

# **Cálculo Avançado** **Números Complexos e** **Equações Diferenciais**



# **Cálculo Avançado: Números Complexos e Equações Diferenciais**

Juliana Gaiba Oliveira

Eduardo Aparecido da Rosa Neto

José de França Bueno

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Camila Leão Cardoso

Junior Francisco Dias

Ulisses Ferreira Kaneko

Vagner Luis Zanin

**Editorial**

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

Oliveira, Juliana Gaiba  
O48c Cálculo avançado: números complexos e equações  
diferenciais / Juliana Gaiba Oliveira, Eduardo Aparecido da  
Rosa Neto, José de França Bueno. – Londrina : Editora e  
Distribuidora Educacional S.A., 2018  
208 p.

ISBN 978-85-522-0669-9

1. Cálculo. I. Oliveira, Juliana Gaiba. II. Rosa  
Neto, Eduardo Aparecido da. III. Bueno, José de França.  
IV. Título.

CDD 510

---

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018  
Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza  
CEP: 86041-100 – Londrina – PR  
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br  
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Números complexos</b> _____	<b>7</b>
Seção 1.1 - A ideia de número complexo _____	9
Seção 1.2 - Operações com números complexos _____	24
Seção 1.3 - Forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo _____	35
<b>Unidade 2   Séries</b> _____	<b>51</b>
Seção 2.1 - Séries, séries de potências, séries de Taylor e MacLaurin _____	53
Seção 2.2 - Séries de Fourier _____	71
Seção 2.3 - Aplicações das séries de Fourier _____	91
<b>Unidade 3   Equações Diferenciais Parciais e a Equação do Calor</b> _____	<b>113</b>
Seção 3.1 - Introdução às Equações Diferenciais Parciais _____	115
Seção 3.2 - Equação do Calor: modelagem _____	125
Seção 3.3 - Equação do Calor: Soluções _____	137
<b>Unidade 4   Equação da Onda e Equação de Laplace</b> _____	<b>155</b>
Seção 4.1 - Equação da onda: modelagem _____	157
Seção 4.2 - Equação da onda: soluções _____	170
Seção 4.3 - Equação de Laplace _____	185



# Palavras do autor

Para tratar dos conteúdos dessa disciplina, este livro está subdividido em quatro unidades, descritas a seguir.

Na Unidade 1, inicialmente por meio de uma breve abordagem histórica, você conhecerá um pouco a respeito da necessidade da construção de um "novo" conjunto numérico: os números complexos. Apresentada a definição formal desse conjunto, vamos explorar diversas operações algébricas, bem como suas respectivas representações geométricas no plano de Argand-Gauss.

Na segunda unidade você trabalhará as competências necessárias para determinar aproximações numéricas para funções e resolver equações diferenciais com séries de Fourier. As séries de Fourier são fundamentais para um profissional da área de exatas, pois propicia ferramentas para a resolução de equações diferenciais que modelam fenômenos de condução de calor, fenômenos vibratórios e estudos de processamentos de sinais, entre outras diversas aplicações.

A Unidade 3 visa, entre outras coisas, introduzir um conceito que pode ser novo, o de equação diferencial parcial. Possivelmente é do seu conhecimento a definição de equação diferencial ordinária e métodos de resolução. As equações parciais são similares, mas apresentam um nível de complexidade maior, por envolverem mais variáveis. Parte dessa unidade tratará especificamente da equação do calor e de sua solução.

Por fim, na quarta unidade, encerramos realizando o estudo das equações diferenciais parciais de onda e de Laplace, suas definições e soluções. Essas equações são extensamente utilizadas em áreas como a mecânica, por modelarem fenômenos ondulatórios.

Para encarar esses desafios, é de extrema importância manter uma rotina de estudos que possibilite dedicar-se à realização das atividades, abrindo caminho para a autonomia intelectual.

Bons estudos!



# Números complexos

## Convite ao estudo

O que você faria se recebesse o desafio de dividir um segmento de 10 unidades em duas partes cujo produto é 40? O matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou esse problema aparentemente simples em seu famoso livro *Ars magna*. Ainda nessa obra, Cardano deduziu uma fórmula para resolver equações de terceiro grau do tipo  $x^3 + ax + b = 0$ . Mais tarde, Rafael Bombelli (1526-1573), admirador de Cardano, utilizou essa fórmula para resolver a equação cúbica  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , chegando à solução  $x = 4$ , que é verdadeira. Mas, para isso, foi preciso resolver uma expressão envolvendo a raiz quadrada de um número negativo,  $\sqrt{-121}$ , que não faz sentido no conjunto dos números reais.

A questão que motivou Cardano, Bombelli e vários outros matemáticos foi: como um número real pode ser obtido como resultado de uma expressão que contém a raiz quadrada de números negativos? E para deixá-los ainda mais instigados, os trabalhos mostravam que era possível operar com esses números "imaginários", o que fazia ainda menos sentido.

Inicialmente por meio de uma abordagem histórica, você conhecerá um pouco a respeito da necessidade de construção desse "novo" conjunto numérico. Apresentada a definição formal na forma algébrica, vamos explorar suas representações geométricas no plano de Argand-Gauss, bem como diversas operações algébricas, propriedades, a forma trigonométrica, a forma polar, dentre outras características. Em outras palavras, estudaremos nessa unidade a construção de um conjunto numérico, o **conjunto dos números complexos**.

Os números complexos surgiram como uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da Álgebra e, sem a presença deles hoje, seria impossível imaginar o desenvolvimento de

algumas áreas, como Engenharia, Aerodinâmica, Mecânica dos fluidos, Física Quântica, Relatividade, dentre outras.

E para deixar o estudo ainda mais interessante, suponha que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular o que os alunos aprendem, a coordenadora pedagógica sugeriu abordar as principais características dos números complexos por meio de três objetos virtuais interativos utilizando o *software* **GeoGebra**, um programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltados para aprendizagem de Matemática que pode ser obtido no site disponível em: <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)> (acesso em: 17 out. 2017).

Essas atividades devem ser elaboradas com o objetivo de explorar os conceitos estudados na respectiva seção da unidade. No primeiro objeto, relacionado ao conteúdo da seção **A ideia de número complexo**, o objetivo é construir uma representação manipulável do número complexo no plano de Argand-Gauss. No segundo objeto, relacionado ao conteúdo da seção **Operações com números complexos**, o desafio é explorar a interpretação geométrica das operações com esses números. Já o terceiro objeto, relacionado ao conteúdo da seção **Forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo**, o objetivo novamente é a interpretação geométrica, dessa vez relacionada à ideia de rotação de um ponto no plano. Vamos lá?

# Seção 1.1

## A ideia de número complexo

### Diálogo aberto

Nesta seção iremos estudar um pouco a respeito do processo de construção de um "novo" conjunto numérico: os números complexos. Apresentada a definição de conjunto dos números complexos, vamos identificar as representações algébrica e geométrica, bem como associar um número complexo aos seus respectivos afixo e vetor no plano de Argand-Gauss.

Esse assunto é normalmente introduzido nos anos iniciais do ensino médio, na disciplina de Matemática. Você se lembra?

Esses conteúdos servem como base para o trabalho que será desenvolvido posteriormente na unidade, em que serão exploradas as operações usuais e as propriedades das operações, tais como comutativa, distributiva, entre outras.

Vamos voltar também à situação hipotética apresentada no Convite ao estudo. Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular o que os alunos aprendem, você deve produzir um objeto virtual interativo com o objetivo de interpretar geometricamente um número complexo no plano de Argand-Gauss.

Você conseguiria descrever todas as etapas de elaboração desse objeto, com base nos conteúdos desta seção? Uma maneira de fazer isso é por meio de um plano de aula contendo o passo a passo da construção desse objeto, utilizando, sempre que possível, imagens obtidas por captura de tela do *software* GeoGebra.

### Não pode faltar

Antes de definir o conceito de número complexo, vamos conhecer um pouco da história que levou ao surgimento desse novo número.

#### **Contexto histórico: a descoberta de um novo número**

Antigamente, para uma equação ter significado, ela precisava ter uma formulação baseada em um contexto real, isto é, em uma necessidade. Desse modo, se a solução dessa equação envolvesse um

cálculo com raiz quadrada de um número negativo, o problema era abandonado e dizia-se simplesmente que não havia solução ou que a solução era impossível.

Vamos considerar um problema desse tipo, publicado no capítulo 37 do livro *Ars magna*, de Girolamo Cardano (1501-1576):

**Como dividir um segmento de 10 unidades em duas partes cujo produto é 40?**

Vamos indicar por  $x$  o comprimento de uma dessas partes, conseqüentemente, a outra será  $10 - x$ .

Figura 1.1 | Segmento de 10 unidades divididas em duas partes



Fonte: elaborada pelo autor.

Como o produto dessas partes é 40, o problema consiste em resolver a seguinte equação:

$$x \cdot (10 - x) = 40$$

Resolvendo essa equação por qualquer método, obtemos as soluções  $5 + \sqrt{-15}$  e  $x^3 + ax + b = 0$ , em unidades de comprimento, ou seja, envolvem o cálculo com raiz quadrada de um número negativo. De fato, Cardano admite no livro que esse problema não tem solução, pois  $\sqrt{-15}$  não faz sentido no conjunto dos números reais, mas, logo em seguida, ele supõe que as operações usuais nesse conjunto sejam válidas para esse caso e adiciona os dois valores da solução da equação  $x \cdot (10 - x) = 40$ :

$$5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 5 + 5 = 10$$

E ainda multiplica:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 + 5\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$$

Mostrando que satisfazem a condição do problema.

Ainda nesse livro, Cardano publicou uma fórmula resolutive para equações cúbicas do tipo  $x^3 + mx + n = 0$ , em que  $m > 0$  e  $n > 0$ , conhecida por **fórmula de Tartaglia-Cardano**.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$



Ficou curioso sobre o nome **fórmula de Tartália-Cardano**? Imaginou que Cardano foi o descobridor original dela? Saiba que há uma história interessante entre Cardano e o matemático Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557). Ela envolve conversas por cartas, juramentos e arrependimento.

Veja um trecho extraído do livro *História da matemática*, de Carl Benjamim Boyer:

Deve-se assinalar imediatamente, porém, que Cardano (ou Cardan) não foi o descobridor original da solução quer da cúbica quer da quártica. Ele próprio admitiu isso francamente em seu livro. A sugestão para resolver a cúbica, ele afirma, lhe tinha sido dada por Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557); a solução da quártica tinha sido descoberta primeiramente pelo antigo amanuense de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565). O que Cardano deixou de mencionar na *Ars magna* foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o segredo, pois esse último pretendia firmar sua reputação publicando a solução da cúbica como coroação de seu tratado sobre álgebra (BOYER, 1974, p. 206-207).



Sugerimos também a leitura do Capítulo 4 do livro intitulado *História da matemática*, da autora Tatiane Roque, disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788537809099/cfi/6/24!/4/462/2@0:0>>. Acesso em: 17 out. 2017.

Rafael Bombelli (1526-1572) estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos que levam a raízes de números negativos. Podemos afirmar que ele foi o primeiro a dar a devida importância e perceber que um novo tipo de número estava surgindo na Matemática. Admirador de Cardano, Bombelli utilizou a fórmula de Cardano para resolver a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , mesmo contrariando as condições iniciais para o uso da fórmula, pois  $m = -15 < 0$  e  $n = -4 < 9$  (BOYER, 1974).

Vejam os:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\end{aligned}$$

Note que o valor de  $x$  envolve o cálculo de  $\sqrt{-121}$ , que não está definido no conjunto dos números reais. No entanto, Bombelli supôs mesmo assim, no que ele chamou de "ideia louca", que as propriedades operatórias usuais são válidas e considerou ainda que os dois membros obtidos anteriormente poderiam ser escritos na forma  $a + \sqrt{b}$  e  $a - \sqrt{b}$ . Ele efetuou os cálculos e obteve  $a = 2$  e  $b = 1$ .

Com isso, as duas partes com  $\sqrt{-121}$  se anulariam:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Portanto, ele obteve  $x = 4$  como uma solução da equação, que pode ser facilmente verificada:

$$x^3 - 15x - 4 = 4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$$

Esse fato evidenciou o que Bombelli desconfiava: que existe realmente uma solução para uma equação envolvendo o cálculo da raiz quadrada de um número negativo em um dos membros, desde que fossem válidas as propriedades operatórias das operações, tais como comutativa, distributiva, entre outras.

Inspirados por esse trabalho, vários outros matemáticos se dedicaram ao estudo das raízes quadradas de números negativos, pois havia ainda muito a se investigar sobre esse novo conjunto que surgia.



### Refleta

Naquela época, o estudo com situações envolvendo o cálculo com raízes quadradas de números negativos parecia não ter significado prático, ou seja, situações impossíveis de se resolver na prática. Isso nos leva a refletir sobre o uso da palavra "imaginário" e "complexo" para descrever esse tipo de número, em sentido pejorativo.

Para simplificar a notação, em algum momento foi definido que o número  $i$  é a **unidade imaginária**, tal que  $i = \sqrt{-1}$ . Portanto, a expressão  $3 + \sqrt{-4}$ , por exemplo, passou a ser escrita por:

$$3 + \sqrt{4 \cdot (-1)} = 3 + 2\sqrt{-1} = 3 + 2i$$

Mais adiante veremos que essa forma é a representação algébrica de um número complexo.

## O conjunto dos números complexos

Como dito anteriormente, os conjuntos numéricos que os matemáticos consideravam eram apenas o conjunto dos **números naturais**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots\}$$

Para que a operação de subtração fizesse sentido, estenderam e obtiveram o conjunto dos **números inteiros**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Para que a operação de divisão também fizesse sentido, estenderam e obtiveram o conjunto dos **números racionais**:

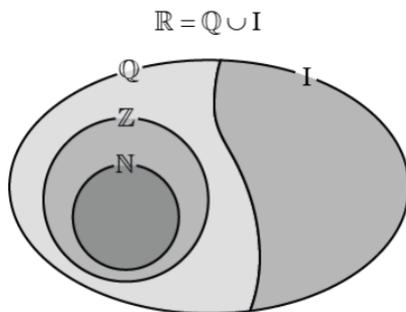
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Nesse conjunto a equação  $x^2 = 2$ , por exemplo, não fazia sentido, pois as soluções  $x = \sqrt{2}$  e  $x = -\sqrt{2}$  não pertencem ao conjunto  $\mathbb{Q}$ , então criaram o conjunto dos **números irracionais**, indicados por  $\mathbb{I}$ . Finalmente, da união dos racionais com os irracionais, surgiu o conjunto dos **números reais**:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Desse modo, podemos representar as relações  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  e  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  no seguinte diagrama de Venn.

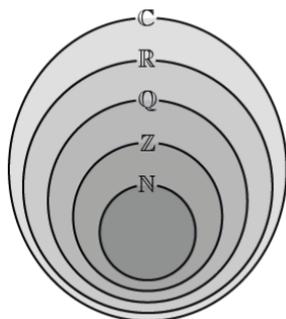
Figura 1.2 | Diagrama de Venn representando o conjunto dos números reais



Fonte: elaborada pelo autor.

Mas como explicado anteriormente, foi preciso novamente estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado conjunto dos **números complexos** ( $\mathbb{C}$ ), que também podem ser somados, multiplicados e extraídos à raiz quadrada de um número negativo.

Figura 1.3 | Diagrama de Venn representando o conjunto dos números complexos



Fonte: elaborada pelo autor.

### Representação algébrica: parte real e parte imaginária

Ao longo do tempo, os números complexos foram definidos de diversas formas. A mais comum é chamada de **forma algébrica** ou **forma binomial** de um número complexo.



**Assimile**

#### Forma algébrica

Todo número complexo  $z$  pode ser escrito na forma algébrica, de maneira única:

$$z = x + yi$$

Em que  $x$  e  $y$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária, isto é,  $i = \sqrt{-1}$  ou  $i^2 = -1$ .

Note que, nessa representação, o número tem duas partes, chamada de parte real de  $z$  e parte imaginária de  $z$ , indicadas por  $\text{Re}(z) = x$  e  $\text{Im}(z) = y$ , respectivamente:

$$z = x + yi$$

Parte real de  $z$ :  $\text{Re}(z)$

Parte imaginária de  $z$ :  $\text{Im}(z)$

$$z = x + yi$$

Parte real de  $z$ :  $\text{Re}(z)$  | Parte imaginária de  $z$ :  $\text{Im}(z)$

Veja outros exemplos:

- $z = 3 + 2i$ , tal que  $\text{Re}(z) = 3$  e  $\text{Im}(z) = 2$
- $z = -5 + i\sqrt{3}$ , tal que  $\text{Re}(z) = -5$  e  $\text{Im}(z) = \sqrt{3}$
- $z = 8$ , tal que  $\text{Re}(z) = 8$  e  $\text{Im}(z) = 0$
- $z = \frac{2}{3}i$ , tal que  $\text{Re}(z) = 0$  e  $\text{Im}(z) = \frac{2}{3}$
- $z = 3 + 2i$ , tal que  $\text{Re}(z) = 3$  e  $\text{Im}(z) = 2$

Por definição, quando a parte imaginária de um número complexo é nula, ou seja,  $\text{Im}(z) = 0$ , dizemos que o número é **real**. Por outro lado, quando a parte real de um número complexo é nula, isto é,  $\text{Re}(z) = 0$ , e a parte imaginária é diferente de zero, dizemos que o número é **imaginário puro**. Identifique esses casos nos exemplos anteriores.

### Representação geométrica: afixo, imagem geométrica ou vetor

Outra maneira de representar um número complexo  $z$  é por meio de um par ordenado de números reais.

A associação dos números complexos a pontos no plano cartesiano, de tal maneira que as partes real e imaginária correspondem à distância horizontal e vertical dos eixos cartesianos, respectivamente, é atribuída a três matemáticos: Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). No entanto, o trabalho de Wessel demorou quase cem anos para ser reconhecido, por isso o plano cartesiano em que esses números são representados é conhecido até hoje apenas como **plano de Argand-Gauss** ou simplesmente **plano complexo** (EVES, 2004).

Sobre a representação do número complexo em um plano cartesiano:

[...] fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que cada número complexo corresponde a um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas. (EVES, 2004, p. 524)



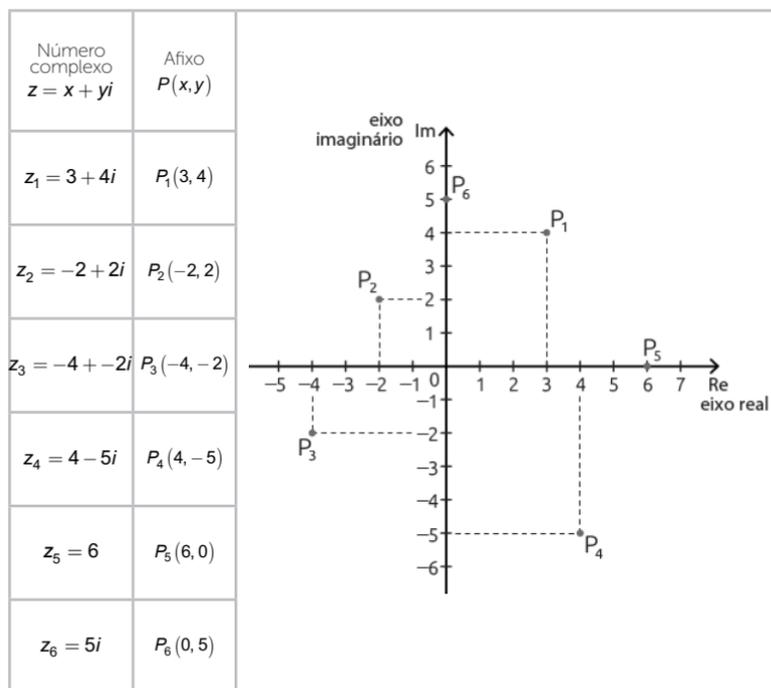
Como esse par ordenado representa um ponto no plano complexo, a cada ponto  $P(x,y)$  do plano, podemos associar um único número complexo  $z = x + yi$  e vice-versa.



### Exemplificando

Veja como podemos representar em um plano de Argand-Gauss os pontos (afixos) associados a alguns números complexos na forma algébrica.

Figura 1.4 | Pontos no plano de Argand-Gauss



Fonte: elaborada pelo autor.

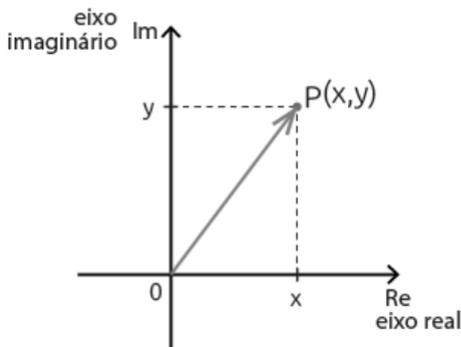


### Refleta

Sobre qual eixo estão localizados todos os números imaginários puros? E todos os números reais?

O número complexo  $z = x + yi$  também pode ser representado por um vetor com uma extremidade na origem  $(0,0)$  e outra no ponto de coordenadas  $(x,y)$ .

Figura 1.5 | Representação do vetor associado ao número complexo  $z = x + yi$



Fonte: elaborada pelo autor.

## Sem medo de errar

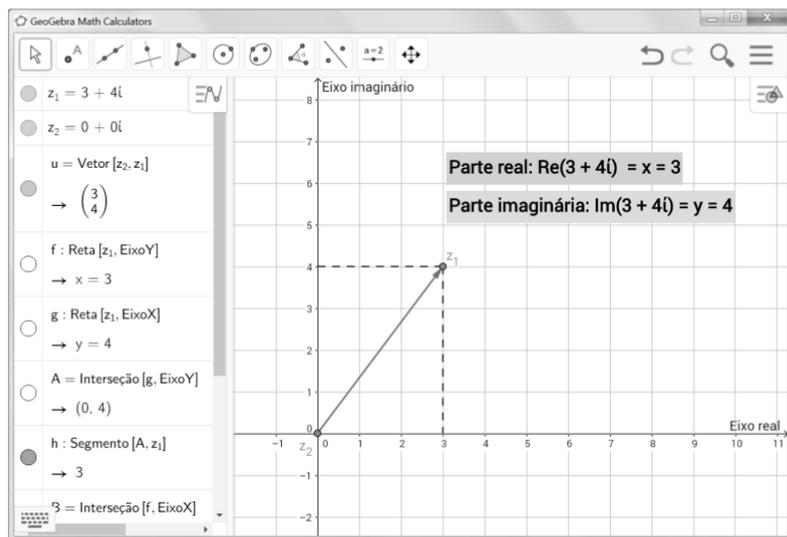
Após o estudo inicial dos números complexos, vamos retomar a situação hipotética apresentada no Convite ao estudo? Vamos lembrar! Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular que os alunos aprendam, você deve produzir um objeto virtual interativo com o objetivo de interpretar geometricamente um número complexo no plano de Argand-Gauss.

Descreva, em detalhes, as etapas de elaboração desse objeto, com base nos conteúdos desta seção. No GeoGebra, um número complexo é definido por meio da representação algébrica  $z = x + yi$  e pode ser representado na janela de visualização do programa se considerarmos que  $Y$  é o eixo imaginário e  $X$  é o eixo real. Isso acontece porque os números complexos são tratados como números "normais" na maioria das vezes e, além disso, as funções pré-definidas trabalham com argumentos de complexos, por exemplo, bastaria entrar com o comando `cos(5 + 2i)` que o programa o reconheceria. Por outro lado, na atual versão do programa ainda não é possível representar funções com esses números.

Para indicar o afixo correspondente ao ponto  $z = 3 + 4i$ , basta digitar no campo Entrada a expressão  $3 + 4i$  e pressionar Enter. Para auxiliar na visualização desse número, podemos utilizar um vetor que parte da origem  $0 + 0i$  e tem extremidade em  $3 + 4i$ . Para isso, primeiro definimos o ponto na origem digitando  $0 + 0i$  e, depois, criamos o vetor usando a ferramenta **Vetor** . Primeiro clicamos na origem e, em seguida, na extremidade. Também é interessante incluir na janela de visualização dois campos de **Texto**  para exibição, um para a parte real e outro para a parte imaginária do número complexo. Agora, com a ferramenta **Mover**  selecionada, é possível manipular o ponto sobre o plano, ao mesmo tempo em que são exibidos os valores da parte real e imaginária do número complexo.

Durante a construção, é importante utilizar várias imagens obtidas por captura de tela. Ao final, você deverá obter uma figura como exemplificada a seguir, na qual temos a representação do vetor correspondente ao número complexo  $z = 3 + 4i$ .

Figura 1.6 | Imagem obtida por captura de tela na representação do vetor correspondente ao número complexo  $z = 3 + 4i$  pelo software GeoGebra



Fonte: elaborada pelo autor, adaptada de GeoGebra <versão 6.03.374.0-offline>.

Que tal descrever com mais detalhes e utilizando várias imagens obtidas por captura de tela? O GeoGebra está disponível gratuitamente para *download* no endereço <<https://www.geogebra.org/download>>.

Acesso em: 18 out. 2017, para computadores, tablets e celulares. Também é possível realizar essa construção on-line, ou seja, sem a instalação do *software* no computador, utilizando o endereço <<https://www.geogebra.org/apps/>>. Acesso em: 18 out. 2017.

## Avançando na prática

### Um pouco mais de História da Matemática

#### Descrição da situação-problema

Suponha ainda que você é docente de certa turma do ensino médio. De fato a Matemática ainda se apresenta um tanto isolada das demais disciplinas, restrita apenas a poucas explorações relacionadas à História da Matemática. Na maioria das vezes recai ao isolamento, com suas teorias e definições apresentadas sem um apelo histórico do que levou à necessidade desse ou daquele resultado. Nessa perspectiva, com a História da Matemática temos a oportunidade de levar o aluno a ver e entender essa disciplina, tornando-a mais agradável. Ela pode estar presente na sala de aula em vários contextos, uma vez que acompanha a história da humanidade, mas nem todo aluno tem iniciativa própria ou acesso a livros especializados. Cabe, então, ao professor, em formação continuada, participar de cursos, leituras e pesquisas para melhorar a preparação de sua aula. Diante desse contexto, que tal aproveitar a fascinante história do surgimento dos números complexos e elaborar um plano de aula sobre a História da Matemática?

#### Resolução da situação-problema

Uma sugestão para uma abordagem por meio da História da Matemática é propor algumas questões para os alunos responderem, por exemplo:

1. Antigamente, uma equação precisava ter uma formulação baseada em um contexto real, isto é, em uma necessidade. Por mais simples que a situação pareça, poderia recair em uma equação envolvendo um cálculo com raiz quadrada de um número negativo. Qual foi o problema aparentemente simples que levou aos primeiros estudos sobre os números complexos? Onde e por quem ele foi publicado?
2. Qual é a equação quadrada associada ao problema da questão anterior? Explique como ele foi modelado.

- Por que a fórmula resolvente para equações cúbicas do tipo  $x^3 + mx + n = 0$ , em que  $m > 0$  e  $n > 0$  é conhecida por **fórmula de Tartália-Cardano**, embora tenha sido publicada apenas por Cardano?
- Quem foi Rafael Bombelli (1526-1572) e qual foi a sua contribuição no desenvolvimento do estudo dos números complexos?
- A que matemáticos é atribuída a representação dos números complexos no plano complexo? Como esse plano complexo é conhecido?
- Quem foi o responsável pela simplificação da notação da unidade imaginária  $i = \sqrt{-1}$  ou  $i^2 = -1$ ?
- Qual foi a contribuição do matemático alemão Karl Friedrich Gauss no desenvolvimento dos números complexos?

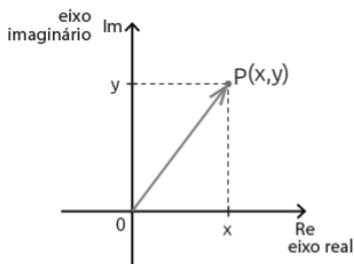
A maioria das questões anteriores pode ser resolvida com base nos conteúdos desta seção, outras precisam ser pesquisadas. Veja a resposta da primeira delas.

- O problema foi publicado no capítulo 37 do livro *Ars magna* de Girolamo Cardano (1501-1576) e tinha o seguinte enunciado: como dividir um segmento de 10 unidades em duas partes cujo produto é 40?

Que tal agora elaborar um plano de aula para arquivar as respostas das demais questões? Nele você também poderá elaborar outras questões que julgar interessantes e sugerir alguns livros ou sites para o aluno pesquisar.

## Faça valer a pena

- O número complexo  $z = x + yi$  também pode ser representado por um **vetor** com uma extremidade na origem (0,0) e outra no ponto de coordenadas (x,y)



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere os seguintes números complexos.

I)  $z = 2 + 6i$

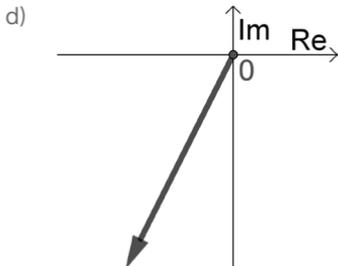
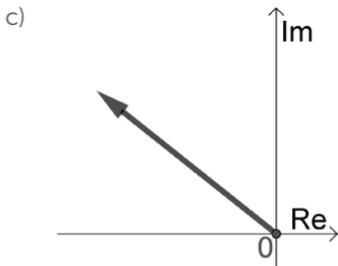
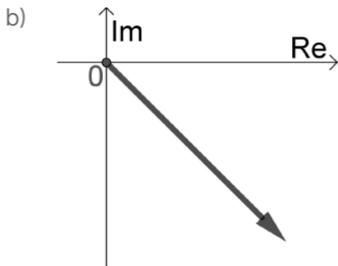
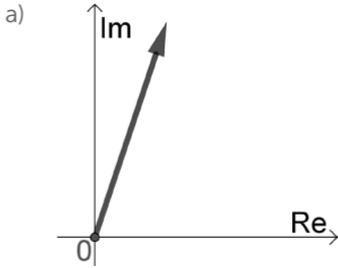
II)  $z = 5 - 5i$

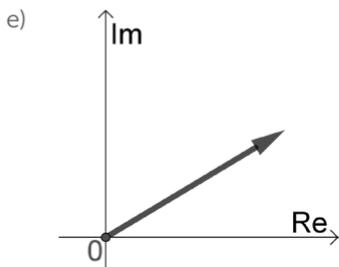
III)  $z = -5 + 4i$

IV)  $z = 5 + 3i$

V)  $z = -3 - 6i$

E os vetores representados no plano complexo:





Fonte: elaborada pelo autor.

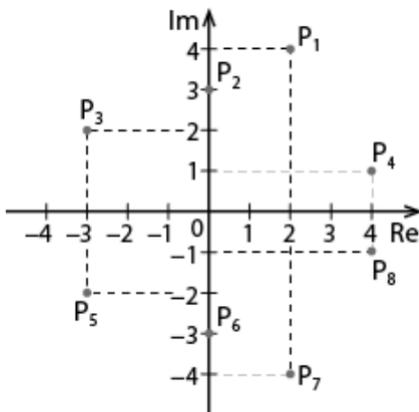
Assinale a alternativa que associa corretamente o número complexo à sua respectiva representação vetorial, com a letra e o símbolo romano correspondente.

- a) A - I; B - II; C - III; D - IV; E - V.
- b) A - I; B - II; C - III; D - V; E - IV.
- c) A - III; B - I; C - II; D - IV; E - V.
- d) A - II; B - III; C - I; D - V; E - IV.
- e) A - III; B - II; C - I; D - IV; E - V.

**2.** Considere as equações do segundo grau:

- I)  $2x^2 + 18 = 0$
- II)  $x^2 + 6x + 13 = 0$
- III)  $x^2 - 8x + 17 = 0$
- IV)  $\frac{x^2}{4} - x + 5 = 0$

E os seguintes afijos em um mesmo plano complexo:



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que associa corretamente as equações e os pontos de suas respectivas soluções no plano complexo, com o símbolo romano e os afijos correspondentes.

- a) I –  $P_2$  e  $P_6$ ; II –  $P_3$  e  $P_5$ ; III –  $P_4$  e  $P_8$ ; IV –  $P_1$  e  $P_7$ .
- b) I –  $P_1$  e  $P_7$ ; II –  $P_3$  e  $P_5$ ; III –  $P_4$  e  $P_8$ ; IV –  $P_2$  e  $P_6$ .
- c) I –  $P_1$  e  $P_7$ ; II –  $P_4$  e  $P_8$ ; III –  $P_3$  e  $P_5$ ; IV –  $P_2$  e  $P_6$ .
- d) I –  $P_4$  e  $P_8$ ; II –  $P_1$  e  $P_7$ ; III –  $P_3$  e  $P_5$ ; IV –  $P_2$  e  $P_6$ .
- e) I –  $P_4$  e  $P_8$ ; II –  $P_1$  e  $P_7$ ; III –  $P_2$  e  $P_6$ ; IV –  $P_3$  e  $P_5$ .

**3.** Por definição, quando a parte imaginária de um número complexo é nula, ou seja,  $\text{Im}(z) = 0$ , dizemos que o número é **real**. Por outro lado, quando a parte real de um número complexo é nula, isto é,  $\text{Re}(z) = 0$ , e a parte imaginária é diferente de zero, dizemos que o número é **imaginário puro**.

Assinale a alternativa que contém os valores de  $k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , para os quais o número complexo  $z = (k^2 - 9) + (k - 3)i$  é imaginário puro.

- a)  $k = 3$  ou  $k = -3$ .
- b)  $k = 3$ .
- c)  $k = -3$ .
- d)  $k = 9$ .
- e)  $k = -9$ .

# Seção 1.2

## Operações com números complexos

### Diálogo aberto

Na seção anterior estudamos um pouco a respeito do processo de construção de um “novo” conjunto numérico: os números complexos. Apresentada a definição formal e as representações algébrica e geométrica, agora conheceremos as operações elementares nesse conjunto: adição, subtração, multiplicação e divisão. Abordaremos ainda algumas propriedades operatórias conhecidas até então apenas no conjunto dos números reais. As operações de adição e subtração também serão exploradas na forma geométrica.

E falando em representação geométrica, vamos voltar à situação hipotética apresentada no Convite ao Estudo? Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular o que os alunos aprendem, você deve produzir um objeto virtual interativo com o objetivo de interpretar geometricamente as operações de adição e subtração com números complexos no plano de Argand-Gauss.

Você conseguiria descrever todas as etapas de elaboração desse objeto, com base nos conteúdos desta seção? Uma maneira de fazer isso é por meio de um plano de aula contendo o passo a passo da construção desse objeto, utilizando, sempre que possível, imagens obtidas por captura de tela do *software* GeoGebra.

### Não pode faltar

Antes de apresentar as operações, vamos definir a igualdade de dois números complexos. Para simplificar a notação, usaremos outras letras no lugar de  $x$  e  $y$  para representar a forma algébrica de um número complexo  $z = x + yi$ .

#### Igualdade de dois números complexos



#### Assimile

Dados dois números complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , eles são **iguais** se, e somente se, suas partes reais e partes imaginárias são respectivamente iguais, ou seja:

$$\underbrace{a + bi}_{z_1} = \underbrace{c + di}_{z_2} / \quad a = c \quad e \quad b = d$$

Por exemplo:

•  $z_1 = 4 - 2i$  é igual a  $z_2 = \frac{16}{4} - i\sqrt{4}$ , pois:

$$\operatorname{Re}(z_1) = 4 = \frac{16}{4} = \operatorname{Re}(z_2) \quad e \quad \operatorname{Im}(z_1) = -2 = -\sqrt{4} = \operatorname{Im}(z_2)$$

•  $z_1 = 3 - i$  não é igual a  $z_2 = 3 + i$ , pois:

$$\operatorname{Re}(z_1) = 3 = \operatorname{Re}(z_2), \quad \text{mas} \quad \operatorname{Im}(z_1) = -1 \neq 1 = \operatorname{Im}(z_2)$$



Refleta

Dados dois números complexos, além de afirmar se eles são iguais ou diferentes, podemos realizar a adição, subtração, multiplicação e divisão entre eles. No entanto, não podemos verificar se um é maior que o outro, ou seja, estabelecer uma relação de ordem entre eles. Em sua opinião, por que isso não é possível? Reflita!

### Operações elementares com números complexos

Usando a forma algébrica dos números complexos, as operações de adição, subtração e multiplicação são intuitivas e ocorrem de maneira similar àquela com que fazemos as expressões algébricas. É como se considerássemos  $i$  sendo uma variável qualquer, assim como  $x$  ou  $y$ . Por exemplo, na multiplicação, basta aplicar a propriedade distributiva já conhecida na multiplicação de binômios. No entanto, é preciso lembrar que  $i^2$  é um número real que vale  $-1$ .

Veja alguns exemplos:

$$\bullet (1+i) + (2+3i) = (1+2) + (1+3)i = 3 + 4i$$

$$\bullet (5-2i) + (3+4i) = (5+3) + [(-2)+4]i = 8 + 2i$$

$$\bullet 7i + (1-i) = (0+1) + [7+(-1)]i = 1 + 6i$$

$$\bullet (3+2i) - (5+4i) = (3-5) + (2-4)i = -2 - 2i$$

$$\bullet (8-3i) - (2+5i) = (8-2) + [(-3)-5]i = 6 - 8i$$

$$\bullet 6 - (2+i) = (6-2) + (0-1)i = 4 - i$$

$$\bullet (1+2i)(2+i) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot i + 2i \cdot 2 + 2i \cdot i =$$

$$= 2 + i + 4i + 2\underbrace{i^2}_{-1} = 2 + 5i - 2 = 5i$$

$$\begin{aligned}
 \bullet (3-4i)(5+7i) &= 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7i + (-4i) \cdot 5 + (-4i) \cdot 7i = \\
 &= 15 + 21i - 20i - 28 \underbrace{i^2}_{-1} = \\
 &= 15 + i + 28 = 43 + i
 \end{aligned}$$



## Pesquise mais

Você deve se recordar de uma questão da seção anterior que deixou os antigos matemáticos instigados na construção do “novo” conjunto numérico: como entender algebricamente uma soma  $a + bi$ , considerando que as parcelas  $a$  e  $bi$  são de espécies diferentes? Algo como somar laranjas e maçãs, atualmente.

Quem tomou para si essa difícil tarefa foi William Rowan Hamilton (1805-1865):



Foi num artigo de 1833, apresentado à Academia Irlandesa, que Hamilton introduziu a álgebra formal dos números complexos. Estes, segundo sua ideia básica, passavam a ser encarados como pares ordenados  $(a,b)$  de números reais, com os quais se operava segundo as leis

$$\begin{aligned}
 (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d) \\
 (a,b) \cdot (c,d) &= (ac-bd, ad+bc)
 \end{aligned}$$

Nessa ordem de ideias, um par  $(a,0)$  equivale ao número real  $a$ ; em particular  $(-1,0) = -1$ . Assim, fazendo  $i = (0,-1)$ ,  $i^2 = (0,-1) \cdot (0,-1) = (-1,0) = -1$ . Finalmente obtinha-se uma explicação lógica para o símbolo  $\sqrt{-1}$ .

Mas o que Hamilton tinha em vista quando colheu esses resultados era algo mais pretensioso (IEZI et al., 1993, p. 53).

