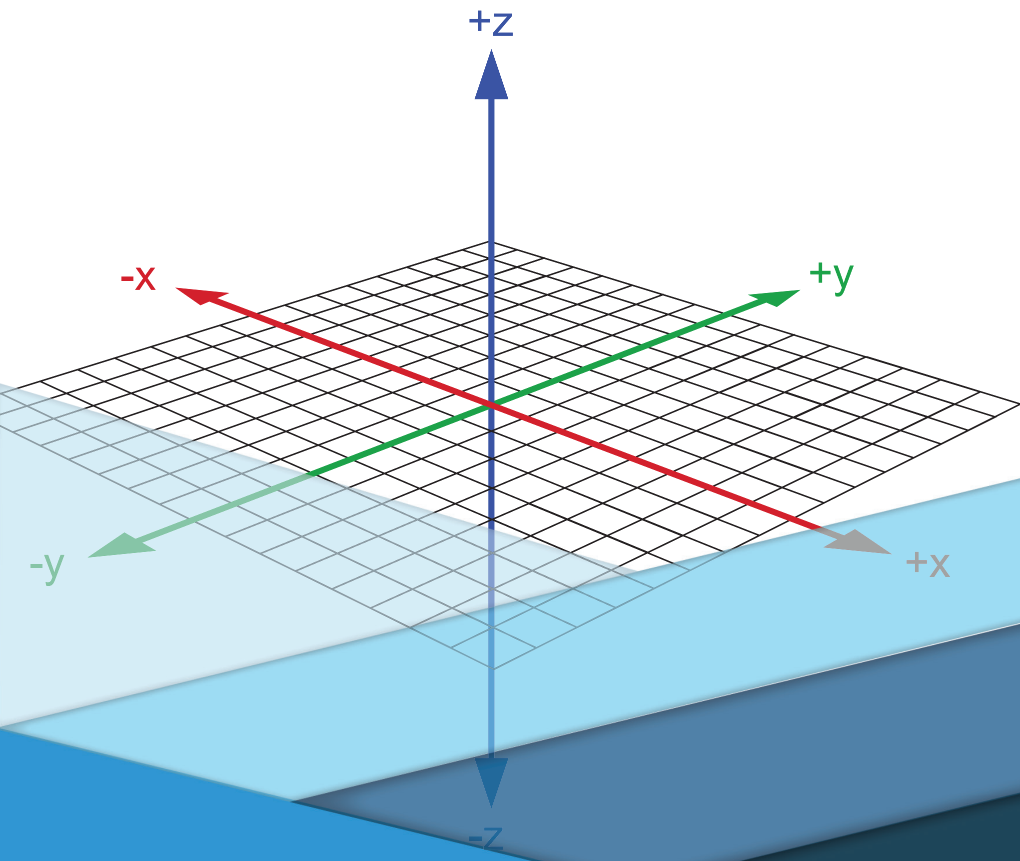


Álgebra Linear e Vetorial

Álgebra Linear e Vetorial

Bruno Henrique Cervelin

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Cervelin, Bruno Henrique
C419a Álgebra linear e vetorial / Bruno Henrique Cervelin. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
208 p.

ISBN 978-85-522-0707-8

1. Álgebra. I. Cervelin, Bruno Henrique. II. Título.

CDD 510

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Caro aluno,

Bem-vindo ao curso de Álgebra Linear e Vetorial! Nesta disciplina, você será apresentado ao conceito de matrizes e suas aplicações, verá a definição e a resolução de sistemas de equações lineares, além de estudar quais outras estruturas matemáticas têm um comportamento semelhante ao de vetores. Este estudo se faz importante, visto que muitos problemas aplicados, aparentemente complexos, podem ser simplificados e resolvidos utilizando estratégias de Álgebra Vetorial.

Na primeira unidade, trabalharemos com a representação de dados na forma matricial, operações com matrizes, aplicação das matrizes para resolver sistemas de equações lineares e o determinante de uma matriz. Já na unidade 2, estudaremos as operações básicas de vetores e sua representação geométrica nos casos bi e tridimensionais. Em seguida, na unidade 3, além de expandirmos o conceito de vetores para espaços *n*-dimensionais, analisaremos conjuntos que possuem comportamento análogo ao de vetores, diferentes formas de representação e maneiras de converter uma representação em outra. Por fim, na Unidade 4, estudaremos aplicações lineares sobre esses conjuntos de vetores e algumas propriedades dessas aplicações.

Em todas as unidades, apresentaremos problemas aplicados em diversas áreas de atuação.

A maioria dos problemas aplicados pode ser descrita como problemas algébricos, assim o estudo desta disciplina é indispensável para muitas áreas de Exatas. Como todas as áreas da Matemática, a aprendizagem desta disciplina só é possível com seu esforço individual. Neste livro, mostraremos os caminhos que julgamos mais adequados para sua aprendizagem. Aproveite e bons estudos!

Matrizes e sistemas lineares

Convite ao estudo

Iniciamos nossas seções estudando problemas relacionados a sistemas de equações lineares. Esses problemas podem representar aplicações muito simples, como encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos, ou mesmo problemas mais complexos, como métodos para resolução de sistemas de equações diferenciais.

Nesta unidade, estudaremos o que são e como resolver sistemas de equações lineares. Conforme aumentarmos o número de incógnitas nos nossos problemas, essa representação poderá não ser prática. Para contornar essa dificuldade, apresentaremos as matrizes e suas operações básicas. Representaremos os sistemas de equações lineares como equações matriciais e usaremos suas propriedades na resolução dos sistemas.

Como ilustração da aplicabilidade das técnicas que serão estudadas nesta unidade, suponha que você foi contratado por uma empresa de *softwares*, a qual está desenvolvendo um *software* que informa a quantidade de ingredientes necessária para a produção de determinado tipo de alimento.

Como entrada (*input*), esse *software* recebe informações nutricionais do alimento desejado e dos seus ingredientes, por exemplo, a quantidade de calorias e de proteínas por quilograma etc.

A saída (*output*) desse programa será a quantidade de cada ingrediente que deve ser utilizada na preparação de 1 quilograma de um alimento que possua as propriedades nutricionais desejadas.

Você é o responsável pela implementação da parte matemática do *software*, isto é, a entrada dos dados e sua análise, a modelagem e o método de resolução do problema.

Nesta unidade, você estudará como representar os dados, de maneira sucinta e elegante, usando matrizes; analisar essas matrizes para identificar possíveis informações redundantes; construir sistemas de equações lineares, analisando a quantidade de possíveis soluções, além de resolvê-los.

Ao final desta unidade, você será capaz de responder às seguintes perguntas em relação ao alimento desejado: quantas combinações possíveis dos ingredientes o fornecem? Qual é a quantidade de ingredientes para obtê-lo? Como definir a quantidade de cada ingrediente a ser usado na elaboração?

Seção 1.1

Matrizes: definição e operações

Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, apresentaremos o conceito de matrizes e suas propriedades. Matrizes são especialmente úteis como uma forma compacta de representação de dados e operações matemáticas, tornando problemas aparentemente complexos em sistemas simples e de fácil interpretação.

Estamos supondo que você tenha sido contratado por uma empresa de *softwares* para implementar um sistema que deve informar a quantidade de ingredientes necessários à produção de determinado alimento. Os dados de entrada para esse *software* são as propriedades nutricionais de cada ingrediente.

Você é o responsável pela padronização do formato da entrada.

Suponha que os ingredientes utilizados serão: cenouras, beterrabas, soja e trigo.

Sabe-se que as quantidades são:

- cenouras: 200 kcal/kg, 20 g/kg de proteínas e 4 g/kg de gordura;
- beterrabas: 500 kcal/kg, 20 g/kg de proteínas e 1 g/kg de gordura;
- soja: 3.600 kcal/kg, 400 g/kg de proteínas e 200 g/kg de gordura;
- trigo: 3.600 kcal/kg, 100 g/kg de proteínas e 10 g/kg de gordura.

(Adaptado de DIETA E SAÚDE. Disponível em: <www.dietaesaude.com.br>. Acesso em: 10 out. 2017.)

Como os dados podem ser armazenados eficientemente? Como será a representação desses dados utilizando tal armazenamento? Como mudar a unidade de medida dos dados?

Nesta seção, discutiremos esses temas e outros, que serão de extrema importância nos tópicos seguintes.

Não pode faltar

Imagine que desejamos representar algumas informações físicas sobre algumas pessoas na forma de tabelas. Para cada pessoa, associamos uma linha e, em cada coluna da tabela, indicamos uma característica física. Considere, por exemplo, a tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Altura em metros e massa em quilogramas das pessoas 1 e 2

	Altura (m)	Massa (kg)
Pessoa 1	1,75	70
Pessoa 2	1,61	54

Fonte: elaborada pelo autor.

Sabendo que cada linha está associada a uma pessoa, a primeira coluna indica a altura (em metros) e a segunda coluna, a massa (em quilogramas). Podemos representar a tabela dada, simplesmente, como:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 70 \\ 1{,}61 & 54 \end{bmatrix}$$

É fácil interpretar que a pessoa associada à primeira linha apresenta 1,75 m de altura e sua massa é 70 kg, enquanto a pessoa associada à segunda linha tem 1,61 m de altura e massa igual a 54 kg.

Essa representação de dados na forma de tabelas é chamada de matriz.

Assimile

Dizemos que A é uma **matriz de ordem** $m \times n$, se A é representada como uma tabela com m linhas e n colunas. Podemos, ainda, afirmar que A é uma matriz real, se todos os seus elementos são números reais. Neste caso, representamos como:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

(A pertence ao conjunto das matrizes reais, com m linhas e n colunas).

Referenciamos o elemento da linha *i* e coluna *j* da matriz *A* como a_{ij}, assim representamos a matriz *A* com *m* linhas e *n* colunas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}.$$

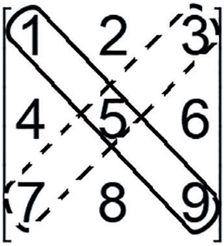
Uma matriz com ordem $n \times n$, ou seja, com o mesmo número de colunas e linhas, é chamada de **matriz quadrada**.

Os elementos com índices iguais, por exemplo, a_{11}, a_{22} etc., são chamados de elementos da **diagonal principal** de *A*.

Os elementos da forma $a_{(n-i+1),i}$, com $i = 1,\ldots,n$, formam a **diagonal secundária** de *A*.

Na figura 1.1, apresentamos um exemplo de matriz com as diagonais principal e secundária destacadas.

Figura 1.1 | Matriz 3×3 com diagonal principal destacada que apresenta linhas contínuas e diagonal secundária realçada com linhas segmentadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Como as matrizes são objetos matemáticos, podemos associá-las a operações. Suponha que, após algum tempo, as pessoas associadas à matriz *A*, apresentada anteriormente, tiveram suas alturas e massas modificadas, conforme indicado pela seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 3 \\ 0{,}01 & -1 \end{bmatrix}$$

Como determinar as novas alturas e massas dessas pessoas?

Para responder a essa pergunta, basta interpretarmos o que a matriz *B* representa: a pessoa *1* aumentou 0,1 m e engordou 3 kg; já a pessoa *2* aumentou 0,01 m e emagreceu 1 kg. Para verificar as novas alturas e massas, basta adicionarmos cada um dos elementos. Assim, a matriz com as novas alturas e massas será:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 70 \\ 1{,}61 & 54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1 & 3 \\ 0{,}01 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}75 + 0{,}1 & 70 + 3 \\ 1{,}61 + 0{,}01 & 54 + (-1) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}85 & 73 \\ 1{,}62 & 53 \end{bmatrix}.$$

Assimile

Dadas *A* e *B* $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, a matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definida como a **soma** de *A* e *B*, é tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, denotamos:

$$C = A + B.$$

Agora, suponha que desejamos descrever a altura em milímetros e a massa em gramas. Para isso, basta multiplicarmos cada uma das entradas da matriz por 1.000. Assim, se *D* é a matriz com as informações das pessoas *1* e *2* em milímetros e gramas, temos que:

$$D = 1000C = 1000 \begin{bmatrix} 1{,}85 & 73 \\ 1{,}62 & 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \cdot 1{,}85 & 1000 \cdot 73 \\ 1000 \cdot 1{,}62 & 1000 \cdot 53 \end{bmatrix},$$

portanto,

$$D = \begin{bmatrix} 1850 & 73.000 \\ 1620 & 53.000 \end{bmatrix},$$

a qual indica que a pessoa *1* tem 1.850 mm de altura e massa igual a 73.000 g, enquanto a pessoa *2* tem 1.620 mm de altura e massa igual a 53.000 g.

Reflita

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se a matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é o **produto** de α com *A*, então:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para todo $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$. Logo, denotamos:

$$B = \alpha A.$$

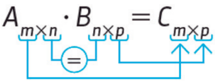
Note que se $\alpha = 2$, então:

$$B = 2A = A + A.$$

Essa relação de adição e multiplicação é condizente com a adição e a multiplicação usuais dos números reais? Quais propriedades de adição e multiplicação podem ser transpostas dos números reais para as matrizes?

Sabemos duas operações básicas envolvendo matrizes, mas será que podemos realizar o produto entre matrizes? A resposta é: "depende". Depende da ordem das matrizes, isto é, para realizar esse produto, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. O elemento na linha *i* e na coluna *j* da matriz resultante será dado pela soma do produto elemento a elemento da linha *i* da primeira matriz com os da coluna *j* da segunda matriz. Além disso, a matriz resultante terá a mesma quantidade de linhas do que a primeira e a mesma quantidade de colunas do que a segunda. Na Figura 1.2, esquematizamos a verificação da existência do produto entre matrizes.

Figura 1.2 | Esquema para verificação da existência do produto entre matrizes



Fonte: elaborada pelo autor (2017).

Exemplificando

Considere as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Queremos calcular as matrizes C e D definidas como o **produto de A por B** e o **produto de B por A**, respectivamente, ou seja,

$$C = AB \text{ e } D = BA.$$

O primeiro passo é verificar se esses produtos existem, lembrando que A é de ordem 2×2 e B é de ordem 2×3. Na definição de C, a primeira matriz é A e a segunda é B. Usando o esquema apresentado na Figura 1.2, notamos que C existe e é de ordem 2×3.

Devemos calcular cada uma das entradas de C. Observe:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-3) = -6 - 6 = -12,$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -5 - 4 = -9,$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) = -4 - 2 = -6,$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-6) + 4 \cdot (-3) = -18 - 12 = -30,$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) = -15 - 8 = -23,$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = -12 - 4 = -16.$$

Daí, temos que:

$$C = \begin{bmatrix} -12 & -9 & -6 \\ -30 & -23 & -16 \end{bmatrix}.$$

Agora, na definição de D, a primeira matriz é B e a segunda é A; novamente utilizaremos o esquema apresentado na Figura 1.2, porém como $2 \neq 3$, a matriz D não existe.

Em alguns casos, pode ser interessante mudar a ordem de representação das matrizes, isto é, representar como coluna o que antes aparecia como linha e representar como linha o que antes se mostrava como coluna. Essa operação é chamada de **transposta**. Dessa maneira, dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sua matriz transposta é de ordem $n \times m$ e denotada por A^T.

Exemplificando

Considere a matriz *A* de ordem 2×3 definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queremos calcular o produto $A^T A$.

Como sempre, ao calcular produtos de matrizes, o primeiro passo é verificar se o produto existe. Para isso, devemos comparar a quantidade de colunas da matriz A^T com a de linhas da matriz *A*.

A matriz A^T é de ordem 3×2 (o que era linha se torna coluna e o que era coluna, linha), ou seja, possui 2 colunas. Assim, como *A* possui 2 linhas, o produto existe.

Agora, devemos determinar qual é a matriz transposta. Ao invertermos linhas por colunas e vice-versa, temos:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, realizando o produto por linhas e colunas, como explicado anteriormente, obtemos:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz obtida como resultado da multiplicação no exemplo anterior, ao ser transposta, continua igual. Matrizes com essa propriedade são chamadas **matrizes simétricas**. Em notação matemática, dizemos que uma matriz *A* é simétrica se:

$$A = A^T.$$

Além das matrizes simétricas, outras são consideradas especiais em razão de suas estruturas. Uma delas, denotada por I_n, ou simplesmente *I*, quando não há dúvidas sobre a sua ordem, é chamada de **matriz identidade de ordem n**. Esta é uma matriz de ordem $n \times n$, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a *1* e os elementos fora dessa diagonal são iguais a *0*. Como exemplo, apresentamos a matriz identidade de ordem *3*:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes que, como a identidade, possuem todos os elementos fora da diagonal principal nulos são chamadas de matrizes **diagonais**, sendo representadas como:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Note que os elementos $\boldsymbol{d}_{jj}$ podem assumir quaisquer valores reais, em particular se $\boldsymbol{d}_{jj} = 1$, para todo $j = 1, \cdots, n$, temos que $D = I$, ou seja, a matriz *D* é a matriz identidade. Outro caso especial é quando $\boldsymbol{d}_{jj} = 0$, para todo $j = 1, \cdots, n$, isto é, todos os elementos da matriz *D* são iguais a *0*. Assim, podemos afirmar que *D* é uma matriz nula e denotamos $D = \mathbf{0}$.

Um outro tipo de matriz quadrada com estrutura especial são as matrizes **triangulares**. Estas podem ser **superiores**, se todos os elementos abaixo da diagonal principal forem nulos, ou **inferiores**, se todos os elementos acima da diagonal principal forem nulos. A seguir, apresentamos as matrizes *U* e *L*, representando matrizes triangulares superiores e inferiores, respectivamente:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplificando

Seja $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, ou seja, *v* é uma matriz com *n* linhas e *1* coluna. Neste caso, podemos dizer que *v* é um **vetor**, e denotamos $\mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$.

Queremos descobrir qual é o resultado da multiplicação da matriz identidade de ordem *n* pelo vetor *v*.

Lembramos que a matriz identidade de ordem *n* é:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o número de colunas de *I* é *n* e o de linhas de *v* também é *n*, o produto existe. Como o número de linhas de *I* é *n* e o de colunas de *v* é *1*, o resultado da multiplicação será de ordem $n \times 1$, ou seja, quando possível, o **produto matriz vetor gera vetor**.

Denotando $u = Iv$, chamando de u_i a *i*-ésima componente do vetor *u* e usando a regra de multiplicação de linhas por colunas, para todo $i = 1,2,\ldots,n$, temos que:

$$u_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{\text{posição } i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$u_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = v_i\,,$$

portanto,

$$u = Iv = v\,.$$

Com esse exemplo, concluímos que a multiplicação de matrizes pela matriz identidade não afeta a matriz original. Podemos interpretar que *I* tem o mesmo efeito que o número *1* na multiplicação de números reais, isto é, podemos considerar a matriz identidade como o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

Reflita

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diagonal e $D_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal.

Qual é a consequência da multiplicação $D_m A$? E a da multiplicação AD_n?

Para auxiliar em seu estudo do caso geral, tome um caso específico com:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Analise o que ocorre com as linhas de A ao fazermos o produto D_2A e o que acontece com as colunas de A ao realizarmos o produto AD_3.

Estenda sua análise para matrizes de ordens quaisquer.

Pesquise mais

Nesta seção, você estudou a definição de matriz, suas operações fundamentais e algumas estruturas especiais de matrizes. Para complementar seus estudos, consulte:

KUERTEN, Cristini. **Algumas aplicações de matrizes.** 2002. 68 f. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Santa Catarina, 2002. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96804/Cristini_Kuerten.PDF>. Acesso em: 10 out. 2017.

PULINO, Petrônio. Matrizes e sistemas lineares. In: ______. **Álgebra linear e suas aplicações**: notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 30-41. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 10 out. 2017.

Sem medo de errar

Voltando ao problema da entrada do *software* de alimentos, lembre-se de que você é o responsável pela padronização das entradas do programa.

O seu primeiro questionamento deve ser: “Como representar esses dados de forma eficiente?”.

Tome como exemplo os dados de massa e de altura das pessoas 1 e 2, apresentados no texto. Um modo simples e elegante para representá-los foi obtido por meio das matrizes. De maneira análoga, podemos representar as informações nutricionais como uma matriz, em que cada linha representa uma propriedade nutricional e cada coluna, um ingrediente.

Note que a transposta dessa escolha também é válida, ou seja, podemos criar uma matriz em que cada coluna representa uma propriedade nutricional e cada linha, um ingrediente.

Usando a primeira forma, os dados seriam apresentados pela Tabela 1.2.

Tabela 1.2 | Algumas informações nutricionais de cenoura, beterraba, soja e trigo

	Cenoura	Beterraba	Soja	Trigo
Calorias (kcal/kg)	200	500	3.600	3.600
Proteínas (g/kg)	20	20	400	100
Gorduras (g/kg)	4	1	200	10

Fonte: elaborada pelo autor.

Essa tabela é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 200 & 500 & 3600 & 3600 \\ 20 & 20 & 400 & 100 \\ 4 & 1 & 200 & 10 \end{bmatrix}$$

de ordem 3×4 (3 ingredientes e 4 propriedades).

Essa matriz representa a quantidade de certos nutrientes por quilograma de ingredientes. E se quisermos representar esses dados por 100 gramas de ingrediente?

Como $100\,g = 0{,}1\,kg$, basta multiplicarmos a matriz representada por *0,1*. Assim, a matriz com as informações será:

$$0{,}1\begin{bmatrix} 200 & 500 & 3600 & 3600 \\ 20 & 20 & 400 & 100 \\ 4 & 1 & 200 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 50 & 360 & 360 \\ 2 & 2 & 40 & 10 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja que essa matriz está representando o valor energético de cada alimento em kcal/100 g. O que devemos fazer para representar esses valores em cal/100 g?

Ao lembrarmos que $1\,kcal = 1.000\,cal$, devemos, então, dividir cada elemento da primeira linha por *1.000*. Matricialmente, isso é equivalente a multiplicar uma matriz diagonal 3×3, com o elemento da primeira linha e da primeira coluna igual a *0,001* e os outros elementos da diagonal principal iguais a *1*, pela matriz de dados, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 50 & 360 & 360 \\ 2 & 2 & 40 & 10 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 20 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}36 & 0{,}36 \\ 2 & 2 & 40 & 10 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja que representando os dados como matrizes, temos uma forma compacta e tabular de apresentá-los, o que facilita a análise visual.

Note, ainda, que todas as operações realizadas para mudanças de unidades foram operações matriciais, simplificando o processo de implementação do *software*, visto que somente um tipo de estrutura matemática (as matrizes) será utilizado.

Usaremos a seguinte padronização:

- Dados de entradas serão representados em matrizes com *m* linhas e *n* colunas, em que *m* é a quantidade de propriedades nutricionais analisadas e *n* é a quantidade de ingredientes utilizados; cada linha da matriz estará associada a uma propriedade nutricional e cada coluna, a um ingrediente.

Agora que a padronização já foi pensada, que tal sintetizá-la em um relatório e preparar uma apresentação de *slides*, com a finalidade de orientar a equipe de desenvolvimento?

Avançando na prática

Representando imagens como matrizes

Descrição da situação-problema

Imagens digitais são representações computacionais das imagens reais. Um exemplo simples de imagem digital são fotografias das câmeras de celulares. Essas imagens são representadas por *pixels*.

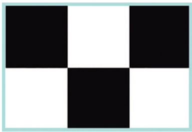
Em imagens monocromáticas (escala de cinza), cada *pixel* representa a intensidade da luz em uma posição específica da imagem. Se o *pixel* tem valor *0*, temos a cor preta; caso tenha valor *1*, cor branca; os valores entre *0* e *1* representam a escala de cinza.

Se a resolução da imagem é 1.600×900, temos 1.600 colunas de *pixels* e 900 linhas.

Como você representaria imagens utilizando matrizes? Como faria para sobrepor duas imagens?

Como exemplo, use as imagens com duas linhas e três colunas das Figuras 1.3 e 1.4.

Figura 1.3 | Imagem digital A com 2 linhas e 3 colunas



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.4 | Imagem digital B com 2 linhas e 3 colunas

Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Se uma imagem tem *m* linhas e *n* colunas, podemos representá-la como uma matriz $m \times n$, em que o elemento *ij* da matriz se associa à intensidade do *pixel* na linha *i*, coluna *j*.

No exemplo, ambas as imagens possuem *2* linhas e *3* colunas. Na primeira imagem, o *pixel* da primeira linha e da primeira coluna tem intensidade *0*; o da primeira linha e da segunda coluna tem intensidade *1*; o da primeira linha e da terceira coluna tem intensidade *0* etc. Assim, as imagens serão representadas, respectivamente, pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como A e B têm a mesma ordem, podemos realizar a sobreposição adicionando as duas matrizes. Para garantir que a intensidade dos *pixels* continue entre 0 e 1, dividimos a soma por 2 (que é equivalente a multiplicar a soma por $0{,}5$). Portanto, a sobreposição das imagens será:

$$0{,}5(A+B)=0{,}5\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 1 & 0{,}5 & 1\end{bmatrix}.$$

Tal operação representa a imagem da Figura 1.5.

Figura 1.5 | Sobreposição das imagens

Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Matrizes com apenas uma coluna podem ser chamadas de vetores. O produto matriz/vetor (calculado da mesma forma que o produto matriz/matriz) nos dá um vetor formado por uma combinação das colunas da matriz. Suponha a matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

e o vetor

$$v^T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Assinale a alternativa com o resultado do produto Av:

a) $Av=\begin{bmatrix}4 & 8 & 12 & 16\\ 15 & 18 & 21 & 24\\ -2 & -3 & -6 & -8\end{bmatrix}$

b) $(Av)^T=\begin{bmatrix}6 & 8 & 10 & 12\end{bmatrix}$

c) $(Av)^T=\begin{bmatrix}10 & 26 & -10\end{bmatrix}$

d) $(Av)^T=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\end{bmatrix}$

e) Av não existe devido à ordem das matrizes.

2. O uso de matrizes é muito importante na representação compacta de informações. Nelas, os dados podem ser facilmente interpretados por humanos e computadores.

A multiplicação de matrizes nos permite realizar várias modificações nesses dados, por exemplo, multiplicarmos uma coluna ou linha inteira por uma constante, combinar linhas ou colunas etc.

Suponha A e B duas matrizes quaisquer e I_A a matriz identidade, com a mesma quantidade de linhas do que A.

Sobre essas matrizes, são feitas as seguintes afirmações:

I. A ordem da multiplicação não interfere no resultado final, isto é, $AB = BA$.

II. Independentemente do número de colunas de A, temos $I_A A = AI_A = A$.

III. Se a ordem de A for 3×4 e B for matriz diagonal com ordem 4×4, então o produto AB é o equivalente à multiplicação de cada coluna de A por um dos elementos da diagonal principal de B.

Analisando essas afirmações, é correto afirmar que:

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.

b) Apenas a afirmação II é verdadeira.

c) Apenas a afirmação III é verdadeira.

d) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

e) As afirmações I, II e III são verdadeiras.

3. Sabemos o conceito de multiplicação de matrizes. Ao expandir esse conceito, podemos definir a potenciação de matrizes. Sejam A uma matriz quadrada e n um número inteiro maior do que 0, então:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}.$$

Outra propriedade importante sobre o produto entre matrizes é a associatividade. Sobre esta, considere três matrizes A, B e C de ordens $m \times n$, $n \times p$ e $p \times q$, respectivamente. Então:

$$ABC = (AB)C = A(BC).$$

Considere a matriz:

$$v^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ao chamarmos de A a matriz resultante do produto vv^T, fazemos as seguintes afirmações:

I. A matriz $A^3 = A$.

Porque

II. $v^T v = 1$.

Analisando a relação razão-asserção, podemos afirmar que:

a) As afirmações I e II estão corretas e a afirmação II justifica a I.

b) As afirmações I e II estão corretas, mas a afirmação II não justifica a I.

c) A afirmação I está correta e a afirmação II, incorreta.

d) A afirmação I está incorreta e a afirmação I, correta.

e) As afirmações I e II estão incorretas.

Seção 1.2

Sistemas lineares

Diálogo aberto

Nesta seção, introduziremos o conceito de sistemas de equações lineares ou, simplesmente, sistemas lineares. Grande parte dos problemas aplicados pode ser representada por esses sistemas, sendo usados também como passo intermediário em sua resolução.

Um exemplo de problema que pode ser modelado como sistema de equações lineares é o de se encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos distintos no plano cartesiano.

Estudaremos algumas formas de representação de sistemas lineares e a equivalência entre elas. Além disso, abordaremos algumas maneiras de resolução desses sistemas.

Como ilustração para a aplicabilidade desse tipo de problema, estamos supondo a sua contratação por uma empresa que desenvolve um *software* que retorna a quantidade de cada um dos ingredientes a ser utilizado na produção de um alimento com determinadas propriedades nutricionais.

Em um teste, o *software* recebeu como entrada os dados nutricionais de cenouras, beterrabas, soja e trigo. As informações nutricionais do alimento desejado são: 1.975 kcal/kg, 135 g/kg de proteínas e 53,75 g/kg de gordura.

Como você pode combinar os ingredientes de modo a obter esse alimento? Como esse problema pode ser formulado matematicamente? Qual é a saída (*output*) do *software*, ou seja, qual é a quantidade de cada um dos ingredientes utilizada para se obter 1 kg do alimento desejado?

Nesta seção, estudaremos como responder a todas essas questões.

Não pode faltar

Considerando o plano euclidiano (plano *xy*), como podemos encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $p_1 = (1,2)$ e $p_2 = (2,1)$?

Lembre-se de que a equação de uma reta pode ser expressa como $y = \alpha x + \beta$, em que α e β são números reais. Como os dois pontos estão na reta, sua equação deve estar satisfeita na igualdade nesses pontos, ou seja,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}.$$

Nesse problema, α e β são incógnitas. Seus valores são encontrados de modo a satisfazer as duas equações simultaneamente. Sistemas dessa forma são ditos **sistemas lineares**, com duas equações e duas incógnitas. No caso geral, sistemas lineares são descritos como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

em que $b_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1,\ldots,m$, e $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$. Neste caso, o sistema linear apresenta *m* equações e *n* incógnitas.

No exemplo da reta que passa pelos pontos, a resolução do problema pode ser obtida simplesmente isolando uma das variáveis e substituindo-a na outra equação. Por exemplo, se subtrairmos *b* de ambos os lados da equação dada na primeira linha, obteremos:

$$\alpha = 2 - \beta.$$

Assim, *a* é escrito como uma função de *b*. Ao substituirmos essa relação na segunda linha do sistema linear, temos:

$$1 = 2\alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad 1 = 2(2 - \beta) + \beta \quad \Rightarrow \quad 1 = 4 - \beta,$$

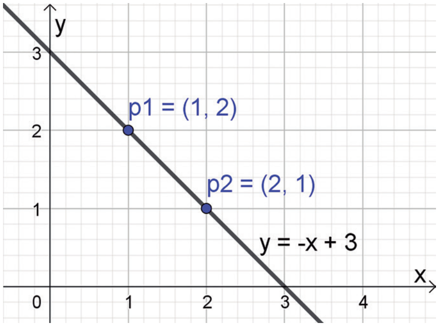
ou seja,

$$\beta = 3.$$

Voltando à relação $\alpha = 2 - \beta$, podemos substituir o valor de β, obtendo $\alpha = 2 - 3 = -1$ e, portanto, a equação da reta que passa por p_1 e p_2 é:

$$y = -x + 3.$$

Figura 1.6 | Reta passando pelos pontos p_1 e p_2



Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar de esse método ser aplicável a todos os sistemas lineares, em sistemas de equações lineares com grande quantidade de equações ou de incógnitas, essa estratégia pode gerar muitos cálculos ou se tornar confusa, além de ser mais difícil para implementar-se computacionalmente.

Veja que quando multiplicarmos uma linha do sistema original por uma constante não nula, ou somarmos/subtrairmos um múltiplo de uma linha a outra, obteremos um sistema linear equivalente, isto é, toda solução de um será solução do outro e vice-versa.

Voltando ao sistema linear que define os coeficientes da reta que passa pelos pontos p_1 e p_2, quando subtrairmos a primeira linha da segunda, teremos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta - (\alpha + \beta) = 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Atenção

Note que subtrair a primeira linha da segunda é equivalente a somarmos a segunda linha com a primeira multiplicada por – 1.

Agora, subtraindo a nova segunda linha da primeira, temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \alpha = 2 - (-1) \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}.$$

Com isso, resolvemos o sistema e obtemos a mesma resposta que no caso anterior. Essa estratégia é chamada de **escalonamento**.

Assimile

Considere o sistema linear, com *m* equações e *n* incógnitas, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

O processo de **escalonamento parcial** consiste em somar e/ou subtrair múltiplos de linhas, a fim de obter um sistema equivalente dado por:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \cdots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \cdots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{nn}x_n = \hat{b}_n \end{cases},$$

no qual $\hat{a}_{jj} \neq 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Uma observação importante é que para a realização de tal processo, podemos mudar a ordem das equações, conforme nos parecer mais interessante.

Com esse processo, encontramos o valor de x_n, substituímos esse valor na linha $n - 1$, na qual calculamos o valor de x_{n-1}, e repetimos o processo até obter os valores para todos os x_j.

O processo de **escalonamento completo** consiste em somar e/ou subtrair múltiplos das linhas, a fim de obter um sistema equivalente dado por:

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = d_1x_1 \\ \tilde{b}_2 = d_2x_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n = d_nx_n \end{cases},$$

de modo que $d_j \neq 0$, para todo $j = 1,\ldots,n$. Assim, podemos encontrar todos os x_j simplesmente dividindo a linha *j* por d_j.

De forma geral, as operações permitidas para a realização do escalonamento são:

- multiplicar uma equação por um número diferente de zero;
- adicionar uma equação a outra.
- permutar duas equações.

Exemplificando

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}.$$

Para simplificar as notações, chamaremos a linha *1* de L_1, a linha *2* de L_2 e a linha *3* de L_3.

Vamos resolvê-lo de duas formas:

1) Processo de escalonamento parcial:

Resolvamos $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (leia: linha *2* recebe linha *2* menos a linha *1*), ou seja, subtrairemos a linha *1* da linha *2*. Além disso, façamos $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$.

O sistema obtido é:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Agora, obtenha $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, daí o sistema é:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_3 = -2 \end{cases}.$$

Assim, concluímos o escalonamento parcial. O novo sistema obtido é chamado de sistema linear triangular. Veja que quando dividirmos a equação na terceira linha por *-2*, teremos:

$$x_3 = 1.$$

Substituindo esse valor na segunda linha:

$$x_2 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3 - 2 = 1$$

e os valores de x_3 e x_2 na primeira linha, obtemos:

$$x_1 + 1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.$$

Portanto, a solução do sistema linear é dada por: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Esse processo de substituição é chamado de **retrossubstituição**.

