|$, na direção inicial de x . A Figura 2.2 exemplifica esse conceito e mostra um vetor x e quatro possíveis situações, ou seja, compressão e

expansão na mesma direção e sentido de \mathbf{x} , e na mesma direção, mas no sentido contrário a \mathbf{x} .

Figura 2.2 | Resultado da aplicação de \mathbf{A} sobre \mathbf{x}



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos explorar o significado geométrico dos autovalores e autovetores de uma matriz da seguinte forma:

Exemplificando

Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. mostre que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de \mathbf{A} .

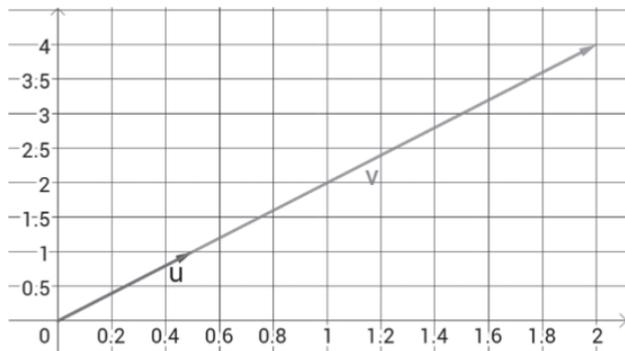
Resolução:

Multiplicando a matriz \mathbf{A} pelo vetor \mathbf{u} , temos:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o resultado da multiplicação é um escalar multiplicado por \mathbf{u} , esse vetor é autovetor de \mathbf{A} . O escalar 4 é o autovalor associado ao autovetor \mathbf{u} . A Figura 2.3 mostra que a matriz \mathbf{A} tem o efeito de expandir \mathbf{u} por um fator 4, e o resultado dessa expansão está representado pelo vetor \mathbf{v} .

Figura 2.3 | Efeito de aplicar uma matriz em um de seus autovetores



Fonte: elaborada pelo autor.

Até aqui, apenas citamos a existência dos autovalores e autovetores. No entanto, não mostramos um procedimento geral para encontrá-los. Para isso, precisamos reescrever a equação $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ da seguinte maneira:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

na qual \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$. Esse sistema só terá solução não nula para \mathbf{x} se, e somente se, o determinante de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ for zero. Assim, podemos escrever o seguinte teorema:



Assimile

Teorema: dada uma matriz \mathbf{A} de ordem $n \times n$, λ será autovalor de \mathbf{A} se, e somente se, satisfizer a seguinte equação:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

A equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, que foi apresentada no teorema anterior, é conhecida como equação característica da matriz \mathbf{A} . Vamos então encontrar e resolver a equação característica da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ que foi discutida no exemplo anterior.



Exemplificando

Encontre os autovalores de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Primeiro, encontramos $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$. Depois,

devemos calcular a equação característica, que é:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos os seguintes autovalores: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

Ao desenvolver a equação característica da matriz $n \times n$ \mathbf{A} , por meio de $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, temos a seguinte equação:

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1 = 0, \text{ com } c_n \in \mathbb{C} \text{ ou } c_n \in \mathbb{R}.$$

Como a matriz \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$, a equação característica fornece um polinômio característico de grau n :

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1$$

$p(\lambda)$ é o polinômio característico de \mathbf{A} e do Teorema Fundamental da Álgebra, que possui exatamente n raízes e, portanto, \mathbf{A} pode ter no máximo n autovalores, que podem ser reais ou complexos. Faça você

mesmo o cálculo e verifique que os autovalores da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & 6 \end{bmatrix}$

são as raízes de um polinômio de grau 3: $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_{2,3} = \pm i$.

A partir dos autovalores λ de uma matriz \mathbf{A} , podemos obter os correspondentes autovetores \mathbf{x} não nulos que estão no espaço solução da equação linear $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, que é chamado de autoespaço de \mathbf{A} .



Assimile

Definição: Sendo \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ e a sua equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, os autovetores associados a um autovalor λ é um espaço solução de \mathbf{A} , que é chamado de autoespaço de \mathbf{A} correspondente à λ .

Seguindo com a mesma matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, vamos encontrar os autovetores associados. Seja o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, utilizando a relação $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, temos $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, substituindo $\lambda = 4$, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ que fica } -2x_1 + 1x_2 = 0.$$

Escolhendo $x_2 = t \rightarrow x_1 = t \frac{1}{2}$, o autovetor geral associado ao autovalor 4 é $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para $t = 1$, esse é o vetor do início da seção, e é

uma base do autoespaço de A associado a 4. Fica como um exercício para você mostrar que $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a família de autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$.



Exemplificando

Encontre as bases do autoespaço da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução: para encontrar os autovalores de \mathbf{B} , calculamos:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -5 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0.$$

que tem como soluções: $\lambda = 5$ e $\lambda = 1$.

Para encontrar o autovetor geral associado ao autovalor $\lambda = 5$, resolvemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} -5v_1 - 5v_3 = 0 \\ v_1 + v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow v_2 = t, v_3 = s \text{ e } v_1 = -v_3.$$

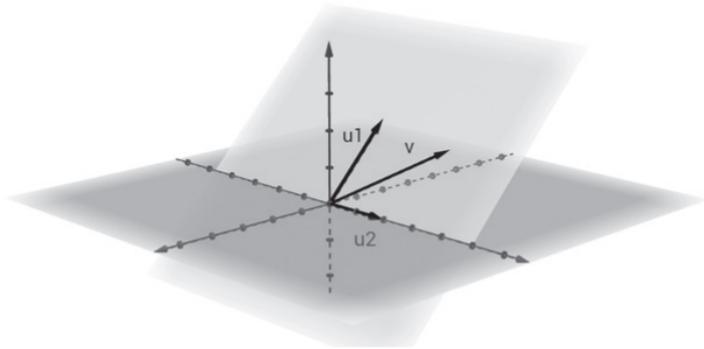
Temos: $\mathbf{v} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Escolhendo s e t iguais a 1, temos que uma base

do autoespaço de \mathbf{B} , associado ao autovalor $\lambda = 5$, é composta pelos

vetores $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Na Figura 2.4, esses vetores de base estão

desenhados em coordenadas tridimensionais e, para quaisquer escolhas de s e t , teremos um vetor \mathbf{x} , que pertence ao plano que é gerado pelos vetores base.

Figura 2.4 | Autoespaço de B associado ao autovalor $\lambda = 5$



Fonte: elaborada pelo autor.

Seguindo os mesmos passos para $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_1 = 5t, v_2 = t \text{ e } v_3 = t, \text{ que nos fornece o}$$

seguinte autovetor geral: $\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Escolhendo $t = 1$ nesse vetor, temos

uma base $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ do autoespaço de B associada ao autovalor $\lambda = 1$.

Seria bastante conveniente se existisse um procedimento para transformar uma matriz \mathbf{A} em uma matriz diagonal \mathbf{B} que possuísse os mesmos autovalores de \mathbf{A} . Esse procedimento já foi desenvolvido e envolve o conceito de similaridade entre matrizes. Por exemplo, é mais fácil calcular uma potência alta de uma matriz diagonal \mathbf{B} do que realizar o mesmo procedimento com sua matriz similar \mathbf{A} .

Existem matrizes quadradas que são relacionadas a partir de uma transformação de similaridade, tal que algumas propriedades são preservadas na transformação.



Assimile

Transformação de similaridade: se uma matriz quadrada \mathbf{B} é similar a uma outra matriz quadrada de mesma ordem \mathbf{A} , então, existe uma matriz \mathbf{P} e sua inversa \mathbf{P}^{-1} que satisfaça a seguinte transformação: $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Se **B** é similar a **A**, então, **A** é similar a **B**, e essas duas matrizes compartilham o mesmo determinante, traço, posto, polinômio característico, autovalores e dimensão do autoespaço. Matrizes diagonais são importantes porque simplificam os cálculos. Desse modo, podemos procurar por uma matriz que contenha elementos não nulos apenas em sua diagonal principal, a qual chamamos de matriz diagonal **D**, que seja similar a uma matriz não diagonal **A**.

Pela definição de transformação de similaridade, o trabalho é realizado encontrando-se uma matriz **P** que seja invertível de modo que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. No entanto, antes de encontrar **P**, que diagonaliza **A**, precisamos saber se a matriz $n \times n$ **A** é diagonalizável. Duas regras garantem a diagonalização de **A**:

Regra 1: se **A** possui n autovalores distintos, então, é diagonalizável.

Regra 2: caso alguns autovalores sejam repetidos, mas as bases referentes a cada autovalor compreendam n autovetores linearmente independentes, ainda assim, **A** será diagonalizável e, nesse caso, cada coluna da matriz **P** será dada por cada um dos autovetores de **A**.

No exemplo anterior, obtivemos para a matriz **B**:

Autovalor: $\lambda = 5 \rightarrow$ Base do autovetor correspondente:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Autovalor: $\lambda = 1 \rightarrow$ Base do autovetor correspondente: $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como a ordem da matriz **B** é 3 e a base compreende 3 vetores linearmente independentes, então, **A** é diagonalizável, mesmo tendo apenas dois autovalores distintos. A matriz **P** fica:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ que é composta pelos vetores da base de } \mathbf{B}, \text{ e}$$

sua inversa $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$. Aplicando a transformação de

similaridade, temos:

$$D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Refleta

O determinante e o traço de D são 25 e 11, respectivamente. Por que o determinante e o traço de B também são 25 e 11, respectivamente?

O cálculo da potência de matrizes pode ser muito demorado. Por exemplo, multiplicar uma matriz de ordem 3 por ela mesma envolve 27 multiplicações e 18 somas. No entanto, se a matriz é diagonal, o resultado é a multiplicação de cada elemento diagonal por ele mesmo, o que contabiliza apenas três multiplicações. Se fosse requisitado o valor de B^{15} , certamente, essa seria uma tarefa demorada até para um computador que utilizasse o algoritmo da multiplicação. Se em vez disso usássemos a propriedade da transformação de similaridade, poderíamos ter:

$$D = P^{-1}BP \rightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}BPP^{-1}, \text{ com } PP^{-1} = P^{-1}P = I, \text{ temos:}$$

$$B = P^{-1}DP. \text{ Agora elevando os dois lados à potência 15 e usando } PP^{-1} = P^{-1}P = I, \text{ temos:}$$

$$B^{15} = (PDP^{-1})^{15} = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDDDDDDDDDDDDDDP^{-1} = PD^{15}P^{-1}$$

$$B^{15} = PD^{15}P^{-1}, \text{ em notação matricial:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{15} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{15} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{15} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30517578125 & 0 & 0 \\ 0 & 30517578125 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -30517578125 & 0 & -5 \\ 0 & 30517578125 & 1 \\ 30517578125 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} -7629394530 & 0 & -38146972655 \\ 7629394530 & 30517578125 & 7629394530 \\ 7629394530 & 0 & 38146972655 \end{bmatrix}$$



Pesquise mais

Muitos problemas da engenharia envolvem sistemas de equações diferenciais. Para resolver esses sistemas, é possível aplicar o conhecimento de autovalor e autovetor juntamente com o cálculo. Pesquise mais sobre esse assunto no Capítulo 5.4 da seguinte referência: HOWARD, A.; RORRES C. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Sem medo de erro

O sistema de equações diferenciais lineares do circuito RLC paralelo é:

$$\begin{pmatrix} I' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix},$$

que, na forma compacta, fica $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e, assim, identificamos a matriz associada ao sistema como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{pmatrix}.$$

A primeira etapa da solução de um problema de autovalor/autovetor consiste em encontrar as soluções da equação característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1/L \\ -1/C & \frac{-1}{RC} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ que fica:}$$

$$-\lambda \left(\frac{-1}{RC} - \lambda \right) + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{RC} + \frac{1}{LC}.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, temos:

$$\lambda = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$
 Substituindo os valores dos componentes eletrônicos disponíveis $R = 4 \Omega$, $L = 0,1H$ e $C = 0,001F$, ficamos com os seguintes autovalores:

$$\lambda = -\frac{1}{2(4)(0,001)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{(4)(0,001)}\right)^2 - \frac{4}{(0,1)(0,001)}}$$

$$\lambda = -125 \pm 75 = \begin{cases} \lambda_1 = -50 \\ \lambda_2 = -200 \end{cases}$$

Substituindo $\lambda_1 = -50$ na matriz A e resolvendo o sistema resultante, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1/L \\ -1/C & \frac{-1}{RC} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & 10 \\ -1000 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$50x_1 + 10x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 5x_1$, chamando $x_1 = t \rightarrow x_2 = 5t$,
 $-1000x_1 - 200x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 5x_1$
 e o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -50$ é $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Similarmente para $\lambda_2 = -200$, temos:

$$\begin{pmatrix} 200 & 10 \\ -1000 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$200x_1 + 10x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -20x_1$, chamando $x_1 = t \rightarrow x_2 = -20t$,
 $-1000x_1 - 50x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -20x_1$
 e o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -200$ é $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix}$.

Ao terminar seus cálculos, exponha-os de forma sucinta à equipe para que todos possam analisá-los e avaliar os próximos passos. Essa apresentação pode ser em forma de slides, por exemplo.

Animações computacionais

Descrição da situação-problema

Uma empresa de engenharia presta serviços para uma produtora de animação computacional 2D. Em uma das etapas da consultoria, será preciso fornecer ao programador da empresa os passos exatos de transformações vetoriais para que ele possa escrever uma rotina numa linguagem de programação. Uma operação exigida pela produtora seria uma rotação de um ângulo ϕ seguida de uma compressão ou dilatação por um fator $|\lambda|$ aplicada em vetor bidimensional $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Os programadores precisam elaborar uma sub-rotina que realize essas operações, e a sugestão é que você escreva um breve relatório com um exemplo numérico que facilite o entendimento por parte deles, auxiliando-os a generalizar essa operação para outros casos possíveis.

Dada essa situação, como proceder para rotacionar o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ em 90° e, em seguida, expandi-lo por um fator 2? É interessante que você forneça a matriz que realiza essas operações, aborde o modo como foi obtida e garanta que o vetor resultante seja rotacionado corretamente e que seu módulo, após a operação, seja o dobro do módulo do vetor de partida.

Resolução da situação-problema

Para responder a essa etapa da consultoria, você decidiu produzir um pequeno relatório, e nele você organizou uma solução adequada para o problema proposto da seguinte forma.

Inicialmente, sabemos que uma matriz quadrada 2×2 com elementos reais, que tenha o formato $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, possui autovalores complexos $\lambda = a \pm ib$. Na forma polar, o autovalor complexo λ pode ser escrito como:

$\mathbf{a} = |\lambda| \cos \phi$ e $\mathbf{b} = |\lambda| \sin \phi$. Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \text{ sendo } |\lambda| \text{ o m\u00f3dulo de um}$$

dos autovalores, que ser\u00e1 o mesmo do seu complexo conjugado; e ϕ , o \u00e2ngulo de rota\u00e7\u00e3o. Como no exemplo a rota\u00e7\u00e3o \u00e9 de 90° e a expans\u00e3o \u00e9 por um fator 2, atribu\u00edmos, ent\u00e3o, os seguintes valores:

$\phi = 90^\circ$ e $|\lambda| = 2$. Substituindo esses valores nas matrizes anteriores, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Essa \u00e9 a matriz de elementos reais cujos autovalores s\u00e3o $\lambda = \pm i2$ (Voc\u00ea pode verificar!). Aplicando essa matriz no vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ em que } \mathbf{x}' \text{ \u00e9 o vetor transformado.}$$

Um teste para mostrar que a rota\u00e7\u00e3o foi executada corretamente seria calcular o produto interno entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{x}' :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = (2, 1) \cdot (-2, 4) = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 4 = 0.$$

Como o produto interno \u00e9 nulo, os vetores s\u00e3o ortogonais, portanto, a rota\u00e7\u00e3o de 90° foi satisfeita. Agora, precisamos comparar os m\u00f3dulos dos vetores:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |\mathbf{x}'| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

ou seja, $|\mathbf{x}'| = 2|\mathbf{x}|$, como exigia a proposta.

Agora voc\u00ea precisa enviar esse relat\u00f3rio para os programadores que o contrataram. Quais outros aspectos voc\u00ea acharia importante incluir nesse relat\u00f3rio para que ele fique ainda mais apresent\u00e1vel? Voc\u00ea poderia fazer um gr\u00e1fico do vetor antes e depois da opera\u00e7\u00e3o para mostrar que realmente \u00e9 uma rota\u00e7\u00e3o seguida de uma expans\u00e3o. Al\u00e9m

disso, você pode apresentar a forma genérica da rotação incluindo ϕ e $|\lambda|$.

Faça valer a pena

1. A equação característica de uma matriz quadrada do tipo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pode ser escrita como:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda \cdot \text{tr}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}),$$

na qual $\det(\mathbf{A})$ é o determinante da matriz \mathbf{A} e $\text{tr}(\mathbf{A})$ é o traço da matriz \mathbf{A} , que é a soma dos elementos da diagonal principal. Nesse caso, teremos três tipos de soluções:

- dois autovalores reais e distintos se $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A}) > 0$.
- dois autovalores reais e iguais se $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A}) = 0$.
- dois autovalores complexos e conjugados se $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A}) < 0$.

Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, considere as seguintes afirmativas:

(I) Possui dois autovalores reais e distintos, pois satisfaz (i).

(II) Possui um autovalor igual a $5 + 4i$ correspondente ao autovetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

(III) Possui um autovalor igual a $-5 + 4i$ correspondente ao autovetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix}$.

Encontre a alternativa que indica a sequência correta de verdadeiro (V) e falso (F) referente às afirmativas.

- a) V - V - V.
- b) F - F - F.
- c) V - F - V.
- d) F - V - F.
- e) F - F - V.

2. Para encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz $n \times n$, primeiro encontramos as raízes da equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ e, em seguida, resolvemos um sistema substituindo o valor do autovalor no sistema $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Seja a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 4 \\ -8 & 4 & 10 \end{bmatrix},$$

encontre a alternativa que indica corretamente cada autovalor e seu autovetor associado para a matriz **A**.

$$\text{a) } \lambda = -4 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 2 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = -6 \quad \text{é } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \lambda = 4 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 2 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 6 \quad \text{é } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } \lambda = 3 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 8 \quad \text{é } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \lambda = -3 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = -8 \quad \text{é } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e) } \lambda = 9 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 10 \quad \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 12 \quad \text{é } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz 5×5 , cujas entradas abaixo da

diagonal principal são todas nulas. Podemos dizer que:

I. A matriz é diagonalizável

PORQUE

II. Possui 5 autovalores distintos.

Indique a alternativa que apresenta a resposta correta com relação às afirmações (I) e (II) e a relação entre elas.

- a) Ambas as afirmações estão incorretas.
- b) A afirmação (I) está correta, mas (II) está incorreta.
- c) A afirmação (I) está incorreta, mas (II) está correta.
- d) A afirmação (I) está correta, mas (II) não é uma justificativa.
- e) A afirmação (I) está correta e (II) é uma justificativa.

Seção 2.2

Introdução aos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares

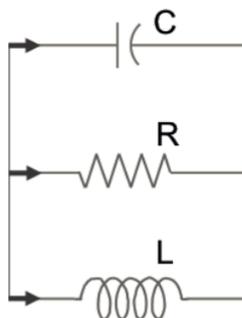
Diálogo aberto

Na última seção, você aprendeu que o método de autovalores e autovetores pode ser aplicado para resolver sistemas de equações diferenciais lineares, como um circuito elétrico, por exemplo. No entanto, nenhum método para obter as soluções de tais sistemas foi apresentado. Aqui, mostraremos o método da eliminação para resolver um problema não homogêneo.

Como um dos engenheiros de uma empresa que desenvolve circuitos eletrônicos customizados, seu papel nesta unidade é desenvolver e projetar alguns trechos específicos de um circuito. Após encontrar os autovalores e autovetores do circuito RLC paralelo, será necessário encontrar as soluções do sistema resultante.

A Figura 2.5 apresenta, mais uma vez, o circuito RLC esquematicamente.

Figura 2.5 | Parte de um circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

O sistema de equações diferenciais ordinárias lineares continua sendo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L},$$
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC},$$

cujos componentes possuem as seguintes especificações: $R = 4 \Omega$, $L = 0,1H$ e $C = 0,001F$.

Para resolver esse problema será preciso aprender algum método matemático, e é justamente isso que faremos nesta seção. Vamos começar?

Não pode faltar

Quando estudamos funções, devemos identificar o tipo de variável que as compõem. As variáveis que constituem uma função podem ser separadas em variáveis independentes, ou seja, que podem assumir quaisquer valores dentro de um certo domínio; e em variáveis dependentes, que não dependem só do valor que cada variável independente assume, mas também da relação entre essas variáveis independentes. A função f depende de x , y e z :

$$w = f(x, y, z) = ax^2 + by^4 - cz.$$

em que a , b e c são constantes; x , y e z são as variáveis independentes; e w é a variável dependente.

Em uma equação diferencial ordinária (EDO), as derivadas são consideradas em relação a uma única variável independente. Por exemplo, considere uma função desconhecida x que depende apenas de t de acordo com a seguinte expressão:

$$ax'' + bx' + cx = A.$$

em que a , b , c e A são funções de t . Se $a = 1$ na equação anterior, a equação diferencial está na sua forma padrão. Quando existe mais de uma variável independente, a equação é chamada de equação diferencial parcial, como em:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 4x + 2t^2,$$

na qual a é uma constante e a função desconhecida, e u depende tanto de x como de t .

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária linear pode ser escrita como:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$$

Em que n é n -ésima derivada de y com relação à variável independente x . Quando o termo $R(x)=0$, a equação diferencial é chamada de homogênea e, no caso de $R(x)\neq 0$, a equação diferencial é não homogênea. Nesta seção, trabalharemos apenas com EDOs lineares cujos termos, que multiplicam a função desconhecida e suas derivadas, são constantes.

Uma equação diferencial ordinária será linear quando os expoentes da variável dependente e suas derivadas assumirem apenas o valor 1 e os coeficientes que multiplicam a variável dependente e suas derivadas dependerem apenas da variável independente. Veja os exemplos a seguir de EDOs lineares e não lineares.

$$3t^2y'' - 2y = t^2 \text{ (linear)}$$

$$\sqrt{x}y'' - x = 0 \text{ (não linear)}$$

$$y''y + 2ty = 0 \text{ (não linear)}$$

$$\text{sen}(t)x'' + \text{cos}(t)x = 0 \text{ (linear)}$$

$$\text{sen}(x'') + e^x = e^t \text{ (não linear)}$$

Para obter uma solução, o número de equações em um sistema deve ser o mesmo número de incógnitas. Por exemplo, no sistema a seguir, temos duas equações e duas incógnitas:

$$x + y = 3,$$

$$2x - y = 2.$$

Como existem duas incógnitas, precisamos de duas equações que, ao serem resolvidas em conjunto, fornecem a solução $x = 5/2$ e $y = 1/2$. No caso de sistemas de EDOs lineares, devemos ter duas ou mais funções incógnitas dependentes de uma única variável independente. Essa variável independente pode ser o tempo.

Para exemplificar, considere o sistema a seguir, que apresenta funções incógnitas x e y e suas respectivas derivadas:

$$x'' = x' + x + y' + y$$

$$y'' = 3x' - 2x + 2y' - 3y$$

Uma das formas de se resolver esse sistema é expandindo cada equação de ordem n em n equações de primeira ordem. Desse modo, podemos renomear as variáveis x e y do sistema e, em seguida, derivando-as, temos:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = x & x_4 = y \\
 x_2 = x' = x_1' & e \quad x_5 = y' = y_1' \\
 x_3 = x'' = x_2' & x_6 = y'' = y_2'
 \end{array}$$

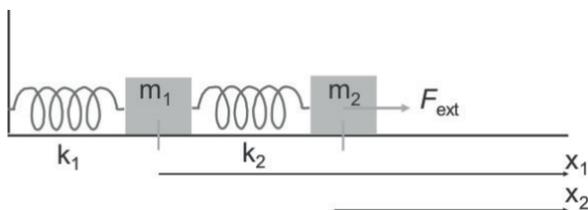
Assim, é possível escrever o seguinte sistema com quatro equações e quatro funções desconhecidas, a partir das duas equações originais:

$$\begin{array}{l}
 x_1' = x_2 \\
 x_2' = x_2 + x_1 + x_5 + x_4 \\
 x_4' = x_5 \\
 x_5' = 3x_2 - 2x_1 + 2x_5 - 3x_4
 \end{array}$$

A Figura 2.6 apresenta um conjunto de duas massas, m_1 e m_2 , e duas molas cujas constantes elásticas são k_1 e k_2 . A massa m_2 está sujeita a uma força externa $F_{ext}(t)$; a mola 2 exerce uma força $k_2(x_2 - x_1)$ sobre as massas 1 e 2; enquanto a mola 1 exerce uma força k_1x_1 . Aplicando a segunda Lei de Newton no sistema, para uma situação específica em que as molas estão esticadas e a elongação $x_2 > x_1$, podemos escrever:

$$\begin{array}{l}
 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\
 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{ext}(t) - k_2(x_2 - x_1)
 \end{array}$$

Figura 2.6 | Vibrações acopladas



Fonte: elaborada pelo autor.

As equações anteriores não podem ser resolvidas isoladamente, pois ambas dependem de duas funções incógnitas (x_1 , x_2) e das respectivas derivadas segundas. Nesse caso, é necessário desenvolver um método para resolvê-las simultaneamente.

Um segundo exemplo de sistemas de equações diferenciais está associado à resolução de circuitos eletrônicos, como você pode se lembrar da situação problema da Seção 2.1, na qual um circuito RLC

em paralelo foi modelado a partir do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L},$$
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}.$$

Para resolver esses sistemas, devemos utilizar algum método matemático, como o da eliminação ou o dos autovalores e autovetores. O método da eliminação é simples de ser aplicado, porém não é possível obter uma generalização como ocorre no caso do método dos autovalores e autovetores. No exemplo a seguir, mostramos como resolver um sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas por meio do método da eliminação.



Exemplificando

Utilize o método da eliminação para resolver o seguinte sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas:

$$x' = 2x + 3y + 2$$

$$y' = -2x - 5y - t.$$

Resolução:

Isolando a variável dependente y e em seguida considerando a primeira derivada na primeira das equações anteriores, temos:

$$y = \frac{x'}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$$

$$y' = \frac{x''}{3} - \frac{2x'}{3}.$$

Agora, substituímos essas duas equações na segunda equação do sistema original e obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{x''}{3} - \frac{2x'}{3} = -2x - 5\left[\frac{x'}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}\right] - t$$

$$x'' - 2x' = -6x - 5x' + 10x + 10 - 3t$$

$$x'' + 3x' - 4x = 10 - 3t \text{ (não homogênea).}$$

Para essa equação, a equação homogênea associada fica:

$$x'' + 3x' - 4x = 0 \text{ (homogênea),}$$

que nos fornece a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0, \text{ que possui as soluções: } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -4.$$

Portanto, uma solução homogênea geral pode ser escrita da seguinte forma: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{1t} + \mathbf{B}e^{-4t}$, enquanto a solução particular assume a seguinte forma: $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{C}t + \mathbf{D}$. Logo, a solução geral e suas derivadas ficam:

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{A}e^{1t} + \mathbf{B}e^{-4t} + \mathbf{C}t + \mathbf{D},$$

$$\mathbf{x}'_g(t) = \mathbf{A}e^{1t} - 4\mathbf{B}e^{-4t} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{x}''_g(t) = \mathbf{A}e^{1t} + 16\mathbf{B}e^{-4t}.$$

Substituindo a solução e suas derivadas em $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' - 4\mathbf{x} = \mathbf{10} - 3\mathbf{t}$, temos:

$$\mathbf{A}e^{1t} + 16\mathbf{B}e^{-4t} + 3\mathbf{A}e^{1t} - 12\mathbf{B}e^{-4t} + 3\mathbf{C}$$

$$-4\mathbf{A}e^{1t} - 4\mathbf{B}e^{-4t} - 4\mathbf{C}t - 4\mathbf{D} = \mathbf{10} - 3\mathbf{t}$$

ou, ainda,

$$3\mathbf{C} - 4\mathbf{D} - 4\mathbf{C}t = \mathbf{10} - 3\mathbf{t}.$$

Resolvendo termo a termo a equação anterior:

$\mathbf{C} = 3/4$ e $\mathbf{D} = -31/16$, que fornece a seguinte solução geral para a variável \mathbf{x} : $\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{A}e^{1t} + \mathbf{B}e^{-4t} + (3/4)t - 31/16$.

