

**Análise e
Processamento
de Sinais**

Análise e Processamento de Sinais

Daniel Augusto Pagi Ferreira

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Claudio Ferreira Dias

Hugo Tanzarella Teixeira

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F383a Ferreira, Daniel Augusto Pagi
Análise e processamento de sinais / Daniel Augusto Pagi Ferreira. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
192 p.

ISBN 978-85-522-0661-3

1. Engenharia. 2. Tecnologia. I. Ferreira, Daniel Augusto Pagi. II. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Fundamentos da análise de sinais _____	7
Seção 1.1 - Introdução aos sinais e sistemas _____	9
Seção 1.2 - Representação e propriedades básicas de sinais e sistemas _____	22
Seção 1.3 - Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) _____	35
Unidade 2 Análise de Fourier _____	50
Seção 2.1 - Representação em série de Fourier em tempo contínuo _____	51
Seção 2.2 - Transformada de Fourier em tempo contínuo _____	64
Seção 2.3 - Série de Fourier e Transformada de Fourier em tempo discreto para análise de sinais _____	77
Unidade 3 Princípios de filtragem analógica e digital _____	89
Seção 3.1 - Filtros analógicos _____	91
Seção 3.2 - Transformada Z _____	106
Seção 3.3 - Introdução aos filtros digitais _____	121
Unidade 4 Introdução ao processamento digital de sinais _____	141
Seção 4.1 - Amostragem _____	142
Seção 4.2 - O algoritmo <i>Fast-Fourier Transform</i> (FFT) _____	155
Seção 4.3 - Introdução aos sistemas de aquisição de dados _____	169

Palavras do autor

Seja bem-vindo! Aqui você terá a oportunidade de aprender sobre uma das áreas mais fascinantes e importantes da engenharia, com grande influência sobre nosso mundo atual e presente em celulares, tablets e demais equipamentos eletrônicos que usamos diariamente. Exemplos de aplicações de análise e processamento de sinais são vastos e vão desde o reconhecimento de voz ou de imagens à identificação de padrões em sinais de áudio ou sensores, decomposição de informações em parcelas de maior e menor importância etc.

Na Unidade 1, estudaremos os principais conceitos relacionados a sinais e sistemas, bem como suas características, classificações e operações básicas. Assim, teremos conteúdo para identificar corretamente sinais e sistemas do mundo real para serem usados em projetos.

Na Unidade 2, estudaremos a análise de Fourier, provavelmente, o assunto mais importante deste livro. Aqui, nós conheceremos como representar sinais periódicos e aperiódicos pelas suas componentes de frequência. A análise de Fourier pode ser usada para identificar, por exemplo, a frequência fundamental de sinais, analisar circuitos elétricos, verificar as componentes mais importantes de um sinal etc.

A Unidade 3 apresentará uma introdução à filtragem de sinais, tanto analógica quanto digital. Nós vamos aprender métodos de projetos de filtros analógicos usando componentes passivos e ativos, além de convertê-los em filtros digitais usando uma nova ferramenta: a Transformada Z.

Por fim, a Unidade 4 contém uma introdução ao processamento digital de sinais, por meio do estudo do teorema da amostragem, o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT, do inglês *Fast Fourier Transform*) e sistemas de aquisição de dados para este contexto.

Este livro é a base de estudo desta disciplina e o acompanhará durante todo o curso. Mesmo assim, não deixe de consultar os livros clássicos sobre o tema, bem como os materiais listados nas referências bibliográficas. O estudo contínuo deverá ser uma rotina para que você consiga aproveitar o curso ao máximo. Portanto, estude regularmente e faça todas as atividades propostas nas etapas de pré-aula e pós-aula, além daquelas solicitadas pelo seu professor.

Fundamentos da análise de sinais

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade nós começaremos nossos estudos com os fundamentos da análise de sinais. Esta unidade é a base para o estudo que desenvolveremos ao longo do livro e, portanto, de extrema importância. Você pode não perceber ainda, mas você está imerso em um mundo moldado por uma infinidade de sinais e de sistemas, desde dispositivos eletrônicos comuns até satélites de comunicação. Podemos avaliar os mais diversos tipos de sinais, aqueles produzidos por sensores até respostas de filtros em condicionadores de sinais. Para isso, é necessários termos um embasamento matemático adequado, além de conhecimentos em circuitos elétricos e eletrônicos de forma a usá-los em nossos projetos.

Na primeira seção, nós estudaremos as classificações e definições básicas de sinais. Na segunda seção, nós vamos aprender algumas funções e operações básicas de sinais, além de classificações de sistemas. Por fim, na terceira seção, nós aprenderemos a calcular a resposta de sistemas lineares usando alguns métodos como a integral de convolução. Ao fim desta unidade, você será capaz, portanto, de avaliar completamente o comportamento de sinais e sistemas e estará apto a usar este conhecimento em projetos futuros.

Imagine agora que você é um engenheiro que trabalha em um laboratório de pesquisa e desenvolvimento. No seu último projeto, você e sua equipe começaram a avaliar o comportamento de um novo sensor capacitivo, que possui potencial de aplicação para sensores de pressão industriais. Um modelo matemático foi criado para avaliar o comportamento deste sensor, que corresponde a um circuito RC série. Para fazer

a aquisição do sinal produzido pelo sensor, é necessário que você o conheça um pouco melhor. Assim, como você poderia classificar este sinal?

Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Seção 1.1

Introdução aos sinais e sistemas

Diálogo aberto

O estudo de sinais e sistemas está presente em praticamente todas as áreas da engenharia e estende-se, inclusive, à medicina. Praticamente todos os equipamentos modernos que conhecemos realizam alguma etapa de processamento de sinais. Para podermos desenvolver novas técnicas e equipamentos, é necessário conhecer os conceitos básicos de sinais a fundo.

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro de um laboratório de pesquisa e desenvolvimento e foi designado para avaliar o comportamento de um sensor capacitivo, que pode ser modelado por um circuito RC série. Para fazer a aquisição do sinal produzido pelo sensor, é necessário que você o conheça um pouco melhor. Assim, como você poderia classificar este sinal?

Bons estudos!

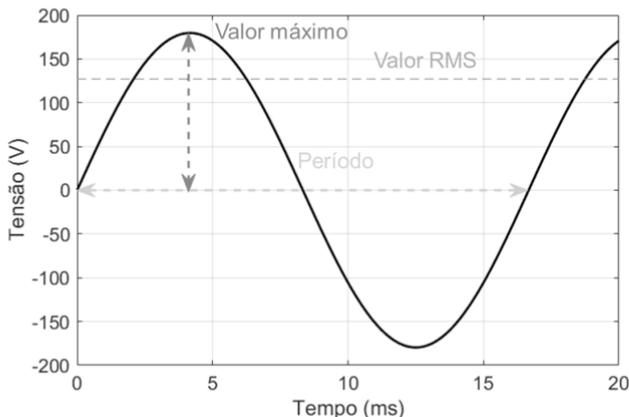
Não pode faltar

Sinais podem ser classificados como fenômenos físicos que carregam informação. Assim, uma simples função senoidal pode ser considerada como um sinal, uma vez que ela nos traz informações como valores máximo e mínimo, período, frequência, defasagem etc. Além disso, sabemos que a função senoidal pode ser descrita matematicamente de acordo com

$$x(t) = X_{RMS} \sqrt{2} \text{sen}(2\pi ft + \varphi) \quad (1.1)$$

em que X_{RMS} é o valor RMS do sinal, f é a frequência (em Hz) e φ é a fase. Assim, se tomarmos como exemplo a tensão elétrica disponível nas tomadas de uma residência, seria possível medir um sinal senoidal com tensão e frequências específicas (127 V_{RMS} e 60 Hz, respectivamente) e equacioná-lo como $v(t) = 127\sqrt{2} \text{sen}(377t) \text{ V}$. Este sinal está apresentado na Figura 1.1.

Figura 1.1 | Sinal senoidal de tensão de uma residência

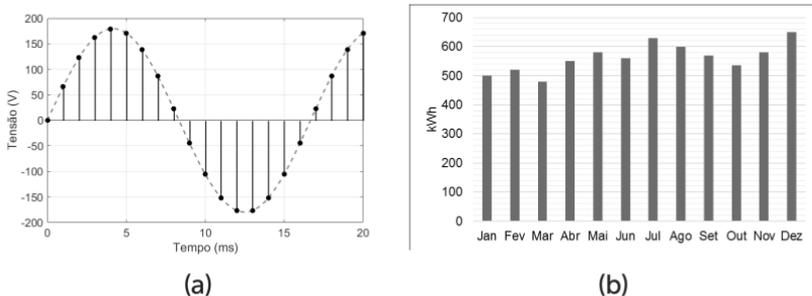


Fonte: elaborada pelo autor.

Sistemas realizam alterações em sinais, isto é, processam um sinal de entrada e causam uma transformação neste, produzindo um sinal de saída. Um sistema amplificador de tensão com ganho 10, por exemplo, produzirá um sinal de tensão de saída cuja amplitude é 10 vezes a amplitude do sinal de tensão de entrada.

O sinal de tensão que você mediu é um **sinal contínuo no tempo**, uma vez que ele pode assumir valores em uma quantidade infinita de instantes de tempo. Já o sinal apresentado na Figura 1.2a é classificado como **sinal discreto no tempo**, uma vez que ele pode assumir valores apenas em uma quantidade finita de instantes de tempo (LATHI, 2008). Para construir um sinal discreto no tempo a partir de um sinal contínuo no tempo, é necessário obter amostras em instantes discretos no tempo igualmente espaçadas. O intervalo entre as amostras é conhecido como período de amostragem (T_s) e será um importante parâmetro que deveremos considerar em nossos projetos. Outro exemplo de sinal discreto no tempo é o perfil de demanda de energia elétrica de uma instalação (Figura 1.2b). No caso apresentado, os valores de demanda são apresentados para instantes de tempo discretos (meses do ano).

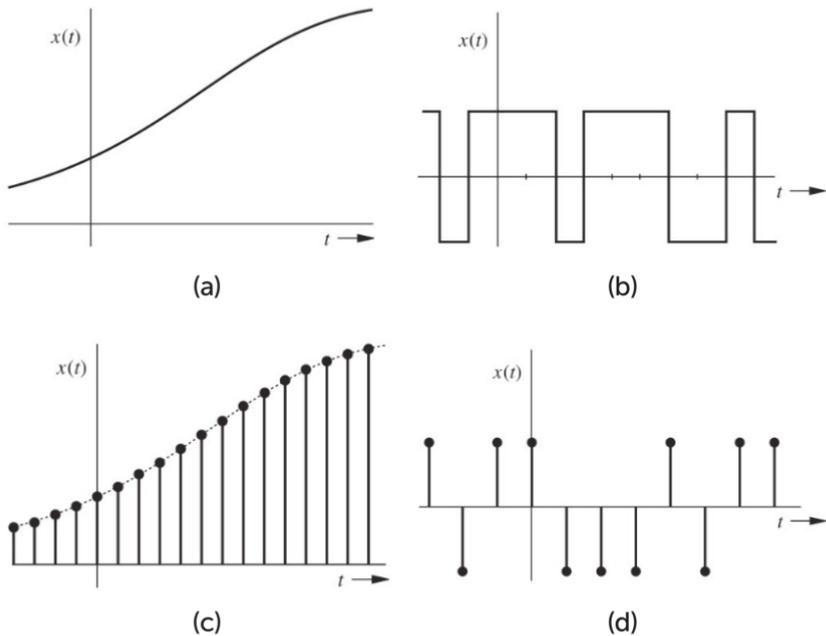
Figura 1.2 | a) Sinal senoidal discreto no tempo. A linha pontilhada indica o sinal original contínuo no tempo, b) Perfil de demanda de energia elétrica de uma instalação



Fonte: elaborada pelo autor.

Os sinais podem ser classificados em diversas categorias, tais como analógicos, digitais, periódicos, aperiódicos, entre outros. Vamos ver agora quais são os critérios de classificação de sinais. Quando um sinal pode assumir qualquer valor de amplitude em uma faixa contínua, ele será classificado como **analógico**. Caso contrário, isto é, se um sinal puder assumir uma quantidade finita de valores, ele será classificado como **digital**. Sinais digitais usados em sistemas computacionais podem assumir apenas dois valores, possuindo representação binária. É importante destacar aqui que sinais analógicos e digitais são comumente confundidos com sinais contínuos e discretos no tempo, respectivamente. O leitor atento notará que as definições apresentadas para sinais de tempo contínuo e discreto limitam-se apenas a apresentar as características destes sinais em relação ao tempo (eixo horizontal), enquanto que as definições de analógico e digital preocupam-se apenas com a amplitude dos sinais (eixo vertical). Assim, nem todo sinal analógico é contínuo no tempo, e nem todo sinal digital é discreto no tempo (LATHI, 2008). A Figura 1.3 apresenta alguns exemplos de sinais para esclarecermos essas diferenças.

Figura 1.3 | Exemplos de sinais a) analógico e contínuo no tempo, b) digital e contínuo no tempo, c) analógico e discreto no tempo e d) digital e discreto no tempo



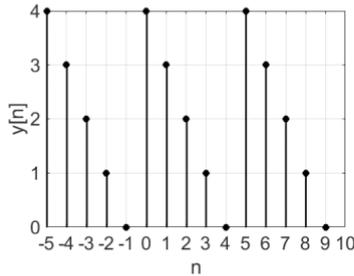
Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 88).

Sinais que se repetem no tempo são classificados como periódicos, enquanto que aqueles que não se repetem são aperiódicos (ou não periódicos). Esta definição é válida tanto para sinais de tempo contínuo quanto tempo discreto. Matematicamente, um sinal será periódico se satisfizer a seguinte condição:

$$x(t) = x(t - T_0) \text{ ou } x[n] = x[n - N_0] \tag{1.2}$$

em que T_0 e N_0 são os períodos fundamentais dos sinais em tempo contínuo e discreto, respectivamente. A operação $x(t - T_0)$ indica deslocamento do sinal de T_0 instantes de tempo. O sinal de tensão da sua residência (Figura 1.1) apresenta período fundamental de aproximadamente $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{60} \rightarrow T_0 \approx 16,67 \text{ ms}$. No tempo discreto, o período fundamental é medido em amostras. Por exemplo, o sinal apresentado na Figura 1.4 possui período fundamental de 5 amostras.

Figura 1.4 | Sequência discreta no tempo com período fundamental de 5 amostras



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere dois sinais periódicos com períodos fundamentais T_{01} e T_{02} . Se a razão T_{01}/T_{02} for racional, então a soma dos dois sinais produz um terceiro também periódico, cujo período é determinado pelo Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre T_{01} e T_{02} . Se a razão T_{01}/T_{02} for irracional, o sinal de soma é aperiódico (ROBERTS, 2009). O mesmo critério pode ser apresentado para sinais periódicos discretos no tempo.



Exemplificando

Verifique se a soma entre os sinais $y_1(t) = 5\text{sen}(2\pi \cdot 3t + \theta_1)$ e $y_2(t) = 2\text{sen}(2\pi \cdot 6t + \theta_2)$ corresponde a de um sinal periódico.

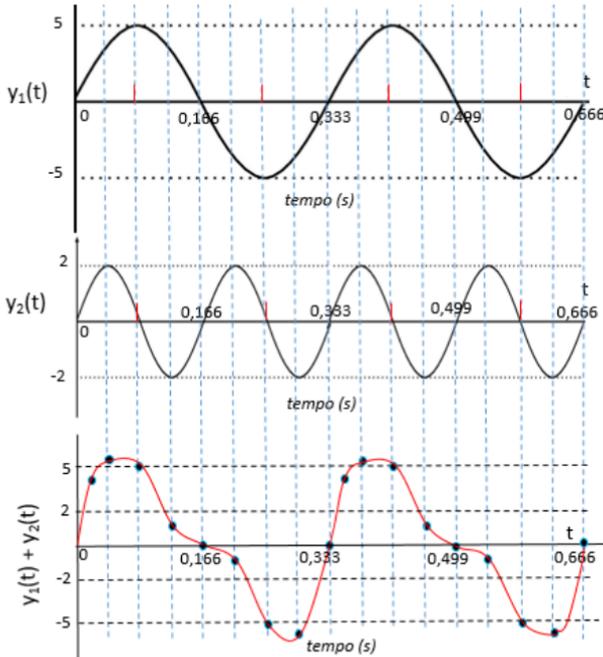
Como nós conhecemos a forma geral de uma função senoidal, $V(t) = A\text{sen}(\omega \cdot t + \theta_1)$, onde $\omega = 2\pi \cdot f \cdot t$ e $\theta_1 = \text{ângulo}$, (onde consideraremos $\theta = 0^\circ$, determinamos as frequências fundamentais de $y_1 = 3\text{Hz}$ e $y_2 = 6\text{Hz}$ visto na Figura 1.5.

Dedução das Frequências y_1 e y_2 :

Conforme pode ser deduzido da figura 1.5, a função y_1 , apresenta um período $T_1 = 0,333$ [s], e $f = 1/T_1 \therefore f = 1/0,333 = 3\text{Hz}$ e $T_2 = 0,166$ [s], e $f = 1/T_2 \therefore f = 1/0,166 = 6\text{Hz}$.

Todos os sinais são apresentados na Figura 1.5.

Figura 1.5 | Soma entre sinais periódicos



Fonte: Castilhos, 2020.

Os sinais então ficam assim:

$$y_1(t) = 5\text{sen}(6\pi \cdot t) \text{ e } y_2(t) = 2\text{sen}(12\pi \cdot t)$$

$$y_1(t) = 5\text{sen}(6\pi \cdot t) + y_2(t) = 2\text{sen}(12\pi \cdot t) =$$

$$A = \sqrt{(A_1)^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + (A_2)^2}$$

$$A = \sqrt{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + 2^2}$$

$$A = \sqrt{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \text{sen}(0) + 2^2}$$

$$A = \sqrt{5^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,38$$

Portanto

$$y_1(t) + y_2(t) = 5,38\text{sen}(6\pi \cdot t)$$

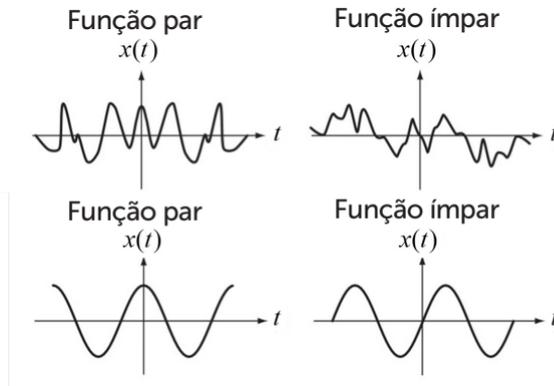
No gráfico podemos verificar que o sinal tem seu período repetido a cada 0,333s. De outra forma se fizermos os pontos 0,499s – 0,166s (um ciclo completo, teremos o período de 0,333s e $f=3\text{Hz}$), correspondendo a um sinal periódico.



Para saber um pouco mais sobre funções periódicas, leia as Seções 2.8 e 3.6 do livro *Fundamentos de Sinais e Sistemas*, de Michael J. Roberts, disponível na nossa biblioteca virtual em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>. Acesso em: 29 ago. 2017.

Uma importante característica de sinais é se estes possuem simetria em relação à reflexão no tempo (Figura 1.6). Um sinal, tanto em tempo contínuo quanto discreto, será considerado par se ele for idêntico ao seu equivalente espelhado no tempo (OPPENHEIM; WILLISKY, 2010). Caso o equivalente espelhado seja o inverso do sinal original, este sinal será classificado como ímpar.

Figura 1.6 | Exemplos de funções pares e ímpares



Fonte: adaptada de Roberts (2009, p. 49).

Qualquer sinal pode ser escrito como uma soma de suas parcelas pares e ímpares, $x(t) = x_{par}(t) + x_{impar}(t)$, ou então podemos equacionar essas parcelas como segue:

$$x_{par}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \text{ e } x_{impar}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (1.3)$$

Sinais ainda podem ser classificados a partir do cálculo da sua potência e/ou da energia, de acordo com as equações apresentadas no Quadro 1.1. Se um sinal possuir um valor finito de energia, ele será classificado como sinal de energia. Caso a potência do sinal seja finita, o sinal será classificado como de potência. Sinais periódicos costumam possuir potência, enquanto que os aperiódicos costumam possuir energia.

Quadro 1.1 | Equações para cálculo de energia e potência de sinais

	Tempo contínuo	Tempo discreto
Energia	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$ (1.4)	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$ (1.5)
Potência	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt$ (1.6)	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x[n] ^2$ (1.4)

Fonte: elaborado pelo autor.

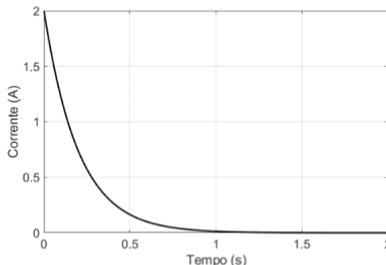
É muito importante observar as dimensões corretas dos sinais. Apesar de utilizarmos o termo "energia" frequentemente, este pode não estar em seu sentido convencional. Isso fica claro quando avaliamos as suas unidades a partir das equações apresentadas no Quadro 1.1. Se considerarmos que $x(t)$ é um sinal de tensão, as unidades de energia e potência serão V^2s e V^2 , respectivamente, em vez de Joule (J) e Watts (W). Assim, não podemos considerar a energia/potência de um sinal como a energia/potência disponível para ser usada em um sistema físico. Podemos usar a energia, por exemplo, para avaliar se a aproximação entre dois sinais foi feita de maneira adequada. Podemos usar a potência, por exemplo, para indicar a qualidade de um sinal recebido após ser transmitido em um sistema de comunicações juntamente com ruído indesejável. Para isso, usamos a relação sinal ruído (SNR – *signal-to-noise ratio*, em inglês) que nada mais é do que a razão entre as potências do sinal desejado e do ruído (LATHI, 2008).



Exemplificando

Vamos calcular a energia de um sinal de corrente em um indutor dado por $y(t) = 2e^{-5t}$ A e representado na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Sinal de corrente em um indutor



Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular a energia deste sinal, basta aplicar a Equação 1.4, substituindo os limites de integração e a função:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \rightarrow E_y = \int_0^{\infty} |2e^{-5t}|^2 dt \rightarrow E_y = \int_0^{\infty} 4e^{-10t} dt$$

$$E_y = -\frac{4}{10} e^{-10t} \Big|_0^{\infty} \rightarrow E_y = -\frac{4}{10} (0 - 1) \rightarrow E_y = 0,4 A^2s$$



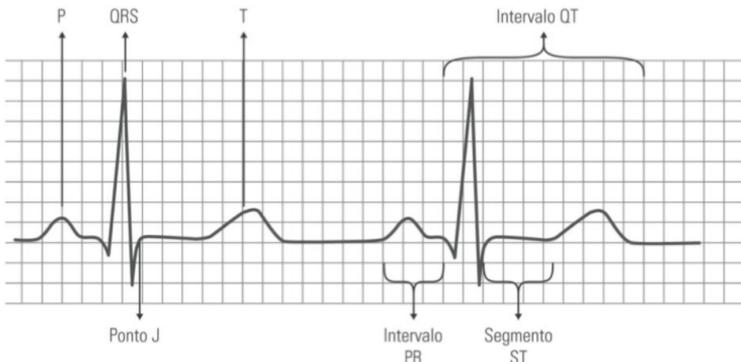
Refleta

Qual é a relação entre sinais periódicos e aperiódicos e sinais de potência ou de energia?

Por fim, sinais podem ser também classificados entre determinísticos e aleatórios. O primeiro deles representa os casos nos quais a descrição física do sinal, gráfica ou matematicamente, é totalmente conhecida, enquanto no segundo os sinais são representados em termos de distribuição de probabilidade (LATHI, 2008).

A análise e processamento de sinais é multidisciplinar e conecta a engenharia com outras áreas do conhecimento, como a medicina. Diversos equipamentos médicos só existem graças ao processamento de sinais como o aparelho de eletrocardiograma (ECG). A Figura 1.8 indica os parâmetros de interesse de um sinal de ECG, que devem ser avaliados por profissional capacitado para verificar a ocorrência de cardiopatias.

Figura 1.8 | Exemplo de sinal de ECG



Fonte: adaptada de Gonzalez, Geovanini e Timerman (2014, p.16).



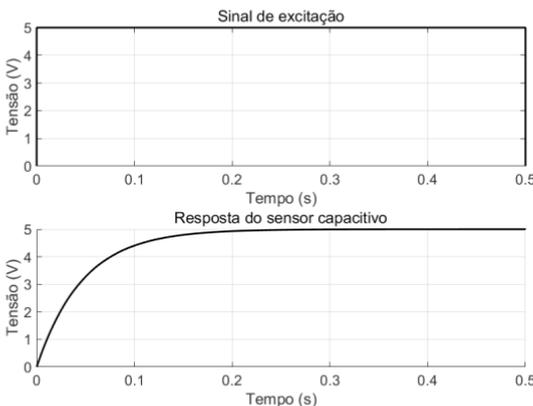
Sinais são de fenômenos físicos que transportam informações que deverão ser interpretadas por sistemas e/ou usuários. Sistemas causam mudanças nos sinais. A avaliação de sinais e de sistemas está presente em praticamente em todos os campos da engenharia e faz parte do nosso dia a dia.

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em um laboratório de pesquisa e desenvolvimento que, juntamente com sua equipe, foi designado para avaliar o comportamento de um novo sensor capacitivo com grande potencial de aplicação em sensores de pressão industriais. Você avaliou que este sensor pode ser modelado por um circuito RC série e agora precisa conhecer melhor as características do sinal de saída produzido para, posteriormente, fazer a sua aquisição. Assim, como você poderia classificar esse sinal?

Uma vez que o seu sensor capacitivo pode ser modelado por um circuito RC, você chaveou uma tensão de 5 V por meio segundo para verificar se a tensão no sensor seguiria a curva de carregamento de um capacitor. Na etapa de modelagem, você verificou que o circuito equivalente do sensor é composto por uma resistência de **470Ω** e uma capacitância de **100μF**. Os sinais de excitação e de resposta do sensor estão apresentados na Figura 1.9.

Figura 1.9 | Sinais de excitação e de resposta do sensor capacitivo



Fonte: elaborada pelo autor.

Avaliando o sinal de tensão do sensor capacitivo, você consegue classificá-lo como aperiódico, par, analógico e contínuo no tempo. Para verificar se este sinal é de energia ou potência, é necessário aplicar as definições apresentadas no Quadro 1.1. Considerando que a resposta de um circuito RC é $v_c(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$ durante o período em que a fonte permanece ativa:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \rightarrow E_y = \int_{0,5}^1 \left[5 \left(1 - e^{-\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}} \right) \right]^2 dt \rightarrow E_y = 25 \int_{0,5}^1 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}} + e^{-2\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}} \right) dt$$

Resolvendo as integrais, temos:

$$E_y = 25 \left[t \Big|_{0,5}^1 + 94 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}} \Big|_{0,5}^1 - \frac{47 \cdot 10^{-3}}{2} e^{-2\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}} \Big|_{0,5}^1 \right] \rightarrow E_y = 12,5 \text{ V}^2 \text{ s}.$$

Este sinal é, portanto, de energia.

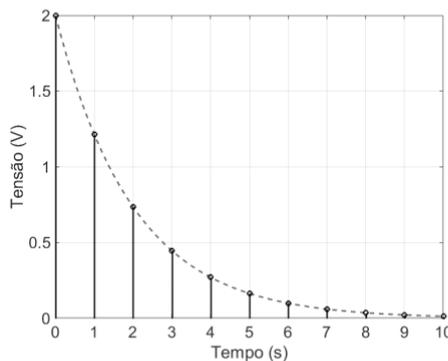
Avançando na prática

Energia de sinal de discreto tempo

Descrição da situação-problema

Em aplicações reais, nós trabalharemos na grande maioria com sinais discretizados no tempo, isto é, sinais de tempo discretos obtidos a partir da amostragem de sinais de tempo contínuo. Um exemplo disso é o sinal apresentado na Figura 1.10, o qual foi obtido por um sistema de aquisição de dados que faz leitura de um sensor capacitivo após remover o sinal de excitação. Você possui acesso apenas a algumas amostras do sinal original. Qual é a energia este sinal?

Figura 1.10 | Sinal de saída do sensor após remover o sinal de excitação



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Os valores medidos pelo sistema de aquisição de dados estão apresentados na Tabela 1.1. Pela definição de energia em tempo discreto (Equação 1.5), conhecendo a sequência em tempo discreto, basta fazer o somatório do quadrado dos seus valores. Assim, a energia deste sinal é $E_y = 6,328 \text{ V}^2$.

Tabela 1.1 | Valores amostrados do sinal original

n	$y[n]$	$ y[n] ^2$
0	1	1
1	2,000	4,000
2	1,213	1,472
3	0,736	0,541
4	0,446	0,199
5	0,271	0,073
6	0,164	0,027
7	0,100	0,010
8	0,060	0,004
9	0,037	0,001
10	0,022	0,000

Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Sinais que se repetem no tempo são classificados como periódicos, enquanto aqueles que não se repetem são aperiódicos (ou não periódicos). Esta definição é válida tanto para sinais de tempo contínuo quanto tempo discreto. A soma de dois sinais periódicos não necessariamente produz um sinal periódico.

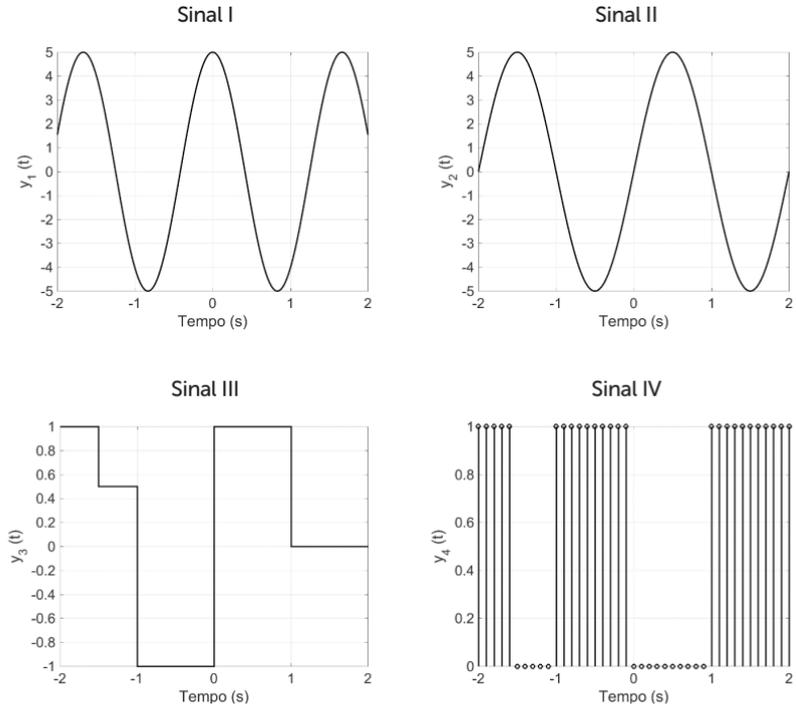
Considere dois sinais senoidais $y_1(t) = 10 \text{ sen}(20\pi t)$ e $y_2(t) = 7 \text{ sen}(10\pi t)$. A soma desses sinais produz um sinal periódico? Assinale a alternativa correta.

- a) Sim, produz um sinal periódico com 5 Hz de frequência fundamental.
- b) Sim, produz um sinal periódico com 10 Hz de frequência fundamental.
- c) Sim, produz um sinal periódico com 20 Hz de frequência fundamental.
- d) Sim, produz um sinal periódico com 50 Hz de frequência fundamental.
- e) Não, o sinal produzido é aperiódico.

2. Sinais recebem diversas classificações que são úteis para descrever suas características básicas. Dentre as classificações mais comuns, estão sinais de tempo contínuo e de tempo discreto, periódicos e aperiódicos, analógicos e digitais e pares e ímpares.

Considere os quatro sinais apresentados na Figura 1.11.

Figura 1.11 | Sinais de interesse



Fonte: elaborada pelo autor.

Avalie as afirmações abaixo e assinale a alternativa que apresenta as afirmações corretas.

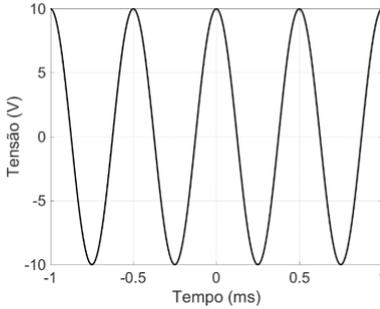
- I. O sinal I é periódico e par.
- II. O sinal II é periódico e ímpar.
- III. O sinal III é analógico e de tempo contínuo.
- IV. O sinal IV é discreto e não periódico.

- a) I, II e IV.
- b) I e II.
- c) III e IV.
- d) I, II, III e IV.
- e) I, II e III.

3. Sinais ainda podem ser classificados a partir do cálculo da sua potência e/ou da energia. Se um sinal possuir um valor finito de energia, ele será classificado como sinal de energia. Caso a potência do sinal seja finita, o sinal será classificado como de potência.

Determine se o sinal de tensão apresentado na Figura 1.12 e equacionado como $v(t) = 10 \cos(4\pi t)$ é um sinal de potência ou de energia.

Figura 1.12 | Sinal de tensão



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) Sinal de potência e $P_v = 10 V^2$.
- b) Sinal de energia e $E_v = 50 V^2 s$.
- c) Sinal de potência e $P_v = 50 V^2$.
- d) Sinal de potência e $P_v = 100 V^2$.
- e) Sinal de energia e $E_v = 10 V^2 s$.

Seção 1.2

Representação e propriedades básicas de sinais e sistemas

Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção nós continuaremos nossos estudos de análise e processamento de sinais. Nós já conhecemos as classificações e definições básicas de sinais. Vamos agora conhecer algumas funções básicas de sinais de tempo contínuo e discreto, além de operações e manipulações que podemos fazer. Logo depois, vamos estudar sistemas de tempo contínuo e discreto e suas classificações.

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro de um laboratório de pesquisa e desenvolvimento que foi designado para avaliar o comportamento de um sensor capacitivo, o qual pode ser modelado por um circuito RC série. Você já mediu a tensão de saída desse sensor usando um osciloscópio e já fez a classificação desse sinal. Considere agora o sensor como um sistema. Como você poderia classificá-lo? Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

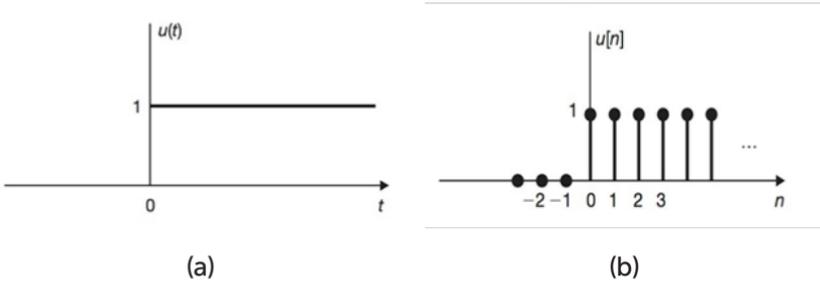
Não pode faltar

Para avaliar corretamente sinais e sistemas, tanto em tempo contínuo quanto discreto, é preciso conhecer alguns sinais básicos que aparecem frequentemente em aplicações reais. O primeiro que vamos avaliar é o degrau unitário, apresentado nas Figuras 1.13a e b para tempo contínuo e discreto, respectivamente. Este sinal é equacionado como segue:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

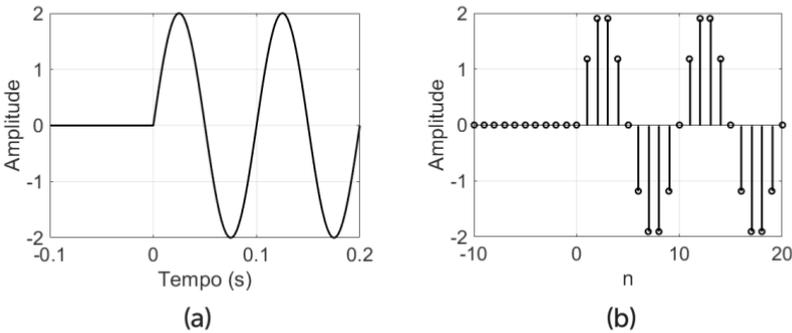
Figura 1.13 | a) Função degrau unitário e b) sequência degrau unitário



Fonte: a) adaptada de Hsu (2010, p. 6) e b) adaptada de Hsu (2010, p. 12).

O **degrau unitário** é usado para determinar que a análise do sinal e/ou sistema começará apenas após $t = 0$. Considere como exemplo um sinal $x(t) = 2\text{sen}(20\pi t)u(t)$, apresentado na Figura 1.13. Avaliando a definição do degrau unitário, fica evidente que $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $x(t) = 2\text{sen}(20\pi t)$ para $t \geq 0$ (Figura 1.14a). O mesmo pode ser entendido para o sinal de tempo discreto (sequência) $x[n] = 2\text{sen}[20\pi n]u[n]$ (Figura 1.14b).

Figura 1.14 | a) Sinais $x(t) = 2\text{sen}(20\pi t)u(t)$ e b) $x[n] = 2\text{sen}[20\pi n]u[n]$



Fonte: elaborada pelo autor.

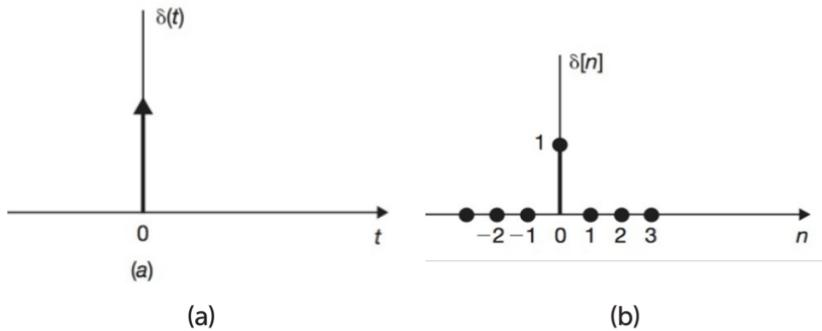
A função **impulso unitário**, uma das mais importantes para processamento de sinais, é um pulso de duração infinitamente curta com intensidade infinitamente elevada de forma que sua área seja unitária. As definições do impulso para tempo contínuo e discreto são:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

A área unitária do impulso unitário é descrita matematicamente como $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$ para tempo contínuo e discreto, respectivamente. Este sinal, apresentado na Figura 1.15, não pode ser realizado na prática, visto que sua amplitude é infinita, sendo possível criar apenas uma aproximação.

Figura 1.15 | Impulso unitário de a) tempo contínuo e b) discreto



Fonte: a) adaptada de Hsu (2010, p. 7) e b) adaptada de Hsu (2010, p. 12).

Vamos avaliar o que acontece quando multiplicamos o impulso unitário por uma função $\mathbf{x}(t)$ contínua em $t=0$. Como a função impulso vale zero para $t \neq 0$, temos que $\mathbf{x}(t)\delta(t) = \mathbf{x}(0)\delta(t)$, de forma que o resultado é um impulso multiplicado pelo valor da função $\mathbf{x}(t)$ em $t=0$. Este resultado é igualmente válido quando deslocamos o impulso de algum instante de tempo, sendo que o resultado da multiplicação é o valor da função naquele instante de tempo, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t)\delta(t - \tau) dt = \mathbf{x}(\tau)$. Este último resultado é conhecido como propriedade da amostragem do impulso e será a base para fazermos amostragem de sinais de tempo contínuo.



Assimile

O produto de um sinal pela função impulso unitário produz apenas um único ponto, ou amostra, como saída.

A função **rampa unitária** é definida como:

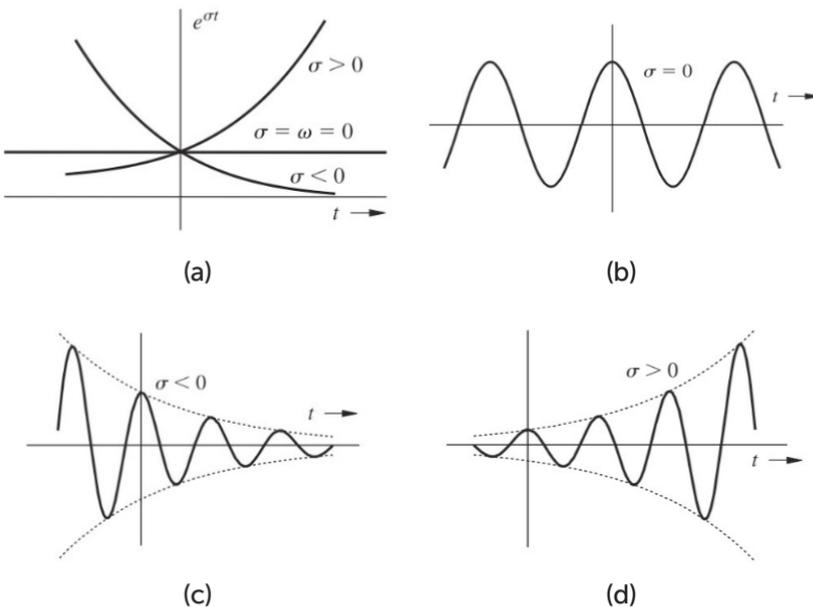
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

É possível observar relações entre as funções apresentadas até o momento? A função rampa unitária, por exemplo, pode ser obtida integrando-se a função degrau unitário que, por sua vez, é obtida integrando-se o impulso unitário. As funções obtidas a partir de integrações e derivações do impulso unitário são conhecidas como **funções de singularidade** (LATHI, 2006).