2) Processo de escalonamento completo:

Continuando o escalonamento parcial, façamos $L_1 \leftarrow L_1 + 0{,}5L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, daí obteremos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \\ -2x_3 = -2 \end{cases}.$$

Resolva, agora, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ -2x_3 = -2 \end{cases}.$$

Concluindo o escalonamento completo, multiplicamos a linha *3* por – 0,5, obtendo $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Reflita

Na definição do processo de escalonamento parcial, exigimos que todos os componentes do tipo $\hat{a}_{jj}$ sejam não nulos. O que acontece se algum deles for nulo? Resolva, como exemplo, o sistema linear seguinte:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}.$$

Voltemos por um instante ao sistema linear associado à reta que passa pelos pontos p_1 e p_2. Veja que podemos representar esse sistema como a igualdade de dois vetores bidimensionais:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha + 1\beta \\ 2\alpha + 1\beta \end{bmatrix}.$$

Perceba que o lado direito da igualdade é o resultado do produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

logo o sistema linear pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Assimile

Considere o sistema linear, com m equações e n incógnitas, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Defina o vetor $b \in \mathbb{R}^m$, tal que $b^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$, o vetor $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$, e a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$. Então, o sistema linear é equivalente à equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$Ax = b.$$

Neste caso, A é denominada **matriz de coeficientes** do sistema linear, x é o **vetor de incógnitas** (ou matriz de incógnitas) e b é o **vetor dos termos independentes** (ou matriz dos termos independentes).

Representar um sistema linear na forma matricial gera vantagens, uma vez que podemos resolver as operações usando apenas a matriz e o vetor *b*. Considere o sistema 2×2 associado à equação da reta. Representaremos esse sistema como uma **matriz estendida**:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

No caso geral, com um sistema do tipo:

$$Ax = b,$$

a matriz estendida é de ordem $m \times (n+1)$, em que as *n* primeiras colunas são as colunas de *A* e a $(n+1)$-ésima coluna é o vetor *b*. Essa representação facilita o processo de escalonamento. No exemplo da equação da reta, calculando $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right].$$

E, ainda, resolvendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ e $L_2 \leftarrow -L_2$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Desse resultado, concluímos que $\alpha = -1$ (associado à primeira coluna) e $\beta = 3$ (associado à segunda coluna).

Exemplificando

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}.$$

1) Vamos escrever esse sistema na forma matricial:

Como temos *3* equações e *3* incógnitas, devemos representar o sistema como produto de uma matriz 3×3 e um vetor de dimensão *3*. A representação matricial será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2) A matriz estendida equivalente a esse sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right].$$

3) Vamos aplicar o processo de escalonamento pela matriz estendida. Primeiramente, faremos $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, obtendo a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Agora, resolveremos $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, tendo como resultado o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Note que a última linha da matriz é composta unicamente de zeros, o que implica:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0.$$

Tal informação é redundante, porque, independentemente dos valores de x_1, x_2 e x_3, essa relação é verdadeira. Assim, como essa linha não nos dá nenhuma informação adicional sobre o problema, podemos desprezá-la. O sistema que temos é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Note que não podemos mais “criar” zeros nessa matriz, logo a solução encontrada é:

$x_1 = 1$ e $x_2 + x_3 = 2$, ou, ainda, $x_3 = 2 - x_2$.

Com isso, afirmamos que x_2 ou x_3 está livre, isto é, pode assumir qualquer valor real. Esse sistema é dito **possível e indeterminado**. Representamos a família de soluções como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ 2 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com x_2 dado por qualquer valor real.

Nesse último exemplo, explicamos o conceito de sistemas indeterminados.

Quando há menos equações do que incógnitas, podemos ter infinitas soluções (como o exemplo apresentado) ou não ter solução nenhuma (sistema **impossível**).

No caso de sistemas quadrados, isto é, com a mesma quantidade de equações e incógnitas, pode haver uma única solução, nenhuma solução ou infinitas soluções. Quando existe uma única solução, o sistema é **possível e determinado**.

Reflita

A seguir, considere os sistemas lineares definidos como matrizes estendidas. Como classificar os sistemas em **impossível**, **possível e indeterminado** e **possível e determinado**?

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right].$

2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right].$

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$

Note que, no caso de sistemas lineares quadrados, isto é, com o mesmo número de equações e incógnitas, quando o escalonamento parcial é bem-sucedido, a matriz de coeficientes do sistema linear equivalente obtido é triangular superior. Caso seja aplicado o escalonamento completo, a matriz de coeficiente do sistema equivalente será diagonal.

Reflita

Considere o sistema $Ax = b$, em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com elementos da diagonal principal não nulos e $b \in \mathbb{R}^{n}$.

i) Como você resolveria o sistema se A fosse triangular superior? Use como exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ii) Como você resolveria o sistema se A fosse triangular inferior? Use como exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

iii) Como você resolveria o sistema se A fosse diagonal? Use como exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Pesquise mais

Como complemento aos seus estudos, sugerimos a consulta à referência a seguir. Nela, você encontra alguns métodos mais formais de escalonamento, além de suas implementações computacionais.

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. Sistemas lineares e escalonamento. In: ________. **Geometria analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra**. São Carlos: EDUFSCar, 2011. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~yolanda/vga/ga1.pdf>. Acesso em: 26 out. 2017.

Na referência indicada a seguir, você pode obter outro ponto de vista sobre os assuntos estudados nesta seção, além de uma prévia da nossa próxima seção.

MASSAGO, Sadao. **Escalonamento**. São Carlos: EDUFSCar, 2014. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~sadao/download/?file=student/escalonamento.pdf>. Acesso em: 26 out. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você está trabalhando em uma empresa que desenvolve um *software* alimentício.

Esse *software* prediz a quantidade de ingredientes utilizados na produção de um alimento.

Na seção anterior, decidimos que os dados de entrada deveriam ser disponibilizados como uma matriz, com *m* linhas e *n* colunas, em que cada linha representa uma propriedade nutricional e cada coluna, um ingrediente. Chamaremos essa matriz de *B*. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} 200 & 500 & 3600 & 3600 \\ 20 & 20 & 400 & 100 \\ 4 & 1 & 200 & 10 \end{bmatrix}.$$

As informações nutricionais do alimento desejado podem ser representadas por um vetor com *m* linhas. Logo, no caso do alimento apresentado como problema-teste, temos:

$$v = \begin{bmatrix} 1975 \\ 135 \\ 53,75 \end{bmatrix}.$$

O alimento deve ser produzido unicamente pela combinação dos ingredientes. Assim, para garantir que a quantidade de calorias do alimento produzido seja 1.975 kcal, temos:

$$200x_c + 500x_b + 3600x_s + 3600x_t = 1975,$$

em que x_c fornece a quantidade de cenouras (em kg), x_b, a quantidade de beterrabas (em kg), x_s, a quantidade de soja e x_t, a quantidade de trigo (em kg).

A fim de que a quantidade de proteínas seja 135 g, temos a equação:

$$20x_c + 20x_b + 400x_s + 100x_t = 135.$$

Para assegurar que a quantidade de gordura no alimento produzido seja 53,75 g, temos a equação:

$$4x_c + 1x_b + 200x_s + 10x_t = 53{,}75.$$

Além disso, devemos fazer os cálculos para que essas quantidades de calorias, proteínas e gorduras sejam suficientes para cada quilograma do alimento produzido, ou seja, a soma das massas dos ingredientes utilizados deve ser 1 kg. Logo, obtemos a equação:

$$x_c + x_b + x_s + x_t = 1.$$

Veja que há *4* incógnitas e *4* equações que devem ser satisfeitas simultaneamente. Desse modo, podemos representar o sistema linear:

$$\begin{cases} x_c + x_b + x_s + x_t = 1 \\ 4x_c + 1x_b + 200x_s + 10x_t = 53{,}75 \\ 20x_c + 20x_b + 400x_s + 100x_t = 135 \\ 200x_c + 500x_b + 3600x_s + 3600x_t = 1975 \end{cases}.$$

Esse sistema linear pode ser resolvido por escalonamento. Chamando a linha *i* do sistema de L_i, $i = 1,2,3,4$, é possível fazer $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{10} - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow \dfrac{L_4}{100} - 2L_1$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} x_c + x_b + x_s + x_t = 1 \\ -3x_b + 196x_s + 6x_t = 49{,}75 \\ 38x_s + 8x_t = 11{,}5 \\ 3x_b + 34x_s + 34x_t = 17{,}75 \end{cases},$$

Resolvendo $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, temos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_c + x_b + x_s + x_t = 1 \\ -3x_b + 196x_s + 6x_t = 49{,}75 \\ 38x_s + 8x_t = 11{,}5 \\ 230x_s + 40x_t = 67{,}5 \end{cases}.$$

Fazendo $L_4 \leftarrow \frac{L_4}{5} - L_3$, resulta:

$$\begin{cases} x_c + x_b + x_s + x_t = 1 \\ -3x_b + 196x_s + 6x_t = 49{,}75 \\ 38x_s + 8x_t = 11{,}5 \\ 8x_s = 2 \end{cases}.$$

Utilizando a retrossubstituição, concluímos que $x_s = 0{,}25$, $x_t = 0{,}25$, $x_b = 0{,}25$ e $x_c = 0{,}25$.

Para cada quilograma do alimento desejado, portanto, devemos usar 0,25 kg de cada ingrediente.

Como representar essas operações matricialmente?

Usando a matriz de informações nutricionais *B*, definimos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n},$$

em que $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ é uma matriz com todas as componentes iguais a *1*.

Definindo, também, o vetor $b = \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$, o sistema linear a ser resolvido apresenta-se matricialmente como:

$$Ax = b,$$

no qual $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor em que a componente *i* está associada à quantidade do ingrediente *i* que deve ser utilizada (em kg).

Com os tópicos abordados nesta seção, fomos capazes de modelar o problema como linear, resolvê-lo e, ainda, representá-lo em notação matricial (o que simplifica implementações computacionais do problema).

Tendo resolvido esse exemplo, você pode sintetizar os passos para modelagem matemática e as formas de resolução do problema em um relatório, com o propósito de instruir a equipe de desenvolvimento.

Avançando na prática

Sistemas lineares em uma lanchonete

Descrição da situação-problema

Imagine que você é o proprietário de uma lanchonete. Em razão de um feriado prolongado, em que sua lanchonete não abrirá, seu objetivo é utilizar todos os seus ingredientes. Os lanches de seu cardápio são:

- sanduíche de presunto (2 fatias de pão, 2 fatias de presunto e 1 fatia de queijo);
- sanduíche de queijo (2 fatias de pão e 4 fatias de queijo);
- lanche de frango (2 fatias de pão, 2 fatias de queijo e 50 g de frango desfiado);
- lanche à moda da casa (2 fatias de pão, 2 fatias de presunto, 2 fatias de queijo e 50 g de frango desfiado).

Você tem disponível: 150 fatias de pão, 70 de presunto, 190 de queijo e 1,25 kg de frango. Quais lanches você deve produzir?

Resolução da situação-problema

As variáveis para o nosso problema são:

x_1 corresponde à quantidade de sanduíche de presunto; x_2 representa a quantidade de sanduíche de queijo; x_3, a quantidade de lanche de frango; x_4, a quantidade de lanche à moda da casa.

Usando as informações fornecidas, podemos modelar nosso problema como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 70 \\ 190 \\ 1250 \end{bmatrix}.$$

Cada linha do sistema está associada a um ingrediente: a linha 1 corresponde ao pão; a linha 2, ao presunto; a linha 3, ao queijo;

a linha 4, ao frango. Note que convertemos a quantidade total de frango disponível de 1,25 kg para 1.250 g, pois a quantidade utilizada nos lanches está em gramas.

Para simplificar os cálculos, trocaremos a linha 1 pela linha 2 e começaremos o processo de escalonamento, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 0{,}5L_1$ e $L_4 \leftarrow \frac{L_4}{50}$, obtendo o sistema (representado por matriz estendida):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 70 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 80 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 155 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right]$$; fazemos $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, resulta:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 70 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right]$$; resolvemos $L_4 \leftarrow L_4 + 0{,}5L_3$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 70 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 22{,}5 \end{array}\right].$$

Por meio do qual, concluímos que $x_4 = 15$, $x_3 = 10$, $x_2 = 30$ e $x_1 = 20$.

Logo, para utilizar todos os ingredientes disponíveis e ter aproveitamento máximo, você deve produzir 20 sanduíches de presunto, 30 de queijo, 10 lanches de frango e 15 à moda da casa.

Faça valer a pena

1. Suponha que você possui 440 pregos e 340 parafusos e gostaria de montar dois tipos de caixas.

O tipo 1 necessita de 8 pregos e 4 parafusos.

O tipo 2 usa 6 pregos e 6 parafusos.

Você quer montar a quantidade ideal de cada tipo de caixa para não sobrarem parafusos nem pregos ao final do processo.

Escolha a alternativa com o sistema linear associado ao problema e sua solução:

a) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 340 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 53 \\ 4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 340 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 340 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 340 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 54 \\ 4 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440 \\ 340 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 53 \end{bmatrix}$.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, chamamos de núcleo de *A* o conjunto dos elementos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem o sistema linear:

$$Ax = \mathbf{0},$$

em que $0 \in \mathbb{R}^n$ é o vetor com todas as componentes iguais a zero.

Sobre esse conjunto, são feitas as seguintes afirmações:

I. $x = \mathbf{0}$ é solução do sistema.

II. Se o sistema for determinado, a única solução será $x = \mathbf{0}$.

III. Se *x* e *y* estiverem no núcleo de *A*, então $x + y$ estará no núcleo de *A*.

Analisando essas afirmações, é correto afirmar que:

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas a afirmação III é verdadeira.
d) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
e) As afirmações I, II e III são verdadeiras.

3. Considere o sistema linear definido a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Assinale V para verdadeira e F para falsa nas afirmações a seguir:

( ) O vetor $x^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema.

( ) Se *x* e *y* forem soluções do sistema, o vetor $x - y$ será solução do sistema homogêneo associado, ou seja, $x - y$ será solução de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

( ) O sistema é possível e indeterminado.

( ) Todos os vetores do tipo $x^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1+\alpha \end{bmatrix}$, com α real, são soluções para o sistema linear.

Escolha a alternativa que associa V e F de forma apropriada:

a) V-V-V-V.

b) V-F-V-F.

c) F-F-F-F.

d) V-F-V-F.

e) V-V-V-F.

Seção 1.3

Determinantes e matrizes inversas

Diálogo aberto

Caro aluno,

Na seção anterior, vimos como representar sistemas lineares na forma matricial e que alguns desses sistemas não apresentam solução (sistemas impossíveis); outros, uma única solução (sistemas possíveis e determinados), e os restantes, infinitas soluções (sistemas possíveis e indeterminados).

Quando trabalhamos com sistemas lineares quadrados, temos uma ferramenta chamada de determinante que fornece muitas informações sobre a matriz de coeficientes do sistema (e, consequentemente, sobre o sistema linear ao qual a matriz está associada).

Com o uso do determinante, podemos determinar quais matrizes possuem inversa. Já a matriz inversa possibilita a resolução de sistemas lineares, além de demonstrar várias propriedades teóricas sobre as matrizes.

Para ilustrar algumas das aplicações de determinantes, voltemos ao *software* alimentício. Lembre-se de que, dadas as informações nutricionais dos ingredientes e do alimento desejado, esse *software* deve calcular qual a quantidade usada de cada ingrediente.

Na seção anterior, vimos também que o *software* resolve um sistema linear para encontrar as quantidades ideais dos ingredientes.

Em um teste para a implementação dessa estratégia, decidiu-se fazer uma massa à base de três diferentes tipos de cenouras:

- O primeiro tipo apresenta 200 kcal/kg e 20 g/kg de proteínas.
- O segundo tipo, 220 kcal/kg e 22 g/kg de proteínas.
- O terceiro tipo, 210 kcal/kg e 21 g/kg de proteínas.

A massa de cenouras desejada deve ter 210 kcal/kg e 25 g/kg de proteínas.

Ao entrar com essas informações no *software*, este retorna uma mensagem de erro. Qual sistema linear deve ser resolvido para encontrar a quantidade de cada tipo de cenoura a ser utilizada? Por que o *software* reporta erro? Qual teste poderia ser realizado antes da resolução do sistema linear para que não ocorram erros?

Nesta seção, responderemos a essas e outras questões.

Não pode faltar

Na seção anterior, estudamos que um sistema linear quadrado pode apresentar zero, uma ou infinitas soluções. Essa característica está associada à singularidade ou à não singularidade da matriz que define o sistema linear. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dizemos que A é **singular** se uma de suas linhas pode ser escrita como combinação das outras, ou seja,

$$L_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i L_i,$$

com $k = 1, 2, \ldots, n$, para $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Veja, por exemplo, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que $L_2 = 3L_1 + L_3$, logo a segunda linha pode ser escrita como combinação da primeira e da segunda linha.

Atenção

Se todas as componentes de uma linha da matriz forem zero, então a matriz será singular. Para verificar esse fato, basta multiplicarmos qualquer outra linha da matriz por *0*.

Caso nenhuma linha da matriz A possa ser escrita como combinação das outras, dizemos que A é **não singular**.

No caso geral, classificar uma matriz em singular ou não singular não é trivial. Para auxiliar nessa classificação, introduzimos o conceito de determinante de uma matriz quadrada. Se o determinante de uma matriz for igual a zero, a matriz será **singular**; caso contrário, será **não singular**.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, definimos seu **determinante** como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

ou seja, o determinante de uma matriz de ordem 2×2 é o produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária.

Exemplificando

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

Facilmente, percebemos que $L_2 = -2L_1$, logo A é singular.

Podemos confirmar esse fato calculando seu determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = -4 + 4 = 0.$$

Como o determinante é igual a zero, afirmamos que A é singular.

A definição apresentada é válida somente para matrizes 2×2; para matrizes 3×3, podemos calcular o determinante por meio da regra de Sarrus.

Assimile

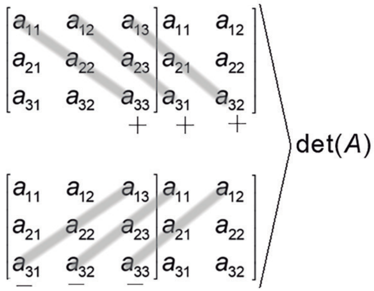
Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, a **regra de Sarrus** para o cálculo de seu **determinante** é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12},$$

Essa expressão pode ser resumida no esquema apresentado na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Esquema para o uso da regra de Sarrus



Fonte: elaborada pelo autor.

Para aplicarmos a regra de Sarrus, repetimos as duas primeiras colunas ao final da matriz original, adicionamos os produtos realizados quando nos movemos paralelamente à diagonal principal e subtraímos os produtos obtidos quando nos movemos paralelamente à diagonal secundária.

Exemplificando

Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Já vimos que essa matriz é singular, logo seu determinante deve ser igual a zero. Aplicando a regra de Sarrus, obtemos:

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right|,$$

$$\det(A)=1\cdot 1\cdot(-1)+0\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot 1\cdot 1-1\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 0$$

logo,

$$\det(A)=-1+0+2+1-2+0=0.$$

Podemos, então, novamente, afirmar que A é singular.

No caso de matrizes quadradas de ordem qualquer, calculamos o determinante aplicando a fórmula de Laplace.

Assimile

Seja $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$, definimos seu **cofator** $A^{(ij)}$ como o determinante da matriz *A*, retirada a linha *i* e a coluna *j* multiplicada por $(-1)^{i+j}$.

Por exemplo, o cofator *2,1* da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é:

$$A^{(21)} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \left(1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 1\right) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Segundo o **Teorema de Laplace**, o determinante de *A* é calculado como a soma dos elementos de uma linha ou coluna de *A* multiplicados pelos seus cofatores correspondentes.

Tomando como exemplo a matriz 4×4 apresentada anteriormente, vamos calcular o determinante de *A* usando os elementos da primeira coluna de *A* (por ser a coluna com o maior número de zeros). Assim:

$$\det(A) = a_{11}A^{(11)} + a_{21}A^{(21)} + a_{31}A^{(31)} + a_{41}A^{(41)},$$

ou seja,

$$\det(A) = 0 \cdot A^{(11)} + 1 \cdot A^{(21)} + 0 \cdot A^{(31)} + 0 \cdot A^{(41)} = A^{(21)} = 1.$$

Note que qualquer outra linha ou coluna poderia ser escolhida; usualmente, escolhemos a que possui o maior número de zeros para calcularmos a menor quantidade possível de determinantes.

Reflita

Considere uma matriz quadrada de ordem 2×2. O que ocorre quando aplicamos a fórmula de Laplace para o cálculo de determinantes?

E com uma matriz de ordem 3×3?

As formas de cálculo de determinantes são equivalentes?

Algumas vezes, o cálculo dos determinantes pode ser simplificado usando suas propriedades.

Assimile

Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que *A* e *B* sejam matrizes quaisquer e $\tilde{A}$ é a matriz *A* com a posição de duas linhas ou duas colunas trocadas. Então, as seguintes propriedades são válidas:

- Se *A* é diagonal ou triangular, então o determinante é calculado como o produto dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

- O determinante da matriz *AB* é o determinante de *A* multiplicado pelo determinante de *B*, ou seja,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

- O determinante da matriz λA é o determinante de *A* multiplicado por λ^n, ou seja,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

- O determinante de *A* é igual ao de sua transposta, ou seja,

$$\det(A) = \det\left(A^T\right).$$

- Quando trocamos a ordem de duas linhas ou duas colunas, mudamos o sinal do determinante, ou seja,

$$\det\left(A\right) = -\det\left(\tilde{A}\right).$$

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular, dizemos que *A* é invertível, isto é, *A* admite uma inversa multiplicativa.

Anteriormente, afirmamos que a matriz identidade *I* pode ser vista como elemento neutro da multiplicação. Assim, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é inversa de *A*, se:

$$BA = AB = I,$$

ainda, a inversa de *A* é única e denotada por:

$$B = A^{-1}.$$

Agora, considere o sistema linear:

$$Ax = b,$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular, $b \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos termos independentes e $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de incógnitas.

Podemos pré-multiplicar (multiplicar à esquerda) o sistema pela inversa de *A*, logo: $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$.

Como a inversa de *A* é única, o produto $A^{-1}b$ é único, portanto existe um único vetor *x* que satisfaz o sistema linear, ou seja, **todo sistema linear definido por matriz quadrada não singular possui solução única**.

Reflita

Como podemos encontrar a inversa de uma matriz?

Suponha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular e os vetores $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, com $k = 1, \cdots, n$, soluções dos sistemas lineares:

$$Ax^{(k)} = e_k, \; k = 1, \cdots, n,$$

em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ é um vetor com a *k*-ésima componente igual a *1* e todas as outras iguais a *0*, ou seja, $(e_k)^T = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{k-1 \text{ vezes}} & 1 & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n-(k-1) \text{ vezes}} \end{bmatrix}$.

Defina a matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com a *k*-ésima coluna dada por $x^{(k)}$, ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Qual é o resultado do produto AX? E do produto XA? O que podemos concluir sobre a matriz *X*? Podemos escrever o problema de se encontrar a inversa de uma matriz como sistemas lineares?

Após analisar o tópico "Reflita" apresentado anteriormente, você, provavelmente, concluiu que, para determinarmos a inversa de uma matriz, devemos resolver um problema do tipo:

$$AX = I,$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular, *I* é a matriz identidade de ordem *n* e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de incógnitas que equivale à inversa de *A*.

Exemplificando

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos verificar se essa matriz é invertível e, em caso afirmativo, qual a sua inversa.

Para verificar se A é invertível, calculamos $\det(A)$:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

$$\det(A) = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0.$$

Logo:

$$\det(A) = 0 + 0 + 1 - 0 - 3 - 0 = -2 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível. Para encontrar a inversa, vamos resolver o problema:

$$AX = I$$

Usando escalonamento completo e matriz estendida:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

No primeiro passo, fazemos $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, daí:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Agora $L_2 \leftrightarrow L_3$, gerando:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazemos $L_3 \leftarrow 0{,}5L_3$ e, depois, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Assim, concluímos que:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Reforçamos que todas as inversas das matrizes quadradas não singulares podem ser obtidas resolvendo o sistema matricial $AX = I$. Pela simplicidade das matrizes de ordem 2×2 não singulares, estas possuem fórmulas fechadas mais simples para suas inversas. Dada uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

não singular, sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Sugerimos que você verifique essa equivalência, isto é, faça as multiplicações AA^{-1} e $A^{-1}A$, observando que o produto em ambos os casos é a matriz identidade de ordem *2*.

Pesquise mais

Para uma análise mais aprofundada sobre os conceitos teóricos de determinantes, recomendamos as seguintes leituras:

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2012. p. 167-180.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016. p. 245-263.

Apresentamos uma estratégia baseada na resolução de sistemas lineares para o cálculo de matrizes inversas. Para algumas técnicas mais avançadas de resolução de sistemas lineares, sugerimos as seguintes referências:

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. p. 228-236.

CUNHA, Maria Cristina C. **Métodos numéricos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2009. p. 39-41.

Nesta seção, estudamos os conceitos básicos de matrizes e representamos dados de maneira compacta, facilitando suas implementações computacionais. Analisamos como modelar problemas na forma de sistema de equações lineares e apresentamos algumas estratégias de resolução. Além disso, estudamos os sistemas quanto ao número de soluções, utilizando caracterização de matrizes em singulares e não singulares.

Sem medo de errar

Lembre-se de que estamos interessados em descobrir por que o *software* alimentício apresentou erro ao tentarmos fazer uma massa de cenouras.

Definindo as quantidades de cenouras dos tipos *1*, *2* e *3*, respectivamente, como x_1, x_2 e x_3, e combinando com as propostas da seção anterior, vemos que o sistema linear que deve ser resolvido pode ser representado pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 200 & 220 & 210 \\ 20 & 22 & 21 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolveremos esse problema utilizando escalonamento parcial. Primeiramente, fazemos $L_1 \leftarrow 0{,}1L_1$, daí o sistema linear equivalente (representado na forma de matriz estendida) é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 22 & 21 & 21 \\ 20 & 22 & 21 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Depois, resolvendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 22 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Note que a segunda linha desse sistema está mostrando que:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 0 = 4,$$

o que é um absurdo, logo esse sistema não possui solução, e o *software* deverá reportar algum tipo de erro.

Para evitar esse tipo de situação, podemos calcular o determinante da matriz que define o sistema linear antes de resolvê-lo. Neste caso específico, temos:

$$\det\begin{bmatrix} 200 & 220 & 210 \\ 20 & 22 & 21 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 200 \cdot 22 \cdot 1 + 220 \cdot 21 \cdot 1 + 210 \cdot 20 \cdot 1 - 1 \cdot 22 \cdot 210 - 1 \cdot 21 \cdot 200 - 1 \cdot 20 \cdot 220.$$

ou seja,

$$\det\begin{bmatrix} 200 & 220 & 210 \\ 20 & 22 & 21 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Como esperado, a matriz que define o sistema é singular (veja que a segunda linha é igual a um décimo da primeira linha). Logo, há a possibilidade de não existir solução.

Lembre-se de que o fato de a matriz ser singular não impede a existência de solução para o sistema linear. Esse fato impede a existência de solução única. Assim, se o determinante do sistema for zero, o *software* deverá emitir um aviso, indicando que talvez o problema não possua solução e, se existir, a solução não será única.

Agora, escreva um relatório explicando e justificando a necessidade de se verificar se a matriz é ou não singular antes de resolver o sistema. Apresente-o para a equipe de desenvolvimento e conclua esse projeto.

Com os conceitos discutidos nesta unidade, conseguimos representar dados de maneira compacta, facilitando suas implementações computacionais. Modelamos o problema da quantidade de ingredientes a serem utilizados na produção de alimentos na forma de sistema de equações lineares e analisamos algumas estratégias para a resolução do problema. Além disso, estudamos formas de verificar a unicidade da combinação dos ingredientes, evitando erros computacionais gerados pela tentativa de resolução de sistemas impossíveis.

Avançando na prática

Sistemas lineares na alocação de funcionários

Descrição da situação-problema

Uma pequena empresa possui 3 funcionários que recebem por hora de trabalho. Os valores na Tabela 1.3 indicam o rendimento por hora de cada funcionário em um tipo de trabalho específico. Por exemplo, se um funcionário tem habilidade manual x, então seu rendimento é de x horas dessa habilidade por hora de trabalho.

Tabela 1.3 | Rendimento dos funcionários em cada trabalho

Trabalho \ Funcionário	1	2	3
manual	0	1,5	0,5
computacional	1,5	0,5	1
administrativo	0	0	1,5

Fonte: elaborada pelo autor.

A cada dia, a empresa apresenta diferentes demandas; por exemplo, no dia *1*, a empresa necessita de *8* horas em trabalhos manuais, *12* em computacionais, *6* em administrativos. Já no dia *2*, *6* horas em manuais, *13* em computacionais, *9* em administrativos. Como alocar os funcionários de maneira eficiente?

Resolução da situação-problema

Defina $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz dos dados apresentados na Tabela 1.4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Defina $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ o vetor com a quantidade de horas necessárias de cada habilidade no dia e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ o vetor com a quantidade de horas que cada funcionário deve trabalhar. Daí, precisamos resolver:

$$Ax = b\,.$$

Note que a matriz *A* será a mesma todos os dias, entretanto o vetor *b* mudará. Como *A* é invertível (verifique!), sua inversa existe, e a cada dia podemos resolver $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Para determinar a inversa, resolveremos o sistema linear $AX = I$, em que $X \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é uma matriz de incógnitas e I é a matriz identidade. Na forma de matriz estendida, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando escalonamento completo, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right], \text{ ou seja, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{27} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Daí, no dia 1, temos: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{27} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, indicando que cada funcionário trabalhará *4* horas. No dia 2: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{27} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, indicando que o funcionário *1* trabalhará *4* horas, o funcionário *2*, *2* horas, e o funcionário *3*, *6* horas.

Faça valer a pena

1. Conforme a ordem de uma matriz aumenta, o cálculo de seu determinante se torna mais computacionalmente custoso. O uso de propriedades de determinantes pode facilitar o cálculo, evitando cálculos desnecessários.

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Usando propriedades de determinantes, podemos afirmar que:

a) $\det(A) = -18$.

b) $\det(A) = 18$.

c) $\det(A) = -1$.

d) $\det(A) = 1$.

e) $\det(A) = 0$.

2. O determinante pode ser usado para classificar a quantidade de soluções de um sistema linear.

Considere o sistema linear:

$$Ax = b,$$

em que $b \in \mathbb{R}^5$ é dado, $x \in \mathbb{R}^5$ é um vetor de incógnitas e:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sobre esse sistema, fazemos as seguintes afirmações:

I. $\det(A) = 1$.

II. O sistema possui infinitas soluções.

III. É impossível fazer afirmações sobre a quantidade de soluções, visto que não sabemos qual é o vetor b.

Sobre essas afirmações, é correto afirmar:

a) Apenas a afirmação I está correta.

b) Apenas a afirmação II está correta.

c) Apenas a afirmação III está correta.

d) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

e) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

3. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a decomposição *LU* fornece duas matrizes, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior, com elementos da diagonal principal iguais a 1 e $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior, de modo que:

$$A = LU .$$

Considere o sistema linear representado pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 6 & 3 \\ 12 & 15 & 12 & 6 \\ 16 & 21 & 18 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 45 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

Denote por *A* a matriz de coeficientes do sistema linear.

Defina as matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assinale V para verdadeiro e F para falso nas afirmações a seguir:

( ) O sistema linear tem solução única.

( ) As matrizes *L* e *U* são a decomposição *LU* de *A*.

( ) $\det(A) = 0$.

( ) Uma solução do sistema linear é $x^T = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$.

Escolha a alternativa que associa corretamente V e F às afirmações:

a) V – V – V – F.

b) V – V – V – V.

c) F – V – V – F.

d) V – V – F – F.

e) F – F – F – V.

Referências

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. Sistemas lineares e escalonamento. In: ______. **Geometria analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra**. São Carlos: EDUFSCar, 2011. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~yolanda/vga/ga1.pdf>. Acesso em: 26 out. 2017.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

CUNHA, Maria Cristina C. **Métodos numéricos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2000.

DIETA E SAÚDE. Disponível em: <www.dietaesaude.com.br>. Acesso em: 10 out. 2017.

KUERTEN, Cristini. **Algumas aplicações de matrizes**. 2002. 68 f. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Santa Catarina, 2002. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96804/Cristini_Kuerten.PDF>. Acesso em: 10 out. 2017.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016. (Coleção Matemática Universitária).

MASSAGO, Sadao. **Escalonamento**. São Carlos: EDUFSCar, 2014. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~sadao/download/?file=student/escalonamento.pdf>. Acesso em: 26 out. 2017.

PULINO, Petrônio. Matrizes e sistemas lineares. In: ______. **Álgebra linear e suas aplicações**: notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 30-41. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 10 out. 2017.

RUGGGIERO, Márcia Aparecida Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

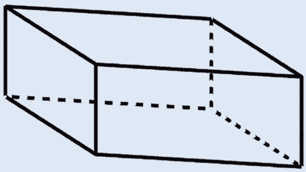
Vetores multidimensionais

Convite ao estudo

Nesta unidade, estudaremos o que são vetores, como os representar, algumas de suas operações básicas e aplicações. No que diz respeito à representação, veremos que uma das maneiras muito interessantes é a sua forma matricial.

Para pôr em prática os conteúdos que serão estudados nesta unidade, suponha que você esteja trabalhando em uma empresa do ramo de arquitetura e design, na qual se pretende projetar uma caixa-d’água em forma de paralelepípedo, formado por 2 paralelogramos opostos e 4 retângulos, como na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Exemplo de paralelepípedo



Fonte: elaborada pelo autor.

As 2 faces em forma de paralelogramo devem estar na orientação vertical, isto é, formando um ângulo de 90° com o solo.

Suponha que você faça parte da equipe multidisciplinar de projetistas e que tenha ficado responsável pela elaboração geométrica do projeto. Essa elaboração será implementada em um *software* de modelagem 3D, que recebe os dados em forma vetorial. Nessa tarefa, há algumas perguntas a serem respondidas: como representar os vértices (pontos de interseção de 3 segmentos)? Como representar as arestas (segmentos de interseção de 2 faces)? Como medir o comprimento das arestas?

A caixa-d'água não deve sair dos limites da propriedade. Como verificar se essa restrição estará satisfeita sabendo o comprimento da aresta e os ângulos internos do paralelogramo?

Como determinar a área de cada uma das faces? Como medir o volume de água que o paralelepípedo comporta?

Nesta unidade, estudaremos como responder a essas e a outras questões associadas a vetores e suas propriedades geométricas.

Seção 2.1

Representação de vetores, decomposição e operações

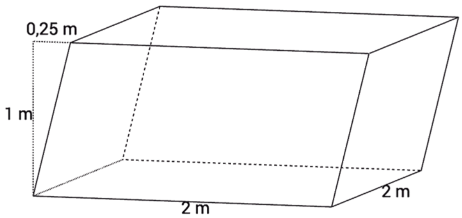
Diálogo aberto

Nesta seção, apresentaremos, formalmente, o conceito de vetores e algumas de suas propriedades. Vetores são bastante úteis em aplicações, visto que podem nos dar algumas informações extras que números (escalares) não nos fornecem.

Lembre-se de que estamos interessados no projeto de uma caixa--d'água em forma de paralelepípedo, em que as 2 faces em forma de paralelogramo devem fazer um ângulo de 90° com o solo. No estágio inicial do projeto, decidiu-se que seria abordado sob uma perspectiva algébrica. Você ficou responsável pela representação dos vértices. Para tanto, ofereça algumas alternativas. Como podemos descrever as arestas em função dos vértices?

Use como exemplo o paralelepípedo em que os vértices no plano definido pelo solo formam um quadrado de lado 2 *m*. Suas paredes verticais têm 1 *m* de altura, e a aresta superior do paralelogramo está deslocada 25 *cm*. Na Figura 2.2, demonstramos uma representação geométrica desse paralelepípedo.