Derivando essa solução e substituindo em $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}'}{3} - \frac{2\mathbf{x}}{3} - \frac{2}{3}$, temos:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{3}[\mathbf{A}e^{1t} - 4\mathbf{B}e^{-4t} + 3/4] - \frac{2}{3}[\mathbf{A}e^{1t} + \mathbf{B}e^{-4t} + 3/4t - 31/16] - \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{y}_g(t) = -\frac{1}{3}\mathbf{A}e^{1t} - 2\mathbf{B}e^{-4t} - (1/2)t + (21/24).$$

Assim, obtivemos duas soluções gerais $\mathbf{x}_g(t)$ e $\mathbf{y}_g(t)$, que podem ser particularizadas caso duas condições iniciais sejam informadas para determinar A e B.

Um sistema de equações diferenciais ordinárias pode conter um número grande de equações e, nesse contexto, a utilização de uma forma mais compacta para representar o sistema é muito útil. Por exemplo, observe o sistema mostrado a seguir:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{m}_1(t)$$

$$\mathbf{x}'_2 = 3\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - 5\mathbf{x}_3 - \mathbf{m}_2(t)$$

$$\mathbf{x}'_3 = 4\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 + \mathbf{m}_3(t)$$

Esse sistema pode ser apresentado na sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \end{pmatrix},$$

ou, simplesmente $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{m}(t)$, em que \mathbf{x} é o chamado vetor de estado, que está associado à matriz de estado \mathbf{A} , enquanto $\mathbf{m}(t)$ é o vetor que contém as entradas $m_{i=1,2,3}(t)$.

Um conjunto com n vetores distintos é linearmente dependente se um desses vetores puder ser formado por uma combinação linear dos outros $n-1$ vetores. Em outras palavras, os n vetores só serão linearmente independentes se a soma dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, multiplicados respectivamente pelas constantes C_1, \dots, C_n , da seguinte forma:

$$C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + \dots + C_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

for nula apenas quando o conjunto de constantes assumir valor zero: $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$. Quando resolvemos um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem, temos como solução n vetores e, em geral, queremos saber se esses vetores são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Para isso, a equação $C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + \dots + C_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

em que cada coluna da matriz \mathbf{A} contém os n elementos constantes de cada um dos n vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ e o vetor \mathbf{x} contém as n constantes C_1, \dots, C_n . Como regra geral, vale a seguinte definição.



Assimile

O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, em que \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$; cada coluna é ocupada pelos n elementos dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$; e \mathbf{x} contém as n constantes C_1, \dots, C_n , terá apenas a solução trivial. Ou seja, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$) se:

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0,$$

e, nesse caso, os n vetores serão linearmente independentes. Caso contrário, serão linearmente dependentes.

Na situação discutida anteriormente, os elementos dos vetores foram assumidos como constantes. Como no último *Exemplificando*, soluções de equações diferenciais podem resultar em termos dependentes do tempo, como e^t . Nesse caso, para determinar a relação de dependência ou independência linear de um conjunto de vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 , por exemplo, cujos os elementos são funções de t , podemos verificar o Wronskiano dos vetores:

$$W(t) = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & v_{21}(t) & \cdots & v_{n1}(t) \\ v_{12}(t) & v_{22}(t) & \cdots & v_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n}(t) & v_{2n}(t) & \cdots & v_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Se $W(t)$ for diferente de zero no intervalo de tempo determinado, então, os n vetores são linearmente independentes. Caso contrário, serão linearmente dependentes.



Refleta

Por que os vetores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ são linearmente dependentes?



Pesquise mais

Como referência sobre sistemas de equações diferenciais lineares, você pode acessar o link disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula14.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2017.

Mais detalhes sobre o método de eliminação podem ser conferidos no capítulo 6 de ÇENGEL, Y.; WILLIAM, J. P. III. **Equações diferenciais**. Tradução de Marco Elísio Marques. Porto Alegre: AMGH, 2014. 600 p.

Sem medo de errar

Para avançar no desenvolvimento do circuito eletrônico, sua equipe necessita obter a solução da parte do circuito que está sob sua responsabilidade. Ou seja, você precisa fornecer a tensão e a corrente no circuito para que as outras partes dele possam ser projetadas.

O sistema do circuito RLC pode ser escrito como:

$$I' = \frac{V}{L}$$
$$V' = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC},$$

no qual usamos $\frac{dV}{dt} = V'$ e $\frac{dI}{dt} = I'$.

Substituímos a primeira das equações e sua derivada na segunda equação. Dessa forma, temos:

$$LI'' = -\frac{I}{C} - \frac{LI'}{RC}.$$

Dividimos essa equação por L e arrumamos os termos da seguinte forma:

$$I'' + \frac{I'}{RC} + \frac{I}{LC} = 0.$$

Em seguida, observamos que a equação característica dessa equação fica:

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0, \text{ cuja solução nos fornece:}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}.$$

Substituindo os seguintes valores dos componentes eletrônicos $R = 4\Omega$, $L = 0,1H$ e $C = 0,001F$ na equação anterior, temos as soluções: $\lambda_1 = -50$ e $\lambda_2 = -200$. Podemos supor que a solução para a corrente tenha a seguinte forma:

$I(t) = Ae^{-50t} + Be^{-200t}$ e, ao substituir sua derivada em $I' = \frac{V}{L}$, ficamos com:

$$V(t) = L(-50Ae^{-50t} - 200Be^{-200t})$$

$$V(t) = 0,1(-50Ae^{-50t} - 200Be^{-200t})$$

$$V(t) = -5Ae^{-50t} - 20Be^{-200t}.$$

Que tipo de tendência apresentam essas soluções? Como apoio para sua resposta, você pode conferir os gráficos dessas soluções em <<https://ggbm.at/Z925zgHR>>. Acesso em: 27 out. 2017). Você resolveu o problema e apresentou as soluções gerais do sistema do circuito RLC,

e agora precisa apresentar esses resultados para sua equipe em mais uma apresentação rápida. Tente produzir os slides dessa apresentação.

Avançando na prática

Simuladores de sistemas físicos reais

Descrição da situação-problema

Uma empresa decidiu desenvolver aplicativos simuladores de situações reais. Como um primeiro protótipo, precisa encontrar uma solução para um simples sistema de duas molas acopladas a duas massas, como apresentado na Figura 2.5, mas sem forças externas. Desse modo, a empresa lhe contratou para modelar esse problema. Sua tarefa será produzir um manual contendo todos os passos matemáticos até chegar à solução do problema que, nesse caso, seria encontrar as posições das massas 1 e 2 em função do tempo. Na primeira entrega, será necessário mostrar um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares que modela o problema e, em seguida, transformá-lo em um problema que contenha apenas equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

Resolução da situação-problema

Para resolver esse problema de forma simples, supomos que inicialmente as molas estão esticadas, que $x_2 > x_1$ e que no tempo inicial o conjunto será liberado. Assim, a equação de movimento de cada massa pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2 (x_2 - x_1) - k_1 x_1$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1),$$

em que k_1 , k_2 , m_1 e m_2 são as constantes de mola e as massas envolvidas no problema (veja a Figura 2.5).

Devemos reescrever as equações de modo que a derivada de maior ordem em cada equação fique multiplicada por 1:

$$x_1'' = \frac{k_2}{m_1} (x_2 - x_1) - \frac{k_1}{m_1} x_1$$

$$x_2'' = -\frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1).$$

Aproveitamos para utilizar uma notação mais enxuta para as derivadas em função do tempo com linhas. Nesse momento,

temos que fazer a seguinte mudança de variáveis para reduzirmos a equação acima para uma equação que envolva apenas derivadas de primeira ordem:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 & y_4 &= x_2 \\ y_2 &= x_1' = y_1' & y_5 &= x_2' = y_4' , \\ y_3 &= x_1'' = y_2' & y_6 &= x_2'' = y_5' \end{aligned}$$

em que utilizaremos as funções y_1, y_2, y_4, y_5 e suas derivadas primeiras no sistema original:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{k_2}{m_1}(y_4 - y_1) - \frac{k_1}{m_1}y_1 , \\ y_4' &= y_5 \\ y_5' &= -\frac{k_2}{m_2}(y_4 - y_1) \end{aligned}$$

ou seja, transformamos um sistema com duas equações de segunda ordem em um sistema de quatro equações de primeira ordem. Para facilitar a visualização, vamos escrever esse sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_4' \\ y_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

É possível resolver o sistema anterior resolvendo a equação característica para encontrar os autovalores e os autovetores da matriz 4×4 , o que vamos tratar em detalhes na próxima seção. Agora, você precisa escrever a primeira parte do manual contendo o conteúdo exposto aqui.

Faça valer a pena

1. A forma padrão de uma equação diferencial ordinária linear deve apresentar o termo de mais alta ordem multiplicado por 1, enquanto os

demais termos devem ser funções apenas da variável independente, que pode ser o tempo t , como mostrado a seguir:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = R(t).$$

Com base no texto, analise as seguintes equações:

I. $7t^6y'' - 2y = \sqrt{t}$.

II. $(y''')^3 - y' = 0$.

III. $3y''y + 5t^4y = 0$.

IV. $\cos(t)y'' + \operatorname{sen}(t)y' = 0$.

Marque a alternativa que indica a resposta correta acerca das equações apresentadas.

- a) I e IV são equações diferenciais lineares na forma padrão.
- b) II e III são equações diferenciais lineares na forma padrão.
- c) I, II, III e IV não são equações diferenciais lineares.
- d) II e III são equações diferenciais lineares, mas não estão na forma padrão.
- e) I e IV são equações diferenciais lineares, mas não estão na forma padrão.

2. É possível definir se um conjunto de vetores de funções do tempo, por exemplo, é linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD) calculando o Wronskiano $W(t)$ construído a partir dos vetores do conjunto. O conjunto de três vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ 0 \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } v_3 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \text{ cujos elementos são funções do tempo}$$

t . Aplique o método do Wronskiano para definir se os vetores são LI ou LD. Marque a alternativa que indica a resposta correta acerca da questão proposta.

- a) 0, LD.
- b) 0, LI.
- c) 1, LI.
- d) 1, LD.
- e) 2, LI.

3. Um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares envolve mais de uma variável dependente que devem ser funções de apenas uma variável independente. Nesse caso, as equações que compõem o sistema devem ser resolvidas simultaneamente. O método de eliminação consiste em isolar uma variável dependente e sua derivada a partir de uma equação, e substituir esses resultados em outra equação, de modo que se obtenha uma equação diferencial com apenas uma variável dependente. Desse modo, encontre as soluções do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares:

$$\begin{cases} x' = -5x + 4y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

$$\text{a) } x(t) = Ae^{0,25t} + Be^{-7,25t} \text{ e } y(t) = \frac{(5,25Ae^{0,25t} - 2,25Be^{-7,25t})}{4}.$$

$$\text{b) } x(t) = \frac{(5,25Ae^{0,25t} - 2,25Be^{-7,25t})}{4} \text{ e } y(t) = Ae^{0,25t} + Be^{-7,25t}.$$

$$\text{c) } x(t) = Ae^{0,5t} + Be^{-14,5t} \text{ e } y(t) = \frac{(5,5Ae^{0,5t} - 9,5Be^{-14,25t})}{4}.$$

$$\text{d) } x(t) = \frac{(5,5Ae^{0,5t} - 9,5Be^{-14,25t})}{4} \text{ e } y(t) = Ae^{0,5t} + Be^{-14,5t}.$$

$$\text{e) } x(t) = Ae^{5t} + Be^{-10t} \text{ e } y(t) = \frac{(10Ae^{5t} - 5Be^{-10t})}{4}.$$

Seção 2.3

Método dos autovalores e dos autovetores para sistemas de EDOs

Diálogo aberto

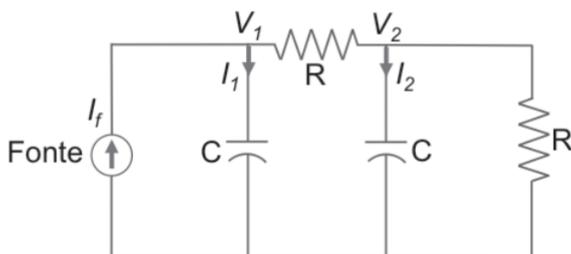
Nesta seção, vamos aplicar o método dos autovalores e autovetores para resolver sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Ou seja, aplicaremos o método utilizado na Seção 2.1 aos sistemas apresentados na Seção 2.2 para encontrar a solução de cada equação diferencial de primeira ordem do sistema.

O próximo desafio de sua equipe de engenheiros é resolver o circuito apresentado na Figura 2.7. Um dos profissionais construiu o sistema do circuito da seguinte forma:

$$\begin{cases} V_1' = -\frac{1}{RC}V_1 + \frac{1}{RC}V_2 + \frac{I}{C} \\ V_2' = \frac{1}{RC}V_1 - 2\frac{1}{RC}V_2 \end{cases}$$

Agora, sua tarefa é encontrar os valores das tensões (soluções) $V_1(t)$ e $V_2(t)$ em função da corrente $I = 10 \text{ mA}$, da resistência $R = 100 \Omega$ e da capacitância $C = 0,01 \text{ F}$.

Figura 2.7 | Circuito RC



Fonte: elaborada pelo autor.

O método necessário para resolver esse sistema será apresentado ao longo desse texto. Você precisa aprendê-lo para poder cumprir sua tarefa. Vamos começar?

Não pode faltar

Vimos na seção anterior que um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, de ordem superior a dois, pode ser escrito em termos de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com o custo de ter um aumento no número de equações no sistema. Podemos generalizar esse conceito estabelecendo que uma equação diferencial linear de ordem n pode ser reescrita como um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem. A forma compacta de um sistema como esse é expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{m}(t)$$

Em que $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz $n \times n$; \mathbf{x} e \mathbf{x}' são os vetores solução e sua derivada respectivamente, cada um com n elementos; e $\mathbf{m}(t)$ é o vetor que contém as n funções não homogêneas. Se um conjunto de n condições iniciais é atribuído às n funções do vetor solução \mathbf{x} , então, o teorema da existência e unicidade diz o seguinte.



Assimile

Teorema da existência e unicidade: se os coeficientes da matriz $\mathbf{A}(t)$ e as funções não homogêneas do vetor $\mathbf{m}(t)$ são contínuos em um intervalo de tempo $t_1 < t < t_2$ no qual o tempo t_0 está contido e as funções do vetor solução são conhecidas $(x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0})$, então, existe uma única solução para o sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{m}(t)$ no intervalo Δt .

Para resolver o sistema de n equações diferenciais lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{m}(t)$, primeiro devemos encontrar a solução da parte homogênea, ou seja, quando $\mathbf{m}(t) = \mathbf{0}$. O sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ pode ter n vetores solução, de modo que qualquer combinação linear desses vetores também será uma solução do sistema, o que é garantido pelo teorema da superposição.



Assimile

Teorema da superposição e solução geral: se o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ de n equações lineares possui os n vetores solução, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ linearmente independentes, então, qualquer combinação linear (superposição de soluções):

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n,$$

também será uma solução do sistema com as constantes c_1, c_2, \dots, c_n . Além disso, a solução x é chamada de solução geral do sistema.

Como mostrado na Seção 2.2, os vetores solução de um sistema de equações diferenciais lineares serão linearmente independentes se o determinante formado por esses vetores (Wronskiano) for diferente de zero. Caso contrário, os vetores são linearmente dependentes. Veja o que diz o quadro seguinte sobre o teorema de Abel.



Assimile

Teorema de Abel: se os elementos de uma matriz $\mathbf{A}(t)$ são contínuos e as soluções $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ satisfazem o sistema linear homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ para um intervalo de tempo $t_1 < t < t_2$:

- i) Se o Wronskiano dos vetores solução é nulo em um tempo t_0 no intervalo de tempo, então, ele será nulo em todo o intervalo, e as soluções serão linearmente dependentes.
- ii) Se o Wronskiano dos vetores solução é não nulo em um tempo t_0 no intervalo de tempo, então, ele será não nulo em todo o intervalo, e as soluções serão linearmente independentes.

Na Seção 2.1, aprendemos como encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz \mathbf{A} . Essa ferramenta matemática pode ser utilizada para encontrar as soluções do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem homogêneas, como veremos a seguir.

Vamos escrever o seguinte sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ na sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Em que os coeficientes da matriz A são constantes. O teorema da superposição e da solução geral garante que esse sistema terá a solução geral $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n$, de modo que precisamos determinar os n vetores linearmente independentes $\mathbf{x}_i (i = 1, \dots, n)$.

Vamos assumir que o sistema de equações diferenciais lineares anterior tenha a seguinte forma: $\mathbf{x} = \mathbf{w}e^{\lambda t}$, em que w é um vetor e λ pode ser um número complexo. Sua derivada fica $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{w}e^{\lambda t}$ e, quando substituirmos \mathbf{x} e \mathbf{x}' em $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, temos:

$$\lambda \mathbf{w}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{w}e^{\lambda t},$$

que pode ser simplificado para:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}e^{\lambda t} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

A equação anterior é um problema de autovalor e autovetor. Como já sabemos, primeiro determinamos os autovalores através da equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ e, em seguida, para cada autovalor, encontramos um autovetor associado w resolvendo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Assim, uma solução \mathbf{x}_1 pode ser definida a partir do vetor \mathbf{w}_1 , que está associado ao autovalor λ_1 :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Esse procedimento deve ser repetido para os outros autovalores, e a solução geral pode ser escrita como uma superposição das n soluções individuais:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{w}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \mathbf{w}_n e^{\lambda_n t}.$$

O restante da seção será dedicado a exemplificar os possíveis casos da solução anterior, que ocorrem quando a equação característica apresenta raízes reais e distintas, complexas e repetidas. Todos os casos serão exemplos de sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes. Começaremos pelo caso no qual as raízes são reais e distintas.



Caso 1 – Autovalores reais e distintos:

Encontre a solução do seguinte sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 7x_2 \\ x_2' = x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Resolução:

Primeiro, escrevemos o sistema anterior na forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

As soluções desse sistema devem ter a forma $\mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}$, em que \mathbf{w}_1 é um autovetor da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor λ_1 . Nesse caso, resolvemos a equação característica $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, para determinar todos os autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(-5-\lambda) - 7 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6$. Portanto, temos duas raízes reais e distintas.

Agora, devemos encontrar os autovetores associados a cada autovalor.

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 7 \\ 1 & -5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -w_1 + 7w_2 = 0 \\ w_1 - 7w_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, temos que $w_1 = 7w_2$ e, atribuindo $w_2 = z$, ficamos com a solução $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ associada ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Nesse caso, a solução \mathbf{x}_1 fica $\mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, em que atribuímos $z = 1$ arbitrariamente.

Para $\lambda_2 = -6$:

$$\begin{pmatrix} 1+6 & 7 \\ 1 & -5+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7w_1 + 7w_2 = 0 \\ 1w_1 + 1w_2 = 0 \end{cases}$$

que nos fornece o resultado $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2$. E com $\mathbf{w}_2 = \mathbf{s}$, temos a solução: $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{s} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Assim, a solução \mathbf{x}_2 pode ser escrita como:

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{w}_2 e^{-6t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$. Através do princípio da superposição, podemos escrever a seguinte solução geral:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{w}_1 e^{2t} + c_2 \mathbf{w}_2 e^{-6t} = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}, \text{ em que } c_1 \text{ e } c_2$$

são constantes a serem determinadas a partir de duas condições iniciais $\mathbf{x}_1(t_0)$ e $\mathbf{x}_2(t_0)$ que, arbitrariamente, podem ser $\mathbf{x}_1(0) = 1$ e $\mathbf{x}_2(0) = 0$. Escrevendo a solução \mathbf{x} na forma de sistema, temos:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 7e^{2t} + c_2 e^{-6t} \\ x_2 = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-6t} \end{cases}$$

Substituindo as condições iniciais, ficamos com:

$$\begin{cases} 1 = c_1 7e^{2 \cdot 0} + c_2 e^{-6 \cdot 0} \\ 0 = c_1 e^{2 \cdot 0} - c_2 e^{-6 \cdot 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 7 + c_2 \\ 0 = c_1 - c_2 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação do sistema anterior, temos $c_1 = c_2$ que, substituindo na primeira equação, fornece $c_1 = c_2 = 1/8$. Logo, a solução geral fica:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{8} e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-6t} \\ x_2 = \frac{1}{8} e^{2t} - \frac{1}{8} e^{-6t} \end{cases}$$

Na situação em que uma solução do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é $\mathbf{x} = \mathbf{w}e^{\lambda t}$, com o autovetor complexo $\mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ e o autovalor também complexo $\lambda = \alpha + i\beta$, ficamos com:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w}e^{\lambda t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\alpha + i\beta)t},$$

que pode ser escrito como:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t))$$

e simplificado da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos(\beta t) - \mathbf{b} \operatorname{sen}(\beta t)) + ie^{\alpha t} (\mathbf{a} \operatorname{sen}(\beta t) + \mathbf{b} \cos(\beta t)).$$

Assim, a solução \mathbf{x} envolve uma parte real e uma parte imaginária:

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{x}) = e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos(\beta t) - \mathbf{b} \operatorname{sen}(\beta t))$$

$$\text{e } \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = e^{\alpha t} (\mathbf{a} \operatorname{sen}(\beta t) + \mathbf{b} \cos(\beta t)).$$

Esse resultado seria obtido mesmo se tivéssemos utilizado o complexo conjugado do autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$, ou seja, $\lambda^* = \alpha - i\beta$, o que nos possibilitaria escrever a solução \mathbf{x} como:

$$\mathbf{x}_{\text{solução}} = \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2(t)$$

$$\mathbf{x}_{\text{solução}} = \mathbf{c}_1 \operatorname{Re}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_2 \operatorname{Im}(\mathbf{x}),$$

em que \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 são constantes a serem determinadas a partir de duas condições iniciais. Se o sistema possuir outro autovalor complexo $\lambda = \theta + i\varphi$, mais duas soluções linearmente independentes devem ser incluídas na solução geral, e assim por diante.



Exemplificando

Caso 2 – Autovalores complexos:

Encontre a solução do seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

O sistema já está na forma matricial na qual identificamos a matriz A como

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Portanto, a equação característica fica:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0,$$

que fornece soluções $\lambda_1 = 1 + i2$ e $\lambda_2 = 1 - i2$. Como os autovalores são complexos, as soluções serão da forma $\mathbf{x} = \mathbf{w}e^{\lambda t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\alpha+i\beta)t}$, em que \mathbf{w} é o autovetor associado a λ .

Para $\lambda_1 = 1 + i2$, encontramos o autovetor associado resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+i2) & 4 \\ -1 & 1-(1+i2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -i2w_1 + 4w_2 &= 0 \\ -w_1 - i2w_2 &= 0 \end{aligned}$$

que nos fornece $w_1 = -i2w_2$. Tomando $w_2 = z$, ficamos com a seguinte solução:

$$w = a + ib = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + zi \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da qual podemos identificar $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. A partir do autovalor

associado $\lambda_1 = 1 + i2$, identificamos $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, de modo que podemos escrever as partes real e imaginária da solução x substituindo os valores encontrados em:

$$\operatorname{Re}(x) = e^{\alpha t} (a \cos(\beta t) - b \operatorname{sen}(\beta t)) \text{ e } \operatorname{Im}(x) = e^{\alpha t} (a \operatorname{sen}(\beta t) + b \cos(\beta t)).$$

Logo,

$$\operatorname{Re}(x) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \right)$$

$$\operatorname{Im}(x) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right), \text{ que são soluções linearmente}$$

independentes. Portanto, a solução $x_{\text{solução}}$ fica:

$$x_{\text{solução}} = c_1 \operatorname{Re}(x) + c_2 \operatorname{Im}(x)$$

$$x_{\text{solução}} = c_1 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \right) + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right), \text{ em que } c_1 \text{ e } c_2$$

são constantes a serem determinadas a partir de duas condições iniciais arbitrárias. Essa solução também pode ser expressa na forma de sistema de equações:

$$x_1 = 2c_1 e^t \operatorname{sen}(2t) - 2c_2 e^t \cos(2t)$$

$$x_2 = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Quando as raízes da equação característica apresentam multiplicidades, ou seja, quando elas se repetem, por exemplo, k vezes, o número de autovetores linearmente independentes, associados a esses k autovalores iguais, pode ser menores que k . Esse fato acarreta um número insuficiente de autovetores linearmente independentes na solução geral. Desse modo, precisamos estabelecer um método para encontrar as soluções complementares que preenchem todo o autoespaço da matriz A em questão. De todo modo, se o número de autovetores linearmente independentes associados a um autovalor com multiplicidade k for exatamente igual a k , ao menos esse autovalor não causará problemas na solução final.

Supondo que a matriz A possua um autovetor associado a um autovalor λ com multiplicidade 2, uma solução seria:

$$x_1(t) = w_1 e^{\lambda t}$$

Para obter uma segunda solução linearmente independente, multiplicamos a solução anterior pela variável independente t e adicionamos o vetor constante \mathbf{v}_1 multiplicado pela exponencial:

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{w}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{v}_1 e^{\lambda t},$$

de modo que essa solução satisfaça o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e o vetor \mathbf{v}_1 seja obtido por meio da relação $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$.



Exemplificando

Caso 3 – Autovalores repetidos:

Encontre a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = 10x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -1x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

Resolução:

Passando o sistema anterior para a forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ do qual identificamos a matriz } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

O primeiro passo é encontrar os autovalores dessa matriz por meio da equação característica:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & 4 \\ -1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0.$$

Essa equação possui duas raízes reais iguais $\lambda_{1,2} = 8$. O próximo

passo é procurar pelo autovetor associado $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 10 - 8 & 4 \\ -1 & 6 - 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema anterior fornece uma única relação $w_1 = -2w_2$ e, se escolhermos $w_2 = 1$, então, $w_1 = -2$, e o único autovetor associado ao autovalor

$\lambda_{1,2} = 8$, que tem multiplicidade 2, é $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, uma solução do sistema é $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t}$, que é insuficiente para gerar a solução geral.

Assim, devemos procurar pela solução:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{w}te^{8t} + \mathbf{v}e^{8t},$$

em que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{pmatrix} 10-8 & 4 \\ -1 & 6-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 + 4v_2 = -2 \\ -1v_1 - 2v_2 = 1 \end{cases}, \text{ que fica}$$

$$1v_1 + 2v_2 = -1.$$

Tomando $v_1 = 0$, temos $v_2 = -1/2$, e a solução \mathbf{x}_2 fica:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{8t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{8t}.$$

Agora, podemos construir a solução geral como:

$$\mathbf{x}_{\text{geral}} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{8t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{8t} \right].$$

Na forma de sistema de equações, temos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} x_1 = (-c_1 - c_2 t) 2e^{8t} \\ x_2 = [c_1 + c_2 (t - 1/2)] e^{8t} \end{cases}$$



Refleta

Por que precisamos encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz que representa os coeficientes constantes de um sistema linear de equações diferenciais lineares de primeira ordem?