A **função exponencial complexa** também tem uso frequente e é definida como $e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t}$ e $e^{sn} = e^{(\sigma+j\omega)n}$ para tempo contínuo e discreto, respectivamente. Sabemos que $s = \sigma + j\omega$ é a frequência complexa que usamos na Transformada de Laplace. A relação de Euler nos mostra que a exponencial complexa pode ser descrita como $e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t))$. Esta relação nos mostra que, dependendo do valor de σ , a exponencial complexa pode assumir um dos comportamentos apresentados na Figura 1.16.

Figura 1.16 | Comportamentos possíveis para a exponencial complexa a) $\omega=0$, b) $\sigma=0$, c) $\sigma < 0$ e d) $\sigma > 0$



Fonte: adaptada de Lathi (2006, p. 97).

A exponencial complexa pode ser avaliada de maneira similar para tempo discreto, isto é, $e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\text{sen}(\Omega n)$. em que a frequência discreta é o produto da frequência angular pelo período de amostragem ($\Omega = \omega T_s$) e, portanto, medida em radianos/amostra.



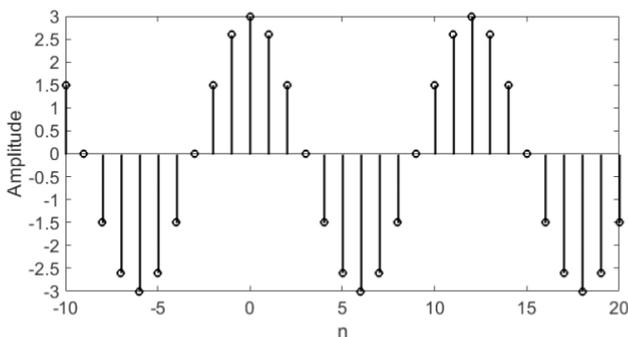
Exemplificando

Determine o período fundamental do sinal de tempo discreto $x[n] = 3e^{j\frac{\pi}{6}n}$ e faça um código no Matlab para gerar o seu gráfico.

O período fundamental deste sinal é $\Omega = \frac{\pi}{6}$ rad/amostra. O código usado para gerar o gráfico deste sinal, apresentado na Figura 1.17, é:

```
n= -10:20;  
x=3*exp(i*(pi/6).*n);  
p=stem(n,x,'k');  
set(p,'LineWidth',2);  
xlabel('n');  
ylabel('Amplitude');  
set(gca,'fontsize',20,'fontname','arial')
```

Figura 1.17 Gráfico do sinal $x[n] = 3e^{j\frac{\pi}{6}n}$



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Para aprender mais sobre as funções básicas de sinais de tempo contínuo e discreto, estude as Seções 2.3 e 3.3 do livro:

ROBERTS, Michael J. **Fundamentos de sinais e sistemas**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2009.

Agora que conhecemos melhor alguns sinais básicos de tempo contínuo e discreto, podemos avançar e conhecer algumas operações úteis entre sinais. As operações aritméticas básicas, como soma e multiplicação, devem ser feitas sempre considerando os valores das funções em instantes específicos.



Exemplificando

Vamos calcular a soma e a multiplicação entre os dois sinais de tempo discreto $x_1[n] = \{-2, -1, 1, 0, 3, 1, -1, 0\}$ e $x_2[n] = \{0, -1, 0, 1, 3, 2, 1, -1\}$, em que as setas indicam o elemento para $n = 0$.

Solução: a soma e a multiplicação deverão ser feitas entre elementos de mesmo índice n , como segue:

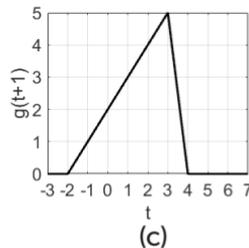
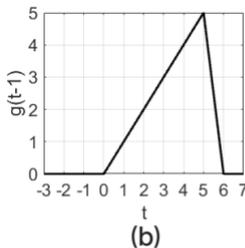
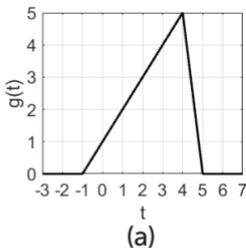
$$x_1[n] + x_2[n] = \{-2+0, -1-1, 1+0, 0+1, 3+3, 1+2, -1+1, 0-1\}$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \{-2 \cdot 0, -1 \cdot -1, 1 \cdot 0, 0 \cdot 1, 3 \cdot 3, 1 \cdot 2, -1 \cdot 1, -1 \cdot 0\}$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \{0, 1, 0, 0, 9, 2, -1, 0\}$$

Podemos manipular os sinais fazendo deslocamentos no tempo e redimensionamento de escalas. O primeiro caso até já foi usado quando avaliamos a propriedade da amostragem da função impulso unitário. Vamos considerar o sinal $g(t)$ apresentado na Figura 1.18a para avaliar os deslocamentos. Vamos supor que substituímos t por $t-1$, de forma que temos agora a função $g(t-1)$. Para avaliar o efeito dessa substituição, vamos considerar alguns valores de t e calcular $t-1$. Quando $t=1$, temos que $g(t-1) = g(1-1) = g(0) = 1$, isto é, o valor da função $g(t-1)$ para $t=1$ é igual ao valor de $t=0$ para $t=0$. Avaliando a Figura 1.18b fica demonstrado que $g(t-1)$ é a função original deslocada de uma unidade de tempo para a direita. Consequentemente, $g(t+1)$ (Figura 1.18c) é a função original deslocada de uma unidade de tempo para a esquerda.

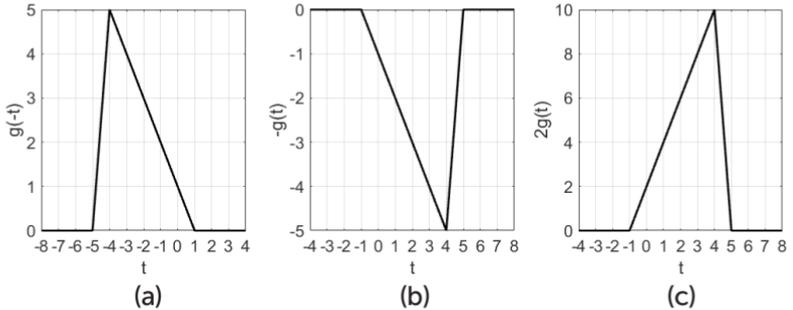
Figura 1.18 | Sinais a) $g(t)$, b) $g(t-1)$ e c) $g(t+1)$



Fonte: a) e b) adaptadas de Roberts (2010, p. 37) e c) elaborada pelo autor.

Podemos ampliar ou reduzir a amplitude de um sinal multiplicando o seu conteúdo por, por exemplo, uma constante. Para comprimir ou expandir um sinal do tempo, entretanto, é necessário fazer uma operação com a variável tempo. Vamos verificar isso com o mesmo sinal $g(t)$ e as manipulações apresentadas na Figura 1.19. O sinal $g(-t)$ é o sinal original espelhado em relação ao eixo vertical, enquanto o sinal $-g(t)$ é o sinal original espelhado em relação ao eixo horizontal.

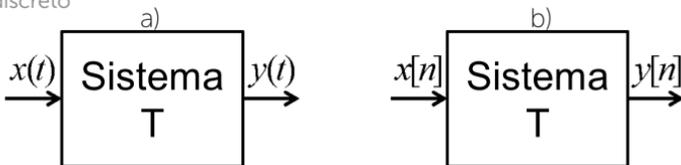
Figura 1.19 | Sinais a) $g(-t)$, b) $-g(t)$ e c) $2g(t)$



Fonte: a) e c) elaboradas pelo autor e b) adaptada de Roberts (2010, p. 37).

Agora que conhecemos bem os sinais básicos que usaremos e suas manipulações/operações, vamos estudar os sistemas de tempo contínuo e tempo discreto, além das suas propriedades básicas. Vamos definir aqui sistemas da maneira mais direta possível: como qualquer fenômeno que manipule um sinal de entrada e produza uma saída correspondente. A representação em diagramas de blocos é bastante utilizada em processamento de sinais e em outras áreas como teoria de controle, em que a saída de um sistema é resultado de uma transformação linear causada pelo sistema ($y[n] = Tx[n]$ e $y(t) = Tx(t)$). Encontrar a relação entrada-saída de um sistema é equacioná-lo de forma a representar o comportamento de um sistema, e será fundamental para definir o sinal de saída dado um sinal de entrada. Os sistemas apresentados nas Figuras 1.20a e b são de tempo contínuo e discreto, respectivamente.

Figura 1.20 | Representação em diagrama de bloco de sistemas de tempo a) contínuo e b) discreto



Fonte: adaptada de Hsu (2010, p. 17).

Vamos ver agora outras classificações de sistemas. Se os sinais de entrada e saída forem aleatórios, o sistema será classificado como estocástico. Caso os sinais de entrada e saída forem determinísticos (que podem ser descritos matematicamente por uma equação), o sistema será classificado como determinístico.

Se a saída de um sistema não depender de valores de tempo anteriores ao presente, diremos que este não possui memória. Este é o caso do resistor, cuja tensão (saída) depende da corrente (entrada) no instante presente e da sua resistência de acordo com a Lei de Ohm ($v_R(t) = Ri(t)$). Já a tensão em um capacitor depende da corrente de acordo com $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$, isto é, precisamos conhecer os valores de corrente para instantes de tempo anteriores ao presente, indicando que este sistema possui memória.

Se a saída de um sistema depender do instante presente e/ou passados de tempo, diremos que o sistema é causal, como o caso do capacitor. Caso a saída dependa de instantes de tempo futuros, o sistema será classificado como não causal como, por exemplo, $y(t) = x(t + 5)$.

Sistemas são classificados como lineares se pudermos verificar a propriedade da superposição por meio das propriedades da aditividade e da homogeneidade. Caso contrário, o sistema será não linear (OPPENHEIM; WILLISKY, 2010).

Sistemas serão classificados como invariantes no tempo quando o seu comportamento for fixo no tempo. Em outras palavras, se a entrada for atrasada de t_0 segundos, a saída também será atrasada de t_0 segundos. Caso contrário, o sistema será classificado como variante no tempo.

Por fim, se a resposta de um sistema tender ao infinito, este será classificado como instável. Caso contrário, o sistema será estável. Ademais, quando uma entrada limitada produz uma saída limitada, diremos que o sistema é externamente estável ou então estabilidade no sentido BIBO, sigla em inglês para *bounded-input/bounded-output*.



Avalie e classifique os sistemas cujas saídas são $y(t) = 2x(t)$ e $g(t) = x^2(t)$.

Solução: ambos os sistemas são determinísticos, uma vez que podemos equacioná-los matematicamente. Por não depender de instantes de tempo anteriores ao presente, ambos os sistemas não possuem memória e são causais.

Vamos agora avaliar se $y(t)$ é linear, verificando primeiro a propriedade da aditividade e, em seguida, a da homogeneidade. Para isso, vamos dividir a entrada em uma combinação linear $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e calcular a saída como segue:

$$y(t) = 2x(t) = 2(x_1(t) + x_2(t)) \rightarrow y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t)$$

Quando dividimos a entrada em duas parcelas, a saída também fica dividida em duas parcelas na forma $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, o que prova a propriedade da aditividade.

Para verificar a propriedade da homogeneidade, basta multiplicar a entrada por um escalar, de forma a verificar que a saída também será multiplicada por este escalar, isto é, $y(t) = 2\alpha x(t) = \alpha y(t)$.

Para verificar se $y(t)$ é variante no tempo, basta provocar um deslocamento no tempo para a entrada e observar se o mesmo ocorre na saída, isto é, $y(t - t_0) = 2x(t - t_0)$. Portanto, este sistema é invariante no tempo.

Vamos verificar agora a linearidade e a invariância no tempo de $g(t)$. Seguindo os mesmos passos anteriores, temos que $g(t) = x^2(t) = (x_1(t) + x_2(t))^2 \rightarrow y(t) = x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2$. Uma vez que a saída não é apenas a soma dos quadrados das entradas, este sistema é não linear. Se provocarmos um deslocamento no tempo para o sinal de entrada, temos que $x^2(t - t_0) = g(t - t_0)$, o que prova que este sistema é invariante no tempo.

Por fim, estes sistemas são BIBO estáveis, as suas saídas permanecem limitadas quando os sinais de entrada forem limitados.

A maioria dos sistemas que avaliaremos nesta disciplina são lineares e invariantes no tempo e serão referenciados como SLIT, sigla para Sistema Linear Invariante no Tempo, a partir deste momento.



Sistemas BIBO estáveis permanecerão estáveis independentemente do sinal de entrada? Os sistemas que acabamos de avaliar continuariam classificados como BIBO estáveis se aplicássemos uma função rampa na entrada?

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em um laboratório de pesquisa e desenvolvimento que, juntamente com sua equipe, foi designado para avaliar o comportamento de um novo sensor capacitivo com grande potencial de aplicação em sensores de pressão industriais. Na etapa de modelagem, você verificou que o circuito equivalente do sensor é composto por uma resistência de 470Ω e uma capacitância de $100\mu\text{F}$. A seguir, você verificou e classificou o sinal de saída deste sensor quando aplicava uma tensão de 5 V.

Vamos considerar que a tensão do capacitor é o sinal de saída e a corrente é o sinal de entrada, isto é, $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \rightarrow y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$.

Os limites de integração nos mostram que o sinal de saída depende da corrente em instantes de tempo anteriores até o presente, de forma que este sistema possui memória. Além disso, como não depende de instantes futuros, este sistema é causal. Para avaliar a linearidade, vamos supor que a entrada seja uma combinação linear na forma $x(\tau) = a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)$, de modo que a corrente será calculada de acordo com:

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)) d\tau \rightarrow y(t) = \frac{1}{C} \left[a_1 \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + a_2 \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right].$$

Assim, $y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$, de forma que este sistema é linear.

Para verificar a invariância no tempo, vamos deslocar a entrada de t_0 segundos, como segue: $y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \rightarrow y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau$.

Fazendo uma mudança de variáveis na integral, temos que $\lambda = \tau - t_0$ e $\frac{d\lambda}{d\tau} = 1 \rightarrow d\lambda = d\tau$, de forma que a integral será $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda = y(t - t_0)$. Portanto, a saída ficou deslocada de t_0 segundos, da mesma forma

que a entrada, indicando que este sistema é invariante no tempo. Portanto, este sensor capacitivo pode ser classificado como causal, com memória, linear e invariante no tempo.

Avançando na prática

O amplificador como um sistema

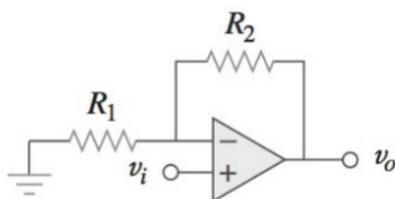
Descrição da situação-problema

Sinais de sensores costumam ter amplitudes muito baixas para serem lidas diretamente por sistemas de aquisição de dados, fazendo-se necessário amplificá-los. Você precisa fazer a leitura de um sensor de posicionamento usado em uma linha industrial, que possui característica linear de funcionamento, mas tensão máxima de **50 mV**. Qual amplificador você poderia usar neste caso?

Resolução da situação-problema

Você propôs usar um amplificador não inversor (Figura 1.21), uma configuração comumente encontrada em condicionadores de sinais. Para garantir que esta é uma opção viável, entretanto, você deve verificar se este circuito possui comportamento linear e invariante no tempo, de maneira a não alterar as características do sinal original.

Figura 1.21 | Amplificador não inversor



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 176).

Sabemos que a tensão de saída é calculada a partir da tensão de entrada e da relação entre as resistências de acordo com $v_o(t) = 1 + \frac{R_2}{R_1} v_i(t) \rightarrow y(t) = 1 + \frac{R_2}{R_1} x(t)$. Para avaliar a linearidade, vamos supor que a entrada seja uma combinação linear na forma $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, de maneira que a tensão de saída será calculada de acordo com:

$$y(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) \rightarrow y(t) = a_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) x_1(t) + a_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) x_2(t)$$

Assim, $y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$, de forma que este sistema é linear. Para verificar se este sistema é invariante no tempo, vamos deslocar o sinal de entrada de t_0 segundos e verificar se a saída também ficará deslocada. Assim, fazendo $t = t - t_0$, temos que $\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) x(t - t_0) = y(t - t_0)$, de forma que este sistema é invariante no tempo.

Faça valer a pena

1. Para analisar sinais, precisamos conhecer as funções básicas, como o degrau unitário, o impulso, a rampa e a exponencial complexa, além das operações de deslocamento e redimensionamento. Podemos usar esses conhecimentos para representar matematicamente alguns sinais reais. Avalie os quatro sinais apresentados na Figura 1.22 e relacione com as seguintes funções:

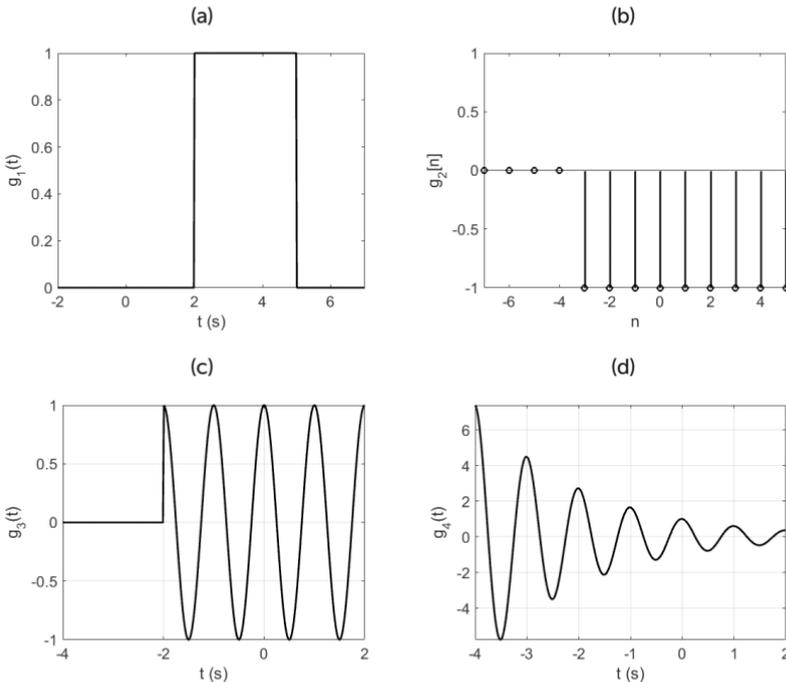
I. $g(t) = u(t - 2) - u(t - 5)$

III. $g(t) = \cos(2\pi t)u(t + 2)$

II. $g(t) = e^{-t}e^{j2\pi t}$

IV. $g[n] = -u[n + 3]$

Figura 1.22 | Sinais



Fonte: elaborada pelo autor.

Escolha a alternativa que apresenta a associação correta entre as funções de I a IV e sinais de a a d.

- a) I-a, II-d, III-c e IV-b.
- b) I-a, II-d, III-b e IV-c.
- c) I-a, II-c, III-d e IV-b.
- d) I-b, II-d, III-c e IV-a.
- e) I-b, II-c, III-d e IV-a.

2. As operações aritméticas básicas entre sinais, como soma e multiplicação, devem ser feitas sempre considerando os valores das funções em instantes específicos. Isso é válido tanto para sinais de tempo contínuo quanto de tempo discreto.

Determine a soma entre os dois sinais de tempo discreto $x_1[n] = \{-3, -2, -1, 0, -1, -2, -3\}$ e $x_2[n] = \{0, 2, 1, -1, -2, 0, -1, 1\}$, assinalando a alternativa correta.

- a) $x_1[n] \cdot x_2[n] = \{-3, 0, 0, 0, -3, 2, 2, 4, 1\}$.
- b) $x_1[n] + x_2[n] = \{-3, 2, 1, -1, -3, -2, -4, 1\}$.
- c) $x_1[n] \cdot x_2[n] = \{1, 4, 2, 3, 1, 0, 0, 3\}$.
- d) $x_1[n] + x_2[n] = \{-3, 2, 1, 1, -3, -2, -4, 1\}$.
- e) $x_1[n] + x_2[n] = \{-3, 0, 0, -1, -3, -2, -4, 1\}$.

3. Vamos estipular aqui sistemas que podem ser definidos como qualquer fenômeno que manipule um sinal de entrada e produza uma saída correspondente. Há diversas formas de classificar sistemas como determinísticos, aleatórios, se possui memória, causalidade, entre outros. Considere que um indutor é um sistema cuja saída é a corrente, e a entrada é a tensão em seus terminais. Avalie e classifique esse sistema de acordo com memória, causalidade, linearidade e invariância no tempo, assinalando a alternativa que apresenta a opção correta na ordem apresentada.

- a) Sem memória, causal, não linear e invariante no tempo.
- b) Com memória, causal, linear e invariante no tempo.
- c) Com memória, não causal, linear e invariante no tempo.
- d) Com memória, causal, linear e variante no tempo.
- e) Com memória, não causal, não linear e variante no tempo.

Seção 1.3

Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT)

Diálogo aberto

Caro aluno, vamos encerrar nossa primeira unidade estudando as respostas de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) no domínio do tempo contínuo e discreto. Lembre-se de que um sistema causa uma mudança em um sinal de entrada e produz um sinal de saída.

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro de um laboratório de pesquisa e desenvolvimento e foi designado para avaliar o comportamento de um sensor capacitivo que pode ser modelado por um circuito RC série. Você já mediu a tensão de saída desse sensor usando um osciloscópio e já fez a classificação do sinal e do sistema. Agora precisamos conhecer a saída desse sensor. Como você pode determiná-la analiticamente?

Para responder a essa e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

Vimos na seção anterior as diversas classificações de sistemas de tempo contínuo e discreto, dentre as quais, daremos destaque para duas: linearidade e invariância no tempo. Ademais, vimos que quando um determinado sistema possuir estas propriedades, nós o chamamos de sistema linear invariante no tempo (SLIT). Este tipo de sistema possui grande aplicabilidade prática e é bastante frequente de forma, que é nosso objeto de estudo para encerrarmos a primeira unidade desta disciplina. A análise que faremos agora de SLIT será focada em conhecer um conjunto de ferramentas matemáticas passíveis de uso, começando com um método para determinar os sinais de saída.

Podemos usar a função impulso unitário para representar qualquer sinal de tempo discreto $x[n]$, considerando este como uma sequência de impulsos individuais da seguinte forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (1.14)$$

Por exemplo, a função degrau unitário pode ser escrita como $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$. A Equação 1.14 é conhecida como propriedade seletiva do impulso unitário, visto que apenas o valor de $x[k]$ quando $k = n$ é extraído (OPPENHEIM; WILLISKY, 2010). Este resultado é importante, pois nos mostra que o sinal original pode ser representado por combinações lineares de impulsos unitários. Assim, a partir da propriedade da superposição, a resposta $y[n]$ de um sistema linear para uma entrada $x[n]$ é uma combinação linear de cada

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (1.15)$$

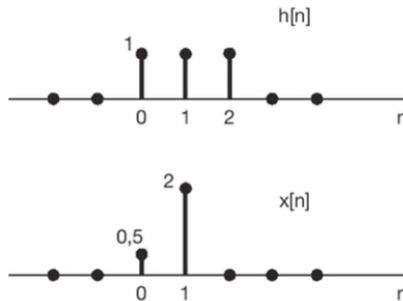
Em que $h[n-k]$ representa a resposta ao impulso do sistema. Este resultado é conhecido como **soma de convolução** e pode ser representado simbolicamente por $y[n] = x[n] * h[n]$. Se conhecermos a resposta ao impulso de um determinado sistema, podemos calcular a saída produzida por qualquer sinal de entrada.



Exemplificando

Vamos aplicar a convolução para calcular a saída de um SLIT considerando a entrada $x[n]$ e a resposta ao impulso $h[n]$ apresentadas na Figura 1.23.

Figura 1.23



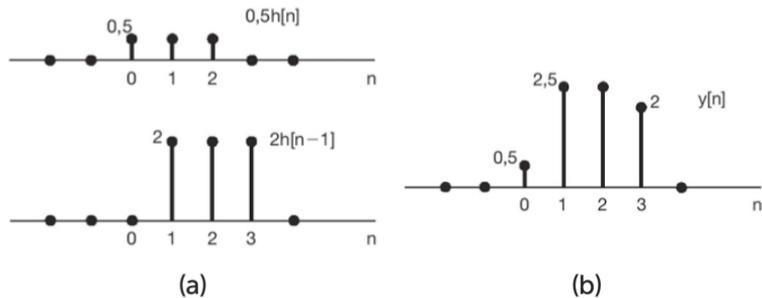
Fonte: adaptada de Oppenheim e Willisky (2010, p. 51).

Solução: aplicando a Equação 1.15, temos que a saída será:

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0,5h[n] + 2h[n-1]$$

As parcelas do sinal de saída e a soma destas estão apresentadas na Figura 1.24a e b, respectivamente.

Figura 1.24 | a) Parcelas do sinal de saída e b) sinal de saída completo

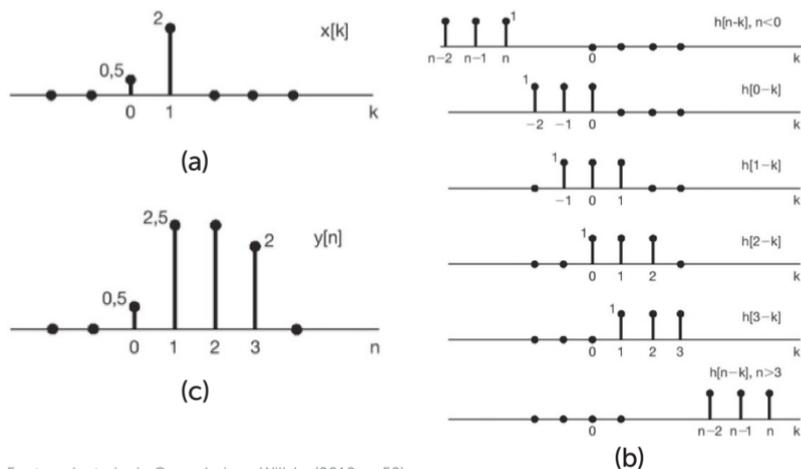


Fonte: adaptada de Oppenheim e Willsky (2010, p. 51).

Graficamente, a operação de convolução é uma maneira conveniente de sistematizar o cálculo da saída de um SLIT. Analisando a Equação 1.15, temos que k é a variável independente de $x[k]$ e $h[n-k]$. Este último, por sua vez, pode ser interpretado como uma versão deslocada e refletida no tempo de $h[k]$. A saída do sistema será composta pelo produto da entrada pela resposta ao impulso deslocada ao longo do eixo do tempo. A Figura 1.25a mostra o sinal de entrada $x[k]$ e a Figura 1.25b mostra os deslocamentos da resposta ao impulso $h[n-k]$, ambos do exemplo anterior. Deve-se fazer a multiplicação entre a entrada e $h[n-k]$ para cada um dos casos apresentados. Por exemplo, o sinal de saída em $n = 1$ é dado por:

$$y[1] = x[k]h[1-k] = x[0] \cdot h[1] + x[1] \cdot h[0] = 0,5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2,5$$

Figura 1.25 | Convolução em tempo discreto: a) sinal de entrada, b) resposta ao impulso deslocada e refletida no tempo e c) sinal de saída



Fonte: adaptada de Oppenheim e Willsky (2010, p. 52).

Para SLITs de tempo contínuo, a somatória torna-se uma integral, conhecida como “integral de convolução”:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (1.16)$$

Em que $y(t)$ é o sinal de saída, $x(\tau)$ é o sinal de entrada e $h(t - \tau)$ é a resposta ao impulso deste SLIT deslocada e invertida no tempo. A operação de convolução é representada por $y(t) = x(t) * h(t)$. A integral de convolução pode ser calculada analítica ou graficamente, de maneira análoga à somatória de convolução. Vamos analisar a convolução entre dois sinais exponenciais de ambas as formas.



Exemplificando

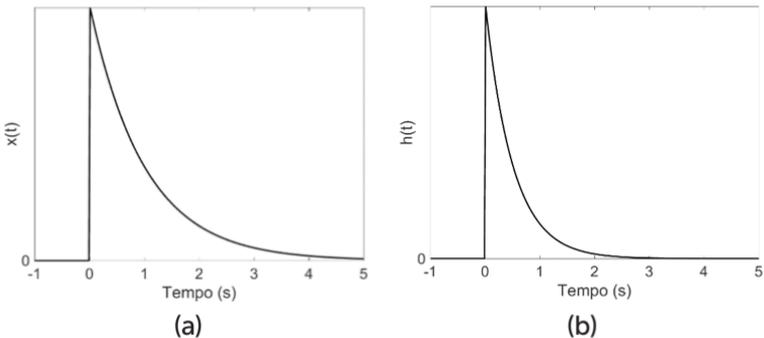
Calcule a convolução entre os sinais de tempo contínuo $x(t) = e^{-t}u(t)$ e $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

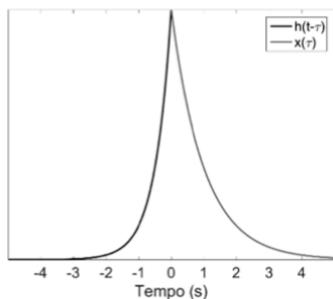
Solução: começamos a resolver este problema fazendo o gráfico de $x(t)$ e $h(t)$, apresentados na Figura 1.26a e b, respectivamente. Logo depois, precisamos mudar a variável independente para τ e inverter a resposta ao impulso, obtendo $h(-\tau)$ (Figura 1.26c). De posse desses sinais, devemos deslocar $h(-\tau)$ por todo eixo do tempo e calcular a integral de convolução (Equação 1.16). A área obtida do cruzamento das duas curvas será o valor do sinal de saída. Assim, avaliando a Figura 1.26e, temos que a integral de convolução deverá ser feita a partir do instante de tempo $t = 0$ em diante, como segue:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)}d\tau \rightarrow y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t).$$

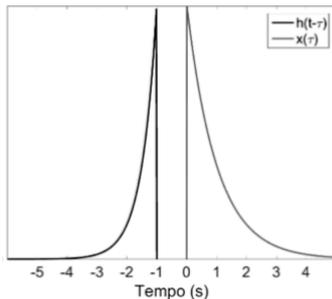
O sinal de saída $y(t)$ está apresentado na Figura 1.26f.

Figura 1.26 | a) $x(t)$, b) $h(t)$, c) $x(\tau)$ e $h(-\tau)$, d) deslocamento da resposta ao impulso, e) área resultado do produto de ambas as curvas e f) sinal de saída

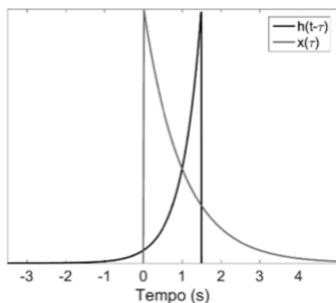




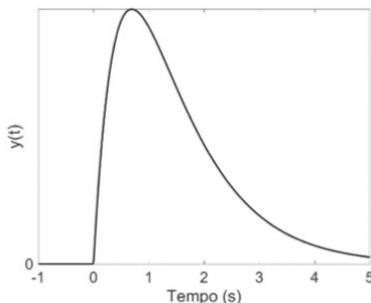
(c)



(d)



(e)



(f)

Fonte: a) e b) adaptadas de Lathi (2008, p. 172), e c), d), e) e f) adaptadas de Lathi (2008, p. 173).



Assimile

Um SLIT é totalmente caracterizado pela sua resposta ao impulso unitário. Assim, de posse da resposta ao impulso, temos condições de determinar a saída para uma entrada arbitrária.



Pesquise mais

Veja exemplos gráficos de convolução para sistemas de tempo contínuo no link: <https://youtu.be/UxTW53cdJRg>. Acesso em: 25 set. 2017.

Aprenda mais sobre a convolução estudando as Seções 2.1 e 2.2 do livro: OPPENHEIM, Alan V.; WILLISKY, Alan V. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010.

Há diversas propriedades derivadas da convolução que podem ser usadas para simplificar cálculos. O Quadro 1.2 apresenta algumas das principais propriedades, válidas tanto para tempo contínuo quanto discreto.

Quadro 1.2 | Propriedades da convolução

Comutativa	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Associativa	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t)(y(t) * z(t))$
Distributiva	$(x(t) + y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t)$
Diferenciação	$y(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$

Fonte: elaborado pelo autor.

SLITs normalmente são modelados de forma a obtermos uma equação que relaciona a entrada e a saída do sistema. Se o SLIT for de tempo contínuo, esta relação poderá ser representada por equações diferenciais com coeficientes constantes (Equação 1.17). Quando o SLIT for de tempo discreto, a representação será por meio de equações de diferenças com coeficientes constantes (Equação 1.18):

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (1.17)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.18)$$

Em que os coeficientes constantes de ambos os casos são a_k e b_k . Sabemos que a solução de equações diferenciais de ordem N necessita de N condições auxiliares. No caso de sistemas lineares e causais, podemos admitir a condição inicial de repouso, na qual se a entrada for zero antes de um determinado instante de tempo t_0 , a saída do sistema também será zero.

As soluções de equações diferenciais que trabalharemos aqui podem ser divididas em duas parcelas: resposta natural (ou homogênea) e resposta forçada (ou particular). A resposta natural ($y_n(t)$) de um sistema é determinada quando a sua entrada é nula, isto é:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_n(t)}{dt^k} = 0 \quad (1.19)$$

A Equação 1.19 é conhecida como equação homogênea e apresenta solução na forma de combinação linear de exponenciais complexas (Equação 1.20), em que a_k e c_k são constantes a serem determinadas.

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^N c_k e^{a_k t} \quad (1.20)$$

A segunda parcela da resposta de um sistema, conhecida como resposta forçada (ou particular $y_f(t)$), é obtida supondo que possua a mesma forma geral da entrada. Em outras palavras, se o sinal de entrada for exponencial, o sinal de saída também o será. Assim, a resposta de um sistema será $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$.



Exemplificando

Um circuito RLC série pode ser modelado como um sistema a partir de uma equação diferencial de segunda ordem. Considerando a tensão no capacitor como sinal de saída e a fonte de tensão $v_s(t) = e^{-5t}$ como sinal de entrada, este sistema será equacionado por $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} x(t)$.

Supondo que $R = 5 \Omega$, $L = 1\text{H}$ e $C = \frac{1}{6}\text{F}$, determine o sinal de saída com as seguintes condições auxiliares: $y(0) = 0$ e $\frac{dy(0)}{dt} = 5$.

Solução: sabemos que a solução de uma equação diferencial é composta por duas parcelas: resposta natural e forçada. Vamos começar determinando a resposta natural a partir da solução da equação homogênea (Equação 1.19), isto é,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 0.$$

Substituindo o operador derivada por s , temos $s^2 + 5s + 6 = 0$, cujas raízes são $s = -2$ e $s = -3$. Assim, sabendo que a resposta natural apresenta a forma da Equação 1.20, temos $y_n(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$. Para determinar as constantes, precisamos avaliar as condições auxiliares, como segue:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = -2c_1 - 3c_2 = 5$$

Assim, $c_1 = 5$ e $c_2 = -5$, de forma que a resposta natural é $y_n(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-3t}$. Para determinar a resposta forçada, vamos supor que o sinal de saída possua a mesma forma da entrada. Supondo $y(t) = Ae^{-5t}$, temos:

$$\frac{d^2(Ae^{-5t})}{dt^2} + 5\frac{d(Ae^{-5t})}{dt} + 6(Ae^{-5t}) = 6Ae^{-5t}$$

$$25Ae^{-5t} - 25Ae^{-5t} + 6Ae^{-5t} = 6Ae^{-5t} \rightarrow A = 1.$$

Portanto, a resposta forçada deste sistema é $y_f(t) = 5e^{-5t}$. A resposta total é $y(t) = y_n(t) + y_f(t) \rightarrow y(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-3t} + e^{-5t}$.



Refleta

As raízes da equação homogênea fizeram parte da forma da resposta natural, no caso do exemplo, criando exponenciais reais negativas com comportamento conhecido. Se estas raízes forem complexas, qual será a forma da resposta natural? É possível determinar a estabilidade da resposta a partir dessas raízes?

Para o caso de SLITs de tempo discreto, as equações de diferença podem ser solucionadas de forma análoga às equações diferenciais, isto é, precisamos determinar as respostas natural e forçada. A equação homogênea no caso discreto é:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (1.21)$$



Exemplificando

Um SLIT de tempo discreto é representado por $y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = x[n]$. Determine $y[n]$.

Solução: analisando a equação deste SLIT, percebemos que é necessário conhecer valores passados da saída. Para resolver esse problema, vamos considerar condição inicial de repouso e que a entrada é $A\delta[n]$. Como $x[n] = 0$ para $n \leq -1$, a saída do sistema também será nula para $n \leq -1$, de forma que temos uma condição auxiliar: $y[-1] = 0$. Vamos avaliar a equação de diferenças para $n \geq 0$:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{5}y[-1] \rightarrow y[0] = A$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{5}y[0] \rightarrow y[1] = \frac{1}{5}A$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{5}y[1] \rightarrow y[2] = \left(\frac{1}{5}\right)^2 A$$

$$y[3] = x[3] + \frac{1}{5}y[2] \rightarrow y[3] = \left(\frac{1}{5}\right)^3 A$$

Para o enésimo termo, $y[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n A$.

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em um laboratório de pesquisa e desenvolvimento que, juntamente com sua equipe, foi designado para avaliar o comportamento de um novo sensor capacitivo com grande potencial de aplicação em sensores de pressão industriais. Na etapa de modelagem, você verificou que o circuito equivalente do sensor é composto por uma resistência de **470 Ω** e uma capacitância de **100 μF** . A seguir, você verificou e classificou o sinal de saída desse sensor quando aplicava uma tensão de 5 V e também fez a classificação do capacitor como um sistema. Para finalizar o seu projeto, você precisa equacionar o sinal de saída quando um pulso unitário for aplicado à entrada. Para isso, você precisa determinar a resposta ao impulso para esse sensor, que será determinado de duas maneiras diferentes: a primeira, avaliando o circuito equivalente do sensor, e a segunda, a partir da avaliação das funções de singularidade.

Considere que a fonte do circuito possua valor constante e seja multiplicada pelo impulso, tornando-se $v_s(t) = V_s \delta(t)$. Podemos interpretar isso como uma fonte de tensão com amplitude alimentando o circuito equivalente, de forma que a corrente deste circuito também será infinita em $t = 0$, isto é, $i(t) = \frac{V_s}{R} \delta(t)$. Sabendo que a tensão no capacitor depende a integral da corrente, temos:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{V_s}{R} \delta(t) dt \rightarrow \frac{V_s}{RC} \int_{-\infty}^t \delta(t) dt.$$

Como a integral da função impulso é unitária e esta função vale zero para qualquer instante de tempo diferente de zero, temos que a tensão no capacitor começar com $v_c(0) = \frac{V_s}{RC}$. Para $t > 0$, a fonte

passa a valer zero e comporta-se como um curto-circuito, fazendo o capacitor descarregar de acordo com uma curva exponencial negativa. Para $t < 0$, a tensão no capacitor é nula, visto que a fonte de tensão também vale zero. Assim, a resposta ao impulso da tensão do capacitor é $v_c(t) = h(t) = \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.

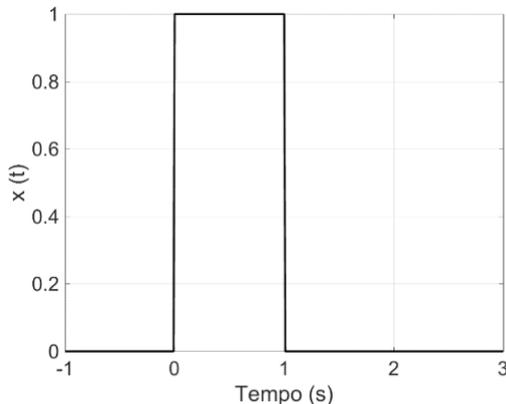
Podemos determinar a resposta ao impulso a partir da resposta ao degrau, fornecida na Seção 1.1, derivando-a em relação ao tempo, como segue:

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left(V_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t) \right) \rightarrow h(t) = \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + V_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \delta(t).$$

Como a função impulso só possui valor não nulo para $t = 0$, este é o único instante de tempo que precisamos avaliar da segunda parcela, em que verificamos que $V_s \left(1 - e^{-\frac{0}{RC}} \right) \delta(0) = 0$. Assim, a resposta ao impulso é $h(t) = \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.