Figura 2.2 | Representação geométrica da caixa-d'água desejada



Fonte: elaborada pelo autor.

Para que a caixa-d'água fique estável, ainda é necessária a utilização de vigas de sustentação que saem de um vértice e atingem o vértice diagonalmente oposto. Como medir o comprimento de cada uma das vigas?

Não pode faltar

Nesta seção, discutiremos o conceito de vetor, algumas de suas operações fundamentais e relacionaremos vetores com matrizes de apenas uma coluna.

Primeiramente, é importante definirmos **vetor**.

Assimile

Um **vetor** é uma estrutura matemática que possui comprimento, direção e sentido.

No plano **bidimensional**, um vetor x pode ser representado por uma dupla ordenada de valores reais, por exemplo, $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$, ou, equivalentemente, $x = (x_1, x_2)$, ou, ainda, como matrizes de 2 linhas e 1 coluna: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Vetores costumam ser expressos como setas partindo da origem do sistema $(0,0)$ e com ponto final dado por (x_1, x_2).

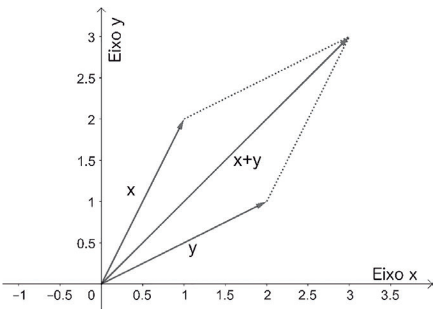
Denotamos o espaço de todos os vetores bidimensionais como $\mathbb{R}^2$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, definimos sua soma como:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Na Figura 2.3, temos uma representação geométrica da soma de vetores bidimensionais. O vetor soma é equivalente a nos movermos, a partir da origem do sistema, por um vetor, e depois pelo outro, a partir do final do primeiro.

Figura 2.3 | Representação geométrica da soma de vetores bidimensionais



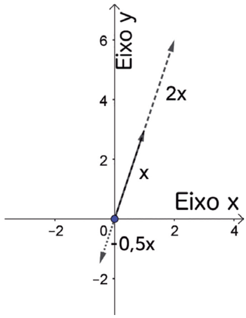
Fonte: elaborada pelo autor.

Dado um número $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a multiplicação de vetor por escalar como:

$$\alpha \boldsymbol{x} = \alpha\left(x_1, x_2\right) = \left(\alpha x_1, \alpha x_2\right).$$

Na Figura 2.4, apresentamos uma interpretação geométrica da multiplicação por escalar. Se $\alpha > 0$, o vetor $\alpha \boldsymbol{x}$ tem o mesmo sentido que o vetor *x*; o que muda é seu comprimento, que passa a ser α vezes o de *x*. Caso $\alpha < 0$, o vetor $\alpha \boldsymbol{x}$ tem sentido oposto a *x* e comprimento igual a $|\alpha|$ vezes o de *x*. Caso $\alpha = 0$, o vetor $\alpha \boldsymbol{x} = (0,0)$ é nulo.

Figura 2.4 | Interpretação geométrica do produto vetor-escalar



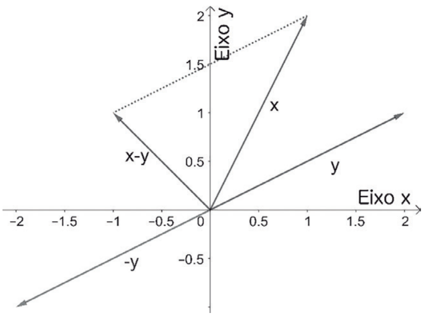
Fonte: elaborada pelo autor.

Definimos a subtração de *x* e *y* como:

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \left(x_1, x_2\right) - \left(y_1, y_2\right) = \left(x_1, x_2\right) + (-1)\left(y_1, y_2\right) = \left(x_1 - y_1, x_2 - y_2\right).$$

Na Figura 2.5, temos a representação geométrica da subtração de dois vetores, que é equivalente a nos movermos na direção dada pelo primeiro vetor e, depois, nos movimentarmos no sentido inverso do segundo vetor.

Figura 2.5 | Representação geométrica da subtração de vetores bidimensionais



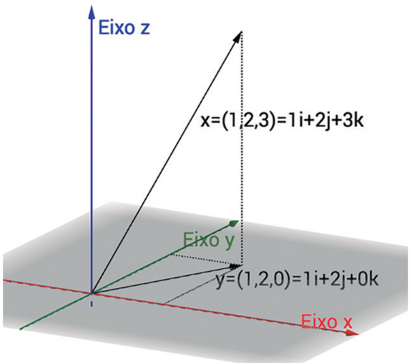
Fonte: elaborada pelo autor.

No espaço **tridimensional**, um vetor x é uma tripla ordenada de valores reais, podendo ser representados por $\boldsymbol{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, ou, equivalentemente, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ou, ainda, como matrizes com 3 linhas e 1 coluna: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Denotamos o espaço de todos os vetores tridimensionais como $\mathbb{R}^3$.

O plano bidimensional pode ser considerado um subconjunto do espaço tridimensional quando a terceira componente do vetor é nula. Na Figura 2.6, apresentamos um exemplo de um vetor tridimensional e sua projeção sobre o plano bidimensional.

Figura 2.6 | Representação de vetores tridimensionais



Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa imagem, o vetor y é a projeção do vetor x no plano bidimensional. A projeção de um vetor em um espaço "menor" pode ser vista como a sombra que esse vetor faz sobre o espaço. Na próxima seção, veremos técnicas avançadas de decomposição de vetores em elementos ortogonais.

Reflita

Como é possível expandir os conceitos de soma e subtração de vetores bidimensionais para vetores tridimensionais? E o produto por escalar? As interpretações geométricas da soma e da subtração de vetores e do produto vetor/escalar se mantêm?

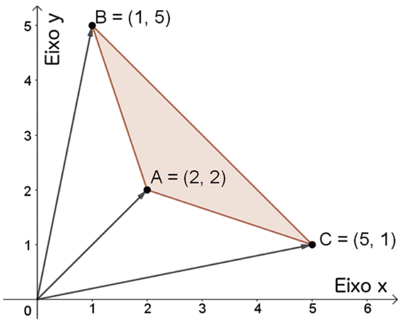
Vetores podem ser definidos em espaços *n* dimensionais quaisquer, com *n* natural. Neste caso, o conjunto de todos os vetores é denotado por $\mathbb{R}^n$, e um elemento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado por uma *n*-upla ordenada $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ou por uma matriz com n linhas e 1 coluna: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Reflita

Como expandir os conceitos de soma e subtração de vetores e multiplicação de vetores por escalares para o caso *n*-dimensional?

Problemas geométricos são bastante úteis para ilustrar a aplicabilidade de vetores bi ou tridimensionais. Por exemplo: um triângulo com os vértices nos pontos $A = (2,2)$, $B = (1,5)$ e $C = (5,1)$. Esses pontos podem ser representados como vetores. Na Figura 2.7, há um exemplo dessa representação.

Figura 2.7 | Exemplo de triângulo com vértices representados por vetores



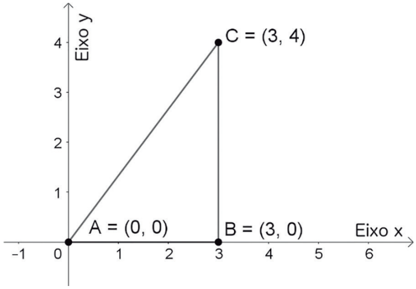
Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplificando

Suponha um triângulo retângulo com lados medindo *3*, *4* e *5*.

Se definirmos que um dos vértices está na origem, um segundo vértice pode ser denotado sobre o eixo das abscissas (eixo horizontal no sistema de representação euclidiano) e o terceiro ponto pode ser indicado movendo-nos perpendicularmente ao eixo das abscissas a partir do ponto anterior, ou seja, movendo-nos paralelamente ao eixo das ordenadas (eixo vertical no sistema de representação euclidiano). Na Figura 2.8, temos uma possível representação desse triângulo.

Figura 2.8 | Triângulo retângulo com lados medindo 3, 4 e 5



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que o lado do $\overline{AB}$ é constituído por todos os pontos entre *A* e *B*, e o conjunto desses pontos pode ser representado como:

$$\left\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0,1]\right\},$$

em que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor que denota o deslocamento necessário para sair do ponto *A* e atingir o ponto *B*, sendo calculado como: $\overrightarrow{AB} = B - A = B + (-1)A$.

Obs.: note que as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar estão definidas para pontos, visto que são representados por vetores.

No nosso exemplo, temos:

$$\overline{AB} = \left\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0,1]\right\} = \{(0,0) + t(3,0) \mid t \in [0,1]\} =$$
$$= \{t(3,0) \mid t \in [0,1]\}$$

e, de forma análoga, concluímos que:

$$\overline{AC} = \left\{A + t\overrightarrow{AC} \mid t \in [0,1]\right\} = \{(0,0) + t(3,4) \mid t \in [0,1]\} =$$
$$= \{t(3,4) \mid t \in [0,1]\}$$

e

$$\overline{BC} = \left\{B + t\overrightarrow{BC} \mid t \in [0,1]\right\} = \{(3,0) + t(0,4) \mid t \in [0,1]\}.$$

Veja que os lados do triângulo podem ser denotados por um ponto e um vetor deslocamento. Os comprimentos dos lados dependem somente da posição relativa dos pontos, isto é, das distâncias de um ponto até outro. Da geometria analítica, sabemos que o comprimento do lado $\overline{AB}$ é dado por:

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

em que a_1 e b_1 indicam a primeira componente dos pontos *A* e *B*, respectivamente, e a_2 e b_2, a segunda componente desses pontos. Note que $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Definimos o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ igual ao do segmento de reta $\overline{AB}$.

Sugerimos que verifique que os comprimentos propostos no exemplo anterior são válidos.

Assimile

Dado $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos sua **norma euclidiana** como a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes, isto é,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}}.$$

A norma de um vetor pode ser interpretada como o tamanho do vetor, ou a distância do ponto representado pelo vetor até a origem do sistema.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades de norma são verdadeiras:

- $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,\cdots,0)$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (esta desigualdade é chamada de triangular);
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Vocabulário

O termo "desigualdade triangular" vem da propriedade geométrica de triângulos que afirma que o comprimento de um de seus lados é sempre menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Como dito anteriormente, todo segmento de reta pode ser descrito por meio de um ponto inicial e um vetor diretor. Considerando os pontos A e B no espaço n-dimensional, o segmento de reta que liga esses dois pontos pode ser descrito como:

$$\overline{AB} = \left\{ A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0,1] \right\}.$$

Veja que o segmento que liga A até B é o mesmo que une B a A, ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{BA} = \left\{ B + t\overrightarrow{BA} \mid t \in [0,1] \right\}.$$

Como estamos interessados nos pontos que definem o segmento de reta, sua orientação (de A para B ou de B para A) não faz diferença.

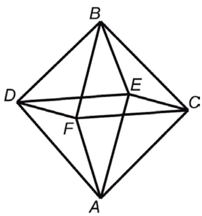
Em algumas aplicações, contudo, a orientação faz diferença, por exemplo, quanto a um atleta que corre do ponto A ao ponto B em linha reta, seu deslocamento pode ser calculado pelo vetor $\overrightarrow{AB}$ e, neste caso, a orientação nos dá informações importantes sobre o movimento. Chamamos o segmento de reta $\overline{AB}$ percorrido pelo atleta de segmento orientado.

Dois segmentos são ditos **equipolentes** se são paralelos, de mesmo comprimento e mesma orientação, isto é, dados dois segmentos orientados $\overline{AB} = \left\{ A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0,1] \right\}$ e $\overline{CD} = \left\{ C + t\overrightarrow{CD} \mid t \in [0,1] \right\}$, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exemplificando

Considere o octaedro apresentado na Figura 2.9:

Figura 2.9 | Octaedro



Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa figura, os pontos *A*, *B*, *C*, *D*,*E* e *F* são:

$$A=(1,1,0),\ B=(1,1,4),\ C=(0,1,2),$$

$$D=(2,1,2),\ E=(1,0,2)\ \text{e}\ F=(1,2,2).$$

Veja que:

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,1,2)-(1,1,0)=(-1,0,2)$$

e

$$\overrightarrow{DB}=B-D=(1,1,4)-(2,1,2)=(-1,0,2).$$

Logo, os segmentos orientados $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ são equipolentes e, consequentemente, isso também vale para os segmentos orientados $\overline{CA}$ e $\overline{BD}$.

Calculando a norma do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos:

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\|(-1,0,2)\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}\approx 2,24.$$

Os comprimentos de $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ são, então, aproximadamente, 2,24 (claro que isso também vale para $\overline{CA}$ e $\overline{BD}$).

Facilmente, podemos verificar que $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\approx 2,24$ (verifique!).

Agora, note que:

$$\overrightarrow{CB}=B-C=(1,1,4)-(0,1,2)=(1,0,2),$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,1,4)-(1,1,0)=(0,0,4)$$

e

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(-1,0,2)+(1,0,2)=(0,0,4)=\overrightarrow{AB}.$$

Pela desigualdade triangular, concluímos:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right\|\leq\left\|\overrightarrow{AC}\right\|+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|.$$

Para verificar que essa relação é válida, calcule:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\|(0,0,4)\|=\sqrt{0^2+0^2+4^2}=4.$$

Como $4\leq 2\cdot 2,24=4,48$, constatamos que a desigualdade triangular é válida nesse caso.

Em muitos casos, estamos interessados apenas na direção que um vetor indica, e não em seu comprimento. Isso nos leva a trabalhar com vetores normalizados. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, definimos o **vetor unitário** ou **versor** associado a *x* como:

$$\hat{x} = \frac{1}{\|x\|} x.$$

Essa normalização preserva a direção e o sentido, porém o vetor normalizado possui norma igual a *1*. Assim:

$$\|\hat{x}\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Chamamos de versores euclidianos os vetores com norma igual a *1* que apontam na direção positiva dos eixos. No caso tridimensional, temos:

$$e_1 = (1,0,0) = \mathbf{i},\ e_2 = (0,1,0) = \mathbf{j} \text{ e } e_3 = (0,0,1) = \mathbf{k}.$$

Exemplificando

Considere os vetores $x = (1,-2,3)$ e $y = (7,-14,21)$. Precisamos saber se estes indicam a mesma direção, no mesmo sentido.

Uma das formas de realizar essa verificação é encontrando o vetor unitário associado a cada um deles. Para isso, calculamos a norma dos dois vetores:

$$\|x\| = \|(1,-2,3)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14},$$

$$\|y\| = \|(7,-14,21)\| = \sqrt{7^2 + (-14)^2 + 21^2} = \sqrt{7^2(1+4+9)} =$$
$$= 7\sqrt{14}.$$

Logo:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

e

$$\hat{y} = \frac{1}{7\sqrt{14}}(7,-14,21) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

Como $\hat{x} = \hat{y}$, vemos que os dois vetores apontam para a mesma direção e o mesmo sentido.

Pesquise mais

Nesta seção, introduzimos o conceito de vetores e algumas de suas operações básicas. Como leitura complementar aos assuntos tratados aqui, sugerimos:

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. p. 97-103.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. São Paulo: McGraw Hill, 1987. p. 1-16.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 197-202 (disponível na Biblioteca Virtual).

Sem medo de errar

Lembre-se de que estamos interessados em projetar uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo, em que as faces em forma de paralelogramo são perpendiculares ao solo. Além disso, os vértices no plano definido pelo solo formam um quadrado de lado 2 *m*. Suas paredes verticais têm 1 *m* de altura, e a aresta superior do paralelogramo está deslocada 0,25 *m*.

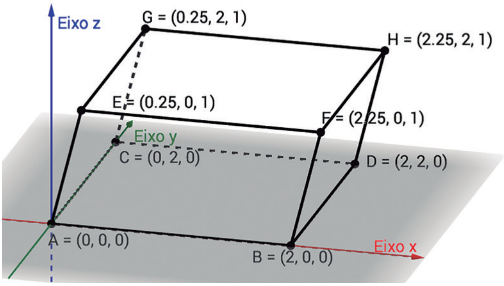
Nosso primeiro objetivo é definir as coordenadas dos vértices. Como estão no espaço tridimensional (largura, profundidade e altura), podemos representar as coordenadas dos vértices como vetores tridimensionais.

Trabalharemos com um sistema de coordenadas (em metros) em que a primeira coordenada representa a largura, a segunda, a profundidade e a terceira, a altura. Definimos também que o plano formado pelo solo está na altura *0* e que um dos vértices do quadrado, localizado no solo, está na origem, ou seja, $A=(0,0,0)$. Como a base da caixa-d'água forma um quadrado de lado 2 *m*, os outros pontos da base são $B=(2,0,0)$, $C=(0,2,0)$ e $D=(2,2,0)$.

Note que os vértices na parte superior da caixa-d'água também formam um quadrado. Se considerarmos que as faces em forma de paralelogramo estão paralelas ao eixo da largura, os pontos da parte superior serão $E=(0,25;\ 0;\ 1)$, $F=(2,25;\ 0;\ 1)$, $G=(0;\ 2,25;\ 1)$ e $H=(2,25;\ 2;\ 1)$.

Na Figura 2.10, apresentamos a caixa-d'água utilizando o sistema que definimos.

Figura 2.10 | Caixa-d'água com vértices



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que cada uma das arestas é um segmento de reta. Esses segmentos podem ser definidos como um ponto inicial e um vetor deslocamento. Por exemplo, o segmento $\overline{AB}$ pode ser descrito como $\overline{AB} = \left\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0,1]\right\}$, em que $\overrightarrow{AB}$ é o vetor deslocamento de A até B, calculado como:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0).$$

Assim,

$$\overline{AB} = \{(0,0,0) + t(2,0,0) \mid t \in [0,1]\} = \{t(2,0,0) \mid t \in [0,1]\}.$$

De forma análoga, temos:

$$\overline{AC} = \{t(0,2,0) \mid t \in [0,1]\},\ \overline{AE} = \{t(0,25;\quad 0;\quad 1) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{BD} = \{(2,0,0) + t(0,2,0) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{BF} = \{(2,0,0) + t(0,25;\quad 0;\quad 1) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{CG} = \{(0,2,0) + t(0,25;\quad 0;\quad 1) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(0,2,0) + t(2,0,0) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{DH} = \{(2,2,0) + t(0,25;\quad 0;\quad 1) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{EF} = \{(0,25;\quad 0;\quad 1) + t(2,0,0) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{EG} = \{(0,25;\quad 0;\quad 1) + t(0,2,0) \mid t \in [0,1]\},$$

$$\overline{FH} = \{(2,25;\quad 0;\quad 1) + t(0,2,0) \mid t \in [0,1]\}\ \text{e}$$

$$\overline{GH} = \{(0,25;2;1) + t(0,25;0;0) \mid t \in [0,1]\}.$$

Por fim, precisamos calcular o tamanho das vigas de sustentação. Essas vigas podem ser representadas como os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$. O comprimento de cada uma das vigas será o mesmo que o do vetor que define o segmento. Assim, o comprimento da aresta $\overline{AH}$ será:

$$\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \|H - A\| = \|(2{,}25;\quad 2;\quad 1) - (0{,}0{,}0)\| = \|(2{,}25;\quad 2;\quad 1)\| =$$

$$= \sqrt{2{,}25^2 + 2^2 + 1^2} \approx 3{,}17 \text{ m}.$$

De forma análoga, o comprimento de todas as vigas de sustentação é, aproximadamente, 3,17 *m*.

Agora, elabore um relatório explicando a escolha das coordenadas, a forma de representação das arestas e o cálculo do comprimento das vigas.

Avançando na prática

Distância do táxi

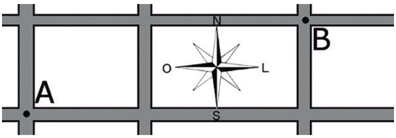
Descrição da situação-problema

Uma nova empresa de táxi é aberta. Essa empresa calcula o valor da viagem utilizando a distância geométrica entre o ponto de partida e o ponto de chegada.

No balanço do primeiro mês, percebeu-se que a empresa estava tendo prejuízos em suas viagens. Por que isso ocorreu?

Use como exemplo a viagem necessária para sair do ponto *A* e chegar ao ponto *B*, no mapa apresentado na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Mapa do ponto de partida e do destino



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse mapa, as ruas verticais vão de sul a norte e as horizontais, de leste a oeste. As coordenadas dos pontos são:

- *A*: 13 km sul e 1 km oeste;
- *B*: 10 km sul e 3 km leste.

A viagem foi cobrada por qual distância? Qual distância real foi percorrida pelo táxi?

Resolução da situação-problema

Para calcular a distância geométrica, podemos utilizar um sistema de representação bidimensional em que a primeira coordenada está associada à localização leste-oeste, na qual os valores negativos indicam o oeste e os positivos, o leste. Já a segunda coordenada está associada à localização norte-sul, na qual os valores negativos representam o sul e os positivos, o norte.

Considerando que esse sistema de representação está em quilômetros, os pontos de interesse são:

$$A = (-13,-1) \text{ e } B = (-10,3).$$

A distância geométrica entre A e B é o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|B - A\| = \|(-10,3)-(-13,-1)\| = \|(3,-4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} =$$
$$= 5 \text{ km}.$$

Perceba, porém, que o táxi não poderá se mover na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$. O táxi deve mover-se apenas sobre as ruas. Neste caso, pode mover-se, primeiramente, 4 km na direção leste e, depois, mais 3 na direção norte. Assim, no total, o táxi percorrerá 7 km.

Quando calculamos o comprimento de um vetor, como a soma do módulo de suas componentes, quer dizer que obtemos a **norma-1** do vetor.

Faça valer a pena

1. Vetores são estruturas matemáticas com direção, comprimento e sentido. No caso geral, podem ser representados como n-uplas ordenadas ou como matrizes, com n linhas e *1* coluna.

Considere os seguintes elementos:

$$x = 2, \; y = (1,2,3), \; z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } w = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Em relação a esses elementos, são feitas as seguintes afirmativas:

I. w não é considerado um vetor.

II. $xy = z + y$.

III. O produto xy não está definido.

IV. O vetor y é igual ao vetor z.

Após a análise das afirmativas anteriores, marque a alternativa correta:

a) Somente I e IV estão corretas.

b) Somente I, II e IV estão corretas.

c) Somente III está correta.

d) Somente IV está correta.

e) Somente I, III e IV estão corretas.

2. Considere os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ equipolentes.

Sabemos que:

$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{(0,0,0)\}$, $D = (3,0,-4) \in \overline{BC}$ e o comprimento de $\overline{AB}$ é 10.

Marque V para verdadeiro e F para falso nas seguintes afirmações sobre esses segmentos:

( ) $B = (0,0,0)$.

( ) $\overline{AB} = \overline{BC}$.

( ) $A = D$.

( ) $C = 2D$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) V – F – F – V.

b) F – F – F – F.

c) V – V – V – V.

d) F – V – V – V.

e) V – F – V – F.

3. No estudo de geometria, é muito comum utilizarmos vetores bi ou tridimensionais, porém a definição desses elementos não se limita a esses espaços.

No geral, vetores são representados como estruturas n-dimensionais.

Considere os vetores:

$x = (1,0,1,0)$, $y = (1,1,1,1)$ e $z = (0,-3,0,3)$

e seus respectivos versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

Marque V para verdadeiro e F para falso nas seguintes afirmações sobre esses vetores:

( ) $\|x + y\| = \|z\|$.

( ) $3\|x - y\| = \|z\|$.

( ) $\hat{x} - \hat{y} = \widehat{w}$, em que $w = x - y$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) V – V – V.

b) V – V – F.

c) V – F – F.

d) F – F – F.

e) F – V – F.

Seção 2.2

Produto escalar

Diálogo aberto

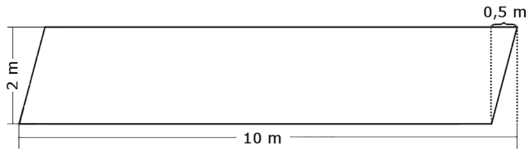
Nesta seção, estudaremos uma nova operação entre vetores: o produto escalar. Esse produto é uma operação entre dois vetores que resulta em um escalar. Dentre as diversas aplicações que possui, enfocaremos o cálculo do ângulo entre vetores e o processo de ortogonalização vetorial.

Recorde que estamos projetando uma caixa-d'água em formato de paralelepípedo. Na seção anterior, apresentamos um exemplo diferente de caixa-d'água que foi utilizado para estabelecermos que seus vértices serão representados como vetores tridimensionais, em que cada coordenada representa uma dimensão espacial (largura, profundidade e altura).

Além das informações apresentadas na seção anterior, consideraremos que a caixa-d'água deve ser construída em um terreno quadrado de $100\ m^2$. Toda a caixa-d'água deve estar nessa região, inclusive a parte acima do solo.

Os designers exigem que a altura da caixa-d'água seja de 2 *m* e o deslocamento entre a parte inferior e a superior, de 0,5 *m*. Na Figura 2.12, vemos uma representação bidimensional da caixa-d'água.

Figura 2.12 | Face em forma de paralelogramo da caixa-d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Quais devem ser as coordenadas dos vértices da caixa-d'água, de modo a utilizarmos toda a área do terreno e atendermos aos requerimentos dos designers? Quais devem ser os ângulos internos dos paralelogramos? Quais ângulos as hastes internas de sustentação fazem com o solo?

Nesta seção, estudaremos como utilizar operações algébricas para calcular ângulos entre vetores, como representar vetores como combinação de outros, como verificar se um vetor pode ser descrito como combinação de outro, além de uma estratégia para encontrar vetores que formam ângulo de 90° entre si.

Não pode faltar

Nesta seção, discutiremos os conceitos de dependência ou independência linear entre vetores, o ângulo formado entre eles e sua ortogonalidade.

Assimile

Dado um conjunto de vetores $V = \left\{ a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(k)} \right\} \subset \mathbb{R}^n$, chamaremos de V um conjunto de vetores **linearmente independentes** (LI), se a única solução para o problema:

$$a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \cdots + a^{(k)} x_k = \mathbf{0}$$

for a solução trivial, isto é, $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. Caso exista outra solução diferente da trivial, denominaremos os vetores $a^{(i)}$ de **linearmente dependentes** (LD).

Usando a representação de vetores como matrizes com uma única coluna, defina a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, cuja i-ésima coluna é o vetor $a^{(i)}$. Defina também o vetor $x \in \mathbb{R}^k$, cuja i-ésima componente vale x_i. Então, o problema:

$$a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \cdots + a^{(k)} x_k = \mathbf{0}$$

é equivalente a:

$$Ax = \mathbf{0}.$$

Podemos verificar se os vetores $a^{(i)}$ são linearmente independentes pela quantidade de soluções do sistema linear.

Reflita

Se $n = k$, qual ferramenta matricial podemos aplicar para verificar a dependência ou independência linear entre vetores?

Qual a maior quantidade de vetores linearmente independentes que podemos ter em um espaço n-dimensional?

Veja que todo conjunto com um único vetor, não nulo, é linearmente independente. Entretanto, note que todo conjunto que possui o vetor nulo é linearmente dependente. Seja $V=\left\{a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(k)},\mathbf{0}\right\}\subset\mathbb{R}^n$, $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$ e $x_{k+1}\neq 0$, então:

$$a^{(1)}x_1+a^{(2)}x_2+\cdots+a^{(k)}x_k+\mathbf{0}x_{k+1}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Como o sistema é resolvido por solução não trivial, os vetores são linearmente dependentes.

Assimile

A soma $a^{(1)}x_1+a^{(2)}x_2+\cdots+a^{(k)}x_k$, com $x_i\in\mathbb{R}$, para todo $i=1,\cdots,k$, é chamada **combinação linear** dos vetores $a^{(i)}$.

Quando temos um conjunto linearmente dependente, então um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros. Assim, sem perda de generalidade, podemos afirmar que:

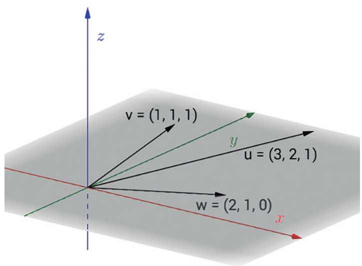
$$a^{(1)}=a^{(2)}x_2+\cdots+a^{(k)}x_k,$$

para alguma escolha de $x_2,x_3,\cdots x_k$.

Exemplificando

Considere os vetores $u=(3,2,1)$, $v=(1,1,1)$ e $w=(2,1,0)$, representados na Figura 2.13.

Figura 2.13 | Vetores *u*, *v* e *w*



Fonte: elaborada pelo autor.

Queremos verificar se esses vetores são linearmente dependentes, isto é, se:

$$(3,2,1)x_1+(1,1,1)x_2+(2,1,0)x_3=\mathbf{0},$$

ou, equivalentemente, se:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

admite alguma solução não trivial.

Primeiramente, definiremos a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, cuja primeira coluna é o vetor *u*, a segunda é o vetor *v*, e a terceira, o vetor *w*, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante dessa matriz, obtemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot3 - 0\cdot2\cdot1 = 0.$$

Como $x = (0,0,0)$ é solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos infinitas soluções e, portanto, *u*, *v* e *w* são linearmente dependentes.

Veja que $u - v = w$, logo *w* pode ser escrito como combinação linear de *u* e *v*.

Dados dois vetores não nulos, podemos verificar qual o ângulo entre eles; para isso, introduziremos o conceito de **produto escalar**.

Assimile

Dados $u,v \in \mathbb{R}^n$, definimos seu **produto escalar** como:

$$u \cdot v = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$

ou seja, o produto escalar entre os vetores *u* e *v* é a soma do produto coordenada a coordenada dos elementos dos vetores *u* e *v*.

O nome "produto escalar" vem do fato de que o resultado do produto é um escalar (um número).

Dados $u,v,w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

- $u \cdot v = u \cdot v$;
- $(\alpha u)\cdot v = \alpha(u \cdot v)$ e $u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$;
- $(u+v)\cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
- $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta_{u,v})$, em que $\theta_{u,v}$ é o **ângulo entre os vetores** u **e** v.

Reflita

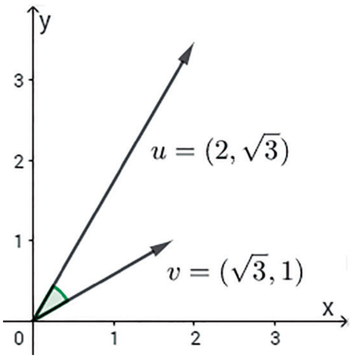
Quando representamos vetores como matrizes com uma coluna, o produto escalar pode ser representado como operação matricial. Qual é essa operação?

Perceba que a última propriedade de produto escalar fornece-nos uma forma direta de calcularmos o ângulo entre dois vetores.

Exemplificando

Considere os vetores u e v apresentados na Figura 2.14.

Figura 2.14 | Exemplo de vetores com ângulo entre eles



Fonte: elaborada pelo autor.

Queremos calcular o ângulo entre eles.

Veja que cada vetor pode ser associado a um triângulo retângulo, em que os tamanhos dos catetos são dados pelas suas coordenadas espaciais.

Dessa forma, veja que o ângulo θ_u entre o vetor u e o eixo das abscissas satisfaz:

$$tg(\theta_u) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Como θ_u está entre *0* e *90º*, vemos que $\theta_u = \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$.

Com argumentos análogos, conseguimos verificar que o ângulo entre o vetor *v* e o eixo das abscissas é $\theta_v = 30°$. Concluímos, então, que o ângulo entre *u* e *v* é $60° - 30° = 30°$.

Agora, usando o produto escalar, temos:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta_{u,v}) \Rightarrow \cos(\theta_{u,v}) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|},$$

daí:

$$\cos(\theta_{u,v}) = \frac{\left(2,2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3},1\right)}{\left\|\left(2,2\sqrt{3}\right)\right\|\left\|\left(\sqrt{3},1\right)\right\|} = \frac{2\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{4+12}\sqrt{3+1}}.$$

Logo:

$$\cos(\theta_{u,v}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ou seja, o ângulo entre *u* e *v* é $\theta_{u,v} = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$.

Reflita

O ângulo entre dois vetores não nulos depende de seu tamanho?

Como exemplo para tentar responder a essa pergunta, use os vetores:

$$x = (4,0,-3),\ \ y = (-1,2,2) \text{ e } z = 4y.$$

Calcule o ângulo entre x e y e entre y e z. O que podemos concluir?

Você consegue chegar a essa mesma conclusão usando vetores genéricos do $\mathbb{R}^n$?

Geometricamente, vemos que um vetor faz um ângulo nulo em relação a si mesmo. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, então:

$$\cos(\theta_{x,x}) = \frac{x \cdot x}{\|x\|\|x\|} = \frac{x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}} =$$

$$= \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2},$$

ou seja,

$$\cos(\theta_{x,x}) = 1.$$

Assim,

$$\theta_{x,x} = \arccos(1) = 0°,$$

comprovando que o ângulo de um vetor consigo mesmo é nulo.

Dessa demonstração, podemos obter uma propriedade importante do produto escalar:

$$x \cdot x = \|x\|^2.$$

Usaremos essa propriedade para verificar qual ângulo um vetor faz com seu oposto, ou seja, qual o ângulo entre $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo e $-x$.

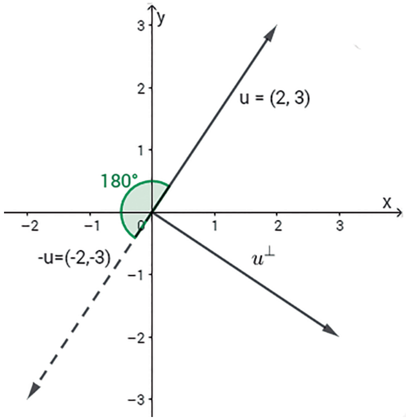
$$\cos(\theta_{x,-x}) = \frac{x \cdot (-x)}{\|x\|\|-x\|} = \frac{-(x \cdot x)}{\|x\|\|x\|} = -\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = -1.$$

Portanto, o ângulo de um vetor com seu oposto é:

$$\theta_{x,-x} = \arccos(-1) = 180°.$$

Na Figura 2.15, apresentamos um exemplo destacando esse ângulo.

Figura 2.15 | Ângulo entre vetores opostos e vetor ortogonal



Fonte: elaborada pelo autor.

Ainda na Figura 2.15, apresentamos um vetor denotado por $u^{\perp}$. Usamos essa notação quando esse vetor faz um ângulo de *90°* com o vetor *u*. Neste caso, dizemos que os vetores são **ortogonais**. Se, além de serem ortogonais, possuírem norma igual a *1*, denominaremos esses vetores de **ortonormais**.

Sejam *x* e *y* vetores não nulos ortogonais, denotamos $x = y^{\perp}$ ou $x \perp y$. Como o ângulo entre os dois vetores é *90°*, temos $\cos(x, y) = 0$, daí:

$$0 = \cos(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}, \text{ ou seja, } x \cdot y = 0.$$

Assim, afirmamos que **dois vetores são ortogonais se o produto escalar entre eles é nulo**.