Ficou curioso sobre o que Hamilton pretendia? Pesquise mais no site disponível em: <http://www.matematica.br/historia/hamilton.html>. Acesso em: 18 out. 2017.

Mesmo não sendo necessário decorar regras, vamos formalizar as três operações exemplificadas, destacando também os elementos oposto e neutro em  $\mathbb{C}$ .



Considere dois números complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ .

Para realizar a **adição**, adicionamos, separadamente, as partes reais e as partes imaginárias, ou seja:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} + \underbrace{(c + di)}_{z_2} = (a + c) + (b + d)i$$

O elemento  $0 + 0i = 0$  é chamado **elemento neutro para a adição**, que somado a qualquer complexo  $z$  dá como resultado o próprio  $z$ .

Para cada número complexo há um **elemento oposto** complexo, tal que a soma deles é zero, ou seja:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} + \underbrace{(-a - bi)}_{\text{elemento oposto de } z_1} = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

Para realizar a **subtração**, subtraímos, separadamente, as partes reais e as partes imaginárias, ou seja:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} - \underbrace{(c + di)}_{z_2} = (a - c) + (b - d)i$$

Para realizar a **multiplicação**, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação e fazemos  $i^2 = -1$ , ou seja:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} \underbrace{(c + di)}_{z_2} = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

O elemento  $1 + 0i = 1$  é chamado **elemento neutro para a multiplicação**, que multiplicado por qualquer complexo  $z$  dá como resultado o próprio  $z$ .



Represente em um plano de Argand-Gauss os afixos de um número complexo e de seu oposto. O que você pôde perceber sobre a posição deles em relação à origem?

### Conjugado de um número complexo

Entre as operações elementares, falta definir a divisão entre números complexos. Antes, porém, precisamos da propriedade do inverso multiplicativo de um número complexo, ou seja, um número  $\frac{1}{z}$  tal que  $\frac{1}{z} \cdot z = z \cdot \frac{1}{z} = 1$ , com  $z \neq 0$ . Mas qual, o significado de  $\frac{1}{z}$ ?

Para responder a essa pergunta, precisamos definir o **conjugado** de um número na forma  $z = a + bi$ , que nada mais é que o número na forma  $\bar{z} = a - bi$ , isto é, invertemos o sinal da parte imaginária.

Por exemplo:

- Se  $z = -1 + 2i$ , então  $\bar{z} = -1 - 2i$ .
- Se  $z = 3 - 7i$ , então  $\bar{z} = 3 + 7i$ .
- Se  $z = 4$ , então  $\bar{z} = 4$ .
- Se  $z = 5i$ , então  $\bar{z} = -5i$ .



**Refleta**

Agora, represente em um plano de Argand-Gauss os afixos de um número complexo e de seu conjugado. O que você pôde perceber sobre a posição deles em relação ao eixo  $y$ ? Em que casos temos  $z = \bar{z}$ ?

Uma característica interessante envolvendo um número complexo e seu conjugado é que o produto entre  $z$  e  $\bar{z}$  é igual a um número real não negativo, dado pela soma dos quadrados da parte real e imaginária de  $z$ . Vejamos:

$$z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - \underbrace{abi + abi}_{-1} - b^2 \underbrace{i^2}_{-1} = a^2 + b^2$$

Você deve se lembrar do problema que Cardano propôs em seu livro, apresentado na seção anterior: como dividir um segmento de 10 unidades em duas partes cujo produto é 40? Cardano obteve como resposta os números complexos  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ , em que um é conjugado do outro.

Usando a propriedade anterior, é fácil verificar que o produto desses números é de fato 40, pois é igual ao quadrado da parte real mais o quadrado da parte imaginária do primeiro número:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 + (\sqrt{15})^2 = 25 + 15 = 40$$

## Divisão com números complexos

Usando essa propriedade, agora podemos “transformar” a **divisão** de dois números complexos em uma **multiplicação** de números complexos divididos por um número real.



Dados dois números complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , com  $z_2 \neq 0$ , para realizar a divisão entre  $z_1$  e  $z_2$ , multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

Veja alguns exemplos:

$$\bullet \frac{3+4i}{2+i} = \frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i+8i-4i^2}{4-\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{10+5i}{5} = \frac{10}{5} + \frac{5}{5}i = 2+i$$

$$\bullet \frac{2+6i}{2-4i} = \frac{(2+6i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{4+8i-12i+24i^2}{4-16i^2} = \frac{-20+20i}{20} = -\frac{20}{20} + \frac{20}{20}i = -1+i$$

Perceba que nas operações com multiplicação e divisão com números complexos, utilizamos a igualdade  $i^2 = -1$ .

Vamos deduzir uma propriedade interessante que pode nos ajudar a calcular qualquer potência  $i^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Faremos isso de maneira recursiva, até o expoente 12:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
- $i^9 = i^8 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
- $i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^{12} = i^8 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Perceba que os valores de  $i^n$  se repetem a cada ciclo de 4 expoentes, isto é:

$$\bullet i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = 1$$

- $i^1 = i^5 = i^9 = i$
- $i^2 = i^6 = i^{10} = -1$
- $i^3 = i^7 = i^{11} = -i$

Portanto, sem efetuar cálculos sabemos que os próximos são  $i^{13} = i$ ,  $i^{14} = -1$  e  $i^{15} = -i$ .

Mas como você faria para calcular para um expoente qualquer, por exemplo,  $i^{62}$ ? Uma maneira é dividir o expoente por 4 e, se o resto for:

- 0, o valor é 1.
- 1, o valor é  $i$ .
- 2, o valor é  $-1$ .
- 3, o valor é  $-i$ .

Agora, efetue a divisão e calcule  $i^{62}$ .



### Exemplificando

Ao contrário do que você pode ter imaginado, a propriedade para  $i^n$  não é muito útil para calcular a potência de um número complexo na forma algébrica.

Nesse momento, para realizar um cálculo desse tipo, ainda devemos realizar uma multiplicação de fatores iguais. Por exemplo, para calcularmos  $z^3$ , com  $z = 2 + 3i$ , efetuamos:

$$\begin{aligned}
 z^3 &= z \cdot z \cdot z = \\
 &= (2 + 3i)(2 + 3i)(2 + 3i) = \\
 &= (4 + 6i + 6i + 9i^2)(2 + 3i) = \\
 &= (-5 + 12i)(2 + 3i) = \\
 &= -10 - 15i + 24i + 36i^2 = \\
 &= -46 + 9i
 \end{aligned}$$

Na próxima seção, veremos uma maneira mais prática de calcular potenciação de números complexos, dessa vez representando o número complexo na **forma trigonométrica**. Ela é chamada de **primeira fórmula De Moivre**.

## Sem medo de errar

Após o estudo inicial das operações fundamentais com números complexos, vamos retomar a situação hipotética apresentada no Convite ao estudo? Vamos lembrar! Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para

estimular o que os alunos aprendem, você deve produzir um objeto virtual interativo com o objetivo de interpretar geometricamente as operações de adição e subtração com números complexos no plano de Argand-Gauss. Descreva, em detalhes, as etapas de elaboração desse objeto, com base nos conteúdos desta seção.

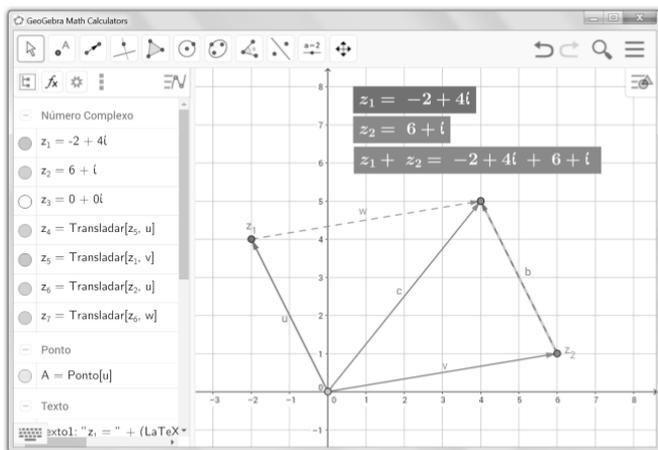
Assim como explicado na seção anterior, represente dois números complexos por vetores no plano de Argand-Gauss, digamos  $z_1 = -2 + 4i$  e  $z_2 = 6 + i$ . Depois, faça a translação do vetor  $z_1$ , fazendo com que a origem dele coincida com a extremidade de  $z_2$ . Para isso, com a ferramenta **Vetor a partir de um ponto**  selecionada, clique em  $z_1$  e depois na extremidade de  $z_2$ , não necessariamente na ordem descrita.

Desse modo, a solução geométrica de  $z_1 + z_2 = 4 + 5i$  é dada pelo vetor que tem como origem o ponto  $(0,0)$  e extremidade igual à do vetor  $z_1$  transladado.

Durante a construção, é importante utilizar várias imagens obtidas por captura da tela. Também é interessante incluir na janela de visualização dois campos de **Texto**  para a exibição dos vetores  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_1 + z_2$  na forma algébrica.

Ao final, você deverá obter uma figura como exemplificada a seguir, na qual os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{c}$  representam o número complexo  $z_1$ , o número complexo  $z_2$ , a translação de  $z_1$ , a translação de  $z_2$  e o número complexo  $z_1 + z_2$ , respectivamente.

Figura 1.7 | Imagem obtida por captura de tela na representação dos vetores correspondentes aos números complexos  $z_1 = -2 + 4i$ ,  $z_2 = 6 + i$  e  $z_1 + z_2 = 4 + 5i$  pelo software GeoGebra



Fonte: elaborada pelo autor, adaptada de GeoGebra <versão 6.03.374.0-offline>.

Note que, se ao invés de transladar o vetor  $\mathbf{z}_1$ , tivéssemos transladado o vetor  $\mathbf{z}_2$ , seguindo o mesmo procedimento, o resultado seria o mesmo. Desse modo, os quatro vetores formam, no plano complexo, um paralelogramo, e é por isso que esse procedimento é conhecido por **Regra do paralelogramo**.

Agora, com a ferramenta **Mover**  selecionada, é possível manipular  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  e verificar que a ideia da construção para  $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$  é mantida para quaisquer números complexos  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$ . Já para o caso da **subtração**, basta lembrar que  $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + (-\mathbf{z}_2)$  e proceder de maneira semelhante. Dessa vez, ao invés de  $\mathbf{z}_2$ , devemos representar seu **oposto**  $-\mathbf{z}_2$ .

Que tal descrever com mais detalhes e utilizando várias imagens obtidas por captura de tela? O GeoGebra está disponível gratuitamente para *download* no site: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 18 out. 2017. Também é possível realizar essa construção on-line, ou seja, sem a instalação do *software* no computador, utilizando o endereço: <<https://www.geogebra.org/apps/>>. Acesso em: 18 out. 2017.

## Avançando na prática

### Algumas propriedades dos números complexos

#### Descrição da situação-problema

Suponha ainda que você é docente de certa turma do ensino médio, que está estudando os números complexos, especificamente as propriedades operatórias da adição, da multiplicação e do conjugado desses números. Considere que, em uma das aulas, você propôs aos alunos que demonstrassem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas muitos deles demonstraram dificuldade. De modo geral, eles se confundem nas etapas em que é preciso remanejar termos para chegar à expressão final.

Que tal elaborar um plano de aula com o objetivo de proporcionar uma apreensão significativa das demonstrações matemáticas envolvendo as propriedades operatórias dos números complexos?

#### Resolução da situação-problema

Ao definir as operações de adição e multiplicação com números complexos, é possível verificar algumas propriedades que facilitam cálculos envolvendo esses números.

Vamos listar algumas delas, válidas para todo  $z_1, z_2$  e  $z_3$  em  $\mathbb{C}$  :

1. Associativa da adição:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
2. Associativa da multiplicação:  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Comutativa da adição:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
4. Comutativa da multiplicação:  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
5. Distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

6. Propriedades do conjugado:

- a.  $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$
- b.  $z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i$
- c.  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- d.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- e.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Para demonstrar a propriedade (5), proposta na descrição da situação-problema, vamos utilizar, de maneira recursiva, a definição de multiplicação  $\underbrace{(a + bi)}_{z_1} \underbrace{(c + di)}_{z_2} = (ac - bd) + (ad + bc)i$ . Vejamos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + di) + (e + fi)] = \\ &= (a + bi)[(ce - df) + (cf + de)i] = \\ &= a(ce - df) - b(cf + de) + [a(cf + de) + b(ce - df)]i = \\ &= ace - adf - bcf - bde + (acf + ade + bce - bdf)i = \\ &= (ac - bd)e - (ad + bc)f + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i = \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) = \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

Agora, elabore um plano de aula para arquivar a demonstração dessa e de outras propriedades.

Se julgar conveniente, ao invés de utilizar a forma algébrica  $z = a + bi$ , você pode representar o número complexo por um par ordenado de números reais  $(a, b)$ , como foi sugerido por Hamilton no item Pesquise mais desta unidade.

## Faça valer a pena

**1.** Dados dois números complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , com  $z_2 \neq 0$ , para realizar a **divisão** entre  $z_1$  e  $z_2$ , devemos **multiplicar** o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

Com base nisso, assinale a alternativa que contém o valor de  $a$  para que o resultado da divisão  $\frac{-3+2i}{a-i}$  seja real.

a)  $\frac{2}{3}$

c) 1

e)  $\frac{1}{3}$

b)  $\frac{3}{2}$

d)  $\frac{1}{2}$

**2.** Sabemos que, para realizar uma **divisão** com números complexos, devemos **multiplicar** o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Então, considere um número complexo na forma algébrica  $z = a + bi$ . Considere ainda que  $z \neq 0$ , assim seu conjugado  $\bar{z}$  também é diferente de zero.

Assinale a alternativa que contém o inverso multiplicativo de  $Z$ , que pode ser indicado por  $z^{-1}$  ou  $\frac{1}{z}$ , tal que  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ .

a)  $\frac{z}{a^2 + b^2}$

d)  $\frac{\bar{z}}{a + b}$

b)  $\frac{z^2}{a^2 + b^2}$

e)  $\frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

c)  $\frac{z}{(a+b)^2}$

**3.** Uma equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  tal que  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  só admite solução **no** conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , pois nele consideramos  $i = \sqrt{-1}$ . Nesse caso, a solução é dada por um par de números complexos conjugados.

Assinale a alternativa que contém o par de números complexos conjugados que é solução da equação quadrática  $x^2 + 4x + 5 = 0$ .

a)  $2 + i$  e  $2 - i$

b)  $-2 + i$  e  $2 - i$

c)  $-1 + 2i$  e  $-1 - 2i$

d)  $-2 + i$  e  $-2 - i$

e)  $2 + i$  e  $-2 - i$

## Seção 1.3

### Forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo

#### Diálogo aberto

Conforme estudamos nas seções anteriores, os números complexos podem ser representados de várias formas. Até agora, vimos a forma algébrica  $z = x + yi$  e a forma geométrica, por meio de um par ordenado de números reais  $(x, y)$ , que são as **coordenadas cartesianas** do ponto  $Z$ . Foi Jean Robert Argand (1768-1822) e Karl Friedrich Gauss (1777-1855) que, de forma independente e em épocas distintas, tiveram a mesma ideia para a representação geométrica, e só usavam a notação  $(x, y)$ . É por isso que o plano complexo é conhecido por **plano de Argand-Gauss** (BOYER, 1974).

Mas qual é a vantagem em representar geometricamente um número complexo no plano? Veja um trecho extraído do livro *Introdução à história da matemática*, de Howard Eves:

A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo, como as coordenadas retangulares de um ponto do plano, fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas (EVES, 2004).



Ainda respondendo à pergunta anterior, o conjunto dos números reais representa, em sua totalidade e geometricamente, uma **reta**, à qual podemos associar apenas dois parâmetros: um sentido e a distância dos pontos até a origem. Já os números complexos, por sua vez, representam todo um **plano**. Nesse caso, a principal vantagem é que, no plano de Argand-Gauss, podemos associar a cada número complexo um segmento, ao qual é possível determinar o comprimento e o ângulo formado com o eixo das abscissas. Nesta seção veremos

que esses parâmetros, que são as **coordenadas polares** do ponto  $z$ , permitem representar um número complexo na **forma trigonométrica** ou **forma polar**.

E falando em comprimento e ângulo de um segmento, vamos voltar também à situação hipotética apresentada no Convite ao estudo? Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular o que os alunos aprendem, você deve produzir um objeto virtual interativo, com o objetivo de explorar novamente a interpretação geométrica, dessa vez relacionada à ideia de rotação de um ponto no plano de Argand-Gauss.

Você conseguiria descrever todas as etapas de elaboração desse objeto, com base nos conteúdos desta seção? Uma maneira de fazer isso é por meio de um plano de aula contendo o passo a passo da construção desse objeto, utilizando, sempre que possível, imagens obtidas por captura de tela do *software* GeoGebra.

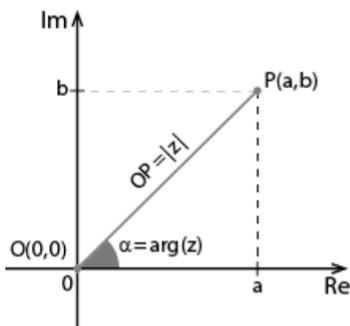
## Não pode faltar

### Módulo de um número complexo

Vamos considerar um número complexo  $z = a + bi$ , cuja representação geométrica é o ponto  $P(a,b)$  no plano de Argand-Gauss. Consideramos ainda um segmento  $\overline{OP}$ , tal que  $O$  é a origem do plano. Desse modo, podemos calcular o **comprimento** de  $\overline{OP}$  e o **ângulo** formado entre ele e o eixo real, no sentido anti-horário.

Em linguagem vetorial, o comprimento do segmento  $\overline{OP}$  é chamado de **módulo** do número complexo  $z$ , o qual indicamos por  $|z|$ . Já o ângulo  $\alpha$ , tal que  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , é chamado de **argumento** de  $z$ , o qual indicamos por  $\arg(z)$ .

Figura 1.8 | Módulo e argumento de um número complexo  $z$  trigonométrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o comprimento, vamos adotar que a unidade de medida é a mais intuitiva, ou seja, a unidade que separa dois números inteiros consecutivos de cada eixo.

Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos calcular o comprimento de  $\overline{OP}$ :

$$(\overline{OP})^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

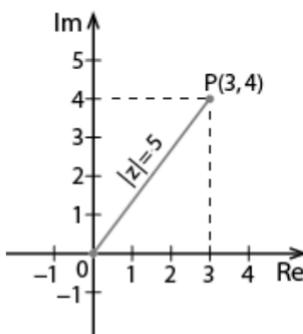
Veja alguns exemplos:

- $z = 3 + 4i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

O segmento  $\overline{OP}$  mede 5 unidades.

Figura 1.9 | Módulo de  $z = 3 + 4i$



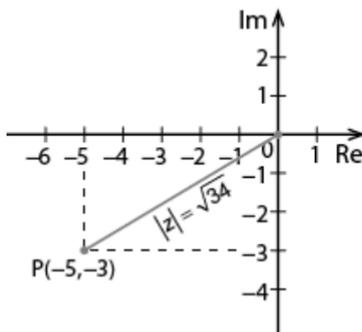
Fonte: elaborada pelo autor.

- $z = -5 - 3i$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

O segmento  $\overline{OP}$  mede  $\sqrt{34}$  unidades

Figura 1.10 | Módulo de  $z = -5 - 3i$



Fonte: elaborada pelo autor.

Ainda em relação ao módulo de um número complexo, temos algumas propriedades:

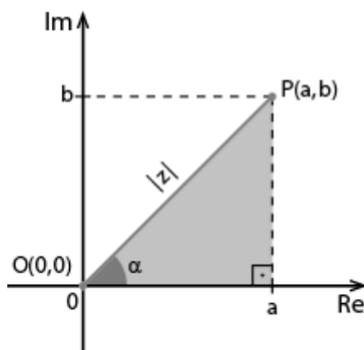
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , com  $z_2 \neq 0$

A demonstração de cada uma delas fica como exercício.

### Forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo

Agora, vamos relacionar o módulo de  $z$  com o ângulo formado entre  $\overline{OP}$  e o eixo real, no sentido anti-horário, ou seja, o argumento de  $z$ .

Figura 1.11 | Triângulo retângulo obtido pelo ponto  $P(a,b)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Já deve ser do seu conhecimento que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \text{sen } \alpha$$

Substituindo esses valores na forma algébrica  $z = a + bi$ , temos:

$$z = a + bi = |z| \cdot \cos \alpha + |z| \cdot \text{sen } \alpha \cdot i = |z|(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$$

Portanto:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$$

Essa representação é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo  $z$ .

## Multiplicação, divisão e potenciação de números complexos na forma trigonométrica

Vamos estudar algumas operações com números complexos na forma trigonométrica. Antes, porém, vamos lembrar duas fórmulas de transformação:

Senos da soma e da diferença:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (\text{II})$$

Cossenos da soma e da diferença:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (\text{III})$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (\text{IV})$$

Agora, considere os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ :

$$z_1 = |z_1|(\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$$

O produto  $z_1 \cdot z_2$  é dado por:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \cdot |z_2|(\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2) \\ &= |z_1||z_2| \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + i^2 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \\ &= |z_1||z_2|[\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2] \end{aligned}$$

Fazendo a substituição das fórmulas de transformação (I) e (III), fica:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Portanto, o produto de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  escritos na forma trigonométrica é o número complexo  $z_1 \cdot z_2$ , cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à primeira volta, isto é,  $0 \leq \alpha_1 < 2\pi$  e  $0 \leq \alpha_2 < 2\pi$ . Em outras palavras, basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos.

De maneira recursiva, podemos generalizar para  $n$  os números complexos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n = |z_1||z_2||z_3| \cdots |z_n|[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)]$$

Considerando  $z = z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n$  e, conseqüentemente,  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n$ , essa fórmula nos levará à potenciação de números complexos na forma trigonométrica:

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z = |z||z||z| \cdots |z|[\cos(\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha)]$$

Portanto:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$$

Então, podemos dizer que a potência de ordem  $n$  de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a  $n$  e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por  $n$ , reduzido à primeira volta, isto é,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Em outras palavras, basta calcular a potência dos módulos e somar seus argumentos.



**Assimile**

Para um número complexo na forma trigonométrica  $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ , a potência  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é dada por:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$$

Essa relação é conhecida como **1ª fórmula de De Moivre**.

De maneira semelhante à demonstrada para a multiplicação, e a partir da substituição das fórmulas de transformação (II) e (IV), podemos mostrar que o quociente  $\frac{z_1}{z_2}$ , com  $z_2 \neq 0$ , é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Outra maneira de mostrar essa relação é verificar que o produto entre  $z_2$  e a expressão  $\frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$  é igual a  $z_1$ . Escolha um desses métodos e faça a demonstração mencionada.

Portanto, o quociente de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  escritos na forma trigonométrica é o número complexo  $\frac{z_1}{z_2}$ , cujo módulo é igual ao quociente dos módulos e cujo argumento é igual à diferença dos argumentos, reduzida à primeira volta, isto é,  $0 \leq \alpha_1 < 2\pi$  e  $0 < \alpha_2 < 2\pi$ . Em outras palavras, basta dividir os módulos e subtrair seus argumentos.



Considerando os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  como pontos no plano, a definição de módulo nos permite estabelecer algumas conexões interessantes com a Geometria analítica. Uma delas é que o módulo da diferença entre esses pontos representa a distância entre eles:

$$|z - w| = d(z, w) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$



Você deve saber que as imagens na tela de um computador ou televisão são formadas por pequenos pontos, chamados *pixels*. Se a imagem de resolução da tela é  $800 \times 600$  *pixels*, por exemplo, ela tem  $800 \cdot 600 = 480\,000$  *pixels* organizados em 800 colunas e 600 linhas. Quando essa imagem é refletida, rotacionada ou sua escala é alterada, na verdade está “mudando” a posição dos *pixels* que a formam. Basicamente essas transformações se resumem a quatro: **rotação**, **reflexão**, **escala** e **translação**.

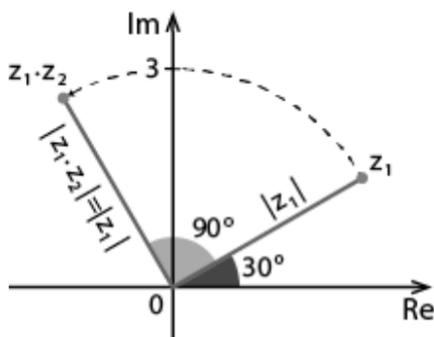
Podemos considerar esses *pixels* como sendo pontos de um plano cartesiano. A rotação de um ponto no plano, por exemplo, é uma interessante aplicação da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, pois multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Em outras palavras, se um ponto  $(a, b)$  deve ser rotacionado no plano de Argand-Gauss, em relação à origem em  $\alpha$  graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo  $a + bi$  pelo complexo  $1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ .

Considerando, por exemplo, os números complexos  $z_1 = 3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$  e  $z_2 = 1(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ , e calculando  $z_1 \cdot z_2$ , temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)] \cdot [1(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)] \\ &= 3 \cdot 1 [\cos(30^\circ + 90^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + 90^\circ)] \\ &= 3(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \end{aligned}$$

Veja que o número complexo  $z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$  possui módulo igual ao de  $z_1$ , pois  $|z_2| = 1$ . Além disso, como o argumento de  $z_1 \cdot z_2$  é a soma dos argumentos de  $z_1$  e  $z_2$ , a representação geométrica de  $z_1 \cdot z_2$  é igual à de  $z_1$  rotacionada  $90^\circ$  em torno da origem, no sentido anti-horário.

Figura 1.12 | Representação geométrica da rotação de  $Z_1 = 3 \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$  em torno da origem, no sentido anti-horário, pela multiplicação por  $Z_2 = 1 \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$



Fonte: elaborada pelo autor.

De modo geral, se um ponto  $P$  representa um número complexo  $z_1$  no plano de Argand-Gauss, para rotacionarmos ele em  $\alpha$  graus em torno da origem, no sentido anti-horário, multiplicamos  $z_1$  pelo número complexo  $z_2 = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ .



Pesquise mais

Os números complexos surgiram como uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da Álgebra. Em algum momento da História da Matemática notou-se que, para resolver equações que envolvessem raízes quadradas de números negativos, somente os números reais não eram suficientes e, portanto, algo a mais era necessário. A partir de Cardano, muitos foram os anos de estudos, com contribuições de diversos matemáticos, como a formalização rigorosa de Gauss, até surgirem os números complexos e toda a teoria matemática que estudamos até aqui.

Além de possuírem grande aplicação na área da Matemática, em que são estudados em geometria analítica, álgebra linear, etc., sem a presença deles, hoje, seria impossível imaginar o desenvolvimento de algumas áreas como engenharia, aerodinâmica, mecânica dos fluidos, física quântica, eletromagnetismo, relatividade, teoria do caos, dentre outras.

No link <<http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC2.pdf>> (acesso em: 18 out. 2017) você pode consultar um tópico específico com algumas aplicações dos números complexos, mesmo que não tão imediatas ou simples, o que não minimiza a importância desse assunto.

## Sem medo de errar

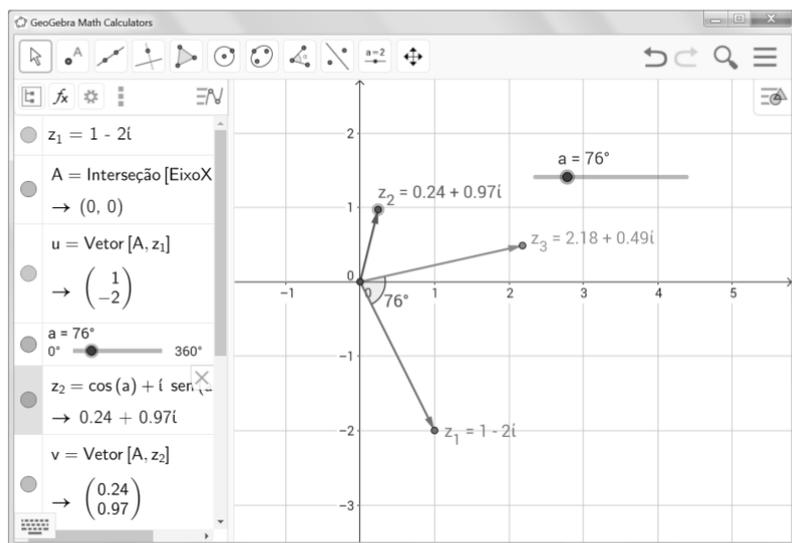
Após o estudo da forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo, vamos retomar a situação hipotética apresentada no Convite ao estudo? Vamos relembrar! Suponhamos que você é docente de certa turma do ensino médio em início de carreira. Para estimular o que os alunos aprendem, você deve produzir um objeto virtual interativo com o objetivo de interpretar a ideia de rotação de um ponto no plano de Argand-Gauss, como apresentado no item “Exemplificando”.

Com base nisso, descreva, em detalhes, as etapas de elaboração dessa representação com o auxílio do GeoGebra. Por exemplo, para rotacionar um ponto  $P$  correspondente ao número complexo  $z_1 = 1 - 2i$ , defina esse número digitando  $1 - 2i$  no campo **Entrada**. Em seguida, represente o vetor associado a ele. Em seguida, utilizando a ferramenta **Controle Deslizante** , crie o ângulo  $a$  com intervalo de variação de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Depois, defina o número complexo  $z_2 = 1(\cos a + i \operatorname{sen} a)$  digitando  $1 * \cos(a) + i * \sin(a)$  no campo **Entrada**. Por fim, você vai definir o número complexo  $z_3$  digitando  $z_1 * z_2$  no campo **Entrada**. Modifique as propriedades dos pontos para exibir o nome e o valor. Também é importante representar os vetores associados a  $z_2$  e  $z_3$ , além do ângulo formado entre  $z_1$  e  $z_3$ .

Agora é possível mover o controle deslizante e verificar que o número  $z_2 = 1(\cos a + i \operatorname{sen} a)$  é responsável por rotacionar o número  $z_1 = 1 - 2i$  em torno da origem, no sentido anti-horário. O resultado dessa rotação é o próprio número complexo  $z_3 = z_1 \cdot z_2$ . Note que o argumento de  $z_3$  corresponde ao ângulo de rotação também exibido no controle deslizante. Para verificar que essa rotação é válida para qualquer ponto, basta mudar a posição do número complexo  $z_1$  com a ferramenta **Mover**  selecionada.

Durante a construção, é importante utilizar várias imagens obtidas por captura da tela. Ao final, você deverá obter uma figura como exemplificada a seguir, na qual temos a representação dos vetores correspondentes aos números complexos  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 1(\cos 76^\circ + i \operatorname{sen} 76^\circ) \simeq 0,24 + 0,97i$  e  $z_3 = z_1 \cdot z_2 \simeq 2,18 + 0,49i$ .

Figura 1.13 | Imagem obtida por captura de tela do software GeoGebra, na representação da rotação do vetor  $Z_1$  de acordo com o ângulo indicado no controle deslizante



Fonte: elaborada pelo autor, a partir de GeoGebra <versão 6.03.374.0-offline>.

Que tal descrever com mais detalhes e utilizando várias imagens obtidas por captura de tela? O GeoGebra está disponível gratuitamente para *download* no site disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 18 out. 2017, para computadores, *tablets* e celulares. Também é possível realizar essa construção on-line, ou seja, sem a instalação do *software* no computador, utilizando o endereço: <<https://www.geogebra.org/apps/>>. Acesso em: 18 out. 2017.

Agora que você elaborou três objetos virtuais com o objetivo de explorar os conceitos estudados nas respectivas seções desta unidade, sistematize a sucessão de três planos de aula em um único arquivo, sugerindo o aproveitamento de um objeto para a construção do seguinte. Durante esse processo, você pode aproveitar para explorar outras propriedades dos números complexos.

## Avançando na prática

### Segunda fórmula de De Moivre

#### Descrição da situação-problema

Suponha ainda que você é docente de certa turma do ensino médio, que está estudando a forma trigonométrica ou polar dos

números complexos, especificamente a primeira fórmula de De Moivre. Considere que, em uma das aulas, você propôs aos alunos que pesquisassem e demonstrassem a segunda fórmula de De Moivre, mas muitos deles demonstraram dificuldade. De modo geral, eles se confundem nas operações envolvendo módulo e argumento de um número complexo na forma trigonométrica. Que tal elaborar um plano de aula com o objetivo de proporcionar uma apreensão significativa dessa fórmula?

### Resolução da situação-problema

A **1ª fórmula de De Moivre** permite calcular a potência  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , para um número complexo na forma trigonométrica  $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ , por meio da seguinte relação:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$$

Já a **2ª fórmula de De Moivre** está relacionada com a radiciação de números complexos na forma trigonométrica. Vamos calcular a raiz enésima  $\sqrt[n]{z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Calcular essa raiz significa determinar um número complexo  $w$  tal que  $w^n = z$ , isto é:

$$w^n = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Vamos considerar  $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ , então:

$$w^n = z \Rightarrow [|w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^n = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Ora, podemos utilizar a 1ª fórmula de De Moivre no primeiro membro, que fica:

$$|w|^n (\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Chegamos, então, em uma igualdade de números complexos na forma algébrica. Para que a igualdade seja verdadeira, é preciso que os módulos sejam iguais e os argumentos sejam ângulos congruentes. Então:

- $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $n\beta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$

Com isso, podemos reescrever a seguinte igualdade, agora com  $w$  em função de  $k$ :

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Que é conhecida como **2ª fórmula de De Moivre**. Analisando os valores de  $k$ , podemos verificar que os valores de  $w_k$  começam a se repetir após  $k = n - 1$ , pois recaem em argumentos cômgruos. Portanto, qualquer número complexo  $Z$ , não nulo, admite  $n$  raízes distintas, uma para cada valor de  $k$  variando de 0 a  $n - 1$ .

Que tal agora elaborar um plano de aula para arquivar essa demonstração? Nele você também poderá elaborar e responder a algumas questões sugeridas para o aluno, por exemplo, para determinar e interpretar  $\sqrt[4]{1+i}$ .

## Faça valer a pena

**1.** Um número complexo  $Z$  pode ser representado na forma algébrica  $z = a + bi$ , na forma geométrica  $(a, b)$  ou na forma trigonométrica  $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ , em que  $|z|$  é o módulo de  $Z$ , e  $\alpha$  é o argumento de  $Z$ . Assinale a alternativa que contém os números complexos  $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$  e  $z_2 = 8\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$  na forma algébrica e geométrica.

- a)  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  e  $z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$ ;  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $(-4\sqrt{3}, -4)$   
 b)  $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$  e  $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ ;  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $(4\sqrt{3}, -4)$   
 c)  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  e  $z_2 = -4\sqrt{3} + 4i$ ;  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $(-4\sqrt{3}, 4)$   
 d)  $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  e  $z_2 = -4\sqrt{3} + 4i$ ;  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $(-4\sqrt{3}, 4)$   
 e)  $z_1 = 2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$  e  $z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$ ;  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $(-4\sqrt{3}, -4)$

**2.** Considere os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}$ :

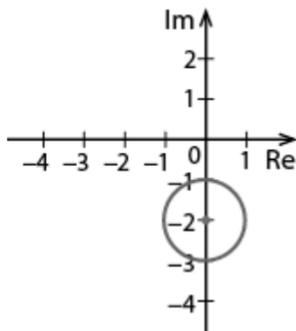
I)  $S_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 4\}$

II)  $S_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z + 2i| = 1\}$

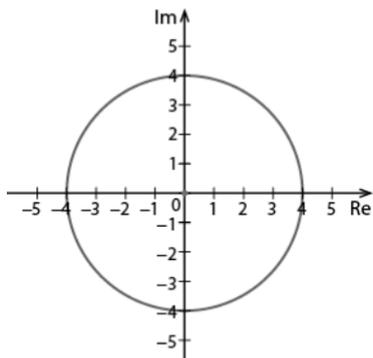
III)  $S_3 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| \leq 3\}$

E as seguintes circunferências ou círculos no plano de Argand-Gauss:

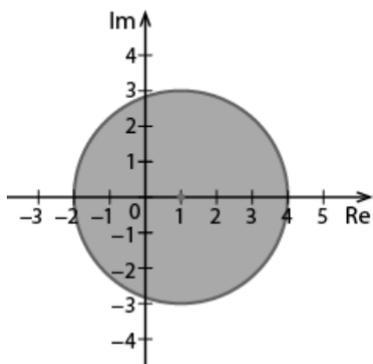
a)



b)



c)



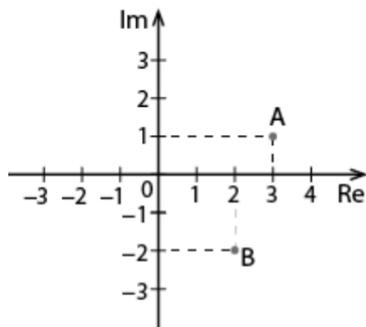
Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que contém a associação entre o subconjunto de  $\mathbb{C}$  e a sua representação geométrica, com a letra e o símbolo romano correspondente.

- a) I – A; II – B; III – C
- b) I – B; II – A; III – C
- c) I – B; II – C; III – A
- d) I – A; II – C; III – B
- e) I – C; II – B; III – A

**3.** No plano de Argand-Gauss representado na figura a seguir, os pontos  $A$  e  $B$  representam os afixos dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ .

Representação dos pontos  $A$  e  $B$  associados aos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa que contém o módulo do produto entre os conjugados de  $z_1$  e  $z_2$ , ou seja,  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

- a)  $\sqrt{10}$
- b) 6
- c) 10
- d)  $4\sqrt{5}$
- e)  $8\sqrt{2}$

# Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios, equações. São Paulo: Atual, 1993. v. 6.

ROQUE, Tatiane. **História da matemática**. Zahar, 2012. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788537809099/cfi/6/24!/4/462/2@0:0>>. Acesso em: 18 out. 2017.



# Séries

## Convite ao estudo

Um engenheiro utiliza modelos matemáticos para estudar fenômenos e projetos em sua rotina de trabalho. Os modelos matemáticos permitem que o engenheiro simule a realidade, adquirindo conhecimento sobre sistemas reais de forma muito mais prática e barata. Tais modelos matemáticos podem ser, por exemplo, funções matemáticas ou equações diferenciais.

Nesta unidade você estudará séries, séries de potências, Taylor, MacLaurin, séries de Fourier e como aplicar séries de Fourier na resolução de uma determinada classe de equações diferenciais.

Para relacionar esses tópicos com sua atividade profissional, suponha que você foi contratado como consultor para uma empresa que produz softwares técnico-científicos para engenheiros. Neste projeto, você deverá apresentar a fundamentação teórica para problemas de aproximação numérica de funções por meio de séries e polinômios de Taylor. Este estudo teórico será utilizado para construir o código-fonte do software. Em algumas situações práticas o usuário do software deverá inserir uma precisão pré-especificada no programa dentro da qual a aproximação numérica será válida.

Por exemplo, suponha que, no caso das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f(x) = \text{cos}(x)$  ou  $f(x) = e^x$ , queiramos determinar o valor de algumas dessas funções em um determinado ponto  $x = x_0$  com um determinado número de casas decimais corretas. Como proceder? Esse é um tipo de problema que você estudará nesta unidade.