Conhecendo a resposta ao impulso, você pode determinar a saída do sensor para uma entrada arbitrária. Aplicando o pulso unitário (Figura 1.27), você pode determinar o sinal de saída aplicando a integral de convolução.

Figura 1.27 | Pulso retangular aplicado no capacitor



Fonte: elaborada pelo autor.

O sinal de entrada pode ser escrito como uma soma de funções degrau na forma $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$. Temos que a integral de convolução vale zero para $t < 0$. Aplicando a convolução, temos para $0 < t < 1$, temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_0^t \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = V_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Substituindo os valores conhecidos, temos $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}}$ para $0 < t < 1$. Para $t > 1$, temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_0^1 \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = \frac{V_s}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^1 e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = V_s e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{1}{RC}} - 1\right)$$

$$\rightarrow y(t) = V_s e^{-\frac{t-1}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}}\right).$$

Substituindo os valores conhecidos, temos $y(t) = e^{-\frac{t-1}{47 \cdot 10^{-3}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{47 \cdot 10^{-3}}}\right)$ para $t > 1$. Portanto, o sinal de saída deste SLIT será:

$$y(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{47 \cdot 10^{-3}}}, 0 < t < 1 \\ e^{-\frac{t-1}{47 \cdot 10^{-3}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{47 \cdot 10^{-3}}}\right), t > 1 \end{cases}$$

Avançando na prática

Resposta ao impulso de sistemas indutivos

Descrição da situação-problema

Sensores indutivos são largamente utilizados em ambientes industriais como sensores de proximidade com aplicações em detectores de objetos metálicos, contagem de pulsos e detecção de fim de curso. Suponha que um determinado sensor indutivo possa ser modelado como um circuito RL série com $R = 10 \Omega$

e $L = 10 \text{ mH}$. Determine a equação diferencial que relaciona a corrente no indutor (saída) pela fonte de tensão (entrada) e a resposta ao impulso deste sensor.

Resolução da situação-problema

Aplicando a Lei de Kirchhoff das malhas, temos que a tensão da fonte será a soma da tensão da resistência e da indutância, isto é,

$$v_s(t) = v_r(t) + v_L(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}. \text{ Substituindo as funções de entrada e saída e dividindo ambos os lados da equação por } L, \text{ temos}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L}y(t) = \frac{1}{L}x(t).$$

Sabendo que a resposta ao degrau de um circuito RL é $y(t) = \frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t)$, podemos calcular a resposta ao impulso como segue:

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \right) \rightarrow h(t) = \frac{V_s}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t) + \left(\frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \delta(t) \right)$$

$$\rightarrow h(t) = \frac{V_s}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

Faça valer a pena

1. A operação de convolução é representada por $y[n] = x[n] * h[n]$. A somatória de convolução pode ser calculada analítica ou graficamente e serve para determinar a resposta de sistemas lineares e invariantes no tempo discreto. Se conhecermos a resposta ao impulso para determinado sistema, podemos calcular a saída para uma entrada qualquer a partir da convolução.

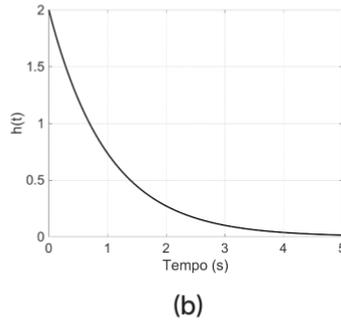
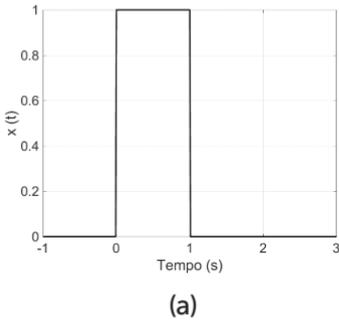
Um SLIT de tempo discreto possui resposta ao impulso $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Determine o sinal de saída para uma entrada $x[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1]$.

- $y[n] = \{1, 1, -3, -1\}$.
- $y[n] = \{1, -1, -3, 1\}$.
- $y[n] = \{1, 1, -3, 1\}$.
- $y[n] = \{1, -1, 3, 1\}$.
- $y[n] = \{-1, 1, -3, 1\}$.

2. A operação de convolução é representada por $y(t) = x(t) * h(t)$. A integral de convolução pode ser calculada analítica ou graficamente, de maneira análoga à somatória de convolução, e serve para determinar a resposta de sistemas lineares e invariantes no tempo.

Calcule a convolução entre $x(t)$ e $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ apresentados nas Figuras 1.28a e b, respectivamente. Assinale a alternativa que apresenta a convolução para $0 < t < 1$.

Figura 1.28 | Sinais a) $x(t)$ e b) $h(t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $y(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$.

d) $y(t) = -\frac{2}{5}(1 - e^{5t})$.

b) $y(t) = -\frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$.

e) $y(t) = \frac{2}{5}(-1 + e^{-5t})$.

c) $y(t) = \frac{2}{5}(1 + e^{5t})$.

3. Quando o SLIT for de tempo discreto, a representação será por meio de equações de diferenças com coeficientes constantes. Sabemos que a solução de equações diferenciais de ordem N necessita de N condições auxiliares e é análoga à solução de equações diferenciais.

Um SLIT de tempo discreto é representado por $y[n] - 1,1y[n-1] = x[n]$. Determine $y[n]$ para uma entrada impulso de amplitude 2 e avalie a estabilidade deste sistema.

a) $y[n] = 0$ e estável.

d) $y[n] = 1,1^n \cdot 2$ e instável.

b) $y[n] = 1,1^n \cdot 2$ e instável.

e) $y[n] = 1,1^n \cdot 2$ e estável.

c) $y[n] = 1,1^n \cdot 2$ e estável.

Referências

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos eléctricos**. Porto Alegre: AMGH, 2013.

GONZALEZ, M. M. C.; GEOVANINI, G. R.; TIMERMAN, S. **Eletrocardiograma na sala de emergências**. 2. ed. Barueri: Editora Manole, 2015.

HSU, Hwei P. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção Schaum).

LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Sinais e Sistemas Lineares**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

OPPENHEIM, Alan V.; WILLISKY, Alan V. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010.

ROBERTS, Michael J. **Fundamentos de sinais e sistemas**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2009.

Análise de Fourier

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade nós conheceremos um conjunto de ferramentas essenciais para análise de sinais e sistemas: a análise de Fourier. Não seria exagero dizer que este é o assunto mais importante deste livro e, naturalmente, possui grande importância prática.

Na primeira seção, nós estudaremos a representação de sinais periódicos no tempo usando a Série de Fourier de tempo contínuo, além de suas propriedades, cálculos e aplicações. Na segunda seção, nós vamos aprender a avaliar sinais aperiódicos usando a Transformada de Fourier de tempo contínuo. Por fim, na terceira seção, nós aplicaremos Série e Transformada de Fourier de tempo discreto para avaliar sinais discretizados no tempo. Ao fim desta unidade você será capaz, portanto, de utilizar a análise de Fourier para avaliar sinais em tempo contínuo e discreto.

Imagine agora que uma fabricante de equipamentos odontológicos recentemente modernizou os acionamentos dos seus motores, substituindo as chaves estrela-triângulo por inversores de frequência. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado aquecimento maior. Preocupados com a integridade dos motores, você foi contratado como consultor para descobrir a fonte desse problema. O que poderia causar esse problema?

Para responder a essa e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Seção 2.1

Representação em série de Fourier em tempo contínuo

Diálogo aberto

Como já discutimos anteriormente, o estudo de sinais e sistemas está presente em praticamente todas as áreas da engenharia e estende-se, inclusive, à medicina. Praticamente todos os equipamentos modernos que conhecemos realizam alguma etapa de processamento de sinais e a análise de Fourier tem um papel central, dada sua grande aplicação prática. A análise de Fourier pode ser usada, dentre outras funções, para identificar as frequências mais importantes de um sinal, analisar circuitos elétricos etc.

Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo por inversores de frequência do seu parque. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado um maior aquecimento. Você foi contratado para avaliar e descobrir a fonte desse problema.

Bons estudos!

Não pode faltar

Seja bem-vindo à segunda unidade deste curso, na qual conheceremos uma série de ferramentas fundamentais para avaliação de sinais e sistemas, a análise de Fourier. Podemos dividir estas análises para sinais periódicos e aperiódicos, tanto no tempo contínuo quanto discreto. No caso de sinais periódicos, usaremos a **Série de Fourier** e a **Transformada de Fourier** para sinais aperiódicos. A análise de Fourier é fruto do trabalho do matemático francês Jean-Baptiste Fourier, que desenvolveu estes métodos matemáticos quando estudava a propagação de calor nos sólidos (ROBERTS, 2010).

A partir deste momento, nós começaremos a definir um conjunto de ferramentas para analisar sinais e sistemas no domínio da frequência, o que nos trará grandes vantagens em relação ao domínio do tempo. Vamos começar esta unidade com a Série de Fourier de tempo

contínuo (SFTC) que, como já falamos, é usada para avaliar sinais periódicos contínuos no tempo. Ademais, qualquer sinal periódico (do nosso interesse prático) poderá ser representado por uma componente de frequência fundamental e uma soma de infinitos componentes de frequências harmônicas múltiplos inteiros desta fundamental. A representação de Fourier pode conter ainda uma componente DC (frequência nula). Vamos conhecer primeiro a forma exponencial complexa da SFTC de um sinal $x(t)$, definida como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega_0 t} \quad (2.1)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.2)$$

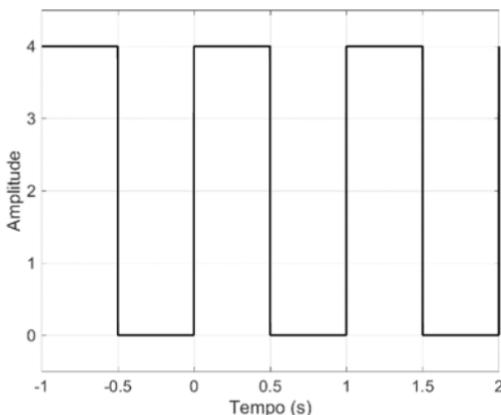
A Equação 2.1 é conhecida como equação de síntese e reescreve o sinal a partir dos coeficientes complexos de Fourier (c_k) que, por sua vez, são determinados pela equação de análise (Equação 2.2). Representar um sinal pela sua SFTC resume-se, principalmente, em determinar os valores de c_k e determinar a série propriamente dita.



Exemplificando

Vamos avaliar a SFTC de um sinal de onda quadrada apresentado na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Sinal de onda quadrada



Fonte: elaborada pelo autor.

Avaliando a Figura 2.1, percebemos que este sinal é periódico e possui período fundamental $T_0 = 1\text{s}$ ou frequência angular $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\text{rad/s}$.

Como este sinal é periódico, nós podemos desenvolver uma representação usando a SFTC. Precisamos, assim, determinar os coeficientes complexos de Fourier aplicando a Equação 2.2. A integral indicada é calculada em um período qualquer do sinal, da mesma forma como fizemos nos cálculos de energia na Unidade 1. Para $-\frac{T_0}{2} < t < 0$ temos que $x(t) = 0$ e para $0 < t < \frac{T_0}{2}$ temos que $x(t) = 4$, que nos mostra que a integral deve ser calculada apenas para a parcela de tempo em que o sinal é não nulo, como segue:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} 4e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow \frac{4}{-jk\frac{T}{2}\omega_0} \left(e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} - 1 \right).$$

Como sabemos que a frequência angular é $\omega_0 T_0 = 2\pi$, isto é:

$c_k = -\frac{4}{jk\pi} (e^{-jk\pi} - 1) \rightarrow c_k = \frac{4}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi})$. Vamos agora avaliar o comportamento de c_k para alguns valores de k usando a relação de Euler, apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Avaliação dos valores do coeficiente complexo de Fourier

k	C_k
1	$\frac{4}{j\pi} (1 - e^{-j\pi}) = \frac{4}{j\pi} (1 - (-1)) = 2 \frac{4}{j\pi}$
2	$\frac{4}{j2\pi} (1 - e^{-j2\pi}) = \frac{4}{j2\pi} (1 - 1) = 0$
3	$\frac{4}{j3\pi} (1 - e^{-j3\pi}) = \frac{4}{j3\pi} (1 - (-1)) = 2 \frac{4}{j3\pi}$
4	$\frac{4}{j4\pi} (1 - e^{-j4\pi}) = \frac{4}{j4\pi} (1 - 1) = 0$
5	$\frac{4}{j5\pi} (1 - e^{-j5\pi}) = \frac{4}{j5\pi} (1 - (-1)) = 2 \frac{4}{j5\pi}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Avaliando estes resultados, percebemos que há um padrão a ser seguido, dado por $c_k = \frac{8}{jk\pi}$ para valores ímpares de k e $c_k = 0$ para valores pares de k . Para evitar as componentes pares, podemos substituir $k = 2m + 1$. Precisamos ainda calcular a componente DC desse sinal:

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \rightarrow \int_0^{0.5} 4 dt \rightarrow c_0 = 2$$

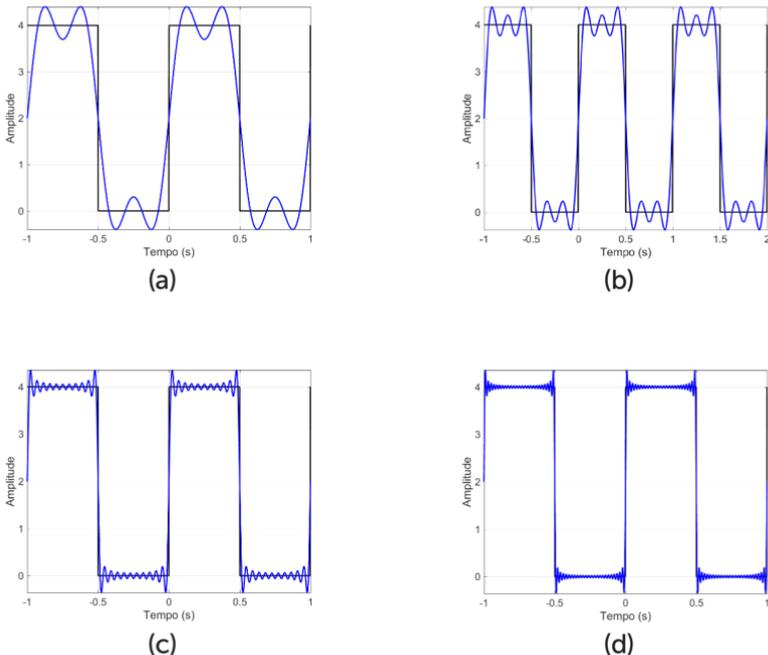
Portanto, a SFTC deste sinal é $x(t) = 2 + \frac{8}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-j(2m+1)2\pi t}$.

A forma geral da solução da SFTC para uma onda quadrada, no formato apresentado na Figura 2.1, de amplitude A , valor mínimo nulo e frequência ω_0 é:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-j(2m+1)\omega_0 t} \quad (2.3)$$

A SFTC do sinal da Figura 2.1 mostra que este é o resultado da combinação de um valor DC com uma frequência fundamental de $2\pi \text{ rad/s}$, com o terceiro harmônico ($6\pi \text{ rad/s}$), com o quinto harmônico ($10\pi \text{ rad/s}$) etc. Conforme aumentamos o número de harmônicos, cada vez mais o sinal se aproximará da função original, como pode ser observado na Figura 2.2. Podemos notar ainda uma ondulação crescente nas extremidades do sinal por causa da descontinuidade do sinal, conhecida como fenômeno de Gibbs (ROBERTS, 2010).

Figura 2.2 | Reconstrução da forma de onda quadrada com a) 3 harmônicas, b) 5 harmônicas, c) 21 harmônicas e d) 51 harmônicas



Fonte: elaborada pelo autor.



Vimos que o fenômeno de Gibbs consiste em um sobressinal nos pontos de descontinuidade da função original quando o número de harmônicas aumenta. Você conseguiria imaginar quais implicações tal fenômeno poderia causar em alguma aplicação?

O Quadro 2.1 apresenta algumas propriedades úteis para determinar a SFTC de sinais mais complexos ou manipulações de um sinal cuja SFCT é conhecida. Para avaliar as propriedades, considere que as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ possuam Coeficientes complexos de Fourier a_k , b_k e c_k , respectivamente.

Quadro 2.1 | Propriedades da SFTC

Linearidade	$z(t) = Ax(t) + By(t) \leftrightarrow c_k = Aa_k + Bb_k$
Deslocamento no tempo	$y(t) = x(t - t_0) \leftrightarrow b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$
Reversão no tempo	$y(t) = x(-t) \leftrightarrow b_k = a_{-k}$
Compressão ou expansão no tempo	$y(t) = x(\alpha t) \leftrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$
Multiplicação de sinais	$z(t) = x(t)y(t) \leftrightarrow c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$
Conjugado	$y(t) = x^*(t) \leftrightarrow b_k = a_{-k}^*$
Integração	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow b_k = \frac{1}{jk\omega_0} a_k$
Diferenciação	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow b_k = jk\omega_0 a_k$
Teorema de Parseval	$P_m = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$

Fonte: adaptado de Roberts (2010, p. 273).

Dentre as propriedades apresentadas no Quadro 2.1, o Teorema de Parseval possui uma posição de destaque, pois apresenta a potência medida de um sinal é igual à somatória do quadrado dos seus coeficientes complexos de Fourier.

Outra forma de representar a SFTC é a partir da forma trigonométrica:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sen(k\omega_0 t)) \tag{2.4}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \tag{2.5}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sen(k\omega_0 t) dt \tag{2.6}$$

Em um primeiro momento podemos não notar muitas vantagens em usar a forma trigonométrica da SFTC, pois os coeficientes de Fourier,

agora a_k e b_k , são determinados a partir do cálculo de duas integrais. Entretanto, essa aparente desvantagem pode ser minimizada se o sinal possuir simetria par ou ímpar. No primeiro caso, isto é, se o sinal tiver simetria par, $b_k = 0$ e teremos apenas componentes cossenoidais na SFTC. Caso o sinal seja ímpar, $a_k = 0$ e teremos apenas componentes senoidais. Podemos também determinar os coeficientes a_k e b_k a partir de C_k , de acordo com:

$$a_0 = 2c_0 \quad (2.7)$$

$$a_k = 2\text{Re}[c_k] \quad (2.8)$$

$$b_k = -2\text{Im}[c_k] \quad (2.9)$$

Para garantirmos que determinado sinal possua representação em SFTC, precisamos verificar as condições de Dirichlet (HSU, 2009):

I. o sinal é absolutamente integrável em um período, isto é,

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty ;$$

II. o sinal possui quantidade finita de valores máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito;

III. o sinal possui quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo de tempo.

Vale aqui ressaltar que a grande maioria dos sinais de interesse prático possuem representação em SFTC.



Assimile

Qualquer sinal periódico no tempo pode ser representado por uma combinação linear de uma função senoidal com período fundamental e suas harmônicas. As condições de Dirichlet são válidas para a grande maioria dos sinais de interesse prático em engenharia.

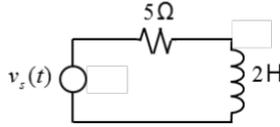
A aplicação da SFTC percorrerá todos os campos da engenharia nos quais trabalhamos com sinais periódicos no tempo, como ondas quadradas, triangulares, avaliação de circuitos elétricos e eletrônicos.



Exemplificando

Vamos avaliar o comportamento da tensão no indutor do circuito elétrico RL série (Figura 2.3) quando a fonte de tensão é a forma de onda quadrada da Figura 2.1.

Figura 2.3 | Circuito RL alimentado com onda quadrada



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: considerando que a fonte de tensão é a SFTC $x(t) = 2 + \frac{8}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-j(2m+1)2\pi t}$, a tensão nos elementos do circuito e a corrente também serão representadas por SFTC. Para determinarmos a tensão na indutância, podemos usar fasores e aplicar um divisor de tensão:

$V_L(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} V_s(\omega)$, em que $V_s(\omega)$ é o fasor da fonte de tensão e $\omega = (2m+1)2\pi$.

Para facilitar esta análise, vamos utilizar a SFTC na forma trigonométrica (Equação 2.4), que neste caso se resume à $x(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}((2m+1)2\pi t)$,

para usar o seu fasor $V_s(\omega) = \frac{8}{(2m+1)\pi} \angle -90^\circ$. Assim, o divisor de tensão será:

$$V_L(\omega) = \frac{(\omega L \angle 90^\circ)}{\left(\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle -\arctan \frac{\omega L}{R}\right)} \left(\frac{8}{(2m+1)\pi} \angle -90^\circ\right)$$

$$V_L(\omega) = \frac{8(2m+1)2\pi L}{(2m+1)\pi \sqrt{R^2 + ((2m+1)2\pi L)^2}} \angle -\arctan \frac{(2m+1)2\pi L}{R}$$

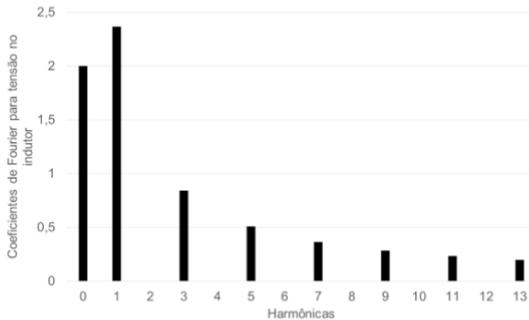
$$|V_L|(\omega) = \frac{32}{\sqrt{25 + ((2m+1)4\pi)^2}} \angle -\arctan \frac{(2m+1)4\pi}{5}$$

Voltando para o domínio do tempo, temos:

$$v_L(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{32}{\sqrt{25 + ((2m+1)4\pi)^2}} \cos\left((2m+1)2\pi t - \arctan \frac{(2m+1)4\pi}{5}\right)$$

A variação do módulo da tensão no indutor está apresentada na Figura 2.4, que nada mais é do que uma curva do módulo do coeficiente de Fourier pela frequência, conhecida como espectro de amplitude do sinal.

Figura 2.4 | Espectro de amplitude da tensão no indutor



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme vimos no exemplo anterior, o espectro de frequência da SFTC é um gráfico que apresenta os coeficientes complexos pela frequência e será de grande importância na avaliação de sinais e sistemas: por exemplo, filtros.



Pesquise mais

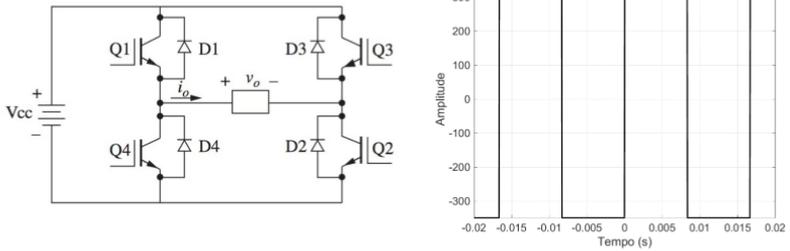
Para saber mais sobre a série de Fourier acesse a nossa biblioteca virtual, disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/9> e busque pelo livro *Sinais e Sistemas* (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010) e estude até a Seção 3.5 do capítulo 3. Você também pode acessar o vídeo do professor Filipe Santos em: <https://youtu.be/omNO-BEUXFY>. Acesso em: 21 abr. 2017.

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo por inversores de frequência do seu parque. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado aquecimento maior. Você foi contratado para avaliar e descobrir a fonte desse problema.

Os dispositivos eletrônicos de potência ganharam grande notoriedade no ramo industrial pela possibilidade de controle de máquinas elétricas como motores de indução trifásicos. Inversores são conversores de potência que produzem uma tensão alternada a partir de uma fonte contínua sendo, portanto, classificados como conversores CC-CA. O circuito da Figura 2.5a apresenta um inversor de frequência básico que utiliza chaves para fazer a comutação e, assim, variar a tensão fornecida para a carga. Suponha que a tensão DC é de 350 V, de forma a produzir a forma de onda quadrada apresentada na Figura 2.5b e que os pares de chaves são comutados a cada 8,335 ms, produzindo uma onda quadrada de período $T = 16,67$ ms. Esta forma é adequada para alimentar um motor?

Figura 2.5 | a) Inversor de frequência simples e b) forma de onda na carga



(a)

(b)

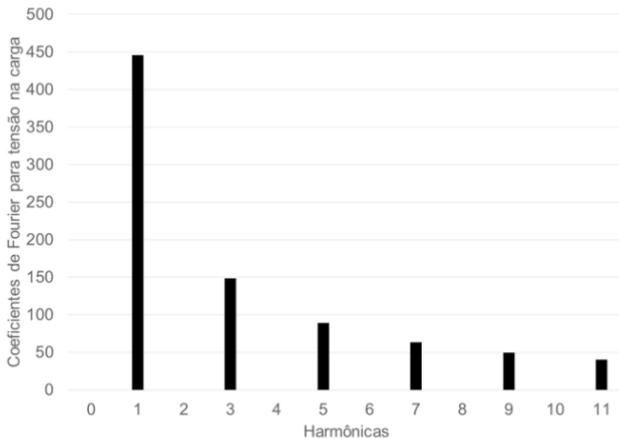
Fonte: a) Hart (2011, p. 339); b) elaborada pelo autor.

Solução: esta forma de onda não é adequada para alimentar motores e equipamentos elétricos pois, além de produzir uma componente com frequência fundamental (no caso de 60 Hz) há a produção de um grande número de harmônicas. Podemos determinar a SFTC na forma

trigonométrica para este sinal como $v_o(t) = \frac{1400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}((2m+1)377t)|V|$,

cujo espectro de amplitude está apresentado na Figura 2.6. Isso significa que o inversor opera como se fossem várias fontes senoidais fornecendo tensão para o motor, mas em frequências diferentes, podendo causar sobreaquecimento no motor por causa de uma maior corrente que atravessa a carga e, portanto, maior potência dissipada por efeito Joule.

Figura 2.6 | Espectro de amplitude para tensão fornecida pelo inversor de frequência



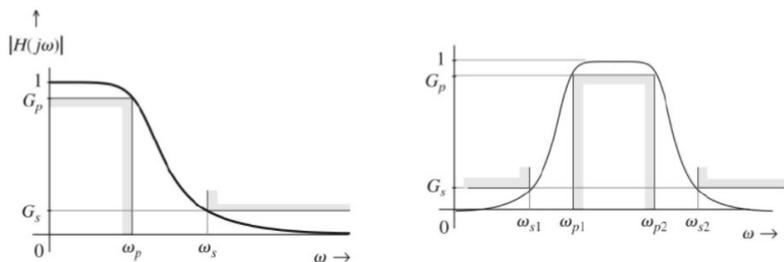
Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicação em filtros

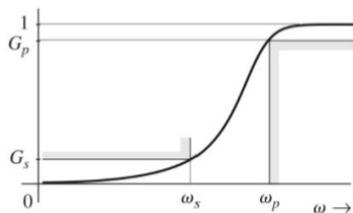
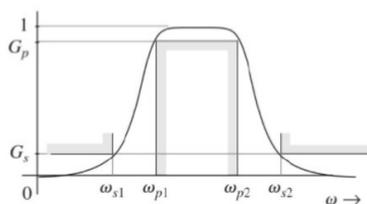
Descrição da situação-problema

Uma das maiores aplicações da Análise de Fourier é o projeto de filtros de frequência. Apesar de tratarmos desse assunto em detalhes na Unidade 3, podemos usar os conhecimentos adquiridos até o momento para identificar o tipo de filtro que devemos usar em determinado problema. Sabendo que os filtros podem ser classificados, basicamente, entre passa-baixas, passa-altas, passa-faixas e rejeita-faixas, qual filtro deve ser usado no sinal de onda quadrada da Figura 2.5b de forma que a sua saída seja um sinal senoidal de 60 Hz? Considere as respostas ideais dos filtros apresentados na Figura 2.7.

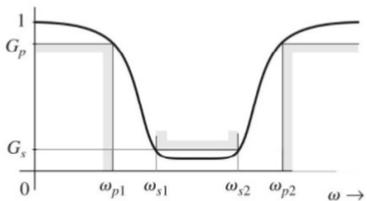
Figura 2.7 | Filtros ideais a) passa-baixas, b) passa-altas, c) passa-faixas e d) rejeita-faixas



(a)



(c)



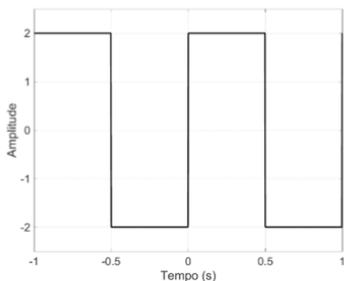
Resolução da situação-problema

Avaliando o espectro de frequência do sinal anterior (Figura 2.6), percebemos que este sinal é composto por frequências harmônicas ímpares de 60 Hz. Como não existe nenhuma frequência entre esta fundamental e a componente DC, podemos usar um filtro passa-baixas ou passa-faixas, desde que este último não inclua nenhum outro componente além de 60 Hz.

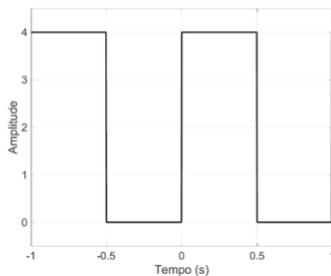
Faça valer a pena

1. Qualquer sinal periódico no tempo pode ser representado por uma combinação linear de uma função senoidal com período fundamental e suas harmônicas. Para garantirmos que determinado sinal possua representação em SFTC, precisamos verificar as condições de Dirichlet. Avalie os sinais apresentados na Figura 2.8, as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

Figura 2.8 | Sinal de onda quadrada



(a)



(b)

Fonte: elaborada pelo autor.

I. Os coeficientes de Fourier para a forma exponencial complexa são iguais para ambos os sinais

PORQUE

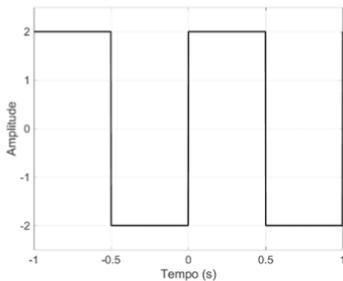
II. A única diferença entre eles é a componente DC.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

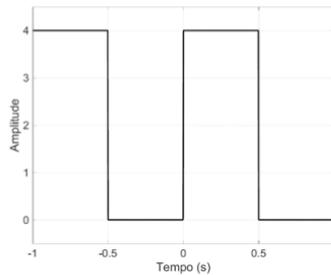
- As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.
- As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
- A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- As asserções I e II são proposições falsas.

2. Qualquer sinal periódico no tempo pode ser representado por uma combinação linear de uma função senoidal com período fundamental e suas harmônicas. Para garantirmos que determinado sinal possua representação em SFTC, precisamos verificar as condições de Dirichlet. Determine os coeficientes da Série de Fourier de tempo contínuo para o sinal dente de serra apresentado na Figura 2.9.

Figura 2.9 | Sinal de onda quadrada



(a)



(b)

Fonte: elaborada pelo autor.

a)
$$x(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)} \cos(2m-1)\omega_0 t.$$

b)
$$x(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)} \cos(2m+1)\omega_0 t.$$

c)
$$x(t) = -2 + \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t.$$

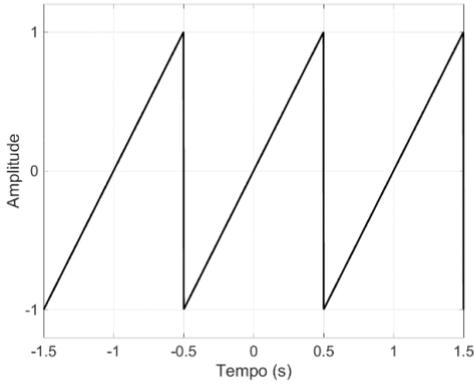
d)
$$x(t) = -2 - \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t.$$

e)
$$x(t) = -2 - \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)} \cos(2m+1)\omega_0 t.$$

3. Qualquer sinal periódico que obedeça às condições de Dirichlet pode ser representado por uma Série de Fourier composta por uma componente de frequência fundamental e uma soma de infinitos componentes de frequências harmônicas múltiplos inteiros desta fundamental. A representação de Fourier pode conter ainda uma componente DC (frequência nula).

Determine os coeficientes da Série de Fourier de tempo contínuo para o sinal dente de serra apresentado na Figura 2.10.

Figura 2.10 | Sinal dente de serra



Fonte: elaborada pelo autor.

a) $a_k = 0$ e $b_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^k$.

b) $a_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^k$ e $b_k = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k$.

c) $a_k = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k$ e $b_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^k$.

d) $a_k = 0$ e $b_k = \frac{2}{k\pi}(1)^k$.

e) $a_k = 0$ e $b_k = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k$.

Seção 2.2

Transformada de Fourier em tempo contínuo

Diálogo aberto

Como já discutimos anteriormente, o estudo de sinais e sistemas está presente em praticamente todas as áreas da engenharia e estende-se, inclusive, à medicina. Praticamente todos os equipamentos modernos que realizam alguma etapa de processamento de sinais e a análise de Fourier têm um papel central, dada sua grande aplicação prática. A análise de Fourier pode ser usada, dentre outras funções, para identificar as frequências mais significativas que compõem um sinal, analisar circuitos elétricos etc.

Vimos na Seção 2.1 que sinais periódicos no tempo podem ser representados pela série de Fourier de tempo contínuo (SFTC), desde que as condições de Dirichlet sejam satisfeitas, o que acontece para a grande maioria dos sinais de interesse prático. Neste caso, os sinais eram representados como uma combinação linear de exponenciais complexas (ou funções senoidais) com infinitos termos. Surge aqui uma pergunta: se o sinal em questão for aperiódico ele também será representado pela SFTC?

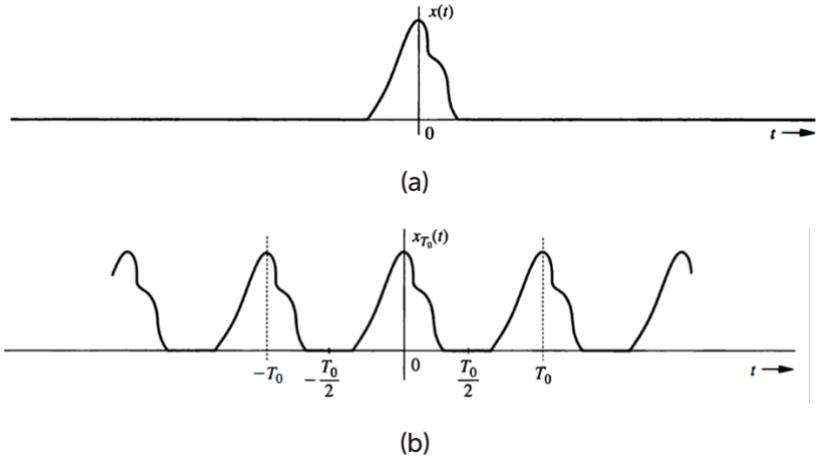
Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo por inversores de frequência do seu parque. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado aquecimento maior. Você foi contratado para avaliar e descobrir a fonte desse problema.

Bons estudos!

Não pode faltar

Considere o sinal aperiódico $\mathbf{x}(t)$ da Figura 2.11a. Podemos torná-lo periódico se definirmos um período e , assim, o repetirmos, conforme Figura 2.11b. Note que um sinal aperiódico pode ser considerado um sinal periódico quando $T_0 \rightarrow \infty$ (LATHI, 2008).

Figura 2.11 | Sinal a) aperiódico e b) periódico construído a partir do primeiro



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 600).

Visto que o sinal da Figura 2.11b é periódico, podemos representá-lo usando a SFTC. O coeficiente c_k será calculado a partir da Equação 2.2:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

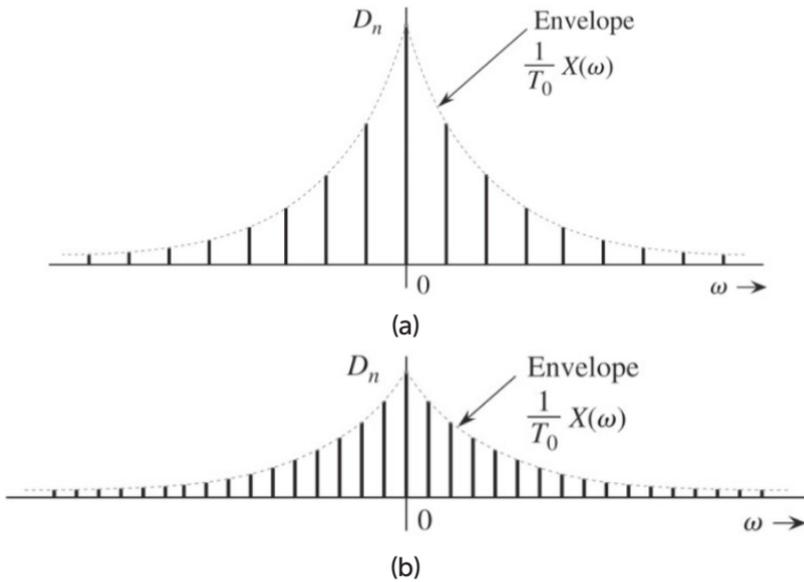
Analisando esta integral, podemos notar que integrar $x_{T_0}(t)$ entre $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ equivale a integrar o sinal original entre $-\infty \leq t \leq \infty$, de forma que $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$. Assim, definimos $X(\omega)$ como uma função contínua de ω e o coeficiente c_k como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega) \quad (2.11)$$

A Equação 2.11 indica que os coeficientes de Fourier são amostras igualmente espaçadas de ω_0 rad/s e divididas por T_0 . Assim, esta equação produz um envelope (ou envoltória) para os coeficientes c_k (Figura 2.12a). Conforme o período fundamental aumenta, a frequência fundamental diminui (Figura 2.12b). No caso limite, os coeficientes estarão espaçados por intervalos infinitesimais, de forma que o espectro passará a ser contínuo.

Figura 2.12 | Mudança no espectro de Fourier quando alteramos T_0



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 601).

A função $x(\omega)$ da Equação 2.10 é conhecida como a **Transformada de Fourier** ou **Integral de Fourier** de $x(t)$ e, também, como equação de análise. Esta operação é indicada como $x(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. A Transformada Inversa de Fourier é definida como:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

A Equação 2.12 é conhecida como equação de síntese. A Transformada de Fourier de tempo contínuo (TFTC) de um sinal é um número complexo e pode ser escrita tanto na forma cartesiana quanto polar. No segundo caso, temos $x(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)}$, em que $|x(\omega)|$ é o espectro de amplitude e $\angle x(\omega)$ é o espectro de fase de $x(\omega)$. Vamos verificá-los analisando um exemplo simples.



Exemplificando

Determine a TFTC e os espectros de amplitude e fase do sinal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Solução: a partir da definição da TFTC (Equação 2.10), temos:

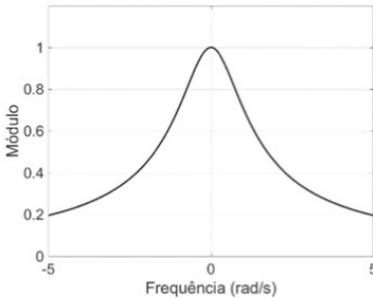
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t} dt \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+1)t} dt = \frac{1}{j\omega+1}.$$

Representando este número complexo na forma polar:

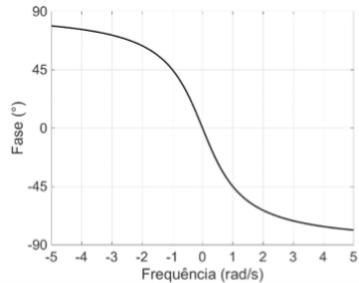
$$X(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega+1} \right| e^{j\angle \frac{1}{j\omega+1}} \quad X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{1}\right)}.$$

Assim, os espectros de amplitude e de fase são $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$ e $-\arctan(\omega)$ e são apresentados nas Figuras 2.13a e b, respectivamente.

Figura 2.13 | a) espectro de amplitude e b) de fase de $X(\omega)$



(a)



(b)

Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

A SFTC é um caso particular da TFTC e usamos esta última para analisar sinais e projetar sistemas no domínio da frequência.

O Quadro 2.2 apresenta sinais comumente encontrados e suas respectivas TFTC.

Quadro 2.2 | Pares de TFTC

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega + a}$ para $a > 0$
$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{-j\omega + a}$ para $a > 0$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$ para $a > 0$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(j\omega + a)^{n+1}}$ para $a > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\text{sen}(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ para $a > 0$
$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ para $a > 0$

Fonte: adaptado de Lathi (2010, p. 273).

As condições para convergência da TFTC são parecidas com as condições de Dirichlet que vimos para a SFTC, isto é (HSU, 2012):

- I. o sinal é absolutamente integrável, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$;
- II. o sinal possui quantidade finita de valores máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito;
- III. o sinal possui quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo de tempo.