Pesquise mais

Detalhes de soluções não homogêneas podem ser pesquisados no link disponível em:

<<http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula16.pdf>>.

Acesso em: 09 nov. 2017.

Exemplos de sistemas com autovalores repetidos e soluções não homogêneas podem ser conferidos no capítulo 7, especialmente nas páginas 391 a 402, de ÇENGEL, Y.; WILLIAM, J. P. III. **Equações diferenciais**. Tradução de Marco Elísio Marques. Porto Alegre: AMG, 2014. 600 p.

Sem medo de errar

Escrevendo o sistema referente ao circuito da Figura 2.6, temos:

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{1}{RC}V_1 + \frac{1}{RC}V_2 + \frac{I}{C} \\ V_2 = \frac{1}{RC}V_1 - 2\frac{1}{RC}V_2 \end{cases},$$

que pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \frac{I}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da qual identificamos o sistema $\mathbf{v}' = \frac{1}{RC}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{m}$, com $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sendo uma matriz de elementos constantes e $\mathbf{m} = \frac{I}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sendo o vetor não homogêneo do sistema com solução $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$.

Primeiro resolveremos a parte homogênea, que deve possuir soluções do tipo $\mathbf{v} = \mathbf{w}e^{\lambda t}$, em que λ é o autovalor da matriz \mathbf{A} associado ao autovetor \mathbf{W} . Portanto, a equação característica fica:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} - \lambda & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{RC} - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(-\frac{1}{RC} - \lambda\right) \left(-\frac{2}{RC} - \lambda\right) - \left(\frac{1}{RC}\right)^2 &= 0 \\ \lambda^2 + \frac{3\lambda}{RC} + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

essa equação possui duas raízes reais distintas: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2RC}(-3 \pm \sqrt{5})$.

Substituindo os valores da resistência e da capacitância $R = 100 \Omega$ e $C = 0,01 F$, respectivamente, temos os seguintes autovalores: $\lambda_1 = -0,38$ e $\lambda_2 = -2,62$.

O autovetor $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -0,38$ é calculado

da seguinte maneira: $\begin{pmatrix} -1 + 0,38 & 1 \\ 1 & -2 + 0,38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -0,62W_1 + W_2 = 0 \\ W_1 - 1,62W_2 = 0 \end{cases},$$

tomando $w_2 = 1$ em qualquer uma das equações anteriores e $w_1 = 1,62$. Logo, o vetor solução é $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1 \end{pmatrix}$, e uma solução parcial do sistema fica $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,38t}$.

Repetindo o procedimento anterior para o outro autovalor $\lambda_2 = -2,62$, encontramos o autovetor associado $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -1+2,62 & 1 \\ 1 & -2+2,62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1,62w_1 + w_2 = 0 \\ w_1 + 0,62w_2 = 0 \end{cases}$$

Escolhendo $w_2 = 1$, temos $w_1 = -0,62$. Portanto, a segunda solução fica $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1,62t}$. Desse modo, a solução geral pode ser escrita como:

$$\mathbf{V} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{V} = c_1 \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,38t} + c_2 \begin{pmatrix} -0,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1,62t}$$

em que as constantes c_1 e c_2 devem ser determinadas a partir das duas condições iniciais $v_1(0) = 1$ e $v_2(0) = 0$. Substituindo essas condições iniciais na solução \mathbf{V} , temos:

$$1 = c_1 1,62 - c_2 0,62$$

$$0 = c_1 + c_2$$

A segunda equação resulta em $c_1 = -c_2$ que substituída na primeira equação fornece:

$$1 = c_1 1,62 + c_1 0,62. \text{ Logo,}$$

$$c_1 \approx 0,45 \text{ e } c_2 \approx -0,45.$$

Assim, a solução da parte homogênea pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}_h = 0,45 \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,38t} - 0,45 \begin{pmatrix} -0,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1,62t}.$$

Ainda precisamos resolver a parte não homogênea, que é representada pelo vetor constante $\mathbf{m} = \frac{I}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que resulta em $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ quando substituirmos os valores da corrente $I = 10 \text{ mA}$ e da capacitância $C = 0,01 \text{ F}$.

Nesse caso, uma solução particular deve ser $\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix}$, que deve satisfazer o sistema $\mathbf{v}_p' = \mathbf{A}\mathbf{v}_p + \mathbf{m}$

$$\begin{pmatrix} v_{p1}' \\ v_{p2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = -v_{p1} + v_{p2} + 1 \\ 0 = v_{p1} - 2v_{p2} + 0 \end{cases}$$

A partir da segunda das equações anteriores, temos $v_{p1} = 2v_{p2}$, que, substituído na primeira equação, fornece $v_{p2} = 1$ e, portanto, $v_{p1} = 2$. A solução particular resulta em $\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, a solução geral deve ser escrita como:

$$\mathbf{v}_{\text{geral}} = \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_p$$

$$\mathbf{v}_{\text{geral}} = 0,45 \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,38t} - 0,45 \begin{pmatrix} -0,62 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1,62t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ao terminar a resolução, você deve organizá-la em alguns slides para apresentá-la para a sua equipe. Tente escrever a solução na forma algébrica para visualizar as soluções para $\mathbf{v}_1(t)$ e para $\mathbf{v}_2(t)$.

Avançando na prática

Solução de sistemas físicos reais pelo método dos autovalores e autovetores

Descrição da situação-problema

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem na forma matricial a seguir representa um sistema físico de duas massas: m_1 e m_2 , e molas acopladas a molas com constantes elásticas k_1 e k_2 , similar ao apresentado na Figura 2.6. Na última seção, uma empresa de aplicativos de simuladores lhe requisitou a apresentação do sistema. A empresa aprovou seus métodos e lhe pediu que apresente uma solução geral que poderá ser utilizada por seus programadores nos aplicativos:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Dados: utilize o método dos autovalores e autovetores para resolver o sistema, com os seguintes valores das constantes elásticas e das massas: $k_1 = 8 \text{ N/m}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $k_2 = 3 \text{ N/m}$ e $m_2 = 1 \text{ kg}$.

Resolução da situação-problema

Para resolver o problema, devemos procurar por soluções do tipo $\mathbf{x} = \mathbf{w}e^{\lambda t}$, em que \mathbf{w} é o autovetor associado ao autovalor λ . Substituindo os valores das constantes elásticas e das massas fornecidos, chegamos à seguinte matriz de elementos constantes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os autovalores da matriz anterior, devemos resolver a equação característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -11 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -11 & -\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} - \lambda(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -11 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Em que a terceira linha do determinante de quarta ordem foi utilizada para reduzi-lo a dois determinantes de ordem três, que podem ser resolvidos como:

$$\begin{aligned} &= 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -11 & -\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} - \lambda(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -11 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -1(-24 - 3\lambda^2) - \lambda(-11\lambda - \lambda^3) = 0 \end{aligned}$$

$= \lambda^4 + 14\lambda^2 + 24 = (\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 12) = 0$, cujas soluções são: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ e $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{12}$.

A partir de $\lambda_1 = i\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = i\sqrt{12}$, podemos determinar quatro autovetores linearmente independentes. Começamos substituindo $\lambda_1 = i\sqrt{2}$ em $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}_1 = 0$

$$\text{para determinar } \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -11 & -i\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos operar com as linhas da matriz para simplificar o sistema. Assim, multiplicando a primeira linha da matriz anterior por $i\sqrt{2}$ e somando com a segunda linha, temos:

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a terceira linha da matriz anterior por $i\sqrt{2}$ e somando com a quarta linha, temos:

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dividindo a segunda linha da matriz anterior por 3 e somando com a quarta linha, temos:

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-i\sqrt{2}w_1 + w_2 = 0$$

$$-9w_1 + 3w_3 = 0$$

$$-i\sqrt{2}w_3 + w_4 = 0$$

Tomando $w_3 = 3$, temos $w_1 = 1$, $w_2 = i\sqrt{2}$ e $w_4 = 3i\sqrt{2}$ e, nesse caso,

podemos montar o autovetor $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ 3 \\ 3i\sqrt{2} \end{pmatrix}$, que é associado ao autovalor $\lambda_1 = i\sqrt{2}$.

Agora, podemos reescrever o autovetor e autovalor anterior como:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1 \text{ e } \lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,$$

identificando as partes reais e imaginárias:

$$\text{autovetor: } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\text{autovalor: } \alpha_1 = 0 \text{ e } \beta_1 = \sqrt{2}.$$

Como o autovalor e o autovetor são complexos, podemos utilizar a seguinte relação para:

$$\mathbf{x}_1(t) = \text{Re}(\mathbf{x}) = e^{\alpha_1 t} (\mathbf{a}_1 \cos(\beta_1 t) - \mathbf{b}_1 \text{sen}(\beta_1 t)) \text{ e}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \text{Im}(\mathbf{x}) = e^{\alpha_1 t} (\mathbf{a}_1 \text{sen}(\beta_1 t) + \mathbf{b}_1 \cos(\beta_1 t)),$$

que nos fornece duas soluções linearmente independentes:

$$\mathbf{x}_{\text{solução},1}(t) = c_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{sen}(\sqrt{2}t) \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen}(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \right).$$

Note que o termo exponencial fica $e^{\alpha_1 t} = e^{0t} = 1$.

Agora, precisamos repetir o procedimento anterior para o autovalor $\lambda_3 = i\sqrt{12}$ e, portanto, substituímos $\lambda_3 = i\sqrt{12}$ em $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w}_2 = 0$ para

$$\text{determinar } \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{12} & 1 & 0 & 0 \\ -11 & -i\sqrt{12} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{12} & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -i\sqrt{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando sobre as linhas da matriz anterior, podemos construir uma matriz mais simples:

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{12} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{12} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear resultante da matriz anterior fica:

$$\begin{aligned} -i\sqrt{12}w_1 + w_2 &= 0 \\ w_1 + w_3 &= 0 \\ -i\sqrt{12}w_3 + 3w_4 &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $w_3 = -1$, $w_1 = 1$, $w_2 = i\sqrt{12}$ e $w_4 = -i\frac{\sqrt{12}}{3}$, podemos

escrever o autovetor $\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{12} \\ 0 \\ -\sqrt{12}/3 \end{pmatrix}$, com as partes real

e imaginária já identificadas. Esse autovetor está associado ao autovalor $\lambda_3 = \alpha_2 + i\beta_2 = 0 + i\sqrt{12}$, com as partes real e imaginária também identificadas. Esse procedimento nos permite utilizar a relação:

$$\mathbf{x}_3(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{x}) = e^{\alpha_2 t} (\mathbf{a}_2 \cos(\beta_2 t) - \mathbf{b}_2 \operatorname{sen}(\beta_2 t)) \text{ e}$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = e^{\alpha_2 t} (\mathbf{a}_1 \operatorname{sen}(\beta_1 t) + \mathbf{b}_1 \cos(\beta_1 t))$$

$$\mathbf{x}_{\text{solução},2}(t) = c_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{12}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{12} \\ 0 \\ -\sqrt{12}/3 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{12}t) \right) + c_4 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{12}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{12} \\ 0 \\ -\sqrt{12}/3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{12}t) \right)$$

Portanto, a solução geral é a soma das duas soluções parciais:

$$\mathbf{x}_{\text{solução},1}(t) = c_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \right)$$

$\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = \mathbf{x}_{\text{solução},1}(t) + \mathbf{x}_{\text{solução},2}(t)$, que na forma algébrica, fica:

$$x_1(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + c_3 \cos(\sqrt{12}t) + c_4 \operatorname{sen}(\sqrt{12}t)$$

$$x_2(t) = -c_1 \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + c_2 \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) - c_3 \sqrt{12} \operatorname{sen}(\sqrt{12}t) + c_4 \sqrt{12} \cos(\sqrt{12}t)$$

$$x_3(t) = c_1 3 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) - c_3 \cos(\sqrt{12}t) - c_4 \operatorname{sen}(\sqrt{12}t)$$

$$x_4(t) = -c_1 3\sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + c_2 3\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) + c_3 (\sqrt{12}/3) \operatorname{sen}(\sqrt{12}t) - c_4 (\sqrt{12}/3) \cos(\sqrt{12}t)$$

As constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 devem ser determinadas a partir de quatro condições iniciais. Com essa solução em mãos, a sua tarefa pode ser concluída com sucesso.

Faça valer a pena

1. Um sistema de duas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes apresenta um autovalor complexo $\lambda = i\sqrt{6}$, que está associado ao autovetor $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$. A solução geral pode ser construída a partir dessas informações e por meio das relações:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = e^{at} [\mathbf{a} \cos(\beta t) - \mathbf{b} \sin(\beta t)] \\ \mathbf{x}_2(t) = e^{at} [\mathbf{a} \sin(\beta t) + \mathbf{b} \cos(\beta t)] \end{cases}$$

em que o autovalor e o autovetor são números complexos $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$. A solução geral é escrita como $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t)$. Assinale a alternativa que apresenta a solução correta encontrada a partir dos autovalores e autovetores fornecidos no texto.

a) $\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) \right]$.

b) $\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) \right]$.

c) $\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) \right]$.

d) $\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{6}t) \right]$.

e) $\mathbf{x}_{\text{geral}}(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) + \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \right]$.

2. De acordo com o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = 2\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}'_2 = -\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 \end{cases}$$

analise as afirmações a seguir enquanto verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. Os autovalores são complexos.

II. O autovetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ está associado ao autovalor 2, enquanto o autovetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ está associado ao autovalor 3.

III. A solução geral é $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Agora, assinale a alternativa que corresponde à ordem correta:

- a) $V - V - V$.
- b) $F - F - F$.
- c) $F - V - F$.
- d) $V - F - V$.
- e) $V - V - F$.

3. Um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem pode ser escrito em sua matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ao resolver esse sistema, encontra-se a seguinte solução: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, que

é insuficiente, pois não preenche todo o autoespaço da matriz de elementos

constantes $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Um procedimento para encontrar outra solução é

garantir que o autovalor \mathbf{w} referente à solução \mathbf{x}_1 é repetido e, em seguida,

encontrar um outro autovetor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, realizando o seguinte cálculo:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

A segunda solução deve ter a forma $\mathbf{x}_2 = \mathbf{w}te^{\lambda t} + \mathbf{v}e^{\lambda t}$.

De acordo com os dados fornecidos no texto, encontre a solução \mathbf{x}_2 .

a) $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

b) $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

c) $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

d) $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

e) $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Referências

ÇENGEL, Y. A.; PALM III, William, J. **Equações diferenciais**. Tradução de Marco Elísio Marques. Porto Alegre: AMGH, 2014. 600 p.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 4. 528 p.

HOWARD, A. RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 786 p.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução de EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. II. 664 p.

Introdução ao cálculo vetorial

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores estudamos diversos métodos para a solução de equações diferenciais e de sistemas de equações diferenciais. Na presente unidade, estudaremos o cálculo vetorial e um de seus principais objetivos, a determinação de fluxos.

Podemos ter fluxos de um fluido (água em torno de um navio ou ar em torno da asa de um avião ou das estruturas de uma ponte) ou fluxos de eletricidade. Assim, o cálculo vetorial reveste-se de importância para as várias especialidades da engenharia além de aplicações na geologia, meteorologia, física e medicina (lembre-se de que o sangue também é um fluido!).

Para calcular as grandezas associadas ao fluxo de fluidos, os matemáticos, físicos e engenheiros desenvolveram, ao longo dos últimos dois séculos, outros “tipos” de integrais além daquelas que você já estudou.

Iniciaremos a Seção 3.1 com o estudo das integrais de linha, as quais são utilizadas para calcular, por exemplo, a massa de um fio de arame ou o centro de massa de um arame. Veremos ainda a importante aplicação de integrais de linha no cálculo do trabalho de uma força ao longo de uma curva. Na sequência vemos uma generalização do teorema fundamental do cálculo: o teorema fundamental para as integrais de linha. Fechamos esta primeira seção com um teorema que estabelece uma relação importante entre integrais duplas e integrais de linha: o teorema de Green no plano.

Na segunda seção desta unidade estudaremos campos vetoriais, o rotacional e o divergente de um campo vetorial.

Enquanto o rotacional é uma medida do movimento angular de um fluido, o divergente aponta se existem fontes ou sumidouros em um campo vetorial, servindo como indicador da taxa de variação da densidade do fluxo em um ponto. Tanto o rotacional quanto o divergente aplicam-se tanto à mecânica de fluidos quanto aos campos de forças eletromagnéticas. Finalizaremos essa seção com a forma vetorial do teorema de Green.

Já na terceira seção desta unidade estudaremos a importante classe dos campos conservativos e as funções potenciais associadas a tais campos. Concluímos a unidade estudando a relação entre integrais de linha e a independência de caminhos.

Com a finalidade de relacionar esses tópicos com sua atuação profissional, considere que você foi contratado por uma empresa que fabrica uma vasta gama de produtos: desde guindastes com eletroímãs e motores elétricos até asas de avião. Mais especificamente você foi contratado para atuar na coordenadoria de avaliação de novos produtos. Essa coordenadoria é responsável por produzir relatórios técnicos com estudos de viabilidade técnica de produção de qualquer novo produto. A empresa está estudando o lançamento de uma nova linha de guindastes com eletroímãs que apresentam como inovação uma geometria inédita.

Você deverá avaliar, para esta nova linha de guindastes com eletroímãs, em função de ângulos associados a essa nova geometria, o comportamento do campo magnético bem como identificar para qual ângulo o campo magnético é máximo. Outras questões que você deverá tratar para essa nova linha de guindastes é o fluxo associado a um campo elétrico específico. Por fim, você deverá avaliar o cálculo do trabalho realizado por um campo vetorial.

Esta é mais uma etapa na construção da sua carreira. Estude com afinco.

Seção 3.1

Caminhos suaves e integrais de linha

Diálogo aberto

Nesta seção estudaremos as integrais de linha e suas aplicações. Enquanto as integrais que você já estudou são calculadas sobre um intervalo do eixo cartesiano, as integrais de linha são calculadas sobre uma curva C que pode estar no plano ou no espaço. Com as integrais de linha você terá meios para resolver uma nova classe de problemas: calcular a massa de um fio de arame, calcular o trabalho realizado por uma força, determinar fluxos de fluidos ou fluxos de calor, entre outras.

Na empresa de fabricação de guindastes com eletroímãs para a qual você foi contratado, você desenvolverá a análise de viabilidade de produção de um novo modelo de guindaste. Esse modelo de guindaste produz campos magnéticos com variadas geometrias e precisa gerar um campo magnético variável em um certo ponto P compatível com o material a ser movimentado, por meio de um cabo condutor na forma da Figura 3.1.

Sabemos que, se a geometria do problema apresenta uma simetria adequada, o cálculo do campo magnético é bem simples. No entanto, para geometrias mais complexas, precisamos aplicar a chamada lei de Biot-Savart, que envolve a realização de integrais de linha para o cálculo do campo magnético.

Do ponto de vista da Física, sabemos que uma carga elétrica com velocidade \vec{v} deve gerar um campo magnético \vec{B} em sua vizinhança. Uma corrente elétrica i consiste em um conjunto de cargas em movimento, e assim concluímos que um fio atravessado por correntes elétricas deve gerar um campo magnético.

O cálculo desse campo é possível por meio da lei de Biot-Savart. A intensidade do campo magnético \vec{B} , em um ponto P qualquer, sob uma corrente de intensidade i , a uma distância r de um elemento

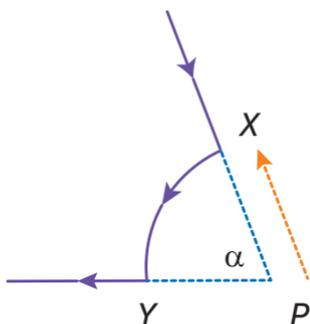
de comprimento ds é dada por:
$$d\vec{B} = Ki \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Podemos escrever a lei de Biot-Savart em termos de uma integral de linha como:

$$B = K \int_C \frac{i \cdot r \cdot \text{sen}(\theta)}{r^3} ds.$$

Onde K é uma constante física. Considere um fio curvado como a figura a seguir.

Figura 3.1 | Cabo curvado sob ângulo α



Fonte: elaborada pelo autor.

Você deve apresentar um breve relatório técnico direcionado ao engenheiro-sênior de sua coordenadoria de avaliação de novos produtos analisando as duas situações a seguir. Seu texto deve incluir os cálculos necessários para justificar suas conclusões para os itens.

a) Apresente o gráfico do comportamento do campo magnético B no ponto P à medida que o raio r aumenta. O módulo do campo magnético aumenta ou diminui?

b) Como o valor do campo magnético B em P se comporta para $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 150^\circ$, $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 270^\circ$ e $\alpha = 360^\circ$?

O campo magnético é máximo para a espira completa?

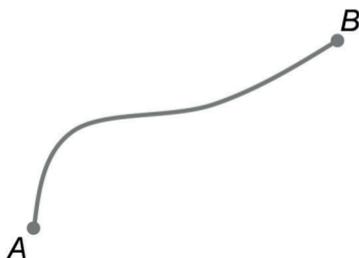
Para concluir esse desafio, você precisa de novos conhecimentos.

Não pode faltar

1. Orientação de curvas e integrais de linha

Considere um arame bem fino cuja massa por unidade de comprimento seja um valor conhecido, como representado na Figura 3.2. Esse arame será representado por uma curva que simbolizaremos pela letra C , ligando os pontos A e B .

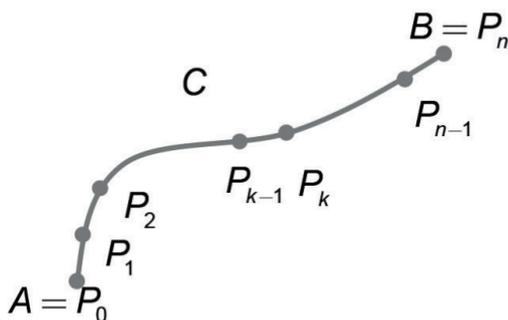
Figura 3.2 | Um arame pode ser representado por uma curva suave



Fonte: elaborada pelo autor.

O procedimento que faremos agora é inteiramente análogo ao que já fizemos para definir as integrais de uma única variável na reta. Efetuamos uma partição da curva C usando os pontos P_i com $A = P_0$ e $B = P_n$ com o comprimento de arco entre dois pontos sucessivos P_{k-1} e P_k denotado por Δs_k e representamos a função densidade do arame em cada ponto (x, y) pela função $f(x, y)$, de tal forma que a massa de um subintervalo qualquer será dada por $\Delta m_k \cong f(x, y) \Delta s_k$. Essa partição está ilustrada na Figura 3.3.

Figura 3.3 | Partições do fio de arame



Fonte: elaborada pelo autor.

Se somarmos todos esses elementos e tomarmos o limite dessa soma quando o número de elementos tende a infinito, teremos, de forma análoga à integral de Riemann, o que se define como a integral de linha da função f em relação à curva C .



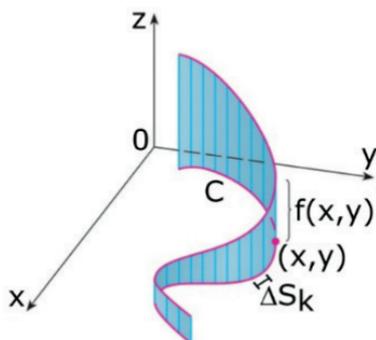
Definição de integral de linha de f em relação a s sobre a curva C (STEWART, 2006, p. 954): "Seja f uma função com domínio sobre a curva lisa C . Define-se a integral de linha de f sobre C como $\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ (se o limite existir), onde o ponto (x_i^*, y_i^*) representa um ponto qualquer em cada i -ésimo sub-arco Δs_i ".

Se a curva C for uma curva no espaço, vale a definição análoga:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i.$$

Uma interpretação importante para as integrais de linha é a seguinte: se $f(x, y) \geq 0$, então a integral $\int_C f(x, y) ds$ representa a área da superfície desenhada na Figura 3.4. Observe que a base da superfície é dada pela curva C e a altura, para cada ponto (x, y) , é dada pelo valor $f(x, y)$.

Figura 3.4 | Interpretação para $\int_C f(x, y) ds$ quando $f(x, y) \geq 0$



Fonte: adaptada de Stewart (2006, p. 954).



Suponha que $d(x, y, z)$ represente a função densidade de massa de um arame simbolizada por uma curva lisa C no espaço. Por que a massa do arame é dada pela integral $\int_C d(x, y, z) ds$?

A definição dada não é prática para os cálculos das integrais de linha.

Voltemos ao nosso problema inicial de se calcular a massa do arame sobre uma região plana de forma que a curva C possa ser representada pelas equações $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ com $t \in [a, b]$. Assim, a curva C pode ser descrita pela expressão vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Lembremos que o comprimento da curva C entre os pontos a e b é dado por $L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$. Então se f é uma função contínua, a igualdade a seguir torna bem mais simples muitos cálculos de integrais de linha:

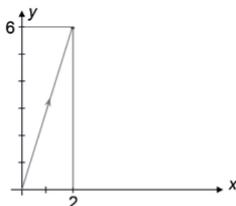
$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad \text{Para}$$

consultar os detalhes a respeito da igualdade anterior, sugerimos que você consulte as obras de Stewart (2006, p. 1061) ou Anton, Bivens e Davis (2012, p. 1096).



Calcule a integral de linha $\int_C (x^2y - 3) ds$, onde C é a curva $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}, t \in [0, 2]$.

Figura 3.5 | Curva C a ser utilizada na integral $\int_C (x^2y - 3) ds$



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução: temos $\mathbf{r}'(t) = i + 3j$ e assim

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

A integral fica $\int_C (x^2y - 3) ds = \int_0^2 [t^2(3t) - 3] \sqrt{10} dt =$

$$= \int_0^2 [3t^3 - 3] \sqrt{10} dt = \sqrt{10} \left[\frac{3t^4}{4} - 3t \right]_0^2 = 6\sqrt{10}.$$

Ao apresentar a parametrização de uma curva, teremos uma orientação associada para percorrer essa curva. No caso do exemplo anterior, para $t = 0$ estaremos na origem $(0,0)$ e para $t = 2$ estaremos no ponto $(2,6)$. Costuma-se denominar de orientação positiva a orientação associada aos valores crescentes para t . Mas poderíamos, por algum motivo do problema específico que estivermos tratando, adotar uma orientação contrária. Denota-se por $-C$ a curva que possui os mesmos pontos que a curva C , mas com orientação contrária. No caso do exemplo anterior, teremos $-C: \mathbf{r}(t) = (2-t)i + (6-3t)j, t \in [0,2]$.

Destaquemos o importante resultado que o valor das integrais de linha de f com respeito a s ao longo da curva C independe da orientação adotada para a curva C , pois o elemento de comprimento de arco Δs_i é sempre positivo.



Refleta

Qual é o valor da integral $\int_C (x^2y - 3) ds$ ao longo da curva

$$-C: \mathbf{r}(t) = (2-t)i + (6-3t)j, t \in [0,2]?$$

De forma análoga às propriedades para as integrais já estudadas, temos o resultado a seguir.

Teorema (STEWART, 2006, p. 1062): "Se C é uma curva lisa por partes (ou por trechos), constituída pelas curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n então vale que $\int_C f(x,y,z) ds = \int_{C_1} f(x,y,z) ds + \int_{C_2} f(x,y,z) ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y,z) ds$ ".

Veremos agora as integrais de linha em relação a x , y e z . Teremos um outro tipo de integral de linha se, ao invés de integrarmos em relação a s (usando o elemento ds), efetuarmos a integração em relação a x , y e z . Teremos as integrais de linha de f ao longo da curva suave C com relação a x , y e z :

Definição (STEWART, 2006, p. 1066): "Seja C uma curva lisa por partes. 