Outro problema que você estudará nesta unidade é o problema de obter a solução aproximada por meio das séries de Fourier, para equações diferenciais que modelam circuitos elétricos sujeitos a uma força eletromotriz  $E(t)$ .

Vejamos, a seguir, de forma sucinta, o que será tratado em cada seção desta unidade.

Na primeira seção apresentaremos a definição do que é uma série e os principais testes para verificar se uma série é convergente. Em seguida estudaremos um tipo específico de série: as séries de potências e, logo na sequência, estudaremos as séries de Taylor e de MacLaurin. Finalmente, na última subseção desta primeira seção, trataremos dos polinômios de Taylor e de seu uso na aproximação numérica de valores de funções com uma precisão pré-definida.

Na segunda seção desta unidade estudaremos as séries de Fourier: sua definição, sob quais condições esses tipos de séries convergem, a determinação de séries de Fourier para funções pares, ímpares e periódicas. Por fim, nesta seção ainda estudaremos a forma complexa das séries de Fourier.

Na terceira e última seção desta unidade, veremos como aplicar o que aprendemos sobre séries de Fourier para determinar solução de equações diferenciais bastante usadas na engenharia.

# Seção 2.1

## Séries, séries de potências, séries de Taylor e MacLaurin

### Diálogo aberto

Muitos problemas da Engenharia e da Tecnologia não possuem uma “fórmula fechada” para a solução. Em Matemática, quando não temos uma fórmula fechada, é impossível obter a resposta para o problema em questão simplesmente substituindo valores numéricos em uma fórmula. Temos, obrigatoriamente, que utilizar métodos de aproximação, o que é bastante comum em equações diferenciais: a maior parte das equações diferenciais só pode ser resolvida por métodos aproximados.

Muitas vezes os engenheiros, físicos, matemáticos ou economistas, modelam um problema usando uma equação diferencial. Contudo, não é possível determinar uma fórmula fechada para determinar a solução da equação diferencial. Assim, determinamos a solução apenas por meio de aproximações com alguma ferramenta numérica. Uma das ferramentas mais usadas desde os tempos primórdios do cálculo diferencial e integral são as séries. E aqui entramos na primeira seção desta unidade.

Apresentamos o que são as Séries na primeira subseção e os principais testes para decidir se uma série é convergente ou divergente: teste da integral, da comparação, da raiz e da razão.

Na subseção seguinte tratamos das séries de potências (um tipo particular de série).

Continuando, na próxima subseção, apresentamos as séries de Taylor e MacLaurin, que formam a base teórica para tratar a aproximação de funções em problemas de engenharia e física. Assim, são particularmente importantes para seu trabalho como consultor da empresa de produção de softwares técnicos para uso de engenheiros.

Por fim, na última subseção, tratamos dos polinômios de Taylor e de seu uso na determinação de valores numéricos de funções como seno, cosseno, exponencial, raízes e outras.

Dentro do contexto do seu trabalho de consultoria para a empresa que vai produzir o software científico a ser utilizado por engenheiros e técnicos especializados, você foi incumbido de apresentar os fundamentos teóricos de determinadas ferramentas matemáticas que serão adotadas por esse software.

Neste momento você foi encarregado de apresentar estudos sobre aproximação de funções por séries de Taylor e Maclaurin. Dada a importância das funções seno e cosseno em fenômenos periódicos e problemas de condução do calor, a questão que você deve investigar é: como determinar até qual valor de  $x$  podemos aproximar a função  $\text{sen}(x)$  por um polinômio de Taylor de grau 5, com um erro menor que  $10^{-5}$ ?

Sugeriu-se que, para facilitar a visualização da convergência de polinômios de Taylor em relação à função seno, você plote no mesmo plano cartesiano os polinômios de Taylor de graus  $n = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n = 5$ ,  $n = 7$  e  $n = 9$  e o gráfico da função seno. Para realizar tudo isso, é necessário o estudo de alguns conceitos que vemos na sequência.

## Não pode faltar

### 1. Séries

Você já estudou sequências numéricas e séries: as progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG) são exemplos de sequências numéricas. Para relembrar o conteúdo de sequências sugerimos a consulta aos capítulos sobre sequências em Stewart (2006) ou Guidorizzi (1997). Você também pode consultar videoaulas sobre sequências no vídeo disponível em: [em: <https://www.youtube.com/watch?v=-WXsYcWLR30>](https://www.youtube.com/watch?v=-WXsYcWLR30). Acesso em: 01 nov. 2017.

Se somarmos os termos de uma sequência infinita  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  teremos o que se chama série infinita, ou, mais simplesmente, série.

Costuma-se representar uma série com o símbolo somatório (a letra grega sigma maiúscula)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  ou, excluindo-se os limites inferior e superior da soma, escrevemos sucintamente  $\sum a_n$ .

Certamente se somarmos infinitos termos de uma sequência como  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 6$ , ... teremos a soma  $2 + 4 + 6 + \dots$  que é infinita. Assim, não há interesse nesse tipo de somas. Por outro lado, você já efetuou somas de progressões geométricas, por exemplo, da

seqüência  $a_n = \frac{1}{2^n}$ . Aplicando-se a fórmula da soma de PGs infinitas temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ .

Interessa, portanto, estudar se a soma de infinitos termos de uma seqüência converge para um valor numérico ou não. Para isso, define-se o que se chamam somas parciais de uma série.

Considere uma seqüência  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Definimos as somas parciais:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

Em geral:  $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$ . A partir das somas parciais define-se uma nova seqüência  $\{s_n\}$ . A caracterização sobre a convergência da soma da série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é realizada a partir da seqüência  $\{s_n\}$  das somas parciais.



### Assimile

Definição (convergência de séries, (STEWART, 2006)): seja a  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  e suas somas parciais  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ . A série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  será denominada convergente se a seqüência  $\{s_n\}$  convergir, ou seja, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .

Dizemos que a soma da série é igual a  $S$  e escrevemos  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$ . Se a seqüência  $\{s_n\}$  não convergir, dizemos que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é divergente.

Um exemplo de série convergente é o da série geométrica, constituída pela soma de infinitos termos de uma progressão geométrica com primeiro termo igual a  $a_0$  e razão  $|q| < 1$ . Para a PG  $a_1, a_2, a_3, \dots = a_0, a_0q, a_0q^2, \dots$  com razão  $|q| < 1$  vale que  $\sum_{i=1}^{\infty} a_0q^{i-1} = \frac{a_0}{1-q}$ . Se  $|q| \geq 1$  a série geométrica será divergente.

Note que, antes de “sair somando” os termos de uma série devemos verificar se ela é convergente ou divergente. Vejamos um primeiro teorema relativo à convergência de séries.

**Teorema:** suponha que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  seja convergente. Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Com esse teorema, se pudermos mostrar que o termo geral da série dado por  $a_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir, então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é divergente. Contudo, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , nada podemos afirmar sobre a convergência da série.



Refleta

A série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente e é verdadeiro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Por que essas duas afirmações verdadeiras não contradizem o teorema anterior?

Dois séries convergentes podem ser somadas ou subtraídas termo a termo ou podemos multiplicar cada termo por uma constante, resultando em outras séries também convergentes. Esse resultado vem exposto no próximo teorema.

**Teorema:** considere as séries convergentes  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  e  $c$  um número real. Então também serão convergentes as séries  $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i + b_i$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i - b_i$  e vale que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i - b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Vejamos agora três testes de convergência de séries: o teste da comparação, o teste da razão e o teste da raiz.

O teste da comparação é usado quando temos informação sobre a convergência (ou divergência de uma série) e sabemos ainda que cada termo seu é sempre maior ou menor que outra série.

Teste de comparação: sejam as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , em que  $a_n \geq 0$  e  $b_n \geq 0$ .

Então

i) Se  $a_n \leq b_n$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergir então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será convergente.

ii) Se  $a_n \geq b_n$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergir então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será divergente.

### Convergência absoluta, condicional e séries alternadas

Não existem apenas séries nas quais todos os termos sejam positivos. Podem existir séries nas quais existam termos positivos e negativos. São as chamadas séries alternadas. Um exemplo de série alternada é a harmônica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

A partir do conceito de séries alternadas faz sentido falar em convergência em módulo ou convergência absoluta.



Assimile

**Definição** (série absolutamente convergente (STEWART, 2006)): a série

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  for convergente.

**Definição** (série condicionalmente convergente): a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é

condicionalmente convergente se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for convergente mas a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  não convergir.

A série harmônica alternada é um exemplo de série condicionalmente convergente mas que não é absolutamente convergente.

Para algumas séries podemos determinar sua convergência absoluta ou divergência usando os testes da razão e da raiz a seguir.

**Teste da razão** (STEWART, 2006):

Seja a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . Então existem três possibilidades.

i) Se  $K < 1$  então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

ii) Se  $K > 1$  ou se  $K = \infty$  então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

iii) Se  $K = 1$  então nada podemos concluir pelo teste da razão sobre a convergência ou divergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Teste da raiz** (STEWART, 2006):

Seja a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Três situações podem ocorrer:

i) Se  $K < 1$  então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

ii) Se  $K > 1$  ou se  $K = \infty$  então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

iii) Se  $K = 1$  então nada podemos concluir pelo teste da raiz.

Destacamos que, se o limite do teste da razão  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  for igual a 1, então você não deve tentar o teste da raiz pois o limite  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  também será igual a 1. O teorema a seguir é específico para testar convergência de séries alternadas.

**Teorema (de Leibniz) para séries alternadas** (STEWART, 2006):

Uma série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$

é convergente se as condições a seguir forem atendidas:

i) Todos os  $a_n$  são positivos.

ii) Para todo  $n \geq n_0$ , vale que  $a_n \geq a_{n+1}$ .

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## 2. Séries de potências

Existe um tipo particular de série bastante importante em aplicações de engenharia e física. São as séries de potências. Veja a definição a seguir.



**Assimile**

**Definição** (série de potências (STEWART, 2006)):

Sejam  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  números reais. A série representada por  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

é denominada série de potências centrada em  $x = 0$ . Já a série de

potências  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  é uma série de potências centrada em  $x = x_0$ .

Nós já vimos um exemplo de série de potências. É a série geométrica. Seja  $|x| < 1$ , isto é,  $-1 < x < 1$ . Se fizermos todos os coeficientes  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 1$ , na série  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  então teremos uma série geométrica convergente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Da fórmula para soma infinita de uma PG temos que  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$ .

Esta igualdade é válida para  $|x| < 1$ . Ou seja, para  $|x| < 1$  a série acima possui uma fórmula fechada, e pode ser escrita como a

função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Em outras palavras, podemos escrever que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Uma série de potências pode convergir apenas em um único ponto, pode convergir para todo  $x$  real ou ainda convergir em um intervalo real. Associado a toda série de potências existe um número real  $R > 0$  denominado raio de convergência. É o que vemos no próximo resultado.

**Teorema** (convergência de série de potências (STEWART, 2006)):

Considere a série de potência  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ . Então pode ocorrer apenas uma dentre as possibilidades a seguir:

- i) a série será convergente para  $x = x_0$ . Diz-se neste caso que o raio de convergência é  $R = 0$ .
- ii) a série converge para todo  $x$  tal que  $|x - x_0| < R$ , com  $R \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$  e a série diverge para  $|x - x_0| > R$ .
- iii) a série converge para todo  $x$  real. Neste caso, dizemos que o raio de convergência é  $R = \infty$ .

Destacamos que, no caso ii) se  $x = x_0 + R$  ou  $x = x_0 - R$  (ou seja, se estivermos em um dos extremos do intervalo de convergência), a série pode convergir nos dois extremos, pode divergir nos dois extremos ou pode convergir em um dos extremos e divergir no outro. Os testes da razão e da raiz nunca são conclusivos nos extremos do intervalo de convergência de uma série de potências.



No link abaixo você encontrará videoaulas sobre séries de potências apresentadas pelo Prof. Dr. Cláudio Possani do IME-USP. É um ótimo complemento para esse assunto: Disponível em: <<http://aulas.usp.br/portal/video.action?idItem=7017>>. Acesso em: 01 nov. 2017.

Séries de potências podem ser derivadas ou integradas para valores de  $x$  dentro do raio de convergência da série. Temos os teoremas:

**Teorema** (derivação e integração de séries de potências):

Suponha que a série de potências  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  tenha raio de convergência  $R > 0$ .

Então a função  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  pode ser derivada termo a termo para todo  $x$  tal que  $|x - x_0| < R$  e vale que:  $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i (x - x_0)^{i-1}$ . Também vale que a função  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  pode ser integrada termo a termo para todo  $x$  tal que  $|x - x_0| < R$  e vale que:  $\int_0^x f(x') dx' = C + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i (x - x_0)^{i+1}}{i + 1}$ .

Seja a série de potências  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ .

Podemos derivá-la termo a termo:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

### 3. Séries de Taylor e MacLaurin

Acabamos de estudar séries de potências e vimos que é possível representar funções por meio de séries de potências. As funções que podem ser representadas por séries de potências são extremamente importantes para os engenheiros e físicos. São tão importantes que recebem um nome especial: são as séries de Taylor. Sobre essas séries vale o teorema a seguir:

**Teorema** (STEWART, 2006): sempre que uma função  $f(x)$  puder ser escrita como uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  em torno do ponto

$x_0$ , com raio de convergência  $R$ , ou seja,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , com a série convergindo para  $|x - x_0| < R$ , então os coeficientes da série serão dados por  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ , em que  $f^{(n)}(x_0)$  representa a  $n$ -ésima derivada da função  $f$  calculada no ponto  $x_0$  e  $n!$  representa o fatorial no número natural  $n$ .

Se  $f$  possui expansão em série de potências convergente para  $x = x_0$ , costuma-se escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 \dots$$

Essa expansão é chamada de série de Taylor da função  $f$  em torno de  $x_0$ .

Se o ponto  $x_0$  for a origem (ou seja, se  $x_0 = 0$ ) a série de Taylor fica:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$  e recebe o nome de série de Maclaurin.



### Exemplificando

Vejamos como obter a série de Maclaurin para  $f(x) = e^x$ . Por ser uma série de Maclaurin, então  $x_0 = 0$ . Todas as derivadas de ordem  $n$  de  $f(x) = e^x$  são iguais a  $f^{(n)}(x) = e^x$ . Tais derivadas calculadas em  $x_0 = 0$  são iguais a  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ . Então, a série de Maclaurin de  $f(x) = e^x$  será:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

## 4. Polinômios de Taylor

Podemos representar funções como exponencial, seno, cosseno, logaritmo dentre outras em termos de sua série de Taylor (ou Maclaurin). Contudo, isso não é prático, pois teremos que lidar com uma soma infinita. Muitas vezes queremos representar uma função por uma soma finita de sua série de Taylor, que recebe o nome de polinômio de Taylor.



Definição (polinômio de Taylor de grau  $n$  (STEWART, 2006)):

Seja  $f(x)$  uma função que possui, no ponto  $x = x_0$ , derivadas até

ordem  $n$ . Então o polinômio de grau  $n$   $T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i =$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

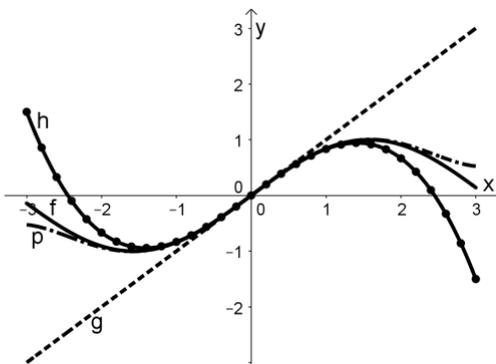
é denominado polinômio de Taylor de grau  $n$  para a função  $f(x)$ .

A figura a seguir, desenvolvida no software GeoGebra (para baixá-lo, acesse o site GeoGebra (Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 01 nov. 2017.) apresenta o gráfico da função seno e

dos polinômios de Taylor para a função seno  $T_1(x) = x$ ,  $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$  e  $T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ . Conforme aumentamos o grau do polinômio

de Taylor a convergência fica cada vez melhor para valores cada vez mais distantes de  $x_0 = 0$ . Por outro lado, à medida que aumentamos o grau do polinômio de Taylor, são necessários mais cálculos. É mais trabalhoso calcular um polinômio de grau 5 do que um polinômio de grau 3.

Figura 2.1 | Gráficos dos polinômios de Taylor para a função seno ( $f$ ) de graus 1 ( $g$ ), 3 ( $h$ ) e 5 ( $p$ ).



Fonte: elaborada pelo autor.

Quando a função  $f(x)$  pode ser representada em termos de uma série de Taylor no ponto  $x = x_0$  também se define a função resto de ordem de  $f$  no ponto  $x = x_0$ . É a definição a seguir:



Definição (Resto de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , (STEWART, 2006)):

Seja  $f(\mathbf{x})$  uma função que possui, no ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , derivadas até ordem  $n$ .

Então a função pode ser escrita como  $f(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}) + R_n(\mathbf{x})$  onde  $T_n(\mathbf{x})$  é o polinômio de grau  $n$  para a função  $f(\mathbf{x})$  e  $R_n(\mathbf{x})$  recebe o nome de resto de ordem  $n$  de  $f(\mathbf{x})$  no ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ .

O resultado a seguir é de extrema importância para aproximações numéricas de funções com  $n$  derivadas.

### Teorema:

Sejam  $\mathbf{C} \text{ e } L \in \mathbb{R}$ . Suponha que seja válida a desigualdade  $|f^{(n+1)}(\mathbf{x})| \leq \mathbf{C}$  para todo  $x$  tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq L$ . Então a função Resto da série de Taylor de ordem  $n$  atende à desigualdade  $|R_n(\mathbf{x})| \leq \frac{\mathbf{C}}{(n+1)!} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{n+1}$  para todo  $x$  tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq L$ .

Com esse teorema podemos obter aproximações para uma função com uma precisão prefixada.



### Exemplificando

Nesse exemplo veremos como utilizar o teorema para desigualdade do resto da série de Taylor para obter uma aproximação de  $e$  (base dos logaritmos neperianos) com quatro casas decimais de precisão. Para isso faremos a expansão em série de MacLaurin da função  $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$ .

Lembremos que a expansão em série de MacLaurin para  $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}}$  é

$$e^{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \mathbf{x}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot \mathbf{x}^n}{n!} = 1 + \frac{\mathbf{x}}{1!} + \frac{\mathbf{x}^2}{2!} + \frac{\mathbf{x}^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{x}^n}{n!} + \dots$$

Como queremos aproximar o número  $e$  tomamos  $\mathbf{x} = 1$  e nosso problema é determinar para qual  $n$  a aproximação a

$e^1 \cong 1 + \frac{\mathbf{x}}{1!} + \frac{\mathbf{x}^2}{2!} + \frac{\mathbf{x}^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{x}^n}{n!}$  está correta com cinco casas decimais.

Queremos determinar o valor  $n$  tal que o resto da série de Taylor atenda à desigualdade  $|R_n(\mathbf{x})| \leq 0,00005$ .

Substituindo  $x = 1$  na fórmula do resto teremos:

$$|R_n(1)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |1-0|^{n+1} \leq \frac{C}{(n+1)!}. \text{ O valor } C \text{ é uma quantidade que}$$

majora a derivada de ordem  $n+1$  da função  $f(x) = e^x$  no intervalo  $[0,1]$  (no qual queremos aproximar a função). Como esta função é crescente neste intervalo seu valor máximo é o próprio número  $e$ . Como essa é o número que queremos aproximar, não podemos utilizá-lo. Mas sabemos que  $e$  é limitado superiormente por 3. Então:  $|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$ .

Queremos  $n$  tal que  $|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0,00005$ . O que é equivalente a resolver a inequação  $(n+1)! \geq 60000$ . O menor  $n$  que atende a essa exigência é  $n = 8$ . Portanto:

$$e^1 \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \cong 2,71828$$

## Sem medo de erro

Vamos relembrar a situação-problema desta seção:

Neste ponto do seu trabalho de consultoria você deve mostrar como determinar o maior valor de  $x$  para o qual podemos substituir a função  $\text{sen}(x)$  por um polinômio de Taylor de grau 5, com um erro menor que  $10^{-5}$ . Para facilitar a visualização da aproximação de uma função pelos seus polinômios de Taylor, também foi solicitado que você apresentasse, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de  $\text{sen}(x)$  e dos polinômios de Taylor de graus  $n=1$ ,  $n=3$ ,  $n=5$ ,  $n=7$  e  $n=9$ .

Para tratar essa situação, em primeiro lugar precisamos dos polinômios de Taylor da função seno dos graus solicitados.

Temos que as derivadas da função seno na origem são  $\text{sen}^{(1)}(0) = 1$ ,  $\text{sen}^{(3)}(0) = -1$ ,  $\text{sen}^{(5)}(0) = 1$ ,  $\text{sen}^{(7)}(0) = -1$  e  $\text{sen}^{(9)}(0) = 1$ .

O polinômio de grau  $n$  para a função seno é:

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Como a questão solicita fornecermos até qual valor de  $x$  podemos substituir seno pelo polinômio de Taylor de grau 5 com erro menor que  $10^{-5}$ , queremos determinar o valor de  $x$  que atende a desigualdade:

$$\left| \frac{x^7}{7!} \right| \leq 10^{-5}$$

Na desigualdade anterior observe que o valor  $n+1$  seria igual a 6. Contudo, como neste exemplo específico que estamos tratando a derivada é nula, passamos para o próximo termo da série.

Resolvendo a desigualdade anterior:

$$|x^7| \leq 7!10^{-5} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt[7]{7!10^{-5}} = \sqrt[7]{0,0504} = 0,6526$$

No gráfico a seguir plotamos a função seno e os gráficos dos polinômios de Taylor para o seno até grau 9.

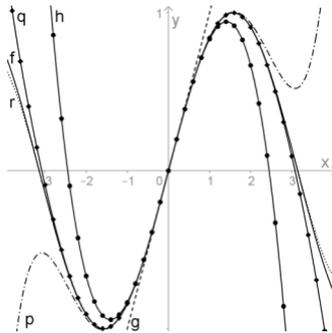


Pesquise mais

Fica a sugestão para você consultar e manusear o objeto disponível no site GeoGebra (Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/pyXKjfq2>>. Acesso em: 01 nov. 2017.). Com ele você poderá experimentar vários graus para os polinômios de Taylor para a função seno, o que facilitará muita a sua compreensão.

Neste vídeo comentam a construção de um objeto semelhante a esse e é dado destaque à diferença entre a série e a função. Disponível em: <<https://youtu.be/6cdRYPJ-uEg>>. Acesso em: 01 nov. 2017.

Figura 2.2 | Comparação entre a função **sen(x)** e os polinômios de Taylor até grau 9



$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x, \quad p(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x, \quad q(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

$$r(x) = -\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x, \quad s(x) = \frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora que você realizou essa etapa, sintetize os resultados obtidos e envie na forma de um relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do software.

## Avançando na prática

### Usando o teste da razão com funções de Bessel

#### Descrição da situação-problema

Uma das principais aplicações de séries (e, em particular, de séries de potências) é na resolução de equações diferenciais ordinárias para as quais métodos mais simples não podem ser aplicados. Um dos exemplos históricos de resolução de equação diferencial com uma série de potências é a equação diferencial de Bessel ( $p$  é um número real):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Pode-se resolver essa equação diferencial com séries de potências obtendo-se as chamadas funções de Bessel. Essas equações diferenciais são utilizadas para modelar fenômenos em diversas áreas da física e da engenharia: eletromagnéticos, vibratórios, de condução de calor, difusão e processamento de sinais, dentre outros. A sua resolução em série de potências produz uma função chamada função de Bessel de primeira espécie dada a seguir:

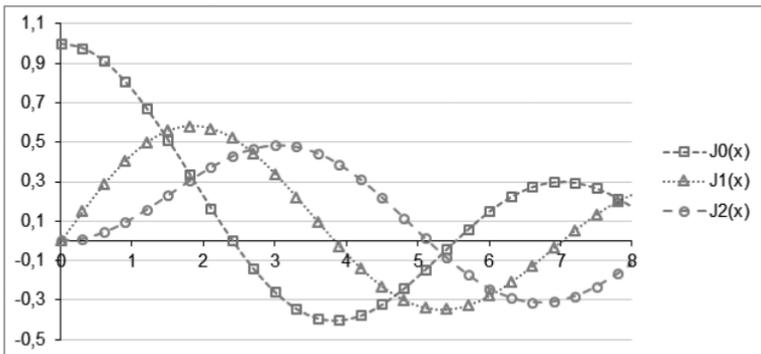
$$J_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i)!(i+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Se fizermos  $m = 0$  temos

$$J_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i} (i!)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}$$

Na Figura 2.3 a seguir apresentamos o gráfico das funções de Bessel de 1ª espécie para  $m = 0$  até  $m = 2$ . Observe o caráter oscilatório amortecido dessas funções. Para produzir este gráfico usamos a função BESSELJ do Excel®.

Figura 2.3 | Funções de Bessel de 1ª. Espécie ( $m = 0$  até 2).



Fonte: elaborada pelo autor.

Na empresa de produção de softwares de engenharia um módulo do novo software específico sobre funções de Bessel será produzido.

Sua tarefa é elaborar um texto mostrando que a série de potências para a função de Bessel converge para todos os valores de  $x$ . Esse texto será incluído no manual de uso do software e, por esse motivo, é preciso que você seja sucinto e explicativo, pensando no usuário final.

### Resolução da situação-problema

Dada a própria característica da função de Bessel, determinaremos o raio de convergência da função de Bessel usando o teste da razão. Fazemos uso desse teste pois ele permitirá o cancelamento de fatores comuns. Veja:

Para aplicar o teste da razão devemos avaliar o limite  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

Se esse limite for nulo então o raio de convergência será, por definição, infinito e a série de potências para a função de Bessel convergirá para todo  $x$  real. Substituindo a expressão dos coeficientes da série de potências para a função de Bessel:

$$\begin{aligned}
 K &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (-1)}{(n+1) \cdot n! (n+1) \cdot n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{x}{2}\right) \frac{n! n!}{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} \right| = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right| = 0 < 1, \text{ para todo } x \text{ real. Assim, mostramos} \\
 &\text{que o raio de convergência é infinito.}
 \end{aligned}$$

Agora, basta você elaborar o texto conforme as necessidades expressas anteriormente, pensando que ele será apresentado ao usuário do futuro software.

## Faça valer a pena

**1.** Um exemplo de série importante é a chamada série telescópica. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
 do tipo telescópica.

Uma soma telescópica é uma soma do tipo:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1$$

Denominam-se de séries telescópicas as séries que são o limite de uma soma telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1$$

Portanto, se a série telescópica for convergente, então existe e é finito o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1.$$

Por outro lado, se existir e for finito o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1$ , então a série telescópica será convergente.

Outros exemplos de séries telescópicas são:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)(2n+1)}$ .

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ . Então é correto afirmar que:

a) Essa série é convergente pelo teste da raiz.

b) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$  é convergente pois é uma série de potências.

c) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$  é divergente pois vale que  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{n+1}$

e o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{n+1}$  não é finito.

d) Essa série é divergente pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$  é finito.

e) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = 0$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$  é convergente.

## 2. Lembremos a definição de série convergente:

Dizemos que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é convergente se a sequência  $\{s_n\}$  de suas somas parciais, definida por  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , for convergente. Se a sequência das somas parciais não for convergente dizemos que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é divergente.

Existe um outro critério para a verificação de convergência de séries. É o teste da Integral.

### Teste da Integral:

Considere  $f$  uma função contínua, decrescente para todo  $x \in [1, \infty)$  e tal que  $f(x) > 0$ . Para aplicar o teste da integral adotamos  $a_n = f(n)$ . Então vale que:

Se a integral  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  for convergente, então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  será convergente.

Se a integral  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  for divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  será divergente.

O teste da integral pode ser utilizado para demonstrar a convergência das

p-séries:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .

Uma p-série será convergente se  $p > 1$  e será divergente se  $p \leq 1$ .

Existem vários testes para determinar se uma série é convergente, divergente ou absolutamente convergente.

A seguir apresentamos uma sugestão de estratégia para testar a convergência de séries que é:

1. Teste se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  a série diverge. Se o limite for nulo a série pode convergir ou divergir.
2. Avalie se a série é geométrica.
3. Avalie se a série é uma p-série.
4. Avalie se é possível efetuar o teste da integral.
5. Avalie se os testes da razão ou da raiz são conclusivos.
6. Se a série for alternada, efetue o teste da série alternada.

Usando os testes para convergência de séries estudados nesta seção, assinale a alternativa correta:

a) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  é divergente pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

b) A série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2}$  é convergente pelo teste de Leibniz para séries alternadas, apesar de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} \neq 0$ .

c) Usando o teste da comparação podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}$  é

divergente pois a série  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$  também é divergente e vale que  $\frac{2^{-n}}{n+1} \leq 2^{-n}$ .

d) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$  é absolutamente convergente.

e) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$  é convergente pelo teste da integral pois é uma p-série com  $p < 1$ .

**3.** A expansão em série de Taylor de uma função  $f$  no ponto  $x = x_0$  é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Além disso, se  $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$  para  $|x - x_0| \leq L$ , então o resto  $R_n(x)$  da série de Taylor atende à desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Facilitará seus cálculos neste exercício utilizar o resultado a seguir:

Se  $f$  e  $g$  são duas funções cujas séries de potências sejam  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  então a série de potências da função  $f(x) \cdot g(x)$  é obtida pelo

produto das séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

Considere a função  $f(x) = 7x^2 \cos(x)$ . Assinale a alternativa que apresenta a série de Maclaurin para a função anterior.

a)  $7x^2 \cos(x) = 7x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots$

b)  $7x^2 \cos(x) = 7x^2 - \frac{7x^4}{2!} + \frac{7x^6}{4!} - \frac{7x^8}{6!} + \dots$

c)  $7x^2 \cos(x) = 7x^3 - \frac{7x^5}{3!} + \frac{7x^7}{5!} - \frac{7x^9}{7!} + \dots$

d)  $7x^2 \cos(x) = 7x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots$

e)  $7x^2 \cos(x) = \frac{7x^2}{1!} + \frac{7x^4}{3!} - \frac{7x^6}{5!} + \dots$

## Seção 2.2

### Séries de Fourier

#### Diálogo aberto

Nesta seção, você será apresentado às séries de Fourier. O matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi aluno de Lagrange, Laplace e Monge e publicou seu trabalho *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor) em 1822, no qual propõe que é possível representar uma função por somas trigonométricas infinitas. Embora esse trabalho apresente deficiências de rigor (o que é compreensível historicamente), foram justamente essas imprecisões e as investigações subsequentes para tratar de forma rigorosa as afirmações de Fourier que conduziram a extensas pesquisas com resultados altamente relevantes na atualidade nas aplicações da engenharia e da física. As aplicações atuais do trabalho iniciado por Fourier envolvem além da condução do calor em uma barra, equação da corda vibrante, oscilações forçadas em sistemas mecânicos e em circuitos elétricos, música, equação da onda, estudo da equação da membrana, processamento de sinais, telecomunicações e cálculo numérico. Assim, não tenha a menor dúvida: você está iniciando seus estudos em uma área histórica da matemática e da engenharia.

Como as séries de Fourier são somas infinitas de senos e cossenos, elas exigem, dentre outros, os conceitos de periodicidade de funções e a discussão sobre a convergência dessas somas infinitas. Além disso, se soubermos que a função a ser representada pela série de Fourier for par (ou ímpar) poderemos simplificar os cálculos utilizando certas propriedades de integrais de funções pares (ou ímpares).

Você verá nesta seção algumas funções que são bastante frequentes em aplicações da engenharia: as funções onda quadrada, onda triangular e funções do tipo “dente de serra”. Essas funções aparecem, por exemplo, em circuitos elétricos ou em processamento de sinais. Daí sua relevância.

A obtenção de aproximações do  $\pi$  com cada vez mais casas decimais sempre foi perseguida ao longo da história da matemática.

Com o advento de computadores e calculadoras, não foi diferente. Cada novo modelo de computador mais potente ou software com novos algoritmos oferecia espaço para mais investigações acerca da aproximação do  $\pi$ . Utilizam-se essas aproximações do  $\pi$  para validar algoritmos e softwares científicos. Esse é seu papel nessa nova etapa do contexto que apresentamos no início desta unidade. Como você foi contratado para produzir o conteúdo teórico para os fundamentos do software científico a ser desenvolvido por uma empresa prestadora de serviços de engenharia, você decidiu utilizar esse aspecto histórico para apresentar como utilizar séries de Fourier em aproximações numéricas.

O matemático francês Joseph Fourier desenvolveu as séries de Fourier para resolver o problema da condução do calor em uma barra. No entanto, os matemáticos, físicos e engenheiros, ao longo do tempo, foram descobrindo inúmeros aspectos interessantes, surpreendentes e aplicáveis das séries de Fourier. Uma aplicação inicialmente inesperada para as séries de Fourier é sua utilização na aproximação do  $\pi$ .

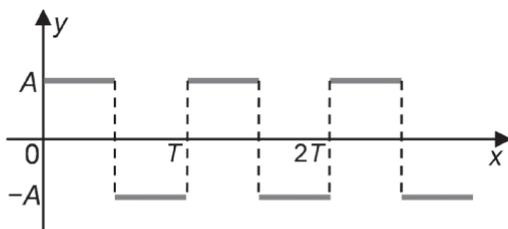
Como você poderia, utilizando séries de Fourier para a função  $f(x) = x^2$ ,  $0 < x < 2\pi$ , mostrar que  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ ?

## Não pode faltar

### 1. Definição de séries de Fourier

Antes de iniciarmos propriamente nosso estudo sobre séries de Fourier, é necessário nos atentarmos a alguns aspectos sobre funções periódicas.

Observe a Figura 2.4, na qual vemos o gráfico de uma função periódica de período genérico  $T$  e amplitude de onda  $A$ , com valor médio igual a zero.



Fonte: elaborada pelo autor.

A onda quadrada da Figura 2.4 é um exemplo de função periódica descontínua. As funções seno e cosseno são exemplos de funções periódicas contínuas. Fenômenos periódicos fazem parte da vida dos engenheiros. A voltagem sobre um circuito elétrico pode consistir de uma sequência de pulsos periódicos, como mostrado na Figura 2.4. Fenômenos periódicos também aparecem em sistemas mecânicos (a amplitude do ângulo de oscilação de um trem pode aumentar com a velocidade se o sistema não for cuidadosamente projetado ou operado), sistemas biológicos e também econômicos. Portanto, precisamos definir claramente o que são funções periódicas.

Veja a definição a seguir.



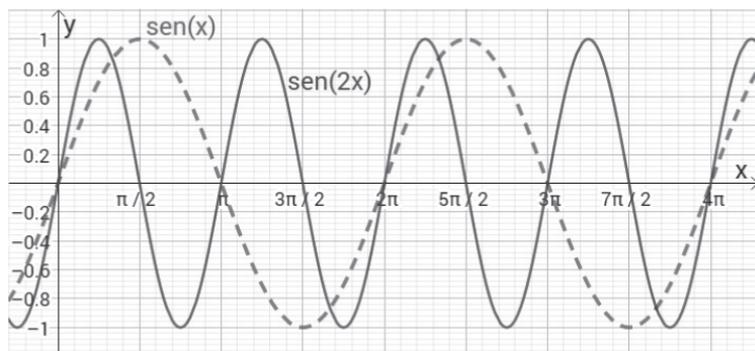
### Assimile

Definição de função periódica: seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é periódica se, e somente se, existir um número positivo  $P$  tal que para todo  $t$  no domínio de  $f$  vale que  $f(t + P) = f(t)$ . O número  $P$  é chamado de período de  $f$  (WYLIE e PRATT, 1985).

As séries de Fourier são definidas a partir de somas infinitas de senos e cossenos. Por esse motivo trataremos a seguir com um pouco mais de detalhe sobre essas duas funções.

A função  $f_1(x) = \text{sen}(x)$  é periódica de período  $2\pi$  pois  $f_1(x) = f_1(x + 2\pi)$  para todo  $x$ . Já a função  $f_2(x) = \text{sen}(2x)$  é periódica de período  $\pi$ , pois  $f_2(x) = f_2(x + \pi)$ . Observe que, ao multiplicarmos o argumento do seno por 2, é como se estivéssemos percorrendo o domínio da função seno com o “dobro da velocidade” com que esse domínio é percorrido pela função  $\text{sen}(x)$ . Se estamos “andando” com o dobro da velocidade, o tempo para repetirmos os valores da função  $f_2(x)$  será a metade do período da função  $f_1(x) = \text{sen}(x)$ . Veja a seguir os gráficos das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  na Figura 2.5.

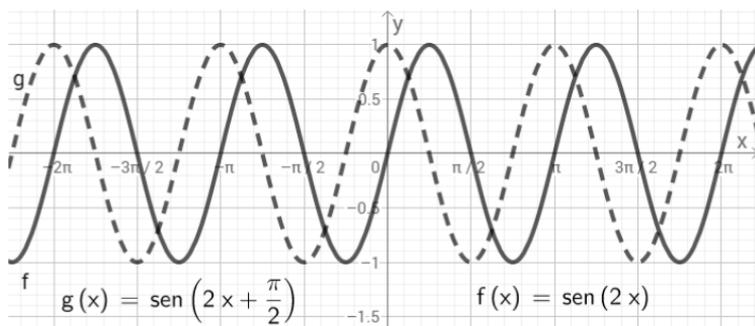
Figura 2.5 | Gráficos das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Em geral vale que o período da função  $g_1(x) = \text{sen}(\omega x)$  é  $\frac{2\pi}{\omega}$  e que o período da função  $g_2(x) = \text{cos}(\omega x)$  é  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Considere a função  $g_3(x) = \text{sen}(\omega x + \phi)$ . Na Figura 2.6 plotamos os gráficos das funções  $g_1$  e  $g_3$  com  $\omega = 2$  e  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . A constante  $\phi$  tem o efeito de deslocar o gráfico da função  $g_1$  para a esquerda de  $\phi$  unidades. Ela não altera o período da função  $g_1$ . Assim, o período da função  $g_3$  também é  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Figura 2.6 | Gráficos das funções  $g_1$  e  $g_3$



Fonte: elaborada pelo autor.



**Refleta**

Use softwares como wxMaxima ou GeoGebra para fazer os gráficos das funções  $g_1$  e  $g_3$  com vários valores para  $\omega$  e  $\phi$ . Será que modificar  $\phi$  altera o período de  $g_1$  e  $g_3$ ?

Observe que vale a identidade  $\text{sen}\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \text{sen}(\omega x + 2\pi) = \text{sen}(\omega x)$  para todo  $x$ . Assim,  $\frac{2\pi}{\omega}$  é o período da função  $g_1(x) = \text{sen}(\omega x)$ . Também vale identidade semelhante para a função cosseno:  $\text{cos}\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \text{cos}(\omega x + 2\pi) = \text{cos}(\omega x)$ .