Sinais de características práticas satisfazem as condições de Dirichlet e, portanto, possuem TFTC (LATHI, 2008).

Apesar de sinais periódicos no tempo não serem absolutamente integráveis, podemos obter a TFTC a partir dos coeficientes da SFTC. A transformada resultante é constituída de um trem de impulsos:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (2.13)$$



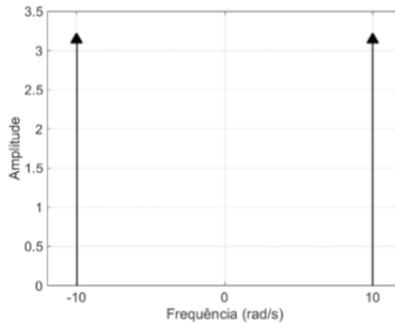
Determine a TFTC do sinal $x(t) = \cos(10t)$.

Solução: aplicando a relação de Euler, temos $\cos(10t) = \frac{1}{2}(e^{j10t} + e^{-j10t})$,

que é a própria representação em SFTC de $x(t)$ com $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$.

Substituindo este resultado na Equação 2.13, temos que a TFTC deste sinal é $X(\omega) = \pi\delta(\omega - 10) + \pi\delta(\omega + 10)$ (Figura 2.14).

Figura 2.14 | Transformada de Fourier de $\cos(10t)$



Fonte: elaborada pelo autor.

As principais propriedades da TFTC estão listadas no Quadro 2.3.

Quadro 2.3 | Propriedades da TFTC

Linearidade	$z(t) = Ax(t) + By(t) \leftrightarrow Z(\omega) = AX(\omega) + BY(\omega)$
Deslocamento no tempo	$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Reversão no tempo	$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$
Compressão ou expansão no tempo	$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{ \alpha } X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Dualidade	Se $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ então $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
Conjugado	$X(-\omega) = X^*(\omega)$ para $x(t)$ real
Integração	$x(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciação	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

Teorema da modulação	$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
Convolução	$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$

Fonte: adaptado de Lathi (2010, p. 273).

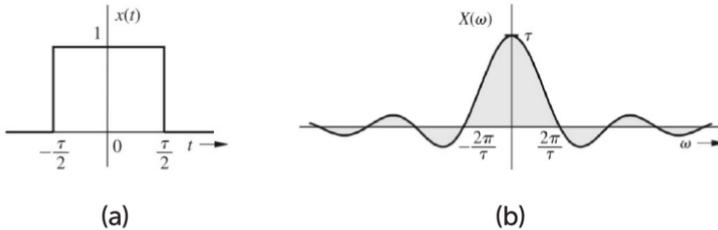
Exemplificando

Determine a TFTC dos sinais apresentados nas Figuras 2.15a e 2.15b.

Solução: aplicando a equação de síntese no sinal pulso retangular $\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ (Figura 2.15a), temos:

$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \rightarrow -\frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right) \rightarrow \frac{2 \text{sen}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)} = \tau \text{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

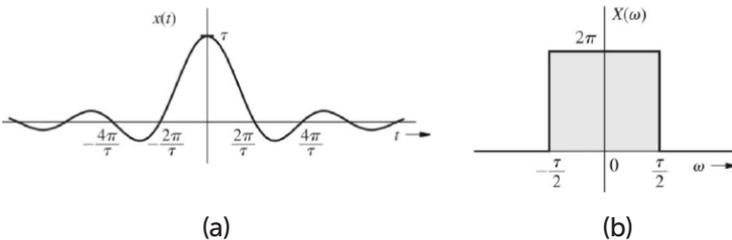
Figura 2.15 | TFTC do pulso retangular



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 609).

O sinal da Figura 2.16a é a TFTC do pulso retangular. De acordo com a propriedade da dualidade, temos que $\tau \text{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right)$, apresentado na Figura 2.16b.

Figura 2.16 | Verificação da dualidade



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 609).

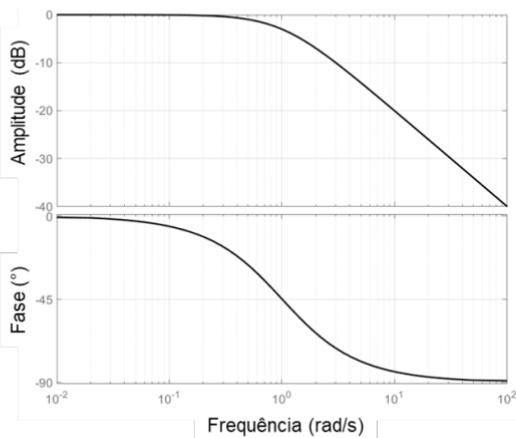
A TFTC é particularmente útil na análise de sinais e sistemas quando consideramos este último como um diagrama de blocos, como fizemos na Unidade 1 para determinarmos a relação entre entrada e saída. Naquela ocasião, fizemos uma modelagem apenas no domínio do tempo, o que normalmente resulta, no caso de tempo contínuo, em uma equação diferencial com coeficientes constantes. Além disso, era necessário determinar a saída a partir da integral de convolução. Quando fazemos a modelagem usando a TFTC, a convolução torna-se uma multiplicação e a equação diferencial torna-se uma equação algébrica, cujas soluções são mais simples. Assim, avaliar sistemas pela TFTC é extremamente vantajoso e mais simples que quando comparado com a modelagem no domínio do tempo.

Dentre as diversas aplicações da TFTC, destacamos o Diagrama de Bode, que é a representação dos espectros de amplitude e de fase com gráficos em escalas logarítmicas. No caso do espectro de amplitude a escala usada é o decibel (dB), calculado a partir do módulo como:

$$|X(\omega)|_{dB} = 20 \log |X(\omega)| \quad (2.14)$$

O sinal $x(t) = e^{-t}u(t)$, cuja TFTC é $X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, tem espectro de amplitude $\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$ e de fase $-\arctan(\omega)$, ambos apresentados na Figura 2.17. Se considerarmos este diagrama de bode como o comportamento de um sistema com entrada e saída medidas em volts, podemos notar que frequências abaixo de **1rad/s** sofrem atenuação de 0 dB, isto é, não serão alteradas em módulo ($20 \log(1) = 0 \text{ dB}$). Exatamente em $\omega = 1 \text{ rad/s}$, o módulo será -3 dB, o que indica que o sinal de saída sofre uma atenuação de 3 dB ou **0,707 V/V**. Para $\omega > 1 \text{ rad/s}$ o módulo sofrerá atenuação de **20 dB/década**. Concluimos que frequências maiores que **1rad/s** sofrem atenuação ao passo que as menores não. Esta é uma curva característica de um filtro passa-baixas com frequência de corte $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. Caso o comportamento fosse exatamente o contrário, este sistema seria um filtro passa-altas. As famílias e projetos de filtros serão estudados na Unidade 3 deste livro.

Figura 2.17 | Espectro de amplitude e de fase de $X(\omega)$



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Definimos a TFTC nesta seção para avaliar sinais e sistemas contínuos no tempo. Veja novamente a definição da TFTC (Equação 2.10) e perceba que ela é bastante similar à Transformada de Laplace. Existe alguma relação entre essas duas transformadas?



Pesquise mais

Para aprender mais sobre as aplicações da TFTC estude as seções 7.4 a 7.8 do livro *Sinais e sistemas lineares* (Lathi, 2008) disponível na Biblioteca Virtual pelo link: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>. Acesso em: 28 out. 2017.

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo para acionamento dos seus motores de indução por inversores de frequência. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado sobreaquecimento. Você foi contratado para avaliar e descobrir a fonte deste problema e já identificou que a forma de onda de tensão fornecida pelos inversores de frequência produz harmônicas que, por sua vez, comportam-se como novas fontes de tensão no circuito. Você poderia usar a TFTC

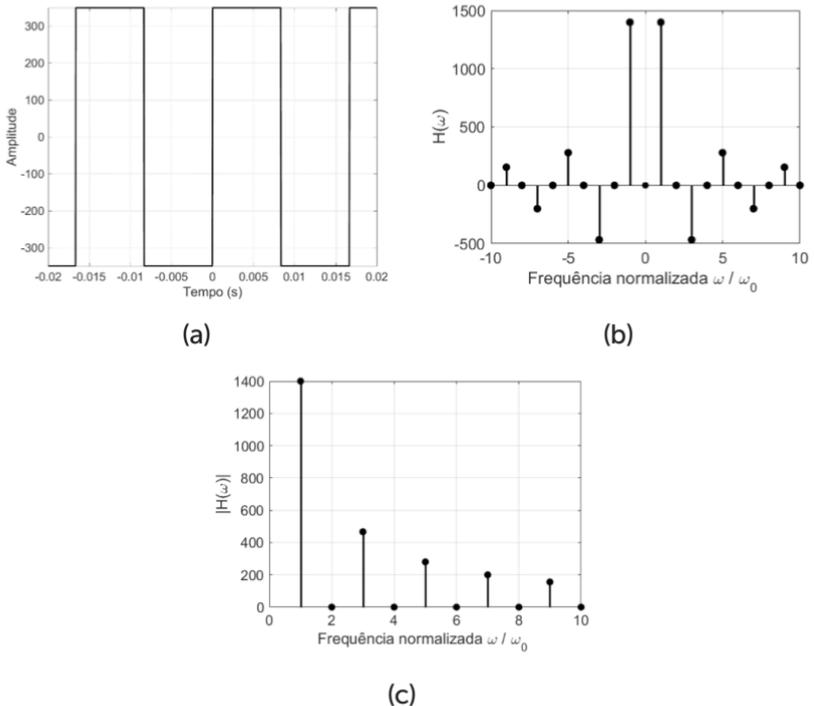
para avaliar este sinal de tensão? Há alguma diferença entre esta análise e a realizada anteriormente com a SFTC?

O sinal de onda quadrada em questão é apresentado na Figura 2.18a. Sabemos que o coeficiente complexo de Fourier deste sinal é $\frac{700}{j\pi(2m+1)}$ na forma exponencial complexa e podemos determinar para a forma trigonométrica como $\frac{700}{(2m+1)\pi} \text{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)$. Podemos determinar a TFTC aplicando a Equação 2.12, uma vez que o sinal em questão é periódico:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - k\omega_0) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2 \frac{700}{(2m+1)} \text{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \delta(\omega - (2m+1)\omega_0).$$

A TFTC deste sinal e o seu espectro de amplitude estão apresentados nas Figuras 2.18b e 2.18c, respectivamente. Analisando esta escala da TFTC, notamos que está multiplicada com um fator 2π em relação ao espectro de amplitude da SFTC.

Figura 2.18 | a) Forma de onda de tensão na carga. b) TFTC do sinal de onda quadrada e c) seu espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, concluímos que este sinal de tensão de onda quadrada produz componentes harmônicas ímpares em relação à fundamental, da mesma forma que verificamos com a SFTC. Estas componentes serão sobrepostas à frequência fundamental e atuarão como novas fontes de tensão. Essas, por sua vez, produzirão novas correntes que circularão pelas máquinas e equipamentos, resultando em sobreaquecimento.

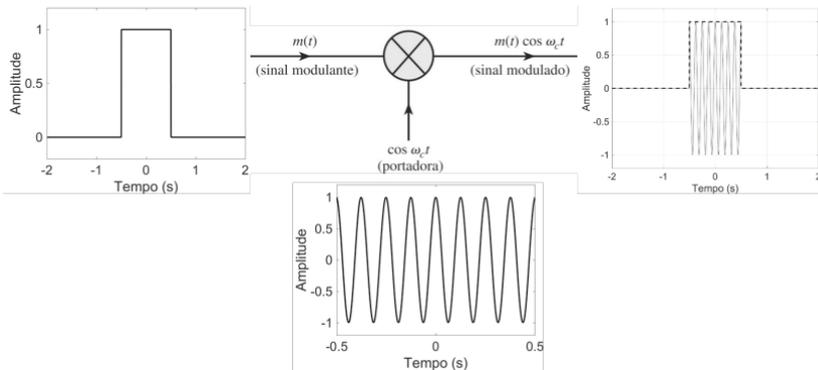
Avançando na prática

Modulação em amplitude

Descrição da situação-problema

Sistemas de comunicação normalmente usam modulação para transmissão de sinais, que consiste em multiplicar o sinal que se deseja transmitir (modulante) por um sinal conhecido como portadora (Figura 2.19). O sinal de saída é conhecido como sinal modulado. Se $m(t)$ for um pulso retangular da Figura 2.15a com $\tau = 1$ e a portadora for $\cos(50t)$, como ficará o espectro de amplitude do sinal modulado?

Figura 2.19 | Modulação em amplitude

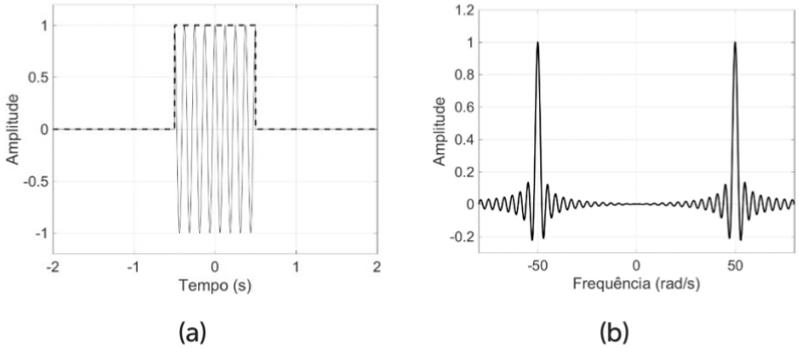


Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 645).

Resolução da situação-problema

O sinal modulado está apresentado na Figura 2.20a, em que notamos o sinal $\cos(50t)$ durante o período de duração do pulso retangular. De acordo com o teorema da modulação ($x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$), a TFTC ficará deslocada de ± 50 rad/s, conforme Figura 2.20b.

Figura 2.20 | a) Sinal modulado e b) sua TFTC



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. A Transformada de Fourier de tempo contínuo (TFTC) de um sinal é um número complexo e pode ser escrita tanto na forma cartesiana quanto polar. No segundo caso, temos $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$, em que $|X(\omega)|$ é o espectro de amplitude e $\angle X(\omega)$ é o espectro de fase de $X(\omega)$.

Determine o espectro de amplitude em dB de um sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

- a) $|X(\omega)|_{dB} = -20\log(\sqrt{\omega^2 + a^2})$.
- b) $|X(\omega)|_{dB} = 20\log(\sqrt{\omega^2 + a^2})$.
- c) $|X(\omega)|_{dB} = -20\log(\omega^2 + a^2)$.
- d) $|X(\omega)|_{dB} = 20\log(\omega^2 + a^2)$.
- e) $|X(\omega)|_{dB} = -20\log\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{a^2}\right)$.

2. Apesar de sinais periódicos no tempo não serem absolutamente integráveis, podemos obter a TFTC a partir dos coeficientes da SFTC. A transformada resultante é constituída de um trem de impulsos

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c \delta(\omega - k\omega_0).$$

Determine as transformadas de Fourier dos sinais $x_1(t) = \text{sen}(5t)$ e $x_2(t) = \text{sen}(-5t)$.

- a) $X_1(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - 5) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 5)$ e $X_2(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) - \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$.
- b) $X_1(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) - \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$ e $X_2(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) - \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$.
- c) $X_1(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - 5) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 5)$ e $X_2(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - 5) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 5)$.
- d) $X_1(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) + \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$ e $X_2(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) - \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$.
- e) $X_1(\omega) = -\frac{\pi}{j}\delta(\omega - 5) + \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 5)$ e $X_2(\omega) = -\frac{\pi}{j}\delta(-\omega + 5) + \frac{\pi}{j}\delta(-\omega - 5)$.

3. Quando fazemos a modelagem de um sistema usando a TFTC, a convolução torna-se uma multiplicação e a equação diferencial torna-se uma equação algébrica, cujas soluções são mais simples. Assim, avaliar sistemas pela TFTC é extremamente vantajoso e mais simples do que quando comparado com a modelagem no domínio do tempo.

Um sistema linear é modelado como $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$, em que $x(t)$ e $y(t)$

são os sinais de entrada e saída, respectivamente. Determine a resposta deste sistema ao impulso unitário supondo condições iniciais nulas.

- a) $y(t) = e^{2t}u(t)$.
- b) $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$.
- c) $y(t) = e^{\frac{t}{2}}u(t)$.
- d) $y(t) = e^{\frac{t}{2}}u(-t)$.
- e) $y(t) = e^{-2t}u(t)$.

Seção 2.3

Série de Fourier e Transformada de Fourier em tempo discreto para análise de sinais

Diálogo aberto

Caro estudante, vamos encerrar a segunda unidade desta disciplina estudando a análise de Fourier para sinais e sistemas de tempo discreto usando a Série e a Transformada de Fourier. Aqui você aprenderá a aplicar essas ferramentas em situações nas quais trabalhamos no tempo discreto, como é o caso de sistemas de aquisição de dados, de controle digital etc.

Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo por inversores de frequência. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado aquecimento maior. Você já identificou a fonte deste problema como sendo a forma de onda não senoidal fornecida pelo inversor de frequência aos motores. Você poderia fazer esta avaliação considerando apenas algumas amostras dos sinais de tensão?

Para responder a essa e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

Sinais em tempo discreto (TD) são bastante comuns em aplicações reais pois sistemas microprocessados precisam fazer aquisição de sinais para posterior processamento. Como veremos futuramente, a aquisição de sinais consiste em fazer uma representação em TD de um sinal de tempo contínuo.

Conforme estudamos na Seção 1.1 deste livro, sinais de tempo discreto serão periódicos quando $\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}[n - N_0]$, onde N_0 é o período fundamental. Com isso podemos determinar a frequência fundamental deste sinal como $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$. De maneira bastante similar ao caso de tempo contínuo, sinais discretos e periódicos no tempo podem ser

representados por uma série de Fourier (SFTD), definida como:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad (2.15)$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (2.16)$$

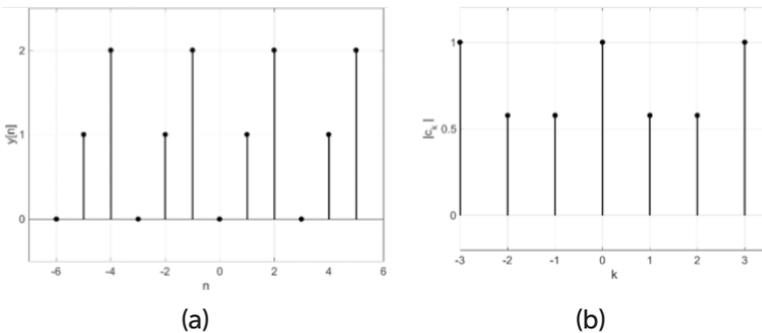
As Equações 2.15 e 2.16 são conhecidas como equações de síntese e análise, respectivamente. Uma diferença entre a SFTC e SFTD é que esta última não possui infinitos coeficientes de Fourier mas, na verdade, uma quantidade finita de termos que é exatamente igual ao número de amostras do sinal discretizado, normalmente variando k de 0 até $N_0 - 1$. Em outras palavras, se $N_0 = 10$ amostras, a representação em SFTD terá 10 coeficientes ($k = 0$ até $k = 9$). É importante ressaltar que o somatório pode ser realizado dentro de qualquer período, desde que a quantidade de termos deste exemplo permaneça $N_0 = 10$. Além disso, os coeficientes de Fourier são periódicos ($c_k = c_{k+N_0}$). Uma vantagem da SFTD é que não há as questões de convergência que estudamos para o caso em tempo contínuo.



Exemplificando

Determine os coeficientes de Fourier do sinal em TD apresentado na Figura 2.21.

Figura 2.21 | a) Sinal discreto no tempo e b) seu espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: o sinal em questão é periódico com $N_0 = 3$ e frequência $\Omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. Precisamos determinar apenas três coeficientes de Fourier (Equação 2.16), como segue:

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^2 x[n] \rightarrow c_0 = \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) \rightarrow c_0 = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \left(x[0] + x[1] e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x[2] e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right)$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \left(0 + 1 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$c_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 x[n] e^{-j\frac{4\pi}{3}n} \rightarrow c_2 = \frac{1}{3} \left(x[0] + x[1] e^{-j\frac{4\pi}{3}} + x[2] e^{-j\frac{8\pi}{3}} \right)$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{1}{3} \left(0 + 1 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim, os coeficientes de Fourier são $c_0 = 1$, $c_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}$ e $c_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}$, e o espectro de amplitude está apresentado na

Figura 2.21b.



Assimile

A SFTD não possui infinitos termos como a SFTC, sendo necessário determinar seus coeficientes a partir da quantidade de amostras do sinal em tempo discreto. Ademais, a SFTD é periódica, ao passo que a SFTC é aperiódica.

Usamos a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) para avaliar sinais discretos e aperiódicos no tempo, cujo desenvolvimento é bastante similar ao da TFTC. Definimos

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (2.17)$$

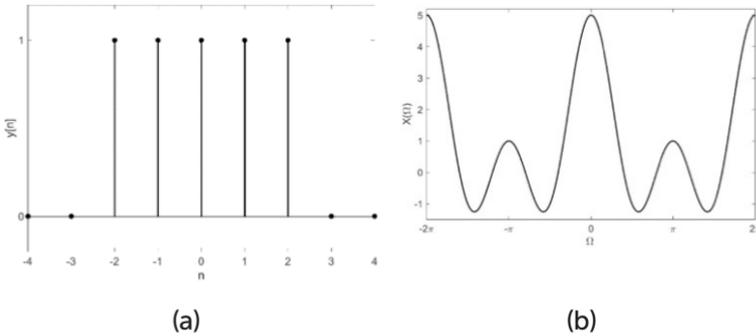
$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.18)$$

A TFTD é uma função periódica com período 2π , contínua na frequência Ω e costuma ser um número complexo, de forma que pode ser representada na forma polar $X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)}$, em que $|X(\Omega)|$ é o espectro de amplitude e $\angle X(\Omega)$ é o espectro de fase. A convergência da TFTD também é mais simples de ser verificada, bastando que o sinal em questão seja absolutamente somável.



Determine a TFTD do sinal pulso retangular apresentado na Figura 2.22.

Figura 2.22 | a) Sinal pulso retangular discreto no tempo e b) sua TFTD



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: o sinal em questão possui apenas cinco amostras com valores unitários. Aplicando a definição da TFTD (Equação 2.17) temos:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-2}^2 e^{-j\Omega n}$$

Esta série comporta-se como a progressão geométrica $\sum_{n=-a}^a r^n = \frac{r^{-a} - r^{a+1}}{1 - r}$,

de forma que $X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega(-2)} - e^{-j\Omega(2+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}$. Multiplicando o numerador e o denominador por $e^{j\Omega/2}$ temos:

$$X(\Omega) = \frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{1 - e^{-j\Omega}} \frac{e^{j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2}} \rightarrow X(\Omega) = \frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$

Usando a relação de Euler temos $X(\Omega) = \frac{\text{sen}(5\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)}$.

As propriedades da SFTD e da TFTD são relativamente parecidas àquelas de tempo contínuo e estão resumidas no Quadro 2.4. Vale aqui ressaltar que as propriedades de acumulação e de primeira diferença são os equivalentes no tempo discreto da integração e da diferenciação em tempo contínuo.

Quadro 2.4 | Propriedades da SFTD e da TFTD

Propriedade	Tempo discreto	Coefficientes da SFTD	TFTD
Linearidade	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$	$AX(\omega) + BY(\omega)$
Deslocamento no tempo	$x[n - n_0]$	$e^{-jk(2\pi/N)n_0} a_k$	$e^{-j\omega n_0} X(\omega)$
Reversão no tempo	$x[-n]$	a_{-k}	$X(-\omega)$

Mudança de escala	$\begin{cases} x[n/m], \text{ se } n \text{ é múltiplo de } m \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$	$\frac{a_m}{m}$ (Periódico com período mN)	$X(m\omega)$
Multiplicação	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=(N)} a_l b_{k-l}$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\theta)Y(\omega-\theta)d\theta$
Conjugado	$x^*[n]$	a_{-k}^*	$X^*(-\omega)$
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\left(\frac{1}{1-e^{-j\omega(2\pi/N)}}\right)a_k$	$\left(\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\right)X(\omega)$
Diferença	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega(2\pi/N)})a_k$	$(1-e^{-j\omega})X(\omega)$
Teorema de Parseval	$P_m = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] ^2$	$\sum_{k=(N)} a_k ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) ^2 d\omega$

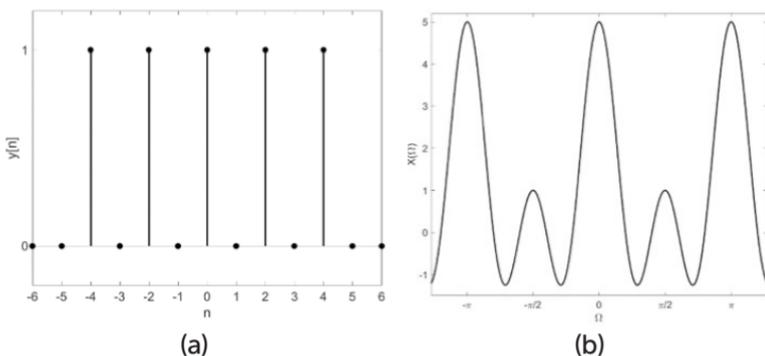
Fonte: adaptado de Oppenheim e Willsky (2010, p. 131 e 225).



Exemplificando

Vamos ilustrar a propriedade de mudança de escala com o sinal pulso retangular da Figura 2.22a dobrando a sua duração (Figura 2.23a). Qual é a TFTD deste novo sinal?

Figura 2.23 | a) Novo sinal pulso retangular discreto no tempo e b) sua TFTD



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: o sinal em questão possui apenas cinco amostras não nulas com valores unitários. A expansão no tempo inseriu alguns valores nulos que antes não estavam presentes no sinal. Aplicando a propriedade da mudança de escala, temos que a nova TFTD será $X(m\omega)$, em que $m = 2$, uma vez que o sinal agora tem o dobro da duração em relação ao original.

Sendo assim, $X(2\Omega) = \frac{\text{sen}(5\Omega)}{\text{sen}(\Omega)}$, cujo espectro de amplitude está apresentado na Figura 2.23b. Concluímos, portanto, que dobrar a duração do sinal no tempo discreto reduz o período do espectro de frequência pela metade.

A TFTD é muito utilizada para analisar sistemas discretos no tempo a partir de equações de diferenças, que são análogas às equações diferenciais em tempo contínuo. Conforme estudamos na Unidade 1, em nossa análise de SLITs encontraremos, principalmente, equações de diferenças com coeficientes constantes (Equação 2.19), em que os sinais de entrada e saída são $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.19)$$

A resposta em frequência $H(\Omega)$ de um sistema descrito de acordo com a Equação 2.19 pode ser obtida aplicando-se a TFTD em ambos os lados desta mesma equação para obter a relação entre os sinais de saída e entrada (Equação 2.20):

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (2.20)$$

Se conhecermos a TFTD da entrada e a resposta em frequência $H(\Omega)$ a saída será determinada pelo produto $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$. Para determinar o sinal de tempo discreto correspondente usaremos os pares de TFTD apresentados no Quadro 2.5.

Quadro 2.5 | Pares de TFTD

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2k\pi)$
1	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$
$e^{-j\Omega n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi)$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$ para $ a < 1$
$na^n u[n]$	$\frac{ae^{j\Omega}}{(e^{j\Omega} - a)^2}$ para $ a < 1$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2k\pi)$
$\text{sen}(\Omega_0 t)$	$j\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2k\pi) - \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi)$

Fonte: adaptado de Lathi (2010, p. 751).

Por exemplo, a resposta ao impulso de um SLIT de tempo discreto que se comporta de acordo com $y[n-2] - 5y[n-1] + 6y[n] = x[n]$ é obtida aplicando a TFTD em ambos os lados da equação que descreve o SLIT e aplicando a propriedade do deslocamento no tempo temos:

$$(e^{-j2\Omega n} - 5e^{-j\Omega n} + 6)Y(\Omega) = X(\Omega) \rightarrow \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{6 - 5e^{-j\Omega n} + e^{-j2\Omega n}}$$

A resposta em frequência deste sistema é $H(\Omega) = \frac{1}{6 - 5e^{-j\Omega n} + e^{-j2\Omega n}}$.

Para determinar a resposta ao impulso, é necessário fazer a multiplicação entre $H(\Omega)$ e $X(\Omega)$ além de calcular a transformada inversa do resultado.

No caso do impulso discreto, $X(\Omega) = 1$ e $Y(\Omega) = \frac{1}{6 - 5e^{-j\Omega n} + e^{-j2\Omega n}}$. Para

usar a tabela de pares de TFTD no cálculo da inversa, faz-se necessário expandir este resultado usando frações parciais:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{-3 + 1e^{-j\Omega n}} - \frac{1}{-2 + 1e^{-j\Omega n}} \rightarrow Y(\Omega) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega n}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega n}}$$

Por fim, usando os pares de TFTD do Quadro 2.5, temos que

$$y[n] = \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n].$$



Refleta

Você deve ter percebido com este último exemplo, no qual determinamos a resposta ao impulso de um SLIT de tempo discreto, que há certa semelhança com os cálculos que fizemos para determinar a resposta ao impulso de SLIT de tempo contínuo. Qual será a ligação entre esses métodos? Eles podem ser usados indistintamente para avaliar o comportamento de SLIT?

A TFTD pode ser calculada tanto analítica quando numericamente, sendo este último método bastante conveniente para aplicações diárias de equipamentos e sistemas eletrônicos. Teremos uma seção exclusivamente dedicada ao estudo de um algoritmo conhecido como FFT (*Fast-Fourier Transform*), uma das ferramentas mais importantes desta disciplina.



Para aprender mais sobre as aplicações da TFTC, estude as seções 3.6 a 3.11 e o capítulo 5 do livro *Sinais e sistemas*:

OPPENHEIM, Alan V.; WILLISKY, Alan S. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010.

Sem medo de errar

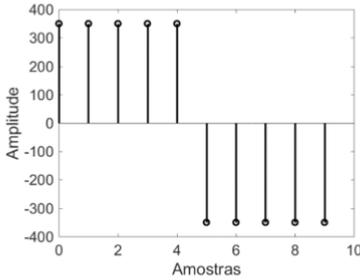
Retomando o nosso contexto, um fabricante de equipamentos odontológicos recentemente substituiu as chaves estrela-triângulo para acionamento dos seus motores de indução por inversores de frequência. Passado um período de testes, contudo, eles perceberam que esses motores têm apresentado sobreaquecimento. Você foi contratado para avaliar e descobrir a fonte deste problema e já identificou que a forma de onda de tensão fornecida pelos inversores de frequência produz harmônicas que, por sua vez, comportam-se como novas fontes de tensão no circuito. Você poderia usar apenas algumas amostras do sinal de tensão para avaliar esse problema?

O sinal de tensão fornecida pelo inversor foi amostrado com dez amostras por período (Figura 2.24a), portanto, temos $N_0 = 10$ amostras e $\Omega_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Os coeficientes da SFTD deste sinal são determinados a partir da equação de análise (Equação 2.16), como segue:

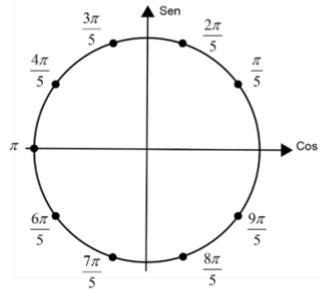
$$c_k = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 x[n]e^{-jk\frac{\pi}{5}n} = \frac{1}{10} \left\{ [0] + x[1]e^{-jk\frac{\pi}{5}1} + x[2]e^{-jk\frac{\pi}{5}2} + x[3]e^{-jk\frac{\pi}{5}3} + x[4]e^{-jk\frac{\pi}{5}4} - x[5]e^{-jk\frac{\pi}{5}5} - x[6]e^{-jk\frac{\pi}{5}6} - x[7]e^{-jk\frac{\pi}{5}7} - x[8]e^{-jk\frac{\pi}{5}8} - x[9]e^{-jk\frac{\pi}{5}9} \right\}$$

Simplificando a equação anterior e aplicando a relação de Euler ($e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \operatorname{sen}(\theta)$), temos que cada exponencial complexa ficará na forma $\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right) - j \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{5}\right)$. Avaliando os ângulos de cada exponencial pela Figura 2.24b, conseguimos avaliar quais parcelas terão os mesmos valores de seno e cosseno e encontraremos $c_k = -140j \left[\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(k\frac{2\pi}{5}\right) \right]$. O espectro de amplitude deste sinal é apresentado na Figura 2.24c.

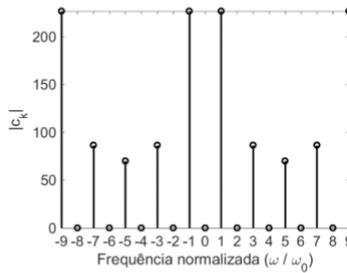
Figura 2.24 | a) Forma de onda de tensão amostrada, b) espectro de amplitude



(a)



(b)



(c)

Fonte: elaborada pelo autor.

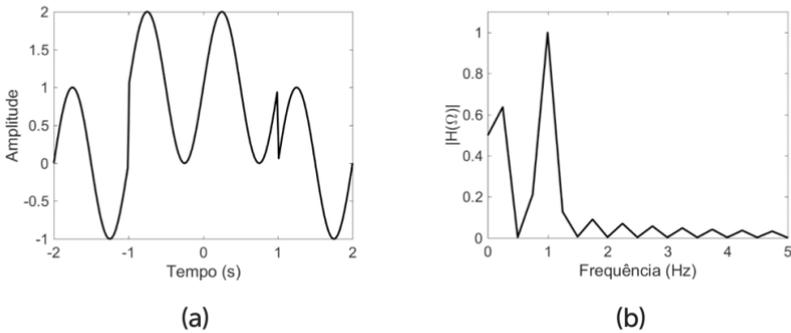
Avançando na prática

Identificação de ruído em sinal medido por microcontrolador

Descrição da situação-problema

Um sinal senoidal de 1 V de pico e frequência 1 Hz foi medido por pelo conversor analógico-digital de um microcontrolador. Este sinal, apresentado na Figura 2.25a, claramente está comprometido com ruídos e deve ser filtrado de forma a ser medido corretamente. Como podemos verificar quais frequências foram medidas? É possível melhorar essa medida com filtragem?

Figura 2.25 | a) Forma de onda de tensão lida pelo microcontrolador e b) seu espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

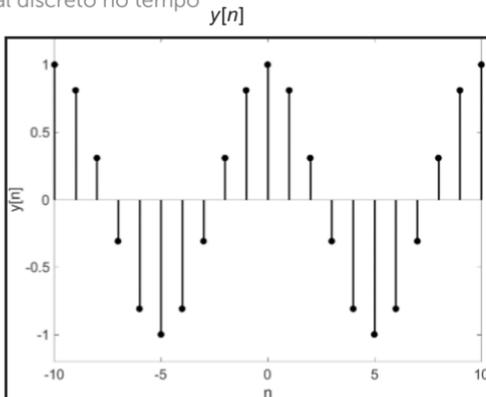
Aplicamos o cálculo da TFTD no sinal medido e plotamos o seu espectro de amplitude na Figura 2.25b. Assim percebemos claramente que a componente de 1 Hz está presente no sinal junto com outras componentes que devem ser filtradas, por exemplo, por um filtro passa-faixa com frequência central de 1 Hz.

Faça valer a pena

1. Uma diferença entre a SFTC e SFTD é que esta última não possui infinitos coeficientes de Fourier mas, na verdade, uma quantidade finita de termos que é exatamente igual ao número de amostras do sinal discretizado. Além disso, os coeficientes de Fourier são periódicos.

Determine os coeficientes de Fourier da SFTD do sinal $y[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)$.

Figura 2.26 | Sinal discreto no tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\text{a) } c_1 = \frac{1}{2} \text{ e } c_{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{d) } c_1 = \frac{j}{2} \text{ e } c_{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } c_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } c_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{e) } c_1 = \frac{1}{2} \text{ e } c_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } c_1 = \frac{1}{2j} \text{ e } c_{-1} = \frac{1}{2j}.$$

2. A TFTD é muito utilizada para analisar sistemas discretos no tempo a partir de equações de diferenças como coeficientes constantes, que são análogas às equações diferenciais em tempo contínuo. Com isso, determinamos a resposta em frequência $H(\Omega)$, que relaciona os sinais de saída e entrada do sistema.

Determine a resposta ao impulso de um SLIT de tempo discreto que se comporta de acordo com $-2y[n-1] + y[n] = x[n]$.

$$\text{a) } y[n] = 2^n u[-n].$$

$$\text{d) } y[n] = (-2)^{-n} u[n].$$

$$\text{b) } y[n] = 2^n u[n].$$

$$\text{e) } y[n] = (-2)^n u[-n].$$

$$\text{c) } y[n] = 2^{-n} u[n].$$

3. De maneira bastante similar ao caso de tempo contínuo, sinais discretos e periódicos no tempo podem ser representados por uma Série de Fourier de tempo discreto (SFTD), definida por $x[n] = \sum_{k=-N_0} c_k e^{jk\Omega_0 n}$ e $c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_0} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$,

conhecidas como equações de síntese e análise, respectivamente. A SFTD não possui infinitos coeficientes de Fourier mas, na verdade, uma quantidade finita de termos que é exatamente igual ao número de amostras do sinal discretizado, normalmente variando k de 0 até $N_0 - 1$.

Considere uma sequência periódica de tempo discreto cujo período principal é $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$. Determine o sinal de tempo discreto que produz esta sequência.

$$\text{a) } x[n] = 0,583 - 0,416 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + 0,144 \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right).$$

$$\text{b) } x[n] = -0,583 + 0,416 \cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) + 0,144 \sin\left(\frac{4\pi}{3}n\right).$$

$$\text{c) } x[n] = -0,583 - 0,416 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - 0,144 \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right).$$

$$\text{d) } x[n] = 0,583 - 0,416 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - 0,144 \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right).$$

$$\text{e) } x[n] = 0,583 + 0,416 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + 0,144 \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right).$$

Referências

HART, D. W. **Eletrônica de potência**: análise e projetos de circuitos. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2011.

HSU, H. P. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção Schaum).

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. V. **sistemas lineares**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010.

ROBERTS, M. J. **Fundamentos de sinais e sistemas**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2010.

Princípios de filtragem analógica e digital

Convite ao estudo

Caro aluno, seja bem-vindo à terceira unidade desta disciplina. Aqui nós conheceremos algumas ferramentas de filtragem de sinais e suas formas de implementação. Os filtros podem ser entendidos como sistemas seletores de frequência, isto é, são usados com o objetivo de alterar as componentes de frequência de um sinal e revelar informações que de outra forma ficariam mascaradas e/ou de difícil interpretação. Imaginem, por exemplo, que você esteja numa estação de metrô e tenta conversar com um amigo seu. Você certamente perceberá uma dificuldade maior em conversar nessa situação do que se vocês estivessem em um ambiente tranquilo e mais silencioso. Numa perspectiva de análise de sinais, a estação insere ruídos que dificultam o envio/entendimento da informação da sua voz e devem, portanto, serem filtrados.

Começaremos estudando os filtros analógicos na primeira seção. Estes filtros são classificados como passivos quando são construídos apenas com componentes passivos (resistores, indutores e capacitores). Caso o filtro seja criado usando algum componente ativo, como amplificadores operacionais, ele será classificado como filtro ativo. Estes filtros podem ser criados fisicamente e são muito importantes em circuitos condicionadores de sinais, de aquisição de dados e etc.

Na segunda seção nós estudaremos a Transformada Z, mais uma ferramenta matemática para o nosso arsenal, com o objetivo de projetar filtros digitais, assunto da nossa terceira seção. Os filtros digitais, como o próprio nome sugere, é criado digitalmente e usado para tratamento de sinais após estes serem amostrados.

Nesta unidade você tomará o lugar de um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe trabalham para desenvolver um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somados a ele. Qual filtro é mais indicado para remover estes ruídos? Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Seção 3.1

Filtros analógicos

Diálogo aberto

No momento em que passamos a trabalhar e analisar sinais reais, nós estamos sujeitos às não-idealidades inerentes dos equipamentos, componentes e, inclusive, ambientes. Um problema recorrente, e que certamente você encontrará em sua vida profissional, é a inserção de ruídos em sistemas, que pode comprometer, por exemplo, leituras de sensores e/ou perdas de informações vitais para processos industriais. A filtragem entra aqui com um papel fundamental e merece nossa atenção para que possamos usá-la adequadamente para processar sinais.

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares. Atualmente, você e sua equipe trabalham para desenvolver um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal em um osciloscópio, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somados a ele e que dificultava a leitura e a identificação de padrões esperados. Qual filtro é mais indicado para remover estes ruídos?

Bons estudos!