Define-se a integral de linha de f em relação a x ao longo de C por

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt .$$

Define-se a integral de linha de f em relação a y ao longo de C por

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt .$$

Define-se a integral de linha de f em relação a z ao longo de C por

$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt .$$

Note que, se invertermos a orientação da curva C para integrais de linha em relação a x , y e z , o sinal da integral será trocado, ou seja:

$$\int_{-C} f(x, y, z) dx = - \int_C f(x, y, z) dx, \quad \int_{-C} f(x, y, z) dy = - \int_C f(x, y, z) dy \quad \text{e}$$

$$\int_{-C} f(x, y, z) dz = - \int_C f(x, y, z) dz, \quad \text{pois, ao invertermos a orientação}$$

da curva, os sinais dos elementos dx , dy e dz se invertem.

2. Integrais de linha de campos vetoriais

Você já estudou o conceito de trabalho W efetuado por uma força F para deslocar, ao longo de um dos eixos coordenados, de um ponto A até um ponto B . Para isso você calculava a integral $W = \int_a^b f(x) dx$. Suponha agora que tenhamos uma partícula em um campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ no espaço e desejamos calcular o trabalho efetuado para se deslocar uma partícula entre dois pontos quaisquer A e B ao longo de uma trajetória suave representada pela curva C . Esse campo de forças pode ser um campo gravitacional ou um campo elétrico.



Dica

Como um exemplo de campo de vetores no GeoGebra, acesse o link <https://www.geogebra.org/m/ZGgddgVD> (acesso em: 7 fev. 2018). Nesse aplicativo, o campo de vetores é $\mathbf{F}(x, y) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, onde v_x e v_y são funções que você mesmo pode inserir. Experimente!

Para obter a integral que apresenta o trabalho efetuado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z)$, para deslocar uma partícula entre os pontos A e B ao longo de uma trajetória suave representada pela curva C , repetimos o procedimento de dividir a curva C em sub-arcos definidos pelos pontos P_{k-1}, P_k , cujo comprimento de cada sub-arco é dado pelos elementos Δs_k . O deslocamento da partícula entre cada um dos pontos P_{k-1}, P_k ocorre, aproximadamente, na direção do vetor tangente à curva C . Apresentamos a definição para integral de linha para campos vetoriais a seguir.



Definição (integral de linha para campos vetoriais) (STEWART, 2006, p.1068): "Considere um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

para o qual as funções $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$ são supostas contínuas e a curva C é suave por partes e representada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Defina-

se a integral de linha de F ao longo de C por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Se representarmos por $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ o vetor tangente à curva C , então a integral acima pode ser apresentada também na forma:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Cabe destacar ainda que pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k] \cdot [x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k] dt = \\ &= \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz. \end{aligned}$$



Exemplificando

Considere uma partícula, sob a ação do campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = x^2i + 2yj$, que deve ser deslocada ao longo da curva $C: ti + 2t^2j, t \in [0, 1]$ entre os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 2)$. Determine o trabalho efetuado por $\mathbf{F}(x, y)$.

Resolução: temos $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^2)i + 2(2t^2)j$ e $\mathbf{r}'(t) = i + 4tj$.

Então $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (t^2i + 4t^2j) \cdot (i + 4tj) = t^2 + 16t^3$. Assim

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 t^2 + 16t^3 dt = \frac{13}{3}$$

3. Teorema fundamental para integrais de linha

Lembremos o teorema fundamental do cálculo: se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde a função F é uma primitiva qualquer da função f ($F' = f$). O teorema fundamental do cálculo diz-nos que a área definida pelo gráfico da função f , no intervalo $[a, b]$ pode ser determinada, conhecendo-

se os valores da primitiva de f apenas no extremo de integração. Antes de apresentar o teorema fundamental para integrais de linha, recordemos o gradiente de uma função.



Definição (gradiente) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 963): "Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se o gradiente de f

$$\text{por } \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j.$$

Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se o gradiente de f por

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k."$$

Agora podemos apresentar o teorema fundamental para integrais de linha:



Teorema (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1112): "Seja C uma curva lisa por partes com extremidade inicial no ponto $P = (x_0, y_0)$ e final no ponto $Q = (x_1, y_1)$ e f uma função diferenciável com gradiente dado por ∇f . Então vale que

$$\int_C \nabla f(x, y) \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \text{ se } f \text{ possui duas variáveis e}$$

$$\int_C \nabla f(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0) \text{ se } f \text{ possui três variáveis}."$$

Em outras palavras, nas condições dadas pelo teorema, o valor da integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva C , não dependendo da particular curva adotada.



É importante que você estabeleça a relação entre o teorema fundamental do cálculo e o teorema fundamental para integrais de linha. Nos dois casos, o resultado da integral depende apenas do valor da “primitiva” calculada nos extremos de integração. Note que no caso do teorema fundamental para integrais de linha, não temos uma primitiva no sentido rigoroso do termo.



Considere a função $f(x, y) = 5xy$ e as curvas $C_1 : ti + tj, t \in [0, 1]$ e $C_2 : ti + t^2j, t \in [0, 1]$. Qual é o valor das integrais $\int_{C_1} \nabla f \cdot dr$ e

$\int_{C_2} \nabla f \cdot dr$ tomando como ponto inicial $P = (0, 0)$ e como ponto final $Q = (1, 1)$ para ambas as curvas?

4. Teorema de Green no plano

O teorema de Green apresenta uma ligação entre integrais duplas em uma região plana R e integrais de linha em torno da fronteira dessa região. Ele facilita o cálculo ao permitir a transformação de algumas integrais de linha em integrais duplas que podem ser de cálculo mais simples.

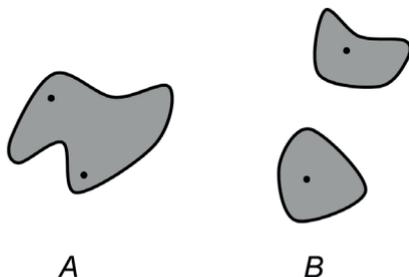
Antes de apresentarmos o teorema de Green no plano, é necessário definirmos o que são regiões simplesmente conexas, multiplamente conexas e curvas simples e não simples.

Definição (regiões conexas e não conexas) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1114): “Um conjunto A do plano é definido como conexo se, para quaisquer dois pontos pertencentes ao conjunto A , eles podem ser conectados por uma curva lisa por partes totalmente contida em A ”.



Na Figura 3.6, o conjunto A é conexo, mas o conjunto B não é conexo (não é possível ligar quaisquer dois elementos desse segundo conjunto com uma curva simples inteiramente contida em B).

Figura 3.6 | Regiões conexas e não conexas



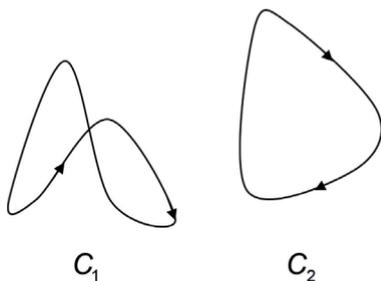
Fonte: elaborada pelo autor.



Definição (curvas simples e não simples) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1115): “diz-se que uma curva é simples se ela não se auto-intersecta. Uma curva que apresenta um ou mais pontos nos quais se auto-intersecta é dita não simples”.

Na Figura 3.7 a seguir, a curva C_1 é um exemplo de curva fechada não simples, enquanto a curva C_2 é um exemplo de curva fechada simples.

Figura 3.7 | Curvas fechadas não simples e simples

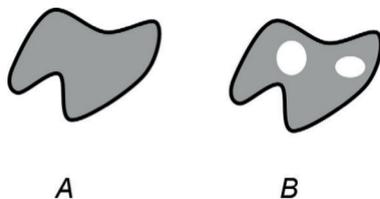


Fonte: elaborada pelo autor.

Definição (conjuntos simplesmente conexos e multiplamente conexos) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1115): “Um conjunto é definido como simplesmente conexo se não existe nenhuma curva simples fechada sobre este conjunto de tal forma a envolver elementos que não pertençam ao conjunto. Caso contrário denominamos o conjunto de multiplamente conexo”.

Uma forma intuitiva de entender conjuntos simplesmente conexos é dizer que eles não contêm “buracos”. Conjuntos multiplamente conexos contêm um ou mais “buracos”. Na Figura 3.8 o conjunto **A** é simplesmente conexo (não contém “buracos”), já o conjunto **B** é multiplamente conexo (contém “buracos”).

Figura 3.8 | Conjuntos simplesmente conexos e multiplamente conexos



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora estamos em condições de apresentar o teorema de Green no plano.

Teorema (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1122): “Considere R uma região do plano simplesmente conexa com a fronteira de R dada por uma curva C lisa por partes. Supõe-se ainda que a curva C seja fechada, simples e orientada no sentido anti-horário. Considere funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ contínuas cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em um conjunto aberto A com $R \subset A$. Então vale que

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA.$$



Você pode encontrar material adicional para leitura sobre campos vetoriais e o teorema fundamental das integrais de linha acessando as aulas contidas nos links a seguir:

VALLE, Marcos Eduardo. Campos vetoriais e integrais de linha. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211/Aula18.pdf>>. Acesso em: 7 fev. 2018.

----- . Teorema fundamental das integrais de linha. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211/Aula19.pdf>>. Acesso em: 7 fev. 2018.

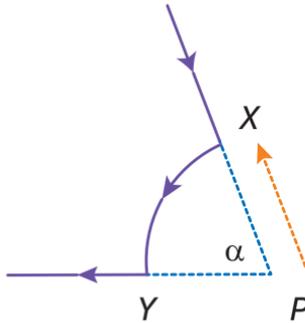
Sem medo de errar

Você foi contratado por uma empresa de fabricação de guindastes com eletroímãs e na sua nova posição desenvolverá a análise de viabilidade de produção de um novo modelo de guindastes. Sua primeira tarefa será determinar a intensidade de campos magnéticos produzidos por correntes elétricas em diferentes geometrias dos cabos no interior dos novos modelos de guindastes em avaliação.

Suponha uma carga positiva q , puntiforme, com velocidade \vec{v} . Com o movimento dessa carga será produzido um campo magnético \vec{B} . Pela lei de Biot-Savart, a intensidade do campo magnético \vec{B} , em um ponto P qualquer, sob uma corrente de intensidade i , a uma distância r de um elemento de comprimento ds é dada por: $d\vec{B} = Ki \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$. Destacamos que queremos calcular a intensidade do campo magnético neste ponto P .

Podemos escrever a lei de Biot-Savart em termos de uma integral de linha como: $B = K \int_C \frac{i \text{sen}(\theta)}{r^2} ds$, onde K é uma constante física (permeabilidade magnética). A corrente elétrica é denotada por i . A geometria do problema é dada pela figura a seguir.

Figura 3.1 | Cabo curvado sob ângulo α

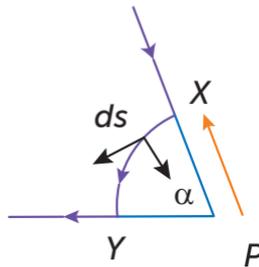


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

Observamos que o ângulo θ é o ângulo entre as direções $d\mathbf{s}$ e $\vec{\mathbf{r}}$. Neste caso este ângulo sempre é de $\frac{\pi}{2}$ (veja a figura a seguir).

Figura 3.9 | O ângulo entre $d\mathbf{s}$ e \mathbf{r} é $\frac{\pi}{2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

A distância ao ponto P é constante e igual a R . Temos $B = K \int_C \frac{i \text{sen}(\theta)}{R^2} ds = K \int_C \frac{i \text{sen}(\pi/2)}{R^2} ds$. Parametrizamos o arco com

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(t) \mathbf{i} + R \text{sen}(t) \mathbf{j}.$$

$$\text{Então } \|\mathbf{r}'(t)\| = \|-R \text{sen}(t) \mathbf{i} + R \cos(t) \mathbf{j}\| = R.$$

A integral fica $B = K \int_0^{\alpha_1} \frac{i \|\mathbf{r}'(t)\| dt}{R^2} = \frac{K i}{R} \alpha_1$, para cada um dos ângulos

$\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 150^\circ$, $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 270^\circ$ e $\alpha = 360^\circ$.

Assim, a resposta ao item a) é que o campo magnético é inversamente proporcional ao raio r . Para o item b), basta substituirmos cada um dos valores dos ângulos solicitados em radianos.

$$\alpha_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} : B = \frac{Ki \pi}{r 6} ; \alpha_2 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} : B = \frac{Ki \pi}{r 4} ; \alpha_3 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$: B = \frac{Ki \pi}{r 3} ; \alpha_4 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} : B = \frac{Ki \pi}{r 2} ; \alpha_5 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} : B = \frac{Ki 5\pi}{r 6} ;$$

$$\alpha_6 = 180^\circ = \pi : B = \frac{Ki \pi}{r} ; \alpha_7 = 270^\circ = \frac{3\pi}{2} : B = \frac{Ki 3\pi}{r 2} ; \alpha_8 = 360^\circ = 2\pi$$

$$: B = \frac{Ki}{r} 2\pi.$$

Conclusão: o campo magnético é máximo quando $\alpha_8 = 360^\circ = 2\pi$. Não se esqueça de organizar essas informações no relatório técnico ao seu supervisor, apresentando a análise das duas questões colocadas.

Avançando na prática

Trabalho realizado por um campo vetorial ao longo de uma circunferência

Descrição da situação-problema

Você estava em busca de novos desafios profissionais e surgiu a oportunidade de atuar em uma empresa que realiza testes aerodinâmicos. A empresa solicitou que você desenvolvesse um estudo relacionado com o projeto de um novo modelo de asa de avião.

Foram realizados testes aerodinâmicos e observou-se que o campo vetorial que descreve o escoamento de ar no entorno desse novo modelo de asa de avião é dado por $\mathbf{F}(x, y) = 7xy\mathbf{i} + 4x^2\mathbf{j}$. Sabe-se também que esse novo perfil de asa é representado pelas funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = 3x$ entre os pontos $P = (0, 0)$ e $Q = (3, 9)$.

Foi solicitado que você apresentasse os cálculos, usando o teorema de Green, para a circulação desse fluido no perfil de asa apresentado. Para isso você deverá calcular a integral

$$\int_C 7xydx + 4x^2dy$$

sabendo que a curva C é a curva fechada

definida pelos gráficos das funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = 3x$ entre os pontos $P = (0,0)$ e $Q = (3,9)$.

Resolução da situação-problema

Lembramos o resultado do teorema de Green:

$$\int_C f(x,y) dx + g(x,y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$

Identificamos com o teorema de Green que $f(x,y) = 7xy$ e $g(x,y) = 4x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Então } \int_C 7xy dx + 4x^2 dy &= \iint_R [8x - 7x] dA = \int_0^3 \left[\int_{x^2}^{3x} x dy \right] dx = \int_0^3 xy \Big|_{x^2}^{3x} dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \\ &= \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = 3^3 - \frac{3^4}{4} = 6,75. \end{aligned}$$

Com essa solução em mãos, é possível dar andamento ao projeto. Sua tarefa foi concluída com êxito.

Faça valer a pena

1. Considere as asserções a seguir.

() Seja C uma curva lisa por partes. Uma integral de linha de uma função f com relação ao comprimento de arco não depende da orientação da curva C , pois os elementos Δs_k são sempre positivos.

() Se $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ representa um campo vetorial com f, g e h funções contínuas e C uma curva lisa por partes representada por $\mathbf{r}(t), t \in [a,b]$. A definição da integral de

linha de F ao longo de C é dada por $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$.

() Considere o problema de se determinar o trabalho realizado pelo campo de vetores definido pela função $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ para deslocar uma partícula de um ponto A para um ponto B ao longo de uma curva C lisa por trechos dada por $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$. Então é correto afirmar

que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(b)) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(a))$.

() O conceito de integral de linha para curvas suaves pode ser estendido para curvas constituídas por um número finito de curvas suaves C_1, C_n .

..., C_n e a integral de linha ao longo de uma curva C suave por partes pode ser escrita como a soma das integrais de linha ao longo de cada curva:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y, z) ds.$$

() Considere um arame disposto ao longo de um semicírculo C . Se a função densidade de massa de um arame for igual a $d(x, y) = 5 - 3y$, então a massa do arame pode ser expressa como a integral de linha

$$M = \int_C x d(x, y) ds = \int_C x(5 - 3y) ds.$$

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta:

- a) V - V - V - F - V.
- b) V - V - F - V - F.
- c) F - V - F - V - F.
- d) V - F - V - F - F.
- e) F - F - F - V - V.

2. Uma das aplicações mais importantes das integrais de linha é no cálculo do trabalho efetuado por uma força variável, deslocando uma partícula ao longo de uma trajetória suave, seja no plano, ou no espaço.

Seja o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -2z, 3y)$, a curva definida por $\mathbf{r}(t) = (t + 2, t^3, 4t^2)$ e os valores para t , os pontos inicial e final dados por $t = 2$ e $t = 2$.

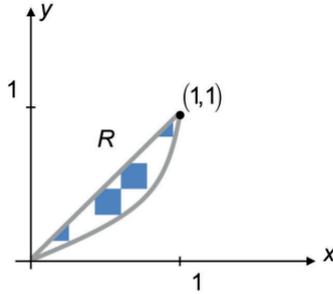
Considerando o campo de forças e a curva apresentada, o trabalho total efetuado pelo campo no deslocamento dessa partícula entre os pontos dados é:

- a) $\frac{501}{7}$.
- b) $\frac{219}{13}$.
- c) $\frac{404}{3}$.
- d) $\frac{303}{5}$.
- e) $\frac{129}{11}$.

3. Considere as afirmações a seguir.

I. Seja a região do plano limitada pelos gráficos $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x$, como ilustrado na figura a seguir.

Figura | Região R limitada pelos gráficos $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x$

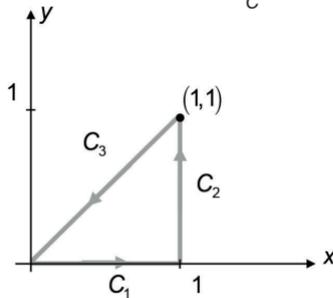


Fonte: elaborada pelo autor.

Usando o teorema de Green para calcular a integral $\int_C 3xydx + 2x^4dy$, obtemos como resposta um valor maior que $\frac{1}{10}$.

II. Considere a região triangular do plano apresentada na figura a seguir.

Figura | Caminho triangular para a integral $\int_C 5x^3ydx + 3xdy$



Fonte: elaborada pelo autor.

Colado sem ser meta-arquivo avançado:

A integral $\int_C 5x^3 y dx + 3x dy$ ao longo desse trajeto triangular, no sentido anti-horário, é igual a $\frac{1}{2}$.

III. A integral $\int_C [(2x + 6y^2)i - 3yzj + 5xzk] \cdot d\mathbf{r}$ entre os pontos $P = (0,0,0)$ e $Q = (1,1,1)$ pela trajetória $\mathbf{r}(t) = ti + t^2j + t^3k$ é igual a $\frac{145}{19}$.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a resposta CORRETA:

- a) Somente a afirmativa III está correta.
- b) As afirmativas II e III estão corretas.
- c) As afirmativas I e III estão corretas.
- d) As afirmativas I e II estão corretas.
- e) Somente a afirmativa II está correta.

Seção 3.2

Campos vetoriais, rotacionais e divergentes

Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos integrais de linha, que podem ser efetuadas sobre campos escalares ou sobre campos vetoriais. O exemplo clássico de aplicação de integrais de linha sobre campos escalares é o cálculo da massa de um arame. Já o exemplo clássico de aplicação de integrais de linha sobre campos vetoriais é o cálculo do trabalho realizado por um campo de forças \mathbf{F} para deslocar uma partícula entre os pontos P e Q . Vimos o teorema fundamental para integrais de linha e encerramos a seção com o teorema de Green no plano.

Na presente seção estudaremos em mais detalhes o que são campos vetoriais, incluindo alguns exemplos de campos vetoriais, e como eles aparecem nas mais diversas aplicações: campos gravitacionais, elétricos, magnéticos, mecânica de fluidos em geral e em particular, meteorologia e aerodinâmica. Em seguida estudaremos o rotacional e o divergente de um campo vetorial, que possuem interpretações físicas bastante importantes para a engenharia e a física. Essas interpretações são utilizadas em conjunto com as formas vetoriais do teorema de Green, que também será visto nesta seção.

Lembremos que você foi contratado por uma empresa de produção de guindastes com eletroímãs e motores elétricos para atuar na coordenadoria de avaliação de novos produtos. Você já vem desenvolvendo suas atividades com sucesso.

Neste momento você deverá tratar de problemas que envolvem o conceito de fluxo. Neste tipo de problemas você deve calcular a taxa com que um fluido entra ou sai de uma região R limitada por uma curva suave C . Tais problemas aparecem tanto em situações na mecânica de fluidos quanto em situações relacionadas com eletromagnetismo.

Considere um campo vetorial \mathbf{F} . Denomina-se de fluxo do campo vetorial \mathbf{F} através da curva C a integral curvilínea ao longo de C .

Em termos simbólicos, o fluxo do campo \mathbf{F} através de C é dado pela integral $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$

Suponha que \mathbf{n} seja o vetor normal unitário exterior à curva C .

Se pensarmos em termos do escoamento de um fluido, o fluxo corresponde à taxa com que o fluido está saindo de uma região R delimitada pela curva C .

Você continua estudando a nova linha de guindastes com eletroímãs, e agora surgiu a necessidade de determinar o fluxo para um campo elétrico específico. Considere o campo dado por $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j}$. Pela geometria do novo modelo de eletroímã, você deve estudar o fluxo para dois quadrados: em primeiro lugar, o quadrado definido pelos pontos $P_1 = (-2, -2)$, $P_2 = (-2, 2)$, $P_3 = (2, 2)$, $P_4 = (2, 2)$, e em seguida, um outro quadrado definido pelos pontos $P_5 = (-3, -3)$, $P_6 = (-3, 3)$, $P_7 = (3, -3)$, $P_8 = (3, 3)$ no plano xy .

O engenheiro-coordenador sob o qual você trabalha solicitou que você explicasse como é possível determinar o fluxo do campo vetorial por $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j}$ através dos dois quadrados definidos anteriormente, utilizando o teorema de Green. Além disso, ele quer saber se esse fluxo é positivo ou negativo e se há diferença para o resultado do valor do fluxo para cada um dos quadrados.

Este é mais um desafio que, temos certeza, você está capacitado a superar. Faça todos os exercícios propostos, assista aos vídeos sugeridos e leia os materiais complementares. Não deixe as dúvidas se acumularem.

Não pode faltar

1. Campos vetoriais

Embora você já tenha entrado em contato com campos escalares e campos vetoriais na seção anterior, apresentaremos agora as definições formais desses dois objetos matemáticos. Você já entrou em contato com campos escalares ao calcular a massa de um arame usando integrais de linha.

Definição (campo escalar) (GONÇALVES, 2011, p. 193): “Seja uma função $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada ponto do espaço associa um escalar. Os valores da função f juntamente com a região A definem um campo escalar”.



São exemplos de campos escalares: a densidade de um fluido em cada ponto do espaço, a função $T(x, y, z)$, que a cada ponto do espaço associa a temperatura naquele ponto, ou ainda a função $P(x, y, z)$, que a cada ponto do espaço associa a pressão do ar naquele ponto do espaço. Nesta mesma unidade veremos, na subseção sobre divergente, que o divergente de um campo vetorial é um exemplo de um campo escalar.

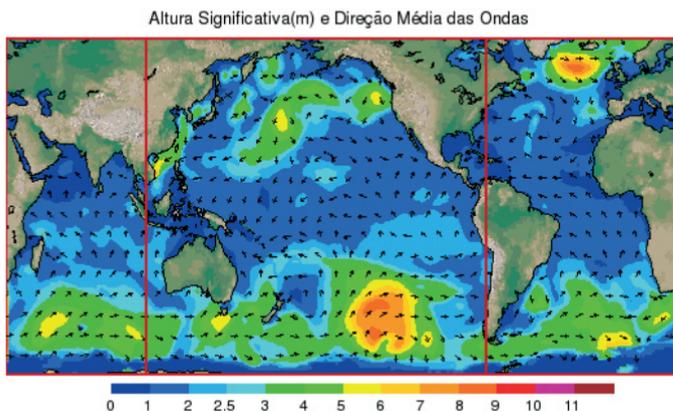
Definição (campo vetorial) (STEWART, 2006, p. 1054): “Seja uma função vetorial $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto do plano associa um vetor. Os valores da função F juntamente com a região A definem um campo vetorial no plano.



Se a função F for definida sobre uma região do espaço $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ teremos um campo vetorial no espaço”.

Em um campo vetorial associamos, a cada ponto (do plano ou do espaço) um vetor. Campos vetoriais são os objetos matemáticos utilizados para descrever o fluxo (que pode ser o fluxo da água em rio, o fluxo de um fluido em um duto industrial ou ainda o fluxo de um campo magnético). Acesse o link disponível em <http://ondas.cptec.inpe.br/> (acesso em: 8 fev. 2018) e veja o modelo de ondas do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). É um exemplo de campo vetorial de velocidades.

Figura 3.10 | Campo vetorial do modelo de ondas (INPE)



Fonte: <http://img0.cptec.inpe.br/~rgrafico/portaLondas/wwatch/global/altura/capa_glb_alt_m.png>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Segundo a lei da gravitação universal de Newton, a força de atração gravitacional entre duas partículas de massas m e M é dada pelo campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{xmMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ymMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{zmMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$, onde G é a constante gravitacional que, a cada ponto $P(x,y,z)$ do espaço, associa o vetor força $\mathbf{F}(x,y,z)$. Se denotarmos por $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ o módulo (comprimento) do vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, veremos que $\|\mathbf{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$, o que mostra que a força gravitacional decai com o inverso do quadrado da distância.

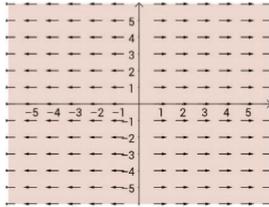


Refleta

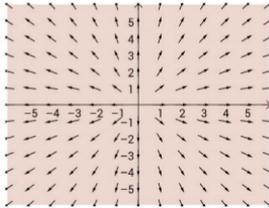
Pesquise acerca da lei de Coulomb sobre a força elétrica exercida por uma carga Q na origem sobre uma carga q na posição $P(x,y,z)$ e responda: é possível estabelecer alguma analogia entre a lei de gravitação e a lei de Coulomb?

Na seção anterior já havíamos apresentado este link: <<https://www.geogebra.org/m/ZGgddgVD>> (acesso em: 8 fev. 2018). Os campos vetoriais da Figura 3.12 foram construídos a partir dele. Para construir a figura do campo $\mathbf{F}_3(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$, usamos o comando `sqrt()` do Geogebra.

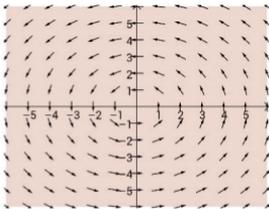
Figura 3.11 | Exemplos de campos vetoriais



$$\mathbf{F}_1(x, y) = x\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$



$$\mathbf{F}_2(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$



$$\mathbf{F}_3(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$



Refleta

Imagine que o campo vetorial $\mathbf{F}_3(x, y) = \frac{-y\omega}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x\omega}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$ represente água rodando em torno da origem com velocidade angular em ω radianos por segundo. Denote por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ o círculo de raio r em torno da origem. O que podemos dizer a respeito do produto escalar $\mathbf{F}_3(x, y) \cdot \mathbf{r}$? Reflita sobre a informação que o resultado do produto escalar $\mathbf{F}_3(x, y) \cdot \mathbf{r}$ nos fornece acerca do ângulo entre os vetores envolvidos.