**Pesquise mais**

Você pode conhecer um pouco mais sobre J. B. Fourier consultando os materiais a seguir:

ALENCAR, Marcelo Sampaio de. A Análise de Fourier e o Aquecimento Global. Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Disponível em: <[http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Aquecimento\\_Global\\_Fourier.pdf](http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Aquecimento_Global_Fourier.pdf)>. Acesso em: 17 nov. 2017.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jean Baptiste Joseph Fourier**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier.html>>. Acesso em: 17 nov. 2017, cuja tradução pode ser encontrada em: <<https://goo.gl/vMbgFN>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

## 2. Convergência de séries de Fourier

Agora que já expusemos como lidar com os argumentos das funções seno e cosseno, vejamos a definição das séries de Fourier.



**Assimile**

Considere  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida sobre o intervalo  $(-L, L)$ . Supomos que essa função seja periódica de período  $2L, L \in \mathbb{R}$ .

A expansão em série de Fourier da função  $f$  é dada por  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] + b_n \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] \right]$  em que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por:

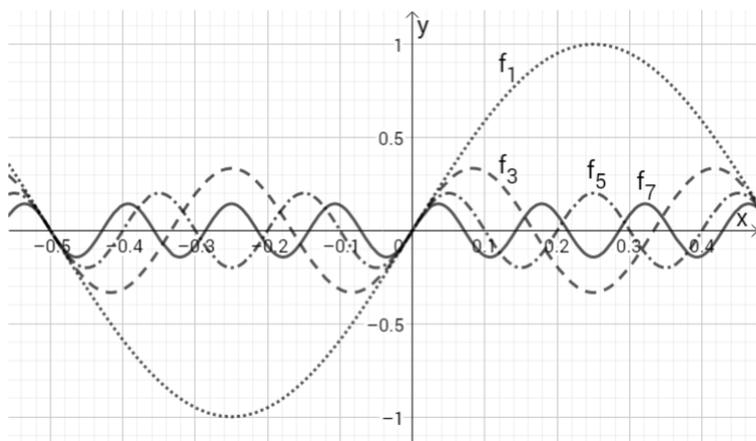
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vejamos um exemplo de utilização das séries de Fourier para aproximar a onda quadrada.

Podemos aproximar, com o grau desejado de aproximação, uma onda quadrada por uma série de Fourier. Veja os gráficos da Figura 2.7. Nela vemos gráficos de funções seno para a frequência fundamental  $k = 1$  e para os harmônicos,  $k = 3, k = 5, k = 7, k = 9, k = 11$ . Adotamos, para esses gráficos, que o período é  $T = 1$ .

Figura 2.7 | Gráficos para as funções  $f_k(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right)$  com  $k = 1, k = 3, k = 5, k = 7$  e  $T = 1$



Fonte: elaborada pelo autor.



### Pesquise mais

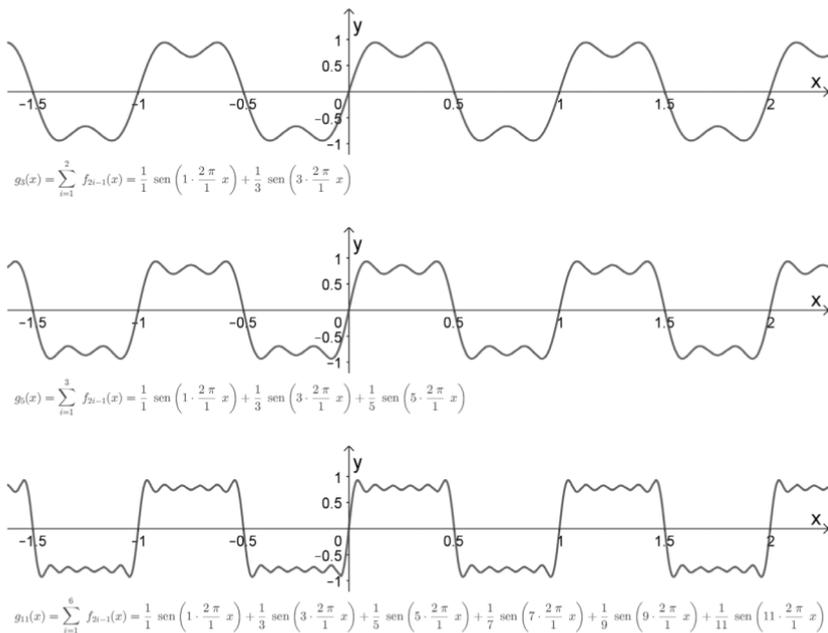
Para melhor compreensão do exposto na Figura 2.7 recomendamos que você acesse o gráfico disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hMWZH5PW>.

(Acesso em: 17 nov. 2017.) para experimentar outros valores para  $k$  e observar o que ocorre com o gráfico das funções

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{k}\right) \text{sen}\left(k \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) x\right).$$

Na Figura 2.8 temos os gráficos, da esquerda para a direita, respectivamente, para as funções  $g_3(x) = f_1(x) + f_3(x)$ ,  $g_5(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x)$  e  $g_{11}(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x) + f_{11}(x)$ .

Figura 2.8 | Gráficos das funções  $g_3(x)$ ,  $g_5(x)$  e  $g_{11}(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Recomendamos que você acesse o objeto disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/VwAvymzr>>. (Acesso em: 17 nov. 2017.) para que sua experiência de visualização da Figura 2.5 seja mais completa.

Note que nos pontos de descontinuidade da função  $f$  a aproximação obtida pela série de Fourier apresenta oscilações. Esse fenômeno é conhecido como fenômeno de Gibbs.

Observe, ainda nos gráficos da Figura 2.5, que à medida que adicionamos funções seno com harmônicos mais elevados, melhor fica nossa aproximação de uma onda quadrada. Essa é a ideia básica de séries de Fourier: somas de senos (e cossenos) para representar funções contínuas ou descontínuas com descontinuidades finitas em um número no finito de pontos.

Mas surge aqui uma questão matemática de extrema importância: sob quais condições a série de Fourier para a função  $f$  efetivamente se aproxima da função  $f$  que queremos aproximar? O matemático

alemão Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi o primeiro a apresentar condições suficientes relativas à convergência das séries de Fourier. Dirichlet também propôs a definição moderna do conceito de função. Essas condições são conhecidas atualmente como condições de Dirichlet.



### Assimile

Teorema (condições de Dirichlet) (BUTKOV, 1978): Suponha que  $f$  seja uma função contínua por partes em um intervalo  $[-L, L]$  e que os pontos  $-L = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = L$  sejam os pontos em  $[-L, L]$  para os quais a função é estritamente decrescente ou estritamente crescente entre cada  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge para  $\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)]$ ,  $x \in ]-L, L[$  e  $\frac{1}{2}[f(-L_+) + f(L_-)]$ ,  $x = -L$  ou  $x = L$ .

Além disso, se  $f$  for contínua em qualquer intervalo fechado contido em  $[-L, L]$  a convergência será uniforme.

Em outras palavras, se a função  $f$  for descontínua apenas em um número finito de pontos no intervalo  $[-L, L]$  e estritamente crescente ou estritamente decrescente em subintervalos de  $[-L, L]$ , a série de Fourier de  $f$  converge para  $f$  nos pontos em que  $f$  é contínua e converge para o valor médio de  $f$  nos seus pontos de descontinuidade. Deve ser destacado, ainda, do teorema acima, que ele fornece apenas condições suficientes para a convergência de séries de Fourier e não condições necessárias.



### Pesquise mais

No vídeo a seguir você encontrará um exemplo de como encontrar a série de Fourier da função  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x < 0 \\ 2 - 2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ .

Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=8xjK2l-WhWk>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

Além disso, no link abaixo você encontrará a primeira parte de uma sequência de videoaulas sobre séries de Fourier: Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JFdBfemyXRU>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

### 3. Séries de Fourier de funções pares, ímpares e extensões periódicas

Nesta subsecção veremos as séries de Fourier em senos e cossenos e a determinação de séries de Fourier para extensões periódicas de uma função.

Existem dois tipos de funções para os quais as séries de Fourier podem ter os cálculos dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  facilitados: são as funções pares e ímpares.



#### Assimile

**Definição (Função par** (BOYCE; DIPRIMA, 2015)): uma função  $f$  é denominada de função par se, sempre que o domínio de  $f$  contiver o ponto  $x$ , ele também conter o ponto  $-x$  e vale que  $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ .

**Definição (Função ímpar** (BOYCE; DIPRIMA, 2015)): uma função  $f$  é denominada de função ímpar se, sempre que o domínio de  $f$  contiver o ponto  $x$ , ele também conter o ponto  $-x$  e vale que  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ .

Valem as seguintes propriedades para funções pares e ímpares: a soma (e a diferença) de funções pares também é uma função par; a soma (e a diferença) de funções ímpares também é uma função ímpar; o produto de uma função ímpar por outra ímpar resulta em uma função par; o produto (ou quociente) de uma função par com uma ímpar resulta em uma função ímpar.



#### Exemplificando

São exemplos de funções pares:  $f(x) = 2$ ,  $f(x) = \cos(x)$ .

São exemplos de funções ímpares:  $f(x) = x$ ,  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f(x) = x^3$ .

A característica importante de funções pares relacionadas com séries de Fourier é que, se  $f$  é uma função par, vale que  $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$ . Se a função for ímpar vale que  $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$ .



#### Reflita

Por que a igualdade  $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$  é válida para funções pares?

Em função da observação anterior para funções pares, se soubermos que a função com relação a qual precisamos determinar a série de Fourier é uma função par, nossos cálculos ficarão bastante simplificados.

**Série de Fourier em cossenos** (BOYCE; DIPRIMA, 2015): seja  $f$  uma função par, periódica de período  $2L$  e contínua por partes com sua primeira derivada também contínua por partes. Então, como o produto de funções pares é uma função par, a função  $f(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$

também é função par. Então os coeficientes  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$  serão iguais a  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$ . Como o produto de função

par por função ímpar resulta em função ímpar temos que a integral  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\sen\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx = 0$ . Portanto, a série de Fourier para uma

função par é  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$ .

Vale um resultado análogo para funções ímpares, para as quais teremos séries de Fourier em senos. Veja o resultado a seguir.

**Série de Fourier em senos** (BOYCE; DIPRIMA, 2015): seja  $f$  uma função ímpar, periódica de período  $2L$  e contínua por partes com sua primeira derivada também contínua por partes. Então, como o produto de funções ímpares é uma função par, as funções  $f(x)\sen\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$

função par. Então os coeficientes  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\sen\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$  serão iguais a  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\sen\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$ . Como o produto de função

ímpar por função par resulta em função ímpar temos que a integral  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx = 0$ . Portanto, a série de Fourier para uma

função ímpar é  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$ .

Em muitas situações práticas temos uma função  $f$  definida apenas para o intervalo  $]0, L[$  e queremos representar essa função por uma série de Fourier de período  $2L$ . Temos duas alternativas usuais: a extensão par de período  $2L$  da função  $f$  e a extensão ímpar de período  $2L$  da função  $f$ . A escolha de uma ou outra extensão é dada pelo problema em particular que estivermos tratando.



Extensão par de período  $2L$  (BOYCE; DIPRIMA, 2015): a extensão periódica par da função  $f$  é dada por:

$$f_{\text{Par}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Extensão ímpar de período  $2L$  (BOYCE; DIPRIMA, 2015): a extensão periódica ímpar da função  $f$  é dada por: e  $f_{\text{Ímpar}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$  e  $f_{\text{Ímpar}}(0) = f_{\text{Ímpar}}(L) = 0$ .

Suponha que a função  $f$  satisfaça às condições de convergência de Dirichlet. Então a série de Fourier em cossenos convergirá para a extensão par da função  $f$  e a série de Fourier em senos convergirá para a extensão ímpar da função  $f$ .



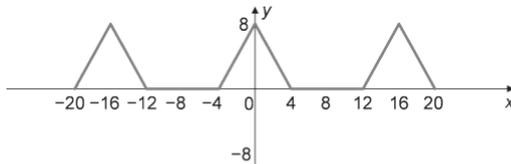
## Exemplificando

Exemplo adaptado de (BOYCE; DIPRIMA, 2015): seja

$$f(x) = \begin{cases} 8 - 2x, & 0 < x \leq 4 \\ 0, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

A expansão em cossenos desta função convergirá para a extensão periódica par de  $f(x)$  cujo gráfico é dado pela Figura 2.9.

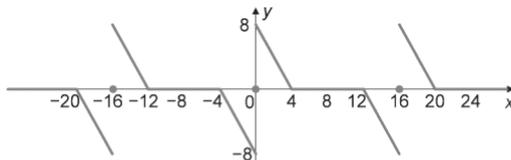
Figura 2.9 | Extensão periódica par de  $f(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Já a expansão em senos de  $f(x)$  convergirá para a extensão periódica ímpar de  $f(x)$  cujo gráfico é dado pela Figura 2.10.

Figura 2.10 | Extensão periódica ímpar de  $f(x)$



Fonte: elaborada pelo autor.

#### 4. Forma complexa das séries de Fourier

O matemático suíço Leonhard Euler (1717-1783) apresentou contribuições para inúmeras áreas da matemática: geometria, análise, topologia, teoria dos números e ainda apresentou contribuições para a física e para a astronomia. Euler apresentou a identidade que se denomina atualmente como identidade de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$$

Da identidade acima temos que  $e^{-ix} = \cos(x) - i\text{sen}(x)$ . Se definirmos os coeficientes  $c_n$  (aqui seguimos a notação utilizada por Butkov (1988)):

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n), n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0, n = 0 \end{cases} \text{ podemos reescrever a série de Fourier}$$

na sua forma complexa:  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ , com  $x \in [-L, L]$  e

$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx$ . A vantagem dessa notação é que ela é mais compacta.

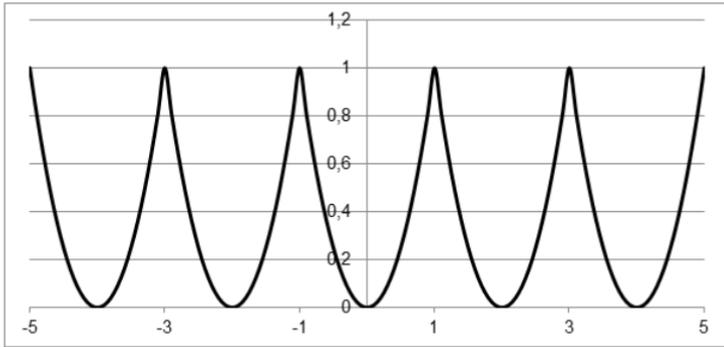
#### Sem medo de errar

Lembre-se que nessa unidade estamos supondo que você está trabalhando na produção de um novo software especialista em aplicações científicas e de engenharia. Sua atribuição nesse processo é apresentar os desenvolvimentos teóricos e as aplicações das séries de Fourier.

Uma das ideias para o conteúdo que será utilizado no manual do novo software é sobre como utilizar séries de Fourier na aproximação do  $\pi$ . De forma mais específica, é necessário que você mostre, utilizando séries de Fourier para a função  $f(x) = x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , como validar o seguinte resultado:  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ .

Consideremos a função  $f(x) = x^2$  com sua extensão periódica par, tal como observamos na Figura 2.11. O período é 2, portanto  $L = 1$ .

Figura 2.11 | Gráfico da extensão periódica par de  $f(x) = x^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a função é par, a expansão em série de Fourier será uma série em cossenos (ou seja, os coeficientes  $b_n = 0, \forall n > 0$ ). A seguir estão os cálculos dos coeficientes  $a_0$  e  $a_n$ :

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Efetuamos integração por partes para determinar os  $a_n$ .

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n$$

$$\text{Então } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Fazendo  $x = 1$  teremos  $1^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi)$ , em que:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi).$$

$$\text{Finalmente: } \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Você pode utilizar uma planilha Excel® para avaliar a velocidade de convergência dessa série.

Na tabela a seguir apresentamos os valores aproximados para  $\pi$  com essa série comparados ao valor correto de  $\pi$  (com 10 casas decimais corretas é 3,1415926536).



O valor do  $\pi$  com bem mais de dez casas decimais pode ser obtido, por exemplo, em:

HUBERTY, M.; VANG, C.; HAYASHI, K. 100,000 **Digits of Pi**. Disponível em: <<http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/digits.html>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

Sugerimos também a consulta do material a seguir para para saber mais detalhes sobre a história do  $\pi$ : WENDPAP, B.; BASTIANI, F. de.; GUZZO, S. M. Uma abordagem histórico-matemática do número pi ( $\pi$ ). In: **XXII Semana Acadêmica da Matemática**. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, UNIOESTE, Cascavel – Pr. Disponível em: <<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/19.pdf>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

Tabela 2.1 | Comparação  $\pi_n$  e  $|\pi - \pi_n|$

N	$\pi_n$	$ \pi - \pi_n $ ( $\pi$ com 10 casas decimais corretas)
10	3,049362	0,092231
100	3,132077	0,09516
500	3,139684	0,001909
1000	3,140638	0,000955

Fonte: elaborada pelo autor.

Neste ponto você concluiu mais uma etapa do seu desenvolvimento teórico para a documentação do software especialista da empresa de consultoria de engenharia para a qual seus serviços foram contratados. Sintetize os resultados obtidos e envie um relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do software.

## Avançando na prática

**Expansão em série de senos e cossenos para  $f(x) = x, 0 < x < 4$**

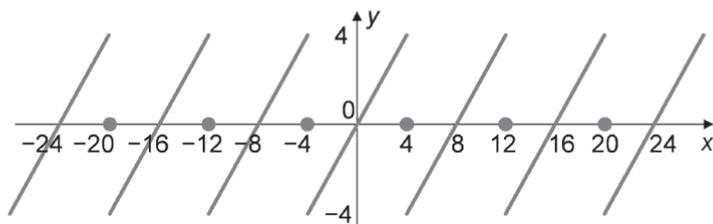
### Descrição da situação-problema

Dentro do seu contrato para produzir os desenvolvimentos teóricos para o novo software especialista para cientistas e engenheiros, a empresa solicitou que você apresentasse alguns exemplos ilustrativos de cálculo de expansão de uma função em série de Fourier de senos e de cossenos. Quais você poderia incluir?

## Resolução da situação-problema

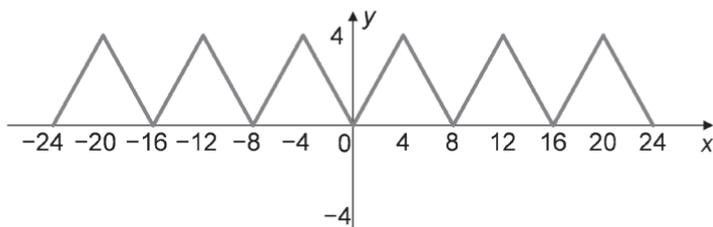
Antes de iniciar os cálculos para determinar as expansões em série de senos e de cossenos, seria interessante apresentar, por exemplo, os gráficos de  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 4$  para cada um dos casos. Para a expansão em série de senos teremos a expansão periódica ímpar da função  $f$  e para a expansão em série de cossenos teremos a expansão periódica par de  $f$ .

Figura 2.12 | Expansão periódica ímpar de  $f$



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2.13 | Expansão periódica par de  $f$



Fonte: elaborada pelo autor.

Determinação da expansão em série de senos.

Neste caso os coeficientes  $a_n$  são todos nulos. Resta calcular os  $b_n$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx$$

Efetuamos integração por partes:

$$\frac{1}{2} \int_0^4 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left[ x \frac{(-4)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) - \frac{4^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_0^4 = -\frac{1}{2} \frac{16}{n\pi} \cos(n\pi)$$

$$\text{Assim, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n\pi} \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right).$$

Determinação da expansão em série de cossenos.

Neste caso os coeficientes  $b_n$  são todos nulos. Resta calcular os  $a_n$

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x dx = 4$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx.$$

Efetuamos integração por partes:

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left[ x \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) + \frac{4^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_0^4 = \frac{1}{2} \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - 1$$

$$a_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - 1.$$

Assim,

$$f(x) = \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right).$$

Observe que a função  $f(x) = x, 0 < x < 4$  é igualmente bem aproximada tanto pela série de Fourier em senos quanto pela série de Fourier em cossenos.

## Faça valer a pena

**1.** Uma função  $f$  é par se, sempre que seu domínio contém  $x$ , seu domínio também contém  $-x$  e vale que  $f(-x) = f(x), \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$ .

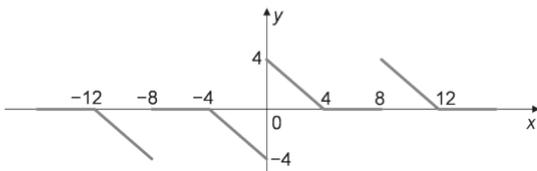
Uma função  $f$  é ímpar se, sempre que seu domínio contém  $x$ , seu domínio também contém  $-x$  e vale que  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$ .

Se  $f$  é uma função par, então vale que  $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$ , e se  $f$  é função ímpar, vale que  $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$ .

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

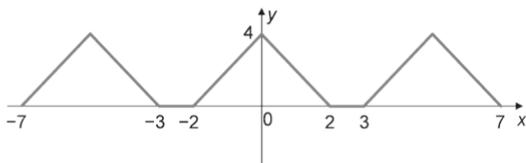
Então a extensão periódica par e a extensão periódica ímpar de  $f$  são dadas, respectivamente, pela alternativa:

a) Extensão par:



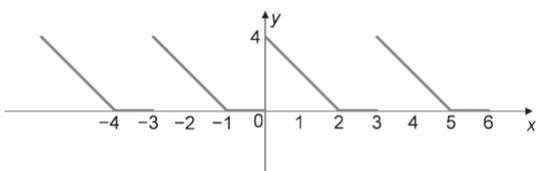
Fonte: elaborada pelo autor.

Extensão ímpar:



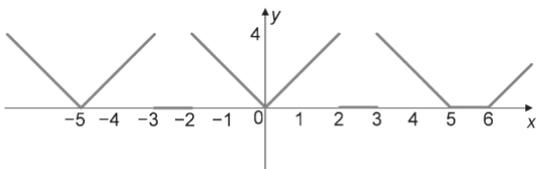
Fonte: elaborada pelo autor.

b) Extensão par:



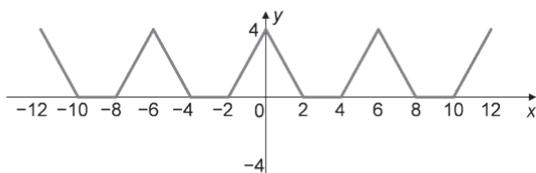
Fonte: elaborada pelo autor.

Extensão ímpar:



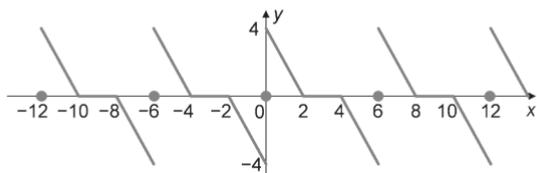
Fonte: elaborada pelo autor.

c) Extensão par:



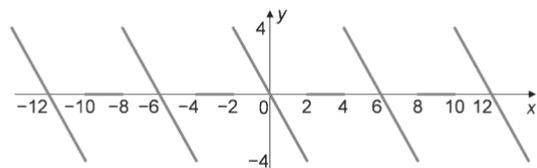
Fonte: elaborada pelo autor.

Extensão ímpar:



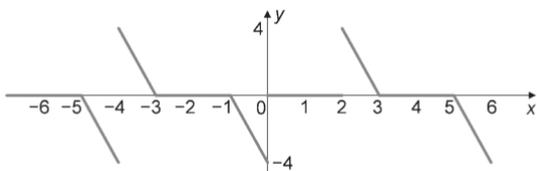
Fonte: elaborada pelo autor.

d) Extensão par:



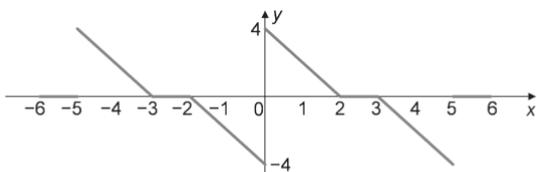
Fonte: elaborada pelo autor.

Extensão ímpar:



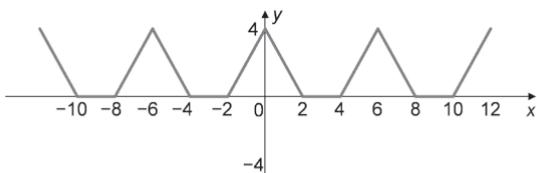
Fonte: elaborada pelo autor.

e) Extensão par:



Fonte: elaborada pelo autor.

Extensão ímpar:



Fonte: elaborada pelo autor.

**2.** Se uma função  $f$  é periódica com período  $T = 2L$ , os coeficientes de sua expansão em série de Fourier serão dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left[ \frac{n\pi x}{L} \right] dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \left[ \frac{n\pi x}{L} \right] dx, n = 1, 2, \dots$$

A série de Fourier para  $f$  é dada por  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left[ \frac{n\pi x}{L} \right] + b_n \text{sen} \left[ \frac{n\pi x}{L} \right]$ .

Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } -4 < x < 0 \\ C, & \text{para } 0 < x < 4 \end{cases}$$

Com período igual a 8. Os coeficientes da expansão em série de Fourier para essa função são dados pela alternativa:

a)  $\frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[ \cos \left[ \frac{\pi x}{4} \right] + \frac{1}{3} \cos \left[ \frac{3\pi x}{4} \right] + \frac{1}{5} \cos \left[ \frac{5\pi x}{4} \right] + \dots \right]$

b)  $\frac{C}{2} + \frac{3C}{\pi} \left[ \text{sen} \left[ \frac{3\pi x}{4} \right] - \frac{1}{3} \text{sen} \left[ \frac{5\pi x}{4} \right] + \frac{1}{5} \text{sen} \left[ \frac{7\pi x}{4} \right] + \dots \right]$

c)  $\frac{C}{2} + \frac{C}{3\pi} \left[ -\text{sen} \left[ \frac{\pi x}{4} \right] + \frac{1}{3} \text{sen} \left[ \frac{3\pi x}{4} \right] - \frac{1}{5} \text{sen} \left[ \frac{5\pi x}{4} \right] + \dots \right]$

d)  $\frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[ \text{sen} \left[ \frac{\pi x}{4} \right] + \frac{1}{3} \text{sen} \left[ \frac{3\pi x}{4} \right] + \frac{1}{5} \text{sen} \left[ \frac{5\pi x}{4} \right] + \dots \right]$

e)  $\frac{C}{2} + \frac{2C}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \text{sen} \left[ \frac{\pi x}{1} \right] + \frac{3}{4} \text{sen} \left[ \frac{\pi x}{3} \right] + \frac{5}{4} \text{sen} \left[ \frac{\pi x}{5} \right] + \dots \right]$

**3.** Se as funções  $f$  e  $f'$  são contínuas por partes no intervalo  $]-L, L[$  e  $f$  é uma função periódica par com período  $2L$ , teremos, das propriedades das funções pares e ímpares, que o produto  $f(x) \cos \left[ \frac{n\pi x}{L} \right]$  é uma função par e que o produto  $f(x) \text{sen} \left[ \frac{n\pi x}{L} \right]$  é uma função ímpar.

Portanto os coeficientes de Fourier da função  $f$  são dados por  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 0$  e  $b_n = 0, \forall n > 0$  e  $f$  possui série de Fourier apenas em cossenos.

Resultado análogo vale se as funções  $f$  e  $f'$  são contínuas por partes no intervalo  $]-L, L[$  e  $f$  for periódica ímpar de período  $2L$ . Então a função  $f$  possui série de Fourier apenas em senos.

Considere a função  $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} + x, & -5 \leq x \leq 0 \\ \frac{5}{2} - x, & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$  e a extensão periódica dessa

função (você terá uma “onda triangular”).

Denote por  $f_2(x)$  a série de Fourier para  $f$  sobre todo o domínio de  $f$ , denote por

$f_2(x)$  a série em senos de Fourier para a função  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$  e por

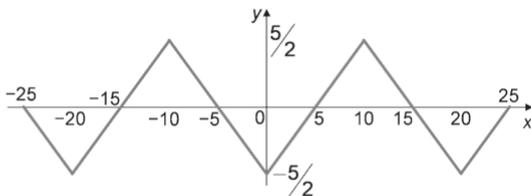
$f_3(x)$  a série em cossenos de Fourier para a função  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ .

Então é correto afirmar que:

a)  $f_1(x)$  possui expansão em série de Fourier dada por

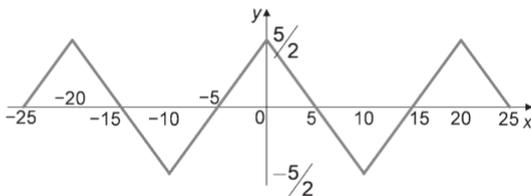
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n\pi)^2} (1 - \cos(5n\pi)) \operatorname{sen}(n\pi x) = \frac{10}{\pi^2} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{10}{9\pi^2} \operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{10}{25\pi^2} \operatorname{sen}(5\pi x) + \dots$$

b)  $f_2(x)$  converge para a extensão periódica par da função  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ , cujo gráfico é dado por:



Fonte: elaborada pelo autor.

c)  $f_3(x)$  converge para a extensão periódica ímpar da função  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$ , cujo gráfico é dado por



Fonte: elaborada pelo autor.

d) Os coeficientes para a série de Fourier em cossenos de  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$  são  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} (1 - \cos(5n\pi)), \forall n > 0$  e  $b_n = 0, \forall n > 0$ .

e) Os coeficientes para a série de Fourier em senos de  $g(x) = \frac{5}{2} - x, 0 \leq x \leq 5$  são  $a_n = 0, \forall n \geq 0$ ,  $b_n = \frac{4}{(n\pi)^2} \left( 7 - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right), \forall n > 0$ .

## Seção 2.3

### Aplicações das séries de Fourier

#### Diálogo aberto

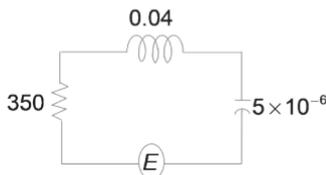
Após estudar as séries de Fourier, chegou a hora de aplicá-las na resolução de problemas de engenharia. É o que faremos nesta seção.

As séries de Fourier podem ser utilizadas para resolver um tipo de equação diferencial chamado de equação de derivadas parciais (costuma-se utilizar a abreviação EDP). Neste tipo de equação diferencial temos a presença de derivadas parciais de uma função desconhecida. Existem muitos problemas importantes na física e na engenharia nos quais temos uma geometria específica: pode ser a condução do calor em uma barra (que nos levará a um problema em um retângulo) ou a vibração de uma membrana circular. Tais configurações geométricas impõem condições sobre os valores da função incógnita na fronteira da figura geométrica. Esses problemas recebem, então, o nome de problemas de valores de contorno (abrevia-se por PVC). É interessante recordar que, quando estudamos as equações diferenciais ordinárias (EDOs), estudamos problemas de condição inicial (precisávamos informar os valores da função incógnita para  $t = 0$ ). Observe que temos agora uma mudança de "qualidade" no tipo de problemas que estamos estudando.

As séries de Fourier foram desenvolvidas, inicialmente, para resolver equações diferenciais que modelam a condução do calor em uma barra. Mas elas também podem ser utilizadas na resolução de outras equações diferenciais. séries de Fourier também são utilizadas para resolver equações diferenciais que modelam uma viga simplesmente apoiada.

Além dessas aplicações, as Séries de Fourier, também podem ser aplicadas para se obter a resposta de um circuito elétrico sujeito a uma força eletromotriz periódica  $E(t)$ , como apresentado na Figura 2.13.

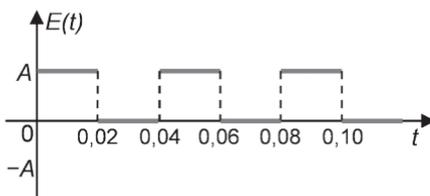
Figura 2.13 | Circuito elétrico com força eletromotriz periódica



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que a força eletromotriz  $E(t)$  seja da forma apresentada no gráfico da Figura 2.14:

Figura 2.14 | Força eletromotriz



Fonte: elaborada pelo autor.

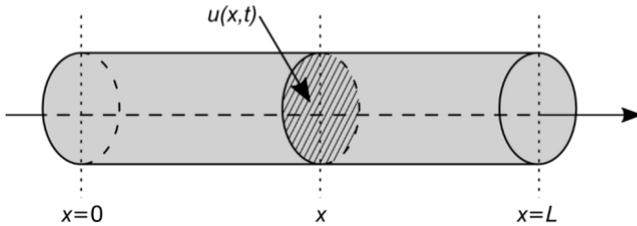
Lembremos de suas atribuições na empresa de software científico: você deve produzir conteúdo teórico para os fundamentos do software a ser desenvolvido por uma empresa prestadora de serviços de engenharia. Nesse sentido, a ideia é que você apresente a resolução de um problema com valores numéricos como sendo um exemplo dos desenvolvimentos teóricos. É proposto, ainda, que você exponha a resolução das seguintes questões: como a corrente desse sistema depende do valor  $A$  da força eletromotriz? Se  $A$  duplicar, é correto concluir que a corrente resposta também será duplicada?

## Não pode faltar

### 1. Problemas de valores de contorno e séries de Fourier

Joseph-Baptiste Fourier apresentou para a Academia Francesa de Ciências, em 1807, uma primeira memória de suas pesquisas sobre o calor. Em 1822, ele publicou sua notável obra *Theorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor), na qual expôs seus trabalhos sobre a condução do calor em uma barra homogênea utilizando o que chamamos atualmente de séries de Fourier. Considere a Figura 2.15. A função representa o calor em uma barra homogênea na posição  $x$  e no instante  $t$ .

Figura 2.15 | Condução do calor em uma barra homogênea



Fonte: elaborada pelo autor.

A modelagem matemática desse problema recai em uma equação a derivadas parciais (abreviadamente, EDP) do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

denominada **equação unidimensional do calor** (unidimensional pois temos apenas uma variável para representar o espaço). Nos referiremos a ela simplesmente como **equação do calor**.



**Pesquise mais**

A equação do calor não será deduzida nesse texto, mas você pode consultá-la no apêndice A do capítulo 10 do seguinte livro:

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 416 p.

A dedução está também disponível nas obras de Edwards e Penney (1999) e Zill (2001).

Em EDPs temos a presença de derivadas parciais da função incógnita, algo que não está presente em equações diferenciais ordinárias (EDOs), tema que possivelmente já seja do seu conhecimento. Na equação do calor, consideramos  $u$  como uma função das variáveis  $x$  e  $t$ , isto é,  $u = u(x, t)$ , e  $k$  uma constante que depende do material e está associada com a forma como o calor se difunde nele.

Com o conhecimento que temos até o momento, não é possível resolvermos a equação do calor, e é preciso, ainda, detalhar as condições auxiliares do problema.

Nessa classe de problemas precisamos definir dois tipos de condições:

1. Condições iniciais (ou seja, qual a temperatura inicial da barra).
2. Condições de contorno (nesse caso, quais são as temperaturas da barra nas extremidades da mesma em qualquer instante de tempo, ou seja, em  $x = 0$  e  $x = L$ ).

A **condição inicial** é dada por uma condição do tipo  $u(x, 0) = f(x)$ . Esta condição significa que no instante inicial,  $t = 0$ , a temperatura  $u$  da barra é dada por uma função  $f(x)$ .

Já como **condições de contorno** vamos assumir, por enquanto, que nas extremidades da barra a temperatura é zero:  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Temos, então, o que é denominado de um problema de valores de contorno dado pelas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

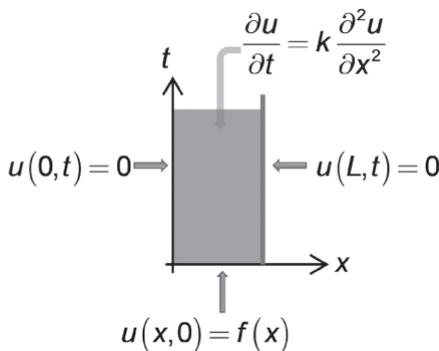
$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

para  $x \in ]0, L[, t > 0$ .

Na Figura 2.16 ilustramos geometricamente as condições anteriores.

Figura 2.16 | Geometria do problema de contorno representado pelas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u(0, t) = u(L, t) = 0$$



Fonte: elaborada pelo autor.

Não é possível escrever a solução da maior parte das equações diferenciais (sejam EDOs ou EDPs) em termos de funções elementares. Em algumas poucas situações, dependendo do tipo da EDP e da

geometria do problema (retangular e circular, são situações frequentes), existem procedimentos para determinar uma solução da EDP. Mesmo assim, essa solução será escrita como uma série infinita ou alguma integral não trivial. A vantagem de obtermos essas soluções nessas situações especiais é que elas proporcionam um entendimento e uma compreensão mais qualitativa das situações mais complexas. Existem poucos métodos gerais para resolução de EDPs. Um desses métodos é o **método da separação de variáveis**. Esse método baseia-se no princípio da superposição. A aplicação do método de separação de variáveis nos conduz às séries de Fourier.

Para aplicar o método, vamos supor que a solução do problema de valores de contorno dado pelas equações  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

$u(x,0) = f(x)$  e  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  possui uma solução  $u(x,t)$  que possa ser escrita na forma  $u(x,t) = X(x)T(t)$ , em que a função

$X$  depende apenas da variável  $x$  e a função  $T$  depende apenas de  $t$ .

Como a função  $X$  depende apenas da variável  $x$ , vale que  $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$

e  $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$ . Assim,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$ . Aqui a notação  $X''$  significa

que estamos efetuando a derivada da função  $X(x)$  duas vezes e, como essa função é apenas função da variável  $x$ , não é uma derivada parcial. Além disso, vamos assumir que as funções  $X$  e  $T$  não sejam

identicamente nulas. Substituindo as expressões para  $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$  e

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$  em  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  temos:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

Então temos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

A equação  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}$  é válida para todo  $x \in ]0, L[, t > 0$ .

Portanto, tem que ser igual a uma mesma constante. Vamos denominá-la de **constante de separação** e representá-la pela letra grega  $-\lambda$  (veremos que é conveniente adotar o sinal negativo). Logo:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ e } \frac{T'(t)}{T(t)} = -k\lambda.$$

Temos agora as duas equações diferenciais:  $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$  e  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ .

Neste ponto, usamos as condições de contorno nas equações  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ :  $X(0)T(t) = 0$  e  $X(L)T(t) = 0$ .

Como estamos supondo que  $T$  não é identicamente nula, necessariamente devemos ter  $X(0) = X(L) = 0$ . Assim, a função  $X$  satisfaz ao problema de valor de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0.$$



### Assimile

O problema de contorno apresentado em  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$  recebe o nome de **problema de autovalor**. Para cada solução não trivial em  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$  temos associados valores de  $\lambda$  que recebem o nome de **autovalores**. As soluções associadas a esses autovalores são denominadas **autofunções**.