Nessa definição, o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a todos os outros vetores. Para verificar essa afirmação, considere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então:

$$\mathbf{0} \cdot x = (0, 0, \cdots, 0) \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

logo *0* e *x* são ortogonais.

Exemplificando

Seja $x = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$, queremos encontrar um vetor unitário *y*, tal que $x \perp y$.

Em outras palavras, queremos calcular o vetor *y* que satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 0 \\ \|y\| = 1 \end{cases}.$$

Do produto escalar, temos:

$$(1,-1)\cdot(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0,$$

ou seja,

$$y_1 = y_2 .$$

Da norma do vetor, obtemos:

$\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}} = 1$, ou seja, $\sqrt{y_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{2y_1^{\,2}} = 1 \Rightarrow y_1 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, *y* pode ser o vetor $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou o vetor $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Em muitas aplicações, dado um conjunto de vetores, precisamos encontrar um conjunto de vetores ortonormais, no qual todos os vetores do conjunto original são linearmente dependentes. Uma das formas mais tradicionais de se encontrar esse novo conjunto é por meio do processo de **ortogonalização de Gram-Schmidt**.

Assimile

Sejam $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ vetores linearmente independentes.

O processo de **ortogonalização de Gram-Schmidt** fornece-nos vetores $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(k)}$ ortonormais entre si, tal que:

$$x^{(i)} = \alpha_1^{(i)} u^{(1)} + \alpha_2^{(i)} u^{(2)} + \cdots + \alpha_k^{(i)} u^{(k)},$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, k$.

Apesar de o processo ser chamado de "ortogonalização", o mais apropriado seria chamá-lo "ortonormalização", visto que os vetores resultantes, além de ortogonais, são unitários (normalizados).

Os vetores ortonormais são calculados por:

$$u^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{\left\|x^{(1)}\right\|},$$

$$v^{(2)} = x^{(2)} - \left(x^{(2)} \cdot u^{(1)}\right)u^{(1)}, \; u^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\left\|v^{(2)}\right\|},$$

$$v^{(3)} = x^{(3)} - \left(x^{(3)} \cdot u^{(1)}\right)u^{(1)} - \left(x^{(3)} \cdot u^{(2)}\right)u^{(2)}, \; u^{(3)} = \frac{v^{(3)}}{\left\|v^{(3)}\right\|},$$

$$\vdots$$

$$v^{(k)} = x^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}\left(x^{(k)} \cdot u^{(j)}\right)u^{(j)}, \; u^{(k)} = \frac{v^{(k)}}{\left\|v^{(k)}\right\|}.$$

Exemplificando

Considere os vetores $x^{(1)} = (1,0,1)$, $x^{(2)} = (1,1,0)$, $x^{(3)} = (1,0,0)$. Queremos encontrar vetores $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ ortonormais entre si, tal que

$$x^{(i)} = \alpha_1^{(i)}u^{(1)} + \alpha_2^{(i)}u^{(2)} + \alpha_3^{(i)}u^{(3)},$$

para todo $i = 1,2,3$.

Pelo processo de Gram-Schmidt, obtemos:

$$u^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{\left\|x^{(1)}\right\|} = \frac{(1,0,1)}{\left\|(1,0,1)\right\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Usando $u^{(1)}$, calculamos:

$$v^{(2)} = x^{(2)} - \left(x^{(2)} \cdot u^{(1)}\right)u^{(1)} = (1,1,0) - \left[(1,1,0)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(1,1,0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1,1,0) - \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$v^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \text{ e}$$

$$u^{(2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Por fim, usando $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, temos:

$$v^{(3)} = x^{(3)} - \left(x^{(3)} \cdot u^{(1)}\right)u^{(1)} - \left(x^{(3)} \cdot u^{(2)}\right)u^{(2)}.$$

Veja que:

$$\left(x^{(3)} \cdot u^{(1)}\right)u^{(1)} = \left[(1,0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

e

$$\left(x^{(3)} \cdot u^{(2)}\right)u^{(2)} = \left[(1,0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right).$$

Daí,

$$v^{(3)} = (1,0,0) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

e

$$u^{(3)} = \frac{v^{(3)}}{\left\|v^{(3)}\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\|} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Pesquise mais

Nesta seção, discutimos propriedades importantes de vetores.

Como uma leitura complementar de (in)dependência de vetores, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 267-278 (Disponível na Biblioteca Virtual).

Para aperfeiçoar seus conhecimentos sobre produto escalar e ângulos entre vetores, sugerimos:

PULINO, Petrônio. Produto interno. In: ________. **Álgebra linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 303-310. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 5 dez. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que estamos interessados no projeto de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo. Essa caixa-d'água deve ocupar um terreno quadrado com $100\ m^2$ de área, ou seja, 10 m de lado.

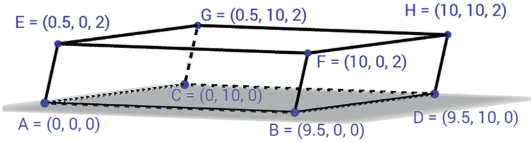
A caixa-d'água deve ter 2 m de altura e a parte superior estará 0,5 m deslocada da parte inferior.

Usando os mesmos argumentos da seção anterior, estabelecemos que os vértices da caixa-d'água serão:

$$A=(0,\ \ 0,\ \ 0),\ B=(9{,}5;\ \ 0;\ \ 0),\ C=(0;\ \ 10;\ \ 0),\ D=(9{,}5;\ \ 10;\ \ 0),$$
$$E=(0{,}5;\ \ 0;\ \ 2),\ F=(10,\ \ 0,\ \ 2),\ G=(0{,}5;\ \ 10;\ \ 2)\ \text{e}$$
$$H=(10,\ \ 10,\ \ 2).$$

Na Figura 2.16, apresentamos uma ilustração de como será a caixa-d'água.

Figura 2.16 | Caixa-d'água ocupando área de $100\ m^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que os pontos *A*, *B*, *E* e *F* formam um paralelogramo. Para calcular seus ângulos internos, usaremos o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$. Primeiramente, temos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = B,$$

pois *A* é a origem. Pelo mesmo argumento,

$$\overrightarrow{AE} = E - A = E.$$

Aplicando o produto escalar, obtemos:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = B \cdot E = (9{,}5; \quad 0; \quad 0) \cdot (0{,}5; \quad 0; \quad 2) = 9{,}5 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 =$$
$$= 4{,}75.$$

Para calcular o ângulo, precisaremos da norma dos vetores:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|(9{,}5; \quad 0; \quad 0)\right\| = \sqrt{9{,}5^2 + 0^2 + 0^2} = 9{,}5$$

$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|(0{,}5; \quad 0; \quad 2)\right\| = \sqrt{0{,}5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4{,}25} \approx 2{,}06.$$

O cosseno do ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$ é dado por

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AE}\right\|} \approx \frac{4{,}75}{9{,}5 \cdot 2{,}06} \approx 0{,}24.$$

Logo, o ângulo entre esses dois vetores será $\arccos(0{,}24) \approx 76{,}11°$.

Para calcular os outros ângulos, podemos usar propriedades geométricas do paralelogramo. Veja que o ângulo entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{BF}$ é igual ao ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$, ou seja, é, aproximadamente, 76,11°.

Já os ângulos entre $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EA}$ e entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BF}$ serão iguais entre si, e seus valores, iguais ao complementar do ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$, ou seja, valem, aproximadamente, $180° - 76{,}11° = 103{,}89°$.

Resta-nos calcular o ângulo entre as vigas de sustentação e o solo. Seja a viga definida pelo vetor $\overrightarrow{AH} = (10 \quad 10 \quad 2)$, note que sua projeção sobre o plano definido pelo solo é o vetor $x = (10 \quad 10 \quad 0)$.

Assim, o ângulo entre o solo e a viga será dado por:

$$\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AH}\cdot x}{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\left\|x\right\|}\right)=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}10 & 10 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10 & 10 & 0\end{pmatrix}}{\sqrt{10^2+10^2+2^2}\sqrt{10^2+10^2+0^2}}\right)$$

$$\arccos\left(\frac{10\cdot 10+10\cdot 10+2\cdot 0}{2\sqrt{51}\cdot 10\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{200}{20\sqrt{102}}\right)=$$

$$=\arccos\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)\approx \arccos(0{,}99).$$

.

Portanto, o ângulo entre a viga e o solo será de, aproximadamente, 8,11.

Agora, elabore uma apresentação explicando o projeto. Aproveite para adicionar algumas ilustrações, indicando os comprimentos e os ângulos das arestas externas da caixa-d'água e das vigas de sustentação.

Avançando na prática

Movimento de um robô

Descrição da situação-problema

Um robô foi projetado de modo a se movimentar apenas em direções perpendiculares umas às outras. Assim, dada uma posição relativa à localização atual do robô e a direção em que este está no instante atual, deve calcular internamente como atingir a posição-alvo.

Como deve ser feito esse cálculo? Como podemos decompor o movimento do robô?

Tome, por exemplo, um robô apontando na direção $(1{,}1)$, que deve mover-se até a posição $(4{,}6)$.

Resolução da situação-problema

Como o robô pode mover-se apenas em direções ortogonais, devemos encontrar um conjunto destas. Para medir o quanto o robô deve mover-se em cada uma das direções, o ideal é representá-las como vetores unitários.

Como o robô está apontando para a direção $x^{(1)} = (1,1)$, tomaremos a primeira direção paralela a esta, porém com norma igual a *1*. Dessa maneira,

$$u^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{\left\| x^{(1)} \right\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Como a posição final deve ser $x^{(2)} = (4,6)$, devemos aplicar o processo de Gram-Schmidt usando $x^{(2)}$.

Veja que:

$$\left(x^{(2)} \cdot u^{(1)} \right) u^{(1)} = \left[(4,6) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \right] \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (5,5)$$

Assim,

$$v^{(2)} = x^{(2)} - \left(x^{(2)} \cdot u^{(1)} \right) u^{(1)} = (4,6) - (5,5) = (-1,1).$$

Logo, a direção unitária será:

$$u^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\left\| v^{(2)} \right\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Para calcular o quanto deve ser andado em cada direção, basta resolver o sistema linear:

$$d_1 u^{(1)} + d_2 u^{(2)} = (4,6),$$

com d_1 e $d_2 \in \mathbb{R}$ indicando o quanto deve ser movimentado em cada uma das direções.

O resultado desse sistema é $d_1 = 5\sqrt{2}$, que indica o quanto o robô deve andar na direção $u^{(1)}$, e $d_2 = \sqrt{2}$, que determina o quanto o robô deve andar na direção $u^{(2)}$.

Faça valer a pena

1. Sejam $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ e $a^{(4)} \in \mathbb{R}^4$ vetores linearmente independentes. Defina a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} & a^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Analise as seguintes afirmações e sua relação:

I. O sistema linear $Ax = a^{(1)}$ é indeterminado

PORQUE

II. $a^{(1)}$ não pode ser escrito como combinação linear de $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$.

Sobre as afirmações anteriores e sua relação, é correto afirmar que:

a) I e II são verdadeiras e II justifica I.

b) I e II são verdadeiras, mas II não justifica I.

c) I é verdadeira e II é falsa.

d) I é falsa e II é verdadeira.

e) I e II são falsas.

2. Dois corredores saem da origem de um sistema de coordenadas ao mesmo tempo. Ambos se movem apenas em linhas retas. Após uma hora de corrida, o corredor *1* está na posição $(10,5)$ e o corredor 2, na posição $(9,-6)$ (sistema de coordenadas dado em quilômetros).

Analise as seguintes afirmações:

I. O corredor *1* percorreu uma distância maior do que o corredor *2*.

II. O trajeto percorrido pelos dois corredores faz um ângulo de, aproximadamente, 60°.

III. É impossível saber a velocidade média de cada um dos corredores apenas com as informações fornecidas.

Sobre essas afirmativas, é correto afirmar que:

a) Apenas I e II estão corretas.

b) Apenas II está correta.

c) Apenas III está correta.

d) Apenas II e III estão corretas.

e) Apenas I está correta.

3. Considere os dois conjuntos de vetores a seguir:

$$W = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \text{ e } U = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),(1,0,0)\right\}.$$

Assinale V para verdadeiro e F para falso nas seguintes afirmativas:

(   ) Os vetores do conjunto *W* são linearmente independentes.

(   ) Os vetores do conjunto U são unitários.

(   ) Os vetores do conjunto *U* podem ser obtidos por meio da aplicação do processo de Gram-Schmidt nos vetores do conjunto *W*.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmativas:

a) V – V – V.

b) V – V – F.

c) F – F – F.

d) V – V – V.

e) F – V – V.

Seção 2.3

Produto vetorial e produto misto

Diálogo aberto

Nesta seção, focaremos vetores tridimensionais. Esse enfoque é importante visto sua relevância em aplicações – principalmente geométricas. Estudaremos o produto vetorial e o produto misto entre vetores. O produto vetorial, como o próprio nome indica, resulta em um vetor; o produto misto é uma combinação do produto escalar e do produto vetorial.

Em nossa situação-problema, lembre-se de que estamos interessados no projeto de uma caixa-d'água em forma de poliedro.

Nas seções anteriores, vimos como a projetar, encontrando as coordenadas de seus vértices, os ângulos internos de suas faces em forma de paralelogramo, além do comprimento e do ângulo em relação ao solo de suas vigas de sustentação.

A caixa-d'água será construída utilizando placas de concreto; essas placas são compradas prontas e seu valor é dado por metro quadrado. Qual é a área de cada uma das faces da caixa projetada na seção anterior?

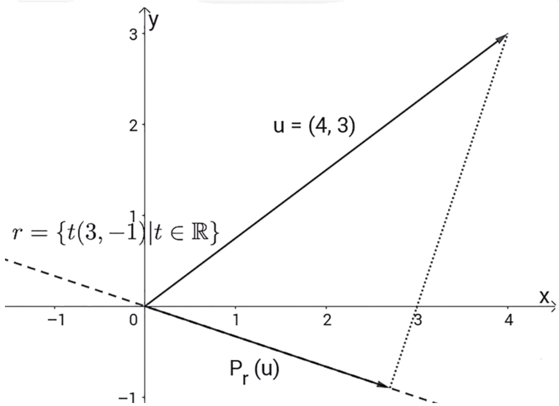
Qual será o volume total da caixa-d'água (desprezando o volume ocupado pelas vigas de sustentação)?

Nesta seção, estudaremos algumas outras operações entre vetores que nos fornecerão ferramentas para o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas.

Não pode faltar

Considere um vetor qualquer. Podemos projetá-lo ortogonalmente sobre uma reta, isto é, podemos encontrar qual parte de um vetor está sobre uma reta. Na Figura 2.17, apresentamos um exemplo de projeção.

Figura 2.17 | Projeção do vetor *u* sobre a reta *r*



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa operação é chamada **projeção ortogonal** e pode ser interpretada como a "sombra" do vetor sobre a reta.

Assimile

Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores quaisquer, com v não nulo, defina a reta que passa pela origem $r = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

A **projeção ortogonal** (ou, simplesmente, projeção) de *u* sobre *r* é dada por

$$P_r(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v.$$

No exemplo da Figura 2.17, temos $u = (4,3)$ e o vetor *v* que define *r* dado por $v = (3,-1)$. Daí a projeção de *u* sobre *r* será calculada por:

$$P_r(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{(4,3)\cdot(3,-1)}{\|(3,-1)\|^2}(3,-1) = \frac{4\cdot 3 + 3\cdot(-1)}{3^2 + (-1)^2}(3,-1) =$$

$$= \frac{9}{10}(3,-1) = \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10}\right).$$

Defina $w = P_r(u)$. Veja que *w* é **paralelo** a *v*, isto é, $\cos(v,w) = \pm 1$ (verifique!).

Defina $z = u - w$, então $z \perp r$. Para verificar esse fato, calcularemos o produto escalar entre z e v. Se z for ortogonal a v, também será a r.

$$z \cdot v = (u - w) \cdot v = u \cdot v - w \cdot v = u \cdot v - \left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \right) \cdot v,$$

como $\dfrac{u \cdot v}{\|v\|^2}$ é escalar, então:

$$z \cdot v = u \cdot v - \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v} v \right) \cdot v = u \cdot v - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v \cdot v = u \cdot v - u \cdot v = 0.$$

Portanto, z é ortogonal a r. Podemos mostrar ainda que essa decomposição é única.

Concluímos que, dado um vetor u e uma reta, **existe um único vetor *w* paralelo à reta e um único vetor *z* ortogonal à reta, tal que:**

$$u = w + z.$$

Exemplificando

Decomponha o vetor u, apresentado na Figura 2.17, na soma de um vetor paralelo a r e um ortogonal.

Note que o vetor paralelo w já foi encontrado:

$$w = P_r(u) = \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10} \right).$$

Resta-nos calcular o vetor ortogonal z:

$$z = u - w = (4,3) - \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10} \right) = \left(\frac{13}{10}, \frac{39}{10} \right).$$

Para confirmar o que a teoria nos diz, calcularemos o produto escalar entre v e z:

$$v \cdot z = (3,-1) \cdot \left(\frac{13}{10}, \frac{39}{10} \right) = 3 \cdot \frac{13}{10} + (-1) \cdot \frac{39}{10} = \frac{39}{10} - \frac{39}{10} = 0.$$

Tal resultado confirma o que a teoria nos garantiu.

Reflita

Como podemos relacionar a decomposição de um vetor em vetores ortogonais com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt?

Considere dois vetores no espaço tridimensional. Introduziremos um novo produto entre esses vetores chamado **produto vetorial**, pois como resultado é obtido um vetor.

Assimile

Sejam $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$, definimos seu **produto vetorial** como:

$$u\times v=(u_2v_3-u_2v_3,u_3v_1-u_3v_1,u_1v_2-u_1v_2).$$

Note que

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\mathbf{i}u_2v_3+\mathbf{j}u_3v_1+\mathbf{k}u_1v_2-\mathbf{k}u_2v_1-\mathbf{i}u_3v_2-\mathbf{j}u_1v_3.$$

Lembrando que $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$ e $\mathbf{k}=(0,0,1)$, temos:

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=(u_2v_3-u_2v_3,u_3v_1-u_3v_1,u_1v_2-u_1v_2).$$

Logo, podemos escrever o produto vetorial dos vetores *x* por *y* como:

$$u\times v=\det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}.$$

Dados $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, as seguintes propriedades do produto vetorial são válidas:

1. $u\times v=-u\times v$.
2. $u\times v$ é ortogonal a *u* e a *v*.
3. $u\times(v+w)=u\times v+u\times w$.

4. $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen(\theta_{u,v})$, em que $\theta_{u,v}$ é o ângulo formado entre os vetores *x* e *y*.

5. Se *u* é paralelo a *v*, então $u \times v = (0,0,0)$.

A segunda propriedade apresentada afirma que o vetor obtido pelo produto vetorial será ortogonal aos dois vetores originais. Para verificar essa propriedade, considere os vetores tridimensionais $u = (1,0,0)$ e $v = (1,1,0)$, em que cada uma das coordenadas está representada em metros. O vetor *w* obtido pelo produto vetorial entre *u* e *v* será:

$$w = u \times v = (1,0,0) \times (1,1,0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k} - 0\mathbf{k} - 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.$$

Ao converter para a notação com parênteses, obtemos:

$$w = u \times v = (0,0,1).$$

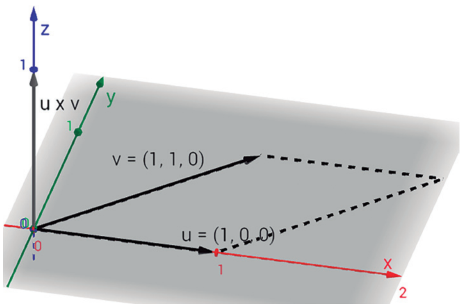
Para verificar que *w* é ortogonal a *u* e a *v*, faremos seus produtos escalares:

$$u \cdot w = (1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$v \cdot w = (1,1,0) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Logo, *w* é ortogonal a *u* e a *v*. Na Figura 2.18, há uma representação gráfica desses três vetores.

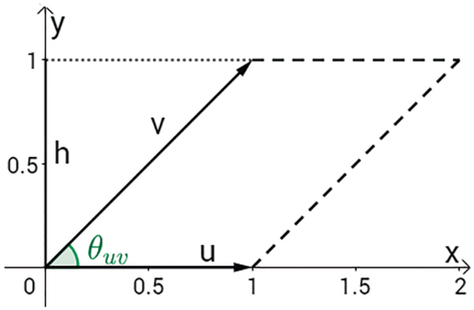
Figura 2.18 | Representação geométrica do produto vetorial



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja que os vetores u e v formam um paralelogramo. Já na Figura 2.19, observamos uma representação bidimensional desse paralelogramo.

Figura 2.19 | Paralelogramo gerado pelos vetores *u* e *v*



Fonte: elaborada pelo autor.

A área do paralelogramo pode ser determinada multiplicando o comprimento da base pela altura do paralelogramo. Na Figura 2.19, θ_{uv} representa o ângulo entre os vetores u e v, e h é a altura do paralelogramo.

Veja que a altura pode ser calculada por:

$$h = \|v\| sen(\theta_{uv}),$$

ou, usando a função seno entre dois vetores:

$$h = \|v\| sen(\theta_{u,v}).$$

Assim, a área de um paralelogramo definido por dois vetores pode ser determinada por:

$$A = \|u\| h = \|u\|\|v\| sen(\theta_{u,v}).$$

Usando a propriedade 4 de produto vetorial, concluímos que a **área do paralelogramo pode ser determinada por:**

$$A = \|u \times v\|.$$

No caso particular do paralelogramo da Figura 2.3, a área será:

$$A = \|u \times v\| = \|(0,0,1)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1\ \text{m}^2.$$

Note que a unidade de área está em metros quadrados, porque cada uma das coordenadas dos vetores está representada em metros.

Podemos combinar o produto vetorial e o produto escalar, gerando um produto entre três vetores, o **produto misto**.

Assimile

Sejam $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3), z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$, definimos o **produto misto** entre os três vetores como

$$x\cdot(y\times z)=x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2).$$

O produto misto é calculado como um produto vetorial entre dois vetores e um produto escalar entre o resultado do primeiro produto com o outro vetor envolvido na operação.

Note que

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}=$$

$$=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3.$$

Colocando os termos de x em evidência, temos:

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}=$$

$$=x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2).$$

Portanto, podemos representar o produto misto de uma forma simplificada por meio da forma matricial:

$$x\cdot(y\times z)=\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Sejam $x,y,z\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, as seguintes propriedades saem diretamente da representação do produto misto como um determinante:

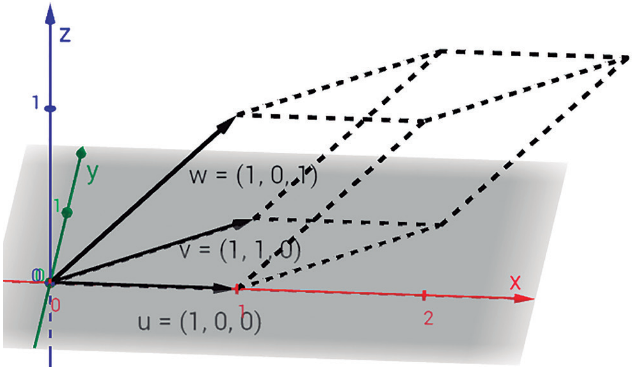
1. $x\cdot(y\times z)=z\cdot(x\times y)=y\cdot(z\times x)=$
$=-y\cdot(x\times z)=-z\cdot(y\times x)=-x\cdot(z\times y)$;

2. $(\alpha x)\cdot(y\times z)=x\cdot(\alpha y\times z)=x\cdot(y\times\alpha z)=\alpha\big(x\cdot(y\times z)\big)$;

3. Se x, y e z são linearmente dependentes, então $x\cdot(y\times z)=0$.

Considere os vetores $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ e $w = (1,0,1)$, em que cada uma das coordenadas está representada em metros. Com eles, podemos representar um sólido no espaço tridimensional. Na Figura 2.20, apresentamos a figura definida por esses vetores.

Figura 2.20 | Sólido gerado pelos vetores *u*, *v* e *w*



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que a área do paralelogramo gerado pelos vetores *u* e *v* será $A = \|u \times v\|$. Veja que o volume do sólido pode ser calculado por $V = Ah$, em que *h* é a altura do paralelogramo.

Como os vetores *u* e v estão no plano *xy*, logo o vetor $u \times v$ será paralelo ao eixo *z*. Geometricamente, vemos que a altura pode ser calculada por $h = \left|\|w\|\cos(\theta_{w,u\times v})\right|$, em que $\theta_{w,u\times v}$ é o ângulo formado entre os vetores *w* e $u \times v$ (ou o ângulo formado entre o vetor *w* e o eixo *z*). Assim, concluímos que o **volume do sólido** definido pelos vetores *u*, *v* e *w* é dado por:

$$V = Ah = \left|\|u \times v\|\|w\|\cos(\theta_{w,u\times v})\right| = \left|(u \times v)\cdot w\right| = \left|u \cdot (v \times w)\right|.$$

Assim, o volume do sólido apresentado na Figura 2.20 será:

$$V = \left|u \cdot (v \times w)\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = |1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0| = 1 \text{ m}^3.$$

Note que a unidade do volume está em metros cúbicos, pois cada uma das coordenadas está em metros.

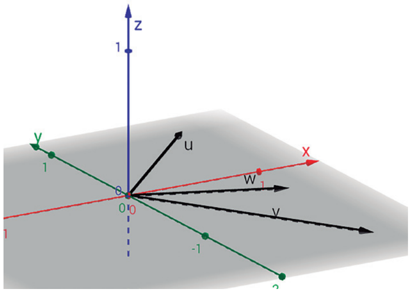
Exemplificando

Considere $u, v \in \mathbb{R}^3$ linearmente independentes e $w \in \mathbb{R}^3$ no plano formado por *u* e *v*, ou seja, linearmente dependente de *u* e *v*.

Usaremos o volume do sólido gerado pelos vetores *u*, *v* e *z* para justificar a propriedade 3 de produto misto.

Na Figura 2.21, temos um exemplo de vetores em que *u* e *v* são linearmente independentes, e *w* está no plano definido por *u* e *v*.

Figura 2.21 | Dois vetores linearmente independentes e um linearmente dependente



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere o sólido definido por esses três vetores. Se a base for o paralelogramo formado pelos vetores *u* e *v*, a altura será dada pelo vetor *w*, porém este está no plano gerado por *u* e *v*, logo a altura é *0*. Como o volume do sólido é dado pela área do paralelogramo formado pelos vetores *u* e *v* multiplicada pela altura, concluímos que seu volume é *0*.

Por outro lado, temos:

$$V = u \cdot (v \times w).$$

Concluímos que se **os vetores u, v, w são linearmente dependentes, então o produto misto é nulo.**

Pesquise mais

Nesta seção, discutimos o conceito de projeção ortogonal. Como material complementar deste tema, sugerimos:

O ESTUDANTE. Projeção ortogonal de vetores – Álgebra linear/ geometria analítica (aula 27). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=E2ULYsABr2Q>. Acesso em: 11 dez. 2017 **(vídeo do YouTube)**.

Analisamos, também, as definições dos produtos vetoriais e mistos, além de algumas aplicações. Como leitura complementar, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 238-243 (disponível na Biblioteca Virtual).

Sem medo de errar

Lembre-se de que estamos interessados no projeto de uma caixa-d'água em forma de romboedro. Agora que já está projetada, queremos saber qual será o custo associado à quantidade de material utilizado na construção.

Para isso, precisamos saber a área de cada uma das faces da caixa-d'água. Na seção anterior, projetamos a caixa-d'água com os seguintes vértices:

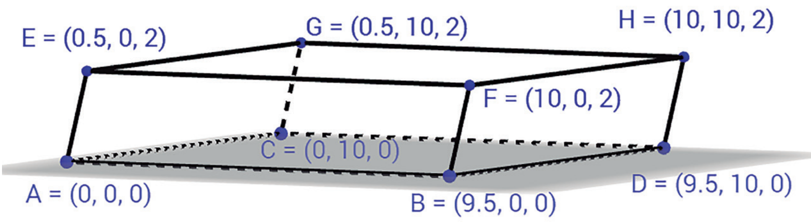
$$A=(0,\ \ 0,\ \ 0),\ B=(9{,}5;\ \ 0;\ \ 0),\ C=(0;\ \ 10;\ \ 0),\ D=(9{,}5;\ \ 10;\ \ 0),$$

$$E=(0{,}5;\ \ 0;\ \ 2),\ F=(10,\ \ 0,\ \ 2),\ G=(0{,}5;\ \ 10;\ \ 2)\text{ e}$$

$$H=(10,\ \ 10,\ \ 2).$$

Na Figura 2.22, reapresentamos o projeto dela.

Figura 2.22 | Representação tridimensional da caixa-d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que as faces *ABCD* e *EFGH* possuem a mesma área e, ainda, que a face *ABCD* é um retângulo com lados de tamanho $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ e $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$. Daí sua área é:

$$A_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=9{,}5\cdot 10=95\ \text{m}^2.$$

Perceba, também, que as faces *ABEF* e *CDGH* possuem a mesma área e que a face *ABEF* é o paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$. Logo, sua área é:

$$A_{ABEF} = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} \right\|.$$

O produto vetorial pode ser calculado como:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} - 0\mathbf{k} - 0\mathbf{i} - 19\mathbf{j} = (0,-19,0).$$

Assim,

$$A_{ABEF} = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} \right\| = \left\| (0,-19,0) \right\| = 19 \text{ m}^2.$$

Resta-nos calcular a área das faces *A, C, E, G* e *B, D, F, H*. Note que ambas as faces possuem a mesma área e que a face *A, C, E, G* é o paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$. Daí sua área é $A_{ACEG} = \left\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AE} \right\|$.

Como

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AE} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 20\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} - 5\mathbf{k} - 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} = (20,0,-5),$$

concluímos que:

$$A_{ACEG} = \left\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AE} \right\| = \left\| (20,0,-5) \right\| = 5\sqrt{17} \approx 20{,}61 \text{ m}^2.$$

Assim, vemos que a quantidade de material necessária para construir a caixa-d'água será:

$$A = 2A_{ABCD} + 2A_{ABEF} + 2A_{ACEG} \approx 2 \cdot 95 + 2 \cdot 19 + 2 \cdot 20{,}61 = 269{,}22 \text{ m}^2.$$

Para calcularmos o volume que pode ser armazenado na caixa--d'água, basta percebermos que o romboedro em questão é gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$ e seu volume será dado por:

$$V = \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AE} \right) \right| = \left| (9{,}5, \quad 0, \quad 0) \cdot (20,0,-5) \right| = \left| 190 + 0 + 0 \right| =$$

$$190 \text{ m}^3.$$

Assim, conseguimos projetar a caixa-d'água utilizando a representação vetorial (usualmente utilizada por softwares computacionais de modelagem tridimensional), além de calcular a quantidade de material necessário para sua construção e o volume total que esta armazena.

Agora, elabore um relatório detalhado, justificando cada uma das decisões tomadas. Justifique os cálculos feitos para não haver dúvida em relação às dimensões da caixa-d'água.

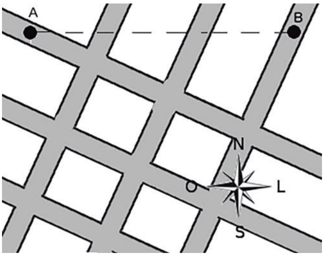
Avançando na prática

Caminho de um carro

Descrição da situação-problema

Um passageiro no ponto *A* toma um táxi e pretende ir ao ponto *B* a 5 km a leste de sua posição atual. As ruas da cidade não permitem que esse trajeto seja feito em linha reta. Na Figura 2.23, apresentamos um esquema de como são essas ruas.

Figura 2.23 | Esquema de ruas da cidade



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo o ponto *A* a origem do sistema de coordenadas, considere que a rua onde o passageiro se encontra é uma reta que pode ser descrita pela equação $x = -2y$ e que as outras ruas são paralelas ou perpendiculares a essa. Sabendo que o custo por quilômetro rodado do táxi é de R$ 5,13, como podemos calcular o preço total da corrida?

(Consideraremos que todas as rotas são permitidas.)

Resolução da situação-problema

Utilizamos um sistema de coordenadas em que a primeira coordenada indica o deslocamento no eixo leste-oeste (medido em quilômetros), em relação ao ponto *A*. Valores positivos mostram o movimento a leste e valores negativos, a oeste. A segunda coordenada do sistema indica o deslocamento norte-sul, em que norte é mostrado por valores positivos e sul, por valores negativos.

Assim, o passageiro sai do ponto $A=(0,0)$ e pretende chegar ao ponto $B=(5,0)$.

A reta definida pela rua em que o carro se encontra pode ser descrita como:

$$\{x=-2y \mid y\in\mathbb{R}\}=\{(-2y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}=\{t(-2,1)\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

Para obter o quanto devemos nos movimentar sobre essa rua, calculamos a projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ sobre a reta:

$$d_1=P\left(\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot(-2,1)}{\|(-2,1)\|^2}(-2,1)=\frac{(5,0)\cdot(-2,1)}{(-2)^2+1^2}(-2,1)=$$
$$=\frac{-10}{5}(-2,1)=(4,-2).$$

Ao chegar a esse ponto, o táxi deverá mover-se ortogonalmente para atingir o ponto *B*. Assim, deve mover-se na direção:

$$d_2=\overrightarrow{AB}-P\left(\overrightarrow{AB}\right)=(5,0)-(4,-2)=(1,2).$$

Daí, ao final da viagem, o carro terá percorrido a distância:

$$\|d_1\|+\|d_2\|=\|(4,-2)\|+\|(1,2)\|=\sqrt{4^2+(-2)^2}+\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{20}+\sqrt{5}=$$
$$=3\sqrt{5}\approx 6{,}71\text{ m}.$$

Logo, multiplicando pelo preço por quilômetro rodado, o valor pago na viagem será de, aproximadamente, R$ 34,42.

Faça valer a pena

1. Considere os vetores $x=(1,2,3,4)$ e $y=(3,0,-4,0)$.

Em relação a eles, são feitas as seguintes afirmações:

I. $x\perp y$.

II. $P_{r_y}(x)=\left(-\frac{27}{5},0,\frac{36}{5},0\right)$, em que r_y é a reta gerada pelo vetor *y*.

III. $P_{r_x}(y)=\left(-\frac{3}{10},-\frac{3}{5},-\frac{9}{10},-\frac{6}{5}\right)$.

Analisando essas afirmações, é correto afirmar que:

a) Apenas I é verdadeira.

b) Apenas II é verdadeira.

c) Apenas III é verdadeira.

d) Apenas I e II são verdadeiras.

e) Apenas II e III são verdadeiras.

2. Forças são entidades físicas representadas por vetores, indicando uma relação entre a massa e a aceleração de um corpo.

Se temos um fio retilíneo de comprimento L com uma corrente elétrica $\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}^3$ (vetor corrente elétrica indica a direção em que os elétrons se movem e sua norma nos dá a intensidade da corrente elétrica) sob um campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^3$, a força magnética que atua sobre o fio será:

$$F = Li \times B.$$

Analise as seguintes afirmações e sua relação:

I. Mantendo constantes o comprimento do fio e os módulos dos vetores i e B, a intensidade da força magnética será máxima quando i for ortogonal a B.