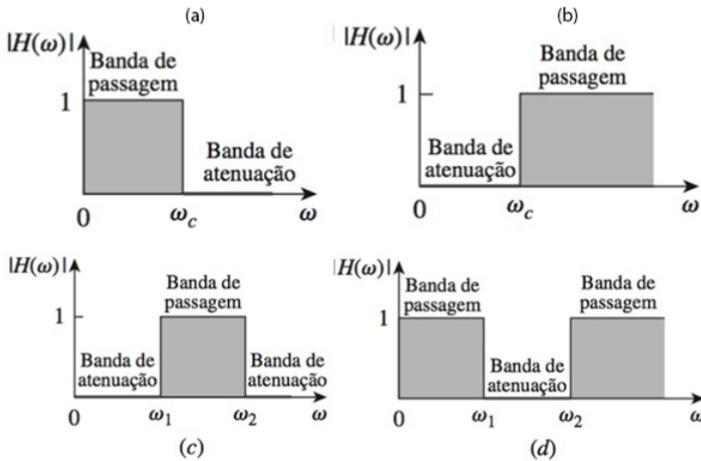
Não pode faltar

Nossos estudos em filtros começarão pelos tipos analógicos, que podem ser classificados em ativos e passivos. No primeiro caso, apenas componentes passivos (resistores, indutores e capacitores) são usados para construir o filtro. Já no caso dos filtros ativos, usaremos componentes ativos, como amplificadores operacionais, para projetar e construí-los.

As respostas ideais de filtros são classificadas como segue: passa-baixas, passa-altas, passa-faixas, rejeita-faixas, apresentadas em sequência na Figura 3.1. Um filtro passa-baixas ideal, por exemplo, atenua todas as componentes acima de uma determinada frequência de corte (ω_c) e mantém as amplitudes das frequências

inferiores a esta. Já um filtro passa-altas faz exatamente o oposto, permitindo que componentes de frequência superiores a ω_c não sofram atenuação alguma em detrimento das componentes inferiores a esta. A banda de passagem é composta por todas as frequências que não sofreram atenuação. Já a banda de atenuação (corte/rejeição), como o próprio nome sugere, contém todas as frequências que foram atenuadas.

Figura 3.1 | Respostas ideais de filtros a) passa-baixas, b) passa-altas, c) passa-faixas e d) rejeita-faixas



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013, p. 569).

No caso dos filtros passa-faixa (Figura 3.1c) há duas frequências de corte que precisamos conhecer, a inferior e a superior. Este filtro pode ser construído a partir de uma combinação entre um filtro passa-baixas e um passa-altas. No caso ideal, apenas as componentes de frequência fora da largura de banda (*bandwidth*), definida como $BW = \omega_2 - \omega_1$, são totalmente atenuadas. Ainda há outras duas métricas importantes para filtros passa-faixa, que são a frequência central (ω_0) e o fator de qualidade (Q), definidas respectivamente pelas Equações 3.1 e 3.2.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (3.1)$$

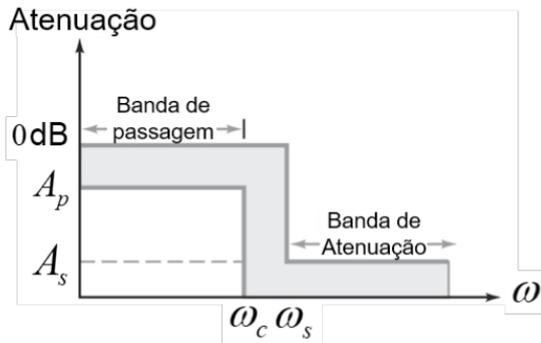
$$Q = \frac{\omega_0}{BW} \quad (3.2)$$

Os filtros passa-faixa são muito utilizados em circuitos de rádio AM/FM. O comportamento do filtro rejeita-faixa (Figura 3.1d) é exatamente oposto, permitindo a passagem apenas das componentes que estão fora desta região. Há ainda o filtro passatudo, o qual não altera a amplitude de nenhuma componente de frequência, mas apenas deslocamento na fase.

As respostas ideais de filtros são importantes para que tenhamos conhecimento das particularidades de cada tipo básico, mas não são fisicamente realizáveis. Precisamos conhecer, portanto, as respostas aproximadas e os parâmetros de projeto de filtros. Todos os conceitos que abordaremos agora serão exemplificados com filtros passa-baixas mas podem ser estendidos para os demais.

O comportamento real de um filtro passa-baixas está apresentado na Figura 3.2. A banda de passagem contém as frequências entre zero e ω_c , a banda de transição contém as frequências entre ω_c e ω_s e, por fim, a banda de corte contém as frequências acima de ω_s (MALVINO; BATES, 2016). Vale ressaltar, novamente, que as frequências dos filtros podem ser especificadas tanto em Hz quando em **rad/s**.

Figura 3.2 | Resposta real de filtros passa-baixas



Fonte: Malvino; Bates (2016).

A taxa de decaimento de um filtro mostra o quão rápido as frequências da banda de corte são atenuadas. Ademais, a atenuação do filtro é a relação entre a tensão de saída e a tensão de saída na banda média (Equação 3.1) que pode ser calculada em V/V (no caso de um sinal de tensão) ou em dB. Com essas equações nós determinamos as atenuações das bandas de passagem A_p e de corte

A_s adequadas à nossa aplicação. Podemos entender a atenuação, também, como um ganho negativo.

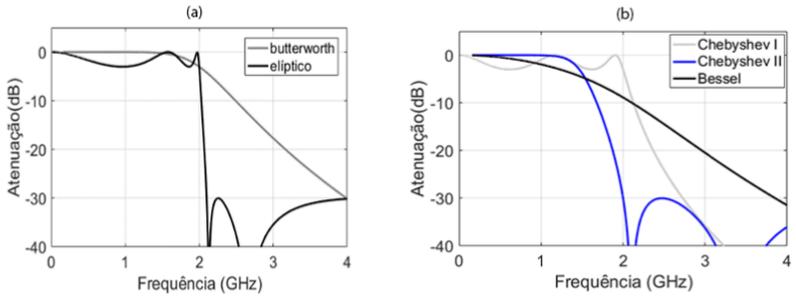
$$\text{Atenuação} = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{out}(\text{med})}} \quad (3.3)$$

A ordem de um filtro (n) passivo é a quantidade de capacitores e indutores que fazem parte do circuito. Para os filtros ativos, a ordem pode ser determinada pela quantidade de circuitos RC (polos) ou aproximadamente pelo o número de capacitores no circuito (MALVINO; BATES, 2016).

Vamos conhecer agora as principais aproximações de filtros reais, começando pela aproximação (ou resposta) **Butterworth** que possui uma resposta plana na sua banda de passagem e decaimento $20n$ dB/década(ou $6n$ dB/oitava). Se aumentarmos a ordem do filtro aumentaremos, também, a sua taxa de decaimento. Apesar da resposta plana da banda de passagem ser bastante interessante, a taxa de decaimento dos filtros Butterworth não é aguda. Para termos uma separação entre as bandas de corte e de passagem mais estreita, é necessário aumentar a taxa de decaimento do filtro pelo aumento de sua ordem.

A resposta **Chebyshev** possui duas variações sendo a primeira delas (tipo I) com ondulações (*ripple*) na banda de passagem e a segunda (Chebyshev inversa ou tipo II) com ondulações na banda de corte. Em ambos os casos, o decaimento é mais agudo do que visto na resposta Butterworth. Os filtros de Cauer (ou **elípticos**) apresentam um decaimento ainda mais rápido do que os filtros de Chebyshev, mas possuem *ripple* tanto na banda de passagem quanto na banda de rejeição. Por fim, a aproximação **Bessel** possui uma resposta plana da banda de passagem e decaimento mais lento que o filtro de Butterworth. Em compensação, a aproximação Bessel provê um deslocamento linear de fase, que não ocorre nos demais, e é importante para não causar distorções no sinal de saída em relação à entrada (MALVINO; BATES, 2015).

Figura 3.3 | Filtro passa-baixa pelas aproximações de a) Butterworth e Elíptica e b) Chebyshev tipo I, Chebyshev tipo II e Bessel

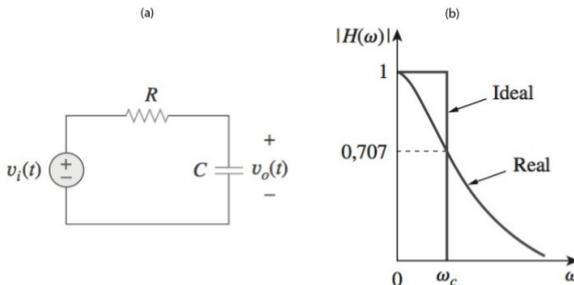


Fonte: adaptada de Mathworks. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/butter.html>. Acesso em: 20 nov. 2017.

Agora que conhecemos as respostas aproximadas dos filtros, podemos avançar e conhecer alguns circuitos usados para implementá-los. Um circuito RC (Figura 3.4a) é o caso mais simples de um filtro passa-baixa passivo. Para isso, os sinais de entrada e saída são a fonte de tensão e a tensão no capacitor, respectivamente, o que resulta na resposta em frequência ($H(\omega)$) da Equação 3.2. O espectro de amplitude deste sistema é apresentado na Figura 3.4b, com um destaque para a frequência de corte, na qual o módulo é reduzido para 70,7% do seu valor máximo (**3dB** de atenuação). Se considerarmos $|H(\omega)| = 0,707$ e resolvermos a equação para a frequência angular, veremos que $\omega_c = 1/RC$.

$$H(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{V_o(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3.4)$$

Figura 3.4 | a) Filtro passa-baixas implementado com circuito RC. b) Espectro de amplitude



Fonte: Alexander; Sadiku (2013).

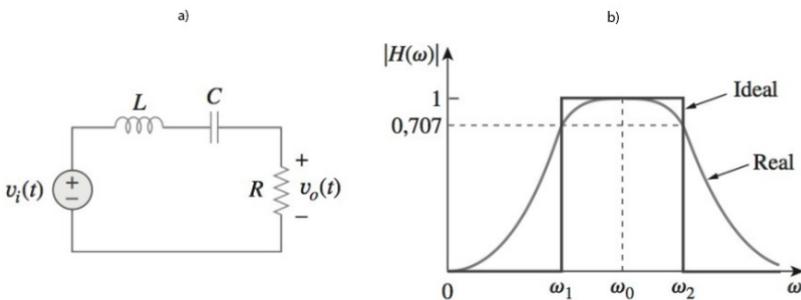


A frequência de corte de um filtro é aquela em que o módulo de $H(\omega)$ sofre atenuação de 3 dB (aproximadamente 70 % da saída). Ademais, se considerarmos o sinal de saída do circuito RC como a tensão na resistência, este sistema passará a ser um filtro passa-altas com a mesma frequência de corte $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Um circuito RLC (Figura 3.5a) considerando a tensão na resistência como sinal de saída é a configuração mais simples para um filtro passa-faixas. O seu espectro de amplitude (Figura 3.5b) indica que nas duas frequências de corte haverá a atenuação para 70,7 % do valor máximo, da mesma forma que acontece no passa-baixas. Neste caso, a resposta em frequência do filtro é dada pela Equação 3.3 e as frequências de corte podem ser determinadas considerando este circuito como uma associação em cascata de um filtro passa-baixas com um passa-altas.

$$H(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{V_o(\omega)} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (3.5)$$

Figura 3.5 | a) Filtro passa-faixas implementado com circuito RLC. b) Espectro de amplitude



Fonte: Alexander, Sadiku (2013).

Circuitos elétricos com configurações diferentes das apresentadas aqui podem ser usados para projetar filtros. É necessário determinar a relação entre sinais de saída e de entrada usando a Transformada de Fourier ($H(\omega)$). Para conhecer o tipo do tipo de filtro é necessário

verificar o comportamento do $|H(\omega)|$ para $\omega = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$. A frequência de corte é determinada quando $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$.



Exemplificando

Determine as frequências de corte e a frequência central do filtro passa-faixas da Figura 3.5a quando $R = 50 \Omega$, $L = 1\text{mH}$ e $C = 1\mu\text{F}$.

Solução: sabemos que a resposta em frequência deste filtro é dada pela Equação 3.5. Para determinar as frequências de corte, precisamos fazer $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$, como segue:

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \rightarrow 1 - \omega^2 LC = \pm \omega RC$$

Resolvendo cada uma das equações anteriores, e substituindo os valores dos componentes, determinamos que as frequências de corte inferior e superior são:

$$\omega_1 = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\rightarrow \omega_1 \approx 15311\text{rad/s e } \omega_1 \approx -65311\text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \rightarrow \omega_2 \approx -15311\text{rad/s e}$$

$$\omega_2 \approx 65311\text{rad/s}$$

Como as frequências negativas não possuem significado físico, temos que $\omega_1 \approx 15311\text{rad/s}$ e $\omega_2 \approx 65311\text{rad/s}$.

A frequência central do filtro passa-faixa é determinada fazendo

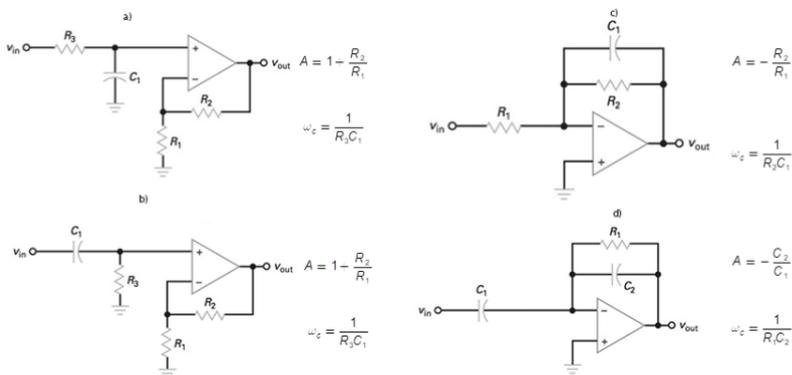
$|H(\omega)| = 1$, o que resulta neste caso para

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 10^{-6}}}$$

→ $\omega_0 \approx 31623\text{rad/s}$. OBS: A frequência central também poderia ter sido determinada por $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Vamos passar nossa atenção agora para os filtros ativos. Dentre as vantagens destes em relação aos filtros passivos citamos a possibilidade de dar ganho ao sinal, não utilizam indutores, de forma a serem menores e mais baratos (ALEXANDER; SADIKU, 2013). A Figura 3.6 mostra as configurações mais simples possíveis para filtros passa-baixa e passa-alta de primeira ordem com suas respectivas equações para cálculo do ganho (A) e da frequência de corte.

Figura 3.6 | Filtros ativos de primeira ordem passa-baixas com amplificador a) não-inversor e b) inversor e passa-altas com amplificador c) não-inversor e d) inversor



Fonte: Malvion; Bates (2016).

Uma forma de construir um filtro passa-faixas é a partir de uma associação em cascata de um filtro passa-baixas com um passa-altas.



Exemplificando

Projete um filtro passa-baixas com frequência de corte **10kHz** e um filtro passa-altas com frequência de corte **100kHz**. Ambos os filtros deverão ter ganho 10 nas suas respectivas bandas de passagem.

Solução: vamos começar avaliando o filtro passa-baixas. Podemos escolher qualquer uma das configurações apresentadas na Figura 3.6. Considerando o caso com amplificador inversor, sabemos que $R_2/R_1 = 10$. Assumindo $R_1 = 1k\Omega$, temos que $R_2 = 10k\Omega$. Assim, calculamos o capacitor a partir da frequência de corte:

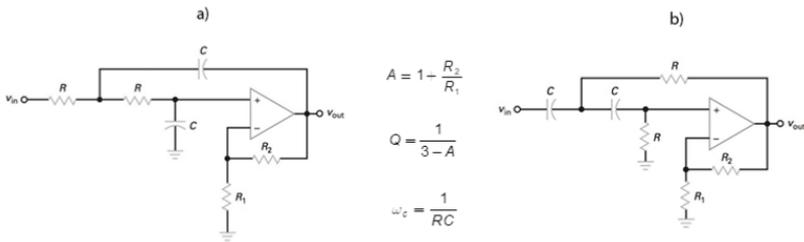
$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{R_2 C_1} \quad \rightarrow C_1 = \frac{1}{R_2 2\pi f_c}$$
$$\rightarrow C_1 = \frac{1}{10000 \cdot 2\pi \cdot 10000} \rightarrow C_1 = 1,59nF$$

Vamos usar o amplificador inversor para o filtro passa-altas também, e manter as capacitâncias C_1 . Pela equação do ganho, temos que $C_2 = 10C_1 \rightarrow C_2 = 15,9nF$. Determinaremos o resistor R_1 a partir da frequência de corte:

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{R_1 C_2} \quad \rightarrow R_1 = \frac{1}{2\pi f_c C_2}$$
$$\rightarrow R_1 = \frac{1}{2\pi (100000) (15,9 \cdot 10^{-9})}$$
$$\rightarrow R_1 \approx 100\Omega$$

A configuração Sallen-Key é usada para implementar filtros ativos de segunda ordem. A Figura 3.7 apresenta um filtro passa-baixas e passa-altas na configuração Sallen-Key de componentes iguais e suas equações de projeto.

Figura 3.7 | Configuração Sallen-Key de componentes iguais para filtro a) passa-baixas e b) passa-altas



Fonte: Malvino; Bates (2016).



Refleta

A frequência de corte dos filtros depende dos valores dos componentes que usamos no circuito, que possuem uma tolerância associada. Por exemplo, um resistor comercial de **1k Ω** com tolerância de 5% pode apresentar qualquer valor de resistência entre **950 Ω** e **1050 Ω**. Até que ponto isso interfere no funcionamento do filtro?



Pesquise mais

Para aprender mais sobre projeto e construção física de filtros estude o Capítulo 19 do livro *Eletrônica*, de Malvino e Bates (2016), que você poderá encontrar na Biblioteca Virtual, disponível em: <https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>. Acesso em: 17 nov. 2018.

MALVINO, A.; BATES, D. J. **Eletrônica**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2016. v. 2.

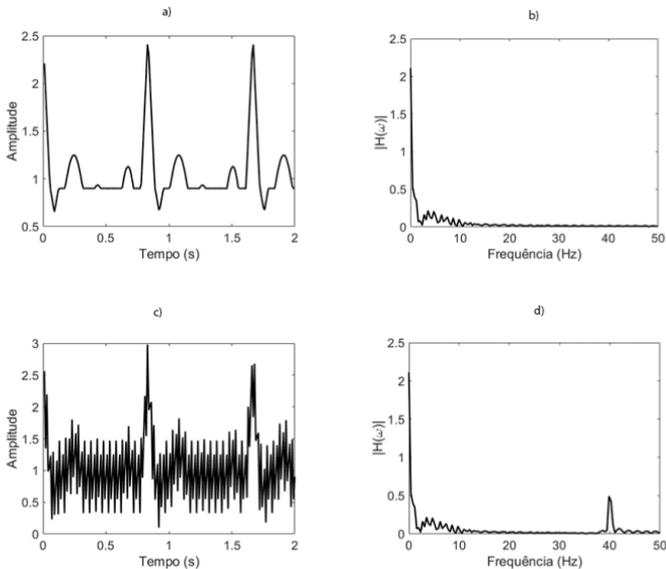
Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe trabalham para desenvolver um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos.

Ao avaliar este sinal, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos originados da fonte chaveada do equipamento somadas ao sinal. Qual filtro é mais indicado para remover estes ruídos?

Um sinal padrão de ECG está apresentado juntamente com seu espectro de frequência nas Figuras 3.8a e 3.8b, respectivamente. O sinal que sua equipe mediu e o seu espectro de frequência estão apresentados nas Figura 3.8c e 3.8d, respectivamente. É possível notar pela análise dessas últimas duas figuras que uma componente de 40 Hz está comprometendo a leitura do sinal de ECG, deixando-o praticamente irreconhecível. Para remover esta componente, é necessário implementar um filtro passa-baixas ou rejeita-faixas (filtro *notch*).

Figura 3.8 | Configuração Sallen-Key de componentes iguais para filtro a) passa-baixas e b) passa-altas



Fonte: elaborada pelo autor.

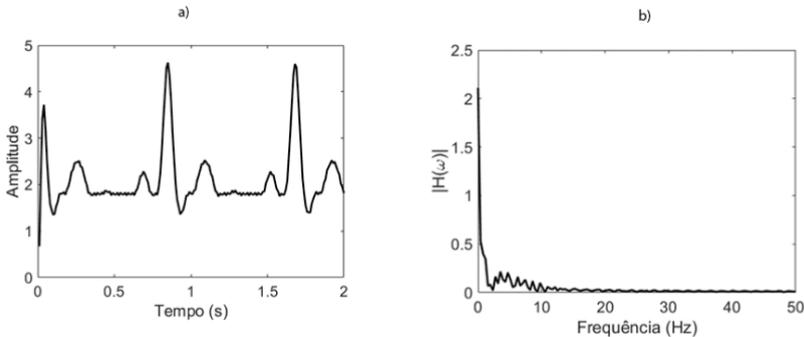
Você projetou um filtro passa-baixa de segunda ordem com frequência de corte de 15 Hz para remover o ruído de 40 Hz. Você implementa um circuito a configuração Sallen-Key de componentes iguais com $R_1 = R_2$ para produzir ganho $A = 2$ e fator de qualidade $Q = 1$. Definimos os valores de R e C a partir da frequência de corte de 15 Hz (ou aproximadamente 94,25 rad/s) e de uma estimativa

para um dos componentes. Supondo que usaremos $C = 1\mu\text{F}$, o resistor deverá ser

$$R = \frac{1}{\omega_c C} \rightarrow R = \frac{1}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-6}} \rightarrow R \approx 10,6\text{k}\Omega.$$

O sinal filtrado e seu espectro de frequência estão nas Figuras 3.9a e 3.9b, respectivamente. Note que pelo espectro de frequência fica claro que a componente de ruído foi removida do sinal. Ainda é possível notar um pouco de ruído no sinal do ECG, mas em quantidade bastante inferior ao caso original.

Figura 3.9 | Sinal de ECG a) filtrado com passa-baixas e b) seu espectro de amplitude.



Fonte: elaborada pelo autor.

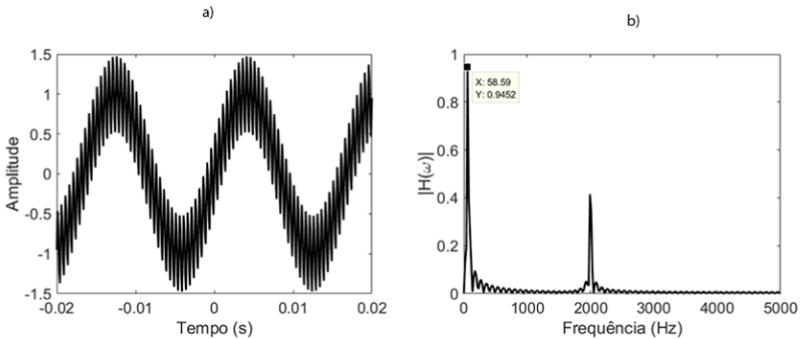
É importante destacar aqui que outras configurações de filtros poderiam ser usadas neste problema como, a Chebyshev tipo II. Esta configuração é mais indicada que a Chebyshev tipo I pois possui resposta plana na banda de passagem, de forma a não distorcer essas componentes, além de uma banda de transição mais aguda que a resposta de Butterworth. Esta, por sua vez, necessita de maior precisão no posicionamento e escolha da frequência de corte exatamente por não possuir característica tão aguda entre as bandas de passagem e de atenuação.

Rejeição de ruído de baixa frequência

Descrição da situação-problema

Você está trabalhando em um laboratório didático e quer gerar um sinal senoidal de 2 kHz de frequência com um circuito eletrônico. Ao medir este sinal no osciloscópio, entretanto, você verificou que há uma grande quantidade de ruído de baixa frequência sobreposto ao seu sinal de interesse (Figura 3.10a). Qual filtro deve ser implementado para remover este ruído?

Figura 3.10 | a) Sinal medido em laboratório e b) espectro de amplitude

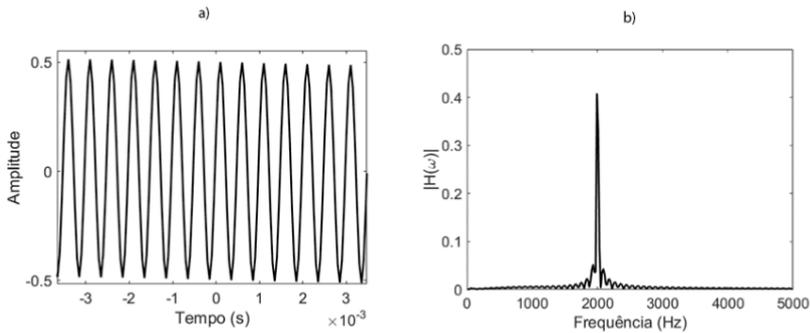


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

O espectro de amplitude deste sinal revela que o ruído presente é de aproximadamente 60 Hz, conforme Figura 3.10b, isto é, com frequência menor que aquela de interesse. Devemos projetar um filtro passa-altas com frequência de corte entre 60 Hz e 2000 Hz. Após realizar alguns testes, você verificou que um filtro de Butterworth de segunda ordem com $f_c = 1 \text{ kHz}$ é o suficiente para as suas necessidades. As Figuras 3.11a e 3.11b mostram o sinal filtrado e o espectro de amplitude, confirmando que o ruído foi eliminado do sinal.

Figura 3.11 | a) Sinal filtrado e b) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Um circuito RC é o caso mais simples de um filtro passa-baixa passivo. Para isso, os sinais de entrada e saída são a fonte de tensão e a tensão no capacitor, respectivamente, o que resulta na resposta em frequência ($H(\omega)$). Os componentes podem ser determinados a partir da frequência de corte escolhida para o projeto.

Faça um projeto de um filtro passivo, com a menor ordem possível, para atenuar as componentes de frequência acima de 10^4 rad/s em pelo menos 40 dB. Assinale a alternativa que apresenta a frequência de corte adequada e os valores dos componentes do circuito.

- a) $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$ e $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$.
- b) $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$ e $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$.
- c) $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$ e $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$.
- d) $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$ e $\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$.
- e) $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$ e $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$.

2. Filtros ativos utilizam amplificadores operacionais, resistores e capacitores. Dentre as vantagens destes em relação aos filtros passivos citamos a possibilidade de dar ganho ao sinal, serem menores e mais baratos (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Determine o ganho, o fator de qualidade e a frequência de corte de um filtro passa-altas Sallen-key com $R = 1\text{k}\Omega, R_1 = 1\text{k}\Omega, R_2 = 1\text{k}\Omega, C = 1\mu\text{F}$.

a) $A = \frac{1\text{ V}}{2\text{ V}}, Q = 0,4$ e $\omega_c = 10^3 \text{ rad/s}$.

b) $A = 2\frac{\text{V}}{\text{V}}, Q = 1$ e $\omega_c = 10^3 \text{ rad/s}$.

c) $A = 2\frac{\text{V}}{\text{V}}, Q = 0,4$ e $\omega_c = 10^{-3} \text{ rad/s}$.

d) $A = \frac{1\text{ V}}{2\text{ V}}, Q = 1$ e $\omega_c = 10^3 \text{ Hz}$.

e) $A = 2\frac{\text{V}}{\text{V}}, Q = 0,4$ e $\omega_c = 10^3 \text{ Hz}$.

3. A aproximação ou resposta **Butterworth** possui uma resposta plana na sua banda de passagem e decaimento $20n$ dB/década (ou $6n$ dB/oitava). Dependendo da aplicação, essa taxa de decaimento pode não ser suficientemente aguda de forma a não atenuar totalmente as componentes não desejadas. Se aumentarmos a ordem do filtro, entretanto, aumentaremos a sua taxa de decaimento e teremos uma banda de transição mais estreita. Um filtro passa-baixas (Butterworth) de quinta ordem e frequência de corte 4 kHz é usado um sistema de medição de vibrações. Qual será a atenuação em dB das componentes de 4 kHz, 8 kHz, 40 kHz e 400 kHz? Assinale a alternativa que apresenta as atenuações na ordem apresentada no enunciado.

- a) 30 dB, 3 dB, 100 dB e 200 dB.
- b) 3 dB, 30 dB, 300 dB e 600 dB.
- c) 3 dB, 300 dB, 1000 dB e 2000 dB.
- d) 3 dB, 30 dB, 60 dB e 90 dB.
- e) 3 dB, 30 dB, 100 dB e 200 dB.

Seção 3.2

Transformada Z

Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção continuaremos nossos estudos de análise e processamento de sinais para conhecer mais uma ferramenta matemática, a Transformada z. Este conhecimento é necessário para analisar sinais e sistemas discretos no tempo por meio de equações de diferenças e implementar filtros digitais.

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal pelo osciloscópio, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somadas ao sinal e propôs um filtro para removê-los. Seria possível fazer este filtro via software, isto é, um filtro digital ao invés de um analógico? Quais ferramentas você precisa dominar para fazer isso?

Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

A Transformada z (TZ) é o equivalente de tempo discreto da Transformada de Laplace e é definida para sequências de tempo discreto $x[n]$ de acordo com a Equação 3.6, onde z é uma variável complexa e \mathcal{Z} é o operador que indica a transformação.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (3.6)$$

A definição apresentada na Equação 3.6 é conhecida como **Transformada z bilateral**, uma vez que o somatório é de $n = -\infty$ até

$n = \infty$. Há ainda a **Transformada z unilateral**, na qual o somatório é realizado a partir de $n = 0$ até $n = \infty$ e será útil na análise de sinais e sistemas causais (NALON, 2014). Se considerarmos a variável complexa $z = e^{j\Omega}$ na Equação 3.6 teremos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$, que é

a definição da Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) que estudamos anteriormente. Assim, a TZ é uma generalização da TFTD e o número complexo $z = e^{j\Omega}$ define uma circunferência de raio unitário que será fundamental para avaliarmos a convergência da TZ. Uma vez que a TZ é uma série de potência (particularmente de Laurent), ela precisa estar associada à uma faixa de valores de z para os quais a $X(z)$ converge, conhecida como **Região de Convergência** (RDC). Ademais, é possível que sequências diferentes possuam as mesmas expressões algébricas, mas com RDC diferentes, conforme veremos no exemplo a seguir (OPPENHEIM, WILLSKY; 2010).

É bastante comum representar a TZ como uma função racional entre dois polinômios em z , conhecida como função de transferência:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (3.7)$$

As raízes do numerador e do denominador são conhecidas como zeros e polos da função sistema e são representadas graficamente na RDC como um círculo e uma cruz, respectivamente.



Exemplificando

Determine a TZ das sequências $x[n] = a^n u[n]$ e

$y[n] = -a^n u[-n - 1]$, apresentadas nas Figuras 3.11a e 3.11b,

respectivamente, além das RDC correspondentes.

Solução: aplicando a Equação 3.6, temos que a TZ da primeira

sequência de tempo discreto é $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$. Este somatório é uma progressão geométrica da forma:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} \text{ se } |x| < 1, \text{ portanto,}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ para } |az^{-1}| < 1 \text{ ou então } X(z) = \frac{z}{z-a} \text{ para}$$

$|z| > |a|$. Esta RDC está apresentada na Figura 3.12a. No caso particular em que $a = 1$, a sequência se tornará o impulso unitário discreto e a

$$\text{sua TZ será } X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \text{ para } |z| > |1|$$

Seguindo a mesma lógica, a TZ da segunda sequência é

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^1 a^n z^{-n}.$$

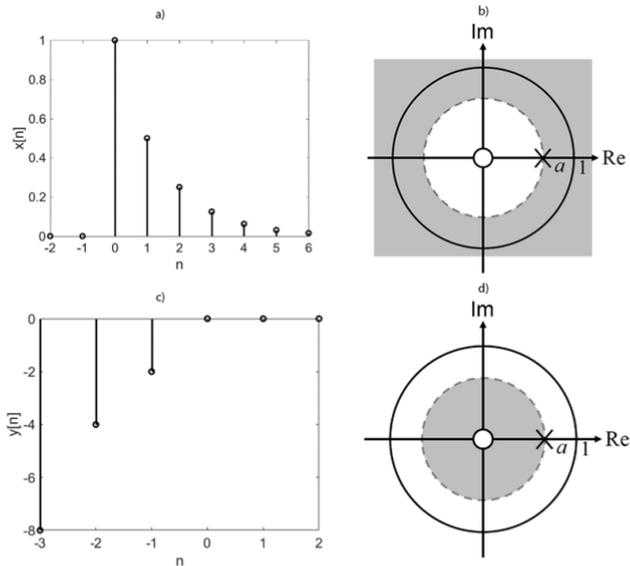
Podemos fazer este somatório igual ao anterior se invertermos os sinais dos expoentes:

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} \text{ para}$$

$|z| < |a|$. Perceba que as TZ de ambas as sequências possuem expressões algébricas idênticas, mas RDC completamente diferentes (Figura 3.12b e d). Ademais, as TZ possuem um zero em

$z = 0$ e um polo em $z = a$.

Figura 3.12 | Sequência a) $x[n]$ e b) RDC de $X(z)$. Sequência a) $y[n]$ e b) RDC de $Y(z)$



Fonte: elaborada pelo autor.

As propriedades da TZ são importantes para analisarmos sistemas de tempo discreto e estão resumidas no Quadro 3.1, que considera que as funções $x[n]$ e $y[n]$ possuem RDC como uma circunferência de raio maior que R_1 e R_2 , respectivamente.

Quadro 3.1 | Propriedades da SFTD e da TFTD

Propriedade	Tempo discreto	TFTD	RDC
Linearidade	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
Deslocamento no tempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_1 , exceto pela possível adição ou exclusão da origem

Reversão no tempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R_1 invertido
Mudança de escala	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0} z)$	R_1
Convolução	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
Conjugado	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_1
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) X(z)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$ e $ z > 0$
Primeira diferença	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$ e $ z > 1$

Fonte: adaptado de Oppenheim; Willsky (2010, p. 461).

A integral da TZ inversa é realizada em um caminho circular fechado no sentido anti-horário centrado na origem e com raio r .

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz \quad (3.8)$$

Esta integral é apenas uma das formas que temos para determinar a TZ inversa e, da mesma forma que fizemos durante a análise de Fourier (Capítulo 2), faremos uso de uma tabela de pares de transformadas (Quadro 3.2). A expansão em frações parciais para obtenção de parcelas da TZ tabeladas é normalmente realizada com $X(z)/z$ ao invés da própria $X(z)$. Uma terceira forma é escrever a TZ na forma de série de potências de z^{-n} e comparar o resultado com a definição da TZ (LATHI, 2008).

Quadro 3.2 | Pares de TZ

$x[n]$	$X(z)$ e RDC
$\delta[n-k]$	z^{-k} , todo z , exceto 0 se $k > 0$ ou ∞ se $k < 0$
$u[n]$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, $ z > 1$

$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, z < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, z > a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ para $ z < a $
$\cos[\Omega_0 t]u[n]$	$\frac{1 - \cos[\Omega_0]z^{-1}}{1 - 2\cos[\Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}, z > 1$
$\text{sen}[\Omega_0 t]u[n]$	$\frac{\text{sen}[\Omega_0]z^{-1}}{1 - 2\cos[\Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}, z > 1$

Fonte: adaptado de Oppenheim; Willsky (2010, p. 462).



Exemplificando

Determine a TZ inversa de $X(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$.

Solução: esta TZ possui dois polos ($z = 2$ e $z = 3$). Podemos reescrever e fazer a expansão em frações parciais:

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

$$\rightarrow X(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

Só conseguiremos algum par

de transformada no Quadro 3.2 se dividirmos ambos os lados de $X(z)$ e rearranjarmos o resultado:

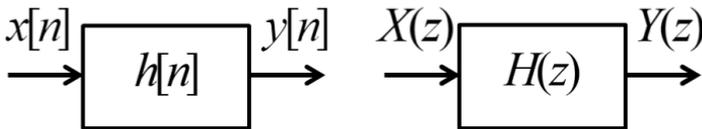
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} \left[-\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} \right]$$

$$\rightarrow X(z) = z^{-1} \left[-\frac{z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)} \right]. \text{ Combinando}$$

este resultado com o quarto par de TZ do Quadro 3.2 e a propriedade no tempo, temos $x[n] = (-(2)^n + 3^n)u[n-1]$.

Sistemas de tempo discreto podem ser analisados usando-se a TZ de uma forma bastante similar às Transformadas de Laplace e de Fourier. Consideramos, para isso, que o sistema possua resposta ao impulso $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$, e os sinais de entrada e saída sejam $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente, como indicado no diagrama de blocos da Figura 3.13a. A partir da propriedade de convolução, a saída no domínio z deste sistema é calculada como $Y(z) = X(z)H(z)$, a partir da qual determinamos a saída no tempo discreto aplicando a TZ inversa, como ilustrado na Figura 3.13b. A relação entre as TZ dos sinais de saída e entrada é chamada de função de transferência ou função sistema.

Figura 3.13 | a) Sistema de tempo discreto e b) Sistema com TZ



Fonte: elaborada pelo autor.

Além da função de transferência, podemos usar a TZ para converter equações de diferenças em equações algébricas, cujas soluções são mais simples.



Exemplificando

Um sistema linear de tempo discreto é descrito por

$$y[n] - \frac{7}{10}y[n-1] + \frac{1}{10}y[n-2] = x[n].$$

em que os sinais de entrada e saída são $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente. Determine a função de transferência que descreve este sistema e a sua resposta ao impulso.

Solução: este sistema é descrito por uma equação de diferenças de coeficientes constantes. Devemos aplicar a TZ em ambos os lados da equação e encontrarmos a relação $Y(z)/X(z)$ como segue:

$$\left(1 - \frac{7}{10}z^{-1} + \frac{1}{10}z^{-2}\right)Y(z) = X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{10}z^{-1} + \frac{1}{10}z^{-2}\right)}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)}$$

Para encontrar a resposta ao impulso é necessário multiplicar $H(z)$ pela TZ da função impulso discreto ($X(z) = \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$) e fazer a TZ inversa do resultado. Fazendo a expansão em frações parciais, temos:

$$Y(z) = H(z) = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} = \frac{5/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} - \frac{2/3}{\left(z - \frac{1}{5}\right)}$$

Portanto,
$$Y(z) = \frac{5}{3} \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} - \frac{2}{3} \frac{z}{\left(z - \frac{1}{5}\right)}$$
. A RDC desta TZ é

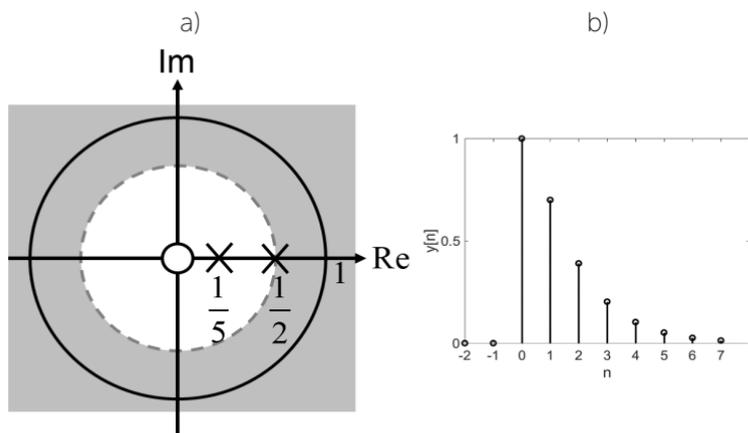
pele menos a intersecção entre as RDC das parcelas, isto é, $|z| > \frac{1}{2}$ e $|z| > \frac{1}{5}$. Portanto, a RDC será $|z| > \frac{1}{2}$ (Figura 3.14a).

Aplicando a TZ inversa determinamos que a resposta ao impulso é:

$$y[n] = \left[\frac{5}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n \right] u[n].$$

Este sinal está apresentado na Figura 3.14b.

Figura 3.14 a) RDC da TZ e b) Resposta ao impulso do sistema de tempo discreto



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

A TZ é o equivalente de tempo discreto da Transformada de Laplace e é usada para analisar sinais e sistemas de tempo discreto. Enquanto a Transformada de Laplace converte equações diferenciais em algébricas, a TZ converte equações de diferença em algébricas, o que facilita a sua solução.

Uma discussão particularmente importante em sistemas dinâmicos, e não apenas aqueles de tempo discreto, é sobre a sua estabilidade como o caso dos sistemas BIBO estáveis (Unidade 1). No caso de sistemas de tempo discreto, a estabilidade estará garantida se os polos da função de transferência $H(z)$ estiverem dentro da circunferência de raio unitário. Caso contrário, isto é, se pelo menos um polo estiver fora da circunferência unitária, o sistema será instável. Além disso,

o sistema também será instável se possui polos repetidos sobre a circunferência unitária. Este conhecimento será imprescindível para o projeto de filtros digitais.



Refleta

O conceito de estabilidade de sistemas físicos é relativamente palpável. Por exemplo, um amplificador operacional que possui comportamento instável terá uma tensão de saída que tende ao infinito. Um carro com um sistema de amortecimento instável proporcionaria oscilações cada vez maiores aos seus passageiros. Ambos os exemplos apresentam comportamentos obviamente inviáveis e precisam ser evitados. Tendo isso em mente, como seria o comportamento de um sistema discreto e instável? Há alguma relação com os exemplos que citamos aqui?