Para apresentar a solução do problema de autovalor  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$  consideraremos as três possibilidades para  $\lambda$ : positivo, negativo e nulo. Vejamos cada uma delas.

i) Se  $\lambda = 0$ , a equação diferencial do **problema de autovalor**  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$  reduz-se a  $X''(x) = 0$ , cuja solução é  $X(x) = ax + b$ . Lembrando das condições de contorno  $X(0) = X(L) = 0$ , forçosamente  $a = b = 0$ , o que implica na solução identicamente nula  $X(x) = 0, \forall x \in ]0, L[$ . Assim,  $\lambda = 0$  não é autovalor para o **problema de autovalor**  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$ .

ii) Se  $\lambda < 0$ , a solução da equação diferencial é  $X(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Também neste caso, em função das condições de contorno  $X(0) = X(L) = 0$ , teremos  $a_1 = a_2 = 0$  e a única solução será a solução trivial. Assim, o **problema de autovalor**  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$  não possui autovalores negativos.

iii) Se  $\lambda > 0$ , seguiremos o padrão adotado pela literatura e escrevemos  $\lambda = \alpha^2$ . A solução geral da equação diferencial  $X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$  é  $X(x) = a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \text{sen}(\alpha x)$ .

A condição de contorno  $X(0) = 0$  implica que  $a_1 = 0$ .

Para que  $X(L) = a_2 \text{sen}(\alpha L) = 0$  com  $a_2 \neq 0$ , devemos ter

$$\alpha L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Portanto:} \quad \alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ou seja, neste caso teremos infinitos autovalores positivos:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{cujas autofunções associadas são}$$

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{adotamos } a_2 = 1).$$

Voltando à equação  $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$ , temos que uma solução desta equação é  $T(t) = e^{-k\lambda t}$ . Temos, então,

$$u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Contudo, não podemos assegurar que  $u_n(x, t)$  satisfaçam à condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ .

Pelo princípio da superposição a função  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$

satisfará  $u(x, 0) = f(x)$  para valores a determinar dos coeficientes  $c_n$ .

Da condição inicial, temos  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$ .

Do que já estudamos sobre Séries de Fourier, temos que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Com isso, resolvemos o problema de

autovalor  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(L) = 0$ , sendo a solução dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t),$$

com  $u_n(x, t)$  e  $c_n$  descritos anteriormente.



### Pesquise mais

Para saber mais sobre o princípio da superposição, sugerimos a consulta à página 110 do seguinte livro-texto:

ÇENGEL, Y. A.; J. PALM III, W. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: AMGH, 2014. 600 p.

Consulte, também, a videoaula da Univesp TV que aborda a explicação anterior sobre o Método de Separação de variáveis. UNIVESP. **Cálculo III - Aula 21 - Introdução ao estudo das equações diferenciais parciais**.

Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=u\\_UZuWXNfu8&list=PLyMTbTyU2PsSxyp05IKNIImvXWVh5jfxIH](https://www.youtube.com/watch?v=u_UZuWXNfu8&list=PLyMTbTyU2PsSxyp05IKNIImvXWVh5jfxIH)>. Acesso em: 25 nov. 2017.

## 2. Aplicação de séries de Fourier: circuito elétrico

Veremos agora um exemplo de utilização das séries de Fourier na forma complexa em equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem. Na sequência, particularizaremos a solução para um circuito elétrico RLC. Considere a EDO:

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $f(t)$  uma função eletromotriz periódica (que pode ser descontínua, como uma onda quadrada, por exemplo).

A ideia básica para resolver uma equação diferencial com séries de Fourier consiste em substituir na equação a expansão em série de Fourier das funções incógnitas e da força externa na equação, igualar os coeficientes da expansão e, então, expressar os coeficientes da função incógnita em termos dos coeficientes da função que representam a força externa. Vejamos nesse exemplo o passo a passo desse procedimento.

Para determinar a função  $x(t)$ , admitimos que tanto  $x(t)$  quanto  $f(t)$  tenham desenvolvimento em série de Fourier, dados a seguir, na forma complexa.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t} \text{ e } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \text{ em que } \omega = \frac{2\pi}{2L}.$$

Para que possamos utilizar séries de Fourier na resolução de equações diferenciais é necessário efetuar a derivação da função incógnita representada por série de Fourier na equação. Contudo, não é qualquer série infinita que pode ser derivada termo a termo. O teorema seguinte fornece as condições para diferenciação termo a termo de uma série de Fourier.



### Assimile

Teorema (diferenciação termo a termo de séries de Fourier (EDWARDS; PENNEY, 1999)): considere Considere função  $f$  contínua em toda reta, periódica com período  $2L$ . Considere, ainda, que a derivada de  $f$  é derivável por partes para toda reta real. Então podemos derivar a série de Fourier da função  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right)$  e vale que:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{n\pi}{L} a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{n\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right).$$

Derivando  $x(t)$  termo a termo, temos  $x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega\beta_n e^{in\omega t}$  e

$$x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\omega^2\beta_n e^{in\omega t}.$$

Substituimos as expressões para  $f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $x'(t)$  e  $x''(t)$  na equação diferencial  $ax'' + bx' + cx = f(t)$ :

$$a \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 \omega^2 \beta_n e^{in\omega t} \right] + b \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} in \beta_n e^{in\omega t} \right] + c \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$$

$$\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-an^2 \omega^2 + bin\omega + c) \beta_n e^{in\omega t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$$

Vale a igualdade coeficiente a coeficiente:  $(-an^2 \omega^2 + bin\omega + c) \beta_n = \alpha_n$ , ou seja, teremos a expressão a seguir para os coeficientes de  $x(t)$ :

$$\beta_n = \frac{1}{(-an^2 \omega^2 + bin\omega + c)} \alpha_n.$$

Os coeficientes  $\alpha_n$  são os coeficientes da expansão em série de Fourier da função eletromotriz, dados por  $\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\omega t} dt$ .

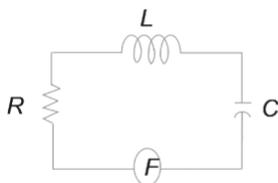
Entre os diversos problemas em que podemos aplicar as séries de Fourier, temos a determinação da corrente elétrica  $I(t)$  em um circuito elétrico RLC.



### Exemplificando

Neste ponto, vamos particularizar nossa solução para a EDO definida a partir do circuito apresentado na Figura 2.17

Figura 2.17 | Circuito elétrico RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Suponha que uma força eletromotriz periódica  $f(t)$  atua sobre esse circuito. Queremos determinar a corrente  $I(t)$  nesse circuito elétrico. A equação diferencial que modela a corrente  $I(t)$  é

$$I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{CL} I(t) = f(t).$$

A corrente  $I(t)$  será periódica com o mesmo período que a força eletromotriz  $f(t)$ . A força eletromotriz pode ser, por exemplo, uma onda quadrada. Suponha que a função  $f(t)$  seja definida por

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < 1 \\ 0, & t = 1 \text{ ou } t = 2 \\ -A, & 1 < t < 2 \end{cases}, \text{ em que } A \text{ é um número real positivo.}$$

Comparando as equações  $ax'' + bx' + cx = f(t)$  e  $I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{CL}I(t) = f(t)$ , temos que  $a=1$ ,  $b=\frac{R}{L}$  e  $c=\frac{1}{CL}$ .

Substituindo em  $\beta_n = \frac{1}{(-an^2\omega^2 + bin\omega + c)}\alpha_n$  temos:

$$\beta_n = \frac{1}{\left(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL}\right)}\alpha_n. \text{ O tamanho das fontes não está padronizado.}$$

Favor checar. expansão em série de Fourier da força eletromotriz. Eles são

$$\text{dados por } \alpha_n = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Concluindo, a corrente será dada por  $I(t) = \sum_{n=-\infty, n \text{ ímpar}}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$  com

$$\beta_n = \frac{1}{\left(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL}\right)} \frac{4A}{n\pi}, n \text{ ímpar.}$$

### 3. Aplicação de séries de Fourier: condução do calor em uma barra

Considere uma barra metálica de 80 cm de comprimento, aquecida lateralmente a 40 °C ao longo da barra. As extremidades da barra são mantidas a 0 °C para todo  $t > 0$ . Determine a expressão para a temperatura  $u(x, t)$  da barra ao longo do tempo.

No item 1 desta seção, vimos que a solução do problema de valor de contorno apresentado nas equações  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

$u(x, 0) = f(x)$  e  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  é dada por  $c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , em que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ e } u_n(x, t) = e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

No nosso caso temos que  $L = 80$  e  $f(x) = 40^\circ$ , para  $0 < x < 80$ . Substituindo esses valores:

$$\text{Então, } u_n(x, t) = e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{6400}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{80} \right), n = 1, 2, 3, \dots \text{ e}$$

$$c_n = \frac{2}{80} \int_0^{80} 40 \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{80} \right) dx = \int_0^{80} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{80} \right) dx = \frac{80}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

Que fica:  $c_n = \begin{cases} \frac{160}{n\pi}, n \text{ ímpar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}$ . Finalmente, a solução  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$

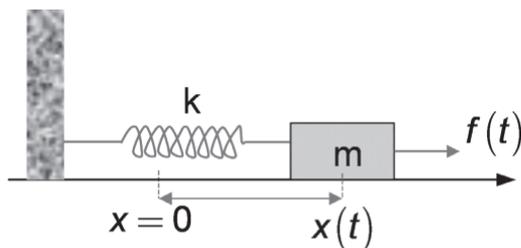
será dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{160}{n\pi} e^{-k \frac{n^2 \pi^2 t}{6400}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{80} \right).$$

#### 4. Aplicação de séries de Fourier: sistemas mecânicos

Considere um sistema com uma massa  $m$  e uma mola de constante  $k$ , com uma força externa periódica  $f$  ímpar de período 4. A hipótese de paridade da força externa é utilizada apenas para facilitar os cálculos neste exemplo. Representamos por  $x(t)$  o deslocamento da massa a partir do ponto de equilíbrio. Esse sistema está representado na Figura 2.18

Figura 2.18 | Sistema mecânico com força externa.



Fonte: elaborada pelo autor.

O deslocamento  $x(t)$  satisfaz à equação diferencial  $mx'' + kx = f(t)$ , cuja solução geral é dada por  $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \text{sen}(\omega_0 t) + x_{part}(t)$ , em que  $x_{part}(t)$  representa uma solução particular da equação

diferencial e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência natural. A partir das condições iniciais do problema é possível determinar os valores para  $a$  e  $b$ . Não nos ocuparemos desse aspecto aqui. Nosso foco, neste momento,

é na determinação de  $x_{part}(t)$  periódica, usando séries de Fourier.

Devemos supor que, para todo  $n$ ,  $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$ .



Refleta

Qual o significado físico da hipótese  $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$ ? Existe alguma situação na engenharia para a qual a igualdade  $\frac{n\pi}{L} = \omega_0$  possa resultar em algum problema?

Como a força externa é supostamente ímpar, vamos determinar uma solução particular periódica da forma  $x_{part}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

Para resolvermos um problema específico, suponha que a força externa seja uma onda quadrada dada por:  $f(t) = \begin{cases} 3, 0 < x < 2 \\ -3, 2 < x < 4 \end{cases}$ .

Como assumimos  $f$  de período 4, então  $2L = 4$ , portanto  $L = 2$ . Sua expansão em série de Fourier é  $f(t) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ .

Substituímos as expressões para  $x_{part}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$  e  $f(t) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$  na equação diferencial  $m x'' + k x = f(t)$ .

$$m \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{4} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( k \alpha_n - \frac{m n^2 \pi^2}{4} \alpha_n \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Então os coeficientes  $\alpha_n$  são dados por  $\alpha_n = \frac{1}{\left[ k - \frac{m n^2 \pi^2}{4} \right]} \frac{6}{\pi} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}$ .

## Sem medo de erro

Recordemos que você foi contratado por uma empresa de prestação de serviços em engenharia para produzir conteúdo teórico para os fundamentos de um software de resolução de equações

diferenciais em estudo pela empresa. Você já entregou parte desse material teórico e, para concluir o projeto, a ideia é que você apresente um exemplo com valores numéricos. É nesse contexto que se insere a questão de como obter a resposta do circuito elétrico apresentado na Figura 2.13 desta seção sujeito a uma força eletromotriz do tipo onda quadrada (apresentada na Figura 2.14 desta seção).

Seguindo a exposição feita na subseção 2 (Aplicação de séries de Fourier: circuito elétrico), temos que a equação diferencial que modela esse circuito é  $I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{CL}I(t) = E(t)$ , em que a força eletromotriz é a onda quadrada apresentada na Figura 1.29 e da Figura 1.28 temos os valores  $R = 350\Omega$ ,  $L = 0,04H$  e  $C = 5\mu F$ .

Os coeficientes da expansão em série de Fourier da força eletromotriz são dados por  $\alpha_n = \frac{1}{2P} \int_{-P}^P E(t) e^{-in\omega t} dt$ , em que estamos adotando, neste caso,  $P$  para representar o período da força eletromotriz. No caso da onda quadrada apresentada na Figura 1.29 temos  $P = 0,02$  e  $2P = 0,04$ . Assim

$$\alpha_n = \frac{1}{0,04} \int_0^{0,02} A e^{-in\omega t} dt = 25A \left[ \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right]_0^{0,02} = 25A \left[ \frac{e^{-in\frac{\pi}{0,02}t}}{-in\frac{\pi}{0,02}} \right]_0^{0,02} = A \left[ \frac{1 - e^{-in\pi}}{2in\pi} \right].$$

$$\alpha_n = A \left[ \frac{1 - e^{-in\pi}}{2in\pi} \right] = \frac{A}{2in\pi} [1 - (\cos n\pi - i \operatorname{sen} n\pi)] = \frac{A}{in\pi}, n \text{ ímpar}.$$

$$\text{Que fica: } \alpha_n = \begin{cases} \frac{A}{in\pi}, n \text{ ímpar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}.$$

$$\text{Temos ainda: } \alpha_0 = \frac{1}{0,02} \int_0^{0,04} A dt = 2A.$$

Como mostramos na subseção 2, os coeficientes da função corrente serão dados por  $\beta_n = \frac{1}{\left(-n^2\omega^2 + \frac{R}{L}in\omega + \frac{1}{CL}\right)} \alpha_n$ . A frequência

natural do circuito é dada por  $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$ .

Então, a expressão para os coeficientes  $\beta_n$  pode ser reescrita como

$$\beta_n = \frac{1}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2) + \frac{R}{L}in\omega} \alpha_n.$$

Agora você pode substituir os valores para  $R$ ,  $L$  e  $C$  na expressão anterior para os coeficientes  $\beta_n$ . Assim, se duplicarmos o valor de  $A$ , a corrente também será duplicada.

Neste momento, você pode sintetizar os resultados obtidos nesta seção junto aos resultados já obtidos nas duas primeiras seções desta unidade e enviar seu relatório técnico para a equipe de desenvolvimento do software.

## Avançando na prática

### Equações diferenciais com oscilações forçadas descontínuas ímpares

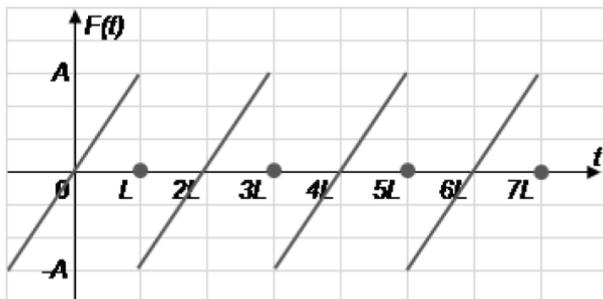
#### Descrição da situação-problema

Suponha que você esteja prestando serviços para um escritório de engenharia que vem desenvolvendo análises para a indústria de máquinas e equipamentos industriais. Para modelar tais situações são utilizados problemas de contorno do tipo:

$mx'' + kx = F(t)$ ,  $0 < t < L$   $x(0) = x(L) = 0$  em que  $F(t)$  representa uma força externa descontínua ímpar.

Considere que a função  $F(t) = \frac{A}{L}t$ ,  $A > 0$  seja periódica de período  $2L$ , como vemos na Figura 2.19 a seguir.

Figura 2.19 | Força externa periódica



Fonte: elaborada pelo autor.

## Resolução da situação-problema

A extensão periódica da função  $F(t)$  é ímpar de período  $2L$ . Os coeficientes  $a_n$  da série de Fourier para  $F(t)$  são todos nulos. Os coeficientes  $b_n$  para  $F(t)$  são dados por:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{A}{L} t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Efetuada a integração por partes teremos

$$b_n = \frac{2A}{L} \int_0^L t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

A série de Fourier para  $F(t)$  será  $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ .

Uma solução particular da equação diferencial pode ser escrita como uma soma de senos:

$$x_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

A segunda derivada de  $x_{\text{part}}(t)$  é  $x''_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ .

Substituindo na equação diferencial temos:

$$m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] + k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Igualando os coeficientes de  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$  temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right) c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Então:  $\left( -\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right) c_n = \frac{2A}{n\pi} (-1)^{n+1}$ .

Podemos escrever os coeficientes  $c_n$ :  $c_n = \frac{2A}{n\pi \left( -\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right)} (-1)^{n+1}$ .

Finalmente, temos que:  $x_{\text{part}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi \left( -\frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + k \right)} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ .

## Faça valer a pena

**1.** A seguir apresentamos, nos itens de (A) até (D), vários comprimentos de barras, indicados por  $L$  (em centímetros), e a temperatura inicial da barra, indicada por  $t_0$  (em graus Celsius). Nos itens identificados pelos algarismos romanos de (I) até (IV) temos problemas de valores de contorno que representam as condições dadas pelos itens (A) a (D).

(A)  $L = 120, t_0 = 30$

$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x, 0) = 40$$
$$u(0, t) = u(80, t) = 0$$

(B)  $L = 30, t_0 = 120$

$$(II) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x, 0) = 30$$
$$u(0, t) = u(120, t) = 0$$

(C)  $L = 80, t_0 = 40$

$$(III) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x, 0) = 120$$
$$u(0, t) = u(30, t) = 0$$

(D)  $L = 150, t_0 = 75$

$$(IV) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x, 0) = 75$$
$$u(0, t) = u(150, t) = 0$$

A alternativa que contém a associação correta das letras com os algarismos romanos é:

- a) A – I; B – II; C – III; D – IV.
- b) B – I; A – II; D – III; C – IV.
- c) C – I; A – II; B – III; D – IV.
- d) B – I; C – II; D – III; A – IV.
- e) D – I; A – II; C – III; B – IV.

**2.** O problema do calor com condições de contorno homogêneas é dado pelas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x, 0) = f(x)$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

A constante  $k$  é denominada de difusividade térmica. Na Tabela 2.2, a seguir, apresentamos o valor de  $k$  para alguns materiais.

Tabela 2.2 | Valores de difusividade térmica para materiais selecionados

Material	$k \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right)$
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Tijolo	0,0038

Fonte: Boyce; Diprima (2002, p. )

Considere que uma barra de cobre com 40 cm de comprimento seja submetida a um ambiente com temperatura de 120 °C. No instante inicial, as laterais da barra são colocadas em contato com um resfriador a temperatura de 0 °C e mantidas assim para todo  $t > 0$ .

A expressão para a solução  $u(x,t)$  é dada por:

$$a) \quad u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1600}{n^2 \pi^2} e^{-1,14 \frac{n\pi t}{4800}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{60} \right).$$

$$b) \quad u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1600}{n\pi} e^{-1,14 \frac{n^2 \pi^2 t}{4800}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{120} \right).$$

$$c) \quad u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1200}{n\pi} e^{-\frac{n\pi t}{40}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{80} \right).$$

$$d) \quad u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{480}{n\pi} e^{-1,14 \frac{n^2 \pi^2 t}{1600}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{40} \right).$$

$$e) \quad u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2400}{n^2 \pi^2} e^{-\sqrt{1,14} \frac{n^2 \pi^2 t}{3200}} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{220} \right).$$

**3.** No problema de valores de contorno estudado nesta seção, diz-se que as condições de contorno são homogêneas (iguais a zero). Apenas para relembrarmos, esse problema é dado pelas equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1a)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (1b)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad (1c)$$

para  $x \in ]0, L[, t > 0$ .

Dizemos que temos condições de contorno não homogêneas se o problema de valores de contorno for dado pelas equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2a)$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \quad (2b)$$

$$u(0, t) = f_1(t), t > 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = f_2(t), t > 0 \quad (2c)$$

para  $x \in ]0, L[, t > 0$ , em que  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são as temperaturas nas extremidades da barra.

No caso particular em que  $f_1(t) = A$  e  $f_2(t) = B$  se tomarmos

$v(x, t) = A + \frac{(B-A)}{L}x$  a função  $u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t)$  será solução

da equação não homogênea dada pelas equações  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$  e  $u(0, t) = f_1(t), t > 0$  e  $u(L, t) = f_2(t), t > 0$  com  $f_1(t) = A$  e

$f_2(t) = B$  sendo  $u^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{L}} \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$ .

Em que os coeficientes  $c_n$  são os coeficientes seno da função

$$f(x) - v(x) = f(x) - A - \frac{(B-A)}{L}x :$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - A - \frac{(B-A)}{L}x \right] \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx .$$

Considere o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 2, 0 < x < 6$$

$$u(6, t) = 5, t > 0 \quad \text{e} \quad u(0, t) = 5, t > 0$$

para  $x \in ]0, 6[, t > 0$ .

Considere as afirmações a seguir:

I. A solução deste problema é dada por  $u(x, t) = 2 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{6}} \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{6}\right)$

em que  $c_n = \frac{6 \cos(n \pi)}{n \pi}$ .

II. A solução deste problema é dada por  $u(x,t) = \frac{5x}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k_t}{6}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{6}\right)$  em que  $c_n = \frac{6}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ .

III. A solução deste problema é dada por  $u(x,t) = \frac{x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k_t}{3}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$  em que  $c_n = \frac{n^2\pi^2}{6} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

Agora, marque a alternativa correta:

- a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
- b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
- c) São verdadeiras apenas as afirmações II e III.
- d) São verdadeiras apenas as afirmações I e III.
- e) Todas as afirmações são falsas.

# Referências

- ALENCAR, M. S. de. A Análise de Fourier e o Aquecimento Global. Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Disponível em: <[http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Aquecimento\\_Global\\_Fourier.pdf](http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Aquecimento_Global_Fourier.pdf)>. Acesso em: 17 nov. 2017
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo Volume II**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1168 p.
- ARFKEN, G. **Física Matemática: métodos matemáticos para Engenharia e Física**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 900 p.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de Contorno**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 680 p.
- BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: LTC, 1978. 724 p.
- ÇENGEL, Y. A.; J. PALM III, W. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: AMGH, 2014. 600 p.
- EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. **Cálculo com Geometria Analítica: volume 3**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 216 p.
- EDWARDS C. H. ; PENNEY, D. **Equações diferenciais elementares: com problemas de contorno**. 3 ed. Rio de Janeiro: Prentice-hall do Brasil, 1995. 642 p.
- FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 2 ed. Rio de Janeiro: CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico)/IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1977. 274 p.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B**. 2 ed. São Paulo: Pearson, 2011. 435 p.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo: Volume 4**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1997. 481 p.
- SPIEGEL, M. **Cálculo Avançado**. Rio de Janeiro: Mcgraw-hill, 1971. 400 p. (Coleção Schaum).
- STEWART, J. **Cálculo Volume II**. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 1164 p.
- THOMAS, G. B. et al. **Cálculo Volume 2**. 10 ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005. 570 p.
- WYLIE, C. Ray, BARRETT, Louis C. **Advanced Engineering Mathematics**. Fifth Edition. Singapore: McGraw-Hill International Editions, 1985. 1103 p.
- ZILL, D. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 433 p.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007. 380 p.



# Equações Diferenciais Parciais e a Equação do Calor

## Convite ao estudo

Você já aprendeu a trabalhar com equações diferenciais ordinárias, ou seja, equações diferenciais em que a função procurada só depende de uma variável. Esse tipo de equação é muito importante, porém, a maioria dos modelos matemáticos relacionados a problemas de engenharia envolvem funções de várias variáveis. As equações diferenciais nesses problemas, por sua vez, envolvem derivadas parciais de funções de duas ou mais variáveis; portanto, são conhecidas como equações diferenciais parciais (EDPs).

Nesta unidade aprenderemos como reconhecer uma equação diferencial parcial e como utilizar uma técnica muito eficiente, chamada separação de variáveis, para transformar uma equação diferencial parcial num sistema de EDOs.

Para tornar os estudos mais interessantes, vamos supor que você ofereça consultorias na área de engenharia e uma empresa fabricante de jogos para computador contratou você para dar suporte à equipe de desenvolvimento. O objetivo da empresa é aumentar o realismo nos efeitos gráficos de um game que está sendo iniciado. Nele, alguns objetos terão o efeito de aquecimento e dispersão de calor, tendo o diretor de desenvolvimento do game sido informado de que esses efeitos são modelados por equações diferenciais, o que motivou a contratação de um profissional com sua expertise.

Em uma primeira reunião com o diretor de desenvolvimento, foi solicitado a você dividir esse trabalho em 3 etapas (uma para cada seção desta unidade): na primeira, é requerido que você faça um apanhado geral sobre equações diferenciais parciais e

como elas podem ser úteis para descrever fenômenos físicos que estarão presentes no jogo. Além disso, é interessante que você apresente um exemplo simples de equação; na segunda, é necessário que você apresente a modelagem da equação do calor para uma barra; por fim, na última etapa, é necessário que você mostre a solução algébrica dessa equação, pois é ela que será implementada no código fonte do jogo.

Achou interessante esse desafio? Para solucioná-lo, além dos conceitos já mencionados, precisaremos relembrar conceitos relacionados a EDOs e a funções de várias variáveis (derivadas, integrais etc.). Pronto para começar?

# Seção 3.1

## Introdução às Equações Diferenciais Parciais

### Diálogo aberto

Nesta seção começaremos a estudar Equações Diferenciais Parciais. Inicialmente vamos aprender a classificar EDPs segundo a ordem, linearidade e homogeneidade. Isso é muito importante, pois neste livro trabalharemos somente com EDPs lineares (de primeira e segunda ordem).

Outro assunto fundamental, que será tratado nesta seção, é a técnica de separação de variáveis, que é uma técnica que permitirá a você transformar uma EDP em um sistema de EDOs, que você já aprendeu a resolver (apesar de alguns detalhes, principalmente aqueles que envolvem as condições iniciais e de contorno, dificultarem bastante o processo).

Em sua primeira tarefa a ser realizada para a empresa fabricante do game, à qual você está fornecendo consultoria, você precisa dar uma explicação geral para a equipe, com um modelo mais simples, antes dela começar a trabalhar com o modelo de simulação da dispersão do calor. Isso irá nortear o pessoal de desenvolvimento para as próximas etapas.

Para essa primeira etapa, você pode trabalhar com a equação

$$5u_x(x,t) + 2u_t(x,t) = 0$$

cujas solução é uma função  $u(x,t)$ .

Nesse caso, você precisa explicar para a equipe como implementar uma estratégia para resolver essa equação. Como você procederia?

## Não pode faltar

### Definições iniciais e exemplos

Já é do seu conhecimento o tema Equações Diferenciais Ordinárias, que são equações cujas soluções são funções diferenciáveis e de uma variável. Por exemplo, a equação diferencial  $y'(x) = y(x)$  tem como solução a função  $y(x) = ke^x$ , na qual  $k$  é uma constante qualquer.



#### Refleta

Por que a função  $y(x) = ke^x$  é solução de  $y'(x) = y(x)$ ? Como podemos nos certificar disso?

Um fato importante que você precisa saber sobre EDPs: ao contrário das EDOs, em que o Teorema de Existência e Unicidade garante que uma grande classe de equações diferenciais ordinárias possui solução (e mostra, inclusive, como explicitar essa solução), não existe um resultado tão bom para equações diferenciais parciais. Entretanto, para as equações que iremos considerar (equação do Calor, equação da Onda e equação de Laplace), existem estratégias para obter a solução. Além disso, essas equações têm importantes significados físicos.

Nesta seção estudaremos Equações Diferenciais Parciais (EDPs), cujas soluções serão funções de várias variáveis. Uma EDP é uma equação que envolve derivadas parciais de uma função  $u$  com respeito a duas ou mais variáveis, como  $x$ ,  $y$  ou  $t$ .



#### Exemplificando

São exemplos de EDPs as seguintes equações:

- $2yu_{xx}(x, y) + 5xu_y(x, y) = 3xyu(x, y)$
- $2x^2u_x(x, y) + u_{xy}(x, y) = 0$

## Classificação das equações diferenciais parciais

As EDPs podem ser classificadas segundo sua ordem e se são ou não lineares. A ordem de uma EDP é a maior ordem de derivação presente na equação. Diremos que a equação é linear se a função  $u$  e suas derivadas parciais aparecem com potência 1, caso contrário ela é dita não-linear.



### Exemplificando

A equação  $u_x(x, y) + u_y(x, y) = u(x, y)$  é linear e de primeira ordem. A equação  $u_{xx}(x, y) + u_y(x, y) = 1$  é linear e de segunda ordem. A equação  $(u_x(x, y))^2 + u_y(x, y) = 0$  é não-linear e de primeira ordem.

Uma EDP de primeira ordem linear cuja solução é uma função  $u(x, y)$  de duas variáveis tem sempre a forma  $a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = d(x, y)$  para certas funções  $a, b, c, d$ .



### Assimile

A solução de uma EDP é uma função que, junto com suas derivadas parciais, satisfaz a equação.



### Exemplificando

Observe que a função  $u(x, t) = x^2 + t^2$  satisfaz a EDP  $u_{xx} - u_{tt} = 0$ . De fato, note que  $u_{xx} = 2$  e  $u_{tt} = 2$ , logo  $u_{xx} - u_{tt} = 0$ .



## Refleta

No exemplo anterior vimos uma EDP cuja solução era a função  $u(x, t) = x^2 + t^2$ . Mas será que essa função também é solução da EDP  $u_x + u_t = 2(x + t)$ ?

Outra forma de classificar equações diferenciais é segundo sua homogeneidade. Em equações homogêneas, todos os termos envolvem a função procurada, que, em geral, denotamos por  $u$ , enquanto nas equações não-homogêneas existem termos que não dependem de  $u$ .



## Exemplificando

O exemplo (a) a seguir é de uma EDP homogênea, enquanto o exemplo (b) é de uma EDP não-homogênea.

a)  $2yu_{xx}(x, y) - 3xu_y(x, y) = 0$

b)  $2y^2u_x(x, y) - u_{xy}(x, y) = xy$

Principalmente em aplicações práticas, uma EDP quase sempre vem acompanhada de condições iniciais, condições de contorno, ou ambas. Você deve se lembrar do seu primeiro curso de cálculo, quando calculava integrais indefinidas (também chamadas de primitivas), cujas respostas sempre eram acompanhadas de uma constante, o que se devia ao fato de que as constantes não interferem na resposta do problema inverso. Algo parecido acontece com as EDPs.

A EDP é uma equação que envolve a função  $u(x, t)$  e suas derivadas e, em geral, vale para alguma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Quanto existirem condições adicionais impostas sobre o valor da função e suas derivadas no bordo da região, teremos um **problema de valores de contorno** e as condições serão chamadas de condições de contorno, por exemplo, se a EDP estiver definida no quadrado

$[0, 1] \times [0, 1]$  e a condição for do tipo  $u(x, t) = x + t$  nos segmentos de reta que delimitam o quadrado.

Quando a condição inicial está sobre uma variável fixada (ou avaliada sobre uma curva), então a condição é chamada de condição inicial, por exemplo, se impusermos  $u(x, 0) = \cos(x)$ , e o problema é chamado de **problema de valor inicial** (ou problema de Cauchy). Quando ambas as condições estão presentes, o problema é chamado de **problema misto**.



### Exemplificando

O problema  $u_x(x, t) = 0$  em  $\mathbb{R}^2$  com condição inicial  $u(0, x) = f(x)$  se  $x \in \mathbb{R}$  em que  $f$  é uma função dada e um problema de Cauchy.

A equação da onda  $u_t = \alpha^2 u_x x$  (na qual omitimos as variáveis independentes), definida para  $(x, t) \in (0, l) \times (0, \infty)$  com a condição inicial  $u(x, 0) = f(x), x \in [0, l]$  e condição de fronteira  $u(0, t) = 0 = u(l, t), t \geq 0$  é um problema misto. Note que para as condições funcionarem juntas, é preciso também que  $f(0) = 0 = f(l)$ . Esse tipo de condição é chamada de **condição de compatibilidade** e é bem comum em EDPs.

Resumindo, temos o seguinte:



### Assimile

Uma EDP sempre aparecerá acompanhada de condições extras sobre a função-solução, que podem ser condições iniciais, de contorno ou ambas. Além disso, todas as condições devem ser compatíveis.

## Método de separação de variáveis

Agora vamos estudar um método geral que permitirá resolver EDPs, chamado método de separação de variáveis. Nem toda EDP

pode ser resolvida por esse método, que transforma a EDP em um sistema de EDOs, nos permitindo, assim, utilizar os conhecimentos adquiridos em cursos anteriores para resolver a EDP. Vamos introduzir o método de separação de variáveis utilizando, como exemplo, a equação do calor, ou seja:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, l]$$

O método de separação de variáveis consiste em procurar uma solução  $u$  de uma forma particular. Vamos supor que a solução pode ser escrita como  $u(x, t) = X(x)T(t)$  para certas funções  $X$  e  $T$ . No momento não iremos nos preocupar com as condições iniciais e de contorno, isso será feito nas seções seguintes e também na próxima unidade.

Substituindo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  na equação, obtemos o seguinte:

$$u_t(x, t) = X(x)T'(t)$$

$$u_x(x, t) = X'(x)T(t)$$

$$u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t)$$

Portanto, se  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ , igualando as expressões anteriores, obtemos  $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$ . Nos pontos em que as funções

$X$  e  $T$  não se anulam, podemos escrever  $\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$ .

Perceba que do lado esquerdo da igualdade anterior temos uma função que só depende de  $t$ , enquanto do lado direito temos uma função que só depende de  $x$ , o que só pode acontecer se cada uma destas expressões for igual a uma constante, que denotaremos por  $\lambda$ . Assim ficamos com duas equações:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \text{ e } \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

que podem ser escritas de outra forma como  $T'(t) = \lambda T(t)$  e

$X''(x) = \frac{\lambda}{\alpha^2} X(x)$ . Lembre-se que quando você estudou EDOs já

viu como resolver essas equações diferenciais. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos  $T(t) = c_1 \exp(\lambda t)$  e  $X(x) = d_1 \exp(\sqrt{\lambda} x/\alpha) + d_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x/\alpha)$ , em que  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  são constantes reais.

Ou seja, passamos de um problema que não sabíamos como resolver (uma EDP) para um problema que conseguimos resolver (um sistema de duas EDOs, uma na variável  $x$  e outra na variável  $t$ ). Nas próximas seções veremos como lidar com as condições iniciais e de fronteira.



### Pesquise mais

O método de separação de variáveis é apresentado no Capítulo 10 da obra de Boyce e DiPrima (2015) de uma forma muito interessante. Logo no começo do capítulo é apresentada uma revisão de EDOs com valores de contorno para fronteira com dois pontos, que é muito importante no desenvolvimento do método. Vale a pena a leitura.

## Sem medo de errar

Vamos lembrar do problema colocado no começo da seção: você deve dar uma explicação para a equipe da empresa de games sobre a equação

$$5u_x(x,t) + 2u_t(x,t) = 0$$

cuja solução é uma função  $u(x,t)$ . Nesta seção você aprendeu que essa é uma equação de primeira ordem (pois só aparecem derivadas com respeito a  $t$  e  $x$ ) e também linear (pois os termos que envolvem as derivadas aparecem com potência 1).

Observe que a função-solução  $u(x,t)$  satisfaz o seguinte: a soma de 5 vezes a derivada em  $x$  da função com 2 vezes a derivada em  $t$  da função  $u$  resulta em zero. Ora, assim como no caso da técnica de separação de variáveis, para que isso aconteça, devemos

ter a função  $u$  escrita da forma  $u(x,t) = X(x) + T(t)$ . Feito isto, você poderá explicar para a equipe de desenvolvimento da empresa de games que agora basta substituir essa equação na EDP, obtendo  $5X'(x) + 2T'(t) = 0$ . Como  $X$  é uma função de  $x$  e  $T$  é uma função de  $t$ , a única forma da equação anterior ser satisfeita é se cada uma delas for uma função linear de primeiro grau (que, após derivadas, resultarão em constantes). Procedendo desta forma, obteremos que  $T(t) = -5t$ ,  $X(x) = 2x$  podem ser partes de uma solução. Juntando tudo, obtemos que uma possível solução para a EDP é  $u(x,t) = c(5 \cdot 2x - 2 \cdot 5t)$ .

## Avançando na prática

### Encontrando e verificando soluções de EDPs

#### Descrição da situação-problema

A empresa de games para a qual você presta consultoria, requisitou que você desse um treinamento mais detalhado para a equipe que vai trabalhar diretamente com o modelo matemático. Um dos conceitos básicos que você precisa certificar que sua equipe está compreendendo é o significado da solução de uma EDP. Você pode propor à sua equipe que verifique se algumas funções são soluções de uma EDP e suas condições iniciais e de contorno. Por exemplo, você poderia propor que fosse procurada uma solução polinomial para a equação  $u_{xx} + u_{tt} = 0$  com as condições  $u(0,t) = 4t^2$ .

#### Resolução da situação-problema

Esse problema pode ser explicado para a equipe de desenvolvimento da seguinte forma: como a soma das derivadas em  $x$  e em  $t$  precisa ser igual a zero, uma possibilidade é que estas

variáveis apareçam "separadas", da forma  $u(x,t) = p(x) + q(t)$ , ao invés de conter termos envolvendo produtos mistos, como  $xt$ .

Assim, substituindo na equação, obtém-se  $u_{xx} + u_{tt} = p''(x) + q''(t)$ . Para que este resultado dê zero, uma das formas possíveis é supor que  $p$  e  $q$  são constantes, com  $p''(x) = a$ ,  $q''(t) = \alpha$  com  $a + \alpha = 0$  para algumas constantes  $a, \alpha \in \mathbb{R}$ . Integrando duas vezes, pode-se supor que  $p(x) = (a/2)x^2 + bx + c$  e  $q(t) = (\alpha/2)t^2 + \beta t + \gamma$  para certas constantes  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

A condição inicial  $u(0,t) = 4t^2$  indica que  $q(t) = 4t^2$ . Portanto,  $\alpha = 8$ ,  $\beta = \gamma = 0$ . Com isto, obtém-se  $a + 8 = 0$ , ou seja,  $a = -8$ . Não há problema em tomar  $b = c = 0$ . Logo,  $u(x,t) = -4x^2 + 4t^2$ . Após obter a solução, para verificar se a equipe de desenvolvimento entendeu mesmo, você pode pedir a eles que verifiquem que a função  $u$  é de fato solução da EDP proposta!

## Faça valer a pena

**1.** Uma EDP é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma função dada (em geral denotada por  $u$ ), que será a solução. Vimos que a EDP é linear se os termos que envolvem a função  $u$  não têm potência diferente de 1.

Qual das equações abaixo é uma EDP linear de segunda ordem e homogênea?

- a)  $2u_{xx} + (u_{yy})^2 = 0$
- b)  $u_{xx} - 4u_x + 2u_{yy} = 0$
- c)  $u_{xx} + u_{yy} = \cos(u) + x$
- d)  $u_x + u_y = u$
- e)  $u_{xx} + u_{yyy} = 0$

**2.** Dada uma EDP, não é muito fácil encontrar sua solução. Porém, o processo inverso, de testar se uma função é solução de uma EDP, é bem mais simples. Basta calcular as derivadas e substituir na equação para ver se é satisfeita.