Considere um campo escalar $f(x, y, z): A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais de primeira ordem de f onde ela está definida. O gradiente de f é um vetor definido por

$\text{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$. Assim, o gradiente define um campo vetorial a partir de um campo escalar.



Pesquise mais

Assista a duas videoaulas sobre campos escalares e campos vetoriais:

Campos vetoriais. Disponível em: <<https://youtu.be/1s7Fh86dOM0>>.

Acesso em: 8 fev. 2018.

Campos escalares e campos vetoriais. Disponível em: <<https://youtu.be/04Ooy3lavRM>>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Nas duas subseções a seguir apresentamos duas operações sobre campos vetoriais que são bastante utilizadas nas aplicações: o rotacional e o divergente.

2. Rotacional e fluidos irrotacionais

A seguir apresentamos a definição do rotacional de um campo vetorial.



Definição (Rotacional) (STEWART, 2006, p. 1088): "Seja um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$. Suponha que as derivadas parciais de f , g e h existam. Define-se o rotacional de F por:

$$\text{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Não se pretende que você memorize essa expressão para o rotacional. Para facilitar a memorização da expressão do rotacional é conveniente considerar o operador conhecido como "del", $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, e memorizar o rotacional em termos do produto vetorial $\nabla \times \mathbf{F}$. Assim, temos o "determinante":

$$\text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$



Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xz\mathbf{i} - 4yz^2\mathbf{j} + 5x^3y^2\mathbf{k}$. Calcule o rotacional de \mathbf{F} .

Resolução:

$$\text{Usamo que } \text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\text{Assim: } \frac{\partial h}{\partial y} = 10x^3y, \frac{\partial g}{\partial z} = -8yz, \frac{\partial f}{\partial z} = 3x, \frac{\partial h}{\partial x} = 15x^2y^2, \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Portanto: } \text{rot}\mathbf{F} = (10x^3y + 8yz)\mathbf{i} + (3x - 15x^2y^2)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Apresentamos agora duas propriedades do rotacional.

Considere os campos vetoriais $\mathbf{F}_1(x, y, z)$ e $\mathbf{F}_2(x, y, z)$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio A . Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar diferenciável em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Então valem as propriedades:

- i) $\text{rot}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \text{rot}(\mathbf{F}_1) + \text{rot}(\mathbf{F}_2)$
- ii) $\text{rot}(f \mathbf{F}_1) = f \text{rot}(\mathbf{F}_1) + \nabla f \times \mathbf{F}_1$

Interpretação física do rotacional

O rotacional recebe esse nome pois ele é uma medida das rotações em um fluido, sendo uma medida do movimento angular do fluido. Considere um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ no fluido. Se o fluido não roda ao redor do eixo na direção de $\text{rot}\mathbf{F}$, então $\text{rot}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0}$. Quanto mais rápido as partículas do fluido giram em torno deste ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, então $\text{rot}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ e maior será o módulo do vetor $\text{rot}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$. Campos vetoriais para os quais $\text{rot}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0}$ são denominados de campos irrotacionais.

Seja $f(x, y, z)$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. O gradiente de f é $\text{grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$.

Qualquer que seja f , atendendo essas condições, o rotacional do gradiente de f será sempre nulo.



Refleta

Você se lembra do campo vetorial $\mathbf{F}_3(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$ apresentado na Figura 3.10? Você pode visualizar que esse campo no Geogebra e observar que ele representa rotações em torno da origem.

3. Divergente e fluidos incompressíveis

Enquanto o rotacional de um campo vetorial define outro campo vetorial, o divergente de um campo vetorial associa um escalar a um campo vetorial.



Definição (Divergência) (Stewart, 2006, p. 1091): "Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ um campo vetorial no espaço e suponha que existam as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial h}{\partial z}$. A divergência do campo \mathbf{F} é definida como $\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$."

Também de forma similar ao rotacional, para o qual usamos a notação $\nabla \times \mathbf{F}$ para facilitar a memorização, no caso do divergente usamos o produto escalar entre o operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}$ e \mathbf{F} : $\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$.



Exemplificando

Considere o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4y^2z\mathbf{i} + 3x^3y^2z\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$. Determine $\text{div}\mathbf{F}$.

Resolução:

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 4x^3y^2z + 6x^3yz + 8xz.$$

Propriedades do divergente (GONÇALVES, 2011, p. 215):

“Considere os campos vetoriais $\mathbf{F}(x, y, z)$ e $\mathbf{G}(x, y, z)$. Se existirem os divergentes dos dois campos vetoriais, então vale que:

a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} \pm \operatorname{div}\mathbf{G}$

Se $p(x, y, z)$ for uma função escalar, vale que:

b) $\operatorname{div}(p\mathbf{F}) = p\operatorname{div}\mathbf{F} + \nabla p \cdot \mathbf{F}$

Um campo vetorial \mathbf{F} tal que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ é denominado de campo solenoidal”.

Interpretação física do divergente

Uma interpretação física para o divergente pode ser dada considerando-se um fluido escoando, com o escoamento representado por um campo vetorial de velocidades dado por $\mathbf{v}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$. A divergência mede a velocidade com que varia a densidade do fluido em um ponto (x_0, y_0, z_0) .

Se a $\operatorname{div}(\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0)) > 0$, então a densidade do fluido está diminuindo ao longo do tempo. O fluido está “se espalhando”.

Por outro lado, se a $\operatorname{div}(\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0)) < 0$, então a densidade do fluido está aumentando ao longo do tempo. E se $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ em uma região do espaço, então a taxa com que o fluido entra nesta região é a mesma com que o fluido sai.



Faça você mesmo

Considere um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ tal que as funções f , g e h possuam derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Calcule o $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$.



Neste vídeo você assistirá a uma aula com o Prof. Gil da Costa Marques com exemplos da Física com campos irrotacionais e com divergente nulo:

Campos irrotacionais e campos com divergência nula. Disponível em: <<https://youtu.be/IHe43zmqRPk>>. Acesso em: 8 fev. 2018.

4. Forma vetorial do teorema de Green

Considere um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$, uma região do plano representada por S , com a curva C como fronteira. Suponha que as funções f e g possuam derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região aberta contendo a região A . O rotacional

do campo \mathbf{F} é dado por $\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}$.

Por outro lado, vale que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$.

Assim, o teorema de Green pode ser reescrito na seguinte forma vetorial:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA.$$

Essa forma vetorial do teorema de Green também é chamada de forma tangencial ou circulação rotacional. Lembremos, da seção anterior, que vale a igualdade $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$. Por vezes,

essa primeira forma vetorial do teorema de Green também é escrita como:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

Você estudará, na próxima unidade, o teorema de Stokes. Ele é uma generalização desse resultado para superfícies do espaço limitadas por uma curva C .

Existe uma segunda forma vetorial do teorema de Green, conhecida como fluxo-divergência ou forma normal:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

A forma tangencial representa a igualdade entre a circulação $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de um campo F em torno do caminho C e a integral dupla do $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ sobre a região S .

Já a forma normal nos informa que efetuarmos a integral de linha da componente normal do campo \mathbf{F} ao longo do caminho C é igual a efetuarmos a integral da divergência deste campo \mathbf{F} na região S limitada pelo caminho C . A integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ corresponde ao fluxo exterior do campo \mathbf{F} através do caminho C . Ela corresponde à taxa com que um fluido entra ou sai de uma região do plano, limitada pela curva C .



Assimile

Observe que a forma vetorial do teorema de Green $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$ significa, em palavras, que a componente tangencial de um campo vetorial \mathbf{F} ao longo de um caminho suave C é igual à integral dupla da componente na direção \mathbf{k} do rotacional deste mesmo campo vetorial sobre uma região S delimitada pela curva C . Cabe ainda lembrar que a componente na direção \mathbf{k} do rotacional corresponde à taxa de rotação de um fluido em torno de um ponto.

Você estudará, na próxima unidade, o teorema da divergência. Ele é uma generalização da forma normal ou fluxo-divergência do teorema de Green. Assim, é interessante que você mantenha em mente esses dois resultados quando estiver estudando esses dois teoremas.

Sem medo de errar

Relembremos o problema que a coordenadoria de novos produtos encaminhou para você: você deve determinar o fluxo para o campo elétrico $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j}$, considerando primeiro o quadrado definido pelos pontos $P_1 = (-2, -2), P_2 = (-2, 2), P_3 = (2, -2), P_4 = (2, 2)$

e, na sequência, para um outro modelo de eletroímã, o fluxo considerando o quadrado definido pelos pontos $P_5 = (-3, -3), P_6 = (-3, 3), P_7 = (3, -3), P_8 = (3, 3)$ no plano xy .

Então, você precisa elaborar a explicação com base no que está apresentado a seguir.

O fluxo é dado pela integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$. Lembremos da forma normal do teorema de Green:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F} dA.$$

$$\text{O divergente de } \mathbf{F} \text{ neste caso é } \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(5y^2)}{\partial y} = 3 + 10y.$$

Substituindo na integral acima, teremos:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (3 + 10y) dx dy = \int_{-2}^2 [3x + 10xy]_{-2}^2 dy = \cdot \\ &= \int_{-2}^2 [3 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot y - (3 \cdot (-2) + 10 \cdot (-2) \cdot y)] dy = \int_{-2}^2 [12 + 40 \cdot y] dy = \left[12 \cdot y + 40 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-2}^2 = 48 \end{aligned}$$

Tente calcular a integral para o cálculo do fluxo $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ usando integral de linha. Você vai perceber a vantagem do teorema de Green: reduzimos o cálculo para uma integral dupla. Calcular a integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ usando integral de linha exigiria quatro integrações (cada lado do quadrado exige uma integral).

Assim, neste primeiro quadrado, o fluxo é positivo.

Vejam agora os cálculos para o segundo quadrado.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \int_{-3}^3 \int_{-3}^3 (3 + 10y) dx dy = \int_{-3}^3 [3x + 10xy]_{-3}^3 dy = \\ &= \int_{-3}^3 [3 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot y - (3 \cdot (-3) + 10 \cdot (-3) \cdot y)] dy = \int_{-3}^3 [18 + 60 \cdot y] dy = \left[18 \cdot y + 60 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-3}^3 = 108 \end{aligned}$$

Para o segundo quadrado, o fluxo também é positivo.

O fluxo para os dois quadrados não é igual.

Agora você deve entregar um relatório sucinto desses cálculos para o engenheiro-sênior da coordenadoria de novos produtos, apresentando seus resultados.

Cálculo de áreas usando o teorema de Green

Descrição da situação-problema

Você foi contratado por uma empresa da indústria cimenteira para avaliar a influência de vários tipos de seção transversal na eficiência do reforço e ductilidade de pilares de concreto encamisados com polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC). Uma referência é o artigo de Sudano e Hanai (2006), *Avaliação do coeficiente de forma da seção transversal e suas implicações no desempenho de pilares reforçados com PRFC* (disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee35_95.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018). Seu estudo deverá envolver vários tipos de seção transversal. Um deles consiste em seções transversais elípticas. Assim, você deverá calcular a área de seções transversais elípticas.

Você se recordou que uma das aplicações do teorema de Green consiste justamente na determinação de áreas.

A expressão para se calcular a área de uma região R limitada pela curva C é dada por

$$A = \oint_C xdy = \oint_C -ydx = \frac{1}{2} \oint_C -ydx + xdy.$$

Como exemplo de aplicação do teorema de Green na determinação de áreas, você se propôs a apresentar para o coordenador da área o cálculo da área da elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ utilizando o teorema de Green.

Resolução da situação-problema

Para realizar o cálculo solicitado, podemos representar parametricamente a elipse escrevendo:

$$x = 3 \cos t, \quad y = 5 \sin t \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

Então, substituindo a representação paramétrica da elipse na integral $A = \oint_C xdy = \oint_C -ydx = \frac{1}{2} \oint_C -ydx + xdy$, teremos:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-5\text{sent})(-3\text{sent}) dt + (3\text{cost})(5\text{cost}) dt = \frac{15}{2} \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t) dt = 15\pi.$$

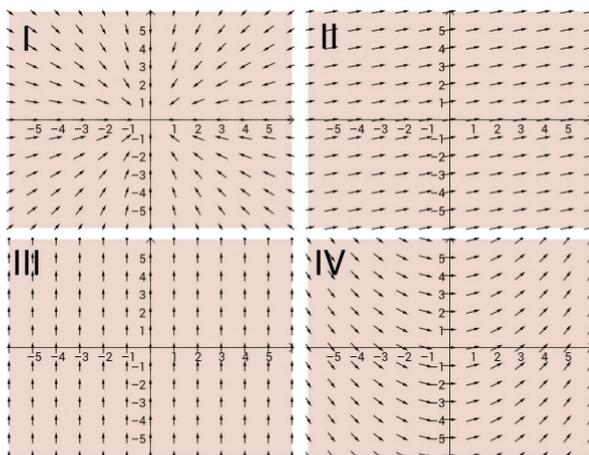
O que deixa bastante claro o ganho de simplicidade para esse tipo de cálculo.

Assim, sua tarefa foi concluída, e agora você deverá produzir um relatório técnico sucinto para o coordenador apresentando os resultados de seu trabalho.

Faça valer a pena

1. Considere os campos vetoriais apresentados na figura a seguir:

Figura | Campos vetoriais para a questão 1



Fonte: elaborada pelo autor.

- A. $\mathbf{F}(x, y) = 0\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
- B. $\mathbf{F}(x, y) = -3x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
- C. $\mathbf{F}(x, y) = 4\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$
- D. $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Assinale a alternativa que contém a sequência correta de associação entre as colunas.

- a) I – A; II – B; III – C; IV – D.
- b) I – B; II – C; III – A; IV – D.
- c) I – C; II – A; III – D; IV – B.
- d) I – D; II – C; III – A; IV – B.
- e) I – A; II – D; III – B; IV – C.

2. Seja o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$.

A divergência do campo \mathbf{F} é definida por: $\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$.

O rotacional de \mathbf{F} é definido por $\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$.

Considere os campos vetoriais $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e

$\mathbf{G}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Analise as afirmativas a seguir e assinale V para verdadeiro e F para falso:

() $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

() $\text{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

() A divergência de \mathbf{G} no ponto $(2, -3, -4)$ é igual a -8 .

() As constantes a , b e c de forma que o campo

$\mathbf{H}(x, y, z) = (az - x)\mathbf{i} + (4z - bx)\mathbf{j} + (3x + yc)\mathbf{k}$ seja irrotacional são $a = 3, b = 0, c = 4$.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) F - V - F - V.
- b) V - V - F - F.
- c) V - F - F - V.
- d) F - F - V - V.
- e) V - F - V - F.

3. O teorema de Green escrito na primeira forma vetorial ou forma normal afirma que vale a igualdade $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F} dA$.

O teorema de Green escrito na segunda forma vetorial ou forma tangencial afirma que vale a igualdade $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$.

Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (3x - 2y)\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$ e a região R limitada pela curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Considerando as informações do texto-base, assinale a alternativa correta:

a) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 6\pi$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 4\pi$.

b) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 3\pi$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 7\pi$.

c) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 9\pi$.

d) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -1$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 1$.

e) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 12$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 4$.

Seção 3.3

Campos conservativos

Diálogo aberto

Antes de iniciar esta aula sugerimos que você resgate o teorema fundamental para integrais de linha. Ele é parte relevante desta seção.

Como sugestões de material adicional apresentamos:

Cálculo III. Disponível em: <<http://pbx-brasil.com/calculo03/Notas/Area01/dia07/rotcccon.html>>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Breve revisão de cálculo vetorial. Disponível em: <http://engenhariaaeroespacial.ufabc.edu.br/old/profs/cristiano/Rev_calc_vet.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018.

No link <http://www.mat.unb.br/grad/aulas/cadernos_calculo/calculo3/b_e/exibe_exercicio.php?id=281> (acesso em: 8 fev. 2018), você encontrará vários exemplos resolvidos de cálculo de potenciais. Como esse procedimento pode apresentar dúvidas por parte dos alunos, pode ser interessante apresentar mais exemplos desse tópico para eles.

Cabe ressaltar que o teorema apresentado ao final da subseção 3 desta seção, sobre as afirmações equivalentes a um campo ser conservativo, não constitui uma ferramenta útil para determinar se um campo vetorial é conservativo ou não. Daí a importância dos resultados apresentados na subseção 4.

O link <<https://www.youtube.com/watch?v=qhH-JcFqngA>> (acesso em: 8 fev. 2018) disponibiliza uma videoaula sobre campos conservativos que poderá ajudá-lo com mais exemplos para os alunos.

Caso você tenha tempo disponível, é enriquecedor demonstrar o teorema de conservação de energia mecânica.

Não pode faltar

1. Campos conservativos

Inicialmente apresentaremos a definição de campos conservativos.

Definição: Campo vetorial conservativo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1085): “Seja \mathbf{F} um campo vetorial em duas ou três dimensões. Este campo será denominado de campo conservativo em uma região $A \subset \mathbb{R}^2$ ou $A \subset \mathbb{R}^3$ se existir uma função ϕ definida na região A tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Diz-se que a função ϕ é uma função potencial do campo \mathbf{F} na região A ”.

Exemplos importantes de campos conservativos são os campos gravitacionais e os campos elétricos.



Exemplificando

Vamos mostrar que o campo

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\frac{Cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} - \frac{Cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{Cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$, onde C é uma constante, é conservativo.

Considere a função $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

O gradiente de $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ é $\nabla\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$.

Como $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{Cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{Cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ e

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{Cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, mostramos que $\nabla\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Observe que o campo \mathbf{F} é justamente o campo gravitacional, com a substituição $C = mMG$.

Naturalmente você deve estar se perguntando, dado um campo vetorial \mathbf{F} conservativo, como podemos determinar a função potencial deste campo.

2. Cálculo de uma função potencial

Suponha que $\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial conservativo. Então existe uma função potencial $\phi(x,y)$ tal que $\frac{\partial\phi}{\partial x} = f$ e $\phi(x,y) \frac{\partial\phi}{\partial y} = g$. Podemos determinar a função $\phi(x,y)$ primeiro integrando $\frac{\partial\phi}{\partial x} = f$ com respeito a x e posteriormente integrando $\frac{\partial\phi}{\partial y} = g$ com respeito a y , comparando os resultados das integrações. Vejamos com um exemplo.



Exemplificando

a) Considere o campo

$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j} = (y^2 - 6x^2)\mathbf{i} + (3 + 2xy)\mathbf{j}$. Determine uma função $\phi(x,y,z)$ tal que $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$.

Resolução: queremos determinar $P(x,y)$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x} = f(x,y) = y^2 - 6x^2$ e $\frac{\partial P}{\partial y} = g(x,y) = 3 + 2xy$.

Integramos $\frac{\partial P}{\partial x} = f(x,y) = y^2 - 6x^2$ com respeito a x obtendo:

$$P(x,y) = xy^2 - 2x^3 + f_1(y).$$

Agora derivamos esta expressão com respeito a y para compararmos com a função $g(x,y) = 3 + 2xy$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = g(x,y) \Rightarrow 2xy + f_1'(y) = 3 + 2xy. \text{ Assim, } f_1'(y) = 3. \text{ Logo } f_1(y) = 3y + C.$$

Substituímos esta expressão por $f_1(y) = 3y + C$ em

$$P(x,y) = xy^2 - 2x^3 + f_1(y): P(x,y) = xy^2 - 2x^3 + 3y + C.$$

Assim, nossa função potencial é $\phi(x,y) = xy^2 - 2x^3 + 3y + C$.

Você pode verificar que $\nabla\phi(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$.

O procedimento anterior vale também para campos vetoriais definidos no espaço. Vejamos como fazer isto a partir de um exemplo:

b) Considere o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 5y)\mathbf{j} + (2xz)\mathbf{k}$.

Determine uma função $\phi(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$.

Resolução: integramos $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy + z^2$ em relação a x :

$$P(x, y, z) = x^2y + xz^2 + f_1(y, z).$$

Agora derivamos essa função com respeito a y e igualamos à função

$$g(x, y, z) = x^2 + 5y : \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = x^2 + 5y.$$

$$\text{Então } \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = 5y \Rightarrow f_1(y, z) = \frac{5y^2}{2} + f_2(z).$$

Temos que: $P(x, y, z) = x^2y + xz^2 + \frac{5y^2}{2} + f_2(z)$. Derivamos esta função com respeito a z e igualamos a $h(x, y, z) = 2xz$:

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = 2xz + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = 2xz. \text{ Donde } \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow f_2(z) = C$$

Finalmente, nossa função potencial é $\phi(x, y, z) = x^2y + xz^2 + \frac{5y^2}{2} + C$.

De forma similar ao exemplo anterior, verifique que $\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

3. Integrais de linha e independência de caminhos

Ao estudar integrais de linha, vimos que o trabalho realizado por um campo de forças \mathbf{F} para deslocar uma partícula ao longo de um caminho suave C é dado pela integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ou, ainda, pela

integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$. Sejam C_1 e C_2 dois caminhos suaves por partes

tais que ambos possuem o mesmo ponto inicial $P(x_0, y_0, z_0)$ e mesmo ponto final $Q(x_1, y_1, z_1)$. Em geral, para um campo de forças \mathbf{F}

qualquer, temos que as integrais $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ são diferentes, ou

seja, o trabalho efetuado pelo campo \mathbf{F} para deslocar uma partícula

entre os pontos $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x_1, y_1, z_1)$ depende do caminho de integração.



Refleta

Considere o campo $\mathbf{F}(x, y) = 3y^2\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$, o ponto inicial $P = (-1, -1)$, o ponto final $Q = (0, 3)$ e dois caminhos quaisquer a sua escolha ligando esses dois pontos. Verifique se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é igual a $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Compare com os caminhos adotados por seus colegas e reflitam sobre a questão: é possível explicar os diferentes resultados obtidos a partir de algum atributo do campo \mathbf{F} ?

Lembremos agora do teorema fundamental para integrais de linha já estudado:

Se C for uma curva suave por partes cujas extremidades inicial e final sejam os pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ e f , uma função diferenciável com gradiente dado por ∇f , então vale que:

$$\int_C \nabla f(x, y) \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$
 (para o caso de f com duas variáveis) e
$$\int_C \nabla f(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)$$
 (para o caso de f com três variáveis).

O teorema fundamental para integrais de linha nos indica que, se calcularmos o trabalho para deslocar uma partícula entre os pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ para um campo de forças \mathbf{F}

tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, o trabalho dependerá apenas dos pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, e não do particular caminho adotado para a integração.

Em outras palavras, se \mathbf{F} for um campo conservativo, então a integral $\int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$ independe do particular caminho adotado.

Observe que afirmar que a integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ independe de caminhos na região A significa que, para qualquer caminho que adotemos na

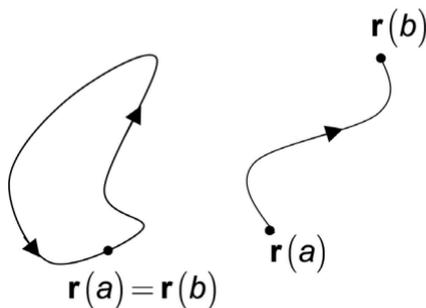
integração, o resultado da integral será sempre o mesmo.

Ainda sobre o teorema fundamental para integrais de linha, observamos que, se o ponto inicial e o ponto final coincidem (ou seja $P(x_0, y_0) = Q(x_1, y_1)$), temos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0$. Curvas para as quais o ponto inicial coincide com o ponto final são chamadas de curvas fechadas. A seguir apresentamos a definição formal de curvas fechadas.

Definição (curva fechada) (ANTON; BIVENS; DAVIES, 2012, p. 1113): "Uma curva $\mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ é denominada de curva fechada se seu ponto inicial coincide com seu ponto final, isto é, se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ é um campo vetorial conservativo".

Na Figura 3.12 apresentamos exemplos de curvas fechadas e não fechadas.

Figura 3.12 | Exemplos de curvas fechadas e não fechadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Acabamos de observar que, se C é um caminho fechado e \mathbf{F} , um campo vetorial conservativo, então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Será que a recíproca desse resultado é verdadeira? Ou seja: se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todos os caminhos fechados, então o campo \mathbf{F} é conservativo?

O próximo teorema nos mostra que, sob as hipóteses adequadas, se for verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todos os caminhos fechados C , então o campo vetorial \mathbf{F} é conservativo.



Teorema (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1114): “Considere um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ definido sobre uma região aberta e conexa A com f e g funções contínuas em A . As afirmações a seguir são equivalentes entre si.

i) O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo na região A .

ii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C suave por partes contida na região A .

iii) A integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ independe do caminho de integração que liga os pontos P e Q contidos na região A , qualquer que seja a curva C suave por partes”.



Assimile

Dizer que as afirmações acima i), ii) e iii) são equivalentes significa dizer que, se uma delas for verdadeira, então as outras duas também são verdadeiras, e se uma delas for falsa, então as outras duas também serão falsas.

4. Condições para um campo vetorial ser conservativo

O teorema anterior apresenta informações importantes sobre campos vetoriais conservativos, mas não é útil do ponto de vista prático. Apesar de sabermos agora que um campo F é conservativo se, e somente se, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado C contido na região A . Como não é possível, em geral, calcular as integrais $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para todos os caminhos C , não temos ainda uma forma de se testar se um campo vetorial é conservativo ou não. Essa dificuldade é tratada pelo teste de campos conservativos apresentado a seguir.

Teorema (teste para campos conservativos) (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2012, p. 1116): "Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$, onde as funções f e g são contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto A do plano. Se o campo \mathbf{F} for conservativo então vale a igualdade $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ".

Vale a recíproca: se a região A for simplesmente conexa e valer a igualdade $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo.



Assimile

Compare os dois últimos teoremas: no teorema que apresenta as três afirmações equivalentes entre si, vemos que \mathbf{F} ser campo conservativo é equivalente à integral $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ser independente de caminhos, além de valer que $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Mas tais equivalências não constituem testes para facilmente verificarmos se um campo é conservativo – o que é apresentado no teorema anterior.

Ressaltamos que a recíproca é verdadeira, mas exige-se como hipótese que a região A seja simplesmente conexa. A demonstração da recíproca é uma consequência do teorema de Green.



Exemplificando

Vamos aplicar o teste para campos conservativos para verificar se o campo $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$ é conservativo para algum conjunto aberto.

Resolução: neste caso, temos que $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $g(x, y) = 3y - 5x$.

Então $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ e $\frac{\partial g}{\partial x} = -5$. Como $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, o campo \mathbf{F} não é conservativo.

Vamos relembrar um box *Reflita* da seção anterior: nele deixamos para você responder à questão sobre o que podemos afirmar a respeito do $\text{rot}(\text{grad}(f))$, onde $f(x, y, z)$ é uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Vejamos:

$$\text{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}.$$

Como $f(x, y, z)$ possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então vale que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Assim, $\text{rot}(\nabla f) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Portanto, o rotacional do gradiente é sempre nulo.

Em outras palavras, se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo (ou seja, existe uma função potencial tal que $\mathbf{F} = \nabla f$), então $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, o que nos conduz ao teorema:

Teorema (condição necessária mas não suficiente para um campo \mathbf{F} ser conservativo) (GUIDORIZZI, 1997, p. 1115): "Considere um campo vetorial \mathbf{F} definido sobre um conjunto aberto A do plano ou do espaço. Suponha que todas as derivadas parciais existem e são contínuas neste aberto. Então, uma condição necessária mas não suficiente para que o campo \mathbf{F} seja conservativo é que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ".

Esse teorema nos informa que, dado um campo vetorial definido sobre um aberto do plano ou do espaço, se $\text{rot}(\mathbf{F}) \neq \mathbf{0}$, então o campo \mathbf{F} não é conservativo.