PORQUE

II. A força magnética é ortogonal à corrente elétrica.

Após analisar as duas afirmações e sua relação, é correto afirmar que:

a) I e II são verdadeiras e II justifica I.

b) I e II são verdadeiras, mas II não justifica I.

c) I é verdadeira e II é falsa.

d) I é falsa e II é verdadeira.

e) I e II são falsas.

3. Sendo três vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ não nulos ortogonais entre si, defina $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$.

Considere as seguintes afirmações, usando V para classificar como verdadeira e F para falsa:

( ) Se x, y e z forem vetores ortonormais entre si, então $\boldsymbol{z} = \pm \boldsymbol{u}$.

( ) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = 0$.

( ) $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}\| = 0$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações anteriores:

a) V – V – V.

b) V – V – F.

c) V – F – F.

d) F – F – F.

e) V – F – V.

Referências

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

Espaços vetoriais

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores, estudamos alguns conceitos básicos de matrizes e de vetores. Nesta unidade, começamos com a pergunta: existe alguma semelhança entre conjuntos de matrizes e conjunto de vetores? Claramente, a resposta é afirmativa, visto que vetores podem ser representados como matrizes com apenas uma coluna. Contudo, essa não é a única semelhança. Veremos com detalhes essas semelhanças, analisando quais outros conjuntos são semelhantes a esses. Dado que um conjunto tem comportamento semelhante ao de vetores, analisaremos quantas componentes devem possuir tais vetores. Estudaremos, ainda, diferentes formas de representação de vetores, além de como passar de uma representação para outra.

Para ilustrar a aplicabilidade dos conceitos estudados nesta unidade, suponha que você tenha sido contratado para desenvolver um *game* em um sistema de realidade virtual.

Nesse game, um usuário utilizará óculos. O movimento de sua cabeça deve ser equivalente ao da câmera dentro do jogo. Como representar a posição de cada objeto em relação ao jogador? E, ainda, como o movimento da cabeça do jogador modifica essa representação?

Além disso, o movimento de vários objetos será implementado usando polinômios, por exemplo, a trajetória de um lançamento oblíquo pode ser descrita por um polinômio de grau 2 (representado por uma parábola). Como representar os polinômios eficientemente? Quais ferramentas podemos aplicar na manipulação de polinômios?

Essas questões direcionarão a implementação das ferramentas utilizadas no *game*. A cada seção, você deve sintetizar as ideias acerca de cada uma delas para discuti-las nas reuniões com a equipe que você está liderando.

Ao final desta unidade, você compreenderá conceitos mais abstratos sobre vetores e suas diferentes formas de representação. Também será capaz de identificar quais conjuntos se comportam como conjuntos de vetores, ou seja, formam espaços vetoriais. Saberá ainda aplicar suas propriedades na resolução de problemas práticos e como representar os vetores de diferentes formas (bases).

Seção 3.1

Espaços vetoriais

Diálogo aberto

Nesta seção, vamos discutir o conceito de espaços vetoriais, além de caracterizar alguns objetos matemáticos já estudados como vetores.

Lembre-se de que você foi contratado para a implementação de um *game* em realidade virtual. Você é responsável pela descrição computacional dos polinômios que representarão os movimentos de objetos. Tome, por exemplo, o lançamento oblíquo de um objeto. Segundo a cinemática, área da Física que descreve o movimento de corpos sem considerar as massas ou forças envolvidas, seu movimento será caracterizado por um polinômio de grau dois.

Alguns movimentos mais complexos envolvem adição de polinômios e multiplicação por escalares.

O jogador arremessa uma pedra com trajetória descrita por:

$$z(t) = -t^2 + 2t \text{ e } x = y = 0,$$

em que x e y representam as coordenadas horizontais, z, a coordenada vertical e t, o tempo. As coordenadas espaciais estão em metros, enquanto a temporal está em segundos.

Como você pode representar o polinômio que descreve a coordenada z da pedra eficientemente? Em outras palavras, como representar esse polinômio na forma de vetor?

Devido a uma mudança na posição do jogador, as coordenadas desse polinômio devem ser multiplicadas por 2. Qual é o polinômio obtido após essa multiplicação?

Com os tópicos abordados nesta seção, você será capaz de responder a esta e outras questões.

Não pode faltar

Nesta seção, analisaremos alguns conjuntos cujos elementos têm comportamento semelhante ao de vetores e veremos algumas formas de caracterizar essa semelhança.

Considere, por exemplo, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais com grau menor que ou igual a *2*, isto é,

$$P_2 = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, dado $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2$, os elementos a_j são chamados de **coeficientes do polinômio** e o maior índice para o qual a_j é não nulo é denominado **grau do polinômio**. No caso de P_2, o grau é, no máximo, *2*.

Veja dois polinômios: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$. Definimos a sua adição como:

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2,$$

isto é, a adição de polinômios resulta no polinômio com coeficientes dados pela soma dos coeficientes dos polinômios originais.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a multiplicação de α por *p* como:

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 \in P_2,$$

em particular, definimos $-p = (-1)p$. Note que a multiplicação de escalar por polinômio pode ser interpretada como a multiplicação do escalar pelos coeficientes do polinômio.

Definimos ainda a subtração de *p* e *q* como:

$$(p-q)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 \in P_2,$$

isto é, o polinômio resultante da subtração é aquele cujos coeficientes são resultado da subtração dos coeficientes dos polinômios originais.

Note que se representarmos os polinômios por meio de vetores cujas coordenadas são os coeficientes dos polinômios, a soma dos vetores será o vetor com as coordenadas dadas pelos coeficientes da adição dos polinômios; o produto de um escalar por vetor será o vetor com as coordenadas dadas pelos coeficientes do polinômio resultante do produto escalar polinômio; e a subtração dos vetores será o vetor cujas coordenadas são os coeficientes da subtração dos polinômios.

Isto ocorre porque o espaço dos polinômios com coeficientes reais de grau menor que ou igual a *2*, munido das operações de adição e de multiplicação por escalar, definidas anteriormente, forma um **espaço vetorial**.

Antes de apresentarmos a definição formal de espaço vetorial, precisamos entender o conceito de **corpo**.

Assimile

Seja *K* um conjunto não vazio. Considere as operações $+: K \times K \to K$, chamada adição, e $\cdot: K \times K \to K$, chamada multiplicação. Dizemos que $(K,+,\cdot)$ possui estrutura de **corpo** se, e somente se, dados $a,b,c \in K$, as seguintes propriedades forem válidas:

1. (Associatividade) $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b \cdot c)$.

2. (Comutatividade) $a+b = b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

3. (Identidade aditiva) Existe $0_K \in K$, tal que $a + 0_k = a$, para todo $a \in K$.

4. (Identidade multiplicativa) Existe $1_K \in K$, tal que $a \cdot 1_k = a$, para todo $a \in K$.

5. (Inversa aditiva). Para cada $a \in K$, existe $-a \in K$, tal que $a + (-a) = 0_K$.

6. (Inversa multiplicativa) Para cada $a \in K$, $a \neq 0_K$, existe $a^{-1} \in K$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1_K$.

7. (Distributiva) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Note que o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), munido da soma e do produto usuais, satisfaz as *7* condições necessárias para a classificação de uma estrutura como corpo.

Reflita

Considere o conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, em que i é a unidade imaginária, isto é, $i = \sqrt{-1}$.

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ números complexos, definimos sua adição como:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e sua multiplicação como:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

A estrutura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo?

Agora, podemos definir a estrutura de espaço vetorial.

Assimile

Seja V um conjunto não vazio e K um corpo. Defina a operação $+ : V \times V \to V$, chamada adição, tal que, dados $u, v, w \in V$, as seguintes propriedades sejam válidas:

1. (Associatividade) $(u + v) + w = u + (v + w)$.

2. (Comutatividade) $u + v = v + u$.

3. (Elemento nulo) Existe $0_V \in V$, tal que $v + 0_V = v$, para todo $v \in V$.

4. (Elemento oposto) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$, tal que $v + u = 0_V$.

Defina também a operação $\cdot : K \times V \to V$, chamada multiplicação por escalar, tal que, dados $\alpha, \beta \in K$ e $v, u \in V$, as seguintes propriedades sejam válidas:

5. (Associatividade) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$.

6. (Elemento neutro) Existe $1_V \in K$, tal que $1_V \cdot v = v$, para todo $v \in V$.

7. (Distributiva) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

8. (Distributiva) $\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$.

Nessas condições, a estrutura $(V, +, \cdot)$ é chamada **espaço vetorial** no corpo K.

Algumas vezes, quando não há dúvidas quanto às operações adição e multiplicação, em vez de afirmarmos que $(V,+,\cdot)$ forma um espaço vetorial, cometeremos um pequeno abuso de notação ao afirmar que *V* é um espaço vetorial.

Um elemento do espaço vetorial é um elemento do conjunto *V*, sendo chamado de **vetor**.

Essa denominação é devida ao fato de que o conjunto dos vetores *n* dimensionais, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual, forma um espaço vetorial no corpo dos reais (verifique!).

Exemplificando

Anteriormente, afirmamos que o conjunto dos polinômios de grau menor que ou igual a dois, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual (apresentadas no início desta seção), forma um espaço vetorial no corpo do conjunto dos reais. Dessa maneira, as oito condições necessárias de espaço vetorial estão satisfeitas. Neste exemplo, demonstraremos essas condições.

Dados: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2$,

$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$, $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in P_2$.

1. Veja que:

$$\left(p(x)+q(x)\right)+r(x)=$$
$$=\left((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2\right)+c_0+c_1x+c_2x^2,$$

ou seja,

$$\left(p(x)+q(x)\right)+r(x)=$$
$$=\left((a_0+b_0)+c_0\right)+\left((a_1+b_1)+c_1\right)x+\left((a_2+b_2)+c_2\right)x^2,$$

ou ainda,

$$\left(p(x)+q(x)\right)+r(x)=$$
$$=\left(a_0+(b_0+c_0)\right)+\left(a_1+(b_1+c_1)\right)x+\left(a_2+(b_2+c_2)\right)x^2.$$

Logo:

$$\left(p(x)+q(x)\right)+r(x)=$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\left((b_0+c_0)+(b_1+c_1)x+(b_2+c_2)x^2\right),$$

portanto:

$$\left(p(x)+q(x)\right)+r(x)=p(x)+\left(q(x)+r(x)\right).$$

Assim, verificamos que a adição de polinômios de grau menor que ou igual a dois é associativa.

2. Agora, note que:

$$p(x)+q(x)=\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_2+b_2\right)x^2.$$

Usando a comutatividade da adição de números reais, temos:

$$p(x)+q(x)=\left(b_0+a_0\right)+\left(b_1+a_1\right)x+\left(b_2+a_2\right)x^2=q(x)+p(x),$$

portanto a adição de polinômios com grau menor que ou igual a 2 é comutativa.

3. O polinômio $p_0(x)\equiv 0$ possui grau *0* (menor que ou igual a *2*) e ainda:

$$p_0(x)+p(x)=0+p(x)=p(x),$$

logo, p_0 é o elemento nulo.

4. Defina o elemento $-p(x)=-a_0+\left(-a_1\right)x+\left(-a_2\right)x^2\in P_2$. Assim:

$$p(x)+\left(-p(x)\right)=\left(a_0+(-a_0)\right)+\left(a_1+(-a_1)\right)x+\left(a_2+(-a_2)\right)x^2,$$

ou seja,

$$p(x)+\left(-p(x)\right)\equiv 0.$$

Logo, mostramos a existência de elemento oposto.

5. Em relação à multiplicação por escalar, veja que:

$$\alpha\left(\beta p(x)\right)=\alpha\left(\beta a_0+\beta a_1x+\beta a_2x^2\right)=\left(\alpha\beta a_0+\alpha\beta a_1x+\alpha\beta a_2x^2\right),$$

ou seja,

$$\alpha\left(\beta p(x)\right)=\alpha\beta\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\left(\alpha\beta\right)p(x).$$

Logo, a associatividade multiplicativa é válida.

6. Agora, veja que:

$$1\cdot p(x)=1\cdot a_0+1\cdot a_1x+1\cdot a_2x^2=a_0+a_1x+a_2x^2=p(x),$$

então *1* é o elemento neutro da multiplicação.

7. Note que:

$$(\alpha+\beta)p(x)=(\alpha+\beta)a_0+(\alpha+\beta)a_1x+(\alpha+\beta)a_2x^2=$$

$$\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\beta a_0+\beta a_1x+\beta a_2x^2=\alpha p(x)+\beta p(x).$$

Logo, a primeira propriedade distributiva é válida.

8. Por fim, veja que:

$$\alpha(p(x)+q(x))=\alpha((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)=$$

$$\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\alpha b_0+\alpha b_1x+\alpha b_2x^2=\alpha p(x)+\alpha q(x),$$

portanto a segunda propriedade distributiva também é válida.

Assim, como as oito propriedades são válidas, verificamos que o conjunto dos polinômios de grau menor que ou igual a 2, munido das operações soma e multiplicação por escalar usual, forma um espaço vetorial.

As operações adição e multiplicação por escalar podem ser trivialmente estendidas para polinômios de grau menor que ou igual a *n*, com *n* natural qualquer. Podemos demonstrar que o conjunto dos polinômios de grau menor que ou igual a *n*, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual, forma um espaço vetorial (demonstre!).

Reflita

Considere o conjunto $V=\{a_1x+a_2x^2\in P_2\}$. Esse conjunto, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual dos polinômios de grau menor que ou igual a *2*, forma um espaço vetorial?

E o conjunto $W=\{1+a_2x^2\in P_2\}$?

No *Reflita* anterior, foi levantada a possibilidade de um subconjunto de um espaço vetorial também ser espaço vetorial. Quando isso acontece, dizemos que o subconjunto é um **subespaço vetorial**.

Assimile

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial em um corpo *K*. Dizemos que $U \subset V$ é **subespaço vetorial** de *V* se, e somente se,

- $0_V \in U$;
- se $v \in U$ e $u \in U$, então $v+u \in U$;
- se $v \in U$ e $\alpha \in K$, então $\alpha v \in U$.

Exemplificando

Considere o conjunto $V = \{a_1x + a_2x^2 \in P_2\}$. No *Reflita* anterior, você deve ter demonstrado que esse conjunto é um espaço vetorial quando associado às operações usuais dos polinômios de grau menor que ou igual a *2*.

Agora, como $V \subset P_2$, podemos mostrar que *V* é subespaço de P_2, sem demonstrar as oito propriedades de espaço vetorial.

- Veja que $p_0 \equiv 0 \in V$.
- Sejam $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in V$ e $q(x) = b_1x + b_2x^2 \in V$, então:
- $p(x) + q(x) = (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in V$.
- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$\alpha p(x) = \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 \in V.$$

Como essas três propriedades são válidas, mostramos que *V* é subespaço de P_2.

Ainda, no *Reflita* anterior, você deve ter demonstrado que $W = \{1 + a_2x^2 \in P_2\}$ não é espaço vetorial.

Veja que $W \subset P_2$, mas $p_0 \equiv 0 \notin W$, logo *W* não é subespaço de P_2.

Pesquise mais

Nesta seção, analisamos uma das estruturas mais importantes da Álgebra Linear, os espaços vetoriais. Para mais informações sobre essas estruturas, sugerimos as seguintes leituras:

CRUZ, Luiz Francisco da. Espaços vetoriais. In: ______________. **Introdução ao estudo da Álgebra Linear**. Bauru: Unesp. Cap. 2. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/AL_CAP_02.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 250-267 (disponível na Biblioteca Virtual).

Sem medo de errar

Em nossa situação-problema, estamos supondo que você está encarregado da implementação de polinômios para um *game* em realidade virtual. Como estudado anteriormente, o espaço dos polinômios, junto à adição e à multiplicação por escalar usual (apresentadas no início da Seção), forma um espaço vetorial no corpo dos números reais. Daí, podemos representar os polinômios de forma análoga a qual representamos os vetores.

Dessa forma, podemos associar um polinômio de grau menor que ou igual a *n* a um vetor com *n+1* componentes, de modo que o *j*-ésimo coeficiente do polinômio fique na *j+1*-ésima coordenada do vetor, isto é, se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in P_n$, em que P_n é o espaço dos polinômios com coeficientes reais com grau menor que ou igual a *n*, podemos associá-lo ao vetor:

$$v_p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Estamos interessados em representar as coordenadas de um objeto arremessado em relação ao tempo:

$$z(t) = -t^2 + 2t \text{ e } x = y = 0.$$

Esse movimento pode ser representado pelos polinômios:

$$z(t) = -t^2 + 2t,\ x(t) \equiv 0 \text{ e } y(t) \equiv 0.$$

Os polinômios estão representados em função da variável *t* (tempo); os coeficientes dos polinômios *x* e *y* são nulos. Assim, os vetores v_x e v_y, associados a *x* e *y*, respectivamente, são:

$$v_x = v_y = (0,0,0).$$

Os polinômios foram representados como vetores tridimensionais, pois o polinômio *z* é de grau dois, logo tem três coeficientes independentes. Poderíamos representar v_x e v_y como vetores em qualquer dimensão. Escolhemos essa para manter a coerência com v_z, vetor associado ao polinômio *z*.

Vamos reescrever *z* para que seus coeficientes fiquem claros:

$$z(t) = 0 + 2t + (-1)t^2.$$

Assim, vemos que os coeficientes de *z* são *0, 2* e *-1*, logo o vetor v_z será:

$$v_z = (0,2,-1).$$

Novamente, perceba que poderíamos ter escolhido um vetor com mais coordenadas para armazenar os coeficientes de *z*, porém estaríamos armazenando informações desnecessárias, visto que todos os coeficientes para potências maiores de *t* são nulos.

Quando a posição da câmera for modificada, teremos que multiplicar o polinômio *z* por *2*. Esse processo pode ser feito aplicando a multiplicação por escalar no vetor v_z. Assim, após a multiplicação, obtemos:

$$2v_z = (0,4,-2),$$

que representa o polinômio:

$$2z(t) = -2t^2 + 4t.$$

Com esses resultados, elabore um relatório explicando as estratégias tomadas. Nele explique também se essa representação é única, isto é, se existe outra forma de representar um polinômio de grau menor que ou igual a *n* como um vetor *n+1*-dimensional.

Avançando na prática

Tratando sequências como vetores

Descrição da situação-problema

Você, um aluno curioso do curso de Álgebra Linear e Vetorial, decidiu verificar quais estruturas formam espaços vetoriais.

Um colega apresentou uma estrutura chamada sequência. Dizemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência se, para todo $n\in\mathbb{N}$, tivermos associado um único $a_n\in\mathbb{R}$, ou seja, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência se a ela puder ser associada uma função definida no conjunto dos reais. Denotamos a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots).$$

Além disso, você foi informado de que o espaço das sequências, junto à operação adição dada por:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots)$$

e da operação multiplicação por escalar:

$$\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n, \cdots),$$

forma um espaço vetorial no corpo dos reais.

Você se questiona: se, no máximo, um número finito de elementos da sequência for não nulo, ainda terei um espaço vetorial?

Resolução da situação-problema

Veja que a sequência nula $\{a_n = 0\}_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ não possui elementos diferentes de zero. Como *0* é finito, a sequência nula está no conjunto das sequências com finitos elementos não nulos.

Dadas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências com *m* e *k* elementos não nulos, respectivamente.

Assim,

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots)$$

terá, no máximo, $m + k$ elementos não nulos. Logo, possui finitos elementos não nulos.

Ainda, dado $\alpha\in\mathbb{R}$, se $\alpha = 0$:

$$\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, \cdots, 0, \cdots),$$

que já vimos estar no conjunto das sequências com finitos elementos não nulos.

Se $\alpha \neq 0$,

$$\alpha\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n, \cdots),$$

que possui *m* elementos não nulos.

Daí, vemos que o conjunto das sequências com finitos elementos não nulos é um subespaço vetorial do conjunto das sequências. Portanto, é um espaço vetorial no corpo dos reais.

Faça valer a pena

1. Se $(V,+,\cdot)$ for espaço vetorial no corpo *K*, um conjunto *U*, munido de operações $+$ e $\cdot$, será subespaço vetorial de *V* se, e somente se, $(U,+,\cdot)$ for espaço vetorial no corpo *K*.

Assim, considere os conjuntos:

$$V = \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ e } U = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A \text{ é triangular superior}\right\}$$

e as operações adição e multiplicação por escalar das matrizes de ordem 3×3.

Marque V para verdadeira e F para falsa nas seguintes afirmativas:

( ) *V* é espaço vetorial no corpo dos números reais.

( ) *U* é espaço vetorial no corpo dos números reais.

( ) *U* é subespaço vetorial de *V*.

Escolha a alternativa que classifica corretamente as afirmativas anteriores.

a) V – V – V.

b) V – F – V.

c) V – V – F.

d) F – V – F.

e) F – F – V.

2. Um conjunto *K*, munido de operações adição e multiplicação, será considerado um corpo se essas operações satisfizerem algumas condições.

Considere o conjunto:

$$K = \{a, b, c\},$$

a operação adição definida por:

$$a+a=a,\ a+b=b,\ a+c=c,$$
$$b+a=b,\ b+b=c,\ b+c=a,$$
$$c+a=c,\ c+b=a \text{ e } c+c=b$$

e a operação multiplicação definida por:

$$a \cdot a = a,\ a \cdot b = a,\ a \cdot c = a,$$

$$b \cdot a = a,\ b \cdot b = b,\ b \cdot c = c,$$

$$c \cdot a = a, c \cdot b = c \text{ e } c \cdot c = b.$$

Analise as seguintes afirmações e sua relação:

I. $(K, +, \cdot)$ não é uma estrutura de corpo

PORQUE

II. K é um conjunto finito.

Escolha a alternativa que classifica corretamente as afirmações anteriores e sua relação:

a) As afirmações I e II são verdadeiras e II justifica I.
b) As afirmações I e II são verdadeiras, mas II não justifica I.
c) A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.
d) A afirmação I é falsa e a afirmação II é verdadeira.
e) As afirmações I e II são falsas.

3. Seja f uma função real, isto é, uma função que leva valores reais a valores reais:

f será contínua, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Se f e g forem funções reais contínuas e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$(f+g)(x) \text{ e } \alpha f(x) \text{ também serão contínuas.}$$

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em todo o conjunto dos reais.

Considere a operação adição, dados $f, g \in \mathcal{C}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Considere também a operação multiplicação por escalar, dados $f \in \mathcal{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x).$$

Suponha ainda o conjunto $\mathcal{D}$ o conjunto das funções reais diferenciáveis.

Analise as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{C}$ é um espaço vetorial no corpo dos reais.

II. $\mathcal{D}$ é um espaço vetorial no corpo dos reais.

III. $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$.

Selecione a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) As afirmativas I, II e III estão corretas.

b) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

c) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.

d) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

e) Todas as afirmativas estão corretas.

Seção 3.2

Base e dimensão

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos que diversos conjuntos possuem estrutura análoga à de vetores. Exemplos desses conjuntos são os polinômios de grau menor que ou igual a n, quando utilizamos a adição e a multiplicação por escalar usual de polinômios; as matrizes de ordem $m \times n$, com a adição e a multiplicação por escalar usual de matrizes; o conjunto das funções contínuas, com a adição e a multiplicação por escalar usual de funções, entre outros.

No caso de polinômios de grau menor que ou igual a n, podemos associar cada polinômio a um vetor no espaço **n + 1** dimensional. Podemos representar as matrizes $m \times n$ por vetores? Em caso afirmativo, essa representação será única? As mesmas perguntas podem ser feitas para o caso das funções contínuas.

Para ilustrar a aplicabilidade das técnicas estudadas nesta seção, recorde que estamos supondo que você trabalha em uma empresa desenvolvedora de *games*.

Durante uma análise no software, você percebeu que outro funcionário havia implementado um sistema para armazenar os polinômios, porém este ocupa muita memória. Sua função é implementar outro sistema mais eficiente para o armazenamento.

O sistema original aloca memória suficiente para armazenar 200 valores, independentemente do grau do polinômio.

Números são armazenados no computador na forma de pontos flutuantes. Cada ponto flutuante ocupa 8 bytes na memória do computador. Assim, você precisa analisar qual a memória necessária para a armazenagem de cada um dos polinômios na representação original. Existe restrição no grau do polinômio alocado usando essa representação? Qual é a quantidade de memória mínima para se alocar um polinômio de grau 2? Como pode ser feita essa representação?

Por fim, percebeu-se que, devido a uma falha na implementação, perdeu-se a informação do grau de alguns polinômios. Ao usar sua forma otimizada de representação, como podemos descobrir o grau do polinômio? Use como exemplo um polinômio que ocupa 64 bytes.

Após a análise feita nesta seção, todas essas questões poderão ser respondidas.

Não pode faltar

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial. Podemos associar os elementos do conjunto V com vetores no sentido tradicional (n-uplas)? Em caso afirmativo, qual tipo de vetores e como fazer essa associação? Essas são algumas perguntas que responderemos nesta seção.

Para começar nossa análise, precisamos estender a definição de independência linear para conjuntos.

Assimile

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial, com $v_j \in V$, $j = 1,2,\cdots,k$. Os vetores v_j serão **linearmente independentes** se o sistema

$$\alpha_1 \cdot v_i + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k = 0_V$$

possuir solução única $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Exemplificando

Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau menor que ou igual a *2*, simbolizado por P_2, com operações usuais.

Sejam os polinômios $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 2$ e $p_3(x) = 1 + x^2$, queremos verificar se são linearmente independentes, isto é, se o sistema

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0$$

admite apenas a solução trivial.

Agora, note que o sistema de interesse é equivalente a:

$$\alpha_1 + \alpha_1 x + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2,$$

que é equivalente a:

$$\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3\right) + \left(\alpha_1\right)x + \left(\alpha_3\right)x^2 = 0 + 0x + 0x^2.$$

Para essa relação ser verdadeira, deve ser verdadeira independentemente do valor de *x*, então:

$$\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3\right) = 0,$$

$$\left(\alpha_1\right)x = 0x \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

e

$$\left(\alpha_3\right)x^2 = 0x^2 \Rightarrow \alpha_3 = 0.$$

Daí, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases},$$

cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Portanto, os polinômios p_1, p_2 e p_3 são linearmente independentes.

No exemplo anterior, qualquer polinômio $p \in P_2$ pode ser unicamente escrito como combinação linear dos polinômios p_1, p_2 e p_3 (verifique!). Quando isso ocorre, chamamos o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ de *base* do espaço vetorial $(P_2, +, \cdot)$.

Assimile

Seja $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ um conjunto de vetores linearmente independentes, em que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial. O conjunto *B* será uma **base** para o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ se todo elemento $v \in V$ puder ser unicamente escrito como combinação linear dos elementos de *B*, isto é, se o sistema:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = v$$

tiver solução única.

Neste caso, a **dimensão** do espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ é *n*, denotada por:

$$\dim(V) = n.$$

Veja que se $B=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ for base para o espaço vetorial $(V,+,\cdot)$, então, neste espaço, poderemos tomar, no máximo, n vetores linearmente independentes.

Para demonstrar esse fato, suponha que $v_{n+1} \in V$ não nulo. Como B é base para V, então existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = v_{n+1}.$$

Como $v_{n+1} \neq 0_V$, então, ao menos um $\alpha_j \neq 0$.

Assim:

$$(-\alpha_1) \cdot v_1 + (-\alpha_2) \cdot v_2 + \ldots + (-\alpha_n) \cdot v_n + (1) \cdot v_{n+1} = -v_{n+1} + v_{n+1} = 0_V,$$

ou seja, o sistema:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n + \alpha_{n+1} \cdot v_{n+1} = 0_V$$

possui solução não trivial. Daí, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.

Por meio dessa propriedade, chegamos a outra definição para a dimensão de um espaço vetorial.

Assimile

Um espaço vetorial $(V,+,\cdot)$ terá **dimensão** n se, no máximo, n vetores forem linearmente independentes entre si.

Neste caso, um conjunto com n vetores linearmente independentes entre si é uma **base** para o espaço vetorial $(V,+,\cdot)$.

Caso não exista um número máximo de vetores que podem ser linearmente independentes entre si no espaço vetorial $(V,+,\cdot)$, a **dimensão** de V é infinita, denotada por:

$$\dim(V) = \infty.$$

Logo, não é possível apresentar uma base no sentido usual.

Exemplificando

Considere o espaço vetorial das matrizes 2×2 com as operações usuais $\left(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot\right)$.

Queremos mostrar que o conjunto:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $\left(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot\right)$.

Primeiramente, devemos mostrar que os elementos do conjunto são linearmente independentes entre si, ou seja, o sistema:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

possui solução única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Contudo, perceba que o sistema de interesse pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ é a única solução possível. Logo, os elementos de *B* são linearmente independentes entre si.

Agora, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Resolvendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$a_{22} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (a_{21} - a_{22}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (a_{12} - a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (a_{11} - a_{12}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que *A* pode ser escrita como combinação linear dos elementos de *B*. Em outras palavras, *A* é linearmente dependente com elementos de *B*. Portanto, *B* é base para $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Assim, dado que $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ é base para o espaço vetorial $(V,+,\cdot)$, no corpo formado pelo conjunto dos números reais, e $v\in V$ existem (e são únicos), com $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, tal que:

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n.$$

Os elementos α_j são chamados de **coordenadas** de v na base B.

Podemos associar o vetor $v\in V$ ao vetor $[v]_B\in\mathbb{R}^n$:

$$[v]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Esse vetor é chamado de vetor das coordenadas de v na base B.

No caso do *Exemplificando* anterior, usando a base B para o espaço vetorial $(\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$, podemos representar a matriz:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

como o vetor:

$$[A]_B=(1,1,1,1)\in\mathbb{R}^4.$$

Se $(U,+,\cdot)$ é subespaço vetorial de $(V,+,\cdot)$, é claro que $\dim(U)\le\dim(V)$. No caso de espaços com dimensão finita, se $U\subset V$ e $U\neq V$, então $\dim(U)<\dim(V)$.

Podemos estender o conceito de ortogonalidade para espaços vetoriais quaisquer. Para isso, precisaremos do conceito de **produto interno**.

Assimile

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial no corpo dos reais. Uma operação $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que leva pares de elementos de V a elementos de $\mathbb{R}$ é um **produto interno** se, dados $u,v,w\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$:

- $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$;
- $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$;

- $\langle \alpha v,u \rangle = \alpha \langle v,u \rangle$;
- $\langle v,v \rangle \geq 0$ e $\langle v,v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

Neste caso, definimos a **norma** de um vetor v no espaço vetorial V como:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}.$$

Reflita

O **produto escalar** é um **produto interno** no espaço vetorial $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$?

E a **norma euclidiana**? Pode ser escrita como a raiz quadrada de um produto interno?

Exemplificando

Considere o conjunto:

$$P_2[0,1] = \{p:[0,1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ é polinômio de grau menor que ou igual a } 2\}$$

dos polinômios de grau menor que ou igual a 2, definidos no intervalo $[0,1]$, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual para polinômios. Então, $(P_2[0,1],+,\cdot)$ é um espaço vetorial no corpo dos reais (verifique!).

Vamos mostrar que a operação definida como:

$$\langle p_1,p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx, \text{ para todo } p_1,p_2 \in P_2[0,1],$$

é um produto interno.

Sabendo que $p_1,p_2,p_3 \in P_2[0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

- $\langle p_1,p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx = \int_0^1 p_2(x)p_1(x)dx = \langle p_2,p_1 \rangle$;
- $\langle p_1+p_2,p_3 \rangle = \int_0^1 (p_1(x)+p_2(x))p_3(x)dx =$

  $\int_0^1 (p_1(x)p_3(x)+p_2(x)p_3(x))dx =$

  $\int_0^1 p_1(x)p_3(x)dx + \int_0^1 p_2(x)p_3(x)dx,$

ou seja,

$$\langle p_1 + p_2, p_3 \rangle = \langle p_1, p_3 \rangle + \langle p_2, p_3 \rangle;$$

- $\langle \alpha p_1, p_2 \rangle = \int_0^1 \alpha p_1(x) p_2(x) dx = \alpha \int_0^1 p_1(x) p_2(x) dx = \alpha \langle p_1, p_2 \rangle;$

- $\langle p_1, p_1 \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_1(x) dx = \int_0^1 [p_1(x)]^2 dx,$ como $[p_1(x)]^2 \geq 0,$ então, pelas propriedades de integral, temos:

$$\langle p_1, p_1 \rangle \geq 0,$$

e ainda:

$$\langle p_1, p_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow p_1(x) \equiv 0.$$

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Dizemos que dois vetores $u,v \in V$ são **ortogonais** entre si, se

$$\langle u,v \rangle = 0.$$

Caso sejam ortogonais e possuam norma igual a *1*, isto é,

$$\langle u,v \rangle = 0 \text{ e } \|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = \|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} = 1,$$

u e *v* são vetores **ortonormais** entre si.

No caso geral, definimos o **ângulo** $\theta_{u,v}$ entre os vetores *u* e *v* não nulos como:

$$\theta_{u,v} = arccos\left(\frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}\right).$$

O processo de **ortogonalização de Gram-Schmidt** pode ser estendido para espaços vetoriais quaisquer, substituindo o produto interno pelo produto escalar.

Assim, dada uma base *B* para o espaço vetorial $(V,+,\cdot)$, podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt sobre os elementos de *B* e obter uma base ortonormal para *V*.

Exemplificando

Considere o espaço vetorial $\left(P_2[0,1],+,\cdot\right)$ com produto interno:

$$\left\langle p_1,p_2\right\rangle=\int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx.$$

O conjunto $B=\left\{1,1+x,x^2\right\}$ é uma base para $\left(P_2[0,1],+,\cdot\right)$ (verifique!).

Vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base de vetores ortonormais para $\left(P_2[0,1],+,\cdot\right)$.

Como:

$$\left\langle 1,1\right\rangle=\int_0^1 1\cdot 1dx=x\Big|_0^1=1-0=1,$$

logo: $\|1\|=\sqrt{\left\langle 1,1\right\rangle}=\sqrt{1}=1.$

Daí, $u_1=\dfrac{1}{\|1\|}=1.$

No segundo passo, definimos:

$$v_2=1+x-\frac{\left\langle 1,1+x\right\rangle}{\|1\|}1.$$

Calculamos:

$$\left\langle 1,1+x\right\rangle=\int_0^1 1\cdot(1+x)dx=\int_0^1(1+x)dx=\left[x+\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{3}{2}.$$

Assim:

$$v_2=1+x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+x.$$

Definimos ainda:

$$u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$$

como:

$$\|v_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}+x\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{4}-x+x^2\right) dx} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{4}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

ou seja,

$$\|u_2\| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Logo: $u_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}+x}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x.$

Agora nos resta encontrar u_3. Para isso, defina:

$$v_3 = x^2 - \langle 1, x^2 \rangle 1 - \langle -\sqrt{3}+2\sqrt{3}x, x^2 \rangle \left(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}x\right),$$

como:

$$\langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

e:

$$\langle -\sqrt{3}+2\sqrt{3}x, x^2 \rangle = \int_0^1 \left(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}x\right) x^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x^3\right) dx =$$

$$\left[-\sqrt{3}\frac{x^3}{3} + 2\sqrt{3}\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Temos que:

$$v_3 = x^2 - \frac{1}{3}1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}x\right) = x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{6} - x + x^2.$$

Como:

$$\left\|\frac{1}{6}-x+x^2\right\| = \sqrt{\int_0^1\left(\frac{1}{6}-x+x^2\right)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1\left(x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{36}\right)} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}+\frac{x}{36}\right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{180}},$$

ou seja,

$$\left\|\frac{1}{6}-x+x^2\right\| = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Obtemos:

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{6}-x+x^2\right) = \sqrt{5}-6\sqrt{5}x+6\sqrt{5}x^2.$$

Assim, construímos a base ortonormal:

$$\left\{1, -\sqrt{3}+2\sqrt{3}x, \sqrt{5}-6\sqrt{5}x+6\sqrt{5}x^2\right\}.$$

Pesquise mais

Como consulta complementar sobre base e dimensão de espaço vetorial, sugerimos a obra indicada a seguir:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 278-290 (disponível na Biblioteca Virtual).