A função  $u(x,t) = \cos(x) + \sin(t)$  é solução de qual das equações a seguir?

a)  $u_x + u_t = 0$

b)  $u_{xx} + u_{tt} = -u$

c)  $u_x + u_t = u$

d)  $u_{xx} = \cos(x)$

e)  $u_{xx} - u_{tt} = u^2$

**3.** Apesar de ainda não saber resolver uma EDP, o processo de verificação da resposta é bem mais simples: se temos uma EDP e uma função  $u$ , é fácil decidir se  $u$  é ou não solução da EDP: basta verificar se ela satisfaz à igualdade da EDP.

Qual das funções a seguir é solução da EDP  $u_{xx}(x,t) + \frac{u_t(x,t)}{t} = 0$ ?

a)  $u_1(x,t) = xt$

b)  $u_2(x,t) = \cos(x) + \sin(t)$

c)  $u_3(x,t) = x^2 + t^2$

d)  $u_4(x,t) = -x^2 + t^2$

e)  $u_5(x,t) = x^3 + t^2$ .

## Seção 3.2

### Equação do Calor: modelagem

#### Diálogo aberto

Nesta seção, aprenderemos sobre uma importante EDP: a equação do calor. Ela modela como o calor se dissipa em uma superfície que está sob aquecimento (ou resfriamento) com o passar do tempo.

Continuando o seu trabalho de consultoria na empresa de games, você agora precisa explicar para a equipe de desenvolvimento como se modela a dissipação de calor em uma barra, relacionando a função  $u(x, t)$  que descreve a temperatura no ponto  $x$  e no tempo  $t$  e as soluções de uma EDP. Observe que, dentro da proposta de explicar para a equipe de desenvolvimento do jogo como funciona o fluxo de calor num material, é fundamental conseguir explicar todos os detalhes da equação. No jogo, esta barra pode modelar uma espada, ou uma lança metálica.

Como modelo inicial, você precisará explicar para a equipe como obter um modelo que descreve a temperatura  $u(x, t)$  em uma barra metálica de 40 cm de comprimento, temperatura inicial dada pela função  $f(x) = x \cdot (40 - x)$  e extremidades mantidas a  $0^\circ\text{C}$  em todo o instante. Suponha que a barra tem uma constante de difusividade térmica igual a 2.

Lembre-se de que, como a equipe de desenvolvimento de jogos não domina o assunto, você deverá produzir o material de forma bem didática, incluindo, por exemplo, figuras e diagramas para facilitar o entendimento!

#### Não pode faltar

Equação do calor é como conhecemos uma equação diferencial parcial da forma  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ , em que  $\alpha$  é uma constante positiva e  $u$  é uma função de  $x$  e  $t$ . Este nome é devido

ao fenômeno físico que a equação modela, que iremos descrever brevemente a seguir.

Vamos usar como modelo uma barra feita de alguma liga metálica, que tenha comprimento de  $L$  centímetros e cuja espessura pode ser desprezada por ser muito menor que o comprimento. A constante  $\alpha^2$  que aparece na equação do calor está relacionada com o material de que é feita a barra e é chamada de constante de difusividade térmica. Desta forma, as variáveis que aparecem na equação estão nos intervalos  $x \in [0, L]$  e  $t \in [0, \infty)$ .



### Assimile

O modelo que apresentaremos nesta seção é da equação do calor em dimensão 1, em que  $t$  e  $x$  são variáveis reais. Por isso é tão importante que a espessura seja desprezada. Pense a barra como sendo um retângulo de largura  $L$  e altura bem pequena (tão pequena que possa ser ignorada). Caso a altura e a largura tenham dimensões comparáveis, tornando o objeto um retângulo, a equação que modela a dissipação do calor será parecida, mas a solução será um pouco mais complexa.

Somente a título de informação, a equação do calor numa placa retangular (dimensão 2) tem a forma  $\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t$  e a solução  $u(x, y, t)$  nos dá a temperatura num ponto  $(x, y)$  da barra após um tempo  $t$ .

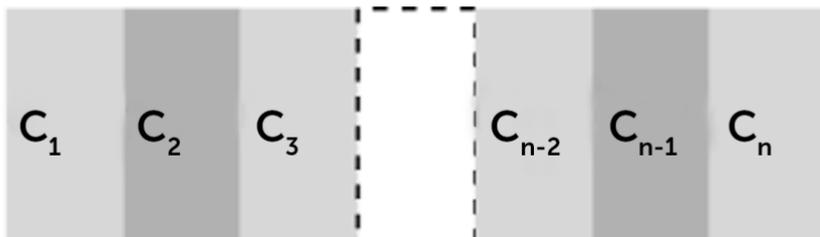
Segundo Boyce e DiPrima (2015), a relação da equação  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  com o fenômeno físico da condução de calor é estabelecida de forma experimental, e pode ser verificada em laboratórios.

Veremos agora como a equação do calor é obtida, e sua relação exata com o problema da condução de calor. Para mais detalhes, sugerimos Souza e Guidi (2007), Boyce e DiPrima (2015) ou ainda Bretscher (2001). Observamos, no entanto, que você deverá se preocupar mais com a modelagem da equação e o significado das condições iniciais e de fronteira do que com os detalhes matemáticos da dedução da equação.

## Dedução da equação do calor

Para deduzir a equação diferencial do calor, suponha que a barra seja dividida em pequenas células, que denotaremos por  $C_j$ , com  $j = 1, \dots, n$ , sendo  $n$  um número bem grande.

Figura 3.1 | Divisão da barra em pequenas células.



Fonte: elaborada pela autora.

A temperatura num ponto  $x$  da barra, após passado um tempo  $t$ , depende diretamente da energia cinética das partículas que formam a barra. Ao aquecermos a barra, as partículas viajam pelas células  $C_j$  de maneira uniforme, com algumas indo para a célula à direita, outras indo para a célula à esquerda. Portanto, se  $f_i(t)$  denota a energia na célula  $i$  e no tempo  $t$ , então, quando o tempo passa de  $t$  para  $t+1$ , a energia ficará proporcional a  $f_{i-1}(t) - 2f_i(t) + f_{i+1}(t)$ , que é a discretização da segunda derivada. Como isto acontece enquanto também acontece uma variação do tempo, devemos ter  $\alpha u_{xx} = u_t$ , em que  $\alpha > 0$  é uma constante que, experimentalmente, sabe-se que depende do material da barra e pode ser obtido utilizando um método experimental chamado de *laser-flash*, criado em 1961. Pesquise a respeito em Guisard-Restivo (2003).

Por exemplo, a constante de condutividade térmica para uma barra feita de prata é de 1,71; para cobre é de 1,14; e para uma barra de granito é de 0,011.



Pesquise mais

Na dedução da equação do calor utilizamos a expressão da discretização da segunda derivada. Lembre-se de que a derivada de uma função  $f$  num ponto  $a$  é dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ quando este limite existe. Da mesma}$$

forma, a segunda derivada de  $f$  em  $a$  é dada pelo limite

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}, \text{ quando este limite}$$

existe. Como  $h \rightarrow 0$ , podemos considerar  $h$  pequeno e escrever aproximações para as derivadas anteriores, que são conhecidas como discretizações.



Pesquise mais

A dedução da equação do calor, que mostra que a solução  $u(x,t)$  da equação  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  fornece a temperatura num ponto  $x$  da barra após um tempo  $t$ . Como vimos anteriormente, a dedução leva em conta várias propriedades físicas dos materiais além da chamada **Lei da condução do calor de Fourier**, que diz que o fluxo de calor (quantidade de energia que é transferida em cada unidade de área por unidade de tempo) que passa por um material é proporcional ao negativo do gradiente da função que dá a temperatura. A constante de proporcionalidade é chamada constante de condutividade térmica. Você pode pesquisar mais sobre o assunto em Kreith, Manglik e Bohn (2010).

A solução da equação do calor é uma função  $u(x,t)$  que nos diz qual é exatamente a temperatura num ponto localizado na posição  $x$  da barra, passado um tempo  $t$ . Claro que a evolução da temperatura dependerá de como é a temperatura inicial da barra. Portanto, vamos supor que a distribuição inicial de temperatura é dada por uma função  $f(x)$ , ou seja, temos a condição inicial  $u(x,0) = f(x)$

para todo  $x \in [0, L]$ . Note que esta função pode ser constante, se a temperatura inicial for a mesma em toda a barra, ou pode depender do ponto  $x$ .

A barra metálica estará presa em algum suporte e vamos supor que não existem trocas de calor entre a barra e o suporte. Vamos, então, supor que a temperatura nos extremos da barra será mantida constante sempre, introduzindo a condição de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Desta forma, a equação completa fica escrita como:

$$\begin{aligned}\alpha^2 u_{xx} &= u_t, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0.\end{aligned}$$

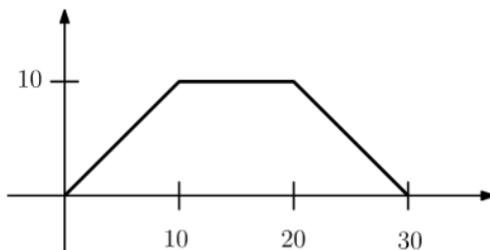
Esta equação, junto com as condições iniciais e de fronteira, é conhecida como **equação do calor com extremidades fixas e condições de fronteira homogêneas**.



### Exemplificando

Suponha que estamos interessados em escrever a equação do calor para uma barra de 30 cm condutividade térmica igual a 5, e cuja distribuição inicial de temperatura é dada pelo gráfico da Figura 3.2 e tem temperaturas fixadas iguais a zero nos extremos. Como ficaria a equação?

Figura 3.2 | Gráfico de  $u(x, 0)$ .



Fonte: elaborada pela autora.

Precisamos, inicialmente, descrever a função cujo gráfico é como mostrado. É razoável supor que o gráfico é composto por três segmentos de reta; logo, a função será dada por partes, com três expressões: uma função  $p(x)$  para  $x \in [0, 10]$ ; uma função  $q(x)$  para  $x \in [10, 20]$ ; e, finalmente, uma função  $r(x)$  para  $x \in [20, 30]$ . Note que o gráfico de  $p(x)$  é uma reta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(10, 10)$ , logo  $p(x) = x$ . Já  $q(x)$  é constante igual a 10, logo  $q(x) = 10$ . Finalmente, o gráfico de  $r(x)$  é uma reta que passa por  $(20, 10)$  e  $(30, 0)$ , logo  $r(x) = 30 - x$ . Portanto a equação fica:

$$\begin{aligned}
 25u_{xx} &= u_t, \\
 u(0, t) &= u(30, t) = 0, \\
 u(x, 0) &= \begin{cases} x & , \quad x \in [0, 10], \\ 10 & , \quad x \in [10, 20], \\ 30 - x & , \quad x \in [20, 30]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Na próxima seção, veremos também como resolver um problema relacionado, porém um pouco mais complexo, que é quando a temperatura não é a mesma nos dois extremos. Esse problema será conhecido como equação do calor com condições de fronteira não homogêneas:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 u_{xx} &= u_t, \\
 u(x, 0) &= f(x), \\
 u(0, t) &= T_1, \\
 u(L, t) &= T_2,
 \end{aligned}$$

Em que  $T_1$  é a temperatura no extremo esquerdo da barra e  $T_2$  é a temperatura no extremo direito da barra. Note que as condições de fronteira significam, neste caso, que os extremos das barras são mantidos com temperaturas fixadas durante todo o período. Assim,

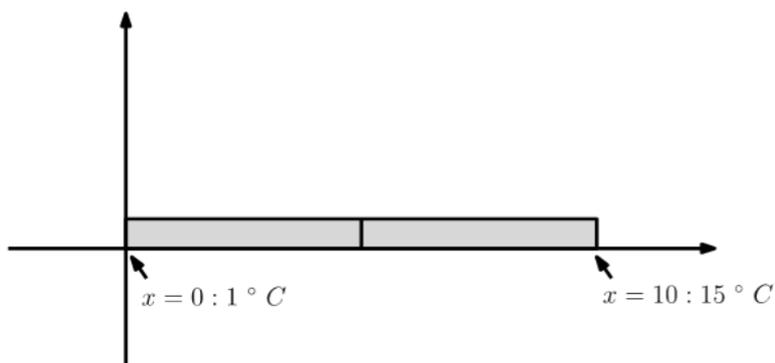
a distribuição inicial de temperatura precisa respeitar isso também, portanto deveremos ter  $f(0) = T_1$  e  $f(L) = T_2$ .



### Exemplificando

A ilustração a seguir (Figura 3.3) mostra a distribuição inicial de temperatura numa barra de comprimento de 10 cm com constante de condutividade térmica igual a 3. Suponha que a temperatura inicial varie entre os valores informados da barra segundo uma função da forma  $p(x) = ax + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes reais (ou seja,  $p(0) = 1$  e  $p(10) = 15$ ). Como seria a equação do calor associada, incluindo as condições iniciais e de fronteira? Faça um gráfico da temperatura inicial.

Figura 3.3 | Distribuição inicial de temperatura barra.



Fonte: elaborada pela autora.

Primeiramente, vamos obter a expressão completa da função  $p$ . Aplicando as condições indicadas, teremos  $1 = p(0) = b$  e  $15 = p(10) = a \cdot 10 + b$ , o que é um sistema linear de equações nas variáveis  $a$  e  $b$ . Resolvendo o sistema, obtemos

$b = 1$  e  $a = \frac{7}{5}$ , logo, a função  $p$  é dada por  $p(x) = \left(\frac{7}{5}\right)x + 1$

Com isso, podemos, por exemplo, obter a temperatura inicial no ponto  $x = 5$ : ela deve ser  $p(5) = 8$ .

A EDP do calor, neste caso, fica dada por

$$\begin{aligned}9u_{xx} &= u_t, \\ u(x, 0) &= (7/5)x + 1 \\ u(0, t) &= 1, \\ u(10, t) &= 15.\end{aligned}$$

Finalmente, em alguns casos, poderemos não saber qual é a temperatura nos extremos, mas poderemos saber simplesmente que o calor não escapa pelos extremos, ou seja, que não há troca de calor pelos extremos (por exemplo, os suportes da barra podem ser feitos de um material isolante térmico). Isso é refletido no sistema trocando as condições de fronteira por condições como as abaixo:

$$\begin{aligned}\alpha^2 u_{xx} &= u_t, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0.\end{aligned}$$



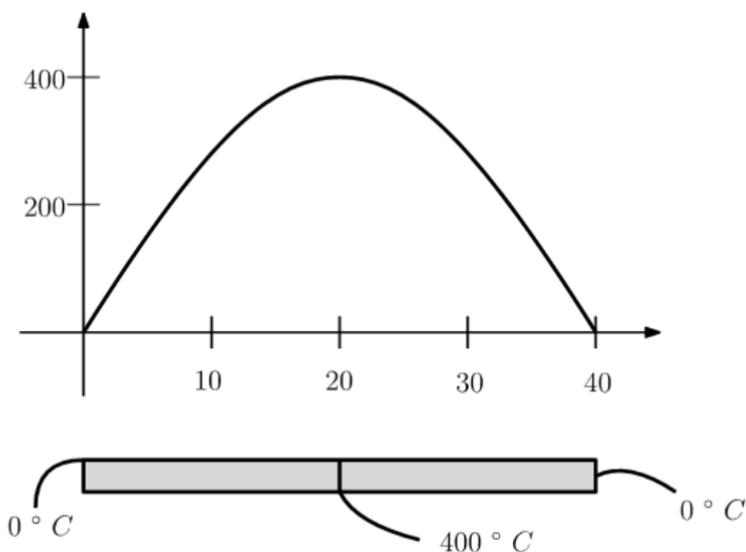
**Reflita**

Na seção anterior, você aprendeu como utilizar o método de separação de variáveis para transformar uma equação diferencial parcial num sistema de equações diferenciais ordinárias. Na próxima seção, aplicaremos este método à equação do calor. Que tal gastar alguns minutos desde já para aplicar o método de separação de variáveis à equação do calor, deduzindo o sistema de equações que será obtido? Você seria capaz de dar uma interpretação gráfica para as condições iniciais e de fronteira?

## Sem medo de errar

Vamos resolver o problema apresentado no começo da seção. Lembre-se de que você precisa explicar para a equipe de desenvolvimento como modelar a dissipação de calor numa barra, usando como modelo o caso de uma barra metálica de 40 cm de comprimento, feita de um material com constante de difusividade térmica igual a 2, temperatura inicial dada pela função  $f(x) = x \cdot (40 - x)$  e extremidades mantidas a  $0^\circ\text{C}$  em todo o instante, conforme a Figura 3.4, que mostra o gráfico da função  $f$  e também um diagrama com a temperatura no modelo da barra.

Figura 3.4 | Gráfico de  $f(x)$  e temperatura inicial na barra.



Fonte: elaborada pela autora.

O primeiro passo é enquadrar essa formulação em um dos tipos que foram construídos anteriormente. Para isso, precisamos de alguns dados. O primeiro deles é a equação em si, e essa parte é a

mais fácil. Como a constante de difusividade térmica é igual a 2, a equação fica  $2u_{xx} = u_t$ .

Agora, vamos estudar como as condições iniciais e de fronteira devem ser colocadas no sistema. O problema diz que a barra tem 40 centímetros, e que a temperatura é mantida em  $0^\circ\text{C}$  nestes pontos, que têm coordenadas  $x = 0$  e  $x = 40$ . Portanto, devemos adicionar as condições  $u(0,t) = u(40,t) = 0$  como condições de fronteira.

Para a condição inicial, devemos olhar a função que descreve a temperatura, que é  $f(x) = x \cdot (40 - x)$  (veja a Figura 3.2 para lembrar). Assim, se  $t = 0$ , a função  $u(x,t)$  coincide com esta função, ou seja, a condição inicial é dada por  $u(x,0) = x \cdot (40 - x)$ . Para explicar isto da melhor forma possível para a equipe de desenvolvimento do game, sugerimos que você exiba o gráfico da Figura 3.4, além da representação gráfica com a barra, indicando algumas outras temperaturas.

## Avançando na prática

### Equação do calor e separação de variáveis

#### Descrição da situação-problema

Agora que você já explicou para a equipe de desenvolvimento como modelar a equação do calor, poderá se antecipar à próxima seção e pensar como explicar para a equipe o uso da técnica de separação de variáveis aplicada à equação do calor, com foco principalmente nas condições iniciais e de fronteira, usando como exemplo a equação construída no começo da seção:

$$\begin{aligned}2u_{xx} &= u_t, \\ u(0,t) &= u(40,t) = 0, \\ u(x,0) &= x \cdot (40 - x).\end{aligned}$$

Você aprendeu, na seção anterior, a deduzir o sistema de equações diferenciais ordinárias usando a técnica de separação de variáveis, e sabe que obterá as equações  $T'(t) = \lambda T(t)$  e

$$X''(x) = \frac{\lambda}{4} X(x), \text{ em que } \lambda \text{ é uma constante que definiremos na}$$

próxima seção.

Como você explicaria para a equipe de desenvolvimento como ficam as condições iniciais para a equação diferencial em  $X$ ?

### Resolução da situação-problema

Você deve começar lembrando que, ao usar o método de separação de variáveis, escrevemos  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Substituindo as condições iniciais, teremos  $X(0)T(t) = X(40)T(t) = 0$ , portanto  $X(0) = X(40) = 0$ , já que a função  $T(t)$  não pode ser nula.

### Faça valer a pena

**1.** Dentre as várias equações diferenciais parciais, um tipo especial de EDP é chamado de equação do calor. Esta equação é linear, homogênea, de segunda ordem e é utilizada para modelar o problema da difusão de calor numa barra.

Quais das equações diferenciais parciais a seguir é uma equação do calor?

a)  $2u_x = u_t$

b)  $4u_{xx} = u_{tt}$

c)  $-5u_{xx} = u_t$

d)  $6u_{xx} = u_t$

e)  $2u_{tt} = u_x$

**2.** Na equação do calor, a derivada segunda com respeito ao espaço (variável  $x$ ) é proporcional à derivada temporal (variável  $t$ ), e a constante de proporcionalidade é chamada de constante de difusividade térmica. Essa constante é um número positivo que depende do material de que é feita a barra metálica.

Na equação  $10u_{xx} = 2u_t$ , qual é o valor da constante de difusividade térmica?

- a) 10
- b) 2
- c) 2/10
- d) -5
- e) 5

**3.** Na equação do calor (e em qualquer sistema de equações diferenciais), é preciso existir uma compatibilidade entre as condições iniciais e de fronteira apresentadas. Sem isto, a condição pode deixar de ter solução já *a priori*. Por exemplo, se a condição inicial implica em  $u(0,0) > 0$ , não podemos ter uma condição de fronteira que implique em  $u(0,0) < 0$ .

Qual das condições iniciais e de fronteira a seguir está bem-definida, ou seja, qual é a única que apresenta compatibilidade?

- a)  $u(x,0) = 10, x \in [0,10]$  e  $u(0,t) = u(10,t) = 0, t \in [0,\infty)$
- b)  $u(x,0) = x(10 - x), x \in [0,10]$  e  $u(0,t) = u(10,t) = 0, t \in (0,\infty)$
- c)  $u(x,0) = \text{sen}(x), x \in [0,10]$  e  $u(0,t) = u(10,t) = 0, t \in (0,\infty)$
- d)  $u(x,0) = x(20 - x), x \in [0,10]$  e  $u(0,t) = u(10,t) = 0, t \in (0,\infty)$
- e)  $u(x,0) = \text{sen}(x), x \in [0,5]$  e  $u(0,t) = u(5,t) = 0, t \in (0,\infty)$

## Seção 3.3

### Equação do Calor: soluções

#### Diálogo aberto

Nesta seção vamos finalmente aprender a resolver a equação do calor. Antes disso, no entanto, precisaremos entender como utilizar o método de separação de variáveis para obter equações diferenciais ordinárias com um tipo diferente de condição de fronteira. Veremos que essas equações só podem ser resolvidas em alguns casos, e para determinar estes casos vamos estudar autofunções para operadores lineares. Finalmente, para obter as soluções, veremos como expandir funções em Séries de Taylor (lembre-se de que são séries construídas usando polinômios) e também Séries de Fourier (que utilizam funções trigonométricas).

Voltando ao contexto da empresa de games, você precisará explicar para a equipe de desenvolvimento como resolver a equação

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t),$$

$$u(x,0) = -(1/2)\text{sen}(3\pi x) + (3/2)\text{sen}(\pi x),$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(1,t) = 0$$

utilizando a metodologia desenvolvida nas seções anteriores, e deverá fazer isso por meio da elaboração de um relatório técnico, resumindo os passos necessários desde a dedução da equação até sua solução. Desta forma, a equipe de desenvolvimento poderá dar continuidade ao projeto do jogo e terá um manual de instruções para a implementação no código fonte.

## Não pode faltar

Primeiramente, vamos fixar a equação  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  com a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  com  $x \in [0, L]$  e as condições de fronteira  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Considerando as condições de compatibilidade, deveremos ter  $f(0) = f(L) = 0$ .

### Separação de variáveis para a equação do calor

Vamos supor que a equação anterior possui uma solução da forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Em seções anteriores, já obtivemos que esta condição sobre a solução implica nas duas EDOs  $X''(x) = -\lambda X(x)$  e  $T'(t) = -\alpha^2 \lambda T(t)$ , em que  $\lambda$  é uma constante.

Vamos agora estudar as condições iniciais.

Se  $x = 0$  então  $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$ , ou seja,  $X(0) = 0$ . Outra opção seria termos  $T(t) = 0$  para todo  $t$ , mas nesse caso a solução da EDP seria  $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$  para todo  $x, t$  daí a solução seria nula, o que não faz sentido se a condição inicial é diferente de zero, logo será descartada.

Se  $x = L$  então  $0 = u(L, t) = X(L)T(t)$  logo  $X(L) = 0$ .

Com isso, determinamos a EDO que a função  $X$  deve satisfazer:

$$X''(x) = -\lambda X(x), \quad X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0.$$

Veja no exemplo seguinte como podemos visualizar graficamente a condição inicial de um problema de distribuição do calor.



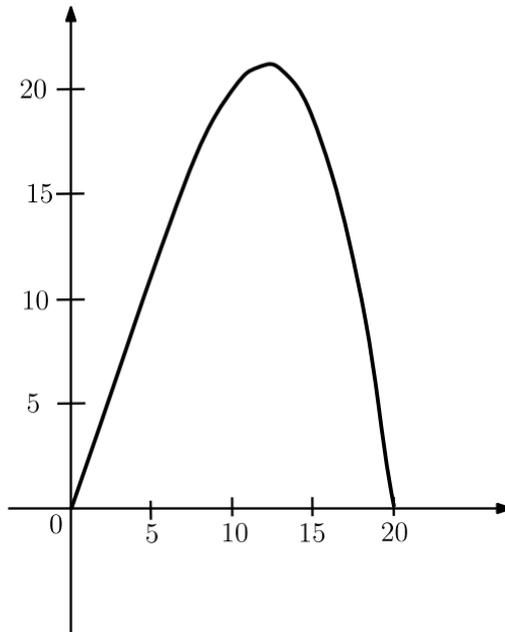
### Exemplificando

Uma barra metálica de 20 cm tem seu fluxo de calor descrito pela solução da equação diferencial parcial  $u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$ , com condições iniciais e de fronteira dadas

por  $u(x,0) = (-1/100)x(x+10)(x-20)$ ,  $u(0,t) = 0$ ,  
 $u(20,t) = 0$ .

O gráfico da Figura 3.5 mostra a distribuição inicial de temperatura na barra. O eixo horizontal é a posição na barra e o eixo vertical é a temperatura.

Figura 3.5 | Distribuição inicial de temperatura na barra.



Fonte: elaborada pela autora.

Veremos agora como resolver a EDO com fronteira de dois pontos  $X''(x) = -\lambda X(x)$ ,  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$ .

## Problemas de valores de contorno com fronteiras com dois pontos

Ao utilizar separação de variáveis para obter soluções da equação do calor, chegamos num PVI da forma  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$  com as condições  $y(\alpha) = y_0$  e  $y(\beta) = y_1$ . Note que essas não são as condições que geralmente temos sobre as funções (em geral são algo do tipo  $y(a) = y_0$  e  $y'(a) = y_1$ ).



### Exemplificando

Considere a equação diferencial  $y''(x) = y$  com dois tipos de condições. Primeiro, vamos ao caso com condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 2$ . Como a equação característica é  $r^2 = 1$ , que tem como soluções  $r = \pm 1$ , a solução geral é da forma  $y(x) = ae^x + be^{-x}$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes reais. Aplicando as condições iniciais, obtemos  $a = 3/2$  e  $b = -1/2$ .

Se as condições iniciais forem do tipo fronteira de dois pontos do tipo  $y(0) = e$  e  $y(1) = 1$ , a solução geral continua a mesma, mas agora aplicando as condições iniciais obtemos a única solução particular  $y(x) = ee^{-x}$ , ou seja,  $a = 0$  e  $b = e$ .

Quando temos uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (ou seja,  $p(t) = p$ ,  $q(t) = q$  e  $g(t) \equiv 0$ , com  $p$  e  $q$  constantes), a solução geral do PVI é da forma  $y(x) = d_1y_1(x) + d_2y_2(x)$  em que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são duas soluções da EDO que tem o wronskiano diferente de zero, ou seja,  $y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) \neq 0$ .

Para encontrar as soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados (ou variação de parâmetros), e o tipo de solução dependerá da equação característica.



### Exemplificando

Vamos resolver a equação diferencial  $y'' + 3y = 0$  com os valores de contorno  $y(0) = 1$  e  $y(\pi) = 0$ .

Neste caso, a equação característica é  $r^2 + 3 = 0$ , que tem como raízes os números complexos  $\pm i\sqrt{3}$ , resultando nas soluções particulares  $y_1(x) = \cos(\sqrt{3}x)$  e  $y_2(x) = \text{sen}(\sqrt{3}x)$ , e na solução geral  $y(x) = d_1 \cos(\sqrt{3}x) + d_2 \text{sen}(\sqrt{3}x)$ .

As condições de contorno resultam em:

$$1 = y(0) = d_1 \quad \text{e} \quad 0 = y(\pi) = d_1 \cos(\sqrt{3}\pi) + d_2 \text{sen}(\sqrt{3}\pi).$$

Resolvendo esse sistema, obtemos  $d_1 = 1$  e

$$d_2 = -\text{cotg}(\sqrt{3}\pi), \quad \text{portanto a solução do PVI é}$$

$$y(x) = \cos(\sqrt{3}x) - \text{cotg}(\sqrt{3}\pi) \text{sen}(\sqrt{3}x).$$

Observe que encontrar a solução de um PVI com fronteira de dois pontos depende de resolver um sistema linear  $2 \times 2$ , logo pode não existir nenhuma solução não trivial. A existência de solução tem relação com existência de uma autofunção.

### Autofunções para equações diferenciais

Dois conceitos importantes para nós nesta seção são o de autovalor e autovetor. Quando temos um operador linear  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , um número  $\lambda \in \mathbb{R}$  é chamado de autovalor se existe um vetor não-nulo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , que satisfaz  $T(v) = \lambda v$ .



### Exemplificando

Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador  $T(x, y) = (2x, x + y)$ . Observe que  $T(1, 1) = (2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$  e  $T(0, 1) = (0, 1) = 1 \cdot (0, 1)$ . Portanto, o operador  $T$  tem dois autovalores, 1 e 2. O vetor  $(0, 1)$  é um autovetor associado ao autovalor 1 e o vetor  $(1, 1)$  é um autovetor associado ao autovalor 2.



Agora é uma boa hora para revisar conceitos de álgebra linear. Isso com certeza vai ajudar na sua intuição ao lidar com as autofunções. Recomendamos a leitura do seguinte livro no tópico correspondente a esse tema:

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Consulte também o trabalho de Coelho e Lourenço (2005) para um texto mais avançado, que contém, inclusive, exemplos em equações diferenciais.

Vamos considerar uma equação diferencial de segunda ordem da forma  $y'' + \alpha y = 0$ , com  $\alpha$  um número real. Podemos reescrever a equação diferencial da forma  $y'' = -\alpha y$ , e se definirmos um operador  $L: C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathbb{R})$  por  $L(y) = y''$  que leva uma função  $y$  à sua segunda derivada. Então a equação  $y'' = -\alpha y$  pode ser reescrita como  $L(y) = -\alpha y$ , ou seja, encontrar uma solução para a equação  $y'' + \alpha y = 0$  é equivalente a encontrar um autovetor para o operador  $L$ .

Vamos considerar uma equação diferencial de segunda ordem da forma  $y'' + \alpha y = 0$  com as condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) = 0$ . Os valores de  $\alpha$  para os quais este problema tem solução não trivial serão chamados de autovalores e as soluções associadas a esses valores serão chamadas de autofunções (a autofunção é um autovetor que também é uma função). Vamos estudar a existência de autovalores e autofunções para essa equação diferencial.

**1º caso:** se  $\alpha > 0$  a equação característica tem a forma  $r^2 + \alpha = 0$ , que tem como raízes  $\pm i\sqrt{\alpha}$ . A solução geral é da forma

$y(x) = d_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + d_2 \sen(\sqrt{\alpha}x)$ . Aplicando as condições de

fronteira temos que  $c_1 = 0$  e  $c_2 \sen(\sqrt{\alpha}\pi) = 0$ , ou seja,  $c_2 = 0$  ou  $\sqrt{\alpha}$  é um número inteiro. Logo as possibilidades para autovalores

são os valores de  $\alpha$  iguais a 1, 4, 9, ...,  $n^2$ , ou seja, todo autovalor é da forma  $\alpha = n^2$  para algum número inteiro positivo  $n$ . As autofunções associadas são da forma  $y_n(x) = d_2 \text{sen}(nx)$ .

**2º caso:** Se  $\alpha < 0$  a equação característica tem como raízes dois números reais  $\pm\sqrt{-\alpha}$  e, portanto, a solução geral é da forma

$$y(x) = d_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + d_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}, \text{ com } d_1, d_2 \text{ números reais. Como } d_1, d_2$$

são números quaisquer, podemos fazer uma mudança de variáveis, introduzindo as constantes  $c_1, c_2$  com a relação  $d_1 = (c_1 + c_2) / 2$ ,  $d_2 = (-c_1 + c_2) / 2$  e podemos escrever a função

$$y \text{ como } y(x) = c_1 \left( e^{\sqrt{-\alpha}x} - e^{-\sqrt{-\alpha}x} \right) / 2 + c_2 \left( e^{\sqrt{-\alpha}x} + e^{-\sqrt{-\alpha}x} \right) / 2, \text{ que}$$

pode ser reescrita como  $y(x) = c_1 \sinh(\sqrt{-\alpha}x) + c_2 \cosh(\sqrt{-\alpha}x)$ .

Aplicando as condições  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) = 0$ , obtemos que a única solução possível é a solução trivial  $y \equiv 0$ .

O mesmo acontece se  $\alpha = 0$ . Portanto, o único caso em que existem soluções não triviais é quando  $\alpha > 0$ .

## Soluções fundamentais e autofunções

Agora que já sabemos como resolver EDOs que têm fronteira de dois pontos, vamos obter soluções para a equação do calor. Lembre-se de que transformamos a equação  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  com a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  com  $x \in [0, L]$  e as condições de fronteira  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  no sistema de equações

$$T'(t) = -\alpha^2 \lambda T(t), \quad X''(x) = -\lambda X(x), \text{ com condições iniciais}$$

$$X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0.$$

Como já vimos, os autovalores deste problema são  $\lambda_n = n^2 \pi^2 / (L^2)$  e as autofunções associadas são

$X_n(x) = \sin(n\pi x / L)$ , em que  $n$  é um número natural positivo. Com estes valores de  $\lambda$  podemos resolver a equação para  $T_n$ , que agora fica escrita como  $T_n'(t) + (\alpha^2 n^2 \pi^2 / L^2) T_n(t) = 0$  e, portanto, tem solução  $T_n(t) = \exp(-(\alpha^2 n^2 \pi^2 / L^2)t)$ .

Escrevendo as duas soluções juntas, obtemos a solução para a equação do calor:

$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ , em que  $n$  é um número natural positivo. Essas funções satisfazem à EDP e também às condições iniciais e de contorno.



### Assimile

As funções  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$  são

soluções para a equação  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  com condições de fronteira  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Note que para cada  $n$  natural, a função  $u_n(x, t)$  é uma solução, e em particular qualquer combinação dessas funções é também solução. Porém, tome cuidado: essas soluções ainda não satisfazem à condição inicial.

O problema é que ainda não verificamos a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  para  $x \in [0, L]$ . Veremos agora como fazer isso.

Em primeiro lugar, note que se somarmos duas soluções como as anteriores, ainda obteremos uma solução da EDP. O mesmo vale com qualquer combinação linear das soluções. Portanto, a solução

geral da EDP é  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t)$ , em que  $a_n \in \mathbb{R}$  para todo

natural positivo  $n$ .

Vamos, agora, impor a condição inicial, ou seja, vamos supor que  $u(x, 0) = f(x)$ , ou seja, deveremos ter

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x / L)$ . Veremos agora como definir os coeficientes  $a_n$  para que esta relação seja verdadeira.

### Coeficientes de Fourier para a equação do calor

Para determinar os coeficientes  $a_n$  na equação

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x / L)$  vamos utilizar alguns

resultados de análise matemática. O principal deles é sobre séries de Fourier. Quando temos uma função periódica  $g: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  de período  $2L$  podemos considerar uma expansão em série para  $g$  em termos de funções trigonométricas da forma

$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x / L) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x / L)$  é chamada

série de Fourier de  $g$ . Podemos encontrar os coeficientes  $a_n, b_n$  calculando integrais dos produtos de  $f$  com as funções trigonométricas  $\cos(n\pi x / L)$  e  $\sin(n\pi x / L)$ , obtendo as identidades:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x / L) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx$$



#### Pesquise mais

Um tópico muito importante dentro da Análise Matemática é a aproximação de funções por certas funções conhecidas. Nas unidades anteriores você aprendeu a aproximar funções diferenciáveis por séries de Taylor, cujos termos são monômios, e também por séries de

Fourier, cujos termos são funções trigonométricas. No caso de funções periódicas, como as funções que aparecem na equação do calor, a aproximação por séries de Fourier é mais eficiente. Recomendamos o livro seguinte para uma introdução ao tema:

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**: Volume 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.



### Assimile

Se uma função  $g(x)$  é aproximada por uma Série de Fourier de modo que para todo  $x$  seja verdade que

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x / L) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x / L),$$
 então os

coeficientes são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos(n\pi x / L) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin(n\pi x / L) dx$$

Veremos como encontrar os coeficientes no caso específico da equação do calor nos exemplos seguintes (ou seja, vamos resolver a equação do calor).



Considere uma barra metálica de 30 cm que tem os extremos isolados. Suponha que a temperatura inicial da barra é de 10 °C e as extremidades são sempre mantidas a 0 °C. Suponha que a constante de condutividade térmica é igual a 1. Obtenha uma função que descreva a evolução da temperatura da barra.

Primeiramente note que a equação do calor neste caso é dada por  $u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)$ , pois  $\alpha = 1$  (constante de condutividade).

Vimos que a solução geral é da forma  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ , em que  $u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ , e nesse caso específico temos

$L = 30$  e  $f(x) = 10$  para todo  $x$ . Nesse caso, os coeficientes  $c_n$  podem ser calculados com a fórmula

$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}(n\pi x / L) dx$ , em que  $L$  e  $n$  são os particulares

deste exemplo.

Para calcular os coeficientes, usamos a fórmula

$$c_n = \frac{2}{30} \int_0^{30} 10 \cdot \text{sen}(n\pi x / 30) dx = -20[\cos(\pi n) - 1] / (\pi n)$$

Note que se  $n$  é par então  $c_n = 0$ . Se  $n$  é ímpar então  $\cos(\pi n)$  é igual a

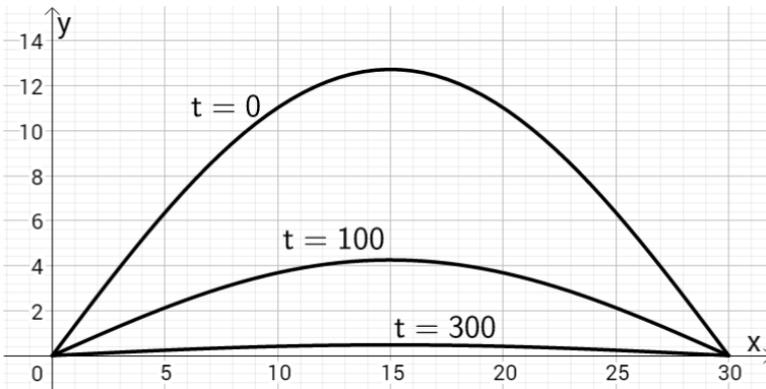
$-1$ , logo  $c_n = 40 / (\pi n)$ . Portanto, a solução da EDP é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{40}{\pi n} \exp(-tn^2 \pi^2 / 900) \text{sen}(n\pi x / 30)$$

Na figura seguinte, vemos como a temperatura evolui na barra. Os gráficos foram feitos considerando uma aproximação para a solução  $u(x,t)$  dada pelos primeiros dois termos do somatório anterior, ou seja, vamos considerar a aproximação (nesse caso, fizemos o truncamento no somatório após obter os dois primeiros termos não nulos):

$$u(x,t) = \frac{40}{\pi} \exp(-t\pi^2 / 900) \text{sen}(\pi x / 30) + \frac{40}{3\pi} \exp(-9t\pi^2 / 900) \text{sen}(3t\pi x / 30)$$

Figura 3.6 | Gráficos mostrando a temperatura nos pontos da barra em vários instantes de tempo



Fonte: elaborada a autora.