Pesquise mais

Para saber mais sobre análise de estabilidade consulte o capítulo 4 do livro:

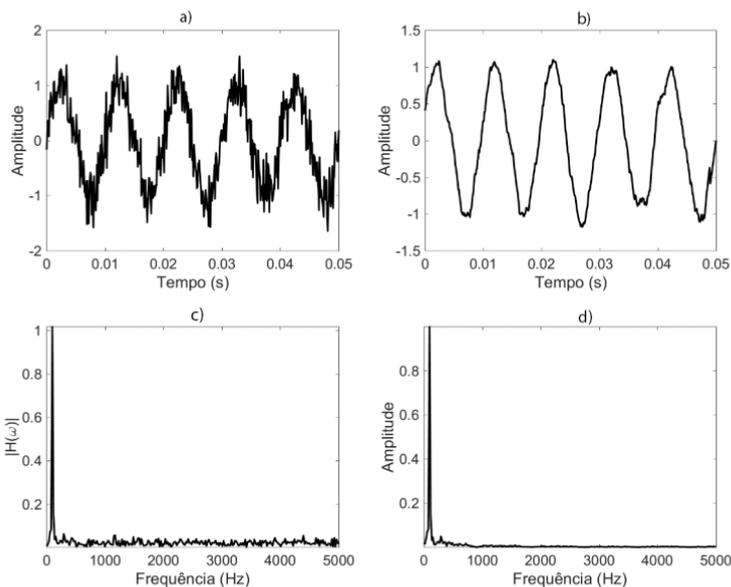
PINHEIRO, Carlos Alberto Murari; MACHADO, Jeremias Barbosa; FERREIRA, Luís Henrique de Carvalho. **Sistemas de controles digitais e processamento de sinais: projetos, simulações e experiências de laboratório**. Rio de Janeiro: Interciência, 2017. 332 p.

Sem medo de errar

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal pelo osciloscópio, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somados ao sinal e propôs um filtro para removê-los. Uma vez que o seu equipamento armazena os sinais de ECG como uma sequência de tempo discreto, seria possível fazer este filtro via software, isto é, um filtro digital ao invés de um analógico? Quais ferramentas você precisa dominar para fazer isso?

Nas condições citadas, isto é, os sinais de ECG serão tratados como seqüências de tempo discreto, você pode considerá-los como sinais de entrada de um sistema de tempo discreto. Filtros analógicos foram usados para remover os ruídos das medições no caso anterior pois o sinal foi tratado inteiramente em tempo contínuo. Podemos realizar filtragem também quando estamos no tempo discreto, mas usando, neste caso, filtros digitais. Para projetá-los, você precisará usar a TZ de forma a encontrar um polinômio de tempo discreto que se comportará de maneira bastante similar à um filtro analógico, mas com vantagens como maior rapidez de implementação e precisão entre outras. Um exemplo recorrente em sistemas eletrônicos são os filtros de média móvel como uma forma de rejeição de ruídos de alta frequência. A Figura 3.15 apresenta um caso de redução considerável de ruído em um sinal senoidal de 100 Hz. Note que, apesar de ainda haver componentes de frequência a serem removidas, o sinal da Figura 3.15b está mais nítido do que o original (Figura 3.15a).

Figura 3.15 | a) Sinal corrompido com ruído e seu b) Espectro de amplitude. c) Sinal após filtro de média móvel e seu d) Espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Estabilidade de sistemas de tempo discreto

Descrição da situação-problema

Um sistema linear de tempo discreto é descrito por $y[n] - 2,5y[n-1] + y[n-2] = x[n]$, em que os sinais de entrada e saída são $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente. Determine a função de transferência que descreve este sistema e se este sistema é estável.

Resolução da situação-problema

Este sistema é descrito por uma equação de diferenças de coeficientes constantes. Devemos aplicar a TZ em ambos os lados da equação e encontrarmos a relação $Y(z)/X(z)$ como segue:

$$(1 - 2,5z^{-1} + z^{-2})Y(z) = X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 - 2,5z^{-1} + z^{-2})}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{z^2}{(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

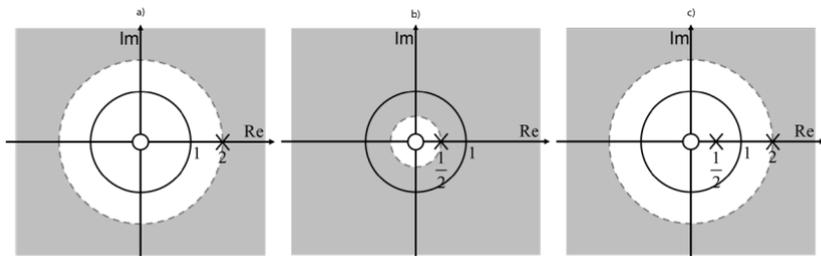
Expandindo este resultado em frações parciais temos

$$H(z) = \frac{4}{3} \frac{z}{(z-2)} - \frac{1}{3} \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

A RDC da primeira parcela é $|z| > 2$ e a da segunda parcela é $|z| > \frac{1}{2}$. Novamente pela propriedade da linearidade, a RDC de

$X(z)$ deve ser a intersecção entre as RDC das parcelas. Assim, a RDC de $X(z)$ é $|z| > 2$. Todas as RDC estão apresentadas na Figura 3.16.

Figura 3.16 | RDC a) $|z| > 2$ b) $|z| > \frac{1}{2}$ e de c) $H(z)$



Fonte: elaborada pelo autor.

O sistema de tempo discreto em questão possui dois polos ($z = 2$ e $z = 1/2$). Como há um polo fora da RDC, concluímos que este sistema é instável.

Faça valer a pena

1. A Região de Convergência (RDC) é necessária para definir o intervalo de valores em que a TZ converge. Além da RDC é preciso determinar uma expressão algébrica para a TZ. Sequências de tempo discretos distintas podem, inclusive, apresentar expressões algébricas idênticas, mas com RDC diferentes.

Determine a RDC e os polos da TZ do sinal de tempo discreto

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

a) $|z| > \frac{1}{2}$, $z = 1/2$ e $z = 1/4$.

b) $|z| > \frac{1}{4}$, $z = 1/2$ e $z = 1/4$.

c) $|z| > \frac{1}{8}$, $z = 1/2$ e $z = 1/4$.

d) $|z| > \frac{1}{2}$, $z = -1/2$ e $z = -1/4$.

e) $|z| > \frac{1}{4}$, $z = -1/2$ e $z = -1/4$.

2. Sistemas de controle e de processamento digital de sinais realizam amostras de sinais de interesse e os processam usando algoritmos implementados em, por exemplo, um microcontrolador. A Transformada desempenha um papel fundamental na análise e projeto de sistemas de tempo discreto.

Avalie as afirmações a seguir sobre sistemas de tempo discreto.

I. Sistemas de tempo discreto são normalmente modelados a partir de equações de diferenças com coeficientes constantes, que podem ser solucionadas aplicando-se a Transformada z .

II. A Transformada z é o equivalente de tempo discreto da Transformada de Fourier e converte equações de diferenças em equações diferenciais.

III. A estabilidade de sistemas dinâmicos é avaliada pela posição dos seus polos. No caso de sistemas de tempo discreto, a estabilidade estará garantida se os polos estiverem dentro da circunferência unitária.

Assinale a alternativa que apresenta as opções corretas.

- a) I.
- b) I e II.
- c) I e III.
- d) II e III.
- e) I, II e III.

3. Sistemas de tempo discreto podem ser analisados usando-se a TZ de uma forma bastante similar às Transformadas de Laplace e de Fourier. Consideramos, para isso, que o sistema possua resposta ao impulso $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$, e os sinais de entrada e saída sejam $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente. A partir da propriedade de convolução, a saída no domínio z deste sistema é calculada como $Y(z) = X(z)H(z)$, a partir da qual determinamos a saída no tempo discreto aplicando a TZ inversa. A relação entre as TZ dos sinais de saída e entrada é chamada de função de transferência ou função sistema.

Determine a função de transferência de um sistema linear de tempo discreto modelado por $y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$ e a sua sequência de resposta ao degrau. Considere a saída como $y[n]$ e a entrada como $x[n]$.

$$\text{a) } H(z) \equiv \frac{z^2}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} \text{ e } y[n] = \left[3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n].$$

$$\text{b) } H(z) \equiv \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \text{ e } y[n] = \left[3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n].$$

$$\text{c) } H(z) \equiv \frac{z^{-2}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \text{ e } y[n] = \left[-3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n].$$

$$\text{d) } H(z) \equiv \frac{z^{-2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \text{ e } y[n] = \left[3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \right] u[n].$$

$$\text{e) } H(z) \equiv \frac{z^2}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} \text{ e } y[n] = \left[-3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[-n].$$

Seção 3.3

Introdução aos filtros digitais

Diálogo aberto

Caro aluno, vamos encerrar a terceira unidade deste curso com um estudo introdutório sobre filtros digitais. A partir do momento em que sistemas digitais tornaram-se cada vez mais comuns em nosso dia a dia, as técnicas digitais para tratamento de dados e informações também se tornaram mais comuns. No seu telefone celular, por exemplo, há um algoritmo que elimina parte dos ruídos captados pelo microfone de forma a melhorar a qualidade da voz para a sua transmissão. Além disso, filtros digitais são mais versáteis que os analógicos, conforme veremos a seguir, e sua implementação torna-se particularmente interessante quando um filtro de ordem elevada é necessário. Vamos estudar agora formas de obtermos um filtro digital a partir de um filtro analógico usando a Transformada z (Seção 3.2).

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal pelo osciloscópio, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somados ao sinal e propôs um filtro para removê-los. Uma vez que este sinal é amostrado, você já sabe que pode usar a Transformada z para realizar pós-processamento. Assim, como você poderia melhorar este sinal digitalmente?

Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos!

Não pode faltar

Filtros digitais também podem ser classificados de acordo com a sua característica em frequência, da mesma forma que fizemos

para os filtros analógicos, como passa-baixas, passa-altas, passa-faixas e rejeita-faixas. Entretanto, estes filtros são implementados digitalmente em um computador e/ou microcontrolador e fazem a filtragem do sinal após este ter sido discretizado.

A resposta ao impulso dos filtros digitais os dividem em duas classes. Os filtros de resposta ao impulso finita (*finite impulse response* - FIR) possuem funções de transferência com um polinômio no domínio z apenas com numerador e a sua resposta depende apenas de momentos passados e presente da entrada. Estes filtros são sempre estáveis e apresentam fase linear, isto é, produzem o mesmo atraso para todas as frequências envolvidas evitando distorções no sinal de saída. Já os filtros de resposta ao impulso infinita (*infinite impulse response* - IIR) são recursivos, isto é, a saída no instante atual depende dos valores presentes e passados da entrada além dos valores passados da saída (NALON, 2014; OPPENHEIM; WILLSKY; 2010).

Vamos estudar nesta seção alguns métodos de projeto de filtros FIR e IIR a partir da função de transferência de filtros analógicos e da função de aproximação de Butterworth. Ademais, todas as considerações apresentadas aqui serão para filtros passa-baixas. Os demais tipos de filtros podem ser convertidos a partir do passa-baixas aplicando a transformação em frequência.

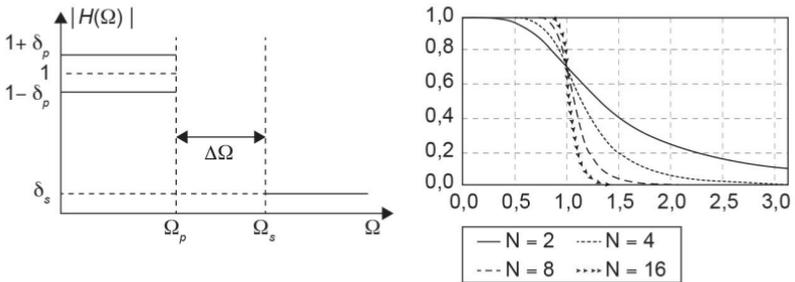
Há três métodos principais para projetar filtros IIR: aproximação das derivadas da equação diferencial, invariância ao impulso e transformação bilinear, sendo esta última mais popular e apresentada nesta seção. Apesar de causar distorção no eixo das frequências, o método da transformação bilinear é o mais indicado para projetar um filtro digital a partir de um analógico.

Na Seção 3.1 nós conhecemos alguns circuitos que possuem o comportamento de um filtro Butterworth, mas não demos muita atenção aos procedimentos de projeto deste filtro. Assim, começaremos introduzindo os conceitos necessários ao projeto como suas especificações, função de transferência e localização dos polos. A Figura 3.17a apresenta as especificações de banda de transição ($\Delta\Omega$), tolerância e frequência de corte de filtros passa-baixa (os índices p e s indicam banda de passagem e de atenuação, respectivamente). O módulo da magnitude ao quadrado de Filtros Butterworth tem a forma:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (3.9)$$

Em que Ω_c é a frequência de corte e N é a ordem do filtro. A Figura 3.17b apresenta a forma da resposta de Butterworth para ordem 2, 4, 8 e 16. Note que conforme aumentamos a ordem do filtro, menor será a banda de transição e ficaremos cada vez mais próximo da característica ideal.

Figura 3.17 | a) Especificações de filtros passa-baixa e b) Forma de resposta do filtro de Butterworth para ordens distintas



Fonte: Nalon (2014, p. 132-133).

Conhecendo a frequência de corte desejada do filtro, temos como calcular os $2N$ polos do filtro pela Equação 3.10. É importante destacar que estes polos estão localizados sob uma circunferência de raio Ω_c no plano complexo s e espaçados de π/N rad.

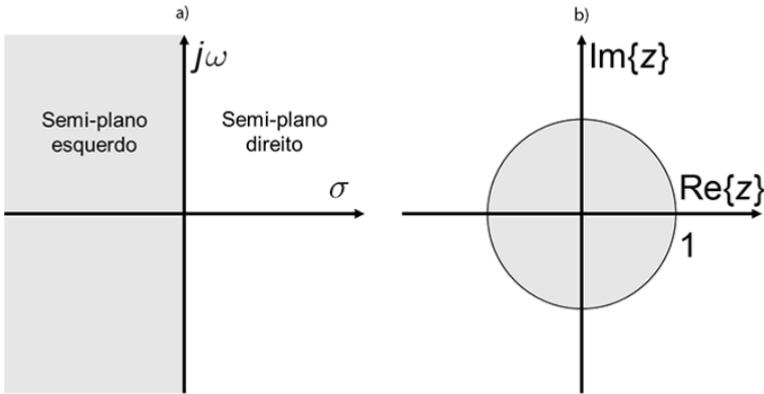
$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{2k+N+1}{2N}\pi} \quad (3.10)$$

Para garantirmos a estabilidade do filtro, todos os polos devem estar localizados no semiplano esquerdo do plano s . Assim, a partir dos polos calculados pela Equação 3.10, apenas aqueles que respeitam este critério de estabilidade serão usados para montar a função de transferência (no domínio s) do filtro digital como:

$$H(s) = \Omega_c^N \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{s - p_k} \quad (3.11)$$

A posição dos polos é determinante para avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos. No plano s todos os polos devem estar no semiplano esquerdo, enquanto que no plano z eles devem estar dentro da circunferência unitária. Se pelo menos um polo não respeitar esta condição, o sistema será instável. As regiões de estabilidade de ambos os planos são apresentadas em destaque na Figura 3.18.

Figura 3.18 | Regiões de estabilidade do a) Plano s e b) Plano z



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma forma particularmente interessante de projetar filtros digitais é fazer a frequência de corte unitária (normalizada) e , a partir deste resultado mais genérico, converter o filtro para a frequência de corte desejada fazendo a seguinte substituição no polinômio do denominador da função de transferência ($Q(s)$):

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{Q(s/\Omega_c)} \quad (3.12)$$

Assim que conhecermos a função de transferência do filtro analógico, podemos fazer a sua conversão em um filtro digital. Vamos começar com o caso dos filtros IIR, cujos métodos que estudaremos procuram fazer o mapeamento da variável complexa s no plano z , isto é, vão converter a localização dos polos do plano s

para o plano z . O método da transformação bilinear faz a conversão por meio da substituição:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (3.13)$$

Uma vez que o mapeamento da variável s no plano z não é linear, é necessário fazer uma correção na frequência de corte, conhecida como *pre-warping*, usando-se a Equação 3.14:

$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{\Omega T_s}{2} \right) \quad (3.14)$$

O Matlab possui algumas funções predefinidas que são particularmente úteis no projeto de filtros digitais, conforme veremos no exemplo a seguir.



Exemplificando

Vamos projetar um filtro Butterworth digital de ordem 3 e frequência de corte **$0,4\pi \text{ rad/s}$** . Considere período de amostragem unitário.

Solução: O primeiro passo a ser executado é o *pre-warping* desta frequência com a Equação 3.14:

$$\Omega = 2 \tan \left(\frac{0,4\pi}{2} \right) \rightarrow \Omega = 0,4625 \text{ rad/s}$$

O módulo da magnitude ao quadrado de Filtros Butterworth tem a forma da Equação 3.9, logo $|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/0,4625)^6}$. Os

polos deste filtro em tempo contínuo são dados pela equação 3.9 $\left(p_k = 0,4625 e^{j \frac{2k+4}{6} \pi} \right)$ ealem $p_0 = -0,7265 + j1,2583$,

$$p_1 = -1,4530, p_2 = -0,7265 - j1,2583,$$

$$p_3 = 0,7265 - j1,2553, p_4 = 1,4530 \text{ e}$$

$p_5 = 0,7265 + j1,2583$. Dentre os seis polos, apenas p_0 , p_1 e p_2 estão no semiplano esquerdo do plano s , pois suas parcelas reais são negativas. Portanto, considerando apenas estes três polos e aplicando a Equação 3.11, a função de transferência do filtro será

$$H(s) = \frac{0,4625^3}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{0,09893164062}{s^3 + 2,906s^2 + 4,222s + 3,068}$$

Aplicando a transformação bilinear com $T_s = 1$, temos:

$$H(z) = \frac{0,09893164062}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3 + 2,906 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 4,222 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 3,068}$$

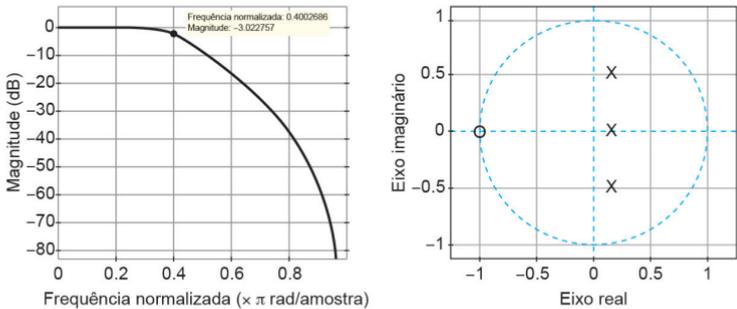
Reorganizando esta função e normalizando para o coeficiente de maior ordem do denominador, temos:

$$H(z) = \frac{0,0985 + 0,2956z^{-1} + 0,2956z^{-2} + 0,0985z^{-3}}{1 - 0,5774z^{-1} + 0,4218z^{-2} - 0,0563z^{-3}}$$

A resposta em frequência e os polos deste filtro estão apresentados nas Figura 3.19a e 3.19b, respectivamente. Uma vez que os polos desta função de transferência estão localizados dentro da circunferência de raio unitário, podemos afirmar que este filtro é estável. A partir da função de transferência do filtro digital, considerando-a como uma relação $Y(z)/X(z)$, aplicamos a TZ inversa e encontramos a sua equação de diferenças equivalente:

$$y[n] = 0,0985x[n] + 0,2956x[n-1] + 0,2956x[n-2] + 0,0985x[n-3] + 0,5774y[n-1] - 0,4218y[n-2] + 0,0563y[n-3]$$

Figura 3.19 | a) Espectro de amplitude do filtro digital projetado e b) localizações dos polos e zeros do plano z



Fonte: elaborada pelo autor.

```

clc
N = 3; %Ordem do filtro
Omevac = 2*tan(0.4*pi/2); % Pre-warping
% polos
for k=0:1:2*N-1
    p(k+1) = Omevac*exp(pi*1i*((2*k+N+1)/(2*N)))
end
% Função de transferência (Laplace)
num = Omevac^N;
a = [1 -p(1)]; b = [1 -p(2)]; c = [1 -p(3)];
den = conv(a, conv(b, c));
H=tf(num, den)
% Transformação bilinear
[numz, denz] = bilinear(num, den, 1)
% Apresenta todas as informações pertinentes ao filtro
fvtool(numz, denz)
    
```



A transformação bilinear faz o mapeamento dos polos da função de transferência do filtro de tempo contínuo no plano z para projetar um filtro digital. Se escolhermos apenas os polos no semiplano esquerdo do plano s , os polos do filtro digital estarão dentro da circunferência unitária e, assim, a estabilidade estará garantida. A equação de diferenças do filtro digital possui coeficientes similares aos da TZ.

O filtro do exemplo anterior é de passa-baixas de terceira ordem e foi projetado para frequência normalizada. Podemos fazer a alteração da frequência de corte ou inclusive do tipo de filtro, aplicando a transformação em frequência, apresentada resumidamente no Quadro 3.3. É importante ressaltar que a causalidade e estabilidade do filtro permanecem inalteradas com essa transformação.

Quadro 3.3 | Transformação em frequência para filtros digitais a partir de um filtro passa-baixas

Tipo de filtro	Transformação de z^{-1}	Em que...
Passa-baixas	$\frac{z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z'^{-1}}$	$\alpha = \frac{\text{sen}\left(\frac{\Omega_c + \Omega_c'}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega_c - \Omega_c'}{2}\right)}$ <p>e Ω_c' é a frequência de corte desejada.</p>

Passa-altas	$-\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Omega_c + \Omega'_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_c - \Omega'_c}{2}\right)}$ <p>e Ω'_c é a frequência de corte desejada.</p>
Passa-faixas	$-\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}$	$\alpha_1 = \frac{2\beta\gamma}{\gamma + 1}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ $\gamma = \cot\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right)$ $\beta = \frac{\cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right)}$ <p>em que Ω_1 e Ω_2 são as frequências de corte inferior e superior, respectivamente.</p>

Rejeita-faixas	$-\frac{\mathbf{z}'^{-2} - \alpha_1 \mathbf{z}'^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 \mathbf{z}'^{-2} - \alpha_1 \mathbf{z}'^{-1} + 1}$	$\alpha_1 = -\frac{2\beta\gamma}{\gamma + 1},$ $\alpha_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$ $\gamma = \cot\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right),$ $\beta = \frac{\cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right)}$ <p>em que Ω_1 e Ω_2 são as frequências de corte inferior e superior, respectivamente.</p>
----------------	--	---

Fonte: adaptado de Nalon (2014, p. 151)

Vamos mudar a nossa atenção agora para os filtros FIR e um método de projeto. Neste caso, a função de transferência em z é um polinômio ao invés de uma função racional, de forma que só há zeros. A Equação 3.15 mostra a forma geral da equação de diferenças de um filtro FIR de ordem N :

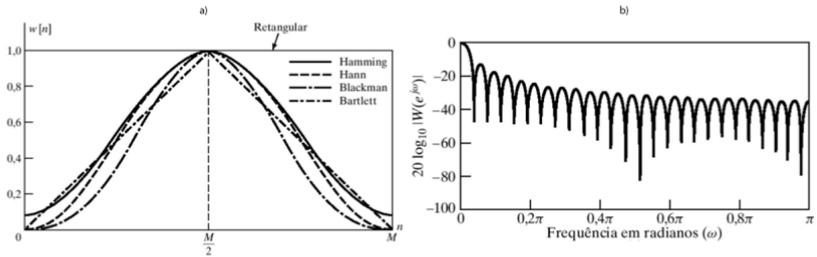
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n-k] \quad (3.15)$$

O método do janelamento é usado para projetar filtros FIR a partir do truncamento da resposta ao impulso de um filtro ideal com alguma função de janela ($w[n]$). Algumas das funções de janelas mais utilizadas estão apresentadas na Figura 3.20 e no Quadro 3.4. A resposta ao impulso de um filtro FIR ($h[n]$) é dada por:

$$h[n] = h_d[n]w[n] \quad (3.16)$$

Em que $h_d[n]$ é a resposta ao impulso para filtros ideais (Quadro 3.5).

Figura 3.20 | a) Janelas comumente usadas e b) Espectro de magnitude da janela retangular



Fonte: Oppenheim e Schaffer (2012, p. 317-318).

Quadro 3.4 | Funções de janela

Janela	Função de janela	Banda de transição	Amplitude do lóbulo lateral	Atenuação mínima
Retangular	$w[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{se fora do intervalo} \end{cases}$	$0,91\pi/N$	-13 dB	-21dB
Triangular ou Bartlett	$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & \text{se } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \text{se } \frac{N-1}{2} \leq n \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$1,19\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hanning	$w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & \text{se } 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{se fora do intervalo} \end{cases}$	$2,51\pi/N$	-31dB	-44 dB
Hamming	$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & \text{se } 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{se fora do intervalo} \end{cases}$	$3,14\pi/N$	-41dB	-53 dB
Blackman	$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \\ + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & \text{se } 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{se fora do intervalo} \end{cases}$	$4,60\pi/N$	-57 dB	-74 dB

Fonte: adaptado de Nalon (2014, p. 141).

Quadro 3.5 Resposta ao impulso de filtros ideais

Filtro de ordem N-1	$h_d[n]$
Passa-baixas	$\frac{\text{sen}\left[\Omega_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$
Passa-altas	$\frac{\text{sen}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[\Omega_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$
Passa-faixas	$\frac{\text{sen}\left[\Omega_{c2}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[\Omega_{c1}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$
Rejeita-faixas	$\frac{\text{sen}\left[\Omega_{c1}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[\Omega_{c2}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$

Fonte: Joaquim (2006, p. 115).



Exemplificando

Faça o projeto de um filtro FIR passa-baixas com as seguintes

características:
$$\begin{cases} 0,99 \leq H(\Omega) \leq 1,01, \text{ se } 0 \leq \Omega \leq 0,3\pi \\ H(\Omega) \leq 0,01, \text{ se } 0,4\pi \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

Solução: a atenuação em ambas as bandas é de 0,01 ou **40 dB**

e a banda de transição é $\Delta\Omega = 0,4\pi - 0,3\pi = 0,1\pi$. Avaliando o Quadro 3.4 determinamos que as janelas de Hanning, Hamming e Blackman proporcionam atenuação maior que a especificada. Escolhendo a janela de Hanning por causa da sua banda de transição menor, determinamos a ordem do filtro como segue:

$$0,1\pi = \frac{2,51\pi}{N} \rightarrow N = 25,1$$

Aproximando este resultado para o menor inteiro, temos $N = 26$. Admitindo que a frequência de corte está no ponto médio da banda de transição, temos $\Omega_c = 0,35\pi$. Assim, a resposta ao impulso do

$$\text{filtro será } h[n] = \left[0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{25}\right) \right] \frac{\text{sen}\left[0,35\pi\left(n - \frac{25}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{25}{2}\right)} \text{ para}$$

$$n = 0, 1, \dots, 25.$$



Reflita

Filtros FIR são sempre estáveis e de ordem maior em relação aos filtros IIR. O que isso implica quando os implementamos na prática?



Pesquise mais

Para aprender mais sobre técnicas de projeto de filtros digitais estude o capítulo 7 do livro:

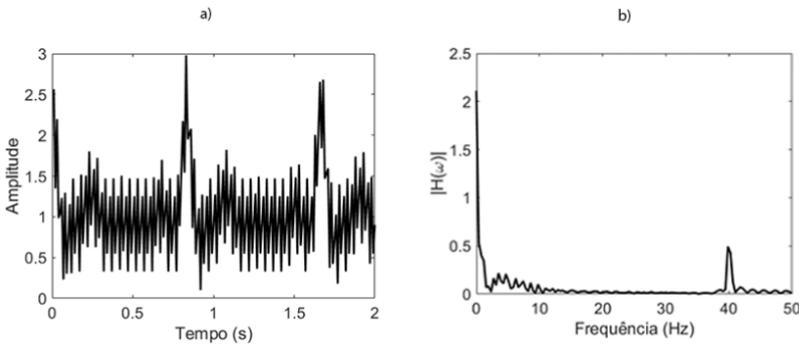
OPPENHEIM, Alan V., SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2012. 665 p.

Sem medo de errar

Relembrando o nosso contexto, você é um engenheiro que trabalha em uma empresa de desenvolvimento de instrumentos médicos e hospitalares com clientes em todo território nacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento de Eletrocardiograma (ECG), usado para detectar problemas cardíacos. Ao avaliar este sinal pelo osciloscópio, você notou que havia uma grande quantidade de ruídos somados (Figura 3.21) ao sinal e propôs um filtro para removê-los. Você também já sabe que é possível implementar um filtro digital para remover os

ruídos deste sinal. Portanto, apresente agora um projeto de filtro que seja adequado a este projeto.

Figura 3.21 | a) Sinal de ECG corrompido com ruído e b) Espectro de amplitude



Fonte : : elaborada pelo autor.

Agora que você conhece algumas ferramentas para projetar filtros digitais, você verifica que um filtro passa-baixas IIR com frequência de corte normalizada $0,3\pi \text{ rad/s}$ é o suficiente para rejeitar os ruídos de 40 Hz no sinal do ECG. Usando o Matlab para agilizar o seu projeto, você obteve os seguintes resultados:

- Função de transferência em s:

$$H(s) = \frac{1,058}{s^3 + 2,038s^2 + 2,077s + 1,058}$$

- Função de transferência em z:

$$H(z) = \frac{0,0495 + 0,1486z^{-1} + 0,1486z^{-2} + 0,0495z^{-3}}{1 - 1,1619z^{-1} + 0,6959z^{-2} - 0,1378z^{-3}}$$

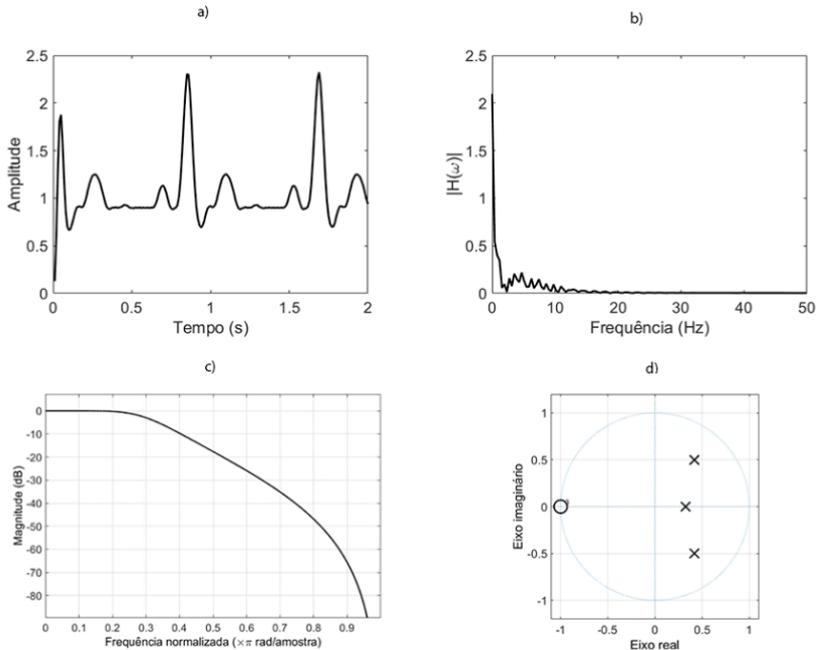
- Equação de diferenças:

$$y[n] = 0,0495 + 0,1486x[n-1] + 0,1486x[n-2] + 0,0495x[n-3] + 1,1619y[n-1] - 0,6959y[n-2] + 0,1378y[n-3]$$

O sinal de ECG filtrado e seu espectro de amplitude estão

apresentados na Figura 3.22a e 3.22b, respectivamente. As localizações dos polos de $H(z)$ e a resposta em frequência do filtro estão na Figura 3.24c e 3.24d, respectivamente.

Figura 3.22 | a) Sinal filtrado com filtro digital e seu b) Espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

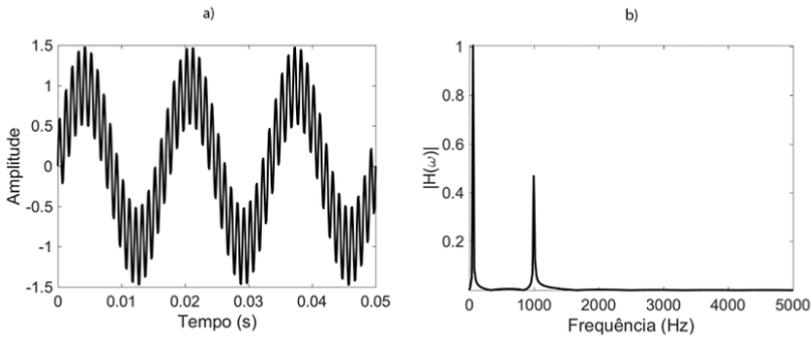
Avançando na prática

Transformação em frequência

Descrição da situação-problema

Você está trabalhando em um laboratório didático e quer gerar um sinal senoidal de 1 kHz de frequência com um circuito eletrônico. Ao medir este sinal no osciloscópio, entretanto, você verificou que há uma grande quantidade de ruído de baixa frequência sobreposto ao seu sinal de interesse (Figura 3.23 a). Projete um filtro digital para remover esta interferência.

Figura 3.23 | a) Sinal medido em laboratório e b) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Podemos usar o projeto anterior de filtro IIR passa-baixas e convertê-lo em passa altas com transformação em frequência.

Consultando o Quadro 3.3 temos $\mathbf{z}^{-1} = -\frac{\mathbf{z}^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \mathbf{z}^{-1}}$ e

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Omega_c + \Omega'_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_c - \Omega'_c}{2}\right)}$$

e Ω'_c é a frequência de corte desejada. Uma

vez que 1 kHz será equivalente a $0,2\pi \text{ rad/s}$ (frequência normalizada), o filtro passa-altas precisa ter frequência de corte menor. Supondo

$$\Omega'_c = 0,1\pi \text{ rad/s} \text{ temos } \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{0,3\pi + 0,1\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{0,3\pi - 0,1\pi}{2}\right)} = -0,8506$$

e $\mathbf{z} = -\frac{\mathbf{z}^{-1} - 0,8506}{1 - 0,8506\mathbf{z}^{-1}}$. Aplicando a transformação em frequência temos

- Função de transferência em z:

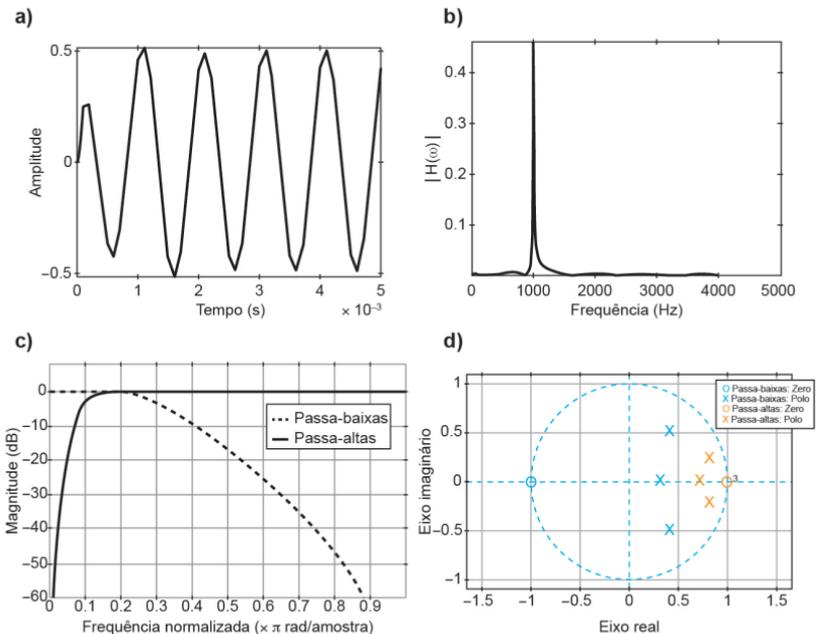
$$H(z) = \frac{0,7294 - 2,1883z^{-1} + 2,1883z^{-2} - 0,7294z^{-3}}{1 - 2,3741z^{-1} + 1,9294z^{-2} - 0,5321z^{-3}}$$

- Equação de diferenças:

$$y[n] = 0,7294 - 2,1883x[n-1] + 2,1883x[n-2] - 0,7294x[n-3] + 2,3741y[n-1] - 1,9294y[n-2] + 0,5321y[n-3]$$

O Matlab possui diversas funções para fazer a conversão de filtros. Neste caso em questão, o comando `[numhp,denhp] = iirlp2hp(numlp,denlp,0.3,0.1)` fará a conversão de um filtro passa-baixa com numerador `numlp`, denominador `denlp` e frequência de corte normalizada $0,3\pi \text{ rad/s}$ para um filtro passa-altas com numerador `numhp`, denominador `denhp` e frequência de corte normalizada $0,1\pi \text{ rad/s}$. O sinal filtrado e seu espectro de amplitude estão apresentados na Figura 3.24a e 3.24b, respectivamente. As localizações dos polos de $H(z)$ e a resposta em frequência do filtro estão na Figura 3.24c e 3.24d, respectivamente.

Figura 3.24 | a) Sinal filtrado com filtro digital e seu b) Espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Filtros digitais também podem ser classificados de acordo com a sua característica em frequência, da mesma forma que fizemos para os filtros analógicos, como passa-baixas, passa-altas, passa-faixas e rejeita-faixas. Entretanto, estes filtros são implementados digitalmente em um computador e/ou micro-controlador e fazem a filtragem do sinal após este ter sido discretizado.

Preencha as lacunas a seguir e escolha a alternativa correta.

Os filtros ____ possuem funções de transferência com um polinômio no domínio z apenas com numerador e a sua resposta depende apenas de momentos passados e presente da entrada. Estes filtros são sempre _____ e apresentam fase linear, isto é, produzem o mesmo atraso para todas as frequências envolvidas evitando distorções no sinal de saída. Já os filtros ____ são _____, isto é, a saída no instante atual depende dos valores presentes e passados da entrada além dos valores passados da saída.

- a) FIR, estáveis, recursivos, IIR.
- b) IIR, estáveis, recursivos, FIR.
- c) IIR, instáveis, não recursivos, IIR.
- d) FIR, estáveis, não recursivos, IIR.
- e) FIR, instáveis, recursivos, FIR.

2. Como filtros, tanto analógicos quanto digitais, são sistemas dinâmicos, é necessário garantir a estabilidade a partir das posições dos polos. Para isso, todos os polos do filtro analógico devem estar localizados no semiplano esquerdo do plano s . No caso dos filtros digitais, os polos devem estar dentro da circunferência unitária.

Um filtro IIR de segunda ordem foi projetado a partir de um equivalente analógico para ter frequência de corte $0,5\pi \text{ rad/s}$. Qual é a equação de diferenças deste filtro?

- a) $y[n] = 0,2929x[n] + 0,5858x[n-1] + 0,5858x[n-2] + 0,1716[n+2]$.
- b) $y[n] = 0,2929x[n] + 0,5858x[n-1] - 0,5858x[n-2] - 0,1716[n-2]$.
- c) $y[n] = 0,2929x[n] + 0,5858x[n-1] + 0,5858x[n-2] + 0,1716[n-2]$.

$$d) y[n] = 0,2929x[n] - 0,5858x[n-1] - 0,5858x[n-2] - 0,1716[n-2].$$

$$e) y[n] = 0,2929x[n] + 0,5858x[n+1] + 0,5858x[n+2] + 0,1716[n+2].$$

3. O método do janelamento é usado para projetar filtros FIR a partir do truncamento da resposta ao impulso de um filtro ideal com alguma função de janela ($w[n]$). A resposta ao impulso de um filtro FIR ($h[n]$) é dada por $h[n] = h_d[n]w[n]$, em que $h_d[n]$ é a resposta ao impulso para filtros ideais. Projete um filtro FIR passa-baixas com as seguintes características:

$$\left[\begin{array}{l} 0,99 \leq H(\Omega) \leq 1,01, \text{ se } 0 \leq \Omega \leq 0,4\pi \\ H(\Omega) \leq 0,01, \text{ se } 0,6\pi \leq \Omega \leq \pi \end{array} \right.$$

Assinale a alternativa que apresenta a resposta ao impulso do filtro correta usando a janela de Hamming.

$$a) h[n] = \left[0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \right] \frac{\text{sen}[0,5\pi(n-6)]}{\pi(n-6)}.$$

$$b) h[n] = \left[0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \right] \frac{\text{sen}[0,5\pi(n-6)]}{\pi(n-6)}.$$

$$c) h[n] = \left[0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{15}\right) \right] \frac{\text{sen}[0,4\pi(n-7,5)]}{\pi(n-7,5)}.$$

$$d) h[n] = \left[0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{15}\right) \right] \frac{\text{sen}[0,5\pi(n-7,5)]}{\pi(n-7,5)}.$$

$$e) h[n] = \left[0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) \right] \frac{\text{sen}[0,5\pi(n-7)]}{\pi(n-7)}.$$

Referências

JOAQUIM, Marcelo Basílio. Introdução ao processamento digital de sinais: notas de aula. São Carlos, 2006. Disponível em: http://www.alan.eng.br/disc_dsp/apostila_pds_marcelobj.pdf. Acesso em: 16 mar. 2018.

LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Sinais e sistemas lineares**. Porto Alegre: Bookman, 2008. 856 p.

MALVINO, Albert P.; BATES, David J. **Eletrônica**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2016. v. 2.

NALON, José Alexandre. **Introdução ao processamento digital de sinais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2014. 200 p.

OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2012. 665 p.

OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY, Alan S. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010. 568 p.

PINHEIRO, Carlos Alberto Murari; MACHADO, Jeremias Barbosa; FERREIRA, Luís Henrique de Carvalho. **Sistemas de controles digitais e processamento de sinais. Projetos, simulações e experiências de laboratório**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2017. 332 p.

SADIKU, Matthew No; ALEXANDER, Charles K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013.

Introdução ao processamento digital de sinais

Convite ao estudo

Caro aluno, encerraremos nossa disciplina com uma introdução ao processamento digital de sinais, tema de extrema abrangência e importância no cenário tecnológico mundial.

Na primeira seção estudaremos a amostragem de sinais de tempo contínuo e sua conversão em sequências de tempo discreto, além do fenômeno de *aliasing*, suas consequências e como evitá-lo.

Já na segunda seção estudaremos o algoritmo da transformada rápida de Fourier – *Fast-Fourier Transform* (FFT) –, que foi mencionado na Seção 3.3 mas não foi implementado. Com este método você terá uma maneira simples de executar a análise de Fourier de sinais de tempo discreto.

Por fim, na última seção teremos uma noção dos componentes de um sistema de aquisição de dados e de como estes funcionam numa perspectiva de processamento de sinais.

Imagine agora que você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva, isto é, para antecipar algum problema. Como você pode amostrar este sinal para ser processado digitalmente? Quais são as análises pertinentes ao problema? Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Bons estudos.

Seção 4.1

Amostragem

Diálogo aberto

Equipamentos modernos utilizam técnicas de processamento digital de sinais para ajudar os usuários em tomadas de decisões, fazer avaliações, monitoramento, etc. O primeiro passo para isso é amostrar os sinais de interesse, isto é, transformá-los em uma sequência de tempo discreto que possa ser armazenada digitalmente e usada por um processador.

Retomando o nosso contexto, você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional e desenvolve junto com a sua equipe um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva. Como você pode amostrar este sinal para ser processado digitalmente? Quais são as análises pertinentes ao problema? Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Não pode faltar

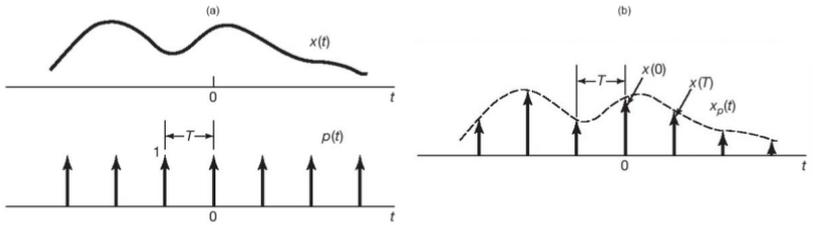
Sinais de tempo discreto podem ser obtidos a partir da amostragem de sinais de tempo contínuo ($\mathbf{x}(t)$), que consiste em multiplicá-lo por um trem de impulsos ($\mathbf{p}(t)$), isto é, uma sequência de funções impulso unitário igualmente espaçadas no tempo:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (4.1)$$

em que T_s é o período de amostragem, medido em segundos.

A Figura 4.1 (a) mostra um sinal de tempo contínuo $\mathbf{x}(t)$ e o trem de impulsos $\mathbf{p}(t)$. Ao multiplicarmos ambos os sinais, apenas os valores de $\mathbf{x}(t)$ nos instantes de tempo em que $\mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}$ serão armazenadas na sequência de tempo discreto – Figura 4.1 (b).

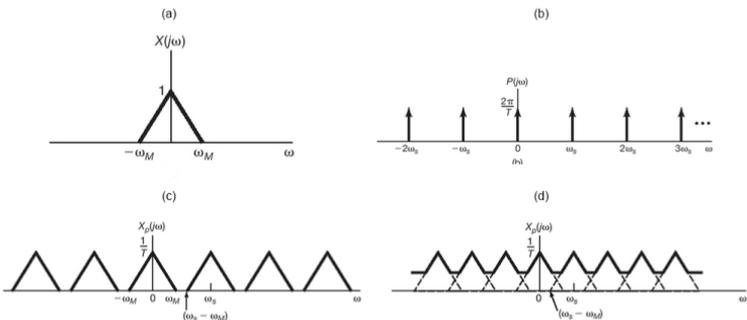
Figura 4.1 | (a) Sinal $x(t)$ e trem de impulsos $p(t)$ e (b) Sinal amostrado pelo produto $x_p(t)=x(t)p(t)$



Fonte: adaptada de Oppenheim e Willsky (2010, p. 306).

Vamos ver agora os efeitos da amostragem no domínio da frequência. A Figura 4.2 (a) apresenta o espectro de frequência de um sinal no domínio do tempo e a Figura 4.2 (b) apresenta um trem de impulsos com frequência de amostragem ω_s . A partir da propriedade da multiplicação de sinais podemos demonstrar que o espectro de frequência do sinal amostrado é periódico, isto é, é constituído pelo espectro do sinal original replicado e deslocado ao longo do eixo ω – Figura 4.2 (c). Dependendo da largura de banda do sinal de tempo contínuo e da frequência de amostragem utilizada pode ocorrer sobreposição do espectro, conhecida como *aliasing* – Figura 4.2 (d) –, e, portanto, perda de informação do sinal original. Para que a amostragem seja feita corretamente, precisamos garantir que o sinal seja limitado em banda, isto é, que possua uma frequência máxima – ω_M , no caso da Figura 4.2. Assim, um filtro analógico é usado antes da amostragem para limitar a banda dos sinais de entrada. Trataremos do *aliasing* com mais detalhes em instantes.

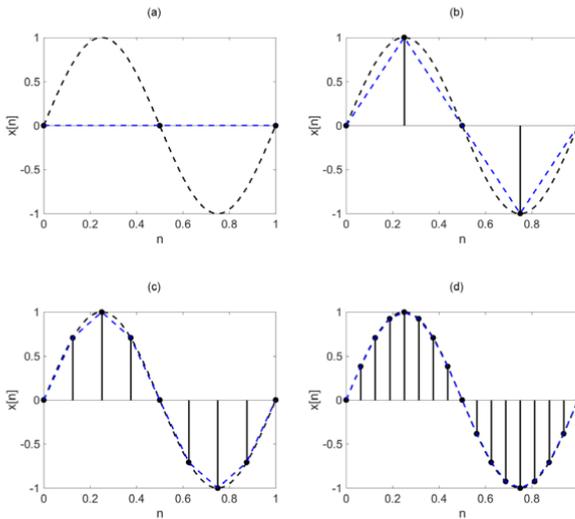
Figura 4.2 | Espectro de frequência de um (a) sinal de tempo contínuo e de um (b) trem de impulsos; espectro do sinal amostrado (c) sem sobreposição e (d) com sobreposição



Fonte: adaptada de Oppenheim e Willsky (2010, p. 307).

O período de amostragem determina a quantidade de amostras que serão coletadas de um sinal e, de certa forma, a qualidade da representação deste. A Figura 4.3 mostra quatro amostragens de um sinal senoidal de frequência unitária (traços pretos), sendo que a primeira amostra sempre é feita no instante $t = 0$. O primeiro período de amostragem é **0,5 s** – Figura 4.3 (a) – e é reduzido pela metade consecutivamente até o último caso – Figura 4.3 (d). A partir da conexão entre cada amostra por meio de uma linha – (tracejada azul), que representa uma interpolação linear, nota-se que a representação de $x[n]$ se assemelha ao sinal original apenas para $T_s = 0,125\text{ s}$ e 8 amostras por período. Na Figura 4.3 (a) o sinal não é lido corretamente e na Figura 4.3 (b) a sequência de tempo discreto representa uma onda triangular, sem semelhanças com o sinal original e, portanto, não são representações adequadas. No último caso – Figura 4.3 (d) – a sequência de tempo discreto representa claramente um sinal senoidal.

Figura 4.3 | Espectro de frequência de um (a) sinal de tempo contínuo e de um (b) trem de impulsos; espectro do sinal amostrado (c) sem sobreposição e (d) com sobreposição



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, como podemos definir uma taxa de amostragem adequada? Para isso, precisamos conhecer o **teorema da**

amostragem de Nyquist. Um sinal limitado em banda, isto é, que possui frequência máxima finita ω_{\max} , pode ser reconstruído se for amostrado com uma frequência maior que $2\omega_{\max}$, conhecida como **frequência ou taxa de Nyquist** (OPPENHEIM; WILLISKY, 2010).



Exemplificando

Determine a frequência de Nyquist para os sinais $x(t) = 5\cos(10t) + 2\sin(20t)$ e $y(t) = 2\text{rect}(t)$.

Solução: o sinal $x(t)$ é limitado em banda e possui $\omega_{\max} = 20\text{rad/s}$. Portanto, a frequência de Nyquist para este sinal é $\omega_s > 40\text{rad/s}$. O sinal $y(t)$ é um pulso retangular com período unitário e que possui espectro de frequência dado por

$$Y(\omega) = 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Uma vez que este espectro tende a zero

conforme a frequência tende ao infinito, este sinal não é limitado em banda, e, portanto, a frequência de Nyquist tende ao infinito.



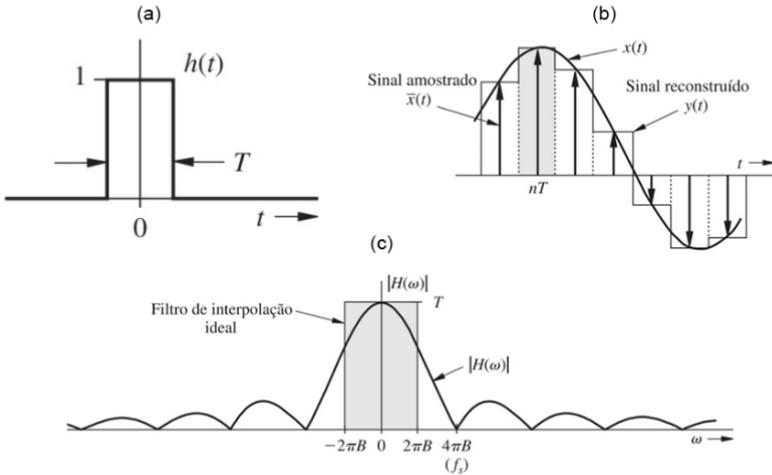
Assimile

O sinal de tempo contínuo deve ser limitado em frequência (ou em banda) para que possamos aplicar o teorema da amostragem de Nyquist.

O procedimento para reconstruir um sinal a partir de suas amostras é conhecido como interpolação, conforme apresentado na Figura 4.3 com interpolação linear, isto é, amostras adjacentes são conectadas por uma reta, isto é, um retentor de primeira ordem. Uma forma prática de amostrar sinais de tempo contínuo é a partir de retentores de ordem zero (ROZ), que tomam uma amostra em um determinado instante de tempo e a mantêm até o instante seguinte. O ROZ que possui resposta ao impulso deste filtro de interpolação é um pulso retangular com largura T_s e amplitude unitária – Figura 4.4 (a). Quando um sinal de tempo contínuo limitado em banda ($f_{\max} = B$) é amostrado pelo ROZ, o sinal de saída será constituído de amostras na forma de pulsos retangulares com a mesma largura T_s e amplitude do sinal original – Figura 4.4

(b). O espectro de amplitude do ROZ é apresentado na Figura 4.4 (c), onde fica claro que este filtro possui o comportamento de um filtro passa-baixas. Vale ressaltar que o ROZ da Figura 4.4 é não causal e não realizável. Para implementar este filtro, $h(t)$ deve ser atrasada de $T_s/2$ (LATHI, 2008).

Figura 4.4 | (a) Resposta ao impulso do ROZ; (b) Sinal reconstruído a partir do ROZ; (c) Espectro de amplitude do ROZ



Fonte: Lathi (2008, p. 686).



Refleta

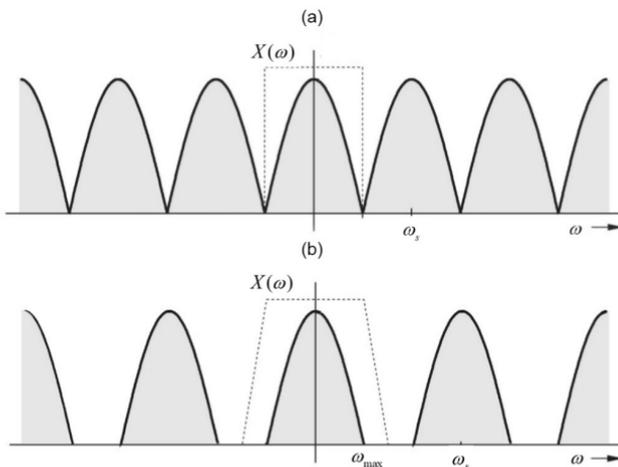
Imagine agora que usaremos um filtro de interpolação que possua resposta ao impulso no formato de uma função sinc que, pela dualidade da transformada de Fourier, possui espectro de amplitude no formato de pulso retangular. Esta alteração trará algum benefício à amostragem?

A amostragem de sinais em sistemas reais é realizada por conversores analógico-digitais (A/D ou CAD) e necessita de uma etapa de quantização, uma espécie de arredondamento do seu valor para o valor mais próximo possível dentre aqueles permitidos pelo A/D. Isto resulta em erro nas amostras, conhecido como erro

de quantização, e relaciona-se com a quantidade de bits disponíveis (LATHI, 2008). Estudaremos os conversores A/D na Seção 4.3.

Muito cuidado deve ser tomado ao fazer amostragem de sinais práticos, principalmente por causa do *aliasing*. Vamos supor que fizemos a amostragem de um sinal limitado em banda (ω_{\max}) com $\omega_s = 2\omega_{\max}$, de forma que o espectro de frequência do sinal original seja agora periódico – Figura 4.5 (a). Para reconstruir o sinal a partir das amostras do primeiro caso é necessário filtrá-lo com um filtro passa-baixas ideal, o que é impraticável dado que a ordem do filtro tenderia ao infinito. Assim, precisamos aumentar a taxa de amostragem para criar um espaçamento entre os ciclos do espectro de frequência – Figura 4.5 (b) –, de forma a tornar possível a filtragem e consequente reconstrução. É importante notar que todo espectro indesejado deve ser eliminado para a reconstrução do sinal, o que implica em ter atenuação infinita a partir de uma determinada frequência, portanto também impraticável. Isso nos leva à conclusão de que a reconstrução melhora conforme aumentamos a taxa de amostragem, apesar de ser impossível fazer a reconstrução exata de um sinal a partir das suas amostras (LATHI, 2008).

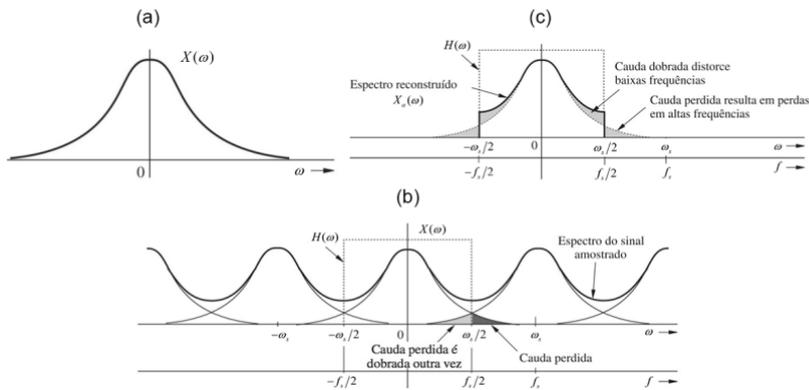
Figura 4.5 | Espectro de frequência de um sinal amostrado (a) na frequência de Nyquist e (b) acima da frequência de Nyquist; as linhas pontilhadas representam a resposta em frequência do filtro passa-baixas



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 688).

Outro problema prático é o *aliasing*, no qual parte do espectro adjacente interfere no espectro original, pois os sinais práticos não são limitados em banda – Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b). Esta sobreposição é minimizada conforme aumentamos a taxa de amostragem, mas nunca eliminada completamente. A Figura 4.6 (c) mostra o espectro do sinal reconstruído após filtragem ideal, destacando a diferença entre $X_a(\omega)$ e $X(\omega)$. Considerando uma taxa de amostragem ω_s , o *aliasing* causará a perda da cauda de $X(\omega)$ além do seu reaparecimento invertido a partir da frequência de dobra ($\omega_s/2$).

Figura 4.6 | (a) Espectro de frequência de um sinal prático; espectro dos sinais (b) amostrado e (c) reconstruído



Fonte: adaptado de Lathi (2008, p. 690).

Para sinais senoidais no formato $\text{sen}2\pi(f + mf_s)t$, o *aliasing* altera a frequência do sinal amostrado de acordo com:

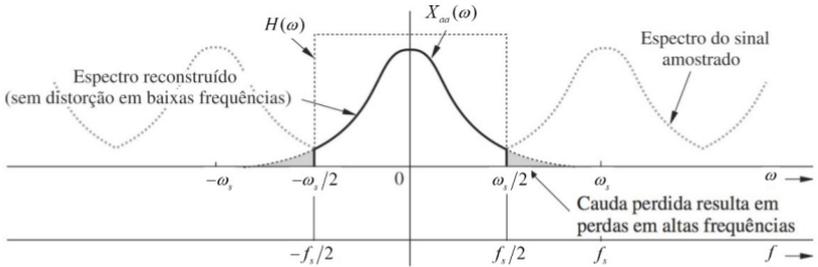
$$|f_a| = |f - mf_s| \quad (4.2)$$

Em que f_a é a frequência aparente, f é a frequência do sinal de tempo contínuo e m é um inteiro. Se f_a for negativo, haverá inversão de fase no sinal amostrado em relação ao original.

Uma maneira de superar este problema é aplicar um filtro passa-baixas analógico com frequência de corte menor que $\omega_s/2$ antes de fazer a amostragem do sinal, conhecido como filtro *antialiasing*. Dessa forma, o sinal reconstruído não terá distorções de baixa frequência, mas apenas perdas em altas frequências – Figura 4.7. Além disso, as frequências acima da $\omega_s/2$ não podem ser

amostradas por ω_s , pois estariam em desacordo com o teorema da amostragem de Nyquist.

Figura 4.7 | Espectro de frequência após aplicar o filtro *antialiasing*



Fonte: adaptada de Lathi (2008, p. 690).



Exemplificando

Considere o sinal $x(t) = \text{sen}(2\pi ft)$ amostrado sempre com $f_s = 200\text{Hz}$. Determine se haverá aliasing e a frequência aparente do sinal para (a) $f = 20\text{Hz}$, (b) $f = 120\text{Hz}$ e (c) $f = 250\text{Hz}$.

Solução:

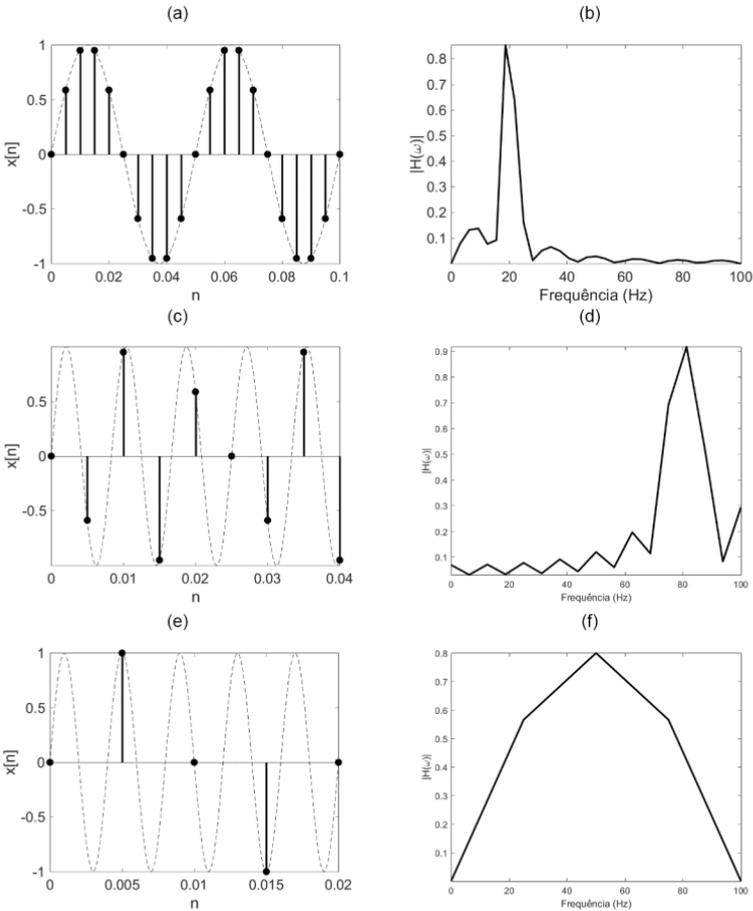
(a) Como 20 Hz é menor que a frequência de dobra (100 Hz), não haverá aliasing, e a frequência do sinal amostrado é 20 Hz.

(b) Como 120 Hz é maior que a frequência de dobra, haverá aliasing nesta condição, e o sinal amostrado terá frequência aparente $|f_a| = |120 - 200| \rightarrow |f_a| = 80\text{Hz}$ com inversão de fase.

(c) Como 250 Hz é maior que a frequência de dobra, haverá aliasing nesta condição, e o sinal amostrado terá frequência aparente $|f_a| = |250 - 200| \rightarrow |f_a| = 50\text{Hz}$ sem inversão de fase.

Todos os sinais amostrados e seus respectivos espectros de amplitude estão apresentados na Figura 4.8. As linhas pontilhadas representam os sinais de tempo contínuo de cada item avaliado.

Figura 4.8 | (a) Sinal de $f = 20\text{Hz}$ e (b) espectro de amplitude; (c) sinal de $f = 120\text{Hz}$ e (d) espectro de amplitude; (e) sinal de $f = 250\text{Hz}$ e (f) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Para aprender mais sobre amostragem de sinais, estude o capítulo 8 do livro:

LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Sinais e sistemas lineares**. Porto Alegre: Bookman, 2008. 856 p.

Para conhecer alguns aspectos mais avançados da teoria da amostragem, estude o capítulo 4 do livro:

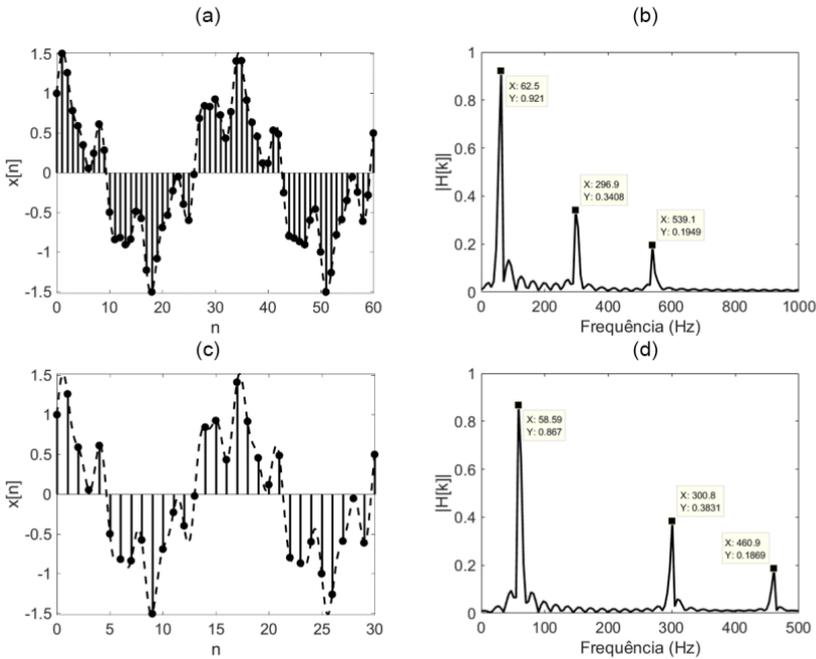
OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2012. 665 p.

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional e desenvolve junto com a sua equipe um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva. Supondo que este motor vibre com uma frequência fundamental de 60 Hz, além da quinta e nona harmônicas (300 Hz e 540 Hz), como você pode amostrar este sinal?

De acordo com o teorema da amostragem de Nyquist, este sinal precisa ser amostrado com uma frequência maior que 1080 Hz. Entretanto, para evitar problemas com *aliasing*, é conveniente aumentar a taxa de amostragem. A Figura 4.9 mostra a amostragem deste sinal de vibração para duas taxas de amostragem: 2000 Hz e 1000 Hz. Ambas as sequências são apresentadas com a quantidade de amostras necessárias para visualizarmos dois períodos do sinal. O espectro de frequência para $f_s = 2000\text{Hz}$ – Figura 4.9 (b) – apresenta a três componentes do sinal, 60 Hz, 300 Hz e 540 Hz. Entretanto, o espectro frequência para $f_s = 1000\text{Hz}$, menor que a taxa de Nyquist, apresenta *aliasing* e desloca a componente de 540 Hz para 460 Hz, induzindo uma leitura incorreta de uma das frequências de vibração.

Figura 4.9 | (a) Sinal de vibração amostrado com $f_s = 2000\text{Hz}$ e (b) espectro de amplitude; (c) sinal de vibração amostrado com $f_s = 1000\text{Hz}$ e (d) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Filtro *antialiasing* e a taxa de amostragem

Descrição da situação-problema

Um sensor de ultrassom é utilizado para medir o nível de fluido em tanques. O sinal de saída possui componentes de frequências entre 80 kHz e 100 kHz , devendo ser amostrado para ser usado em um sistema de processamento digital de sinais. Um filtro *antialiasing* com frequência de corte 300 kHz foi usado antes da amostragem. Este filtro foi bem projetado?

Resolução da situação-problema

Considerando que o sinal medido possui $f_{\max} = 100\text{kHz}$, então, de acordo com o teorema da amostragem de Nyquist, será necessário amostrá-lo com $f_s > 200\text{kHz}$. Entretanto, uma vez que o filtro *antialiasing* analógico possui frequência de corte 300kHz, a taxa de amostragem deve ser maior que este valor, pois, caso contrário, o filtro não atenuará as componentes adjacentes do espectro de frequência amostrado (periódico). Se aumentarmos a taxa de amostragem para 600kHz, por exemplo, as componentes produzidas pelo sensor apareceriam como 520 kHz e 500 kHz (com inversão de fase) e seriam atenuadas pelo filtro *antialiasing*. Se aumentarmos ainda mais a taxa de amostragem, digamos que para 1000 kHz, as componentes produzidas pelo sensor apareceriam como 920 kHz e 900 kHz (com inversão de fase) e seriam ainda mais atenuadas pelo filtro *antialiasing*. Portanto, este filtro *antialiasing* não foi bem projetado, e você precisa utilizar uma taxa de amostragem bem maior que a taxa de Nyquist.

Faça valer a pena

1. O teorema da amostragem de Nyquist deve ser observado sempre que formos fazer a amostragem de um sinal de tempo contínuo sob o risco da sequência de tempo discreto não representar adequadamente o sinal original. Efeitos de sobreposição espectral devem ser levados em consideração para evitar medições incorretas.

Avalie as afirmações a seguir sobre amostragem de sinais de tempo contínuo:

- I. Sinais limitados em banda devem ser amostrados com $f_s > 2f_{\max}$.
- II. *Aliasing* é o efeito de sobreposição do espectro de frequência e deve estar presente para garantir que o sinal amostrado tenha energia máxima.
- III. Retentores de ordem zero tomam uma amostra em um determinado instante de tempo e a mantém até o instante seguinte.

Assinale a alternativa que apresenta as afirmações corretas.

- a) I.
- b) II.
- c) I e III.
- d) II e III.
- e) I, II e III.

2. O *aliasing* é um problema que é inerente à aquisição de sinais e deve sempre ser levado em consideração. Quando um sinal não é limitado em banda, parte do espectro adjacente interfere no espectro original. Esta sobreposição é minimizada conforme aumentamos a taxa de amostragem, mas nunca eliminada completamente. Além disso, o *aliasing* pode causar a interpretação incorreta do espectro de frequência.

Considere os sinais $x(t) = \cos(200\pi t)$ e $y(t) = 2\sin(400\pi t)$ amostrados com $f_s = 500\text{Hz}$. Determine se haverá *aliasing* e a frequência aparente dos sinais.

- a) Haverá *aliasing* apenas para $y(t)$ com $|f_{ay}| = 100\text{ Hz}$ e inversão de fase.
- b) Haverá *aliasing* apenas para $y(t)$ com $|f_{ay}| = 100\text{ Hz}$ sem inversão de fase.
- c) Haverá *aliasing* apenas para $x(t)$ com $|f_{ax}| = 100\text{ Hz}$ e inversão de fase.
- d) Não há *aliasing* para ambos os sinais, e suas frequências aparentes são as suas frequências reais.
- e) Haverá *aliasing* apenas para $x(t)$ com $|f_{ax}| = 100\text{ Hz}$ sem inversão de fase.

3. O *aliasing* deve sempre ser levado em consideração no momento de fazer amostragem de sinais. Quando um sinal não é limitado em banda, parte do espectro adjacente interfere no espectro original e pode causar a interpretação incorreta do espectro de frequência.

Um sensor fornece um sinal de tensão senoidal como saída para medição de velocidade de um motor, cuja velocidade máxima é de 9000 rpm (rotações por minuto). A leitura de velocidade é feita por um sistema de aquisição de dados a partir da frequência do sinal de saída, onde 1 Hz equivale a 1 rps (rotação por segundo), e apresenta este resultado ao usuário. Considerando que o motor gira a velocidade máxima, determine a frequência medida quando a taxa de amostragem for 250 Hz e 500 Hz. Assinale a alternativa que apresenta as frequências medidas nesta ordem e qual das duas taxas de amostragem deve ser usada para o sistema de aquisição de dados.

- a) 100 Hz, 150 Hz e 500 Hz.
- b) 150 Hz, 150 Hz e 500 Hz.
- c) 100 Hz, 100 Hz e 250 Hz.
- d) 150 Hz, 100 Hz e 250 Hz.
- e) 150 Hz, 100 Hz e 500 Hz.

Seção 4.2

O algoritmo *Fast-Fourier Transform* (FFT)

Diálogo aberto

A análise de Fourier foi apresentada na Unidade 2 deste livro e nos forneceu ferramentas matemáticas para avaliar sinais e sistemas no domínio da frequência, tanto de tempo contínuo quanto discreto, por meio de séries e transformadas de Fourier. As análises feitas na ocasião foram realizadas algebricamente em sinais e sistemas com equacionamento conhecido como $x(t) = \cos(10t)$, por exemplo, o que não acontece necessariamente em sistemas digitais em que os sinais são amostrados. Nesta situação normalmente não dispomos de uma equação que defina a sequência obtida com a amostragem, mas apenas os valores das amostras. Sendo assim, a classe de algoritmos *Fast-Fourier Transform* (FFT) apresenta métodos numéricos poderosos para avaliar sequências de tempo discreto.

Retomando o nosso contexto, você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional e desenvolve junto com a sua equipe um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva. Você já identificou um critério para amostrar estes sinais adequadamente. Uma vez que você não conhece uma equação algébrica para definir esta vibração, como você pode identificar as componentes de frequência deste sinal?

Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

Não pode faltar

Sinais de tempo discreto reais, isto é, amostrados e armazenados em um sistema de processamento de sinais ou mesmo um computador, são sequências de duração finita com N amostras, normalmente variando de 0 a $N-1$. A transformada de Fourier discreta (TFD), ferramenta fundamental para análise deste tipo de sinais, é

uma sequência que corresponde a amostras da transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD). A TFD de uma sequência $x[n]$ é definida pelas equações de síntese e de análise:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (4.3)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (4.4)$$

Compare a Equação 4.3 (síntese) com a definição da TFTD (Equação 2.27, repetida aqui por conveniência) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ e note que a TFD é a TFTD para $\Omega = 2\pi k/N$. Em outras palavras, a TFD não é uma função de variável contínua como a TFTD, mas uma sequência determinada pela amostragem desta última em intervalos de frequência $2\pi k/N$. Além disso, a TFD também pode ser obtida a partir da transformada Z (TZ), fazendo $z = e^{-j2\pi k/N}$, isto é, com amostras igualmente espaçadas na circunferência de raio unitário com ângulo $2\pi/N$. A TFD de uma sequência é periódica em k com período N , e várias das suas propriedades são relativamente similares às definidas para a TFTD.



Assimile

A TFD é uma sequência e está relacionada com a TFTD a partir da amostragem desta última. A TFD pode ser implementada via software para determinar o espectro de frequência de sequências de tempo discreto numericamente.

Uma outra forma de representar a TFD é:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (4.5)$$

em que $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$ e o índice k varia de 0 até $N-1$. Para

calcular todos os termos da TFD pela Equação 4.5 será necessário fazer aproximadamente N^2 operações de adição e multiplicação. Esta complexidade computacional não é aceitável para grandes quantidades de amostras pelo número proibitivo de operações necessárias para determinar a TFD. Assim, precisamos de uma maneira mais rápida para calculá-la, isto é, diminuir a complexidade computacional do algoritmo de forma a viabilizar a determinação da TFD, em especial para que isso possa ser feito por processadores de tempo real.

A classe de algoritmos da FFT entra em cena com diversos métodos para resolver este problema. Eles se baseiam na divisão da sequência de comprimento N em sequências menores, para então determinar a TFD. A divisão da sequência pode ocorrer no tempo ou na frequência, o que gera duas classes de FFT: aquelas com decimação (ou dizimação) no tempo e na frequência, respectivamente. O método apresentado nesta seção usa a decimação no tempo.

Considere uma sequência $x[n]$ com quantidade de amostras igual a uma potência inteira de 2 ($N = 2^p$). Esta sequência pode ser decomposta em duas sequências, $x_1[n] = x[2n]$ e $x_2[n] = x[2n + 1]$, contendo as amostras pares e ímpares respectivamente. A TFD será:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_N^{2kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_N^{2kn} \quad (4.6)$$

Uma vez que $W_N^2 = W_{N/2}$, temos:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_{N/2}^{kn} \quad (4.7)$$

As parcelas da Equação 4.7 são as TFD das duas sequências criadas, de forma que:

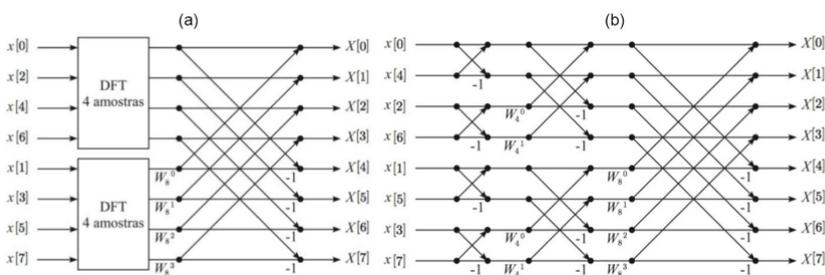
$$X[k] = X_1[k] + W_N^k X_2[k] \quad (4.8)$$

Uma vez que ambas as TFD são periódicas com período $N/2$, calculamos $X[k]$ como:

$$X[k] = X_1[k - N/2] + W_N^k X_2[k - N/2] \quad (4.9)$$

Assim, a TFD da sequência de N amostras será calculada a partir da TFD de duas sequências com $N/2$ amostras. Por exemplo, para 8 amostras temos $X[0] = X_1[0] + W_8^0 X_2[0]$, $X[1] = X_1[1] + W_8^1 X_2[1]$ até $X[7] = X_1[3] + W_8^7 X_2[3]$. Esquemáticamente, este procedimento é representado pelo gráfico de fluxo de sinais da Figura 4.10 (a), conhecido como *butterfly*. A complexidade computacional deste algoritmo é dada por $N \log_2 N$, o que representa uma drástica redução quando comparado com N^2 operações (NALON, 2014). Os blocos TFD de 4 amostras podem ser divididos novamente para calcularmos TFD de ordem ainda menor e assim sucessivamente. A Figura 4.10 (b) mostra a representação esquemática completa da FFT de 8 amostras.

Figura 4.10 | Representação esquemática do cálculo da FFT com 8 amostras com (a) blocos de TFD de 4 amostras e (b) completo



Fonte: Nalon (2014, p. 122).

Exemplificando

Determine a TFD da sequência $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$.

Solução: a sequência de tempo discreto possui $N = 8$ amostras, e a sua TFD será calculada de acordo com a Equação 4.9. O primeiro termo é determinado por $X[0] = X_1[0] + W_8^0 X_2[0]$, como segue:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_{N/2}^{kn} \rightarrow X_1[0] = \sum_{n=0}^3 x_1[n]$$

$$\rightarrow X_1[0] = \sum_{n=0}^3 x[2n] \rightarrow X_1[0] = x[0] + x[2] + x[4] + x[6]$$

$$\rightarrow X_1[0] = 2$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_{N/2}^{kn} \rightarrow X_2[0] = \sum_{n=0}^3 x_2[n]$$

$$\rightarrow X_2[0] = \sum_{n=0}^3 x[2n+1] \rightarrow X_2[0] = x[1] + x[3] + x[5] + x[7]$$

$$\rightarrow X_1[0] = 2$$

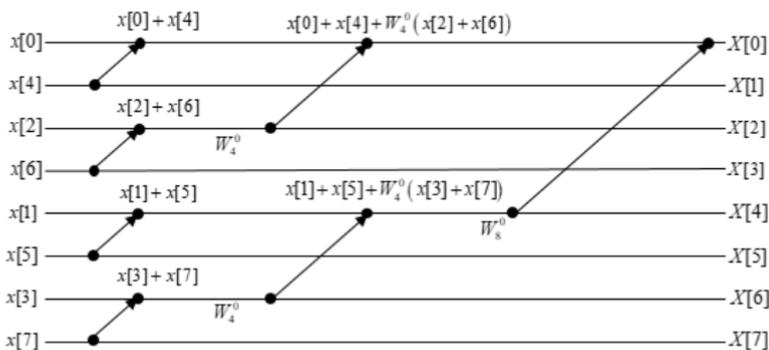
Portanto, $X[0] = 4$. Este resultado poderia ter sido obtido aplicando a FFT, que corresponde ao cálculo dos valores da sequência da TFD a partir do algoritmo *butterfly*, apresentado na Figura 4.11 apenas para o termo $X[0]$. Assim, este termo é dado por:

$$X(0) = x[0] + x[4] + W_4^0 (x[2] + x[6]) + x[1] + x[5] + W_4^0 (x[3] + x[7])$$

$$X(0) = x[0] + x[4] + x[2] + x[6] + x[1] + x[5] + x[3] + x[7]$$

$$X(0) = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4$$

Figura 4.11 | Algoritmo *butterfly* para cálculo de $X[0]$



Fonte: elaborada pelo autor.

Os demais termos da TFD desta sequência estão apresentados no Quadro 4.1.

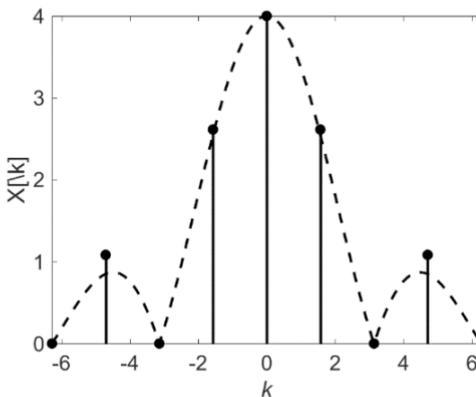
Quadro 4.1 | Coeficientes da TFD calculados pela FFT

k	$X[k]$	k	$X[k]$
0	4	4	0
1	$1 - j2,4142$	5	$1 + j0,4142$
2	0	6	0
3	$1 - j0,4142$	7	$1 + j2,4142$

Fonte: elaborado pelo autor.

O espectro de amplitude desta sequência é apresentado na Figura 4.12, onde a linha pontilhada indica a TFD deste sinal. Repare que há um certo erro entre a TFD e TFTD, pois a função sinc não é limitada em frequência.

Figura 4.12 | Espectro de amplitude de $X[k]$



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

A FFT divide uma sequência em sequências menores para facilitar o cálculo da TFD. No exemplo anterior, a sequência possui $2^3 = 8$

amostras. É possível calcular a FFT de uma sequência cuja quantidade de amostras não seja uma potência de 2?



Assimile

A FFT de um sinal limitado em frequência é a amostragem da TFTD. Entretanto, quando o sinal não for limitado em frequência, haverá um erro entre a FFT e a TFTD.