Sobre o produto interno, sugerimos a seguinte leitura complementar:

PULINO, Petrônio. Produto interno. In: ________________. **Álgebra linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 284-310. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 29 jan. 2018.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você é responsável pela forma de implementação dos polinômios em um *game* em realidade virtual. Em uma versão anterior, outro funcionário havia implementado um sistema que aloca memória suficiente para 200 coeficientes para cada polinômio.

Visto que cada coeficiente deve ser armazenado na forma de ponto flutuante, ou seja, ocupando 8 bytes de memória, nesta representação cada polinômio ocupará 1.600 bytes ou 1,6 KB.

Se todos os coeficientes do polinômio forem armazenados, nessa representação poderemos armazenar polinômio de, no máximo, grau 199 (um valor muito maior do que o utilizado em aplicações gerais).

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ um polinômio de grau 2, nessa representação p pode ser armazenado como:

$$\left(a_0, a_1, a_2, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{197 \text{ vezes}}\right).$$

Veja que há desperdício de memória; dado que se o grau do polinômio é *2*, todos os coeficientes de ordem maior do que *2* serão nulos.

Por outro lado, polinômios de grau menor que ou igual a *2* formam um espaço vetorial com base dada por:

$$B_2 = \{1, x, x^2\},$$

da qual concluímos que a dimensão do espaço vetorial $(P_2, +, \cdot)$ é *3*. Ainda, o polinômio p pode ser associado ao vetor:

$$[p]_{B_2} = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3,$$

e devido ao fato de que B_2 é uma base, o vetor $[p]_{B_2}$ é o único que pode ser associado ao polinômio p.

Assim, podemos representar um polinômio de grau *2* por um vetor com tridimensional. Esse vetor por ter *3* elementos ocuparia 24 bytes de memória, economizando 1.576 bytes em seu armazenamento.

Polinômios de grau menor que ou igual a *n* formam espaço vetorial com base dada por:

$$B_n = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\},$$

logo sua dimensão é *n+1* e cada polinômio com grau menor que ou igual a *n* pode ser associado a um único vetor com *n+1* elementos. Assim, os vetores com grau igual a *n* serão armazenados como vetores *n+1*-dimensional.

Veja que essa representação nos garante o conhecimento do grau do polinômio sem que este seja diretamente armazenado. Se o polinômio foi armazenado como vetor com *n* componentes, então o grau do polinômio deve ser *n-1*. Em termos de memória ocupada, se a representação de um polinômio ocupa *X* bytes, isso significa que possui $\frac{X}{8}$ componentes (cada componente ocupa *8* bytes), portanto o grau do polinômio é $\frac{X}{8} - 1$.

Por exemplo, se o polinômio ocupar 64 bytes, então terá $\frac{64}{8} = 8$ componentes e, portanto, seu grau será *7*.

Agora, elabore um relatório justificando a mudança para o novo sistema de representação, o qual deve ser explicado com detalhes. Além disso, tal relatório deve trazer algumas argumentações sobre as vantagens da nova estratégia.

Avançando na prática

Diferentes ângulos entre polinômios

Descrição da situação-problema

Você e um colega da disciplina de Álgebra Linear começaram a discussão sobre os polinômios $p(x) = 1 + x^2$ e $q(x) = x$ serem ou não ortogonais entre si. Ao questionar o professor, ele responde: "Depende de como você está calculando os ângulos". Use como exemplos os produtos internos:

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle_1 = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle_2 = (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2).$$

Resolução da situação-problema

Usando o produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_1$, temos:

$$\langle p,q \rangle_1 = \langle 1+x^2, x \rangle_1 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0.$$

Logo, p e q são ortogonais em relação a este produto interno.

Agora, usando o produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$, temos:

$$\langle p,q \rangle_2 = \langle 1+x^2, x \rangle_2 = (1+0+1)\cdot(0+1+0) = 2 \neq 0.$$

Logo, em relação ao produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$, p e q não são ortogonais. Seu ângulo será dado por:

$$\theta_{p,q} = \text{arccos}\left(\frac{\langle p,q \rangle_2}{\|p\|_2 \|q\|_2} \right),$$

em que $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x \rangle_2}$ é a norma associada ao produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$. Assim:

$$\|p\|_2 = \sqrt{\langle p,p \rangle_2} = \sqrt{(1+0+1)^2} = |1+0+1| = 2$$

e

$$\|q\|_2 = \sqrt{\langle q,q \rangle_2} = \sqrt{(0+1+1)^2} = |0+1+0| = 1.$$

Daí,

$$\theta_{p,q} = \text{arccos}\left(\frac{2}{2\cdot 1} \right) = \text{arccos}(1) = 0°.$$

Concluímos que quando calculamos o ângulo entre p e q usando o produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$, p e q são paralelos.

Agora, estenda esses resultados para outros espaços vetoriais. Argumente, por exemplo, que os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ podem ser paralelos desde que escolhamos um produto interno adequado.

Faça valer a pena

1. Espaços vetoriais podem ser classificados em relação à sua dimensão. Se a dimensão de um espaço vetorial é *n*, significa que todo vetor nesse espaço pode ser unicamente escrito como combinação linear de *n* vetores linearmente independentes, os quais formam uma base para o espaço vetorial em questão.

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial de dimensão *5* e $v_1,v_2,v_3 \in V$ vetores linearmente independentes. Defina o conjunto $U=\{v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

Assinale V para verdadeira e F para falsa nas seguintes afirmações:

( ) $(U,+,\cdot)$ é subespaço vetorial de $(V,+,\cdot)$.

( ) Existe $u \in U$, tal que $u \notin V$.

( ) $\dim(U)=4$.

Escolha a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) V – V – V.

b) V – F – F.

c) V – F – V.

d) V – V – F.

e) F – V – V.

2. Podemos estabelecer uma relação de ângulos entre elementos de um espaço vetorial qualquer utilizando o conceito de produto interno.

Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau menor que ou igual a *3* e a operação $\langle p_1,p_2\rangle=\begin{cases}1, \text{ se } p_1 \neq p_2\\ 0, \text{ se } p_1 = p_2\end{cases}$.

Analise as seguintes afirmações e sua relação:

I. É impossível afirmar a dimensão desse espaço vetorial

PORQUE

II. $\langle p_1,p_2\rangle$ não é um produto interno.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações I e II e sua relação:

a) I e II são verdadeiras e II justifica I.

b) I e II são verdadeiras, mas II não justifica I.

c) I é verdadeira, mas II é falsa.

d) I é falsa, mas II é verdadeira.

e) I e II são falsas.

3. Podemos representar um vetor em um espaço vetorial por meio de suas coordenadas associadas a uma base.

Considere o espaço das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2, com as operações adição e multiplicação por escalar usual para matrizes de ordem 2×2, os conjuntos:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Analise as seguintes afirmações:

I. B é base e $[A]_B = (1,2,1)$.

II. C é base e $[A]_C = (-1,2,2)$.

III. A não está no espaço vetorial das matrizes 2×2 triangulares superiores.

Escolha a alternativa que classifica corretamente as afirmações I, II e III:

a) As afirmações I, II e III são verdadeiras.

b) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

c) Apenas a afirmação II é verdadeira.

d) Apenas a afirmação III é verdadeira.

e) Apenas a afirmação I é verdadeira.

Seção 3.3

Mudança de base

Diálogo aberto

Na seção anterior, analisamos como associar espaços vetoriais quaisquer com vetores euclidianos *n*-dimensionais (*n*-uplas). Nesta seção, estudaremos como passar de uma representação para outra.

Lembre-se de que estamos supondo que você foi contratado para a implementação de um jogo em realidade virtual. Para tanto, definiu a representação de polinômios de grau menor que ou igual a n como vetores $n+1$ dimensionais, otimizando a quantidade necessária de memória para cada polinômio. Além disso, você está representando as operações polinomiais como operações vetoriais, facilitando a implementação delas. Vamos supor que esses polinômios são utilizados para descrever as coordenadas de um objeto em relação ao tempo. Dado um instante fixo, ou um objeto em uma posição fixa, como podemos representar a posição de objetos em relação ao jogador?

O jogo admite que o sistema de coordenadas é medido em metros. À frente do jogador, há as coordenadas positivas do eixo x, enquanto atrás há as coordenadas negativas. À esquerda, as coordenadas positivas do eixo y, e à direita, as coordenadas negativas. Acima do jogador, as coordenadas positivas de z, e abaixo, as coordenadas negativas.

Como podemos representar essas posições em relação ao jogador?

Conforme o jogador mexe a cabeça, altera a posição da câmera dentro do jogo, logo as coordenadas do objeto devem ser alteradas. Como fazer essa alteração?

Use como exemplo um objeto que está 3 m à frente do jogador, 2 m à esquerda e 1 m acima. Qual é a distância do objeto ao jogador?

Suponha agora que o jogador movimentou a cabeça 30° à esquerda. Quais as novas coordenadas do objeto? Qual é a distância do objeto ao jogador após a rotação?

Nesta seção, estudaremos mudanças de bases, em particular, mudanças de bases por rotação, que será a ferramenta utilizada na resolução deste problema.

Não pode faltar

Na seção anterior, vimos que dados um espaço vetorial $(V,+,\cdot)$ no corpo dos reais, com dimensão *n*, e $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ uma base para esse espaço, todo elemento $v\in V$ pode ser representado por:

$$[v]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n,$$

indicando que:

$$v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n.$$

Além disso, essa representação é única.

Apesar de, em um primeiro momento, esse resultado parecer um pouco teórico, na prática indica que todo espaço vetorial de dimensão finita *n* pode ser tratado como o espaço $\mathbb{R}^n$.

Considere a transformação I_B, que associa o vetor $v\in V$ ao vetor $[v]_B\in\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\begin{aligned} I_B:\quad V &\to \mathbb{R}^n. \\ v &\to [v]_B \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos o conceito de transformação linear.

Assimile

Seja $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial no corpo dos reais, dizemos que a transformação:

$$\begin{aligned} T:\quad V &\to V \\ v &\to T(v) \end{aligned}$$

é **linear** se, e somente se, para todo $u,v\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$T(\alpha v)=\alpha T(v)$$

e

$$T(v+u)=T(v)+T(u).$$

A transformação I_B é linear. Para verificar esse fato, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n \in V$ e $u = b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \cdots + b_n \cdot v_n \in V$. Então:

$$I_B(v) = [v]_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

e

$$I_B(u) = [u]_B = (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

Note que:

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n) + \\ &+ (b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \cdots + b_n \cdot v_n) = \\ &= (a_1 + b_1) \cdot v_1 + (a_2 + b_2) \cdot v_2 + \cdots + (a_n + b_n) \cdot v_n. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} I_B(v+u) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) = \\ &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = [v]_B + [u]_B = I_B(v) + I_B(u). \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} \alpha v &= \alpha (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n) = \\ &= (\alpha a_1) \cdot v_1 + (\alpha a_2) \cdot v_2 + \cdots + (\alpha a_n) \cdot v_n, \end{aligned}$$

obtemos:

$$I_B(\alpha v) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n) = \alpha (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \alpha [v]_B = \alpha I_B(v).$$

Portanto, I_B é linear.

A escolha da letra *I* na definição dessa transformação se deve ao fato de que os vetores *v* e $[v]_B$ representam o mesmo elemento, logo essa transformação é uma espécie de transformação identidade.

Em aplicações, é comum que a base tenha que ser trocada. Exemplos comuns dessa necessidade são as mudanças de escala e rotação.

Dessa forma, suponha que temos um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ no corpo dos reais, com dimensão *n*, $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e

$\widehat{B}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, duas bases para esse espaço. Já que $v\in V$, então:

$$[v]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$$

e:

$$[v]_{\widehat{B}}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Perceba que $[v]_B$ e $[v]_{\widehat{B}}$ representam o mesmo elemento $v\in V$.

Queremos estabelecer uma transformação $I_B^{\widehat{B}}$, em que dado v representado na base B, sendo dado $[v]_B$, obtemos v representado na base $\widehat{B}$, ou seja, obtemos $[v]_{\widehat{B}}$. Em outras palavras, queremos definir a transformação:

$$\begin{aligned} I_B^{\widehat{B}}: \quad & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & [v]_B \rightarrow [v]_{\widehat{B}} \end{aligned}.$$

Afirmamos que $I_B^{\widehat{B}}$ é linear. Para verificar esse fato, considere $u,v\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ quaisquer. Já mostramos que $[\alpha v]_B=\alpha[v]_B$, $[u+v]_B=[u]_B+[v]_B$. Como $[v]_B$ e $[v]_{\widehat{B}}$ representam o mesmo elemento $v\in V$, segue que $[\alpha v]_{\widehat{B}}=\alpha[v]_{\widehat{B}}$ e $[u+v]_{\widehat{B}}=[u]_{\widehat{B}}+[v]_{\widehat{B}}$. Daí, resulta:

$$I_B^{\widehat{B}}\left(\alpha[v]_B\right)=I_B^{\widehat{B}}\left([\alpha v]_B\right)=[\alpha v]_{\widehat{B}}=\alpha[v]_{\widehat{B}}=\alpha I_B^{\widehat{B}}\left([v]_B\right)$$

e:

$$\begin{aligned} & I_B^{\widehat{B}}\left([v]_B+[u]_B\right)=I_B^{\widehat{B}}\left([v+u]_B\right)= \\ & =[v+u]_{\widehat{B}}=[v]_{\widehat{B}}+[u]_{\widehat{B}}=I_B^{\widehat{B}}\left([v]_B\right)+I_B^{\widehat{B}}\left([u]_B\right), \end{aligned}$$

logo $I_B^{\widehat{B}}$ é linear.

Perceba novamente a escolha da letra "I "para representar a transformação. Isso ocorre porque os elementos $[v]_B$ e $[v]_{\widehat{B}}$ representam o mesmo elemento $v\in V$. Assim, a transformação $I_B^{\widehat{B}}$ é uma espécie de transformação identidade.

Analise o seguinte exemplo.

Exemplificando

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ com as operações adição e multiplicação por escalar usual.

Os conjuntos

$$B=\{(1,0),(0,1)\}$$

e

$$\widehat{B}=\{(1,1),(0,-1)\}$$

são bases para esse espaço vetorial (verifique!).

Defina $v_1=(1,0)$. Sabendo que $v_1\in B$, este elemento pode ser representado por

$$[v_1]_B=(1,0)$$

e

$$[v_1]_{\widehat{B}}=(1,1).$$

Agora, defina $v_2=(0,1)$. Novamente, temos $v_2\in B$; este vetor pode ser representado por

$$[v_2]_B=(0,1)$$

e

$$[v_2]_{\widehat{B}}=(0,-1).$$

Como $I_B^{\widehat{B}}$ é linear e $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, com representação $[v]_B=(a,b)$, obtemos:

$$[v]_{\widehat{B}}=I_B^{\widehat{B}}(a,b)=I_B^{\widehat{B}}\left[a(1,0)+b(0,1)\right]=aI_B^{\widehat{B}}(1,0)+bI_B^{\widehat{B}}(0,1)=$$
$$a(1,1)+b(0,-1)=(a,a-b).$$

Assim, definimos a transformação mudança de base para esse caso.

Esse exemplo nos dá uma ideia de como resolver o problema geral.

Sejam $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial no corpo dos reais de dimensão n, $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ e $\widehat{B}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ bases para V. Então, a **transformação mudança de base** da base B à base $\widehat{B}$ é definida como:

$$I_B^{\widehat{B}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j I_B^{\widehat{B}}(e_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j I_B^{\widehat{B}}\left([v_j]_B\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j [v_j]_{\widehat{B}},$$

em que e_i é o vetor de $\mathbb{R}^n$, com todas as coordenadas iguais a zero, exceto a i-ésima, cujo valor é 1.

Definindo $[I]_B^{\widehat{B}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz em que a i-ésima linha de $[I]_B^{\widehat{B}}$ é o i-ésimo vetor de B, representado na base $\widehat{B}$, e $\alpha\in\mathbb{R}^n$ o vetor cuja i-ésima componente é α_i, podemos reescrever a transformação mudança de base como:

$$I_B^{\widehat{B}}(\alpha)=[I]_B^{\widehat{B}}\,\alpha,$$

ou, equivalentemente:

$$I_B^{\widehat{B}}\left([v]_B\right)=[I]_B^{\widehat{B}}[v]_B=[v]_{\widehat{B}},$$

em que $[I]_B^{\widehat{B}}$ é chamada **matriz mudança de base** de B a $\widehat{B}$.

Exemplificando

Considere o espaço dos polinômios reais de grau menor que ou igual a 3, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual, e também as bases $B=\{1,1+t,1+t^2,1+t^3\}$ e $\widehat{B}=\{1-t^3,t,t+t^2,t^2+t^3\}$ para esse espaço (sugerimos que verifique se esses conjuntos realmente são bases para o espaço em questão).

Para definir a transformação mudança de base de B a $\widehat{B}$, precisamos representar os elementos de B nas coordenadas da base $\widehat{B}$.

Para tanto, precisamos resolver os sistemas:

$$\begin{cases} 1 = a_{11}\left(1-t^3\right)+a_{12}\left(t\right)+a_{13}\left(t+t^2\right)+a_{14}\left(t^2+t^3\right) \\ 1+t = a_{21}\left(1-t^3\right)+a_{22}\left(t\right)+a_{23}\left(t+t^2\right)+a_{24}\left(t^2+t^3\right) \\ 1+t^2 = a_{31}\left(1-t^3\right)+a_{32}\left(t\right)+a_{33}\left(t+t^2\right)+a_{34}\left(t^2+t^3\right) \\ 1+t^3 = a_{41}\left(1-t^3\right)+a_{42}\left(t\right)+a_{43}\left(t+t^2\right)+a_{44}\left(t^2+t^3\right) \end{cases},$$

os quais podem ser reescritos como:

$$\begin{cases} 1 = a_{11}+t\left(a_{12}+a_{13}\right)+t^2\left(a_{13}+a_{14}\right)+t^3\left(-a_{11}+a_{14}\right) \\ 1+t = a_{21}+t\left(a_{22}+a_{23}\right)+t^2\left(a_{23}+a_{24}\right)+t^3\left(-a_{21}+a_{24}\right) \\ 1+t^2 = a_{31}+t\left(a_{32}+a_{33}\right)+t^2\left(a_{33}+a_{34}\right)+t^3\left(-a_{31}+a_{34}\right) \\ 1+t^3 = a_{41}+t\left(a_{42}+a_{43}\right)+t^2\left(a_{43}+a_{44}\right)+t^3\left(-a_{41}+a_{44}\right) \end{cases}.$$

Assim, na primeira linha, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{12}+a_{13}=0 \\ a_{13}+a_{14}=0 \\ -a_{11}+a_{14}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{12}=-a_{13} \\ a_{13}=-a_{14} \\ a_{14}=a_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{12}=1 \\ a_{13}=-1 \\ a_{14}=1 \end{cases}.$$

Na segunda linha, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{21}=1 \\ a_{22}+a_{23}=1 \\ a_{23}+a_{24}=0 \\ -a_{21}+a_{24}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}=1 \\ a_{22}=1-a_{23} \\ a_{23}=-a_{24} \\ a_{24}=a_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}=1 \\ a_{22}=2 \\ a_{23}=-1 \\ a_{24}=1 \end{cases}.$$

Na terceira linha, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{31}=1 \\ a_{32}+a_{33}=0 \\ a_{33}+a_{34}=1 \\ -a_{31}+a_{34}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{31}=1 \\ a_{32}=-a_{33} \\ a_{33}=1-a_{34} \\ a_{34}=a_{31} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{31}=1 \\ a_{32}=0 \\ a_{33}=0 \\ a_{34}=1 \end{cases}.$$

Por fim, na quarta linha, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{41}=1 \\ a_{42}+a_{43}=0 \\ a_{43}+a_{44}=0 \\ -a_{41}+a_{44}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{41}=1 \\ a_{42}=-a_{43} \\ a_{43}=-a_{44} \\ a_{44}=1+a_{41} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{41}=1 \\ a_{42}=2 \\ a_{43}=-2 \\ a_{44}=2 \end{cases}.$$

Com isso, obtemos:

$$1 = (1,0,0,0)_B = (1,1,-1,1)_{\hat{B}},$$
$$1+t = (0,1,0,0)_B = (1,2,-1,1)_{\hat{B}},$$
$$1+t^2 = (0,0,1,0)_B = (1,0,0,1)_{\hat{B}},$$
$$1+t^3 = (0,0,0,1)_B = (1,2,-2,2)_{\hat{B}},$$

em que o subíndice após o vetor indica a base na qual as coordenadas estão representadas.

Assim, concluímos que a transformação $I_B^{\hat{B}}$ será dada por:

$$I_B^{\hat{B}}(\alpha) = [I]_B^{\hat{B}}\,\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

Reflita

Considere o espaço vetorial do exemplo anterior e a base B, apresentada com o produto interno dado pela soma dos múltiplos dos coeficientes dos polinômios. Como representar os polinômios de grau menor que ou igual a *3*, usando coordenadas em uma base ortonormal?

Reflita

Sejam $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial no corpo dos reais, com dimensão finita igual a n, B e $\hat{B}$ duas bases para V. Qual é a relação entre as matrizes $[I]_B^{\hat{B}}$ e $[I]_{\hat{B}}^{B}$?

Como sugestão para essa análise, admitindo $v \in V$, $[v]_B$ sua representação na base B e $[v]_{\hat{B}}$ sua representação na base $\hat{B}$, o que se pode dizer de $[I]_{\hat{B}}^{B} \cdot [I]_B^{\hat{B}} \cdot [v]_B$? E de $[I]_B^{\hat{B}} \cdot [I]_{\hat{B}}^{B} \cdot [v]_{\hat{B}}$?

O que podemos concluir sobre a singularidade dessas matrizes?

A seguir, apresentamos alguns espaços vetoriais e suas bases mais comumente usadas. Tais bases são chamadas de **bases canônicas**. Deixamos a verificação de que esses conjuntos são realmente base como exercício.

Assimile

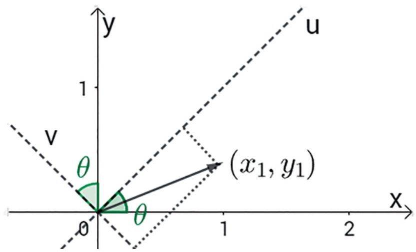
- Seja $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, em que $e_j \in \mathbb{R}^n$ é o vetor com todas as componentes iguais a zero, exceto a *j*-ésima, cujo valor é 1. Chamamos *B* de **base canônica** para o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, cujas operações adição e multiplicação por escalar são as usuais para os vetores *n*-dimensionais.

- Seja $B = \left\{ \dfrac{x^k}{k!} \mid k = 0, 1, \cdots, n \right\}$, em que $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (1)$ é a operação fatorial e $0! = 1$. O conjunto *B* é a **base canônica** para o espaço vetorial dos polinômios com grau menor que ou igual a *n*, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual dos polinômios de grau menor que ou igual a *n*.

- Admita que $B = \{E_{ij} \mid i = 1, \cdots, m \text{ e } j = 1, \cdots, n\}$, em que $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento na posição *i j*, cujo valor é *1*. O conjunto *B* é a **base canônica** para o espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$, munido das operações adição e multiplicação por escalar usual das matrizes de ordem $m \times n$.

Um caso especial de mudança de base no espaço tridimensional é a devida à rotação. Suponha um sistema de coordenadas bidimensional ($\mathbb{R}^2$) e um vetor com representação (x_1, y_1) nesse sistema (para simplificar a notação, admitiremos que esse sistema está representado na base canônica $B = \{e_1, e_2\}$). Sabendo que os eixos (coordenadas) foram rotacionados por um ângulo θ no sentido anti-horário, como na Figura 3.1, como podemos encontrar as coordenadas (u_1, v_1) em relação aos novos eixos?

Figura 3.1 | Eixos *x* e *y* rotacionados por um ângulo θ



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3.1, as retas *u* e *v* representam, respectivamente, os eixos *x* e *y*, após a rotação pelo ângulo θ. As coordenadas x_1 e y_1 do vetor apresentado são em relação aos eixos *x* e y. As retas pontilhadas indicam a projeção ortogonal do vetor (x_1, y_1) sobre as retas *u* e *v*. Essa projeção nos dá as coordenadas (u_1, v_1) em relação aos eixos *u* e *v*.

Ao aplicar propriedades básicas de geometria, vemos que a reta *u* pode ser representada como:

$$u = \{t(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e a reta *v* como:

$$v = \{t(-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Dessa forma, o novo sistema de coordenadas é o sistema representado na base:

$$\widehat{B} = \{(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)), (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))\}.$$

Assim, a transformação mudança de base será dada por:

$$T(x, y) = (x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta), -x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta)).$$

Definindo os vetores $\hat{x} = (x_1, y_1)$, $\hat{v} = (u_1, v_1)$ e a matriz:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

concluímos que a representação nas novas coordenadas pode ser obtida fazendo a multiplicação matricial:

$$\hat{v} = R(\theta)\hat{x}.$$

A matriz $R(\theta)$ é chamada **matriz de rotação**.

Assimile

A matriz

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz de rotação** no espaço bidimensional. Indica a mudança de coordenadas quando os dois eixos são rotacionados por um ângulo θ no sentido anti-horário.

Sugerimos que as seguintes propriedades das matrizes de rotação sejam verificadas (com exemplos, demonstrações matemáticas e interpretações de suas aplicações sobre um vetor qualquer):

- $R(\theta)$ é não singular;
- $\left[R(\theta)\right]^{-1} = R(-\theta)$;
- $\left[R(\theta+\phi)\right] = R(\theta)R(\phi)$;
- $R(0) = I$.

Pesquise mais

Como leitura complementar sobre matrizes mudanças de bases, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. p. 312-326 (disponível na Biblioteca Virtual).

PULINO, Petrônio. Espaços vetoriais. In: ________. **Álgebra Linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 212-216. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 30 jan. 2018.

Sem medo de errar

Vamos voltar ao problema da implementação do sistema de coordenadas do jogo em realidade virtual. Você está encarregado de representar os objetos em relação às coordenadas definidas pela direção em que o jogador olha. Deste modo, consideramos a posição do jogador como a origem do sistema de coordenadas. Em outras palavras, o jogador está na posição $(0,0,0)$.

Representamos a posição de um objeto como $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, em que os eixos graduados estão em metros. O eixo x representa a posição do objeto à frente ou atrás do jogador (à frente do jogador são os valores positivos, enquanto atrás do jogador são os valores negativos). O eixo y representa a posição do objeto em relação aos lados do jogador (à esquerda, temos as coordenadas positivas, enquanto à direita, temos as negativas). Por fim, o eixo *z* representa a posição acima ou abaixo do jogador (coordenadas positivas representam acima do jogador, enquanto coordenadas negativas representam abaixo dele).

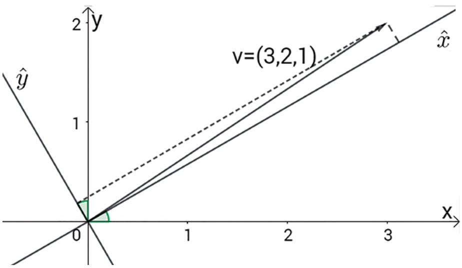
Desta forma, se a posição de um objeto é representada como (x_0, y_0, z_0), entendemos que o objeto está a x_0 metros à frente do jogador, a y_0 metros à esquerda e a z_0 metros acima do jogador.

Como exemplo, o objeto que está 3 m à frente do jogador, 2 m à esquerda e 1 m acima será representado pelo vetor $(3,2,1)$.

Se o jogador movimentar a cabeça, os eixos deverão mudar, o que é equivalente a uma mudança de coordenadas. Note que se o jogador mover a cabeça horizontalmente, as únicas coordenadas alteradas serão *x* e *y*; se o jogador mover a cabeça verticalmente, as coordenadas alteradas serão *x* e *z*; se o jogador mover a cabeça em uma combinação vertical e horizontal, o movimento poderá ser decomposto em dois movimentos, daí podemos, por exemplo, aplicar as mudanças de coordenadas nos eixos *x* e *y* e, depois, aplicá-las nos eixos *x* e *z*.

Vamos considerar um exemplo em que o jogador move a cabeça 30° para a esquerda. Na Figura 3.2, há uma representação bidimensional para esse movimento (apenas para os eixos *x* e *y*).

Figura 3.2 | Representação bidimensional da mudança de coordenadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa representação, os eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são os obtidos pela rotação da cabeça do jogador. Observe que esse movimento é equivalente a uma aplicação de rotação de - 30° no plano *xy*. Ressaltamos que a coordenada em *z* não será afetada, visto que a rotação é apenas no plano.

Dessa forma, as novas coordenadas para o vetor $(3,2,1)$ serão:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & \text{sen}(-30°) & 0 \\ -\text{sen}(-30°) & \cos(-30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Essa aplicação é equivalente a aplicar uma matriz de rotação às coordenadas *x* e *y* e manter a coordenada *z* igual. Assim:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}60 \\ 3{,}23 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, as novas coordenadas serão $(1{,}6;3{,}23;1)$. Como o único movimento foi de rotação, a distância deverá ser a mesma. Para verificar esse fato, veja que a distância do objeto antes da rotação era:

$$\|(3,2,1)\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \text{ m}.$$

Após a rotação, a distância passou a ser:

$$\|(1{,}6;3{,}23;1)\| = \sqrt{1{,}6^2 + 3{,}23^2 + 1^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{2{,}56 + 10{,}43 + 1} \approx \sqrt{13{,}99} \approx 3{,}74 \text{ m}.$$

Logo, a distância manteve-se igual.

Assim, elaboramos uma técnica em que, dadas as coordenadas do objeto antes da rotação e o ângulo em que a cabeça do jogador girou, obtemos as novas coordenadas do objeto. E claro, como o movimento é somente de rotação, a distância entre o jogador e o objeto deve manter-se igual.

Agora, elabore um relatório explicando como fazer rotações horizontais e também as verticais na posição dos objetos; explique ainda como fazer uma rotação qualquer, decompondo a rotação em duas rotações, uma horizontal e outra vertical. Nesse relatório, não se esqueça de comentar todos os passos dados na elaboração desse projeto e todos os usos dos conceitos de álgebra linear, da representação de polinômios, como *n*-uplas, às transformações para realizar as rotações.

Avançando na prática

Rotacionando polinômios

Descrição da situação-problema

Um aluno curioso da disciplina de Álgebra Linear e Vetorial pensou em estender o conceito de rotações para polinômios. Como caso inicial, pretendeu rotacionar a base canônica para o espaço $(P_1,+,\cdot)$ (espaço dos polinômios com grau menor que ou igual a um, com operações adição e multiplicação por escalar usual) em um ângulo de 10°, no sentido anti-horário do primeiro elemento da base. Como ele pode realizar tal façanha? Qual é a base obtida por essa rotação?

Resolução da situação-problema

Seja $p(t)=\alpha_1+\alpha_2 t\in P_1$. Como a base canônica é $B=\{1,t\}$, a representação de p, nessa base, é dada por:

$$[p]_B=(\alpha_1,\alpha_2).$$

Seja $\hat{B}$ a base obtida após a rotação de 10°. Considere a matriz $[I]_B^{\hat{B}}$ mudança de base de B para $\hat{B}$, por definição:

$$[I]_B^{\hat{B}}[p]_B=[p]_{\hat{B}}.$$

Note que a rotação de B no espaço $(P_1,+,\cdot)$ deve ser equivalente à rotação de $\{e_1,e_2\}$ no espaço das 2-uplas reais, logo:

$$[I]_B^{\hat{B}}=\begin{bmatrix}\cos(10°) & \text{sen}(10°)\\ -\text{sen}(10°) & \cos(10°)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0,985 & 0,174\\ -0,174 & 0,985\end{bmatrix}.$$

Assim, aplicando essa transformação nos elementos da base canônica de P_1, a base rotacionada será dada por $\widehat{B} = \{0,985 - 0,174t; 0,174 + 0,985t\}$.

Para obter a representação de qualquer polinômio com grau menor que ou igual a *1* na base $\widehat{B}$, portanto, devemos primeiro representá-lo em *B* e aplicar a transformação $[I]_B^{\widehat{B}}$.

Agora, faça um relatório justificando os passos e argumentando como devem ser os passos para outros ângulos.

Faça valer a pena

1. Considere o vetor $(1,0,0)$, representado pela base canônica em $\mathbb{R}^3$.

Aos vetores da base canônica, são aplicadas as seguintes rotações:

1. Rotação de 45° (no sentido anti-horário), em torno do eixo *z*.

2. Rotação de 30° (no sentido anti-horário), em torno do eixo *y* (após a primeira rotação).

Escolha a alternativa correspondente ao vetor $(1,0,0)$, representado nos novos eixos após a rotação:

a) $(1,0,0)$.

b) $(0,1,0)$.

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

d) $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

e) $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Considere $(P_3, +, \cdot)$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais, com grau menor que ou igual a *3*, em que as operações $+$ e $.$ são, respectivamente, a adição e a multiplicação de polinômios por escalares usuais.

Considere o vetor $[p]_B = (1,1,1,1)$ a representação de $p \in P_3$ na base $B = \{1-t, 1+t, t^2+1, t^3-1\}$ e a base $\widehat{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ para P_3.

Analise as seguintes afirmações:

1. $[p]_B$ é a representação de $p(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ na base B.

2. A representação de p na base $\hat{B}$ é $[p]_{\hat{B}} = (1, -1, 0, 2)$.

3. A matriz mudança de base de B para $\hat{B}$ é $[I]_B^{\hat{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmativas anteriores:

a) Apenas 1 está correta.

b) Apenas 2 está correta.

c) Apenas 3 está correta.

d) Apenas 1 e 2 estão corretas.

e) Todas estão corretas.

3. Considere um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita; B e C duas bases para esse espaço e, ainda, que $[I]_B^C$ é a matriz mudança de base de B para C, satisfazendo a propriedade:

$$[I]_B^C \cdot [I]_B^C \cdot [I]_B^C = I.$$

Classifique as seguintes afirmativas e sua relação:

I. A matriz mudança de base de C para B é dada por $[I]_C^B = [I]_B^C \cdot [I]_B^C$

PORQUE

II. $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmativas e sua relação:

a) I e II estão corretas e II justifica I.

b) I e II estão corretas, mas II não justifica I.

c) I está correta e II está errada.

d) I está errada e II está correta.

e) I e II estão erradas.

Referências

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

CRUZ, Luiz Francisco da. Espaços vetoriais. In: ______. **Introdução ao estudo da Álgebra Linear**. Bauru: Unesp. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/AL_CAP_02.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2018.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear.** 9. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

PULINO, Petrônio. Produto interno. In: ______. **Álgebra linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. p. 284-310. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 29 jan. 2018.