Como a condição $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ é necessária mas não suficiente para que o campo \mathbf{F} seja conservativo, considere o campo vetorial já visto na seção anterior: $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$ definido em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$. O rotacional desse campo é nulo no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ (confira!).

Contudo ele não é conservativo. Para mostrar isto, considere a curva fechada $\mathbf{r}(t) : \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}, t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 \text{A integral } \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}} \mathbf{i} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}} \mathbf{j} \right] \cdot [-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}] dt = , \\
 &= \int_0^{2\pi} [-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}] \cdot [-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [\sin^2(t) + \cos^2(t)] \cdot dt = 2\pi \neq 0 \text{ mostrando que } \mathbf{F} \text{ não é}
 \end{aligned}$$

conservativo.

Se o campo vetorial \mathbf{F} for definido sobre todo o espaço (e não apenas em um aberto), então o teorema a seguir fornece condições necessárias e suficientes para que \mathbf{F} seja conservativo.

Teorema (condições necessárias e suficientes para que um campo vetorial seja conservativo) (STEWART, 2006, p. 1090): “Se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ for definido sobre todo o \mathbb{R}^3 e as funções $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, então \mathbf{F} é conservativo”.

Fica a sugestão a seguir para pesquisar mais exemplos sobre determinação de potenciais de campos conservativos e uso dos testes para campos conservativos.



Pesquise mais

No link a seguir você encontrará exemplos de uso do Maple no cálculo de potenciais de campos conservativos:

Campos conservativos. Disponível em: <<http://www.dma.uem.br/kit/textos/conservativo/conservativo1.html>>. Acesso em: 8 fev. 2018.

Sem medo de errar

Queremos saber se o cálculo do trabalho efetuado pelo campo vetorial descrito por $\mathbf{F}(x, y) = (10x + 3y^2)\mathbf{i} + (6xy - 12y^2)\mathbf{j}$ para deslocar uma partícula entre dois pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ pode ser simplificado de alguma forma. Calcular o trabalho corresponde a efetuar a integral $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Se for possível determinar se o campo \mathbf{F} é conservativo e, em seguida, construir a função potencial associada, então a integral $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dependerá apenas do valor da função potencial nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$.

Inicialmente vamos utilizar o teste para campos conservativos para o campo $\mathbf{F}(x, y) = (10x + 3y^2)\mathbf{i} + (6xy - 12y^2)\mathbf{j}$. Temos que $f(x, y) = 10x + 3y^2$ e $g(x, y) = 6xy - 12y^2$.

Como $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y = \frac{\partial g}{\partial x}$ para todo ponto do plano, então o campo \mathbf{F} é conservativo.

Para construir a função potencial, queremos determinar uma função $P(x, y)$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x} = 10x + 3y^2$ e $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 12y^2$.

Integramos $\frac{\partial P}{\partial x} = 10x + 3y^2$ com respeito a x :
 $P(x, y) = 5x^2 + 3xy^2 + f_1(y)$.

Derivamos esta última expressão com relação a y : $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy + f_1'(y)$
e igualamos com $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 12y^2$, obtendo: $6xy + f_1'(y) = 6xy - 12y^2$.

Assim, $f_1'(y) = -12y^2 \Rightarrow f_1(y) = -4y^3 + C$. Substituindo esta expressão para $f_1(y) = -4y^3 + C$ em $P(x, y) = 5x^2 + 3xy^2 + f_1(y)$, chegamos a $P(x, y) = 5x^2 + 3xy^2 - 4y^3 + C$, determinando a função potencial.

Agora aplicamos o teorema que diz que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0).$$

Temos que a integral $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não depende de nenhum

caminho em particular. O cálculo não seria mais simples se adotarmos segmentos de retas. A integral depende apenas das extremidades do caminho de integração. Substituindo os valores do problema:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = P(x_1, y_1) - P(x_0, y_0) = (5x_1^2 + 3x_1y_1^2 - 4y_1^3) - (5x_0^2 + 3x_0y_0^2 - 4y_0^3) \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (5 \cdot (3)^2 + 3 \cdot (3)(-2)^2 - 4 \cdot (-2)^3) - (5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \cdot (2)^2 - 4 \cdot (2)^3) = \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (45 + 68) - (-7 - 32) = 152.\end{aligned}$$

Neste ponto você chegou com êxito ao final de seus três projetos: o estudo sobre o campo magnético, o fluxo para o campo elétrico da nova linha de guindastes com eletroímãs e a avaliação do trabalho efetuado pelo campo magnético no deslocamento de uma partícula entre dois pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_0, y_0)$. Agora você deverá produzir um relatório sintetizando os resultados obtidos para entregar ao coordenador-chefe da coordenadoria de novos projetos. Neste relatório deverão constar os principais elementos teóricos utilizados para fundamentar seu trabalho nos três projetos.

Avançando na prática

Campos vetoriais conservativos no espaço

Descrição da situação-problema

Você está atuando em uma empresa especializada em engenharia consultiva. Um novo projeto solicitado para a empresa está relacionado com a questão da sustentabilidade ambiental: um novo equipamento para filtragem de metais magnéticos em determinados líquidos lubrificantes refrigerantes. Este equipamento pode ser utilizado para grande variedade de máquinas-ferramentas. Na pesquisa para este projeto, você encontrou o link a seguir: <<http://www.filtra.it/pt/produzir/filtragem-de-lubrificantes-refrigerantes/separadores-magneticos/disk-c/>> (acesso em: 8 fev. 2018). Para analisar a viabilidade desse novo processo de filtragem, seu supervisor trouxe uma questão: avaliar o trabalho realizado pelo campo de força magnética do filtro, dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz + 3, 2xz + 3, 2xy + 3)$, para deslocar uma partícula entre o ponto $P(2, 2, 2)$ e o ponto $Q(3, 3, 3)$.

Também foi solicitado a você que apresentasse o valor do trabalho ao deslocar a partícula de $P(2,2,2)$ para $Q(3,3,3)$ e trazê-la de volta por qualquer caminho distinto do utilizado na ida.

Resolução da situação-problema

Para resolver esse problema, queremos calcular a integral $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Se for possível mostrar que o campo

$\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz + 3, 2xz + 3, 2xy + 3)$ é conservativo e determinar

a função potencial associada a este campo, então o cálculo da integral se resume a determinar a diferença do valor da função potencial nos pontos $P(2,2,2)$ para $Q(3,3,3)$.

Inicialmente vamos verificar se $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz + 3, 2xz + 3, 2xy + 3)$ é conservativo.

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, onde

$f(x, y, z) = 2yz + 3, g(x, y, z) = 2xz + 3, h(x, y, z) = 2xy + 3$, a verificação se deve ao fato de que $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para campos conservativos.

Para isto precisamos verificar as igualdades:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}; \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Como $\frac{\partial h}{\partial y} = 2x$ e $\frac{\partial g}{\partial z} = 2x$ e temos que $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}$, a igualdade está satisfeita.

Como $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y$ e $\frac{\partial h}{\partial x} = 2y$ e temos que $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}$, a igualdade está satisfeita.

Como $\frac{\partial g}{\partial x} = 2z$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2z$ e temos que $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, a igualdade está satisfeita.

Assim, verificamos que $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz + 3, 2xz + 3, 2xy + 3)$ é, de fato, conservativo.

Para determinar a função potencial, usamos as equações:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2yz + 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz + 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + 3.$$

Integramos $\frac{\partial P}{\partial x} = 2yz + 3$ com respeito a x obtendo:

$$P(x, y, z) = 2xyz + 3x + f_1(y, z).$$

Derivamos esta última expressão com respeito a y e usamos que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz + 3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = 2xz + 3 \Rightarrow f_1(y, z) = 3y + f_2(z).$$

Substituímos a expressão por $f_1(y, z) = 3y + f_2(z)$ em $P(x, y, z) = 2xyz + 3x + f_1(y, z)$, obtendo:

$$P(x, y, z) = 2xyz + 3x + 3y + f_2(z).$$

Derivamos este resultado com respeito a z e usamos $\frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + 3$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + f_2'(z) = 2xy + 3 \Rightarrow f_2(z) = 3z + C.$$

Substituindo esta expressão para $f_2(z) = 3z + C$ em $P(x, y, z) = 2xyz + 3x + 3y + 3z + C$, obtemos a função potencial.

O cálculo da integral fica:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(3, 3, 3) - \phi(2, 2, 2) = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) -$$

$$W = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) - (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 81 - 34 = 47.$$

Falta responder à segunda questão: como o caminho para levar a partícula do ponto $P(2, 2, 2)$ até $Q(3, 3, 3)$ e a traz de volta é um caminho fechado e o campo \mathbf{F} é conservativo, podemos concluir que o trabalho realizado pelo campo vetorial é nulo.

Dessa forma, você conclui sua tarefa com sucesso. Agora você deve apresentar um relatório para toda a equipe com os fundamentos teóricos e os resultados do seu trabalho.

Faça valer a pena

1. O teste de campos conservativos consiste em verificar, dado um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$, com f e g funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região simplesmente conexa A do plano, se vale a igualdade $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Se a igualdade for satisfeita para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então o campo F é conservativo.

No caso de um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ no \mathbb{R}^3 , sendo f , g e h funções com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, o teste para campos conservativos afirma que F será conservativo se, e somente se, estão satisfeitas as igualdades

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}; \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Considerando o teste de campos conservativos, analise os campos vetoriais a seguir e assinale V para verdadeiro e F para falso:

- () $\mathbf{F}(x, y) = ye^x\mathbf{i} + e^x\mathbf{j}$ não é conservativo.
- () $\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (3y - x)\mathbf{j}$ é conservativo.
- () $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen}(z)e^y\mathbf{i} + (xy - \cos(y)e^x)\mathbf{j} + (zy + 3xe^z)\mathbf{k}$ não é conservativo.
- () $\mathbf{F}(x, y, z) = 5yz\mathbf{i} + 5xz\mathbf{j} + 5xy\mathbf{k}$ é conservativo.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta:

- a) V - V - F - F.
- b) F - V - F - V.
- c) F - V - V - V.
- d) V - F - V - V.
- e) F - F - F - V.

2. Se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ for conservativo, a integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende apenas das extremidades do caminho suave de integração. Se soubermos a função potencial de $\mathbf{F}(x, y, z)$ então vale que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0)$. Considere o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = -2xz\mathbf{i} + seny\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$. Assinale a alternativa que apresenta a integral $\int_{(1,0,3)}^{(2,0,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo de qualquer caminho suave C entre os pontos $P(1,0,3)$ e $Q(2,0,1)$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) 4.

d) 2.

e) 1.

3. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ um campo vetorial conservativo. Então a integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ independe do particular caminho de integral, dependendo apenas dos pontos inicial e final do caminho suave C e valendo que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0)$. Seja o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto da integral $\int_{(0,1,-1)}^{(-2,1,2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Referências

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Construção de curvas parametrizadas**: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237-9657, São Paulo, v.3, n.1, p. 5-22, 2014.

ANTON, Howard; BIVENS, Irt; DAVIS, Stephen. **Cálculo**: volume II. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1168 p. (disponível na biblioteca virtual)

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David. **Cálculo com geometria analítica**: volume 3. 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1999. 216 p.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo B**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011. 435 p.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**: volume 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 481 p. (disponível na biblioteca virtual)

_____. **Um curso de cálculo**: volume 4. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1997. 481 p. (disponível na biblioteca virtual)

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth. **Física 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2017. 390 p.

SALAS, Saturnino L.; HILLE, Etgen. **Cálculo**: volume 2. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005. 842 p. (disponível na biblioteca virtual)

STEWART, James. **Cálculo**: volume II. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1164 p. (disponível na biblioteca virtual)

SUDANO, Alexandre Luis; HANAI, João Bento de. **Avaliação do coeficiente de forma da seção transversal e suas implicações no desempenho de pilares reforçados com PRFC**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 8, n. 35, p. 95-126, 2006. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova-versao/pdf/cee35_95.pdf>. Acesso em: 8 fev. 2018.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**: volume 2. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983. 515 p.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo**: volume 2. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 570 p.

Aplicações do Cálculo Vetorial

Convite ao estudo

Esta é a última Unidade do nosso livro de *Cálculo Diferencial e Integral IV*. Ao longo desse estudo, vimos conceitos e técnicas matemáticas fundamentais do Cálculo para resolver problemas envolvendo séries, sistemas de equações diferenciais lineares, integrais de linha e campos vetoriais. Nesta Unidade, realizaremos o cálculo vetorial envolvendo superfícies e serão discutidos os Teoremas de Stokes e de Gauss que são fundamentais, por exemplo, na Mecânica dos Fluidos e no Eletromagnetismo. A tendência de rotação de um fluido pode ser calculada por meio da circulação que está no Teorema de Stokes, da mesma forma se um campo elétrico é conhecido em um certo volume é possível encontrar distribuição de cargas utilizando o Teorema da divergência.

Iniciaremos na Seção 1 abordando a parametrização de uma superfície no espaço com base em dois parâmetros. A partir dessa parametrização seremos capazes de encontrar planos tangentes em pontos específicos da superfície. O processo de parametrização será útil inclusive no cálculo da área da superfície e também na integral de uma função qualquer sobre a superfície. Na Seção 2, discutiremos o Teorema de Stokes e será apresentado um significado físico para um rotacional. Finalizaremos a Unidade na Seção 3 com o Teorema da divergência ou da Lei de Gauss que estabelece uma relação entre o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície com a divergência desse campo no volume envolto pela superfície.

Para motivar a seção, você será um funcionário de uma indústria automotiva que desenvolve novas tubulações

de fluido de freios. Essas tubulações serão instaladas na próxima geração dos veículos da fábrica. Sua tarefa é realizar simulações e cálculos para estabelecer critérios de qualidade e segurança para o sistema tubulação + fluidos dos freios. Por exemplo, como calcular a massa de um revestimento de uma tubulação? Como averiguar o tipo de escoamento e o fluxo do fluido nessa tubulação? Essas são questões que você deverá responder ao final desta Unidade.

Em particular, num primeiro passo, você deverá calcular a área de superfície de um revestimento de um tubo de freio por meio de uma integral de superfície. Em seguida, você terá de aplicar o teorema de Stokes e garantir o regime laminar do fluido com o auxílio do Teorema de Stokes. Finalmente, você terá a oportunidade de calcular o fluxo do fluido em um certo volume da tubulação utilizando o Teorema de Gauss. Ao final de cada tarefa, você precisará escrever um relatório para que os outros funcionários possam consultar posteriormente.

Teremos um grande desafio pela frente, não se esqueça de consultar a Unidade 3 sempre que necessário para rever alguns conceitos do cálculo vetorial que serão também utilizados aqui nesta Unidade. Para enfrentar esse desafio, você precisará obter o conhecimento apresentado aqui, então aproveite a leitura e bons estudos.

Seção 4.1

Integrais de superfícies

Diálogo aberto

Quando entramos em um supermercado, e observamos as embalagens dos produtos regularmente dispostos nas prateleiras, nos deparamos com bons exemplos de superfícies no espaço cartesiano. Muitas garrafas, por exemplo, podem ser geradas a partir de uma função $y = f(x)$ rotacionada em torno do eixo- x . Nessa seção veremos como parametrizar superfícies tridimensionais a partir de dois parâmetros, o que será útil para descobrir a integral de uma função qualquer $f(x, y, z)$ sobre a área da superfície.

Lembre-se que você e sua equipe estão desenvolvendo um novo material de revestimento para uma tubulação de freio que deve ser instalada em uma parte específica do sistema, como, por exemplo, a conexão entre o tubo e a pinça de freio. Para essa etapa do desenvolvimento do produto será necessário calcular sua massa. A parte interessante do material é que sua densidade aumenta linearmente em relação a sua posição ao longo do tubo.

Para efeitos de simulação e testes, suponha que o tubo esteja orientado na direção do eixo- x , que ele possua um raio de 5 mm e que esteja limitado pelos planos, $x = 0$ e $x = 4 - 0,5y$. Esse último plano corta o final do tubo em um certo ângulo, que permite sua conexão com outras partes do sistema. Sua tarefa é determinar a massa do revestimento do tubo de acordo com os requisitos apresentados anteriormente.

Agora você precisa aprender os conceitos de superfície parametrizada e integral de superfície para poder completar o desafio. Vamos começar?

Não pode faltar

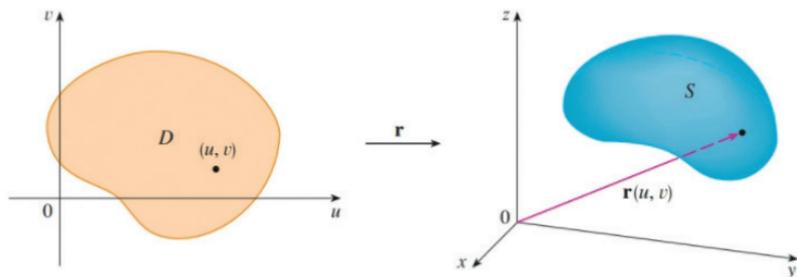
Vimos na seção 3 que o cálculo de uma integral sobre uma curva C e realizado com o auxílio da parametrização dessa curva em função de um único parâmetro t da seguinte maneira: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$

De modo similar, uma superfície S pode ser parametrizada em função de dois parâmetros u e v em um domínio bidimensional D . Nesse caso, como mostra a Figura 4.1, o vetor $\mathbf{r}(u,v)$ associa cada ponto no domínio D a um ponto sobre a superfície S pela relação:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},$$

onde cada coordenada é representada por duas variáveis tais que a ponta do vetor \mathbf{r} se move sobre a superfície à medida que os parâmetros u e v , variam em D .

Figura 4.1 | Parametrização de superfície.



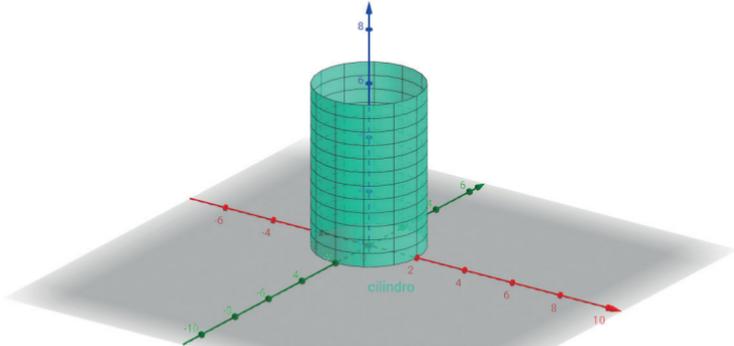
Fonte: Stewart (2013, p. 984).

O cilindro é uma superfície familiar que pode ser tratada como uma circunferência de raio a no plano- xy , por exemplo, expandido na direção z . A parametrização dessa superfície em particular, ou seja, as componentes $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ do vetor $\mathbf{r}(u,v)$, podem ser escritas como:

$$x(u,v) = a\cos(u), \quad y(u,v) = a \cdot \text{sen}(u) \quad \text{e} \quad z(u,v) = v.$$

Substituindo $\mathbf{a} = 2$ nas coordenadas anteriores, no domínio D : $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 6$, e com o auxílio de um software como o Geogebra, por exemplo, construímos a superfície cilíndrica da Figura 4.2:

Figura 4.2 | Parametrização de uma superfície cilíndrica.



Fonte: elaborada pelo autor.

São apresentadas algumas linhas constantes na figura anterior que são conhecidas como curvas da grade. Se mantivermos v constante, teremos apenas um dos círculos mostrados na figura. Já se mantivermos u constante, andaremos sobre uma das linhas verticais.

Em coordenadas esféricas, um ponto $P(x, y, z)$ é determinado por:

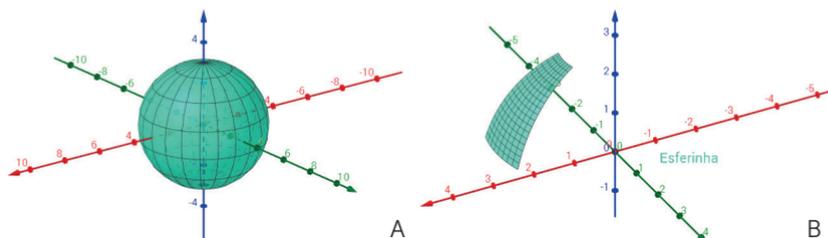
$$x = r \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \text{sen}\theta \cdot \sin\varphi \quad \text{e} \quad z = r \cdot \cos\theta,$$

onde r é o módulo do vetor que liga o ponto P à origem do espaço cartesiano, θ é o ângulo entre esse vetor e o eixo- z , enquanto φ é o ângulo entre o eixo- x e a projeção do vetor no plano- xy . Se impusermos r constante em um domínio D : $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, podemos parametrizar uma esfera através do vetor $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$ com as mesmas coordenadas x , y e z anteriores:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = r \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\varphi \mathbf{i} + r \cdot \text{sen}\theta \cdot \sin\varphi \mathbf{j} + r \cdot \cos\theta \mathbf{k},$$

onde invés de usarmos u e v , utilizamos θ e φ . Utilizando essa parametrização com $a = 3$ no domínio D anterior em um software matemático podemos construir uma superfície esférica como a da Figura 4.3(a). Modificando o domínio D : $\frac{25}{180}\pi \leq \theta \leq \frac{75}{180}\pi$ e $-\frac{15}{180}\pi \leq \varphi \leq \frac{15}{180}\pi$, temos parte de uma esfera, como mostra a Figura 4.3(b).

Figura 4.3 | Parametrização de superfícies esféricas.



Fonte: elaborada pelo autor.

Se uma superfície é descrita por uma função da forma $z = f(x, y)$, sua parametrização pode ser escrita em função de x e y da seguinte maneira:

$$x = x, \quad y = y \quad \text{e} \quad z = f(x, y).$$

Exemplificando

Escreva a parametrização de uma superfície que é descrita por $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$.

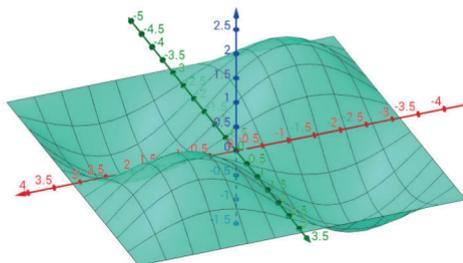
Resolução:

Como a superfície é descrita por uma função $z = f(x, y)$, sua parametrização fica:

$$x = x, \quad y = y \quad \text{e} \quad f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y).$$

Utilizando um software matemático e o domínio $D: -\pi \leq x \leq \pi$ e $-\pi \leq y \leq \pi$, podemos desenhar essa superfície como na Figura 4.4:

Figura 4.4 | Parametrização de uma superfície senoidal.



Fonte: elaborada pelo autor.

Plano Tangente

Todos as superfícies que construímos até aqui não apresentam quinas ou descontinuidades. Nesse caso, podemos considerá-las como superfícies suaves nos respectivos domínios, e dessa forma é possível determinar um plano tangente a cada ponto dessa superfície. Suponha que queremos encontrar um plano tangente a uma superfície $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$ e que passe pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Inicialmente devemos calcular as derivadas parciais de r em relação a u e v para encontrar dois vetores tangente à superfície e que também tenham o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ em comum. Os vetores são:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \mathbf{k}$$

O produto vetorial entre esses dois vetores $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, desde que não nulo, nos fornece um vetor normal à superfície. O produto escalar entre $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ e o vetor $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ deve ser nulo, já que são ortogonais, e esse resultado será uma equação do plano tangente. Como um exemplo, vamos construir o plano que é tangente à superfície esférica com raio $a = 3$, no ponto

$$P = \left(3 \operatorname{sen} \left(\frac{45\pi}{180} \right) \cos \left(\frac{45\pi}{180} \right), 3 \operatorname{sen} \left(\frac{45\pi}{180} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{45\pi}{180} \right), 3 \cos \left(\frac{45\pi}{180} \right) \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

A parametrização da esfera em termos θ e φ com a constante fica:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi \mathbf{i} + a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j} + a \cdot \cos \theta \mathbf{k}.$$

Assim, os vetores tangentes serão:

$$\mathbf{r}_\theta = a \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \mathbf{i} + a \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j} - a \cdot \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\varphi = -a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi \mathbf{i} + a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial:

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & a \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi & -a \cdot \operatorname{sen} \theta \\ -a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi & a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \varphi \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \mathbf{k}.$$

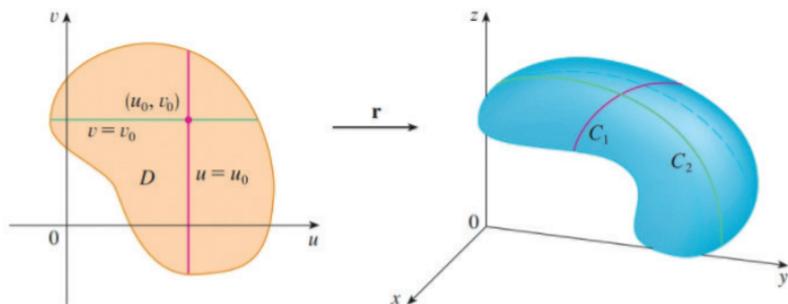
Como para o ponto P os parâmetros são $\theta = \varphi = \frac{45\pi}{180}$, o vetor normal fica:

$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = \frac{9\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + \frac{9\sqrt{2}}{4} \mathbf{j} + \frac{9}{2} \mathbf{k}$, logo uma equação do plano tangente fica:

$$\frac{9\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{9\sqrt{2}}{4} \left(y - \frac{3}{2} \right) + \frac{9}{2} \left(z - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = 0. \text{ Você pode conferir}$$

esse resultado no seguinte link <<https://ggbm.at/ZQDTpe3s>>, (Acesso em: 22 dez. 2017) onde temos o plano, o ponto e uma superfície esférica.

Figura 4.5 | Área infinitesimal de uma superfície.



Fonte Stewart (2013, p. 994).

Como podemos observar a partir da Figura 4.5, se dividirmos a área do domínio D em retângulos infinitesimais R_{ij} de lados Δu_i e Δv_j , relacionados com o ponto (u_i, v_j) , teremos em S um retalho S_{ij} com o vetor $\mathbf{r}(u_i, v_j)$ associado a um ponto P_{ij} , bem como vetores tangentes \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v a esse ponto sobre a superfície. Nesse caso, a área infinitesimal da superfície pode ser aproximada por:

$$|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_j \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_j,$$

logo, a área da superfície pode ser aproximada por:

$$\text{Área}_S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_j,$$

se fizermos a área dos quadrados no domínio D ficarem cada vez menores podemos aproximar a relação anterior por:

$$\text{Área}_S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv,$$

onde D é o domínio dos parâmetros u e v .

Como exemplo, vamos calcular a área de uma superfície esférica aproveitando o resultado do produto vetorial $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$ que obtivemos anteriormente. Para calcular a área precisamos do módulo desse produto vetorial, assim:

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \varphi)^2 + (a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + (a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi))^2}$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2 (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) + (a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2}$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2 + (a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} = a^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2 + (a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} = a^2 \operatorname{sen} \theta,$$

utilizando o domínio $D: 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ na integral

$\text{Área}_S = \iint_D |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| d\theta d\varphi$ temos:

$$\text{Área}_S = \iint_D |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi = -2\pi a^2 \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi a^2.$$

Caso a superfície seja uma função $\mathbf{z} = f(x, y)$, e f tenha derivadas parciais contínuas, os vetores tangentes podem ser encontrados por meio das seguintes relações:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}\right) \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y}\right) \mathbf{k},$$

sendo o módulo do produto vetorial $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y}\right)^2}$ então a área da superfície fica:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y}\right)^2} dA.$$

Como vimos anteriormente, a área aproximada de um retalho na superfície S é:

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Agora, supondo que temos uma função $f(x, y, z)$ cujo domínio é a superfície S , o valor de f sobre a superfície S pode ser escrito como uma soma dupla:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta S_{ij},$$

onde f é avaliada em um ponto P_{ij} do retalho e esse valor é multiplicado pela área do retalho ΔS_{ij} . Novamente, se o retalho for infinitesimal o suficiente, de modo que o número de retângulos seja

infinito, definimos a integral de f sobre a superfície S como:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta S_{ij},$$

cujo lado direito pode ser reescrito em termos dos seus valores no domínio D que nos permite calcular uma integral de superfície em termos parâmetros u e v :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Nesse ponto vale ressaltar que se $f(x, y, z) = 1$, a integral anterior nos fornece a área da superfície S .