### Refleta

Nesta seção estudamos como é o fluxo de calor numa barra metálica. Muitos dos problemas na indústria envolvem a equação do calor, mas são bidimensionais, ou seja, em vez de uma barra, é estudado o fluxo de calor numa placa metálica. Nesse caso, a equação toma a forma  $\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t$ . Já vimos em vários exemplos como é o fluxo do calor numa barra. Você consegue imaginar o que aconteceria numa placa?

## Sem medo de errar

Veremos como resolver a equação

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t),$$

$$u(x,0) = -(1/2)\text{sen}(3\pi x) + (3/2)\text{sen}(\pi x),$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(1,t) = 0$$

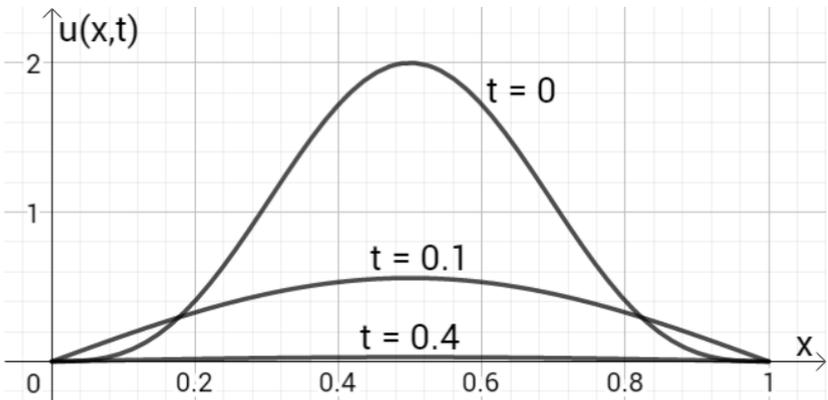
e obter uma solução que descreva o fluxo de calor na barra.

Observe que, como a condição inicial já é uma soma de senos, basicamente precisamos entender como é a função  $T(t)$  que multiplica  $X(x)$  na fórmula de separação de variáveis. Se verificarmos na expressão da solução geral que obtemos, com os autovalores e as autofunções, a única possibilidade é que a solução geral seja dada por  $u(x,t) = (3/2)\text{sen}(\pi x)\text{exp}(-\pi^2 t) - (1/2)\text{sen}(3\pi x)\text{exp}(-9\pi^2 t)$ .

Agora você já pode montar um pequeno tutorial para a equipe de desenvolvimento, explicando como implementar corretamente uma simulação do fluxo de calor no jogo, e assim eles poderão dar continuidade ao projeto.

A figura 3.7 mostra a evolução da temperatura com o passar do tempo.

Figura 3.7 | Gráficos mostrando a temperatura nos pontos da barra com 1 unidade de medida em vários instantes de tempo ( $t=0$ ,  $t=0.1$  e  $t=0.4$ ). Veja que a temperatura tende a zero rapidamente.



Fonte: elaborada pela a autora.

Veja essa evolução de modo dinâmico no site GeoGebra, disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/UJMYSPpN>>. Acesso em: 24 nov. 2017).

## Avançando na prática

### Determinando solução geral da equação do calor

#### Descrição da situação-problema

Vamos mostrar como obter a solução geral da equação do calor com um tipo muito comum de condição inicial: quando o pico da temperatura inicial está no centro da barra e ela decresce linearmente até os extremos. Por exemplo, vamos considerar  $u_t = u_{xx}$  com  $x \in (0, 2)$  e  $t > 0$ . Vamos supor que as condições iniciais são um pouco diferentes das usuais e são dadas por  $u(0, t) = u_x(2, t) = 0$  (ou seja, a temperatura nos extremos é zero e não há fluxo de calor por ali). Suponha ainda que  $u(x, 0) = x$  se  $x \in [0, 1]$  e  $u(x, 0) = 2 - x$  se  $x \in [1, 2]$ . Qual é a solução geral deste problema?

#### Resolução da situação-problema

Note que, para resolver a EDP proposta, precisamos utilizar o método da separação de variáveis para escrever  $u(x, t) = X(x)T(t)$  e resolver as EDOs resultantes separadamente.

Obteremos, assim,  $X(x) = a_1 \text{sen}(kx) + a_2 \text{cos}(kx)$ , e aplicando as condições iniciais teremos que  $a_2 = 0$  e que as opções para

$k$  são  $k = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{4}$ . Substituindo esses valores na

solução da EDO para  $t$ , obtemos  $T(t) = a_3 \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{16} \pi^2 t\right)$ .

Multiplicando as funções  $X(x)$  e  $T(t)$ , obtemos a solução geral

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{16} \pi^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{4} \pi x\right).$$

Para obter a solução particular, considerando a solução inicial, deveremos calcular os coeficientes  $a_n$ . Isso pode ser feito utilizando a teoria de Séries de Fourier.

## Faça valer a pena

**1.** Considere a equação diferencial de segunda ordem  $y'' + \alpha y = 0$ , com condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) = 0$ . Para \_\_\_\_\_, as soluções não triviais são dadas por \_\_\_\_\_.

Marque a alternativa que preenche corretamente as lacunas da frase anterior.

- a)  $\alpha > 0$ ,  $y \equiv 0$
- b)  $\alpha > 0$ ,  $y(x) = d_1 \cos(\sqrt{-\alpha} x) + d_2 \sin(\sqrt{-\alpha} x)$
- c)  $\alpha < 0$ ,  $y \equiv 0$
- d)  $\alpha < 0$ ,  $y(x) = d_1 \cos(\sqrt{-\alpha} x) + d_2 \sin(\sqrt{-\alpha} x)$
- e)  $\alpha = 0$ ,  $y \equiv 0$

**2.** Vimos nesta seção como obter soluções da equação do calor para uma barra de comprimento  $L$ , que é uma EDP da forma  $u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$  juntamente com condições iniciais e de fronteira. Considere as seguintes sentenças sobre as soluções desta EDP, e julgue-as verdadeiras (V) ou falsas (F).

- i) Independente das condições iniciais e de fronteira, sempre é possível encontrar a solução da equação do calor.
- ii) É preciso haver compatibilidade entre as condições iniciais e de fronteira.
- iii) Se as condições iniciais e de fronteira são da forma  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ , então a solução é nula.

Escolha a opção que contém a ordem correta da classificação das afirmações anteriores, conforme elas sejam verdadeiras (V) ou falsas (F).

- a) V – F – V
- b) V – V – V
- c) F – V – V
- d) F – F – F
- e) F – V – F

**3.** O primeiro passo para procurar soluções para a equação do calor  $u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)$  é utilizar o método de separação de variáveis e transformar a EDP em um sistema de EDOs. Avalie a veracidade das afirmações sobre as EDOs obtidas após a separação de variáveis:

- i) Ao aplicar o método da separação de variáveis, obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem.
- ii) Ao aplicar o método da separação de variáveis, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem para  $x$  e uma equação diferencial de segunda ordem para a variável  $t$ .
- iii) Ao aplicar o método da separação de variáveis, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem para  $t$  e uma equação diferencial de segunda ordem para a variável  $x$ .
- iv) O método de separação de variáveis resulta em equações diferenciais ordinárias homogêneas.

Marque a alternativa correta.

- a) Todas as afirmações são verdadeiras.
- b) Somente as afirmações (i) e (iii) são verdadeiras.
- c) Somente as afirmações (iii) e (iv) são verdadeiras.
- d) Somente as afirmações (i) e (iv) são verdadeiras.
- e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

# Referências

- ANTON, H. RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 10 ed. LTC Editora, 2015, 680p.
- BRETSCHER, O. **Linear Algebra with Applications**. 3 ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.
- COELHO, F.; LOURENÇO M. L.. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EdUSP, 2005.
- GUISARD-RESTIVO, T. A. **Desenvolvimento de instrumento para a medida de difusividade térmica de materiais pelo método flash**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CERÂMICA, 47, 2003. Anais... João Pessoa, 2003.
- IÓRIO JUNIOR, R. IÓRIO, V. M. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**. 3ª ed. IMPA, 2013.
- KREITH, F.; BIHN, M.S.; MANGLIK, R. **Princípios de Transferência de Calor**. 7ª ed. Boston: Cengage Learning, 2010.
- SOUZA, R. R.; GUIDI L. F. **Dedução da Equação do Calor**, Notas de aula, 2007. Disponível em <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/EquacaoDoCalor.pdf>>. Acesso em: 31 out. 2017.



# Equação da Onda e Equação de Laplace

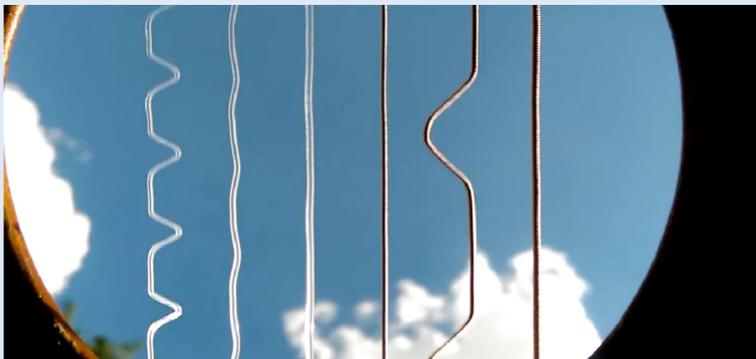
Fonte:

## Convite ao estudo

Na unidade anterior nós aprendemos a reconhecer EDPs e a encontrar soluções para a equação do calor. Nesta unidade vamos estudar outros tipos importantes de EDPs: a equação da onda e a equação de Laplace. Veremos que as soluções dessas equações também fazem uso da estratégia de separação de variáveis, mas alguns detalhes são bem diferentes do caso da equação do calor.

Mas o que é a equação da onda? Um modelo simplificado é o movimento das cordas do violão. O som é produzido pela vibração das cordas, e depende da nota executada (a posição em que a corda está presa pelos dedos antes de ser colocada em movimento). Você saberia descrever o movimento da corda do violão com o passar do tempo?

Figura 4.1 | Movimentos realizados pelas cordas de um violão



Fonte: captura a partir de GUITAR STRINGS OSCILLATING IN HD 60 FPS. Brotheroff. **Youtube**. 30 jul. 2016. 1m35s. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=8YQGmV3NxMI&feature=youtu.be&t=74s>> Acesso em: 01 dez. 2017.

Fonte:

Se ainda não, esse é o momento, pois a empresa fabricante de games que contratou você anteriormente para modelar a dissipação de calor está com novos projetos e quer que você auxilie a modelar efeitos de ondas em dois novos games. Em um deles, você precisa orientar a equipe de desenvolvimento na modelagem de movimentos ondulatórios, além de apresentar a solução para a equação diferencial que rege tal fenômeno físico e seus efeitos nas cordas de um violão. Para o segundo projeto, você precisa fornecer uma solução para a modelagem de uma cama elástica na qual o personagem do jogo fará um movimento de salto. Essa solução será implementada no código fonte do jogo e você deverá proceder de modo semelhante ao utilizado na unidade anterior.

# Seção 4.1

## Equação da onda: modelagem

### Diálogo aberto

Nesta seção aprenderemos sobre a equação da onda, principalmente como deduzi-la e como reconhecê-la. A diferença básica entre a equação da onda e a equação do calor, estudada na unidade anterior, é que agora a EDP envolve uma derivada de segunda ordem também com respeito ao tempo  $t$ . A equação da onda modela fenômenos que têm características ondulatórias.

Uma brincadeira de criança, que você certamente já fez, é atirar pedras em um lago. Ao fazermos isso, várias “ondas” são produzidas, como na Figura 4.2.

Figura 4.2 | Ondas gerada num recipiente com água.



Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary\\_wave](https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_wave)>. Acesso em: 29 out. 2017.

Essas ondas são criadas pela movimentação da água após o contato da pedra. A descrição matemática completa da

movimentação da água de um lago seria muito complicada, mas na seção anterior já vimos como modelar ondas bidimensionais em uma membrana (que pode ser pensada como uma simplificação do lago).

No projeto que você está desenvolvendo com a empresa de games, em um primeiro momento, será necessário apresentar como é o processo físico da oscilação, em termos de uma equação diferencial parcial. Você deverá explicar como poderia obter uma equação diferencial cuja solução  $u(x,t)$  forneça a posição de um ponto  $x$  da corda em um tempo  $t$ .

Como você chegaria ao modelo exato da equação que descreve esse movimento da corda? Você poderia usar como modelo a equação seguinte:

$$\begin{aligned}u_{xx}(x,t) &= u_{tt}(x,t) \\ u(x,0) &= \text{sen}(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0,10] \\ u(0,t) &= u(10,t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,\infty)\end{aligned}$$

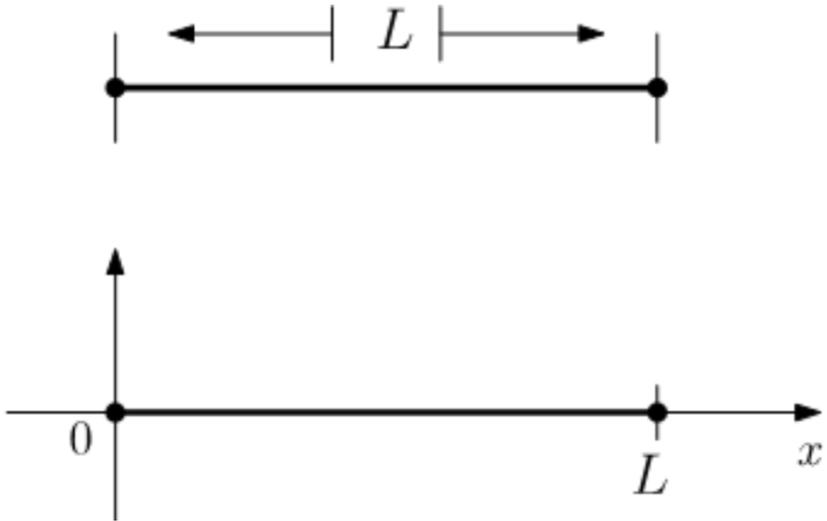
Como explicá-la em termos práticos, incluindo as condições iniciais e de contorno?

## Não pode faltar

Nesta seção vamos introduzir uma equação diferencial parcial cuja solução descreve o movimento de uma corda elástica agindo sob a ação de sua tensão e sua massa (que, por sua vez, depende do material de que a corda é feita). Obteremos uma equação similar à equação do calor, obtida na primeira seção da unidade anterior, mas, como vamos conferir nas seções a seguir, com soluções bem diferentes. Veremos como modelar o problema real de movimentos ondulatórios em um problema na forma matemática.

Considere uma corda elástica de comprimento  $L$  que está presa em ambos os extremos e que esteja um pouco esticada, de modo que sua posição em repouso seja como um segmento de reta horizontal. Para colocar coordenadas no problema, vamos supor que a corda está no eixo  $x$  horizontal, entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , como vemos na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Corda elástica minimamente esticada e sua posição no plano cartesiano.



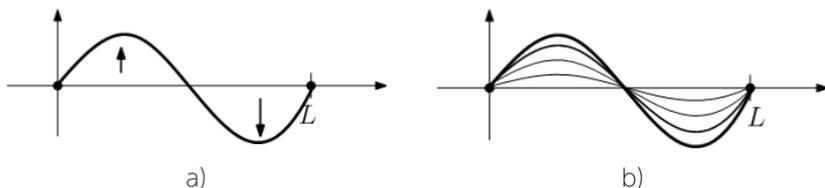
Fonte: elaborada pela autora.

### ! Atenção

Faremos a dedução e a obtenção de soluções para o caso de uma corda unidimensional, como explicado no parágrafo anterior, mas a equação pode ser usada também para estudar propagação de ondas mecânicas, acústicas etc.

Se a corda não receber impulso, ela permanecerá esticada e imóvel, ou seja, estará em repouso. Suponha então que a corda sofra a ação de alguma força externa que a coloque em movimento. Por exemplo, ela pode ser brevemente puxada para cima (ou para baixo) em algum ponto (como nas forças ilustradas na Figura 4.4) ou pode ainda sofrer atração magnética (no caso de ondas eletromagnéticas).

Figura 4.4 | Representação de uma corda em movimento: (a) força externa age sobre a corda; (b) corda em movimento (a espessura da corda diminui para representar a passagem do tempo).



Fonte: elaborada pela autora.

Uma vez puxada a corda, quando solta se movimentará. Nosso objetivo será encontrar uma função  $u(x,t)$  que descreva a posição (altura) do ponto  $x \in [0,L]$  passadas  $t$  unidades de tempo. Essa função  $u(x,t)$  será solução da equação da onda, que é a equação diferencial parcial de segunda ordem  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ , com  $0 < x < L$  e  $t > 0$ . A constante  $a$  dependerá do material de que é feito a corda e de sua tensão, com  $a^2 = T / \rho$ , em que  $T$  é a tensão e  $\rho$  a densidade da corda. Basicamente, a constante  $a^2$  representa quão rápido uma onda se propaga na corda.

As condições iniciais e de contorno para a equação da onda são as descritas anteriormente, ou seja, como as extremidades estão fixadas, deveremos ter  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  para todo  $t > 0$ , e a corda deve estar em uma posição inicial, a partir da qual ela irá se movimentar; vamos supor que essa posição inicial é descrita por uma função  $f(x)$  com  $x \in [0,L]$ , ou seja,  $u(x,0) = f(x)$ . Além disso, existem duas formas de começar o movimento: a corda pode ser solta do repouso ou pode ser colocada em movimento por ação de alguma força. Vamos supor então que  $u_t(x,0) = g(x)$  para alguma função  $g : [0,L] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Observamos que, assim como na equação do calor, as condições iniciais devem ser compatíveis com as condições de contorno, portanto, deveremos ter  $f(0) = f(L) = 0$  e  $g(0) = g(L) = 0$ . Em muitas situações, a função  $g(x)$  será nula, pois a corda será simplesmente solta livremente, e seu movimento irá depender somente da posição inicial e de sua tensão.



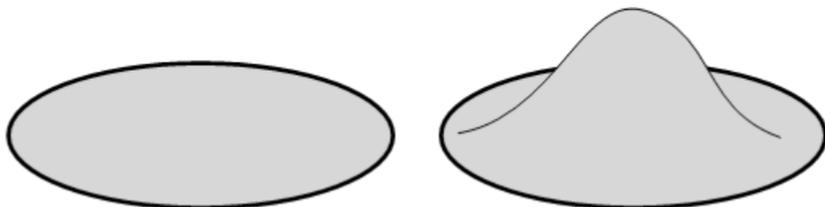
As soluções da equação  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ , definida para  $x \in [0, L]$  e  $t \geq 0$ , com as condições iniciais  $u(x,0) = f(x)$  e  $u_t(x,0) = g(x)$ , em que  $f, g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas e com as condições de contorno  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , descrevem a evolução do movimento de uma corda elástica de comprimento  $L > 0$  que é esticada no formato do gráfico da função  $f(x)$  e solta com velocidades iniciais indicadas pela função  $g(x)$ .

Como já observamos antes, caso o problema seja bidimensional (por exemplo, vibração em uma membrana), a equação tomará a forma  $a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) = u_{tt}(x,y,t)$  com  $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  e as condições de contorno também deverão ser generalizadas.



A equação  $u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) = u_{tt}(x,y,t)$  com a condição inicial  $u(x,y,0) = 1 - x^2 - y^2$  e as condições de fronteira  $u(a,b,t) = 0$  e  $u_t(a,b,0) = 0$  se  $a^2 + b^2 = 1$  modelam uma membrana bidimensional circular de raio 1 que inicialmente é esticada para cima por uma pincelada em seu centro (ou por alguma força “para cima” aplicada na parte de baixo da membrana). A Figura 4.5 ilustra este caso.

Figura 4.5: Ilustração de uma membrana elástica bidimensional circular inicialmente em repouso e que é “puxada” para cima. O próximo passo é o movimento se iniciar. Você pode pensar nessa membrana como o couro de um tambor que foi recentemente tocado.



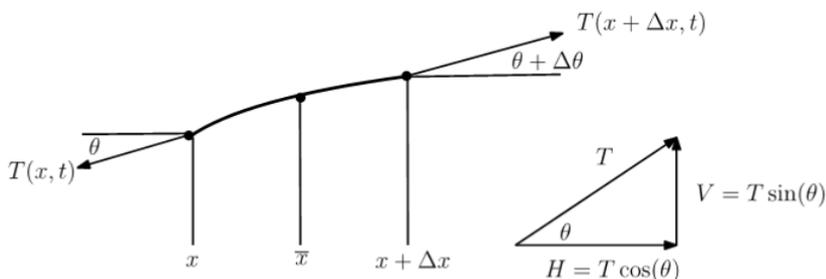
Fonte: elaborada pela autora.

Antes de estudarmos mais alguns exemplos, vamos mostrar como deduzir a equação do calor. Em outras palavras, vamos dar uma justificativa de que se uma função  $u(x,t)$  satisfaz à equação  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com as condições colocadas anteriormente, então ela realmente modela o fenômeno físico desejado, ou seja, descreve a movimentação de um ponto sob a corda elástica.

Como antes, vamos supor que a corda, quando esticada, está localizada no eixo  $x$  entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ . Para deduzir essa equação, vamos supor que efeitos externos como resistência do ar podem ser desprezados. Veremos como é o efeito de uma "pinçelada" na corda em um trecho pequeno da corda, entre os pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ .

Como estamos num trecho de corda de comprimento pequeno  $\Delta x$ , vamos supor também que o movimento é só vertical. Seja  $u(x,t)$  a "altura" atingida pelo ponto  $x$  no tempo  $t$ . Como a corda foi esticada, entra em cena a força de tensão, que é tangente à curva. Vamos supor ainda que  $\rho$  denota a massa do trecho em questão da corda.

Figura 4.6 - Diagrama representando as forças aplicadas na corda.



Fonte: adaptada de Boyce e DiPrima (2015, p. 508).

Pela 2ª Lei de Newton, a componente horizontal da força total no pequeno trecho de corda de comprimento  $\Delta x$  precisa satisfazer  $T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) = T(x, t) \cos(\theta)$ . Note que se  $H(x, t)$  denota a componente horizontal da tensão então  $H(x, t) = H(t)$ , ou seja,  $H$  não depende de  $x$ .

Para a componente vertical, deveremos ter  $T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) = T(x, t) \sin(\theta) + \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t)$ , em que

$\bar{x}$  é o centro de massa do segmento de corda. Se denotarmos essa componente vertical por  $V(x,t)$ , então teremos

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t)$$



Pesquise mais

Agora seria uma boa hora para você pesquisar um pouco mais sobre as chamadas Leis de Newton, que são as bases da mecânica. A Primeira Lei de Newton é a lei da inércia: um corpo só entra em movimento se o somatório das forças exercidas sobre ele for diferente de zero. A Segunda Lei de Newton diz que a força é proporcional à massa e também à aceleração do corpo, resultando na famosa equação  $F = ma$ . A Terceira Lei de Newton é o chamado Princípio da Ação-Reação, ou seja, as forças atuam em pares: para cada força "positiva" existe uma outra força "negativa" agindo sobre um corpo. Seguem duas boas referências:

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**, 5 ed. São Paulo: Editora Blucher, 2013.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física** - Vol. 1: Mecânica 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. (Disponível na biblioteca virtual: <[https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521632054/cfi/6/14!/4/2/4@0:0](https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521632054/cfi/6/14!/4/2/4@0:0>)>).

Como  $\Delta x$  é pequeno, fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ , obteremos  $V_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t)$ , ou ainda  $V(x,t) = H(t)\tan(\theta) = H(t)u_x(x,t)$ , que pode ser reescrita como  $Hu_{xx} = \rho u_{tt}$ , já que  $H$  não depende de  $x$ . Como o segmento de corda é pequeno, podemos trocar  $H(x,t) = T(x,t)\cos(\theta)$  por simplesmente  $H = T$ , obtendo assim a equação da onda  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ .



Refleta

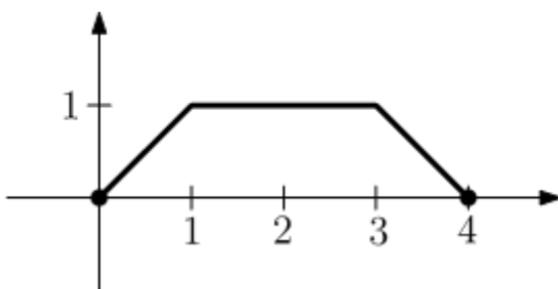
Fizemos a dedução da equação para um pequeno trecho da equação da corda. No entanto, a equação da onda também é verdadeira para cordas grandes. Você já pensou como "colar" cada uma das partes?

Vamos agora a um exemplo, considerando possibilidades para as condições iniciais e de fronteira.

### Exemplificando

Vamos construir a equação da onda para uma corda de 4 metros feita de um material de constante elástica igual a 1 e que inicialmente está esticada por dois pontos de modo que a posição inicial seja dada por segmentos de reta, como na figura abaixo. Suponha ainda que a corda é colocada em movimento a partir do repouso na posição dada abaixo.

Figura 4.7 | Posição inicial da corda.



Fonte: elaborada pela autora.

Para construirmos a equação da onda associada a essa corda, vamos primeiro modelar a função que dá a posição inicial. Essa função é dada por partes. Note que para  $x \in [0,1]$  a função é uma reta que une os pontos  $(0,0)$  e  $(1,1)$ , logo, deve ser  $f(x) = x$ . Para  $x \in [1,3]$  a função é constante e vale 1, logo temos  $g(x) = 1$ . Para  $x \in [3,4]$  é uma reta que une os pontos  $(3,1)$  e  $(4,0)$ , ou seja,  $h(x) = 4 - x$ .

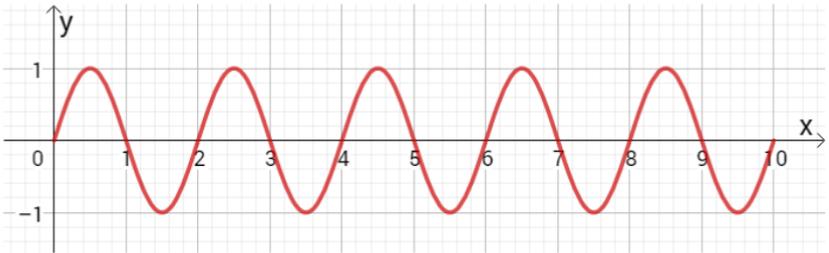
Deveremos ter então a equação como sendo  $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  já que a constante elástica é igual a 1. Como a corda tem 4 metros e está fixada pelos extremos, temos  $u(0,t) = u(4,t) = 0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Como a corda é solta do repouso, devemos ter  $u_t(x,0) = 0$  para todo  $x \in [0,4]$ .

Para a condição inicial, ela é dada por uma função por partes, e pode ser escrita como  $u(x,0) = f(x)$ ,  $x \in [0,1]$ ;  $u(x,0) = g(x)$ ,  $x \in [1,3]$  e, finalmente,  $u(x,0) = h(x)$ ,  $x \in [3,4]$

## Sem medo de errar

Vamos obter uma equação cuja solução descreve o movimento da corda. Considere uma corda de 10 centímetros que está presa nos extremos e uma constante elástica igual a 1. Vamos supor ainda que a corda tem posição inicial dada pelo gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ , com  $x \in [0,10]$ , conforme Figura 4.8.

Figura 4.8 | Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ , com  $x \in [0,10]$ .



Fonte: elaborada pela autora.

Como a corda está presa nos extremos, as condições de fronteira são  $u(0,t) = u(10,t) = 0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . A condição inicial que a corda está "esticada" até ficar no mesmo formato da função dada no gráfico anterior, ou seja,  $u(x,0) = \text{sen}(\pi x)$ , para todo  $x \in [0,10]$ . Além disso, supomos que a corda é solta sem aplicação de nenhuma força, ou seja, temos também a condição inicial  $u_t(x,0) = 0$  para todo  $x \in [0,10]$ .

Reunindo tudo isso, ficamos com a EDP:

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$$

$$u(x,0) = \text{sen}(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0,10]$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,\infty)$$

que modela a oscilação de uma corda elástica, de tamanho 10 centímetros que está presa nos extremos com constante elástica igual a 1.

Olhando para as condições de fronteira percebemos que o formato inicial da corda coincide com o da função cosseno, e a velocidade inicial é nula.

## Avançando na prática

### A equação da onda em uma membrana bidimensional

#### Descrição da situação-problema

Quando um tambor é tocado, o som é produzido pela vibração do couro que é atingido pelas mãos ou por uma baqueta. Esse movimento do couro faz com que o ar dentro do tambor também se mova e produza o som, que é amplificado pelo formato do tambor. Se um tambor tem o formato de um cilindro de altura  $h$  e raio  $r$  com uma membrana de couro em uma das extremidades, supondo que a constante da membrana seja igual a 1 e que a posição inicial da membrana seja como o gráfico de uma função  $z=f(x,y)$ , qual seria a equação da onda associada?

#### Resolução da situação-problema

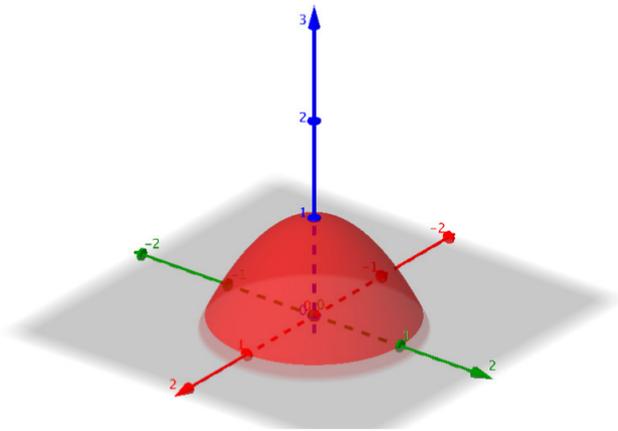
Observe que estamos falando da equação da onda bidimensional, ou seja, da equação  $u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) = u_{tt}(x,y,t)$ .

Como a disposição inicial da membrana é o gráfico da função  $f(x,y)$ , temos a condição inicial  $u(x,y,0) = f(x,y)$ . Para as condições de fronteira, note que elas são bidimensionais, logo são definidas no

bordo do círculo de raio  $r$ , ou seja,  $u(a,b,t) = 0$  e  $u_t(a,b,0) = 0$  se  $a^2 + b^2 = r^2$ .

A configuração geométrica é como no primeiro exemplo desta seção. No caso particular em que  $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ , temos a configuração inicial como na Figura 4.9.

Figura 4.9 | Gráfico da função  $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ .



Fonte: elaborada pela autora.

## Faça valer a pena

**1.** As soluções da equação da onda, uma EDP de segunda ordem, descrevem os movimentos de uma corda elástica no decorrer do tempo. Considere as quatro equações seguintes.

$$1 - u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) = 3u_{tt}(x,y,t)$$

$$2 - u_x(x,y,t) + u_y(x,y,t) = u_{tt}(x,y,t)$$

$$3 - u_{xx}(x,y,t) + u_{yt}(x,y,t) = u_t(x,y,t)$$

$$4 - u_{xx}(x,t) - 3u_{tt}(x,t) = 0$$

Marque a alternativa que aponta corretamente quais das equações anteriores pode ser usada para modelar o movimento de uma corda ou membrana elástica.

- a) Todas as equações.
- b) Somente a equação 2.
- c) Equações 1 e 4.
- d) Somente a equação 1.
- e) Somente a equação 3.

**2.** Na dedução da equação onda aplicamos conceitos físicos de conservação de energia a um pequeno trecho da corda elástica e daí, a partir do cálculo de alguns limites, obtemos a chamada equação da onda como sendo da forma  $a^2 u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$ .

Escolha a alternativa que completa corretamente a sentença a seguir: "Na dedução da equação da onda utilizamos a \_\_\_\_\_ Lei de Newton para calcular o somatório de forças, e obtemos que a componente \_\_\_\_\_ da força não depende da variável  $x$ "

- a) Primeira / vertical.
- b) Segunda / horizontal.
- c) Segunda / vertical.
- d) Terceira / horizontal.
- e) Terceira / vertical.

**3.** A equação da onda consiste em uma EDP de segunda ordem, com condições iniciais e de fronteira. Por exemplo, as soluções do sistema

$$5u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$$

$$u(x, 0) = -x(x - 2), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 2]$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, \infty)$$

modelam o movimento de uma corda elástica.

Sobre a corda elástica modelada pela equação anterior, é correto afirmar:

- a) É uma corda de comprimento 5 cuja posição inicial é uma parábola.
- b) É uma corda de comprimento 1.
- c) É uma corda de comprimento 2 cuja posição inicial é como uma parábola.
- d) É uma corda de comprimento 2 cuja posição inicial é como um triângulo.
- e) É uma corda de comprimento 2 cuja posição inicial é concatenação de semirretas.

## Seção 4.2

### Equação da onda: soluções

#### Diálogo aberto

Agora que já sabemos reconhecer a EDP da onda e também modelá-la, considerando as várias possibilidades para condição inicial, vamos aprender uma estratégia para resolvê-la. A estratégia de solução utiliza o método de separação de variáveis novamente. A diferença é que agora a equação diferencial parcial será transformada num sistema com duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, ao contrário da equação do calor, que era transformada em uma equação de primeira ordem e uma equação de segunda ordem.

Lembre-se de que, na seção anterior, você orientou a equipe de desenvolvimento do game como que a solução da equação

$$\begin{aligned}u_{xx}(x,t) &= u_{tt}(x,t) \\ u(x,0) &= \cos(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0,10] \\ u(0,t) &= u(10,t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,\infty)\end{aligned}$$

representa o movimento de uma corda de 10 centímetros cuja posição inicial se parece com a função cosseno e é solta com velocidade inicial nula. Agora você deverá explicar à equipe de desenvolvimento do game como resolver esta equação. Este é um grande desafio, pois explicar com detalhes o processo de obtenção de soluções para uma equipe com baixo conhecimento técnico do assunto é difícil. Nossa sugestão é apresentar o problema sempre com muitos gráficos e exemplos particulares. Quando finalmente obtiver a solução  $u(x,t)$ , uma boa estratégia para apresentar a solução é fixar alguns valores de  $t = t_0$  e plotar o gráfico da função  $y = u(x, t_0)$ , que nos dá uma "fotografia" da corda, passadas  $t_0$  unidades de tempo. Assim você poderá descrever precisamente como a corda irá se movimentar em todo tempo.

## Não pode faltar

Ao longo desta seção vamos fixar a equação da onda como sendo a EDP  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  juntamente com um conjunto de condições iniciais e de contorno, em que  $u: [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com derivadas de segunda ordem contínuas.

### Corda elástica com deslocamento inicial nulo

Assim como no caso da equação do calor, o primeiro passo para obtermos soluções para a equação da onda é utilizar a técnica de separação de variáveis e transformar a EDP num sistema de EDOs.



#### Assimile

Apesar da técnica de separação de variáveis ser utilizada também na equação da onda, o resultado é bem diferente quando comparado ao caso da equação do calor. Enquanto lá o sistema era composto por uma equação de primeira ordem e uma de segunda ordem, obteremos agora duas equações de segunda ordem!

Considere a equação  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  e vamos supor que é possível obter uma solução da forma  $u(x,t) = X(x)T(t)$ .



#### Refleta

Observe que dada uma EDP qualquer, nada nos garante que a solução da EDP pode de fato ser decomposta na forma indicada pelo método de separação de variáveis  $u(x,t) = X(x)T(t)$ . Historicamente, porém, sabemos que o método de separação de variáveis funciona muito bem para Equação do Calor, Equação da Onda, Equação de Laplace (que estudaremos na Seção 4.3) e para a Equação de Schrödinger (que não veremos neste livro, mas é uma equação muito importante em física quântica). Mas fique atento: algumas EDPs não podem ser resolvidas por este método. Você consegue dar um exemplo de uma EDP que não pode ser resolvida por aplicação do método de separação de variáveis?

Vamos calcular as derivadas parciais de  $u(x,t) = X(x)T(t)$  para depois substituir na equação:

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t)$$

$$u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t).$$

Substituindo na equação, ficamos com  $a^2 X''(x)T(t) = a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$ , ou seja,  $a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ . Esta última equação pode ser escrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)},$$

desde que suponhamos que as funções  $X(x)$  e  $T(t)$  não se anulam.

Observe que, como o lado esquerdo da equação anterior só depende de  $x$  e o lado direito só depende de  $t$ , a única forma desta igualdade ser verdadeira é se as funções forem constantes, ou seja,

deverá existir um número real  $\lambda$  tal que  $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$  e  $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$  (observamos que quando escrevemos  $-\lambda$  não

estamos supondo nada sobre a positividade ou negatividade da constante; faremos isto somente para que o sistema fique escrito numa forma mais conveniente).

Esta construção transforma a equação diferencial parcial  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  no sistema a seguir, composto por duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ e } T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Agora que nós já obtivemos o sistema de EDOs, veremos como as condições iniciais da equação da onda podem ser convertidas em condições iniciais destas equações.

A equação da onda possui uma condição de contorno da forma  $u(0,t) = 0$  e  $u(L,t) = 0$ , que é usada para garantir que a corda está fixada em seus extremos. Aplicando essas condições na função  $u(x,t) = X(x)T(t)$  obtemos  $X(0)T(t) = 0$  e  $X(L)T(t) = 0$ . Como devemos supor que a função  $T$  não é identicamente nula, caso contrário a solução seria nula, restará  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$ .

Na unidade anterior estudamos as soluções das equações de segunda ordem da forma  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  com condições de contorno de dois pontos  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$ : estas soluções não existem para todo valor de  $\lambda$ , mas somente para os autovalores

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \text{ que são associados às autofunções } X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$



### Assimile

Vimos na unidade anterior como resolver equações diferenciais com condição de fronteira de dois pontos, ou seja, equações da forma  $y'' + py' + qy = 0$ , em que  $p, q$  são números reais. No caso da equação da onda, por muitas vezes teremos condições de fronteira da forma  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) = 0$ , e também  $p = 0$ . A existência de solução está condicionada a  $q > 0$  e, neste caso, a solução é dada por  $y(x) = b \text{sen}(nx)$ , para  $b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Até aqui, o procedimento de encontrar a solução é bem parecido com o da equação do calor. Veremos que para encontrar a função  $T$  o processo é bem diferente.

Vamos supor inicialmente que a corda será solta da posição inicial com velocidade zero, ou seja, nenhuma força externa é utilizada para acelerar o movimento da corda, além da força exercida pela tensão da corda. Isso é equivalente à condição  $u_t(x,0) = 0$ , para  $x \in [0, L]$ .

Lembrando que  $u_t(x,t) = X(x)T'(t)$ , essa condição é equivalente a  $X(x)T'(0) = 0$ , ou seja,  $T'(0) = 0$ , já que não queremos que  $X$  seja uma função nula.