Transformações lineares

Convite ao estudo

Nesta unidade, estudaremos um dos tópicos mais importantes da Álgebra Linear, as transformações lineares, que abrangem as relações entre dois espaços vetoriais. Além disso, você obterá outras informações a respeito de espaços vetoriais usando essas transformações.

Para ilustrar a aplicabilidade das técnicas e dos conceitos estudados nesta unidade, suponha que você tenha sido contratado por uma empresa de análise de dados, que é responsável pela identificação de possíveis eleitores de um candidato à presidência por meio de dados em redes sociais. Identificado um potencial eleitor, ele deve ser classificado em diferentes grupos, para que se escolha a melhor abordagem a ser empregada com ele.

Os dados de cada usuário são armazenados como um vetor do $\mathbb{R}^n$, em que n é a quantidade de dados que estão sendo analisados. O tamanho do vetor não é relevante, mas, sim, a relação de um dado ao outro, ou seja, a relação entre as componentes do vetor que representa os dados.

A cada um dos diferentes grupos é associado um vetor do $\mathbb{R}^n$, representando o eleitor ideal desse grupo. Após alguma manipulação algébrica, a empresa consegue modelar esses vetores, de modo que fiquem ortonormais entre si.

Você precisa responder a duas perguntas básicas em seu trabalho:

1. Como modelar uma transformação que recebe como entrada o vetor de dados dos potenciais eleitores e classificá-los em possíveis candidatos ou não?

2. Existe alguma maneira de representar a transformação definida no passo anterior como uma versão simplificada que considera o ângulo entre o vetor de dados do eleitor em potencial e o vetor de dados dos representantes ideais de cada grupo?

Esse problema é uma simplificação de estratégias que estão sendo muito aplicadas na atualidade.

Nesta unidade, veremos algumas ferramentas básicas para o tratamento de dados em larga escala. Na Seção 4.1, apresentaremos as transformações lineares e algumas de suas propriedades básicas; na Seção 4.2, abordaremos os dois principais espaços vetoriais associados às transformações lineares, a imagem e o núcleo da transformação; na Seção 4.3, trataremos dos conceitos de autovalores e de autovetores e do processo de diagonalização de matrizes (transformações).

Seção 4.1

Transformação linear

Diálogo aberto

Na unidade anterior, estudamos os conceitos básicos de espaços vetoriais. Nesta seção, começaremos a estudar ferramentas de manipulação dos elementos dos espaços vetoriais, as quais são as transformações lineares. Com elas, é possível levar elementos de um espaço vetorial a outro, relacionar dimensões de espaços vetoriais, entre outras aplicações.

A empresa de análise de dados está criando um protótipo para identificar possíveis votos para um candidato à presidência. Esse modelo leva em conta *4* dados de cada eleitor e classifica-os em *4* grupos:

1. Não votará, pois discorda das posições políticas do candidato.

2. Não votará, pois desgosta da representação pública do candidato.

3. Possível candidato, mas desgosta da representação pública do candidato.

4. Possível candidato, pois gosta da representação pública do candidato.

Para cada um desses grupos, é associado um vetor $v_i \in \mathbb{R}^4$ ao representante ideal do grupo. Suponha que, neste caso, os vetores são:

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$v_2 = (0,1,0,0),$$

$$v_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$v_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Pelo modelo aplicado pela empresa, o cálculo da distância entre o vetor, com os dados do eleitor em potencial, e os vetores de classificação é aplicável (como dito, o importante é a relação entre cada componente, e não o tamanho do vetor). Assim, foi estabelecido que se deve calcular alguma relação entre o ângulo do vetor de dados do candidato e o vetor de dados de cada grupo. Você deve modelar uma transformação linear (por motivos de eficiência computacional) que, em módulo, indique com qual grupo o eleitor mais se identifica.

Nesta seção, veremos também características importantes das transformações lineares e formas de obtê-las.

Siga para o item Não pode faltar, a fim de adquirir os conhecimentos necessários para resolver o problema a seguir e os demais.

Não pode faltar

Sejam $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial, com dimensão finita n, e B uma base para esse espaço. Na Unidade 3, apresentamos a transformação:

$$\begin{aligned} I_B : \quad & V \to \mathbb{R}^n \\ & v \to [v]_B \end{aligned},$$

que leva cada elemento de V a um elemento de $\mathbb{R}^n$. Na unidade anterior, classificamos essa transformação como **transformação linear**. Primeiramente, apresentaremos a definição de transformação e, em seguida, reapresentaremos a definição de transformação linear. Esta seção é destinada aos estudos de algumas de suas propriedades mais relevantes.

Assimile

Sejam $(V,+,\cdot)$ e $(U,\oplus,\odot)$ espaços vetoriais no corpo K. Definimos uma **transformação**:

$$T : V \to U$$

como uma regra que associa cada um dos elementos de V a um elemento de U. Denotamos o conjunto V de **domínio** de T, indicado por:

$$V = \text{dom}(T)$$

e denotamos o conjunto U de **contradomínio** de T, indicado por:

$$U = \text{Cdom}(T).$$

Dado $v \in V$, denotamos por $T(v) \in U$ sua correspondência pela transformação T. Lemos "transformação T avaliada em v", ou "T de v".

Se, para cada $u \in U$, existir $v \in V$, tal que $u = T(v)$, denominaremos a transformação de **sobrejetora**.

Se, para todo $v_1, v_2 \in V$, com $v_1 \neq v_2$, tivermos $T(v_1) \neq T(v_2)$, a transformação será **injetora**.

Se a transformação for injetora e sobrejetora, será **bijetora**.

Chamaremos uma transformação T de **linear** se, para todo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$, tivermos:

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$
- $T(\alpha \cdot v_1) = \alpha \odot T(v_2)$.

Obs.: note que as operações adição e multiplicação realizadas no lado esquerdo dessas relações são no espaço V (por isso, o uso dos símbolos $+$ e $\cdot$), enquanto as operações realizadas no lado direito são no espaço U (por isso, o uso dos símbolos $\oplus$ e $\odot$).

Exemplificando

Sejam $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial de dimensão n e B uma base para esse espaço. Na unidade anterior, mostramos que $I_B : V \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear. Mostraremos agora que é bijetora:

- **Injetora**: sejam $v_1, v_2 \in V$, suponha $I_B(v_1) = I_B(v_2)$, isto é,

$$I_B(v_1) - I_B(v_2) = \mathbf{0},$$

mas como I_B é linear, então:

$$I_B(v_1 - v_2) = I_B(v_1) - I_B(v_2) = \mathbf{0},$$

ou seja, o vetor $v_1 - v_2$ é representado por uma combinação linear, com coeficientes nulos dos elementos da base, ou seja, $v_1 - v_2 = 0$. Com isso, acabamos de verificar que $I_B(v_1) = I_B(v_2)$ se, e somente se, $v_1 = v_2$. Em outras palavras, se $v_1 \neq v_2$, então $I_B(v_1) \neq I_B(v_2)$.

Portanto, I_B é injetora.

- **Sobrejetora**: seja $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Denote $B = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Veja que:

$$v = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \cdots + u_n w_n \in V$$

e o vetor *u* é a representação de *v* na base *B*, ou seja,

$$I_B(v) = u.$$

Logo, mostramos que I_B é sobrejetora, pois, para qualquer vetor $u \in \mathbb{R}^n$, existe $v \in V$, tal que $u = I_B(v)$.

- **Bijetora**: como I_B é injetora e sobrejetora, portanto é bijetora.

Uma transformação linear muito importante é a transformação identidade. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial, definimos a transformação identidade como:

$$\begin{aligned} I: \ & V \to V \\ & v \to v \end{aligned},$$

ou seja, a função identidade é tal que, dado $v \in V$, temos $I(v) = v$. Sugerimos que demonstre que *I* é transformação linear bijetora.

Sejam $(V, +_V, \cdot_V)$, $(U, +_U, \cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo *K*; $T : V \to U$ e $S : V \to U$ são transformações. Definimos a soma de transformações como:

$$(T + S)(v) = T(v) +_U S(v), \text{ para todo } v \in V.$$

Sendo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$, se *T* e *S* forem lineares, então:

- $(T + S)(v_1 +_V v_2) = T(v_1 +_V v_2) +_U S(v_1 +_V v_2) =$
  $= T(v_1) +_U T(v_2) +_U S(v_1) +_U S(V_2),$

ou seja, $(T + S)(v_1 +_V v_2) = (T + S)(v_1) +_U (T + S)(v_2)$.

- $(T + S)(\alpha \cdot_V v_1) = T(\alpha \cdot_V v_1) + S(\alpha \cdot_V v_1) =$
  $= \alpha \cdot_U T(v_1) + \alpha \cdot_U S(v_1) = \alpha \cdot_U (T + S)(v_1).$

Logo, a soma de transformações lineares é linear.

Definimos, também, a operação multiplicação por escalares para transformações, sendo $a \in K$:

$$\left(a \cdot T\right)(v) = a \cdot_U T(v), \text{ para todo } v \in V.$$

Sendo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$, se T for linear, então:

- $\left(a \cdot T\right)(v_1 +_V v_2) = a \cdot_U T(v_1 +_V v_2) = a \cdot_U \left[T(v_1) +_U T(v_2)\right] =$
  $= a \cdot_U T(v_1) +_U a \cdot_U T(v_2),$

ou seja, $\left(a \cdot T\right)(v_1 +_V v_2) = \left(a \cdot T\right)(v_1) +_U \left(a \cdot T\right)(v_2)$.

- $\left(a \cdot T\right)(\alpha \cdot_V v_1) = a \cdot_U T(\alpha \cdot_V v_1) = a \cdot_U \alpha \cdot_U T(v_1) =$
  $= \alpha \cdot_U a \cdot_U T(v_1) = \alpha \cdot_U \left(a \cdot T\right)(v_1).$

Logo, o produto de transformação linear por escalar é transformação linear.

Defina a transformação:

$$\begin{aligned} 0_{V,U} :\ & V \to U \\ & v \to 0_U \end{aligned},$$

ou seja, a transformação em que todo elemento de V é associado ao elemento nulo de U.

Veja que essa transformação é linear, pois, para quaisquer $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$, temos:

- $0_{V,U}(v_1 +_V v_2) = 0_U = 0_U +_U 0_u = 0_{V,U}(v_1) +_U 0_{V,U}(v_2)$ e
- $0_{V,U}(\alpha \cdot_V v_1) = 0_U = \alpha \cdot_U 0_U = \alpha \cdot_V 0_{V,U}(v_1)$.

Além disso, $\left(T + 0_{V,U}\right)(v) = T(v) +_U 0_{V,U}(v) = T(v) +_U 0_U = T(v)$, ou seja, a transformação $0_{V,U}$ é o elemento nulo da adição para transformações lineares.

Perceba também que $\left(1_U \cdot T\right)(v) = 1_U \cdot_U T(v) = T(v)$, isto é, o elemento neutro da multiplicação do espaço U é o elemento neutro da multiplicação para transformações lineares.

Defina o conjunto $L[V,U]$ como o conjunto de todas as transformações lineares, com domínio V e contradomínio U. Usando as operações soma e multiplicação por escalares definidas anteriormente e os elementos nulo da soma e neutro da multiplicação, podemos mostrar que $L[U,V]$ é um espaço vetorial (demonstre!).

Além dessas operações, esse tipo de espaço possui a operação produto (ou composição) de transformações.

Assimile

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$, $(U,+_U,\cdot_U)$ e $(W,+_W,\cdot_W)$ espaços vetoriais no corpo K; $T:V \rightarrow U$ e $S:U \rightarrow W$ são transformações. Definimos a operação **composição** de transformações lineares como:

$$S_oT(v) = S\left(T(v)\right), \text{ para todo } v \in V.$$

Note que a transformação S_oT leva elementos de V até elementos de W.

Suponha que T e S são lineares. Sendo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in K$, veja que:

$$S_oT(v_1 +_V v_2) = S\left(T(v_1 +_V v_2)\right).$$

Como T é linear, então:

$$S_oT(v_1 +_V v_2) = S\left(T(v_1) +_U T(v_2)\right).$$

Como S também é linear, então:

$$S_oT(v_1 +_V v_2) = S\left(T(v_1)\right) +_W S\left(T(v_2)\right) = S_oT(v_1) +_W S_oT(v_2).$$

Veja também que:

$$S_oT(\alpha \cdot_V v_1) = S\left(T(\alpha \cdot_V v_1)\right).$$

Como T é linear, então:

$$S_oT(\alpha \cdot_V v_1) = S\left(\alpha \cdot_U T(v_1)\right).$$

Como S também é linear, então:

$$S_oT(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_W S\left(T(v_1)\right) = \alpha \cdot_W S_oT(v_1).$$

Logo, a **composição de transformações lineares é linear**.

Reflita

Sejam $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial de dimensão n e B uma base para esse espaço, defina $I^B : \mathbb{R}^n \to V$ uma transformação em que cada $u \in \mathbb{R}^n$ é associado a um elemento $v \in V$, tal que $u = [v]_B$, ou seja, u é a representação de v na base B. Essa transformação é linear? É bijetora?

Qual é o resultado da transformação $I^B{}_o I_B$? E o da transformação $I_{B\,o} I^B$?

Assimile

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais; $T : V \to U$ e $S : U \to V$ são transformações. Se as transformações T e S satisfizerem as condições:

$$S_o T = I \text{ (identidade no espaço } V\text{)}$$

e

$$T_o S = I \text{ (identidade no espaço } U\text{)},$$

T será transformação **inversa** de S. Neste caso, S será uma transformação **invertível**.

Note que se T for inversa de S, então S será inversa de T.

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo K e $T : V \to U$ uma transformação com inversa $S : U \to V$, vamos mostrar que T é bijetora.

- **Injetora:** sejam $v_1, v_2 \in V$, tais que $u = T(v_1) = T(v_2) \in U$, então $S(u) = S_o T(v_1) = v_1$; por outro lado, $S(u) = S_o T(v_2) = v_2$, logo $v_1 = v_2$. Assim, mostramos que $T(v_1) = T(v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2$. Em outras palavras, T é injetora.

- **Sobrejetora:** seja $u \in U$, denote $v = S(u) \in V$, então $T(v) = T_o S(u) = u$. Assim, mostramos que, para todo $u \in U$, existe $v \in V$, tal que $T(v) = u$. Em outras palavras, T é sobrejetora.

Como T é injetora e sobrejetora, portanto é bijetora. A recíproca dessa afirmação é verdadeira; assim, podemos afirmar que T é invertível se, e somente se, T for bijetora.

Agora, suponha que, além de invertível, T é linear. Mostraremos que sua inversa também é linear. Sendo $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in K$, então, como T é sobrejetora, existem $v_1, v_2 \in V$, tais que $u_1 = T(v_1)$ e $u_2 = T(v_2)$. Daí:

$$S\left(u_1 +_U u_2\right) = S\left(T(v_1) +_U T(v_2)\right) = S\left(T(v_1 +_V v_2)\right) =$$
$$= S_o T\left(v_1 +_V v_2\right) = v_1 +_V v_2 = S(u_1) +_V S(U_2).$$

Veja também que:

$$S\left(\alpha \cdot_U u_1\right) = S\left(\alpha \cdot_U T(v_1)\right) = S\left(T(\alpha \cdot_V v_1)\right) =$$
$$= S_o T(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_V v_1 = \alpha \cdot_V S(u_1).$$

Portanto, a função *S*, inversa de *T*, também é linear.

Suponha que $P : U \to V$, tal que $P_o T(v) = v$, para todo $v \in V$, e $T_o P(u) = u$, para todo $u \in U$. Sendo $u \in U$ e $v \in V$, tais que $T(v) = u$ (isso é válido, pois *T* é bijetora), então:

$$P(u) = P\left(T(v)\right) = P_o T(v) = v = S_o T(v) = S\left(T(v)\right) = S(u).$$

Assim, $P = S$, ou seja, se *T* for invertível, sua **inversa será única**. Devido a esse fato, denotamos a função inversa de *T* como T^{-1}.

Exemplificando

Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, queremos verificar se *T* é linear. Para isso, tome $\left(x_1, y_1\right) \in \mathbb{R}^2$, $\left(x_2, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que:

$$T\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$T\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2).$$

E também:

$$T\left(\alpha(x_1,y_1)\right)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\alpha T\left(x_1,y_1\right).$$

Portanto, T é linear.

Veja que a matriz que define essa transformação é invertível:

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2\neq 0.$$

A inversa dessa matriz é dada por:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \text{(verifique!)}$$

Defina $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, tal que:

$$S(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

Veja que:

$$T_o S(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=I_{2\times 2}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(x,y)$$

e

$$S_o T(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=I_{2\times 2}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(x,y).$$

Portanto, $S=T^{-1}$, ou seja, T é invertível.

Reflita

Seja $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definida por $T(v)=Av$, em que $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, a transformação T é linear? A transformação T é invertível? Se a resposta for negativa, qual(is) condição(ões) deve(m) ser acrescida(s) sobre A para que T seja invertível?

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo $\mathbb{R}$, com dimensões finitas *n* e *m*, respectivamente. Defina B_V e B_U bases para os espaços *V* e *U*, respectivamente. Tome $T: V \to U$ uma transformação linear; $v \in V$ e $u \in U$, tais que $T(v) = u$, e suas representações nas bases B_V e B_U são dadas por $[v]_{B_V}$ e $[u]_{B_U}$, respectivamente. Definimos a matriz $[T]_{B_V}^{B_U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como a **matriz da transformação** ***T*** **da base** B_V **até a base** B_U, tal que $[T]_{B_V}^{B_U}$ satisfaz:

$$[T]_{B_V}^{B_U}[v]_{B_V} = [u]_{B_U}.$$

Note que $[T]_{B_V}^{B_U}$ descreve completamente *T*. Um exemplo desse tipo de matriz foi apresentado na Unidade 3, quando trabalhamos com a **matriz mudança de base**.

Exemplificando

Considere o espaço P_2 dos polinômios de grau menor que ou igual a *2*, com as operações usuais para polinômios, e o espaço $\mathbb{R}^{1\times 4}$, com as operações usuais para matrizes. Considere a base canônica $B_1 = \left\{1, t, \frac{t^2}{2}\right\}$, para P_2, e a base canônica $B_2 = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{1,4}\}$, para $\mathbb{R}^{1\times 4}$, em que $E_{i,j} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ é a matriz com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento na posição *i, j*, cujo valor é *1*.

Considere a transformação $T: P_2 \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ definida por:

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_0 + a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Deixamos como exercício a demonstração de que essa transformação é linear.

Veja que a representação de $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, na base B_1, é:

$$[p]_{B_1} = (a_0, a_1, 2a_2).$$

E a representação de $A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_0 + a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, na base B_2, é:

$$[A]_{B_2} = (a_0, 0, a_0 + a_1, a_2).$$

Dessa matriz $[T]_{B_1}^{B_2} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ da transformação T satisfará:

$$[T]_{B_1}^{B_2}[p]_{B_1} = [A]_{B_2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ a_0 + a_1 \\ \dfrac{a_2}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos reescrever esse sistema como:

$$a_0 \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \\ c_{42} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \\ c_{43} \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sejam $(V, +_V, \cdot_V)$ e $(U, +_U, \cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo $\mathbb{R}$, com dimensões finitas n e m, respectivamente, B_V e B_U bases para os espaços V e U, respectivamente, e $T: V \to U$ uma transformação linear com matriz de transformação da base B_V até a base B_U, dada por $[T]_{B_V}^{B_U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pelo exemplo anterior, vemos que $[T]_{B_V}^{B_U}$ é a matriz em que a i-ésima coluna é a da transformação do i-ésimo elemento de B_V, representado na base B_U, ou seja, se $v_i \in V$ é o i-ésimo elemento de B_V, a i-ésima coluna de $[T]_{B_V}^{B_U}$ é dada por $[T(v_i)]_{B_U}$.

Como T está unicamente definida por sua matriz de transformação, dados $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a base para V e $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$, existe uma única transformação linear $T: V \to U$, tal que:

$$T(v_i) = u_i.$$

Em outras palavras, T **está unicamente determinada por seus valores em uma base**.

Considerando que $[T]_{B_V}^{B_U}$ é invertível, ou seja, existe $\left([T]_{B_V}^{B_U}\right)^{-1}$, defina uma transformação linear $S:U \to V$, cuja matriz da base B_U até a base B_V é dada por:

$$[S]_{B_U}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_U}\right)^{-1}.$$

Tome $u \in U$, então:

$$[T_o S(u)]_{B_U} = [T]_{B_V}^{B_U} [S]_{B_U}^{B_V} [u]_{B_U} = [T]_{B_V}^{B_U} \left([T]_{B_V}^{B_U}\right)^{-1} [u]_{B_U} = [u]_{B_U},$$

ou seja,

$$T_o S(u) = u.$$

Com argumento análogo, é possível verificar que $S_o T(v) = v$, para todo $v \in V$, ou seja, $S = T^{-1}$, portanto:

$$\left([T]_{B_V}^{B_U}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{B_U}^{B_V}.$$

Pesquise mais

Transformações lineares é um tópico de suma importância na álgebra linear, podendo ser abordado sob diversos pontos de vista. Sugerimos como leitura complementar os capítulos indicados dos seguintes livros:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. Cap. 10. p. 459-464 (disponível na Biblioteca Virtual).

PULINO, Petrônio. Transformações lineares. In: ________. **Álgebra linear e suas aplicações**: notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. Cap. 4. p. 219-225. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 15 fev. 2018.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você foi contratado por uma empresa de análise de dados que classifica eleitores em uma rede social como potenciais eleitores ou não de um candidato. Além disso, tal empresa classifica os referidos eleitores nos grupos:

1. Não votará, pois discorda das posições políticas do candidato.

2. Não votará, pois desgosta da representação pública do candidato.

3. Possível eleitor, mas desgosta da representação pública do candidato.

4. Possível eleitor, pois gosta da representação pública do candidato.

Os dados dos eleitores são armazenados na forma de um vetor numérico. Devido à forma de tratamento inicial aplicado aos dados, decidiu-se que deveriam ser feitas comparações em relação ao ângulo com os vetores de dados dos representantes ideais de cada grupo.

Lembre-se de que os ângulos entre os vetores normalizados podem ser calculados pelo produto escalar. Como podemos criar uma transformação linear que calcula o produto escalar entre o vetor de interesse e os vetores dos representantes de cada grupo?

Assim, dado o vetor normalizado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, com dados de um eleitor, devemos comparar os valores:

$$x \cdot v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} x_3 - \frac{\sqrt{3}}{3} x_4,$$

$$x \cdot v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0,1,0,0) = x_2,$$

$$x \cdot v_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4,$$

$$x \cdot v_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4.$$

Perceba que não estamos comparando os resultados entre eleitores diferentes, mas somente os resultados entre os possíveis grupos aos quais o eleitor deve pertencer. Com isso, queremos dizer que x não precisa necessariamente estar normalizado. Daí, dado o vetor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, com dados de um eleitor (normalizado ou não), podemos estabelecer o vetor y como:

$$y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Se x for paralelo ao vetor v_j (se o eleitor representado por x tiver as mesmas características que o candidato ideal j), sua coordenada j será máxima (em módulo) e as restantes serão nulas (verifique!). Assim, podemos comparar os valores (em módulo) das coordenadas do vetor y, porque a que tiver maior valor indicará em qual grupo devemos inserir o eleitor.

Como exemplo numérico, suponha que o eleitor possua características dadas pelo vetor $x = (1,1,1,1)$, então:

$$y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Como o maior elemento (em módulo) está na quarta coordenada, o eleitor identifica-se mais com o grupo 4, ou seja, o grupo dos possíveis eleitores do candidato que gostam da representação pública dele.

Note que definimos uma transformação linear:

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ & x \to Ax \end{aligned},$$

em que:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Já que a transformação linear para o protótipo foi elaborada, cabe a você elaborar um relatório que explique como será a transformação para o caso de n grupos diferentes, testando m características para cada eleitor. Uma simplificação razoável de se fazer (que utilizamos nesse exemplo) é pensar que os vetores que representam os eleitores ideais para cada grupo são ortonormais entre si. Use essa simplificação e elabore o relatório.

Avançando na prática

Transformando matrizes em vetores

Descrição da situação-problema

Você, como aluno aplicado do curso de Álgebra Linear e Vetorial, sabe que matrizes podem ser representadas por vetores. Contudo, questiona-se: dada uma matriz A no espaço das matrizes $m \times n$, existe alguma transformação linear que represente a soma $A+B$ como vetor, em que B é uma matriz $m \times n$?

Resolução da situação-problema

Já sabemos que matrizes de ordem $m \times n$ podem ser representadas como vetores de $\mathbb{R}^{mn}$, assim, dada uma base $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{mn}\}$ para o espaço $\mathbb{R}^{m\times n}$, existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_{mn}$, tais que:

$$[A]_V = (a_1, a_2, \cdots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

E, também, dada $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, existem escalares $b_1, b_2, \cdots, b_{mn}$, tais que:

$$[B]_V = (b_1, b_2, \cdots, b_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

E, ainda, devido à linearidade da transformação mudança de base, temos:

$$[A+B]_V = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_{mn} + b_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Podemos representar a soma da matriz *A* com outra matriz *B* pela transformação:

$$T_A(B) = [A+B]_V = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_{mn} + b_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

No caso em que $A = \mathbf{0}$, vemos que essa transformação nada mais é do que a própria representação na base *V*, logo é uma transformação linear.

Suponha $A \neq \mathbf{0}$, veja que:

$$T_A(\mathbf{0}) = [A]_V \neq (0, 0, \cdots, 0).$$

Logo, essa transformação não pode ser linear, uma vez que toda transformação linear leva o vetor zero de um espaço ao vetor zero de outro espaço.

Elabore um resumo justificando e exemplificando os comentários feitos durante essa demonstração. Nesse resumo, acrescente se existe uma transformação linear $S_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{mn}$, tal que $S_A(\alpha) = \alpha [A]_V$, para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Faça valer a pena

1. Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau menor que ou igual a 3 com as operações usuais. Defina a transformação:

$$\begin{aligned} T: \quad & P_3 \to \mathbb{R} \\ & p \to p(0) \end{aligned}.$$

Sobre essa transformação, analise as seguintes afirmações:

I. $T(0) = 0$.

II. $T(p+q) = T(p) + T(q)$, para todo $p, q \in P_3$.

III. Se $T(p) = 0$, então $p = 0$.

IV. *T* é transformação linear.

Assinale a alternativa que classifica corretamente essas afirmações:
a) Apenas as afirmações I, II e IV são verdadeiras.
b) Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.
c) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

2. Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$, $(U,+_U,\cdot_U)$ e $(W,+_W,\cdot_W)$ espaços vetoriais no corpo K. Considere $T:V \to U$, $S:U \to W$ e $R:W \to V$ transformações lineares invertíveis, tais que:

$$R_o S_o T(v) = v\text{, para todo } v \in V$$

e

$$S_o T_o R(w) = w\text{, para todo } w \in W\text{ .}$$

Analise as afirmações:

I. $R^{-1} = (S_o T)$.

II. $(S_o T)^{-1} = T^{-1}{}_o S^{-1}$.

III. Se $R(w) = v$, tal que $T(v) = 0_U$, então $w = 0_W$.

Sobre as afirmações, é correto afirmar:
a) I, II e III estão corretas.
b) Apenas I e II estão corretas.
c) Apenas I e III estão corretas.
d) Apenas II e III estão corretas.
e) Apenas I está correta.

3. Considere um espaço vetorial $(V,+,\cdot)$ no corpo $\mathbb{R}$, de dimensão finita n, munido do produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Analise as seguintes afirmações, indicando V para verdadeira e F para falsa:

( ) A transformação $T_v : V \to \mathbb{R}$, tal que $T_v(u) = \langle u,v \rangle$, para todo $u \in V$, é uma transformação linear.

( ) A transformação T_v é invertível.

( ) Toda transformação linear $T:V \to \mathbb{R}$ pode ser representada como $T(u) = \langle u,w \rangle$, para todo $u \in V$, e algum $w \in V$ fixo para cada transformação.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmativas:
a) V – V – V.
b) V – V – F.
c) V – F – V.:d) F – V – V.
e) V – F – F.

Seção 4.2

Núcleo e imagem de transformações

Diálogo aberto

Lembre-se de que no início desta unidade consideramos que você foi contratado por uma empresa de análise de dados interessada nos dados disponíveis em redes sociais, para caracterizar possíveis eleitores a um candidato à presidência.

No modelo-teste desenvolvido na seção anterior, você foi capaz de criar uma transformação linear, em que se pode estimar (comparativamente) a qual grupo um eleitor melhor se enquadra.

A empresa considera que os eleitores que não votarão no candidato de forma alguma não devem ser comparados em grupos; devem, simplesmente, ser excluídos das comparações.

Assim, não utilizará os representantes dos grupos 1 e 2 apresentados na situação-problema da seção anterior. Você é responsável por definir o conjunto dos dados dos eleitores que não votarão de forma alguma no candidato, ou seja, o conjunto dos dados que não serão relevantes para as campanhas de marketing. Qual será esse conjunto? Como o definir? Qual será o conjunto com as informações do grupo a que cada eleitor pertence?

Os dados para esse modelo são os mesmos utilizados na seção anterior.

Nesta seção, veremos o conjunto-núcleo de uma transformação linear, o qual nos diz quais vetores são levados ao valor nulo por meio da transformação linear. Além disso, analisaremos o conjunto-imagem de uma transformação linear e veremos quais os vetores que podem ser representados pela transformação. Apesar de serem simples, esses conjuntos fornecem uma quantidade enorme de informações sobre a transformação linear.

Bons estudos!

Não pode faltar

Na seção anterior, trabalhamos com o conceito de **transformações lineares**. Alguns conjuntos associados a essas transformações são de especial importância. O primeiro que estudaremos é **núcleo** de uma transformação.

Assimile

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo K e $T:V\to U$ uma transformação. Definimos o **núcleo** de T como o conjunto:

$$\mathcal{N}(T)=\{v\in V \mid T(v)=0_U\}$$

Ou seja, o núcleo de T é o subconjunto de V cujos elementos são associados ao vetor nulo de U pela transformação T.

Veja que se T é linear, então $0_V\in\mathcal{N}(T)$. Para provar isso, tome $v\in V$ qualquer, então:

$$T(0_V)=T(v+_V(-v))=T(v)+_U\left(-T(v)\right)=0_U$$

Tome $v_1,v_2\in\mathcal{N}(T)$, então:

$$T(v_1+_V v_2)=T(v_1)+_U T(v_2)=0_U+_U 0_U=0_U$$

Ou seja,

$$v_1+_V v_2\in\mathcal{N}(T)$$

Considere, ainda, $\alpha\in K$, então:

$$T(\alpha\cdot_V v_1)=\alpha\cdot_U T(v_1)=\alpha\cdot_U 0_U=0_U,$$

ou seja,

$$\alpha\cdot_V v_1\in\mathcal{N}(T)$$

Com isso, demonstramos que o **núcleo de T** é subespaço de V.

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo K e $T:V\to U$ uma transformação linear invertível. Tome $v\in\mathcal{N}(T)$, ou seja, $T(v)=0_U$, como T é invertível, existe T^{-1}, portanto $v=T_o^{-1}T(v)=T^{-1}(0_U)=0_V$,

ou seja, se T for transformação linear invertível, $\mathcal{N}(T)=\{0_V\}$.

Considere agora o caso inverso:

$T: V \to U$ uma transformação linear, tal que $\mathcal{N}(T) = \{0_V\}$.

Suponha que $v_1, v_2 \in V$, tal que $T(v_1) = T(v_2)$, o que implica que:

$$T(v_1) - T(v_2) = 0_U \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0_u$$

Logo, $v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(T)$, como $\mathcal{N}(T) = \{0_V\}$, então $v_1 - v_2 \in 0_V \Leftrightarrow v_1 = v_2$. Com isso, mostramos que **transformações lineares com núcleo trivial são injetoras**.

Exemplificando

Considere os espaços dos polinômios de grau menor que ou igual a dois $(P_2, +, \cdot)$ e das matrizes de ordem 2×2 $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$.

(Para facilitar a notação, denotaremos as operações dos polinômios pelo mesmo símbolo que as operações das matrizes.)

Considere a transformação linear:

$$\begin{aligned} T: \quad & P_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \to \begin{bmatrix} a_0 - a_2 & a_0 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Queremos encontrar o núcleo dessa transformação, ou seja, queremos saber quais polinômios de grau menor que ou igual a *2* satisfazem:

$$T(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, denotando $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, precisamos resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} a_0 - a_2 & a_0 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_0 - a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \\ a_2 - a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_0 = a_1 \\ a_2 = a_1 \end{cases},$$

ou seja, qualquer polinômio que tenha todos os coeficientes iguais.

Então, o núcleo da transformação é:

$$\mathcal{N}(T) = \{p(t) = a + at + at^2 : a \in \mathbb{R}\}$$

Pelos resultados anteriores, como o núcleo da transformação não é o conjunto $\{0\}$, a transformação não é injetora, portanto não admite inversa.

Note que sempre que o núcleo de uma transformação for um espaço não trivial, chegaremos a um sistema de equações possível e indeterminado. Isso ocorre porque se o núcleo é não trivial, existem infinitos vetores que satisfazem a equação $T(v) = 0$.

Outro conjunto definido por meio de transformações lineares, que é bastante importante, é o **conjunto imagem**.

Assimile

Sejam $(V, +_V, \cdot_V)$ e $(U, +_U, \cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo K e $T : V \to U$ uma transformação. Definimos a **imagem** de T como o conjunto:

$$\text{Im}(T) = \{u \in V \mid \textbf{existe } v \in V : T(v) = u\}$$

Ou seja, imagem de uma transformação é o subconjunto de U composto de todos os elementos que podem ser atingidos pela transformação.

Se T é linear, então $0_U \in Im(T)$. Para verificar esse fato, tome $v \in V$ qualquer. Note que $0_V = 0 \cdot_V v$, então:

$$T(0_V) = T(0 \cdot_V v) = 0 \cdot_U T(v) = 0_U$$

Logo, existe elemento em V cuja transformação atinge 0_U.

Suponha que $u_1, u_2 \in Im(T)$, ou seja, existem $v_1, v_2 \in V$, tais que $T(v_1) = u_1$ e $T(v_2) = u_2$. Veja que:

$$T(v_1 +_V v_2) = T(v_1) +_U T(v_2) = u_1 +_U u_2,$$

ou seja, $u_1 +_U u_2 \in Im(T)$.

Tome $\alpha \in K$, então,

$$T(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_U T(v_1) = \alpha \cdot_u u_1,$$

ou seja, $\alpha \cdot_U u_1 \in Im(T)$.

Como $\operatorname{Im}(T) \subset U$ e é fechada em relação às operações $+_U, \cdot_U$, temos que $\operatorname{Im}(T)$ é subespaço vetorial de $(U, +_U, \cdot_U)$.

Sejam $(V, +_V, \cdot_V)$ e $(U, +_U, \cdot_U)$ espaços vetoriais no corpo K e $T: V \to U$ uma transformação linear invertível. Tome $u \in U$. Defina $v = T^{-1}(u) \in V$, então

$$T(v) = T_o T^{-1}(u) = u,$$

ou seja, $u \in Im(T)$. Assim, acabamos de verificar que se T for transformação linear invertível, então $\operatorname{Im}(T) = Cdom(T) = U$.