Assimile

Uma superfície S no espaço $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ pode ser parametrizada por duas variáveis em um domínio D no plano- \mathbf{u}, \mathbf{v} . Esse fato implica que a integral de uma função $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sobre uma superfície S pode ser resolvida a partir de uma integral dupla no domínio D no plano- \mathbf{u}, \mathbf{v} como:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$



Exemplificando

Calcule a integral de superfície $\iint_S y^2 dS$ onde S é a superfície de uma esfera de raio 3.

Resolução:

Primeiro precisamos encontrar os dois termos, bem como os limites de integração do lado direito da expressão:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

Tomando $\mathbf{u} = \theta$ e $\mathbf{v} = \varphi$ teremos:

$$f(\mathbf{r}(\theta, \varphi)) = y^2 = (3\text{sen}\theta\text{sen}\varphi)^2,$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = 3^2 \text{sen}\theta,$$

com o domínio $D: 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Portanto:

$$\iint_S y^2 dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (9\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\varphi)(9\text{sen}^2\theta) d\theta d\varphi,$$

Reagrupando os termos e utilizando a relação $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$81 \int_0^\pi \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$81 \int_0^\pi \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$81 \int_0^\pi \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)) d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi,$$

Observando que todos os termos em cosseno ao serem integrados resultam em um termo seno que se anula devido aos limites de integração, a integral fica bem mais simples de avaliar:

$$\iint_S y^2 dS = \frac{81}{4} \left[\theta + \frac{1}{2}\theta \right]_0^\pi \frac{1}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{81}{4} \frac{3\pi}{2} \frac{2\pi}{2} = \frac{243\pi^2}{8}.$$

Uma aplicação simples da integral de superfície é o cálculo de massa. Por exemplo, se a função f for a densidade $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de um certo material que possui o formato de uma superfície S , então a massa pode ser calculada com a expressão: $\text{Massa} = \iint_S \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) dS$.

Como fizemos anteriormente para o cálculo da área de uma superfície, se a superfície pode ser definida como uma função $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ então a integral de uma função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sobre essa superfície fica:

$$\iint_S \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2} dA.$$

Quando uma superfície é composta pela fronteira de várias superfícies suaves, dizemos que a superfície total é suave por partes. Ou seja, a integral anterior pode ser subdividida em termos de cada uma das partes suaves da superfície global.



Refleta

Por que parametrizamos uma superfície tridimensional no processo de integração?



Pesquise mais

Ao longo da seção você visualizou várias superfícies interessantes. Elas foram construídas a partir da parametrização de cada superfície em questão utilizando um software gratuito chamado Geogebra.

Primeiro acesse www.mat.ufrgs.br/~calculo/quadrica/elipso.htm (Acesso em: 10 dez. 2017) para lembrar o que é um elipsoide.

Em seguida, acesse o software Geogebra em www.geogebra.org/ (Acesso em: 10 dez. 2017), faça uma conta e procure pelo módulo calculadora gráfica GeoGebra 3D.

No canto esquerdo da tela digite dois comandos em duas células separadas:

$$\text{Cima} = \text{Superfície} \left(u, v, 2\sqrt{1 - \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{9}}, u, -3\pi, 3\pi, v, -3\pi, 3\pi \right)$$

$$\text{Baixo} = \text{Superfície} \left(u, v, -2\sqrt{1 - \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{9}}, u, -3\pi, 3\pi, v, -3\pi, 3\pi \right)$$

Você deverá visualizar as duas partes de um elipsoide. Tente entender o uso das constantes.

Sem medo de errar

Você é um funcionário de uma empresa automotiva que desenvolve o sistema de freios de automóveis. Nesse desafio, sua tarefa é determinar a massa de um revestimento de uma tubulação. Para realizar esse cálculo, primeiro precisamos determinar o vetor de parametrização. Como o revestimento do tubo deve estar ao longo do eixo-x, podemos imaginá-lo como uma circunferência de raio 5 mm no plano-zy expandido em x. Nesse caso, a parametrização pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = x, \quad \mathbf{y} = 5 \cos \theta \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = 5 \sin \theta,$$

onde o vetor de parametrização é dado por:

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x \mathbf{i} + 5 \cos \theta \mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}$$

Nesse ponto, precisamos determinar o domínio de x e θ através do que foi recomendado para o cálculo. Assim, $D: 0 \leq x \leq 4 - 0,5y; 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Acesse o seguinte link para ter uma ideia de como fica a superfície cilíndrica e as fronteiras: <https://ggbm.at/j33th7Ca>. (Acesso em: 22 dez. 2017).

A massa do revestimento deve ser calculada utilizando a relação: $\text{Massa} = \iint_S \rho(x, y, z) dS$. Sabemos que a densidade aumenta linearmente com x gramas / mm^2 , então, $\rho(x, y, z) = x$ gramas / mm^2 e a massa fica: $\text{Massa} = \iint_S x dS$, onde S é a superfície cilíndrica da tubulação. Modificando a integral anterior para o domínio dos parâmetros x e θ , temos:

$$\text{Massa} = \iint_D x |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dx d\theta.$$

Antes de calcular a massa, vamos calcular os vetores tangentes e o produto vetorial entre eles:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -5 \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + 5 \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 \operatorname{sen} \theta & 5 \cos \theta \end{vmatrix} = -5 \cos \theta \mathbf{j} - 5 \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}.$$

O módulo desse produto vetorial fica:

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{5^2 \cos^2 \theta + 5^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = 5.$$

Alterando a variável y no domínio da parametrização, os limites de integração em x ficam:

$$0 \leq x \leq 4 - 0,5y \rightarrow 0 \leq x \leq 4 - 2,5 \cdot \cos \theta,$$

enquanto nos limites de integração para θ temos:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

assim a integral resulta em:

$$\text{Massa} = \iint_D x |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dx d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{4-2,5 \cos \theta} x \cdot 5 dx d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} (4 - 2,5 \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} (1 - 2,5 \cos \theta)^2 d\theta = \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 5 \cos \theta + 6,25 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$\frac{5}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 5 \cos \theta + \frac{6,25}{2} (1 + \cos 2\theta) \right) d\theta = \frac{5}{2} \left[\theta - 5 \sin \theta + \frac{6,25\theta}{2} + \frac{6,25 \sin 2\theta}{2 \cdot 2} \right]_0^{2\pi}$$

aqui os termos em seno são nulos, logo:

$$\text{Massa} = 20,625\pi \text{ g}$$

ou seja, pouco mais de 60 gramas de material serão necessários para fazer esse trecho de revestimento. Ao finalizar esse cálculo, você submeteu à equipe de produção da sua companhia um relatório especificando a quantidade de material que deve ser utilizada na fabricação dessa pequena parte do sistema de freios. Quais outras informações você acha pertinente colocar nesse relatório? Por exemplo, a quantidade exata calculada deve ser empregada ou deve existir alguma tolerância? Muito bem! A primeira parte da tarefa foi concluída.

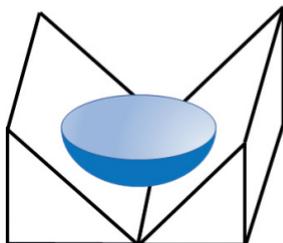
Avançando na prática

Enfeites de Natal

Descrição da situação-problema

Um artista plástico resolveu fazer um suporte para enfeite de Natal, que seria uma cunha esférica apoiada por dois planos que a tangenciam, como mostra a Figura 4.6. Sua ideia é enfeitar o suporte com flores, frutas e velas:

Figura 4.6 | Enfeite de Natal.



Fonte: elaborada pelo autor.

Após realizar o protótipo e ter visto que ficou bom, o artista resolveu produzir o produto em série. Para isso ele contratou você como um consultor de cálculo de superfícies e pediu-lhe para

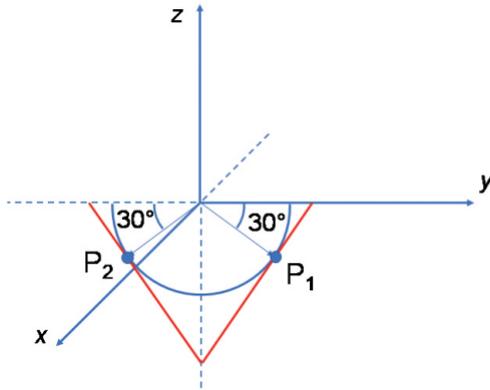
encontrar uma maneira de sistematizar o desenho de modo que ele possa ser enviado para uma fábrica de produção.

Ao observar o protótipo, observa-se que a cunha esférica possui um raio de 100 cm, e que os planos tocam a parte de baixo da cunha em um ângulo que faz 30° com o topo da cunha. Dessa forma você precisa encontrar as equações desses planos e em seguida enviar o projeto para uma oficina ou até mesmo para uma impressão 3D.

Resolução da situação-problema

Inicialmente você decide fazer um esquema bidimensional (veja Figura 4.7) do protótipo, onde identifica-se os dois pontos onde os planos tangenciam a parte de baixo da cunha esférica.

Figura 4.7 | Esquema bidimensional do problema da cunha entre planos.



Fonte: elaborada pelo autor.

A ilustração nos ajuda a identificar que o ponto P_1 possui $\theta = 120^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$, da mesma forma, P_2 também tem $\theta = 120^\circ$ e $\varphi = -90^\circ$. Utilizando o raio da cunha como 100 cm, identificamos esses pontos como $P_1 = \left(0, 100 \frac{\sqrt{3}}{2}, -50\right)$ e $P_2 = \left(0, -100 \frac{\sqrt{3}}{2}, -50\right)$.

A parametrização de uma esfera em termos de coordenadas esféricas fornece o seguinte vetor:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = a \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\varphi \mathbf{i} + a \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\varphi \mathbf{j} + a \cdot \cos\theta \mathbf{k},$$

bem como o produto vetorial entre os vetores tangentes é:

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \mathbf{j} + a^2 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \mathbf{k}$$

Aqui, aplicamos as coordenadas dos pontos P_1 e P_2 no produto vetorial anterior e temos:

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi)_{P_1} = 0 \mathbf{i} + 100^2 \sin^2(120) \sin(90) \mathbf{j} + 100^2 \sin(120) \cos(120) (1) \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi)_{P_1} = 0 \mathbf{i} + 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (1) \mathbf{j} + 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi)_{P_2} = 0 \mathbf{i} + 100^2 \sin^2(120) \sin(-90) \mathbf{j} + 100^2 \sin(120) \cos(120) (1) \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi)_{P_2} = 0 \mathbf{i} + 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (-1) \mathbf{j} + 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \mathbf{k}.$$

A equação do plano tangente a cunha no ponto P_1 pode ser escrita da seguinte forma:

Equação do Plano 1:

$$-100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(y - 100 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (z + 50) = 0.$$

Similarmente, a equação do plano tangente a cunha no ponto P_2 pode ser escrita da seguinte forma:

Equação do Plano 2:

$$-100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(y + 100 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 100^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (z + 50) = 0.$$

Você pode conferir a cunha, os pontos, bem como os planos tangentes, no seguinte link: <<https://www.geogebra.org/m/kQRpZytZ>>. Agora que você preparou os planos, poderá enviar esse resultado para uma oficina ou para uma impressora 3D. Assim, o decorador poderá ter seus suportes, todos com as mesmas dimensões.

Faça valer a pena

1. Um cilindro que possui um raio 4 mm e uma altura de 8 mm é orientado no espaço cartesiano com seu eixo maior ao longo do eixo-y. Nesse caso, podemos afirmar que:

(I) Uma parametrização em termos de u e v seria: $x = 4 \cos u$, $y = 4 \operatorname{senu}$, $z = v$.

(II) No domínio $D: 0 \leq u \leq 2\pi; 0 \leq v \leq 8 \text{ mm}$.

(III) A área lateral do cilindro é $64\pi \text{ mm}^2$ é dada pela integral

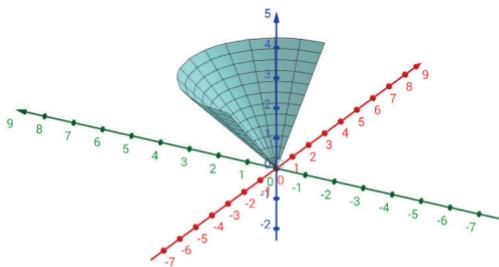
$$\text{Área}_s = \iint_D \mathbf{r}(u,v) \, du \, dv :$$

Marque a alternativa que indica a resposta correta acerca das afirmativas anteriores.

- a) Apenas a afirmativa I é correta.
- b) Apenas a afirmativa II é correta.
- c) Apenas a afirmativa III é correta.
- d) As afirmativas I e II estão corretas.
- e) As afirmativas II e III estão corretas.

2. A Figura 4.8 a seguir ilustra metade de uma superfície de um cone de altura $h = 3 \text{ cm}$ com geratriz igual a $g = 9\sqrt{2}$.

Figura – Superfície de meio cone.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma parametrização dessa superfície no plano- uv pode ser escrita como:

$$\mathbf{r}(u,v) = v \cos u \mathbf{i} + v \operatorname{senu} \mathbf{j} + v \mathbf{k} .$$

Sabendo que o domínio da parametrização é $D: 0 \leq u \leq \pi; 0 \leq v \leq 3 \text{ cm}$, encontra a área do meio-cone a partir da integral de superfície

$$\text{Área}_s = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv .$$

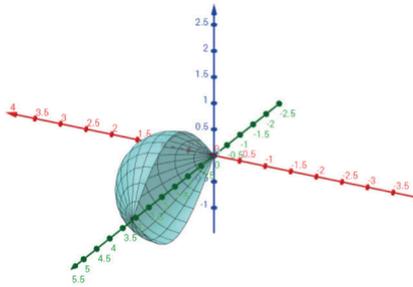
Marque a alternativa que indica a área correta da superfície do meio-cone na questão anterior em cm^2 .

- a) Área_s = 9π .
- b) Área_s = $\sqrt{2}18\pi$.
- c) Área_s = $\sqrt{29}\pi$.
- d) Área_s = $\frac{\sqrt{2}}{2}9\pi$.
- e) Área_s = $\frac{\sqrt{2}}{2}18\pi$.

3. A superfície apresentada na Figura 4.9 é gerada pela rotação de meia volta de meio período da função seno em torno do eixo-y. As componentes da parametrização para essa superfície ficam:

$$x = \text{seny} \text{sen}\theta ; Y = y ; z = \text{seny} \text{cos}\theta .$$

Figura | Superfície de rotação de meio período da função seno.



Fonte: elaborada pelo autor.

A respeito desse problema podemos afirmar:

- (I) $\mathbf{r}(y, \theta) = \text{seny} \text{cos}\theta \mathbf{i} + y \mathbf{j} + \text{seny} \text{sen}\theta \mathbf{k}$ é vetor de parametrização.
- (II) $\mathbf{r}_\theta = \text{cosy} \text{sen}\theta \mathbf{i} + \mathbf{j} + \text{cosy} \text{cos}\theta \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_y = -\text{seny} \text{cos}\theta \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \text{seny} \text{sen}\theta \mathbf{k}$ são os vetores tangentes.

(III) se a densidade é $\rho(\mathbf{r}(y, \theta)) = \frac{y\theta}{\sqrt{1 + \text{cos}^2 y}}$ a massa é π .

Marque a alternativa que indica corretamente a sequência de verdadeiro V e Falso F acerca das afirmativas anteriores.

- a) V – V – V.
- b) V – V – F.
- c) V – F – F.
- d) V – F – V.
- e) F – F – V.

Seção 4.2

Teorema de Stokes

Diálogo aberto

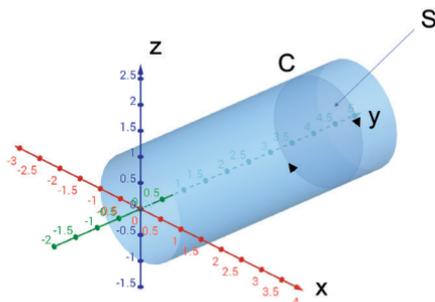
Na seção anterior estudamos parametrização e integrais de superfícies, o que tornou possível calcular a área de uma superfície, por exemplo. Na presente seção, estudaremos um importante teorema do cálculo vetorial, o Teorema de Stokes. Ele relaciona a circulação de um campo vetorial através de uma curva fechada C com o fluxo do rotacional desse campo por uma superfície orientada S cuja fronteira é justamente a curva fechada C .

Um exemplo interessante de aplicação é a produção de energia em parques eólicos que utilizam os aerogeradores, que nada mais são que enormes hélices geradoras de energia. A força do vento movimentada as hélices, e de alguma maneira a eficiência do aerogerador deve estar relacionada com a tendência do vento em circular ao redor das suas pás, ou melhor, deve estar relacionada com o rotacional da velocidade do ar, que será influenciado pelo formato das pás.

Lembre-se que nesta unidade você trabalha em uma indústria automotiva que desenvolve novas tubulações de fluido de freios. Nesse contexto, é uma de suas tarefas realizar simulações e cálculos e, em particular nesta seção, você deverá desenvolver um método para testar o regime de fluxo de um fluido dentro de um tubo de freio.

Considere o tubo como um cilindro de raio unitário com eixo na direção do eixo- y como apresentado na Figura 4.8 e como campo vetorial teste $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$. A partir desse campo vetorial, você precisa determinar se o fluido está em regime laminar (sem rotações) ou apresenta turbulências (rotações).

Figura 4.8 | Cilindro unitário com eixo na direção y



Fonte: elaborada pelo autor.

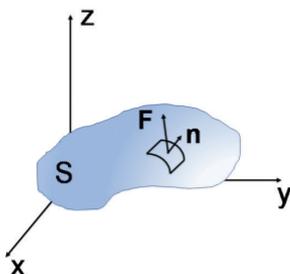
Para resolver esse desafio você precisa aprender o Teorema de Stokes e adquirir novos conhecimentos. Vamos começar?

Não pode faltar

Fluxo é uma grandeza que pode representar a quantidade de fluido atravessando a área de uma superfície ou, por exemplo, a quantidade de campo, magnético ou elétrico, atravessando uma seção de área em um determinado espaço. Se definimos uma área infinitesimal com seu versor normal, como na Figura 4.9, e um campo vetorial representado por \mathbf{F} atravessando essa pequena área, o fluxo $d\phi$ será dado pela projeção de \mathbf{F} ao longo de \mathbf{n} . Somando todas as contribuições da superfície, teremos o fluxo total de \mathbf{F} sobre S tal como:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Figura 4.9 | Fluxo de \mathbf{F} através da superfície S



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa integral de fluxo, é a integral de superfície que vimos na seção anterior. Caso a superfície S seja parametrizada como $\mathbf{r}(u,v)$, a última integral fica:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA, \text{ onde } dA \text{ é o elemento de área}$$

infinitesimal no domínio D dos parâmetros u e v , enquanto, \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v são as derivadas parciais de \mathbf{r} com respeito a u e v .

Na unidade anterior, discutimos o Teorema de Green, que relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha sobre uma linha de fronteira C da região D . Uma generalização do Teorema de Green é o Teorema de Stokes que diz:

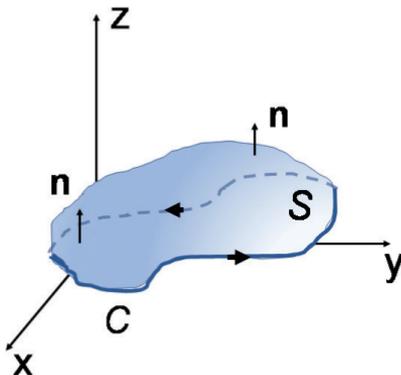
Teorema de Stokes: a integral de superfície do rotacional de um campo vetorial \mathbf{F} sobre uma superfície S é igual a integral do campo vetorial \mathbf{F} em alguma curva de fronteira C da superfície:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

desde que S seja orientada, lisa por trechos, e as fronteiras tenham curvas simples e as componentes do campo vetorial \mathbf{F} tenham derivadas parciais contínuas na região que contém S .

A Figura 4.10 apresenta uma superfície orientada com vetores normais \mathbf{n} e essa orientação induz a escolha da orientação positiva da fronteira C . Para memorizar, uma pessoa caminhando sobre C com sua cabeça apontada na direção do vetor normal, terá sempre a superfície à sua esquerda.

Figura 4.10 | Superfície e Curva orientada



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Existe alguma semelhança entre o Teorema de Stokes, o Teorema de Green, a integral de linha e o Teorema fundamental do Cálculo?

Podemos enunciar o Teorema de Stokes em outras palavras, a integral da componente tangencial de \mathbf{F} sobre uma curva fronteira C de S é igual a integral da componente normal de \mathbf{F} sobre a superfície S , ou seja,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

No caso, onde S é uma superfície plana, como um domínio D no plano- xy , o versor normal aponta na direção z e assim o Teorema de Stokes reduz-se ao Teorema de Green:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$



Pesquise mais

A prova do Teorema de Stokes para um caso especial no qual a superfície S é um gráfico $\mathbf{z} = f(x, y)$ pode ser conferida na página 1004 da obra a seguir:

STEWART, J. **Cálculo Volume II**. Trad. EZ2 Translate, São Paulo: Cengage Learning, 2013. 664p.

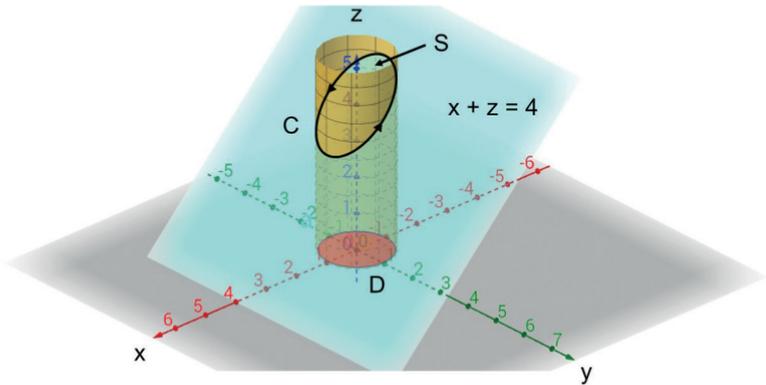
O Teorema de Stokes nos dá a possibilidade de resolver um problema a partir de dois mecanismos distintos, e cabe a nós julgar qual é o caminho mais adequado para uma situação em particular. Assim, para trabalhar esses dois pontos de vista, vamos resolver dois problemas relacionados com integrais de rotacionais de campos vetoriais.



Exemplificando

A Figura 4.11 mostra um cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que é interceptado por um plano $x + z = 4$. A intersecção forma uma superfície S e uma curva com orientação positiva C . Sabe-se que existe um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^3\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ que atravessa C e S . Calcule $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ sobre a superfície S .

Figura 4.11 | Cilindro interceptado por um plano



Primeiro vamos modificar a integral $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ da seguinte maneira:

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \text{rot} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA,$$

A superfície S pode ser parametrizada por:

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x)\mathbf{k},$$

e logo suas derivadas parciais com respeito a x e a y ficam:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{j}.$$

Agora precisamos calcular o rotacional de F e o produto vetorial de \mathbf{r}_x e \mathbf{r}_y .

$$\text{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^2 & z^3 \end{vmatrix} = (2x + 3y^2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Portanto, a integral dupla fica:

$$\iint_D (2x + 3y^2)\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) dA = \iint_D (2x + 3y^2) dA.$$

Aqui podemos modificar o sistema para coordenadas polares, com $dA = r dr d\theta$ e domínio $r = [0, 1]$ e $\theta = [0, 2\pi]$. Assim,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^3}{3} \cos \theta + \frac{3r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_0^1 d\theta, \text{ para}$$

prosseguir devemos usar a identidade $\text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ na integral anterior:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \cos\theta + \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta = \left[\frac{2}{3} \text{sen}\theta \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{3}{8} \theta \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{4} \text{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4} ,$$

pois os termos em seno se anulam.

No exemplo anterior avaliamos a integral do rotacional de F sobre a superfície, no próximo exemplo vamos integrar F sobre um caminho C , ou seja, vamos resolver o lado esquerdo do Teorema de Stokes.

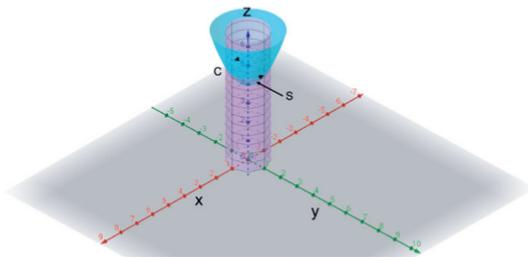


Exemplificando

Utilize o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para um campo vetorial

$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 + x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e C é a intersecção entre essas duas figuras geométricas, como mostra a Figura 4.12 a seguir.

Figura 4.12 | Intersecção entre um parabolóide e um cilindro



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: Segundo o Teorema de Stokes, a integral do fluxo do rotacional de um campo vetorial sobre a superfície S pode ser trocada pela integral do campo sobre uma curva de fronteira C de S , exatamente o que queremos calcular:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} .$$

Nesse caso, podemos identificar a curva C como a intersecção entre o parabolóide e o cilindro, e a equação pode ser obtida pela soma entre suas equações da seguinte forma:

$$z - x^2 - y^2 = 4$$

$$\frac{x^2 + y^2 = 1}{z = 5}$$

ou seja, a intersecção será o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $z = 5$. A partir desses resultados, podemos parametrizar o caminho C como:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}, \text{ logo sua derivada fica:}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}.$$

Reescrevendo o campo vetorial em termos da parametrização temos:

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sin t \cdot 5 \mathbf{i} + \cos t \cdot 5 \mathbf{j} + \cos t \cdot \sin t \mathbf{k}$, e implementando-a na integral com o domínio sendo o plano-xy com $x^2 + y^2 \leq 1$, temos:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt =$$

$$\int_C (\sin t \cdot 5 \mathbf{i} + \cos t \cdot 5 \mathbf{j} + \cos t \cdot \sin t \mathbf{k}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cdot 5 + \cos^2 t \cdot 5) dt,$$

para continuar essa integral, devemos realizar as substituições:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \text{ e}$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \text{ logo:}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5 \int_0^{2\pi} \left(-\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right) + \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) \right) dt = 5 \int_0^{2\pi} (\cos 2t) dt = 5 \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Esse resultado é bastante interessante, pois mostra que no limite a soma das componentes do campo ao longo de C se anula.

Vamos agora encontrar um significado físico para o rotacional poder ser explorado aplicando-se o Teorema de Stokes. Supondo que \mathbf{v} é o campo de velocidade de um fluido e que C é uma curva fechada simples, podemos escrever a integral de linha $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ que também pode ser escrita como $\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds$, onde \mathbf{T} é o versor tangente à curva C . O produto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a projeção da velocidade do fluido ao longo da curva C . Quanto menor for o ângulo entre os

vetores \mathbf{v} e \mathbf{T} maior será o produto escalar entre eles. Por outro lado, quanto maior o ângulo entre os vetores, menor será o produto escalar entre eles. Ou seja, a integral $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ mede a tendência do campo vetorial \mathbf{v} circular através de C e é chamada de circulação.