Considerando os valores de  $\lambda$  encontrados na equação envolvendo a variável  $x$ , podemos escrever a equação para a variável  $t$  como

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T(t) = 0. \text{ Agora precisamos resolver essa equação.}$$



### Pesquise mais

Agora é uma boa hora para voltar algumas páginas do livro e rever sobre como encontrar soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que você encontra na Unidade 2. Você pode já ter feito isso quando estudamos a equação do calor, mas é importante reforçar o conhecimento! Uma referência tradicional sobre o assunto é o Capítulo 13 de:

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**: volume 4. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. (disponível na Biblioteca Virtual).

A equação característica associada a essa EDO é  $r^2 + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} = 0$ , ou seja,  $r = \pm \frac{n\pi a}{L} i$ . Como as raízes da equação característica são números complexos imaginários puros, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$T(t) = a_1 \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + a_2 \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Considerando a condição inicial  $T'(0) = 0$ , obtemos que  $a_2 = 0$ , logo a função  $T$  é dada por

$$T(x) = \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Portanto, até agora temos que para cada número natural  $n$  temos que  $u_n(x, t) = X_n(x)T(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right)$  é solução

da EDP. Usando o princípio da superposição, concluímos que a solução geral da equação da onda é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Veremos agora como ajustar os coeficientes  $c_n$  para refletir a condição inicial.

Supomos inicialmente que a condição inicial era dada por uma função  $f(x)$ , com  $u(x,0) = f(x)$ . Portanto, deveremos ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Observe que, como a função  $f(x)$  está escrita como uma soma infinita de funções trigonométricas, ela está expressa como sua Série de Fourier. Porém, para encontrar a solução da equação da onda, precisamos saber os valores exatos dos coeficientes  $c_n$  e isto é feito calculando integrais de  $f(x)$  com funções trigonométricas.

Note que a integral  $\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$  é igual a

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-L}^L \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

e que a soma do lado direito é não-nula somente quando  $k = m$ ,

e neste caso temos que  $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = L$ , portanto, a

equação anterior fica

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = c_n L$$

e isolando  $c_n$  obtemos que  $c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx$ .

Observe que nos passos anteriores nós utilizamos as propriedades de ortogonalidade das funções  $\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$  e  $\text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , que são as relações:

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0, \text{ para todo } m, n;$$

$$\int_{-L}^L \text{cos}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0, \text{ para todo } m \neq n;$$

$$\int_{-L}^L \text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = L, \text{ para todo } n \neq 0;$$

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0, \text{ para todo } m \neq n;$$

$$\text{e } \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = L, \text{ para todo } n.$$

Essas relações podem ser demonstradas utilizando a técnica de integração por partes.

Resumindo:



### Assimile

A solução da equação da onda  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições iniciais  $u(x,0) = f(x)$ , escrita em Série de Fourier como  $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , e  $u_t(x,0) = 0$ , com condições de contorno  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  para todo  $t > 0$

é dada por  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$ , em que  $c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}(n\pi x / L) dx$ .

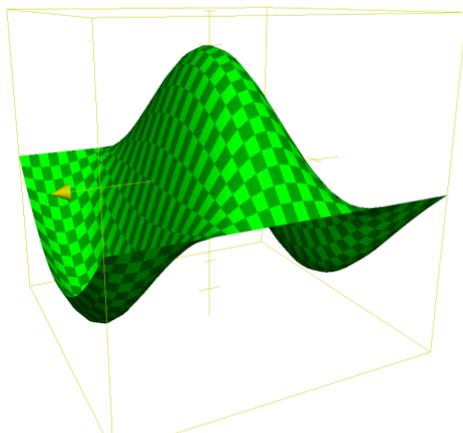
Portanto, para encontrar a solução da equação da onda, supondo que ela é solta sem aplicação nenhuma de força externa ( $u_t(x,0) = 0$ ), basta calcular os coeficientes de Fourier  $c_n$  usando a integral dada no quadro "Assimile" anterior.



### Exemplificando

Considere a equação  $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(1,t) = 0$  e condições iniciais  $u_t(x,0) = 0$  e  $u(x,0) = f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ . Neste caso, basta observar que o único termo da série de Fourier da função  $f(x)$  que não é nulo é o primeiro termo, associado a  $n = 1$ , e neste caso  $c_1 = 1$ . Portanto, a solução da EDP é dada por  $u(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi t)$ .

Figura 4.10 | Gráfico da função  $z = \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi t)$



Fonte: elaborada pela autora.

Veremos agora o que acontece no caso em que a corda possui uma velocidade inicial na hora que é solta. Para isso, vamos considerar a equação  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  e condições iniciais  $u(x,0) = 0$  e  $u_t(x,0) = g(x)$ , ou seja, iremos manter a corda em repouso, mas ela será colocada em movimento com uma velocidade inicial dada pela função  $g(x)$ .

Observe que as condições de contorno continuam iguais, mas as condições iniciais mudam. Vamos deduzir a solução da equação, mas omitiremos alguns detalhes, que são idênticos ao caso anterior.

Suponha novamente que  $u(x,t) = X(x)T(t)$ . Utilizando a separação de variáveis, obtemos

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ e } T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Resolvemos inicialmente a primeira equação, que só tem solução se os autovalores forem  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ , implicando em soluções da forma  $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ .

Olhando para a segunda equação, a condição inicial agora implica que  $T(0) = 0$ , portanto a solução para a segunda equação é da forma  $T(x) = \text{sen}\left(\frac{n \pi a}{L} t\right)$ .

Aplicando novamente o princípio da superposição e somando todas as soluções obtemos que a solução geral é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n \pi a}{L} t\right).$$

Veremos agora como aplicar a condição inicial e calcular os coeficientes  $c_n$  neste caso.

Como  $u_t(x,0) = g(x)$  é a condição inicial e se usarmos a expressão anterior obtemos  $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$ . Logo  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$

e os coeficientes de Fourier de  $g(x)$  são  $\frac{n\pi a}{L} c_n$ . Obtemos, assim, a solução da equação da onda também neste caso.

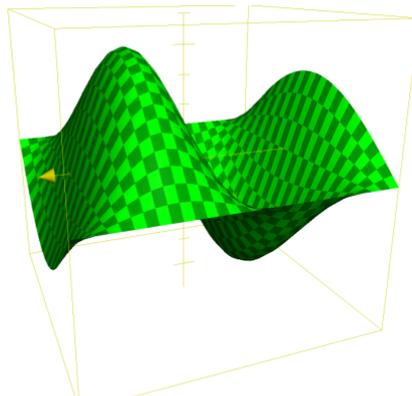


### Exemplificando

Considere a equação  $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(1,t) = 0$  e condições iniciais  $u_t(x,0) = g(x) = \text{sen}(5\pi x)$  e  $u(x,0) = f(x) = 0$ . Portanto, a corda está inicialmente em repouso, mas recebe uma força para ser colocada em movimento, força esta que, em cada ponto  $x$ , é da magnitude da função  $g(x)$ .

Neste caso, observe que o único termo da série de Fourier da função  $g(x)$  que não é nulo é o termo associado a  $n = 5$ , e neste caso  $c_5 = 1$ , com coeficiente de Fourier  $c_5 5\pi$ . Portanto, a solução da EDP é dada por  $u(x,t) = 5\pi \text{sen}(5\pi x) \text{sen}(5\pi t)$ .

Figura 4.11 | Gráfico da função  $z = 5\pi \sin(5\pi x) \sin(5\pi t)$



Fonte: elaborada pela autora.

Compare o exemplo anterior e veja como as funções são diferentes.



A solução da equação da onda  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições iniciais  $u(x,0) = 0$  e  $u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  com condições de contorno  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  para todo  $t > 0$  é dada por  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} t \right)$ , em que  $c_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x / L) dx$ .

Passamos finalmente ao caso mais geral, quando a equação da onda  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  possui condições de fronteira  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  e condições iniciais  $u(x,0) = f(x)$ ,  $u_t(x,0) = g(x)$ .

Vamos dividir esse problema em dois.

*Primeiro problema:*  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  e condições iniciais  $u(x,0) = f(x)$ ,  $u_t(x,0) = 0$ ; seja  $v(x,t)$  solução desta EDP.

*Segundo problema:*  $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  e condições iniciais  $u(x,0) = 0$ ,  $u_t(x,0) = g(x)$ ; seja  $z(x,t)$  solução desta EDP.

Para obter uma solução do problema inicial, basta somar as soluções de cada um dos problemas anteriores.

De fato, seja  $w(x,t) = v(x,t) + z(x,t)$ . É claro que esta função satisfaz à equação, pois cada um dos seus termos satisfaz. O mesmo vale para as condições de fronteira.

Para as condições iniciais, note que  $w(x,0) = v(x,0) + z(x,0) = f(x) + 0 = f(x)$  e  $w_t(x,0) = v_t(x,0) + z_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x)$ , logo, a função  $w$  satisfaz à equação do calor.



Considere a equação  $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$  com condições de fronteira  $u(0,t) = u(1,t) = 0$  e condições iniciais  $u_t(x,0) = g(x) = \pi \sin(\pi x)$  e  $u(x,0) = f(x) = \text{sen}(\pi x)$ . Neste caso, a solução da EDP será a soma de soluções de dois problemas distintos, como vimos.

O único termo da Série de Fourier da função  $f(x)$  que não é nulo é o primeiro termo, associado a  $n = 1$ , e neste caso  $c_1 = 1$ . O mesmo vale para a Série de Fourier de  $g(x)$ . Portanto, a solução da EDP é dada por  $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t) + \sin(\pi x)\text{sen}(\pi t)$ .

## Sem medo de erro

Nesta seção aprendemos como resolver a equação da onda, e seu desafio agora é apresentar para a equipe de desenvolvimento do jogo a solução do sistema seguinte:

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$$

$$u(x,0) = \cos(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0,10]$$

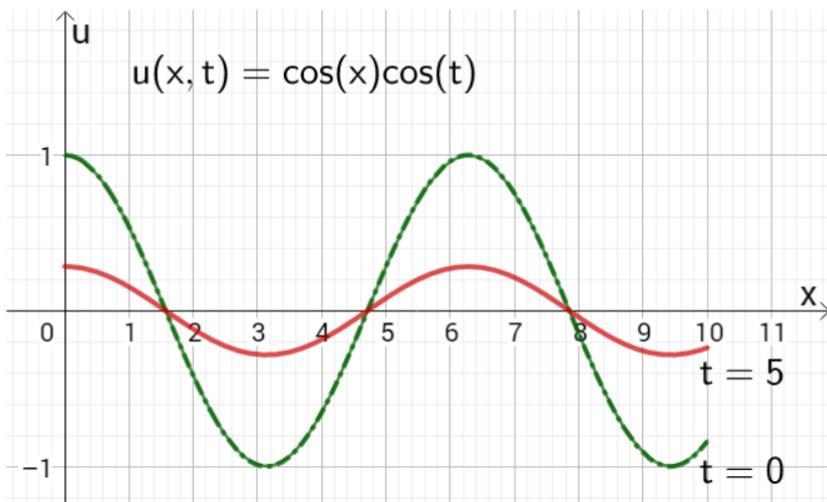
$$u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,\infty)$$

Note que a condição inicial é uma função trigonométrica; logo, esta é a Série de Fourier da condição inicial. Portanto, podemos calcular diretamente a solução da EDP simplesmente como  $u(x,t) = \cos(x)\cos(t)$ . Você pode verificar que esta é de fato a solução calculando derivadas parciais nas variáveis  $x$  e  $t$ .

Observe que essa estratégia é muito boa: quando a condição inicial é soma de funções trigonométricas de mesmo argumento, então a Série de Fourier da condição inicial na verdade é simplesmente uma soma finita. Isso facilita muito o processo de obtenção da solução, pois somente uma quantidade finita dos coeficientes de Fourier é não nula.

Vejamos agora dois gráficos que mostram as soluções da equação da onda para valores diferentes do tempo.

Figura 4.12 | Evolução da equação nos tempos  $t=0$  e  $t=5$ .



Fonte: elaborada pela autora

## Avançando na prática

### Equação da onda com condições iniciais não nulas

#### Descrição da situação-problema

Você já explicou para a equipe de desenvolvimento do jogo como resolver a equação da onda no caso em que uma das condições iniciais é nula. Agora, trabalhando no problema abaixo, ensine-os a resolver a equação da onda no caso em que as condições iniciais são não nulas. O ponto principal é explicar que a solução pode ser obtida como soma de soluções de duas EDPs auxiliares. Utilize o problema abaixo como modelo:

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$$

$$u(x, 0) = \text{sen}(x), \quad u_t(x, 0) = \cos(x) \quad \text{para todo } x \in [0, 2\pi]$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, \infty)$$

## Resolução da situação-problema

Vimos que, nesse caso, a solução será dada como a soma de duas soluções: uma do problema trocando a primeira condição inicial por  $u(x, 0) = 0$ , e outra do problema obtido trocando a segunda condição inicial por  $u_t(x, 0) = 0$ .

Para o primeiro caso, obteremos a solução  $w(x, t) = \text{sen}(x)\cos(t)$ . No segundo caso, obtemos  $z(x, t) = \cos(t)\text{sen}(x)$ .

Portanto, a solução para a equação é dada por  $u(x, t) = \text{sen}(x)\cos(t) + \cos(t)\text{sen}(x)$ .

### Faça valer a pena

**1.** Ao aplicar o método de separação de variáveis na equação da onda, transformamos uma EDP em um sistema de EDOs. Considere a equação  $u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$ .

Qual das opções seguintes representa corretamente o sistema de EDOs que obtemos ao aplicar o método de separação de variáveis na EDP anterior?

- a)  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ .
- b)  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ .
- c)  $X'(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ .
- d)  $X'(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ .
- e)  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T''(t) + \lambda a^2 T'(t) = 0$ .

**2.** Considere a equação da onda  $u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$  com condições de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  e condições de fronteira da forma

$u_t(x, 0) = 0$  e  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)$ . Considere as afirmações:

I- A solução desta equação da onda é uma soma infinita de produtos de funções trigonométricas.

II- A solução desta equação da onda é uma soma finita de produtos de funções trigonométricas.

III- O único termo não nulo na Série de Fourier da solução é o termo que acompanha o 5º coeficiente de Fourier.

Sobre as afirmações anteriores, é correto dizer que:

- a) I e III estão corretas.
- b) II e III estão corretas.
- c) somente III está correta.
- d) somente II está correta.
- e) todas as afirmações são falsas.

**3.** Nesta unidade nós aprendemos a resolver a equação da onda, utilizando basicamente duas técnicas: separação de variáveis e Séries de Fourier. Considere as afirmações abaixo, sobre o processo de obtenção destas soluções.

I- Quando nenhuma das condições iniciais é nula, precisamos resolver dois problemas do tipo "equação da onda" e somar as soluções.

II- Quando nenhuma das condições iniciais é nula, a equação da onda não tem solução.

III- O método de separação de variáveis é eficiente para a equação da onda e para qualquer outra EDP.

IV- Se ambas as condições iniciais são nulas, então a solução da equação da onda é nula.

Marque a alternativa que indica as afirmações corretas.

- a) somente II está correta.
- b) somente IV está correta.
- c) I e IV estão corretas.
- d) II e IV estão corretas.
- e) somente a III está correta.

## Seção 4.3

### Equação de Laplace

#### Diálogo aberto

Nesta seção veremos mais um tipo de EDP, a equação de Laplace,

que tem a forma  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  no caso de uma função de duas

variáveis  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e é também denotada por  $\Delta u = 0$ . Quando a equação de Laplace bidimensional está acompanhada de uma condição de contorno, o conjunto é chamado de problema de Dirichlet. Observe que a equação de Laplace não admite nenhuma condição inicial, pois não existe derivada com respeito a uma variável temporal. Nesta seção estudaremos a equação de Laplace com dois tipos de fronteira: um retângulo e um círculo. A solução da equação de Laplace (ou do Problema de Dirichlet) é uma função duas vezes diferenciável que satisfaz a equação e também a condição de contorno.

A equação de Laplace tem muitas aplicações em física. Por exemplo, quando estudamos potencial eletrostático, ou seja, a capacidade dos corpos eletrizados de realizar trabalho (por meio de atração e repulsão, por exemplo), a determinação do potencial é feita resolvendo um caso especial da equação de Laplace, chamada Equação de Poisson.

Na última etapa do projeto com a empresa de games, é necessário desenvolver um modelo matemático para um jogo em que um personagem pula em uma superfície parecida com uma cama elástica circular, em um planeta em que a gravidade é zero (logo, o movimento não dependerá da passagem do tempo). Para tornar o movimento da cama elástica mais real, pedem para modelar matematicamente a vibração da superfície. Como você explicaria para eles qual o melhor modelo? Você deverá utilizar um caso particular da equação de Laplace!

Observe que o caso da solução de Laplace no caso unidimensional, ou seja, solução para a equação  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$  para uma função  $g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é simples de obter e pode ser conseguida utilizando as técnicas de cálculo diferencial e integral. Aproveite o começo da seção e obtenha a solução para essa equação.

## Não pode faltar

### Equação de Laplace bidimensional

Antes de começar de fato a falar sobre a equação de Laplace, vamos introduzir algumas definições que serão necessárias no decorrer do texto. Vamos denotar por  $C^k(\Omega, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto e conexo, e  $u(x, y)$  é uma função  $k$  vezes diferenciável com  $k \geq 2$ . Defina a função  $L: C^k(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k-2}(\Omega, \mathbb{R})$  por

$$L(u)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y),$$

ou seja, a função  $L$  transforma

uma função  $u$  em uma soma de derivadas de segunda ordem. O que iremos chamar de equação de Laplace é aquela da forma  $L(u)(x, y) = 0$ , cuja solução é uma função  $u(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Uma função que satisfaz à equação de Laplace é chamada de função harmônica.

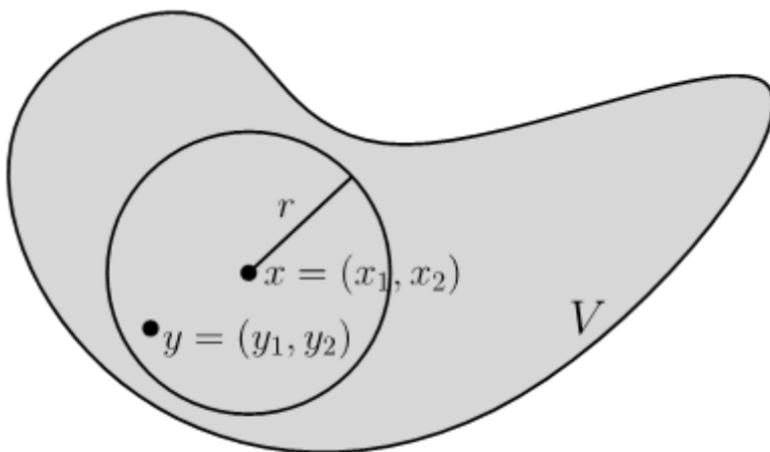


### Pesquise mais

Em geral, a equação de Laplace é definida em regiões especiais do plano. No nosso caso, iremos trabalhar com conjuntos abertos e conexos. Grosso modo, um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^2$  é aberto quando para todo  $\mathbf{x} \in V$ , existe um número (pequeno)  $r > 0$  tal que o conjunto  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2; \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$  está contido em  $V$ , em que  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  é a distância entre os pontos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , ou seja,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Figura 4.13 | Conjunto aberto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Um conjunto é dito conexo quando não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos com interseção vazia. Por exemplo, o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$  não é conexo (ele pode ser decomposto como  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ ), mas o conjunto  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  é conexo (é um retângulo). Agora é um bom momento para você pesquisar esses conceitos juntamente com o conceito de função diferenciável. Sugerimos, para os conceitos de conjunto aberto e de conjunto conexo, a referência disponível em: [http://w3.impa.br/~rimfo/reta\\_v14/topologia.pdf](http://w3.impa.br/~rimfo/reta_v14/topologia.pdf) (acesso em: 10 dez. 2017.). Já para o conceito de função diferenciável, consulte o link disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~olivaine/AnaliseRn-notasdeaulaV01.pdf> (acesso em: 10 dez. 2017.).

### Problema de Dirichlet

Quando a equação de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$  vem acompanhada de uma condição de contorno, ou seja, de uma

condição que nos diga quanto a função  $u(x,y)$  vale na fronteira do conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , então chamaremos o sistema de Problema de Dirichlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega$$

$$u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \partial\Omega$$



Refleta

No enunciado do Problema de Dirichlet, dissemos que a condição  $u(x,y) = f(x,y)$  vale na fronteira do conjunto  $\Omega$ , que foi denotada por  $\partial\Omega$ . No caso de  $\Omega$  ser um retângulo, sua fronteira  $\partial\Omega$  é a união de seus lados. No caso de  $\Omega$  ser um disco, sua fronteira  $\partial\Omega$  é a circunferência externa. Isso é o que diz o senso comum, e coincide com a definição matemática formal de fronteira de um conjunto. Um ponto  $x$  é dito estar na fronteira de um conjunto  $\Omega$ , ou seja,  $x \in \partial\Omega$ , quando arbitrariamente próximo de  $x$  existem pontos de  $\Omega$  e pontos fora de  $\Omega$ , ou seja: para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x,\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$  e  $B(x,\varepsilon) \cap \Omega^c \neq \emptyset$ . Considerando outros tipos de conjuntos, pense como seriam suas fronteiras. Será que existem conjuntos que são iguais às suas fronteiras?

Muitos matemáticos famosos trabalharam na solução do Problema de Dirichlet, com condições de contorno distintas, e também no caso geral. O primeiro desses estudos de que se tem notícia é de 1828, feito por George Green – nesse mesmo estudo apareceu a primeira demonstração do resultado que conhecemos hoje como Teorema de Green, que relacionada integrais de linha e integrais duplas (STEWART, 2013).

## Equação de Laplace no retângulo

Vamos estudar como resolver a equação de Laplace com condição de fronteira dada sobre um retângulo, ou seja, vamos considerar a equação  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  no retângulo  $[0,a] \times [0,b]$ , com as condições  $u(x,0) = 0$ ,  $u(x,b) = 0$ ,  $0 < x < a$ ,

$u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = f(y)$ ,  $a \leq y \leq b$ , em que  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada. Essas condições significam que a função  $u(x, y)$  deve ser nula em três dos lados do retângulo, e somente no lado direito vale  $f(y)$ .

Assim como nas seções anteriores iremos resolver a equação utilizando a técnica de separação de variáveis. Vamos supor que  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  e calcular as derivadas parciais:

$$u_x(x, y) = X'(x)Y(y)$$

$$u_{xx}(x, y) = X''(x)Y(y)$$

$$u_y(x, y) = X(x)Y'(y)$$

$$u_{yy}(x, y) = X(x)Y''(y)$$

Logo, a equação  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  fica escrita como  $X''(x)Y(y) = X(x)Y''(y)$ , o que implica que existe um número real

$\lambda$ , chamado constante de separação, tal que  $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$

Então, novamente temos duas equações diferenciais ordinárias  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  e  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ .

Veremos como as condições de contorno ficam quando transformadas nas condições iniciais das EDOs:

- Se  $u(x, 0) = 0$  então  $X(x)Y(0) = 0$ , o que implica  $Y(0) = 0$  (não queremos que  $X(x)$  seja a função nula).
- Se  $u(x, b) = 0$  então  $X(x)Y(b) = 0$  e daí  $Y(b) = 0$ . Analogamente, a condição  $u(0, y) = 0$  implica  $X(0) = 0$ .

Então a equação diferencial para a função  $Y(y)$  tem a forma  $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ ,  $Y(0) = Y(b) = 0$ , que é uma equação do tipo fronteira de dois pontos, que já estudamos nas seções anteriores.

Neste caso, a única solução possível é  $Y_n(y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$ ,

autofunção associada aos autovalores  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$  do operador  $S(Y) = Y'' - \lambda Y$ , em que  $n$  é um número natural.

Agora que sabemos quais são os valores possíveis para  $\lambda$ , vamos resolver a EDO para a função  $X(x)$ . A equação característica é dada por  $r^2 - \lambda = 0$ , que tem como raízes  $r = \pm\lambda = \pm\left(\frac{n\pi}{b}\right)$ , com  $n$  um número natural.

Desta forma, a solução geral da EDO é dada por  $X_n(x) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right)$ , o que simplificando resulta em  $X_n(x) = c_1 \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$ , com  $n$  um número natural.



### Pesquise mais

A solução da EDO associada à função  $X(x)$  faz uso das funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Apesar do nome complicado,

essas funções são simples e definidas por  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  e  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . As funções trigonométricas hiperbólicas

satisfazem a identidades parecidas com as funções trigonométricas usuais. Por exemplo, enquanto  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ , no caso hiperbólico vale  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ . Que tal tentar encontrar relações entre as funções trigonométricas hiperbólicas e suas derivadas?

Vimos que a EDO para a função  $X(x)$  tem como condição inicial  $X(0) = 0$ , logo  $c_1 = 0$  e daí  $X_n(x) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$ , com  $n$  um número natural.

Coletando as expressões obtidas para  $X(x)$  e para  $Y(y)$  obtemos que a solução para a equação de Laplace é

$$u_n(x, y) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \text{ com } n \text{ um número natural.}$$

Utilizando novamente a superposição de funções, já que a equação é homogênea, obtendo a solução geral

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Os coeficientes  $b_n$  podem ser decididos utilizando a única condição de contorno que falta ser utilizada, ou seja,

$$u(a, y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Isso significa que a série de Fourier da função  $f(y)$  tem como coeficientes  $b_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$ .

Por outro lado, já vimos na seção anterior que os coeficientes de Fourier de uma função  $f(y)$  são dados pela integral

$$\frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy. \text{ Portanto temos que}$$

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy,$$

ou seja,

$$b_n = \left( \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \right)^{-1} \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy,$$

e essa é a solução do Problema de Dirichlet no retângulo.



O problema de Dirichlet no retângulo  $[0, a] \times [0, b]$  com condições de contorno  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, b) = 0$ ,  $0 < x < a$

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = f(y), a \leq y \leq b$$

em que  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem como solução

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{ e os coeficientes são}$$

$$\text{dados por } b_n = \left( \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \right)^{-1} \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy.$$

Vamos a um exemplo numérico:



## Exemplificando

Vamos considerar o retângulo  $[0, 1] \times [0, 1]$  e as condições de contorno  $u(0, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, 1) = 0$ ,  $u(1, y) = f(y)$ , em que a função  $f(y)$  é dada por  $f(y) = y(1 - y)$ .

Vimos que a solução desse problema é dada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

em que os coeficientes  $b_n$  são dados por

$$b_n = \left( \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \right)^{-1} \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Substituindo os valores das constantes pelos nossos, a solução fica

$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi x) \cosh(n\pi y)$ , com os coeficientes

dados por

$$b_n = 2(\sinh(n\pi))^{-1} \int_0^1 y(1-y) \sin(n\pi y) dy$$

Essa integral pode ser resolvida pelo método de integração por partes, obtendo

$$b_n = 2(\sinh(n\pi))^{-1} \left( \frac{2 - 2\cos(\pi n) - \pi n \sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} \right)$$

Observe que se  $n$  é ímpar, então  $\cos(n\pi) = -1$  e  $\sin(n\pi) = 0$ . Logo, se  $n$  é ímpar,

$$b_n = 2(\sinh(n\pi))^{-1} \frac{4}{\pi^3 n^3}$$

e se  $n$  é par, como  $\cos(\pi n) = 1$  e  $\sin(\pi n) = 0$ , segue que  $b_n = 0$ .

Assim, a solução é dada por

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh((2k+1)\pi) n^3} \sinh((2k+1)\pi x) \sin((2k+1)\pi y)$$

Na dedução da solução do Problema de Dirichlet, utilizamos condições de contorno que se anulavam em três dos lados de um retângulo e somente em um dos lados era não-nula, igual a uma função  $f(y)$ . Esta restrição, para um lado específico do retângulo, não é tão importante. Por exemplo, suponha que as condições de contorno sejam  $u(0, y) = g(y)$ ,  $u(a, y) = f(y)$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, b) = 0$ , ou seja, a função se anula nos lados superior e inferior do quadrado, coincide com a função  $g(y)$  no lado esquerdo e coincide com a função  $f(y)$  no lado direito.

Neste caso, poderíamos transformar esse problema em dois, com a mesma equação, variando as condições de contorno:

Condições de contorno para a 1ª equação:  $u(0, y) = g(y)$ ,  $u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, b) = 0$ ;

Condições de contorno para a 2ª equação:  $u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = f(y)$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, b) = 0$ .

Seja  $v(x, y)$  a solução da 1ª equação (com suas condições de contorno) e  $w(x, y)$  a solução da 2ª equação (com suas condições de contorno). Assim  $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$  será a solução para a equação inicial. Essa é mais uma aplicação do **princípio da superposição**. Note que cada uma das equações obtidas tem a forma da que usamos para deduzir a solução. Deveríamos fazer procedimento semelhante se cada um dos lados tivesse uma condição não-nula.

## Equação de Laplace no disco

Veremos agora como encontrar a solução da equação de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  no caso em que as condições de fronteira são dadas sobre pontos no disco  $x^2 + y^2 = a^2$ . Apesar desse disco estar na origem, a solução que apresentaremos vale para qualquer disco.

Vamos supor que a condição de contorno é dada por coordenadas polares  $u(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) = h(\theta)$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Para facilitar o processo de encontrar a solução, vamos passar a equação de Laplace para coordenadas polares, fazendo  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ . Observe que podemos isolar as

variáveis  $r$  e  $\theta$ , obtendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(y / x)$ .

Utilizando a regra de derivação implícita, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Calculando novamente as derivadas parciais, para obter as derivadas parciais de segunda ordem, obtemos a equação de Laplace em coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\text{ou seja, } u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0.$$

Novamente vamos aplicar a técnica da separação de variáveis, mas agora note que a função depende das variáveis  $r$  e  $\theta$ , então vamos escrever  $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ . Calculando derivadas parciais e substituindo na equação obtemos

$$R''(r)T(\theta) + \frac{R'(r)}{r}T(\theta) + \frac{R(r)}{r^2}T''(\theta) = 0.$$

Multiplicando essa equação por  $\frac{r^2}{R(r)T(\theta)}$  obtemos

$$\frac{r^2}{R(r)}R''(r) + \frac{r}{R(r)}R' = \lambda^2 = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)},$$

obtendo,

assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem  $T''(\theta) = -\lambda^2 T(\theta)$  e  $r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda^2 R(r)$ .

Observe que esse sistema é bem mais complicado de resolver do que os sistemas anteriores que apareciam na equação do calor, na equação da onda e até mesmo na equação de Laplace com fronteira sendo um retângulo.

A primeira equação do sistema tem solução simples:  $T(\theta) = c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta)$ . A segunda equação tem como solução  $R(r) = d_1 r^\lambda + d_2 r^{-\lambda}$ , para  $\lambda \neq 0$ . Se  $\lambda = 0$  obtemos  $R(r) = d_1 \ln|r| + d_2$ .

Novamente coletando as soluções, usando que  $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$  e o princípio da superposição, obtemos que a solução geral do Problema de Dirichlet no Disco é dada por

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{sen}(n\theta) r^n, \text{ em que os}$$

coeficientes satisfazem

$$h(\theta) = u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\theta) a^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{sen}(n\theta) a^n. \quad \text{Para}$$

descobrir os coeficientes  $c_n$  e  $d_n$  basta calcularmos as integrais de funções do tipo  $h(\theta)\cos(n\theta)$  e  $h(\theta)\sin(\theta)$ , obtendo:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta, \text{ com}$$

$$n \geq 0.$$

Observe que, neste caso, o somatório começa em  $n=0$  para os coeficientes  $a_n$  (no caso dos coeficientes  $b_n$ , se colocarmos  $n=0$  teremos  $b_0=0$ ).

Veremos como calcular explicitamente a solução em um exemplo numérico.



### Exemplificando

Considere a equação de Laplace no disco unitário  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  e com condição de contorno  $u(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) = 1$ , ou seja,  $h(\theta) = 1$ .

Acabamos de deduzir que a solução é dada por

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \text{sen}(n\theta) r^n \text{ e, neste caso, os}$$

coeficientes são dados por integrais das funções seno e cosseno no intervalo  $[0, 2\pi]$ . A única dessas integrais que não é nula é justamente no caso  $n=0$ , quando  $c_0=1$ . Logo, a função-solução é  $u(x, y) = 1$ .

Observe que essa solução é trivial e sempre existe quando a condição na fronteira é constante.

## Sem medo de errar

No decorrer do texto, apresentamos uma estratégia para obter a solução da equação de Laplace, tanto quando o domínio é um retângulo quanto no caso em que o domínio é um disco. A solução pode ser calculada utilizando uma série de Fourier e pode, inclusive, ser aproximada numericamente tomando os primeiros termos desta série (o que para muitas aplicações já é suficiente).

Vamos agora resolver um modelo matemático que poderia ser usado para modelar o movimento de vibração da membrana de uma cama elástica circular.

Para a aplicação da cama elástica, vamos considerar a equação de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  definida para  $x^2 + y^2 < 1$  e com condição de contorno  $u(x, y) = f(x, y) = 1 + 5x + 8y$  para  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ao invés de expandirmos em série de Fourier e calcularmos os coeficientes, vamos usar um truque que funciona em muitos casos: observar que a função que dá a condição de contorno é harmônica. Sempre que isso acontece, a condição de contorno é a própria solução. De fato, seja  $k(x, y) = 1 + 5x + 8y$ . Então  $k_{xx} = 0$  e  $k_{yy} = 0$  e podemos tomar  $u(x, y) = k(x, y) = 1 + 5x + 8y$  como sendo a solução da EDP para todos os pontos  $(x, y)$  com  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Este truque, de utilizar a própria condição de contorno como solução da equação de Laplace, pode ser utilizado principalmente no caso em que a condição de contorno tiver a forma  $f(x, y) = p(x) + q(y)$ , ou seja, com as variáveis "separadas", como uma soma, e também satisfazem à condição  $p''(x) + q''(y) = 0$ .

### Equação de Laplace em três dimensões

#### Descrição da situação-problema

O método anterior para obter a solução da equação de Laplace não se aplica somente para funções de duas variáveis, mas também para a equação de Laplace tridimensional. Novamente, o passo fundamental da obtenção da solução é utilizar o método da separação de variáveis e transformar a EDP em um sistema adequado de EDOs. As condições de contorno da equação de Laplace serão as condições iniciais dessas EDOs. Considere a equação de Laplace  $u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0$ . Como seria o sistema de EDOs obtido após uso do método de separação de variáveis?

#### Resolução da situação-problema

Vamos escrever  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , para certas funções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Calculando derivadas parciais obtemos

$$u_{xx}(x, y, z) = X''(x)Y(y)Z(z),$$

$$u_{yy}(x, y, z) = X(x)Y''(y)Z(z),$$

$$u_{zz}(x, y, z) = X(x)Y(y)Z''(z)$$

E, portanto,  $u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0$  é equivalente a  $X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0$ .

Note que o artifício que usamos no caso bidimensional não funciona aqui, pois não podemos isolar de um lado da igualdade as funções dependendo de uma variável e do outro uma função dependendo de outra variável, pois agora temos três variáveis.

Porém, se dividirmos essa equação por obteremos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

Nessa última igualdade temos uma função que só depende de  $x$ , outra que só depende de  $y$  e outra que só depende de  $z$  e que, quando somadas, resultam em zero. A única possibilidade de isso ser verdade é se existirem constantes  $k_x > 0$ ,  $k_y > 0$  e  $k_z > 0$  tais que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = k_y, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z \quad \text{e} \quad -k_x + k_y - k_z = 0$$

Portanto o sistema de EDOs em que a equação de Laplace se transforma é

$$X''(x) = -k_x X(x), \quad Y''(y) = k_y Y(y), \quad Z''(z) = -k_z Z(z),$$

Esse sistema pode ser resolvido da mesma forma que o caso anterior, descobrindo as autofunções e os autovalores da primeira equação e depois substituindo nas demais. Fazendo isso, obteremos que a solução seria da forma

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \text{sen}(m\alpha x) \text{sen}(n\beta z) \text{senh}(\gamma_{m,n} y), \quad \text{em que}$$

$\alpha, \beta$  dependem das condições de contorno, bem como  $a_{m,n}$ , e  $\gamma_{m,n}$  depende de  $m, n, k_x, k_y, k_z$ .

## Faça valer a pena

**1.** Nesta seção você aprendeu a equação sobre a Laplace, desde as definições iniciais até a técnica de solução.

Sobre a equação de Laplace, marque a alternativa que possui uma afirmação falsa:

- É uma equação diferencial parcial de segunda ordem.
- É uma equação diferencial parcial não-linear.
- O método de separação de variáveis produz um sistema de EDOs de segunda ordem.
- A equação de Laplace não admite condições iniciais, só de contorno.
- É uma equação homogênea.

**2.** Quando uma função  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da equação de Laplace no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ela é chamada de função harmônica em  $\Omega$ , ou seja, satisfaz  $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$  sempre que  $(x, y) \in \Omega$ . Note que o fato de ser harmônica depende da região em que consideramos. Considere as seguintes funções, todas definidas em  $\mathbb{R}^2$ :

i)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

ii)  $g(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$

iii)  $h(x, y) = x^2 + 6x - y^2 + y + 1$

iv)  $p(x, y) = x^2 - y^2$

Marque a opção que contém as funções que são harmônicas.

- a)  $f$  e  $g$ .
- b)  $h$  e  $p$ .
- c)  $g$ , pois é função trigonométrica.
- d)  $f$  e  $p$ , pois só envolvem as variáveis ao quadrado.
- e) todas são harmônicas.

**3.** Considere a seguinte equação de Laplace, definida no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , com condição de contorno  $u(x, y) = 2x^2 + x - 2y^2$ , sempre que  $(x, y)$  estiver na fronteira do quadrado.

Sobre a solução da equação de Laplace com essa condição de contorno, é correto afirmar que a:

- a) equação não tem solução nessas condições.
- b) solução é nula.
- c) solução é um polinômio de grau 2 nas variáveis  $x$  e  $y$ .
- d) solução é uma função trigonométrica da forma  $A \cos(\alpha x) + B \sin(\beta y)$ .
- e) solução é uma função constante.

# Referências

BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. São Paulo: LTC Editora, 2015.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 680 p.

GUITAR STRINGS OSCILLATING IN HD 60 FPS. Brotheroff. **Youtube**. 30 jul. 2016. 1m35s. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=8YGQmV3NxMI&feature=youtu.be&t=74s>> Acesso em: 01 dez. 2017.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física - Vol. 1: Mecânica** 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. (Disponível na biblioteca virtual: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521632054/cfi/6/14/4/2/4@0:0>>).

IÓRIO JUNIOR, R.; IÓRIO, V. de M. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**, 3 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2013.

IÓRIO JUNIOR, Rafael; IÓRIO, Valéria de M. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

IÓRIO JÚNIOR, Rafael; IÓRIO, Valéria de M. **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**. 3. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 5 ed., Editora Blucher, 2013.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2013.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 5a ed. São Paulo: Editora Blucher, 2013.

STEWART, J. **Cálculo vol. 2**. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

















ISBN 978-85-522-0669-9



9 788552 206699 >