Considere agora o caso inverso, $T: V \to U$ uma transformação linear, tal que $\operatorname{Im}(T) = U$; então, para cada $u \in U$, existe $v \in V$, tal que $T(v) = u$, ou seja, T é sobrejetora. Desse modo, acabamos de verificar que **transformações lineares com imagem igual ao contradomínio são sobrejetoras**.

Exemplificando

Considere a transformação apresentada como exemplo no "Exemplificando" citado anteriormente.

Queremos encontrar qual a sua imagem, ou seja, verificar quais são as matrizes de ordem 2×2 que podem ser obtidas por essa transformação. Veja que:

$$T(p) = \begin{bmatrix} a_0 - a_2 & a_0 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{bmatrix} =$$

$$= (a_0 - a_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (a_0 - a_1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (a_2 - a_1)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

definindo $\begin{cases} \alpha = a_0 - a_2 \\ \beta = a_0 - a_1 \\ \gamma = a_2 - a_1 \end{cases}$ vemos que $\beta = \alpha + \gamma$. Daí as matrizes obtidas pela transformação podem ser descritas como:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a imagem de T pode ser expressa por:

$$\text{Im}(T) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$, T não é sobrejetora, portanto não é invertível.

Pelos resultados apresentados anteriormente, podemos concluir que **T é invertível se, e somente se, $\text{Im}(T) = U$ e $\mathcal{N}(T) = \{0_V\}$.**

Reflita

Na seção anterior, introduzimos a matriz transformação de uma base a outra. Qual é a relação entre o núcleo e a imagem de uma transformação e o núcleo e a imagem da matriz associada à transformação?

Na transformação utilizada no exemplo, note que a dimensão do núcleo é *1* e a dimensão da imagem é *2* (verifique!).

Definimos o **posto** da transformação T como:

$$posto(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

e a **nulidade** de T como:

$$null(T) = \dim(\mathcal{N}(T)).$$

Seja $T: V \to U$ uma transformação linear do espaço vetorial V ao espaço vetorial U. Então, $null(T) = 0$ se, e somente se, para quaisquer vetores linearmente independentes $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, temos que $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n) \in U$ são linearmente independentes.

Antes de demonstrar essa afirmação, lembre-se de que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ são linearmente independentes se a única solução para o sistema

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

é a trivial, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Suponha que $null(T) = 0$, ou seja, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Suponha que existam vetores linearmente independentes $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, tais que $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n) \in U$ são linearmente dependentes. Então, existem $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$, não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \alpha_2 \cdot T(v_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) = 0.$$

Pela linearidade de *T*, temos, então, que:

$$T(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = 0,$$

ou seja, $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in \mathcal{N}(T)$, e como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, então:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0,$$

absurdo, pois existe *j* tal que $a_j \neq 0$, e os vetores v_j, $j = 1, \cdots, n$, são linearmente independentes. Logo, $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ são linearmente dependentes, como queríamos demonstrar.

Suponha agora que toda transformação de vetores linearmente independentes gera vetores linearmente independentes. Tome $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ vetores formando uma base para *T*. Suponha $z \in \mathcal{N}(T)$, assim, como núcleo é subespaço de *V*, existem escalares $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$, tais que:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = z$$

Veja que $T(z) = 0$, logo:

$$T(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = 0,$$

pela linearidade de *T*, temos:

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \alpha_2 \cdot T(v_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) = 0,$$

como $T(v_1),T(v_2),\cdots,T(v_n)$ são linearmente dependentes; então, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$, portanto $z=0$, ou seja, $\mathcal{N}(T)=\{0\}$, mostrando a veracidade da afirmação.

Como consequência direta da propriedade recém-demonstrada, temos que se $B=\{v_j\in V : j=1,\cdots,n\}$ é base para V e $T:V\to U$ é transformação linear com nulidade igual a zero, então:

$$\bar{B}=\{T(v_j)\in U : j=1,\cdots,n\}$$

é base para $\operatorname{Im}(T)$ e, ainda, $posto(T)=n$.

No caso geral, dada uma transformação linear entre dois espaços vetoriais, a relação entre seu posto, sua nulidade e a dimensão de seu domínio é dada pelo **teorema do núcleo e da imagem**.

Assimile

Teorema do núcleo e da imagem

Sejam $(V,+_V,\cdot_V)$ e $(U,+_U,\cdot_U)$ espaços vetoriais de dimensão finita no corpo K e $T:V\to U$ uma transformação linear. Então,

$$posto(T)+null(T)=\dim(V).$$

Para verificar a veracidade dessa afirmação, defina

$$\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}\subset V$$

base para $\mathcal{N}(T)$, como $\mathcal{N}(T)\subset V$, existem $v_{k+1},v_{k+2},\cdots,v_n\in V$, tais que

$$\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_n\}\subset V$$

é base para V.

Seja $u\in\operatorname{Im}(T)$, então existem escalares α_j, $j=1,\cdots,n$, tais que

$$T(\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_k\cdot v_k+\alpha_{k+1}\cdot v_{k+1}+\cdots+\alpha_n\cdot v_n)=u,$$

por outro lado, como T é linear, temos:

$$\alpha_1\cdot T(v_1)+\alpha_2\cdot T(v_2)+\cdots+\alpha_k\cdot T(v_k)+\alpha_{k+1}\cdot T(v_{k+1})+$$
$$+\cdots+\alpha_n\cdot T(v_n)=u,$$

Porém, como $v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathcal{N}(T)$, então:

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 + \alpha_{k+1} \cdot T\left(v_{k+1}\right) + \cdots + \alpha_n \cdot T\left(v_n\right) = u,$$

ou seja,

$$\alpha_{k+1} \cdot T\left(v_{k+1}\right) + \cdots + \alpha_n \cdot T\left(v_n\right) = u.$$

Assim, vemos que todo elemento de $\text{Im}(T)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\left\{T\left(v_{k+1}\right), \cdots, T\left(v_n\right)\right\}$.

Suponha escalares β_j, $j = k+1, \cdots, n$, tais que:

$$\beta_{k+1} \cdot T\left(v_{k+1}\right) + \cdots + \beta_n \cdot T\left(v_n\right) = 0,$$

pela linearidade de T, temos:

$$T\left(\beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \beta_n \cdot v_n\right) = 0,$$

ou seja, $\beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \beta_n \cdot v_n \in \mathcal{N}(T)$, mas $\left\{v_{k+1}, \cdots, v_n\right\}$ é linearmente independente com a base do núcleo de T, portanto é linearmente independente a todo elemento do núcleo de T, o que implica que $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_n = 0$, ou seja, $\left\{T\left(v_{k+1}\right), \cdots, T\left(v_n\right)\right\}$ é conjunto de vetores linearmente independentes.

Assim, como todo elemento de $\text{Im}(T)$ pode ser escrito como combinação linear do conjunto linearmente independente $\left\{T\left(v_{k+1}\right), \cdots, T\left(v_n\right)\right\}$, temos que esse conjunto é uma base para $\text{Im}(T)$. Dessa forma, podemos afirmar que:

$$\dim(\text{Im}(T)) = n - k$$

Por outro lado, como $\left\{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\right\}$ é base para V, então:

$$\dim(V) = n$$

E como $\left\{v_1, v_2, \cdots, v_k\right\}$ é base para $\mathcal{N}(T)$, temos que:

$$\dim(\mathcal{N}(T)) = k.$$

Ou seja,

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) - \dim(\mathcal{N}(T)),$$

reescrevendo essa frase em termos do posto e da nulidade da transformação T, obtemos:

$$posto(T) + null(T) = \dim(V).$$

Concluímos a demonstração do teorema.

Pesquise mais

O núcleo e a imagem de transformações lineares são dois dos subespaços mais importantes associados às transformações. Para uma leitura complementar sobre esses subespaços, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, Ross. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. Cap. 10. p. 465-476 (disponível na Biblioteca Virtual).

Para mais informações acerca das transformações lineares, sugerimos:

CRUZ, Luiz Francisco da. **Introdução ao Estudo da Álgebra Linear**. Capítulo 6. Unesp/Bauru. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/AL_CAP_06.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2018.

Sem medo de errar

Agora voltamos ao problema da empresa de análise de dados. Lembre-se de que você é responsável pela modelagem e análise de uma transformação linear em que dadas informações sobre um eleitor indicam em qual grupo ele deve ser alocado:

1. Não votará, pois discorda das posições políticas do candidato.

2. Não votará, pois desgosta da representação pública do candidato.

3. Possível eleitor, mas desgosta da representação pública do candidato.

4. Possível eleitor, pois gosta da representação pública do candidato.

Como os eleitores que estão nos grupos 1 e 2 não votarão no candidato, a empresa de marketing decidiu que suas informações não são relevantes; então, para diminuir o custo computacional envolvido no processo, suas informações podem ser descartadas da transformação linear definida na seção anterior. Após uma nova análise, você e sua equipe definiram que a nova transformação utilizada será:

$$T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,$$

tal que:

$$T(v)=\begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Essa transformação calcula o produto escalar entre as informações do eleitor (armazenadas no vetor *v*) e as informações dos representantes ideais dos grupos *3* e *4*. Assim, se a primeira componente de $T(v)$ for maior (em módulo) que a segunda componente, indicaremos que o eleitor pertence ao grupo *3*; caso contrário, ao grupo *4*.

Veja que $\text{Im}(T)=\mathbb{R}^2$ (verifique!). Assim, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que:

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{N}(T))+\dim(\text{Im}(T))=\dim(\mathbb{R}^4)\Leftrightarrow \dim(\mathcal{N}(T))+2=4\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \dim(\mathcal{N}(T))=2\end{aligned}$$

Veja que o $\mathcal{N}(T)$ representa o conjunto de todos os eleitores que não votarão no candidato (pois seu produto escalar com os representantes de cada grupo é nulo). Para identificar o núcleo da transformação, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_4=0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}v_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_4=0 \end{cases}.$$

A solução desse sistema é dada por $v_1=v_4=0$ e v_2 e v_3 livres, ou seja,

$$\mathcal{N}(T)=\{(0,a,b,0):a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\}$$

Assim, definimos o conjunto dos eleitores que devem ser desconsiderados, pois não votarão no candidato como $\mathcal{N}(T)$, e o conjunto com as informações sobre qual grupo cada eleitor pertence é $\text{Im}(T)$.

Agora que esses conjuntos foram definidos para o modelo simplificado, elabore um resumo indicando quais passos devem ser tomados para encontrar o subconjunto dos eleitores que devem ser descartados pelo sistema no modelo real em que se utilizam centenas de informações e dividem-se os eleitores em dezenas de grupos.

Avançando na prática

Núcleo e imagem da transformação derivada

Descrição da situação-problema

Considere o espaço dos polinômios de grau menor que ou igual a n. Do cálculo diferencial e integral, sabemos que a derivada de um polinômio pode ser dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n\right) = a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}$$

Você, aluno aplicado do curso de Álgebra Linear e Vetorial e interessado em suas diferentes aplicações, questiona-se se a operação derivada pode ser vista como uma transformação linear. Se sim, entre quais espaços? Qual é seu núcleo? Qual é sua imagem?

Resolução da situação-problema

Para verificar que a operação derivada é uma transformação linear, defina a transformação:

$$\begin{aligned} D: \quad & P_n \to P_n \\ & a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \to a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}, \end{aligned}$$

em que P_n é o conjunto dos polinômios de grau menor que ou igual a n. Veja que a transformação D é equivalente à operação derivada aplicada em polinômios. Para verificar que D é linear, basta tomar: $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \in P_n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n \in P_n$. Veja que

$$D(p+q) = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)t + \cdots + n(a_n + b_n)t^{n-1} =$$

$$= \left(a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}\right) + \left(b_1 + 2b_2t + \cdots + nb_nt^{n-1}\right) = D(p) + D(q)$$

Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$D(\alpha p) = \alpha a_1 + 2\alpha a_2 t + \cdots + n\alpha a_n t^{n-1} = \alpha\left(a_1 + 2a_2 t + \cdots + na_n t^{n-1}\right) =$

$= \alpha D(p)$. Portanto, D é linear. Assim a derivada aplicada a P_n é uma transformação linear com domínio e contradomínio igual ao conjunto P_n.

Para encontrar o núcleo da transformação, basta resolver o sistema $D(p) = 0$ ou, equivalentemente,

$$a_1 + 2a_2 t + \cdots + na_n t^{n-1} = 0$$

Como essa relação precisa ser válida para todo $t \in \mathbb{R}$, sua única solução é $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, daí o núcleo dessa transformação ser:

$$\mathcal{N}(T) = \{p(t) = a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Em outras palavras, estamos afirmando que derivadas de constantes são nulas e se uma função tem derivada nula, então a função é constante.

Faça valer a pena

1. O teorema do núcleo e da imagem nos dá muitas informações acerca de uma transformação linear.

Suponha $T : V \to U$ uma transformação linear em que V possui dimensão n e U possui dimensão m.

Suponha, ainda, que $posto(T) = n$.

Considere as seguintes afirmações:

I. $m \geq n$.

II. $null(T) = m - n$ para qualquer m.

III. Se $m = n$, então T é invertível.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) I, II e III são verdadeiras.

b) Apenas I e II são verdadeiras.

c) Apenas I e III são verdadeiras.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas II é verdadeira.

2. Considere a transformação:

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & (v_1, v_2, v_3) \to \begin{bmatrix} v_1 & v_1 + 2v_2 + v_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Assinale V para verdadeira e F para falsa nas seguintes afirmações:

( ) T é invertível.

( ) $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

( ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \notin \text{Im}(T)$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) V – V – V.

b) V – F – V.

c) V – F – F.

d) F – F – F.

e) F – V – F.

3. Considere o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ no corpo $\mathbb{R}$ de dimensão finita $n > 1$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Tome $v_0 \in V$, defina:

$$\begin{aligned} T: \quad & V \to \mathbb{R} \\ & v \to \langle v, v_0 \rangle \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} S: \quad & V \to \mathbb{R} \\ & v \to \langle v_0, v \rangle \end{aligned}.$$

Analise as seguintes afirmações:

I. $T = S^{-1}$.

II. T e S são lineares.

III. Se $v_0 = 0_V$, então $\text{Im}(T) = \{0\}$.

IV. Se $v_0 \neq 0_V$, então $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) Apenas I e II são verdadeiras.

b) Apenas II, III e IV são verdadeiras.

c) Apenas I, III e IV são verdadeiras.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas I e IV são verdadeiras.

Seção 4.3

Autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos dois subespaços muito importantes associados a transformações lineares entre espaços vetoriais. Nesta última seção, veremos outra ferramenta de suma importância para a análise de transformações lineares: os autovalores (e, consequentemente, os autovetores). Além disso, estudaremos a diagonalização de matrizes, uma ferramenta fundamental tanto para a análise teórica de matrizes como uma estratégia avançada para resolver sistemas lineares.

Para ilustrar a aplicabilidade das ferramentas que serão estudadas nesta seção, continuamos supondo que você trabalha na empresa de análise de dados. Lembre-se de que seu trabalho é modelar e analisar uma transformação linear para constatar se um eleitor é um eleitor em potencial de determinado candidato e, ainda, classificá-lo em algum grupo, a fim de que o marketing seja direcionado a maximizar a eficiência.

Na primeira seção desta unidade, você modelou a transformação linear; na seção anterior, você remodelou de modo que o núcleo da transformação incluísse todos os eleitores que não são eleitores em potencial do candidato em questão.

Em razão de uma nova estratégia empregada pela empresa de marketing, os eleitores que não votariam de modo algum no candidato voltam a ser interessantes, após uma análise mais elaborada e novos dados. Por isso, você desenvolveu a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ & x \to Ax \end{aligned},$$

em que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como nas transformações anteriores, essa transformação deve ser aplicada a um vetor de dados de um eleitor, e a maior componente em módulo indicará a qual grupo o eleitor pertence.

Porém, em uma situação real, a quantidade de dados será muito grande. Seu trabalho consiste em modificar essa transformação, de modo que seja computacionalmente barata de se avaliar (sejam necessários poucos cálculos a cada avaliação). Para isso, você deve representar essa transformação como a multiplicação de um vetor por uma matriz diagonal. Como fazer essa transformação com os dados dos exemplos? Quais as condições necessárias para usar essa representação no caso real? Qual modificação deve ser feita nos vetores com os dados dos eleitores?

Para responder a esses questionamentos e realizar a sua tarefa, você precisará utilizar os conceitos de autovalores e autovetores, além da diagonalização de transformações lineares. Esses conceitos se fazem muito importantes, tanto na análise teórica de transformações lineares quanto em aplicações, por exemplo, reduzindo o custo computacional em avaliar uma transformação.

Não pode faltar

Nesta seção, estudaremos alguns dos assuntos mais relevantes em Álgebra Computacional, os **autovalores** e os **autovetores**.

Assimile

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ com adição e multiplicação usuais e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

Definimos $\lambda \in \mathbb{R}$ um **autovalor** de *T*, se existe $v_\lambda \in \mathbb{R}^n$ não nulo, tal que:

$$T(v_\lambda) = \lambda \cdot v_\lambda.$$

Neste caso, v_λ é chamado de **autovetor** de T associado ao **autovalor** λ.

Defina V_λ o conjunto de todos os autovetores de T associados a λ união com o conjunto $\{0\}$.

Sabendo que $v, u \in V_\lambda$, então:

$$T(v) = \lambda \cdot v \text{ e } T(u) = \lambda \cdot u.$$

Como T é linear:

$$T(v+u) = T(v) + T(u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u = \lambda \cdot (v+u),$$

então $v + u \in V_\lambda$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$ e T é linear, temos:

$$T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v) = \alpha\lambda \cdot v = \lambda \cdot (\alpha \cdot v),$$

logo $\alpha \cdot v \in V_\lambda$.

Assim, mostramos que o conjunto de todos os autovetores associados a um autovalor unido com o conjunto cujo único elemento é o vetor nulo é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Note que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial de dimensão finita n, então, como vimos na Seção 4.1, a transformação $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz de ordem $n \times n$. Assim, estendemos o conceito de autovalores e autovetores para matrizes quadradas.

Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A, se existe $v_\lambda \in \mathbb{R}^n$ não nulo, tal que:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda,$$

e v_λ é chamado de **autovetor** de A associado a λ.

Devido à equivalência entre transformações lineares e matrizes para o caso de espaço de dimensões finitas, abordaremos esse assunto sob a ótica de matrizes.

Suponha v_λ um autovetor associado aos autovalores λ_1 e λ_2, então:

$$Av_\lambda = \lambda_1 v_\lambda \text{ e } Av_\lambda = \lambda_2 v_\lambda.$$

Daí:

$$0 = A0 = A\left(v_\lambda - v_\lambda\right) = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)v_\lambda.$$

Como v_λ é autovetor, então é não nulo. Daí, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Assim, mostramos que **um autovetor está associado a um único autovalor** ou, equivalentemente, um autovalor está unicamente definido pelo autovetor.

Suponha, agora, v_{λ_1} e v_{λ_2} autovetores associados a λ_1 e λ_2, dois autovalores distintos, sendo v_{λ_1} linearmente dependente de v_{λ_2}, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

$$v_{\lambda_1} = \alpha v_{\lambda_2}.$$

Como v_{λ_1} e v_{λ_2} são autovetores, então são não nulos e, consequentemente, $\alpha \neq 0$. Observe que:

$$\lambda_1 v_{\lambda_1} = Av_{\lambda_1} = A\alpha v_{\lambda_2} = \alpha A v_{\lambda_2} = \alpha\lambda_2 v_{\lambda_2} = \lambda_2 \alpha v_{\lambda_2} = \lambda_2 v_{\lambda_1},$$

logo $\lambda_1 = \lambda_2$, contrariando nossa hipótese, sendo v_{λ_1} e v_{λ_2} linearmente independentes. Assim, verificamos que **autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes**.

Assimile

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\lambda = -2$ autovalor de A, determine os autovetores (v_λ) associados a esse autovalor, ou seja, resolva o sistema $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$, ou, equivalentemente, $Av_\lambda - \lambda v_\lambda = 0$. Lembre-se de que o resultado da matriz identidade por um vetor é o próprio vetor, isto é:

$$Av_\lambda - \lambda I v_\lambda = 0 \Leftrightarrow \left(A - \lambda I\right)v_\lambda = 0.$$

Assim, denotando $v_\lambda = \left(x, y\right)$, obtemos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esse sistema é possível e indeterminado (verifique usando o determinante!).

Sua solução é dada por $x = -y$.

Isso quer dizer que os autovetores associados ao autovalor *-2* são todos os vetores no conjunto:

$$V_{-2} = \{(a, -a) \mid a \neq 0\}.$$

Pelo exemplo apresentado, vemos que determinar os autovetores associados ao autovalor λ é equivalente a resolver o sistema linear:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0.$$

Como $v_\lambda \neq 0$, estamos enfocando o caso em que $(A - \lambda I)$ é singular, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$. Denotamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ como o **polinômio característico** de *A*.

Assim, podemos resumir o processo de determinar os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada como:

- Encontre o polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de *A*.
- Encontre as raízes do polinômio característico, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$.
- Para cada uma das raízes λ do polinômio característico, resolva o sistema linear indeterminado $(A - \lambda I)v_\lambda = 0$.
- As raízes do polinômio característico são os autovalores de *A* e as soluções do sistema linear são os autovetores de *A*.

Exemplificando

Vamos determinar todos os autovalores e os autovetores de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso, determinaremos as raízes do polinômio característico. Observe que:

$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 3 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Podemos determinar as raízes desse polinômio utilizando a fórmula resolutiva de equação do segundo grau. Assim:

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3.$$

Logo, os dois autovalores para matriz A são:

$$\lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = 4.$$

Para o caso de $\lambda_1 = -2$, já encontramos os autovetores no exemplo anterior.

Vamos usar $\lambda_2 = 4$. Assim:

$$\left(A - \lambda_2 I\right)v_{\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Novamente, temos um sistema indeterminado; neste caso, vemos facilmente que a solução é dada por:

$$x = y.$$

Logo, os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são os vetores do conjunto:

$$V_4 = \{(a,a) \mid a \neq 0\}.$$

Reflita

Toda matriz de ordem $n \times n$ possui n autovalores distintos?

Considere a matriz identidade de ordem n. Quais são seus autovalores e seus autovetores? Use como exemplo a matriz de ordem 2 e estenda o resultado para matrizes de ordem qualquer.

Faça o mesmo para a matriz nula e para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Por esses resultados, o que você pode concluir sobre a quantidade de autovalores associados a uma matriz quadrada?

Uma matriz de ordem $n \times n$ possui, no máximo, n autovalores distintos.

Vamos demonstrar que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ será não singular se, e somente se, todos seus autovalores forem não nulos.

Primeiramente, mostraremos que se A for não singular, então todos seus autovalores serão não nulos. Suponha o contrário, ou seja, que 0 é autovalor de A e v autovetor associado a 0, então:

$$Av = 0v = 0,$$

mas se A for não singular, o único elemento em seu núcleo será o vetor nulo, ou seja, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$; assim, $v = 0$, absurdo, pois v é autovetor, logo é não nulo. Portanto, A não admite autovetor nulo.

Agora, suponha que todos os autovalores de A são não nulos e $v \in \mathcal{N}(A)$ não nulo, então:

$$Av = 0 = 0v,$$

ou seja, v é autovetor associado ao autovalor 0, absurdo, pois 0 não é autovalor. Daí, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$; assim, A é não singular.

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem $n \times n$, dizemos que A é **semelhante** a B, se existir matriz M de ordem $n \times n$ invertível, tal que:

$$A = MBM^{-1}.$$

Note que se A for semelhante a B, então B será semelhante a A; denotamos a semelhança por $A \sim B$.

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico e, portanto, o mesmo conjunto de autovalores.

Assimile

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A será **diagonalizável** se existir $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal, tal que $A \sim D$, ou seja,

$$A = MDM^{-1},$$

para alguma $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertível.

Suponha A diagonalizável, então existem $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal e $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertível, tais que:

$$A = MDM^{-1} \Leftrightarrow AM = MD.$$

Sendo $e_j \in \mathbb{R}^n$ o vetor com todas as componentes iguais a zero, exceto pela *j*-ésima, cujo calor é *1*, então:

$$MDe_j = Md_je_j = d_jMe_j = d_jm_j,$$

em que d_j é o *j*-ésimo elemento na diagonal de D e m_j é a *j*-ésima coluna de M. Por outro lado, veja que:

$$AMe_j = Am_j.$$

Como $AM = MD$, então $AMe_j = MDe_j$, ou seja,

$$Am_j = d_jm_j.$$

Como M é invertível, $m_j \neq 0$. Assim, mostramos que se $A \sim D$, com D diagonal, então os elementos da diagonal de D são autovalores de A, e a matriz M que permite a semelhança é definida pelos autovetores de A linearmente independentes de A.

Exemplificando

Vamos verificar que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável.

Nos exemplos anteriores, verificamos que $\lambda_1 = -2$ é autovalor, com autovetores no conjunto $\{v = (a, -a) \mid a \neq 0\}$. Assim, o vetor $(1, -1)$ é autovetor associado a $\lambda_1 = -2$.

Verificamos também que $\lambda_2 = 4$ é autovalor, com autovetores no conjunto $\{(a, a) : a \neq 0\}$, daí $(1, 1)$ é autovetor associado a $\lambda_2 = 4$.

Defina a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a primeira coluna de M é um autovetor associado a $\lambda_1 = -2$ e a segunda coluna é um autovetor associado a $\lambda_2 = 4$.

Sendo:

$$\det(M) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2,$$

logo M é invertível e sua inversa é dada por:

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Defina:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Perceba que D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores (na mesma ordem utilizada na definição da matriz M).

Sendo:

$$MDM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

concluímos que $A \sim D$, portanto diagonalizável.

Com esses resultados, podemos afirmar que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ será diagonalizável se possuir um conjunto de n autovetores linearmente independentes.

Pesquise mais

Nesta seção foram discutidos os conceitos de autovalores e autovetores de matrizes. Como leitura complementar sobre esse tema, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. Cap. 8. p. 374-387 (disponível na Biblioteca Virtual).

Como leitura complementar sobre diagonalização de matrizes, sugerimos:

PULINO, Petrônio. Autovalores e autovetores. In: ________. **Álgebra linear e suas aplicações**: notas de aula. Campinas: Unicamp – - Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. Cap. 6. p. 416-437. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 21 fev. 2018.

Por fim, como leitura complementar sobre aplicações de autovalores e autovetores, sugerimos:

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006. Cap. 9. p. 412-422 (disponível na Biblioteca Virtual).

Sem medo de errar

Lembre-se de que estamos supondo que você foi contratado por uma empresa de análise de dados. Essa empresa está classificando eleitores como eleitores potenciais de um candidato. Para isso, utiliza dados obtidos em redes sociais. Após algumas análises, concluiu-se que um modelo-teste apropriado é dado pela transformação:

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\to Ax \end{aligned},$$

em que:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Em uma situação real, a quantidade de dados será muito grande. Por isso, você deve elaborar uma transformação linear que seja computacionalmente barata de se avaliar. Seu trabalho é representar, se possível, a transformação por meio de uma multiplicação por matriz diagonal. Para tanto, precisamos verificar se A é diagonalizável, ou seja, se existe um conjunto de autovetores que formam uma base para $\mathbb{R}^4$. Com o objetivo de determinar os autovetores de A, precisamos dos autovalores dados pelo polinômio característico. A fim de obter o polinômio característico, calcularemos o determinante da matriz $A-\lambda I$ usando a regra de Laplace, na segunda linha da matriz A:

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0&1\\0&1-\lambda&0&0\\0&0&1-\lambda&1\\1&0&1&0-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&0-\lambda\end{bmatrix}$$

Logo:

$$p(\lambda)=(1-\lambda)^2(\lambda-2)(1+\lambda),$$

pela qual concluímos que os autovalores de A (raízes de p) são:

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1.$$

Para determinar os autovetores, precisamos resolver o sistema $(A-\lambda_j I)v_j=0$, com $j=1,2,3$. Resolvendo esse sistema, para $j=1$, obtemos o seguinte conjunto de autovetores:

$$\{(-a,b,a,0):a,b\in\mathbb{R},|a|+|b|\neq 0\}.$$

Note que os vetores $(-1,0,1,0)$ e $(0,1,0,0)$ são autovetores linearmente independentes associados ao autovalor *1*.

Para $j = 2$, temos o conjunto de autovetores:

$$\{(a,0,a,a) : a \in \mathbb{R},, a \neq 0\}.$$

Como representante desse conjunto, tomamos o vetor $(1,0,1,1)$.

Por fim, para $j = 3$, temos o conjunto de autovetores:

$$\{(-a,0,-a,2a) : a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

E como representante desse conjunto, tomamos o vetor $(-1,0,-1,2)$.

Veja que *A* é diagonalizável, pois seus autovetores linearmente independentes formam a base para $\mathbb{R}^4$. Assim, definindo:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

resulta $A = MDM^{-1}$ e, portanto, $A \sim D$.

Obs.: note que o autovalor *1* está presente duas vezes na matriz diagonal, porque o valor *1* é raiz de ordem dois do polinômio característico e o conjunto de seus autovetores forma um espaço vetorial de dimensão dois.

Desta forma, construímos uma matriz diagonal semelhante à matriz *A*. Para poder usá-la como transformação linear com os dados dos usuários, esses dados devem estar representados na base formada pelos autovetores linearmente independentes, ou seja, os vetores utilizados devem ser $y = M^{-1}v$, em que *v* representa o vetor de dados dos eleitores.

Com essa diagonalização, você finaliza a análise do problema modelo. Faça um relatório sobre o processo e explicite o passo a passo que deve ser realizado no problema real, com matrizes quadradas de ordem qualquer. Nesse relatório, deixe claros os possíveis problemas que podem ser atingidos (não existência de autovalores, não existência de base formada por autovetores etc.).

Nesta última unidade, você analisou uma simplificação de um problema real bastante interessante no contexto histórico-social atual. Para essa análise, foram utilizados muitos dos conceitos estudados neste livro: matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores, independência linear, transformações lineares, autovalores/autovetores e diagonalização de matrizes. Faça um pequeno resumo de todos os tópicos estudados neste livro e tente elaborar um fluxograma indicando a relação entre um conteúdo e outro.

Avançando na prática

Autovalores e autovetores aplicados a coelhos e cobras

Descrição da situação-problema

Considere que você foi contratado para trabalhar em um instituto de pesquisa. Esse instituto está pesquisando a relação entre a quantidade de coelhos e cobras existentes em determinada região e o tempo.

Considere $x_1(t)$ a função que define a quantidade de coelhos em determinado ambiente em relação ao tempo e $x_2(t)$ a população de cobras. De acordo com Sobrinho et al. (2018), este problema pode ser modelado como:

$$x'(t) = Ax(t),$$

em que $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e $x'(t)$ é o vetor cujas componentes são as derivadas das componentes de *x*.

Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, que a população inicial ($t = 0$) de coelhos era *100* e de cobras, *2*, queremos descobrir quais funções descrevem as populações em relação ao tempo.

Obs.: a teoria do cálculo diferencial e integral estabelece que a solução desse sistema é do tipo:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t},$$

em que c_1, c_2 são constantes, λ_1, λ_2 são autovalores e v_1, v_2 são autovetores associados a λ_1, λ_2.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, calcularemos os autovalores e os autovetores da matriz A. Como o polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(2-\lambda),$$

suas raízes são $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=2$. Resolvendo o sistema $(A-\lambda_j I)v_j=0$, para $j=1$, obtemos que os autovetores associados a $\lambda_1=1$ estão no conjunto:

$$\{(a,0): a\in\mathbb{R}, a\neq 0\}.$$

Um representante desse conjunto é $v_1=(1,0)$. Para $j=2$, obtemos que os autovetores associados a $\lambda_2=2$ estão no conjunto:

$$\{(-a,2a): a\in\mathbb{R}, a\neq 0\}.$$

Um representante desse conjunto é $v_2=(-1,2)$. Logo:

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))=c_1(1,0)e^{1t}+c_2(-1,2)e^{2t}.$$

Para determinar o valor das constantes, basta notar que em $t=0$, $x=(100,2)$. Por outro lado:

$$x(0)=c_1(1,0)e^{0}+c_2(-1,2)e^{0}=c_1(1,0)+c_2(-1,2)=(100,2).$$

Resolvendo esse sistema, temos $c_1=101, c_2=1$. Assim, obtemos:

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))=101(1,0)e^{t}+1(-1,2)e^{2t}=\left(101e^{t}-e^{2t},2e^{2t}\right).$$

Ou seja, a população de coelhos é dada por:

$$x_1(t)=101e^{t}-e^{2t}$$

e a população de cobras é dada por:

$$x_2(t)=e^{2t}.$$

Faça valer a pena

1. Dada uma matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, seu coeficiente de Rayleigh é a função:

$$\rho(v)=\frac{v\cdot Av}{\|v\|^2},$$

definida para todo vetor $v\in\mathbb{R}^n$ não nulo.

Suponha v autovetor de A associado ao autovalor λ.

Assinale a alternativa correta sobre o valor de $\rho(v)$:

a) $\rho(v) = 1$.

b) Impossível determinar seu valor.

c) Está indefinido.

d) $\rho(v) = \lambda$.

e) $\rho(v) = \lambda^2$.

2. Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, cujas três primeiras colunas são as três primeiras colunas da matriz identidade de ordem *5* e as duas últimas são colunas nulas.

Sobre essa matriz, são feitas as seguintes afirmações:

I. Seus autovalores são *0*, *1* e *2*.

II. $(0,0,0,1,2)$ é um autovetor de *A*.

III. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^5$.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações:

a) I, II e III são verdadeiras.

b) Apenas I e II são verdadeiras.

c) Apenas II é verdadeira.

d) Apenas I e III são verdadeiras.

e) Apenas III é verdadeira.

3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analise as seguintes afirmações:

I. A é não singular

PORQUE

II. *A* é diagonalizável.

Assinale a alternativa que classifica corretamente as afirmações e sua relação:

a) I e II são verdadeiras e II justifica I.

b) I e II são verdadeiras, mas II não justifica I.

c) I é verdadeira, mas II é falsa.

d) I é falsa, mas II é verdadeira.

e) I e II são falsas.

Referências

CRUZ, Luiz Francisco da. **Introdução ao estudo da Álgebra linear**. Capítulo 6. Transformação linear. Unesp/Bauru. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/AL_CAP_06.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2018.

KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006 (disponível na Biblioteca Virtual).

PULINO, Petrônio. **Álgebra linear e suas aplicações**. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 28 jan. 2018.

PULINO, Petrônio. Transformações lineares. In: ______. **Álgebra linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. Cap. 4. p. 219-225. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 15 fev. 2018.

PULINO, Petrônio. Autovalores e autovetores. In: ______. **Álgebra linear e suas aplicações:** notas de aula. Campinas: Unicamp – Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. Cap. 6. p. 416-437. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/>. Acesso em: 21 fev. 2018.

SOBRINHO, Altair Santos de Oliveira et al. **Modelagem matemática e estabilidade de sistemas predador-presa**. Disponível em: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1504/1504.06244.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2018.

Anotações

ISBN 978-85-522-0707-8

9 788552 207078 >