Para relacionar a circulação com o rotacional, escolhamos um pequeno círculo C_a de raio a em torno do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Vamos supor que o rotacional de um campo vetorial \mathbf{v} seja constante dentro do círculo e igual ao valor encontrado no seu centro, então $\text{rot } \mathbf{v}(P) \approx \text{rot } \mathbf{v}(P_0)$. Nesse caso, podemos escrever:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \approx \iint_S \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) dS \approx \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2.$$

Note que o versor normal na superfície é o mesmo em todos os pontos e essa aproximação fica cada vez melhor no limite, onde $a \rightarrow 0$, ou seja, a circulação relaciona-se com o rotacional através da seguinte relação:

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

ou seja, o efeito do rotacional em torno do eixo \mathbf{n} é maior quanto mais paralelo for o $\text{rot } \mathbf{v}$ desse eixo.

Vimos na unidade anterior que se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre \mathbb{R}^3 então \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Se \mathbf{F} é conservativo então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todos os caminhos C . Cada um desses caminhos é uma fronteira de uma superfície orientada S . Assim, podemos escrever o Teorema de Stokes para cada par caminho/superfície para um campo conservativo \mathbf{F} :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

de onde podemos concluir que se \mathbf{F} é conservativo, então $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.



Assimile

O Teorema de Stokes afirma que a integral de superfície do rotacional de um campo vetorial \mathbf{F} sobre uma superfície S é igual a integral do campo vetorial \mathbf{F} em alguma curva de fronteira C da superfície:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Para que S seja orientada, lisa por trechos, fronteiras com curvas simples e as componentes do campo vetorial \mathbf{F} com derivadas parciais contínuas na região que contém S .

Para um campo conservativo, obtém-se que:

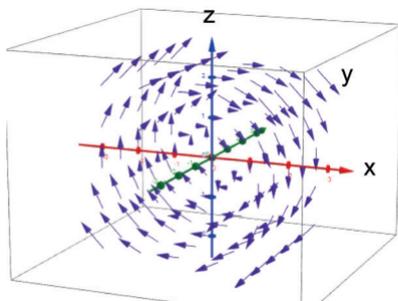
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0, \text{ então } \text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Sem medo de erro

Retornando à situação em que você trabalha com simulações de fluidos para uma indústria automobilística, a tarefa agora exige testar um certo campo vetorial, que representa a velocidade do fluido dentro de um cilindro.

O campo vetorial escolhido para testar a simulação do fluido na tubulação de freios foi $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$, que claramente apresenta apenas componente rotacional ao longo do eixo y (veja Figura 4.15). Mas, para construir um método de análise precisamos de um mecanismo que garanta sistematicamente a presença ou não de componentes rotacionais e isso pode ser feito com o auxílio do Teorema de Stokes.

Figura 4.13 | O campo vetorial de \mathbf{F}



Fonte: elaborada pelo autor.

Um cilindro com eixo na direção y , é um protótipo para testar o regime de escoamento do fluido na tubulação de freio. Começamos encontrando o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & 0 & -x \end{vmatrix} = 2\mathbf{j}.$$

Agora precisamos determinar a superfície sobre a qual será avaliada a integral do rotacional de \mathbf{F} . Essa superfície é a que gera o caminho C sobre o cilindro que aponta a direção y , ou seja, o plano $y = 4$, como está mostrado na Figura 4.10. A parametrização dessa superfície resulta em:

$\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com as seguintes derivadas parciais:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} \text{ e}$$

$$\mathbf{r}_z = \mathbf{k}.$$

O produto vetorial entre esses vetores tangentes fica:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{j}.$$

Utilizando a definição $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$, podemos calcular o fluxo do rotacional sobre a superfície com o elemento infinitesimal de área $dA = r dr d\theta$ e o domínio $D: 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos:

$$\iint_D \text{rot}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = 2\pi.$$

Portanto, como a integral é diferente de zero, sabemos que existem componentes rotacionais ao longo do eixo y , ou seja, nesse regime o fluido apresentará rotações em torno do eixo da tubulação. Agora que você terminou os cálculos, você pode organizá-los em um manual ou relatório que possa ser consultado posteriormente.

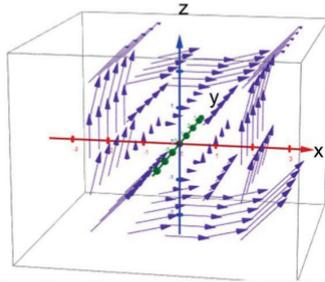
Avançando na prática

Laudo sobre o escoamento de um rio.

Descrição da situação-problema

Um certo trecho de um rio em uma cidade possui um escoamento com velocidade que pode ser descrita pelo campo vetorial $\mathbf{v} = z^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{k}$ que está ilustrado na Figura 4.14 a seguir:

Figura 4.14 | Campo vetorial \mathbf{v} referente à velocidade do rio.



Fonte: elaborada pelo autor.

A prefeitura da cidade contratou você para gerar um laudo sobre o escoamento do rio, no qual devem constar informações sobre os locais de máxima e mínima circulação. O que você pode concluir a respeito disso?

Resolução da situação-problema

Quanto maior for a componente de um campo vetorial \mathbf{v} tangente a um certo caminho C_a , que compreende uma pequena área πa^2 em que a é o raio da circunferência C_a , maior será o valor da circulação $\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$. Nesse caso, podemos aproximar essa circulação pelo Teorema de Stokes:

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \text{ onde } P_0(x_0, y_0, z_0) \text{ é um ponto no}$$

domínio do campo vetorial.

Tomando como área infinitesimal, uma pequena circunferência com raio a com vetor normal paralelo ao eixo- y , que estamos assumindo ser a direção da profundidade do rio, temos para qualquer P_0 :

$$\mathbf{n}(P_0) = \mathbf{j}$$

Calculando o rotacional de \mathbf{v} no ponto P_0 :

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = 2(z_0 - x_0)\mathbf{j}.$$

Assim, $\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = 2(z_0 - x_0)\mathbf{j} \cdot (1)\mathbf{j} = 2(z_0 - x_0)$. Esse resultado nos permite inferir pontos onde a circulação será nula, ou seja,

sempre que $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$. Além disso, os pontos onde $\mathbf{z}_0 = -\mathbf{x}_0$ são pontos que maximizam o rotacional ao longo da direção normal e, portanto, a circulação.

Dessa forma, você escreve seu laudo apontando esses fatos e conclui sua tarefa.

Faça valer a pena

1. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule a integral $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde S é a superfície formada pela parte de cima do parabolóide $\mathbf{z} = 5 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2$ que é cortado pelo plano $\mathbf{z} = 1$ e que está imersa em um campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{z}\mathbf{i} + \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{j} + \mathbf{x}\mathbf{k}$. Lembre-se que a intersecção entre o parabolóide e o plano, nesse caso, gera um caminho simples que é uma circunferência. Encontre a parametrização dessa circunferência e use o lado esquerdo do Teorema de Stokes.

Marque a alternativa que indica a resposta correta:

a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4$.

b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 + 4\pi$.

c) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi$.

d) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 + 2\pi$.

e) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$.

2. O Teorema de Stokes pode ser utilizado para calcular a integral de um rotacional de um campo vetorial através de uma superfície S , ou seja $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Deste modo, se o campo vetorial é $\mathbf{F} = \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{j}$ e a superfície é a metade de uma esfera unitária acima do plano- xy , calcule $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Para isso, utilize coordenadas esféricas para representar a superfície no domínio $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, então calcule $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, \varphi)) \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Marque a alternativa que indica corretamente a resposta para o cálculo da integral apresentada no texto anterior:

$$a) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

$$b) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{14\pi^2}{16}.$$

$$c) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{7\pi^2}{8}.$$

$$d) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{14\pi^2}{32}.$$

$$e) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{5\pi^2}{8}.$$

3. Suponha um campo vetorial $\mathbf{v} = \text{sen}y\mathbf{i} + \text{sen}x\mathbf{j}$ em todo \mathbb{R}^3 e um círculo em torno do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de raio a muito pequeno cuja normal é $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. A respeito da circulação do campo $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ em torno desse círculo podemos afirmar:

$$(I) \text{div } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

(II) A circulação do campo vetorial \mathbf{v} em um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é aproximadamente $\pi a^2 (\cos x_0 + \cos y_0)$.

(III) O campo vetorial \mathbf{v} é conservativo.

Marque a alternativa que indica a sequência correta de verdadeiro V e falso F acerca das afirmativas anteriores.

a) V – V – V.

b) F – F – F.

c) F – V – V.

d) V – F – V.

e) F – V – F.

Seção 4.3

Teorema da Divergência ou Lei de Gauss

Diálogo aberto

Na última seção estudamos o Teorema de Stokes, que conecta uma integral da projeção de um campo vetorial em torno de um caminho fechado C com uma integral dupla da projeção do rotacional na direção de uma superfície S delimitada por C . Dedicaremos a próxima seção ao estudo do Teorema da Divergência que tem aplicações, por exemplo, no eletromagnetismo e na mecânica dos fluidos.

Uma carga elétrica gera ao seu redor um campo vetorial elétrico de tal modo que o seu fluxo através de qualquer superfície pode ser calculado com o auxílio do Teorema da Divergência, que no contexto do eletromagnetismo é conhecido como Lei de Gauss. Por outro lado, o Teorema da Divergência também é aplicado no estudo dos fluidos para calcular, por exemplo, a vazão de um fluido por uma superfície qualquer. O Teorema da Divergência mostra que uma integral de superfície de um campo, cujo cálculo pode ser complicado ou demorado, pode ser reduzido a única integral tripla do divergente do campo no volume envolto pela superfície.

Como sabemos, nesta Unidade você trabalha em uma indústria automotiva que desenvolve tubulações e fluido de freios. Nesta seção, você será chamado a resolver uma situação na qual se deseja saber precisamente o fluxo de um fluido de freio cuja taxa de vazão por unidade de área pode ser dada por $\mathbf{F} = xe^z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$. A sua empresa está realizando um teste com esse fluido e gostaria de saber qual é precisamente o fluxo através de uma superfície cilíndrica, que pode ser especificada como $x^2 + z^2 = 4^2$ entre os planos $y = 0$ e $y = 10$. Sua tarefa será encontrar uma maneira simples de obter esse resultado e no final continuar a escrever um relatório compilando o que foi realizado até agora para que o mesmo possa ser consultado no futuro.

Na situação apresentada, o cilindro possui três superfícies, de modo que seria necessário realizar três integrais duplas. Uma maneira de reduzir os passos desse cálculo seria utilizar o Teorema

da Divergência que será apresentado agora. Então vamos lá, você precisa aprender esse Teorema para poder realizar sua tarefa na empresa. Vamos começar?

Não pode faltar

a Unidade 3 vimos que o Teorema de Green para um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ pode ser escrito como:

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA,$$

onde D é uma região no plano- xy circundada pela fronteira C .

Vimos também que as formas vetoriais do Teorema de Green fornecem as seguintes relações:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA \text{ e}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div} \mathbf{F} dA.$$

A última expressão, relaciona a integral de um campo \mathbf{F} em torno da fronteira C com o divergente desse campo calculado na área da região D em um plano. Se F é um campo que depende das três coordenadas do espaço tridimensional, ou seja $\mathbf{F}(x, y, z)$, podemos estender a última expressão para o Teorema de Green da seguinte forma:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \text{div} \mathbf{F} dV,$$

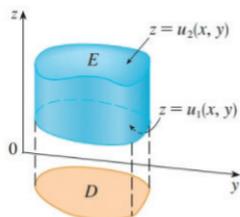
onde S é uma superfície fechada que envolve um volume E . Essa expressão é conhecida como Teorema da Divergência. Perceba que, assim como nos Teoremas de Green e Stokes, o Teorema da Divergência associa a integral da derivada de um campo vetorial \mathbf{F} em uma região do lado direito com a integral da função \mathbf{F} na fronteira da região.

O Teorema da Divergência apresenta uma integral tripla em uma região sólida simples E . Uma região sólida simples pode ser uma caixa retangular, um elipsoide ou similar ao apresentado na Figura 4.15. Nesse caso, a definição da região sólida simples fica:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Outras duas regiões sólidas simples podem ser obtidas de modo que a região T pertença aos planos- xz e yz , respectivamente.

Figura 4.15 | Região sólida simples.



Fonte: Stewart (2013, p. 914).

Teorema da Divergência: Se E é uma região simples envolta por uma superfície S com orientação positiva para fora e \mathbf{F} é um campo vetorial no espaço tridimensional com componentes com derivadas contínuas na região, então:

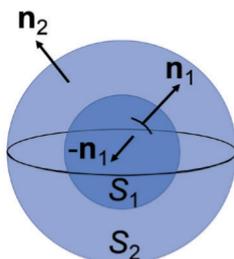
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

em palavras, o fluxo de \mathbf{F} sobre S é igual a integral tripla da divergência de \mathbf{F} no volume E .

Como definido anteriormente, a orientação positiva de uma superfície S é sempre tomada na direção do vetor normal que aponta para fora de E . No caso em que a região E é o espaço formado entre duas superfícies S_1 e S_2 , como apresentado na Figura 4.16, deve-se levar em conta que a normal que aponta para E em S_2 é \mathbf{n}_2 , enquanto que em S_1 é $-\mathbf{n}_1$. Assim, pelo Teorema da Divergência temos:

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_2) dS.$$

Figura 4.16 | Duas superfícies esféricas S_1 e S_2 .



Fonte: elaborada pelo autor.



Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ através de uma superfície S formada pelos planos $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

Resolução:

O fluxo pode ser calculado por meio da integral de superfície de \mathbf{F} em S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Podemos calcular diretamente o fluxo utilizando a integral anterior, no entanto, vamos aplicar o Teorema da Divergência:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Primeiro vamos calcular o divergente do campo vetorial \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) = 2(x + y + z).$$

Utilizando $dV = dx dy dz$ na integral tripla com os limites $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$ temos:

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z) dx dy dz.$$

avaliando essa integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z) dx dy dz &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dx dy = 2 \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 3. \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo de \mathbf{F} através de S fica:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 3.$$

Uma aplicação direta do Teorema da Divergência é a chamada Lei de Gauss que estabelece que o fluxo de um campo elétrico \mathbf{E} devido a uma carga Q , localizada na origem através de uma superfície qualquer S , é obtido pela integral $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon Q$, onde $\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, com ϵ_0 sendo a permissividade do vácuo.

Vamos utilizar o Teorema da Divergência para mostrar essa forma da Lei de Gauss no próximo Exemplificando.



Exemplificando

Utilize o Teorema da Divergência para mostrar a seguinte forma da Lei de Gauss $\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon_0 Q$, onde Q é uma carga localizada na origem e S_2 é uma superfície qualquer envolvendo Q sabendo que o campo elétrico calculado em um ponto (x, y, z) é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x},$$

onde \mathbf{x} é o vetor $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, com ϵ_0 sendo a permissividade do vácuo.

Resolução:

A superfície S_2 pode ser qualquer superfície que envolve a origem. Internamente a S_2 construímos uma superfície esférica S_1 com um raio pequeno a . Deste modo, o Teorema da Divergência para \mathbf{E} fica:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Nesse ponto, o divergente de \mathbf{E} deve ser calculado na região E entre S_1 e S_2 . Como a orientação da superfície positiva está na direção do vetor normal que aponta para fora, em S_2 o vetor normal é \mathbf{n}_2 e em S_1 utilizamos o vetor $-\mathbf{n}_1$, como mostrado na Figura 4.16. Assim podemos manipular o lado esquerdo da integral dupla anterior como:

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

O divergente de \mathbf{E} , pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_0 Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \right) = \epsilon_0 Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right) = \\ &= \epsilon_0 Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right) \right) = \end{aligned}$$

Vamos calcular o primeiro termo da expressão anterior:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right) = \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{3x^2}{[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}},$$

os outros dois termos fornecem resultados similares, com $3y^2$ e $3z^2$ no lugar de $3x^2$. O divergente fica:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{3}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} = 0. \text{ Ou seja, o divergente}$$

do campo elétrico é nulo. Por meio desse resultado podemos escrever:

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 0, \quad \text{que}$$

fornece:

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_1) dS.$$

Aqui, podemos calcular a integral de superfície de \mathbf{E} sobre S_1 que é uma pequena esfera de raio a . O campo elétrico em um ponto (x, y, z) sobre S_1 é:

$$\mathbf{E} = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \text{ enquanto o vetor normal nesse ponto fica } \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Calculando a integral anterior temos:

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_1) dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} |\mathbf{x}|^2 dS =$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} |\mathbf{x}|^2 dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} dS,$$

como $|\mathbf{x}|^2 = a^2$ temos:

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{a^2} dS = \frac{\epsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS,$$

como integral de superfície em S_1 é $4\pi a^2$, temos:

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n}_2) dS = \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q}{a^2} dS = 4\pi \epsilon Q.$$

Ou seja, a integral do fluxo de \mathbf{E} através de qualquer superfície S_2 é dada por:

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \epsilon Q.$$



Refleta

Por que o fluxo do Campo elétrico $\mathbf{E} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ de um carga Q através de qualquer superfície fechada é nulo?

Uma segunda aplicação do Teorema da Divergência refere-se ao escoamento dos fluidos. O campo vetorial \mathbf{F} representando a vazão de um fluido por unidade de área com densidade constante ρ e velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ pode ser escrito como $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$. Podemos aproximar $\text{div } \mathbf{F}(P) \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0)$ se fizermos uma pequena esfera em torno de P_0 com um raio a pequeno suficiente, de modo que o divergente de \mathbf{F} em todos os pontos P no interior da esfera V_a seja constante e igual ao valor no centro P_0 . Assim, o Teorema da Divergência pode ser escrito como:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V_a} \text{div } \mathbf{F}(P) dV \approx \iiint_{V_a} \text{div } \mathbf{F}(P_0) dV \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0) \iiint_{V_a} dV \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0) V_a.$$

Conforme o raio a torna-se cada vez menor a aproximação anterior fica melhor:

$$\text{div } \mathbf{F}(P_0) \approx \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{V_a} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Nesse caso, se $\text{div } \mathbf{F}(P) > 0$ o fluxo sai do ponto P que é uma fonte. De outro modo, se $\text{div } \mathbf{F}(P) < 0$ o fluxo entra no ponto P que é considerado um sorvedouro.



Assimile

O Teorema da Divergência afirma que se E é uma região simples envolta por uma superfície S com orientação positiva para fora e \mathbf{F} é um campo vetorial no espaço tridimensional com componentes com derivadas contínuas na região então:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV,$$

em palavras, o fluxo de \mathbf{F} sobre S é igual a integral tripla da divergência de \mathbf{F} no volume E . Em um campo vetorial podem ser identificadas fontes ou sorvedouros, que indicam uma convergência ou divergência de vetores.



Não deixe de conferir uma boa aula sobre o Teorema da Divergência do professor da Unicamp Samuel Rocha de Oliveira que foi veiculada no canal da Univesp TV:

UNIVESP. **Cálculo II – Aula 28 – Teorema de divergência.** Disponível em <www.youtube.com/watch?v=FbaHinL0oHQ>. Acesso em: 2 abr. 2018.

Sem medo de erro

Lembre-se, na presente Unidade a indústria na qual você presta serviços desenvolve tubulações e fluido de freios. Sua tarefa final exige conhecer precisamente o fluxo de um fluido de freio cuja taxa de vazão por unidade de área pode ser dada por $\mathbf{F} = xe^z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$ e a superfície é um cilindro.

Sabemos que fluxo de \mathbf{F} através da superfície S pode ser dado pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como a superfície é o cilindro de raio 4 cm, $x^2 + z^2 = 4^2$ entre os planos $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{10\text{ cm}}$, devemos calcular três integrais de superfícies nas três superfícies do cilindro. No entanto, se utilizarmos o Teorema da Divergência,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

podemos calcular uma única integral tripla. Nesse caso, temos de primeiro calcular o divergente de \mathbf{F} , como a seguir:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (xe^z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}) = e^z + xe^{xz}.$$

Assim, o lado direito do Teorema da Divergência fica:

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{-4}^4 \int_{-4}^4 \int_0^{10} (e^z + xe^{xz}) dydzdx,$$

onde utilizamos os limites $0 \leq y \leq 10$, $-4 \leq x \leq 4$ e $-4 \leq z \leq 4$, além de $dV = dydzdx$. Avaliando a integral anterior temos:

$$\int_{-4}^4 \int_{-4}^4 \int_0^{10} (e^z + xe^{xz}) dydzdx = \int_{-4}^4 \int_{-4}^4 (e^z y + xe^{xz} y)_0^{10} dzdx = \int_{-4}^4 \int_{-4}^4 10(e^z + xe^{xz}) dzdx.$$

Nesse ponto, precisamos fazer as seguintes substituições apenas para o segundo termo da integral anterior:

$$u = xz \rightarrow du = xdz$$

$$u_1 = -4x \text{ e } u_2 = 4x$$

$$\int_{-4}^4 \int_{-4}^4 10e^z dz dx + \int_{-4}^4 \int_{-4x}^{4x} 10e^{xz} du dx =$$

$$\int_{-4}^4 10[e^z]_{-4}^4 dx + \int_{-4}^4 10[e^u]_{-4x}^{4x} dx = \int_{-4}^4 10(e^4 - e^{-4} + e^{4x} - e^{-4x}) dx =$$

$$\int_{-4}^4 10(e^4 - e^{-4} + e^{4x} - e^{-4x}) dx = 10 \left[(e^4 - e^{-4})x + \left(\frac{e^{4x}}{4} + \frac{e^{-4x}}{4} \right) \right]_{-4}^4 =$$

$$10 \left[(e^4 - e^{-4})(4 - (-4)) + \left(\frac{e^{4(4)}}{4} + \frac{e^{-4(4)}}{4} \right) - \left(\frac{e^{4(-4)}}{4} + \frac{e^{-4(-4)}}{4} \right) \right] = 80(e^4 - e^{-4}).$$

Você mostrou rapidamente os cálculos para sua equipe e a partir dessa etapa o fluido pode passar por outros testes. Como estamos finalizando todo o contexto, você precisa escrever um relatório detalhando os passos realizados até agora, para que possa ser consultado posteriormente por seus colegas de trabalho.

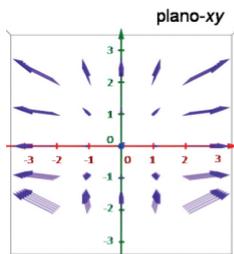
Avançando na prática

Componentes eletrônicos.

Descrição da situação-problema

Uma empresa de eletrônicos está desenvolvendo um dispositivo, em formato de caixa retangular de $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$, que apresenta um campo magnético como mostra a Figura 4.17 a seguir:

Figura 4.17 | Campo vetorial magnético em uma caixa.



Fonte: elaborada pelo autor.

Após uma inspeção inicial, a equipe determinou que o campo magnético possui a seguinte relação $\mathbf{B} = x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$. Os profissionais pretendem instalar um componente eletrônico em um ponto $P(1, -3)$. No entanto, esse ponto não pode ser um sorvedouro de campo magnético, pois isso acarretará um mau funcionamento do dispositivo. Assim, você, como parte da equipe, ficou encarregado de mostrar a viabilidade da instalação do componente, apresentando um documento com os detalhes do cálculo.

Resolução da situação-problema

Inicialmente podemos utilizar a aproximação do Teorema da Divergência com o campo \mathbf{B} , tomando, como exemplo, uma pequena bola de volume V_a e raio a em torno do ponto P_0 . Nesse caso, o Teorema fica:

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{V_a} \operatorname{div} \mathbf{B}(P) dV \approx \iiint_{V_a} \operatorname{div} \mathbf{B}(P_0) dV \approx \operatorname{div} \mathbf{B}(P_0) \iiint_{V_a} dV \approx \operatorname{div} \mathbf{B}(P_0) V_a, \\ \frac{1}{V_a} \iint_{S_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &\approx \operatorname{div} \mathbf{B}(P_0). \end{aligned}$$

Para determinar se o ponto em questão é um sorvedouro ou fonte, podemos simplesmente calcular o lado direito da equação anterior, ou seja:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot (x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}) = 3x^2 + 2y.$$

Aplicando o divergente do campo magnético no ponto $P_0 = (1, -3)$ temos:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(P_0) = 3(1)^2 + 2(-3) = -3.$$

Como o divergente de \mathbf{B} no ponto P_0 é menor que zero, inferimos que esse é um sorvedouro de campo. Sabendo disso, você preparou um documento contendo os detalhes do cálculo e informando que no ponto em questão há um sorvedouro e, portanto, outro ponto deve ser escolhido para a instalação do componente no dispositivo.

Faça valer a pena

1. O fluxo de um campo vetorial através de uma superfície pode ser calculado pela integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Sabendo que o campo vetorial é descrito por $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ e que a superfície é um quarto de hemisfério acima do plano- xy de raio unitário, calcule o fluxo resultante. Dica: Utilize o Teorema da Divergência para resolver a questão.

Marque a alternativa que indica a resposta correta com respeito ao texto anterior:

- a) $\frac{\pi}{16} - \frac{2}{15}$.
- b) $\frac{\pi}{8} - \frac{4}{15}$.
- c) $\frac{\pi}{4} - \frac{8}{15}$.
- d) $\frac{3\pi}{8} - \frac{4}{5}$.
- e) $\frac{5\pi}{8} - \frac{4}{3}$.

2. Suponha um fio infinitamente longo, com uma densidade linear de cargas positivas λ . Em torno do fio é colocado um cilindro de raio r e altura h . A partir da Lei de Gauss, podemos dizer que:

- I) O campo aponta radialmente para dentro do cilindro na direção do fio.
- II) O campo aponta radialmente para fora do cilindro para longe do fio.
- III) O campo elétrico é constante na superfície do cilindro, e seu valor não depende de r .

Marque a alternativa que indica a sequência correta de Verdadeiro e Falso acerca das afirmativas anteriores.

- a) F – F – V.
- b) V – F – V.
- c) F – V – F.
- d) V – V – F.
- e) V – V – V.

3. Para um campo vetorial T , um ponto P será sorvedouro ou fonte se $\operatorname{div} T(P) < 0$ e $\operatorname{div} T(P) > 0$, respectivamente. Considerando os pontos $P_1(1,2)$ e $P_2(1,-2)$, e os campos vetoriais $F = x^2i - y^2j$ e $G = xyi + xyj$, podemos afirmar que:

- I) P_1 é fonte de F e sorvedouro de G .
- II) P_1 é sorvedouro de F e fonte de G .
- III) P_2 é fonte de F e sorvedouro de G .
- IV) P_2 é sorvedouro de F e fonte de G .

Marque a alternativa que indica a sequência correta de Verdadeiro e Falso acerca das afirmativas anteriores:

- a) V – F – V – F.
- b) F – F – V – V.
- c) V – V – F – F.
- d) V – F – F – V.
- e) F – V – V – F.

Referências

ÇENGEL, Y. WILLIAM, J. P. **Equações Diferenciais**. Trad. Marco Elísio Marques. Porto Alegre: AMGH, 2014. 600 p.

GEOGEBRA. **GeoGebra – Dynamic mathematics**. [s.l.; s.d]. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acesso em: 5 abr. 2018.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo, vol. 4**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 528 p.

KANEKO, U.F. Cunha Esférica Delimitada por Planos Tangentes. **GeoGebra** [s.l.; s.d]. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/kQRPzYtZ>>. Acesso em: 5 abr. 2018.

STEWART, J. **Cálculo Volume II**. Trad. EZZ Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 664 p.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **MAT 01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA. Instituto de Matemática e Estatística**. Porto Alegre. [s.d]. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~calculo/quadrica/elipso.htm>. Acesso em: 5 abr. 2018.

ISBN 978-1-56581-231-4



9 781565 812314 >