A FFT pode ser implementada em microprocessadores para realizar o cálculo da TFD em tempo real e/ou após o armazenamento da sequência amostrada em memória. O cálculo da FFT pode ser facilmente implementado via Matlab® ou softwares com capacidades similares. Há um grande número de funções predefinidas que facilitam a criação de códigos customizados pelo usuário para suas aplicações. O exemplo a seguir apresenta uma maneira simples de usar a FFT no Matlab.



Exemplificando

Use o Matlab para encontrar a TFD da sequência do exemplo anterior $\mathbf{x}[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$. Considere que este sinal foi obtido a partir da amostragem da função $\text{ret}(t)$ com $T_s = 0,5\text{s}$.

Solução: o código a seguir calcula a FFT de $\mathbf{x}[n]$ e apresenta a comparação entre o seu módulo e o da TFD (Figura 4.12).

```
close all
T0 = 4; % Período fundamental da sequência
N0 = 8; % Quantidade de amostras
T = T0/N0; % Período de amostragem
x = [ones(1, 4) zeros(1, 4)]'; % Sequência
X = fft(x); % Determina a FFT da sequência
```

```

r = [-N0/2:N0/2-1]'; % Índices da sequência
omega_r = r*2*pi/T0; % Ângulo
omega = linspace(-pi/T,pi/T,4097); % Cria vetor
de frequências
X_TFTD = 4*sinc(omega*2/(2*pi)); % Calcula a
TFTD
figure()
p=plot(omega,abs(X_TFTD),'k--') % Plot o módulo
da TFTD
set(p,'LineWidth',2);
hold on
% fftshift altera o eixo de frequências de 0 até
f_max
p=stem(omega_r,fftshift(abs(X)),'k','filled');
set(p,'LineWidth',2);
xlabel('\itk');
ylabel('|X[\k]|');
axis tight
set(gca,'fontname','Arial','fontsize',16)

```

Podemos usar a mesma ideia da FFT para calcular a transformada inversa e obter as amostras de uma sequência a partir da sua resposta em frequência:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[-k] W_N^{-kn} \quad (4.10)$$

O algoritmo que vimos anteriormente pode ser usado para calcular a FFT inversa, bem como a função `ifft(x)` do Matlab.



Para aprender mais sobre a TFD e os métodos numéricos para implementá-la, estude os capítulos 8 e 9 do livro:

OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2012. 665 p.

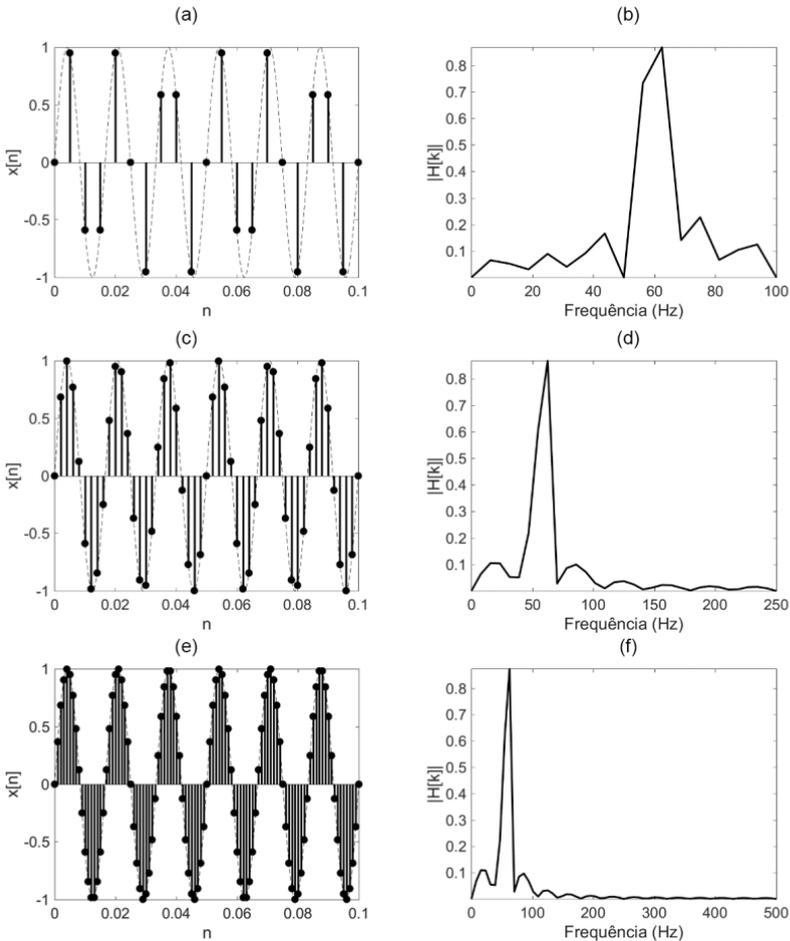
Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional e desenvolve junto com a sua equipe um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva. Supondo que este motor vibre com uma frequência fundamental de 60 Hz, você sabe que deverá amostrar este sinal com uma taxa maior que 120 Hz. Como você pode garantir que a sequência obtida é coerente com o sinal de tempo contínuo?

Podemos usar a FFT para identificar o espectro de frequência de uma sequência de tempo discreto. Além disso, este cálculo pode ser realizado em tempo real por um microprocessador, uma vez que a quantidade de operações necessárias para calcular a FFT é muito menor do que o cálculo da TFD pela definição.

Conforme aumentamos a taxa de amostragem, maior será a frequência de dobra e, conseqüentemente, será cada vez mais fácil isolar o espectro do sinal das suas repetições. A Figura 4.13 mostra alguns sinais senoidais de 60 Hz obtidos para diferentes taxas de amostragem e as FFTs das sequências. A diferença entre as sequências obtidas é visualmente grande e, de maneira direta, concluímos que quanto maior for a taxa de amostragem melhor será a representação do sinal de tempo contínuo. Entretanto, essa melhoria vem com um preço: aumento na quantidade de amostras que devem ser armazenadas em alguma memória.

Figura 4.13 | (a) Sinal de vibração amostrado com $f_s = 200\text{Hz}$ e (b) espectro de amplitude; (c) sinal de vibração amostrado com $f_s = 500\text{Hz}$ e (d) espectro de amplitude; (e) sinal de vibração amostrado com $f_s = 1000\text{Hz}$ e (f) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso de um sistema de aquisição de dados, precisamos definir qual será a maior frequência de interesse para então definir a taxa de amostragem. Por exemplo, se quisermos limitar a banda

de frequência em 200 Hz, $f_s = 500\text{Hz}$ já seria o suficiente pelo teorema da amostragem.

O código usado para criar os gráficos da Figura 4.13 foi:

```
fs= 200; % f de amostragem
Ts=1/fs; % T de amostragem
f=60; % f0 do sinal
t = 0:Ts:0.1; % Vetor de tempo
fig=figure()
x = sin(2*pi*f*t); % Sequência de tempo discreto
p = stem(t,x,'k','filled') % Plota a sequência
set(p,'LineWidth',2);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
fig=figure()
L=length(x);
N = length(x);
Nfft=2^(nextpow2(N)); % Completa com zeros até a
próxima potência de 2
Y = fft(x,Nfft)/L; % Calcula a FFT
f = fs/2*linspace(0,1,Nfft/2+1); % Vetor de
frequências
p=plot(f,2*abs(Y(1:Nfft/2+1)),'k'); % Plota o
espectro de amplitude
set(p,'LineWidth',2);
xlabel('Frequência (Hz)');
ylabel('|H[k]|')
```

Avançando na prática

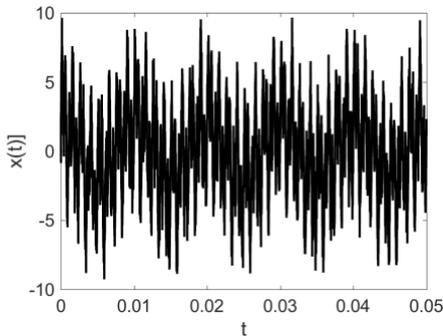
Identificação de componentes de frequência de um sinal de vibração

Descrição da situação-problema

Um sensor piezoelétrico é usado para medir vibrações mecânicas

em um motor de esteira, e o sinal produzido é apresentado na Figura 4.14. Como você poderia identificar se há algum risco ao motor, supondo que vibrações maiores 1,5 kHz sejam danosas?

Figura 4.14 | Sinal obtido com sensor

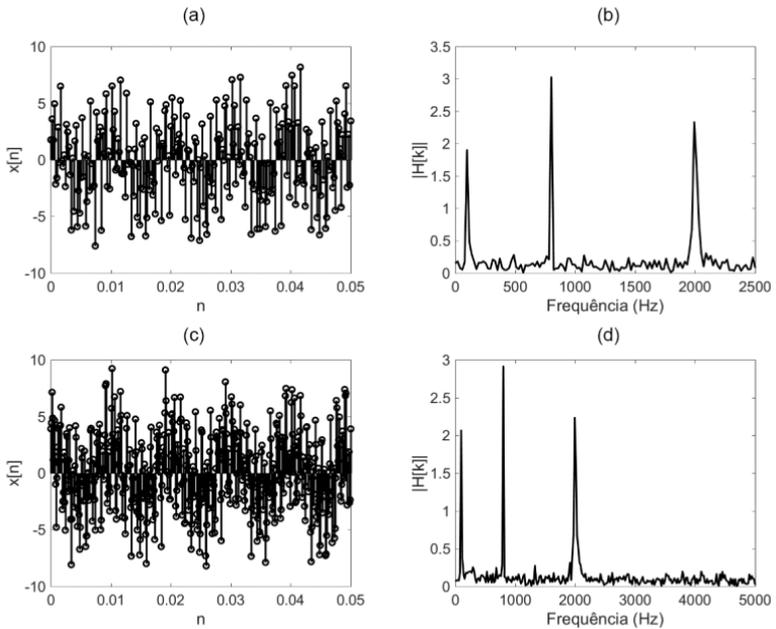


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Para determinar as componentes de frequência deste sinal, podemos aplicar a FFT em uma sequência após fazer a amostragem e verificar se há alguma componente maior que 1,5 kHz. Usando $f_s = 5\text{kHz}$ como uma estimativa inicial da taxa de amostragem, obtemos a sequência e sua FFT – Figuras 4.15 (a) e 4.15 (b) respectivamente –, sendo possível identificar três componentes fundamentais: 100 Hz, 800 Hz e 2 kHz. Como esta última está próxima da frequência de dobra (2,5 kHz), aumentamos a taxa de amostragem para $f_s = 10\text{kHz}$ e obtemos uma nova sequência e FFT – Figuras 4.15 (c) e 4.15 (d) respectivamente. Com esta nova medida, constatamos que não há problema de *aliasing* e, portanto, as frequências principais deste sinal são de fato 100 Hz, 800 Hz e 2 kHz. Desse modo, há componentes de frequência de vibração danosas ao motor.

Figura 4.15 | (a) Amostras e (b) FFT para $f_s = 5 \text{ kHz}$; (c) amostras e (d) FFT para $f_s = 5 \text{ kHz}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. A complexidade computacional é uma medida da quantidade de operações necessárias para calcular a solução de um problema. Aplicações de tempo real para o cálculo da TFD precisam ter baixa complexidade computacional, o que pode ser alcançado com algoritmos de FFT.

Avalie as afirmações a seguir sobre a TFD:

- I. A complexidade computacional da classe de algoritmos FFT é da ordem $N \log_2 N$.
- II. A complexidade computacional para determinar a TFD a partir da definição é da ordem N^2 .
- III. A TFD está relacionada com a TFDC a partir de amostras em intervalos iguais de frequência.

Assinale a alternativa que apresenta as opções corretas.

- a) I.
- b) II.
- c) I e II.
- d) II e III.
- e) I, II e III.

2. Algoritmos de alta complexidade computacional para determinar a TFD não são aceitáveis para grandes quantidades de amostras pelo número proibitivo de operações necessárias. Assim, precisamos de uma maneira mais rápida para calculá-la, isto é, diminuir a complexidade computacional do algoritmo de forma a viabilizar a determinação da TFD, em especial para que isso possa ser feito por processadores de tempo real.

Complete as lacunas a seguir sobre a FFT:

Considere uma sequência com 64 amostras de um sinal. Serão necessárias _____ operações para determinar a TFD a partir da definição. Em contrapartida, usando-se um algoritmo de FFT, pode-se determiná-la com _____ operações, isto é, aproximadamente ____ % das operações necessárias pela definição.

- a) 4.096, 384 e 9,4.
- b) 384, 384 e 100.
- c) 384, 4.096 e 1.066.
- d) 4.096, 160 e 3,9.
- e) 4.096, 200 e 4,9.

3. A classe de algoritmos da FFT entra em cena com diversos métodos para resolver este problema. Eles se baseiam na divisão da sequência de comprimento N em sequências menores, para então determinar a TFD. A divisão da sequência pode ocorrer no tempo ou na frequência.

Enunciado:

Determine a TFD da sequência $x[n] = \{0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$.

- a) $X[k] = \{-4, -6, 8284, 0, -1, 1716, 0, -1, 1716, 0, -6, 8284\}$.
- b) $X[k] = \{16, 0, 0, -1, 1716, 0, 0, 0, -6, 8284\}$.
- c) $X[k] = \{-16, -6, 8284, 0, -1, 1716, 0, -1, 1716, 0, -6, 8284\}$.
- d) $X[k] = \{4, -6, 8284, 0, -1, 1716, 0, -1, 1716, 0, -6, 8284\}$.
- e) $X[k] = \{16, -6, 8284, 0, -1, 1716, 0, -1, 1716, 0, -6, 8284\}$.

Seção 4.3

Introdução aos sistemas de aquisição de dados

Diálogo aberto

Seja bem-vindo à última seção desta disciplina. Durante esta unidade você conheceu o teorema da amostragem de Nyquist e o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) para análise de sinais. Agora nós vamos conhecer mais sobre sistemas de aquisição de dados em uma perspectiva de processamento de sinais.

Imagine agora que você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva, isto é, para antecipar algum problema. Você já sabe a taxa de amostragem necessária e pode usar a FFT para avaliar o espectro de frequências de vibrações. Como você pode aplicar o teorema da amostragem para definir o hardware necessário para o seu projeto? Como você pode rejeitar parte dos ruídos das medidas? Para responder a esta e outras perguntas, fique atento aos conceitos que trabalharemos nesta seção.

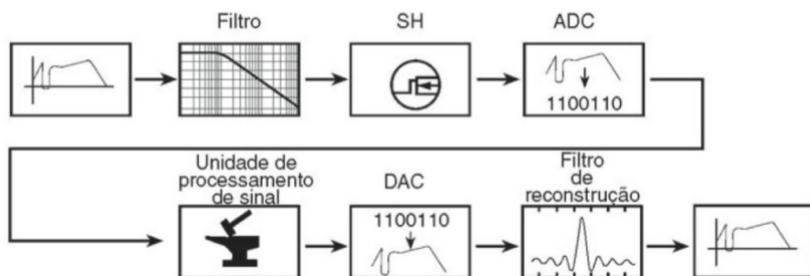
Bons estudos.

Não pode faltar

Sistemas de aquisição de dados (*data acquisition system* – DAQ) são usados para ler sinais analógicos e convertê-los para serem processados por um sistema digital. Este processamento digital pode envolver determinação de alguma figura de mérito, amplificação e filtragem, entre outros, e é feito com os valores da sequência de tempo discreto fornecida pelo DAQ. A Figura 4.16 apresenta um diagrama de blocos de um sistema genérico de processamento digital de sinais. O sinal analógico passa por um filtro *anti-aliasing*, que pode ser implementado por um filtro ativo, passivo ou até mesmo um circuito integrado dedicado. O estágio *sample and hold* (SH) é usado para manter o sinal contínuo em um valor até que

a conversão analógico-digital acontece e possa receber a amostra seguinte. Isso evita que alterações bruscas no sinal comprometam o valor da amostra e garante que este valor tenha equivalência exata do momento ao qual foi amostrado.

Figura 4.16 | Diagrama de blocos de um sistema genérico de processamento digital de sinais



Fonte: adaptada de Balbinot e Brusamarello (2011, p. 186).

O conversor analógico-digital (A/D ou ADC) converte o sinal de tempo contínuo em uma sequência de amostras representadas em números binários proporcional à amplitude do sinal. As amostras passam por um processo de aproximação dentro de um intervalo finito de valores, conhecido como quantização. Este sinal é enviado à unidade de processamento, responsável por realizar cálculos e operações na sequência de valores amostrados, tal como determinar alguma figura de mérito do sinal, calcular o espectro de frequência, realizar filtragem de componentes de frequência indesejáveis, etc. Após o processamento, o sinal precisa ser convertido para o domínio do tempo por meio de conversores digital-analógico (D/A ou DAC) e um filtro de reconstrução.



Assimile

A aquisição de dados faz parte de sistemas de processamento digital de sinais e deve ser feita de modo a garantir que o processador receba amostras representativas do sinal de entrada (analógico).

Vamos voltar nossa atenção para o conversor A/D. Cada nível de quantização é representado por um código binário – Figura 4.17.

Um ADC de N bits representará o sinal analógico em 2^N níveis

separados pelo passo de quantização $\delta = \frac{V_{\max}}{2^N - 1}$. A diferença entre

o valor digital de saída do A/D e o valor real é conhecido como erro de quantização. Quanto maior for o número de bits, maior será a quantidade de níveis de quantização e menor será o passo de quantização, o que resulta em menor erro de quantização, isto é, melhor representação do sinal.

Figura 4.17 | Níveis de quantização de conversores A/D de 4 bits



Fonte: adaptada de Floyd (2007, p. 766).



Exemplificando

Um conversor A/D de 10 bits e alimentado com 5 V é usado para amostrar um sinal de tensão cuja amplitude pode variar de 0 a 2 V. Nessas condições, determine a quantidade de níveis de quantização e o passo de quantização deste conversor A/D. Quais serão os códigos binários fornecidos quando o sinal de entrada for 1 V e 2 V.

Solução: este conversor de 10 bits possui $2^{10} = 1024$ níveis de quantização, de 0 a 1023. O passo de quantização deste conversor

A/D é $\delta = \frac{5}{1023} = 4,887 \text{ mV}$. Quando o sinal de entrada for de 1 V,

o código binário de saída será $\frac{1023}{5} \cdot 1 \approx 204 = 11001100_2$. Quando o sinal de entrada for de 2 V, o código binário de saída será $\frac{1023}{5} \cdot 2 \approx 408 = 110011000_2$.

Precisamos dar atenção especial à faixa de leitura do A/D, que pode ser de 0 V a uma tensão máxima positiva. Se o sinal de entrada no A/D precisar ser sempre positivo, um circuito eletrônico auxiliar, conhecido como condicionador de sinais, deverá ser projetado para condicionar o sinal para ser medido. Uma possibilidade é usar um amplificador somador para adicionar uma componente contínua ao sinal que faça seu valor mínimo ser positivo. A faixa de leitura do A/D sempre deverá ser consultada na folha de dados (*datasheet*) fornecida pelo fabricante.

Há diversas especificações importantes para selecionarmos um conversor A/D comercial adequado, dentre as quais destacamos a quantidade de bits (resolução), o erro total de aproximação, o modo de transmissão e a taxa de amostragem. O modo de transmissão pode ser serial ou paralelo, sendo que o primeiro é mais lento que o segundo, pois transmite toda a informação por meio de uma conexão. Já a transmissão paralela é mais rápida e precisa de um número maior de conexões (uma por bit do A/D). A taxa de amostragem de conversores comerciais é informada em quantidade de mil amostras por segundo (*kilo sample per second* - kSPS) ou mesmo milhão de amostras por segundo (MSPS), além das características necessárias para atingi-la.



Exemplificando

Um A/D com 40 kSPS consegue amostrar 40 mil amostras por segundo, o que equivale a 40 kHz de frequência de amostragem ou **25µs** de período de amostragem.



Há diversas formas de fazer a conversão A/D e D/A, como o método de aproximações sucessivas, redes R/2R, entre outras, e uma análise detalhada disto foge ao escopo desta disciplina, mas pode ser facilmente encontrada na literatura. Além dos critérios apresentados aqui, é necessário verificar a frequência do *clock*, a tensão de alimentação, a potência dissipada, etc.

Para conhecer mais sobre os conversores A/D e D/A, estude o capítulo 11 do livro:

TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L. **Sistemas digitais**: princípios e aplicações. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 820 p.

Um filtro digital comumente usado em sistemas de aquisição de dados é o filtro de médias móveis (*moving average filter*), cujo objetivo é armazenar a média de N amostras da sequência de tempo discreto. Este filtro, que possui resposta ao impulso finita (FIR), é utilizado para rejeição de ruídos e para suavizar a curva do sinal após a amostragem e é definido como:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (4.11)$$

em que $y[n]$ e $x[n]$ são os sinais de saída e entrada, respectivamente. A equação 4.11 pode ser reescrita como

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n]h[n-k], \text{ em que } h[n-k] \text{ é um filtro cuja}$$

resposta ao impulso é:

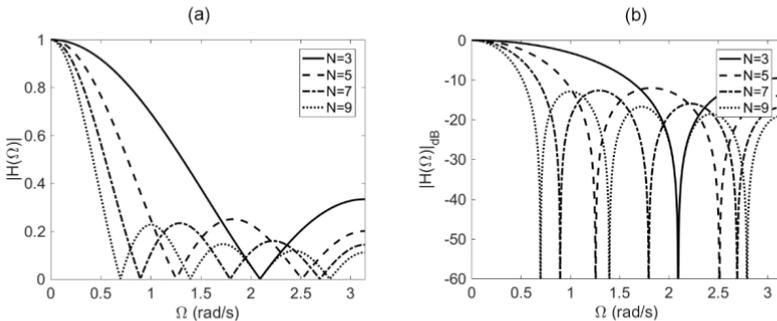
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0, & \text{se fora do intervalo} \end{cases} \quad (4.12)$$

O módulo da resposta em frequência deste filtro para diversos valores de N está apresentado na Figura 4.18 (a) e em decibéis na Figura 4.18 (b) e é da forma:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega \frac{N-1}{2}} \frac{\text{sen}(\Omega N/2)}{N \text{sen}(\Omega/2)} \quad (4.13)$$

A largura do lóbulo principal e a frequência de corte deste filtro (atenuação de 3 dB) são determinadas por $2\pi/N$ e $\Omega_c = 0,91\pi/N$, respectivamente.

Figura 4.18 | Módulo da resposta em frequência de filtros de média móvel em (a) escala linear e (b) em dB



Fonte: elaborada pelo autor.

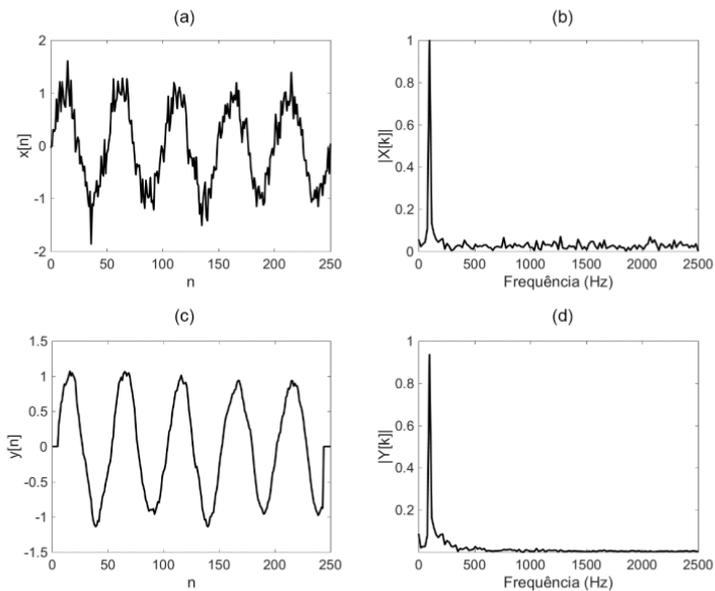
Analisando os gráficos da Figura 4.18, é possível notar que a rejeição de uma determinada frequência não necessariamente será maior conforme aumentamos a ordem no filtro. Por exemplo, quando $N = 5$, a componente $\Omega = 2,5 \text{ rad/s}$ é totalmente eliminada do sinal. Entretanto, quando $N = 7$ ou $N = 9$, essa mesma componente é apenas atenuada ao invés de eliminada. Assim, aumentar a ordem do filtro de médias móveis não necessariamente aumentará a atenuação para uma determinada frequência, e essa análise deve fazer parte do projeto do filtro.

Conforme mencionamos antes, o filtro de média móvel é bastante utilizado para rejeição de ruídos como o ruído branco, caracterizado por não apresentar nenhuma componente de frequência particularmente importante. Este ruído é comumente encontrado em sistemas de áudio e medições de sensores.



Tome como exemplo o sinal senoidal corrompido com ruído branco – Figura 4.19 (a). Seu espectro de frequência revela que não há nenhuma frequência particularmente importante além daquela do próprio sinal (100 Hz). O sinal foi filtrado com um filtro de médias móveis com $N = 7$ e é apresentado com seu espectro de amplitude nas Figuras 4.19 (c) e 4.19 (d), respectivamente.

Figura 4.19 | (a) Sinal de entrada ($x[n]$) e seu (b) espectro de amplitude; (c) sinal de saída ($y[n]$) e seu (d) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

O seguinte código foi usado para gerar o sinal corrompido com ruído e filtrá-lo com filtro de médias móveis.

```
fs = 5e3; % f de amostragem  
Ts=1/fs; % T de amostragem  
n=0:250; % Quantidade de amostras  
% wgn é uma função que cria um sinal de ruído
```

```

branco

x = sin(2*pi*100*n*Ts)+wgn(1,length(n),1)/5; %
sinal

fig=figure();

p=plot(n,x,'k') % plota o sinal

xlabel('n');

ylabel('x[n]');

fig=figure()

L=length(x);

N = length(x);

Nfft=2^(nextpow2(N)); % Completa com zeros até a
próxima potência de 2

Y = fft(x,Nfft)/L; % Calcula a FFT

f = fs/2*linspace(0,1,Nfft/2+1); % Vetor de
frequências

p=plot(f,2*abs(Y(1:Nfft/2+1)),'k'); % Plota o
espectro de amplitude

xlabel('Frequência (Hz)');

ylabel('|X[k]|')

y = zeros(size(x)); % Vetor para armazenar o
sinal filtrado

N = 7;

% Médida móvel com N=7

for i=N:length(x)-N

```

```

        y(i)=(x(i)+x(i-1)+x(i-2)+x(i-3)+x(i-4)+x(i-
5)+x(i-6))/N;

end

fig=figure()

p=plot(n,y,'k') % Apresenta o sinal filtrado.
xlabel('n');
ylabel('y[n]');

fig=figure()

L=length(y);
N = length(y);

Nfft=2^(nextpow2(N)); % Completa com zeros até a
próxima potência de 2

Y2 = fft(y,Nfft)/L; % Calcula a FFT do sinal
filtrado

f = fs/2*linspace(0,1,Nfft/2+1); % Vetor de
frequências

p=plot(f,2*abs(Y2(1:Nfft/2+1)),'k'); % Plota o
espectro de amplitude

xlabel('Frequência (Hz)');
ylabel('|Y[k]|')

```

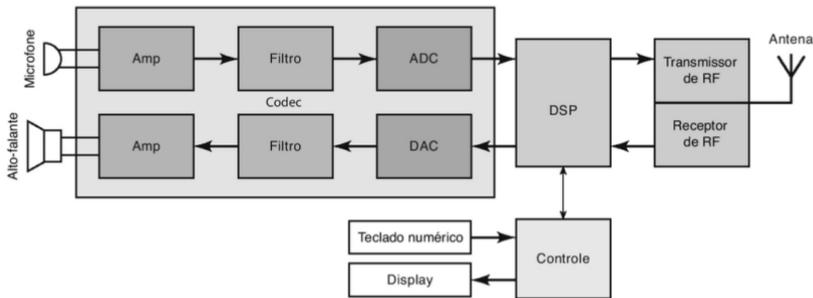


Refleta

O módulo da resposta em frequência do filtro de média móvel indica que as componentes de frequência acima da frequência de corte não são eliminadas, mas apenas atenuadas. Assim, apesar de possuir comportamento semelhante a um filtro passa-baixas, por que o filtro de média móveis não é usado para este objetivo?

Retomando o contexto geral apresentado na Figura 4.16, a unidade de processamento pode ser um processador de sinais digitais (*digital signal processor – DSP*), que é um tipo de microprocessador dedicado para operações em tempo real. Sistemas de telecomunicações, processamento de áudio e vídeo, radar e telefone celular utilizam DSP para tratamento dos sinais adquiridos pelo ADC e depois os convertem por meio de DAC para o mundo real. A Figura 4.20 apresenta o diagrama de blocos simplificado de um telefone celular.

Figura 4.20 | Diagrama de blocos simplificado de um telefone celular



Fonte: Tocci; Widmer; Moss (2011, p. 672).

Sem medo de errar

Retomando o nosso contexto, você é engenheiro líder de projetos de motores elétricos de uma grande empresa multinacional. Atualmente, você e sua equipe estão desenvolvendo um equipamento para fazer análise de vibrações mecânicas de motores como uma forma de manutenção preditiva, isto é, para antecipar algum problema. Como você pode aplicar o teorema da amostragem para definir o hardware necessário para o seu projeto? Usando a FFT você verificou que os sinais de vibração possuem grande quantidade de ruídos, o que dificulta a análise do espectro de frequências. Como você pode rejeitar parte dos ruídos das medidas?

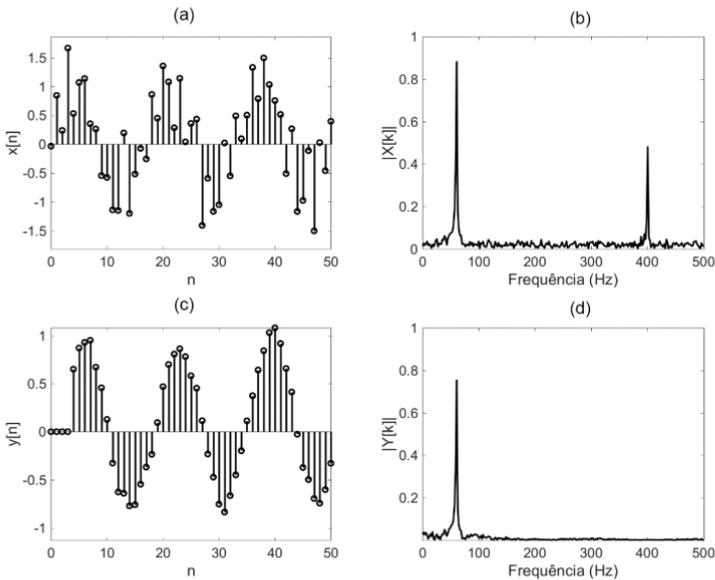
Verificamos na Seção 4.2 que $f_s = 500\text{Hz}$ não só está de acordo com o teorema da amostragem como fornece uma

boa representação do sinal em tempo discreto, o que acaba por melhorar o espectro de frequência determinado pela FFT. Assim, conversores A/D que possuam taxa de amostragem maior ou igual a 500 amostras por segundo atenderão o seu projeto perfeitamente. Para termos uma melhor representação no domínio do tempo, você define que usará um A/D com 1 kSPS. Supondo que o sinal a ser medido esteja condicionado entre 0 e 5 V, vários circuitos integrados comerciais, como o ADC0804, serão capazes de fazer esta amostragem com 8 bits de resolução e passo de quantização

$$\delta = \frac{5}{2^8 - 1} = 19,6\text{mV} .$$

Suponha agora que o sinal de vibração foi corrompido com ruído branco e uma componente de 400 Hz – Figuras 4.21 (a) e 4.21 (b). Podemos projetar um filtro de média móvel para rejeitar parte deste ruído e aprimorar o sinal medido. Neste caso, a frequência normalizada será em relação a 500 Hz. Fazendo $N = 5$, a frequência de corte e a largura do lóbulo principal serão **$0,182\pi\text{rad/s}$** e **$0,4\pi\text{rad/s}$** , respectivamente. De acordo com a Figura 4.18, a componente de 400 Hz ($\approx 2,5\text{ rad/s}$) será totalmente eliminada do sinal, e o ruído branco será atenuado, conforme Figuras 4.21 (c) e 4.21 (d). Assim, o filtro de média móvel com $N = 5$ atende as necessidades do projeto.

Figura 4.21 | (a) Sequência amostrada por ADC e seu (b) espectro de amplitude; (c) sequência após filtragem por média móvel com $N = 5$ e seu (d) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

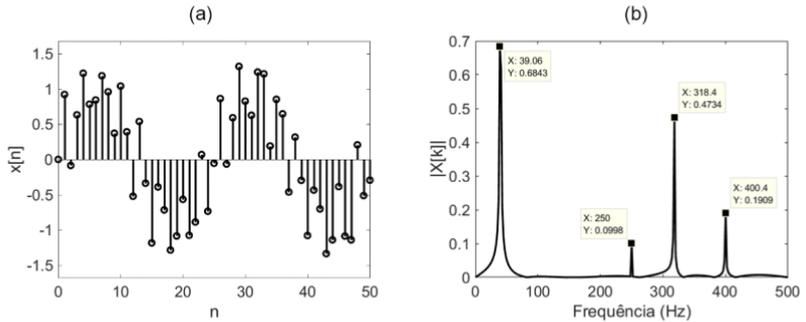
Avançando na prática

Projeto de filtro de médias móveis

Descrição da situação-problema

As Figuras 4.22 (a) e 4.22 (b) mostram uma medida de vibração feita por um A/D e seu espectro de amplitude. Uma vez que a vibração do motor possui frequência fundamental de 40 Hz, as demais componentes apresentadas são consideradas ruído. Assim, você decide projetar um filtro de média móvel para eliminar as componentes indesejadas.

Figura 4.22 | (a) Sequência amostrada por ADC e seu (b) espectro de amplitude

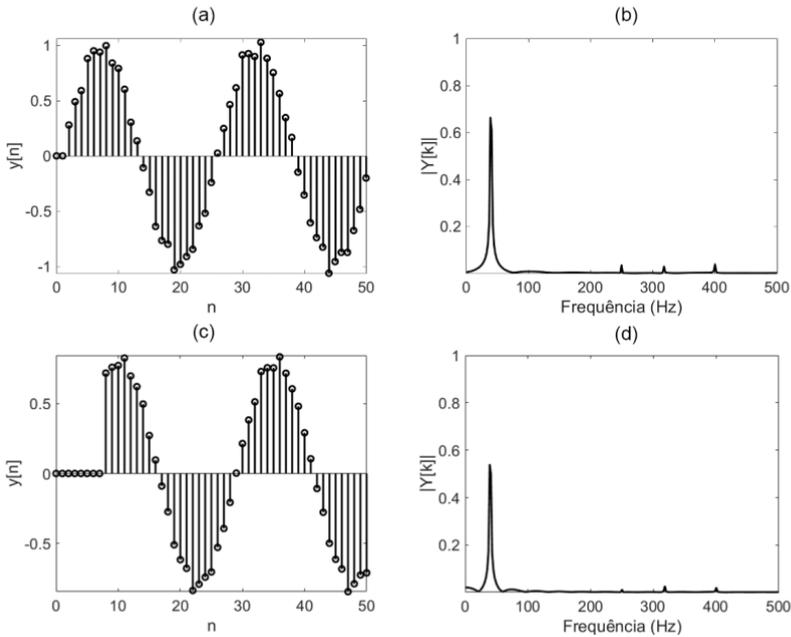


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Sabendo que a frequência normalizada dos filtros digitais varia de 0 a $\pi \text{ rad/s}$, temos que 500 Hz equivale a $\pi \text{ rad/s}$. As demais frequências medidas (40, 250 Hz, 318 Hz e 400 Hz) são equivalentes à $0,08\pi \text{ rad/s}$, $\pi/2 \text{ rad/s}$, $0,64\pi \text{ rad/s}$ e $0,8\pi \text{ rad/s}$, respectivamente. Precisamos definir a quantidade de amostras N do filtro de média móvel. A largura do lóbulo principal deste filtro é determinada por $2\pi/N$ e vale $0,666\pi$ quando $N=3$, o que praticamente eliminará a componente de 318 Hz e atenuará as demais. Este resultado está apresentado nas Figuras 4.23 (a) e 4.23 (b), respectivamente. Se aumentarmos N , a largura do lóbulo principal e a frequência de corte serão diminuídas, mas o atraso no sinal será cada vez maior, conforme Figuras 4.23 (c) e 4.23 (d) para $N = 9$. Assim, o filtro de médias móveis com $N = 3$ é o suficiente para este caso.

Figura 4.23 | (a) Sequência após filtragem por média móvel com $N = 3$ e seu (b) espectro de amplitude; (c) sequência após filtragem por média móvel com $N = 9$ e seu (d) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. O conversor analógico-digital (A/D) converte o sinal de tempo contínuo em uma sequência de amostras com representação por números binários proporcional à amplitude do sinal. As amostras serão aproximadas para os níveis de quantização permitidos, sendo que cada um é representado por um código binário único. Quanto maior for o número de bits do A/D, maior será a quantidade de níveis de quantização e menor será o passo de quantização, o que resulta em melhor representação do sinal.

Um conversor A/D de 8 bits alimentado com 3 V é usado para amostrar um sinal de tensão cuja amplitude pode variar de 0 a 2 V. Determine o passo de quantização deste conversor A/D e o código binário fornecido quando o sinal de entrada for 1,2 V.

- a) $\delta = 11,765\text{mV}$ e 01100110_2 .
- b) $\delta = 11,765\text{V}$ e 01100110_2 .
- c) $\delta = 11,765\text{mV}$ e 11000110_2 .
- d) $\delta = 11,765\text{mV}$ e 11100110_2 .
- e) $\delta = 11,765\text{V}^{-1}$ e 11100110_2 .

2. O conversor analógico-digital (A/D) converte o sinal de tempo contínuo em uma sequência de amostras representadas por números binários proporcionais à amplitude do sinal. Esta sequência é depois enviada para uma unidade de processamento que pode ser, até mesmo, um processador de sinais digitais.

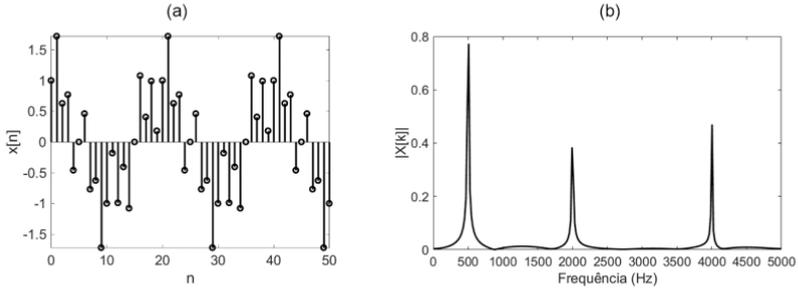
Um sensor de pressão produz um sinal de tensão como saída que pode variar de 0 a 2 V. Qual dos conversores listados a seguir faz a representação mais precisa do sinal analógico? Considere que todos possuem a mesma taxa de amostragem.

- a) Faixa de leitura de 0 a 3 V e 6 bits.
- b) Faixa de leitura de 0 a 5 V e 10 bits.
- c) Faixa de leitura de 0 a 2 V e 8 bits.
- d) Faixa de leitura de 0 a 1 V e 12 bits.
- e) Faixa de leitura de 0 a 4 V e 9 bits.

3. Um filtro digital comumente usado em sistemas de aquisição de dados é o filtro de médias móveis (*moving average filter*), cujo objetivo é armazenar a média de N amostras da sequência de tempo discreto. Este filtro, que possui resposta ao impulso finita (FIR), é utilizado para rejeição de ruídos e para suavizar a curva do sinal após a amostragem.

O sinal apresentado na figura (a), a seguir, foi amostrado por um conversor A/D, e a figura (b) mostra o seu espectro de amplitude (FFT). Uma vez que este sinal deveria ser puramente senoidal de 500 Hz, as demais componentes são consideradas ruídos. Projete um filtro de média móvel de forma a eliminar o ruído deste sinal e assinala a alternativa que apresenta a ordem deste filtro.

Figura | (a) Sequência ruidosa e seu (b) espectro de amplitude



Fonte: elaborada pelo autor.

- a) $N=3$.
- b) $N=4$.
- c) $N=5$.
- d) $N=6$.
- e) $N=7$.

Referências

- BALBINOT, A.; BRUSAMARELLO, V. J. **Instrumentação e fundamentos de medidas**: volume 1. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 385 p.
- FLOYD, T. L. **Sistemas digitais**: fundamentos e aplicações. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 888 p.
- LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**. Porto Alegre: Bookman, 2008. 856 p.
- NALON, J. A. **Introdução ao processamento digital de sinais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2014. 200 p.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2012. 665 p.
- OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010. 568 p.
- TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L. **Sistemas digitais**: princípios e aplicações. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 820 p.

ISBN 978-85-522-0661-3



9 788552 206613 >