



Teoria de controle moderno

Teoria de controle moderno

Henrique Borges Garcia

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Alberto S. Santana

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Cristiane Lisandra Danna

Danielly Nunes Andrade Noé

Emanuel Santana

Grasiele Aparecida Lourenço

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Paulo Heraldo Costa do Valle

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Anna Giuglia Menechelli Moraco

Marley Fagundes Tavares

Editorial

Adilson Braga Fontes

André Augusto de Andrade Ramos

Cristiane Lisandra Danna

Diogo Ribeiro Garcia

Emanuel Santana

Erick Silva Griep

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Garcia, Henrique Borges
G216t Teoria de controle moderno / Henrique Borges Garcia.
– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A.
2017.
240 p.

ISBN 978-85-522-0283-7

1. Controle Automático. I. Título.

CDD 629

Sumário

Unidade 1 Introdução e fundamentos aos sistemas de controle	7
Seção 1.1 - Introdução aos sistemas de controle	9
Seção 1.2 - Transformada de Laplace	21
Seção 1.3 - Problemas práticos sobre sistemas de controle	37
Unidade 2 Representação de sistemas de controle	59
Seção 2.1 - Modelagem de sistemas físicos	61
Seção 2.2 - Função de transferência	79
Seção 2.3 - Problemas práticos sobre representação de sistemas	94
Unidade 3 Análise da estabilidade de sistemas de controle	113
Seção 3.1 - Estabilidade de sistemas realimentados	115
Seção 3.2 - Diagrama de Bode e lugar das raízes	129
Seção 3.3 - Aplicação de critérios de estabilidade para sistemas realimentados	152
Unidade 4 Projeto de controladores para processos industriais	173
Seção 4.1 - Controladores industriais	174
Seção 4.2 - Controladores PID	193
Seção 4.3 - Problemas práticos sobre resposta transitória e controladores PID	212

Palavras do autor

O foco da teoria de controle é dar o conhecimento necessário para que você, de posse do modelo matemático de um sistema dinâmico, possa atuar de modo que ele se comporte da maneira que for mais adequada ao projeto. Entenda que sistemas dinâmicos podem ser dos mais variados tipos: mecânico, elétrico, térmico, químico, entre outros e, inclusive, uma mistura desses sistemas, por exemplo: um sistema mecatrônico.

Note que é de grande importância que você aplique os conhecimentos adquiridos ao longo das unidades estudadas nos mais variados sistemas dinâmicos em seu dia a dia. Você pode criar um sistema, modelá-lo matematicamente com todas as hipóteses simplificadoras necessárias e projetar um controle para obter uma resposta desejada. Essa é, sem dúvida, a maneira mais eficiente de você levar dúvidas para a sala de aula a fim de serem sanadas junto ao professor e, conseqüentemente, sedimentar o conhecimento.

Na primeira unidade deste material apresentaremos uma breve história do controle automático, assim como sua futura evolução e introdução de conceitos básicos como malha aberta, malha fechada, retroalimentação (do inglês *feedback*), sistemas LTI (lineares e invariantes no tempo), transformada de Laplace e utilização do MATLAB.

Na segunda unidade serão abordadas maneiras de modelar um sistema e representar o modelo em diagrama de blocos, análise das propriedades do sistema dinâmico por meio de sua função transferência e aplicações no MATLAB.

Na terceira unidade veremos sistemas de ordem superior, critérios de estabilidade, análise de resposta no domínio da frequência (diagrama de bode e lugar das raízes) e aplicação prática no MATLAB.

Na quarta unidade serão apresentados vários tipos de atuadores (pneumáticos, hidráulicos, eletrônicos) e várias técnicas de controle, como controle Proporcional (P), controle Proporcional-Integrativo (PI) e controle Proporcional-Integrativo-Derivativo (PID) e, ao final, suas aplicações em MATLAB.

Por fim, talvez a tarefa de controlar adequadamente um sistema dinâmico pode vir a ser não muito trivial, mas conhecer bem a teoria

de controle por trás da prática é fundamental para que você alcance o resultado desejado. Vamos trilhar o caminho de maneira que você entenda cada conceito da melhor maneira possível e os aplique ao longo das unidades.

Mãos à obra!

Introdução e fundamentos aos sistemas de controle

Convite ao estudo

A evolução da ciência e da tecnologia nos deixou rodeados por sistemas autônomos. Alguns exemplos são:

- Sistema de injeção eletrônica, que define automaticamente a mistura da combustão.
- Freio *Antiblockier-Bremssystem* (ou *Anti-lock Braking System*, ABS), que evita o bloqueio da roda (e consequentemente a derrapagem do automóvel), mesmo que o condutor pressione totalmente o pedal do freio.
- Piloto automático utilizado em aviões, embarcações e automóveis.

Em todos esses sistemas são utilizados conhecimentos provenientes da teoria de controle. Todos eles envolvem análise e modelagem de um sistema dinâmico, com a identificação de suas respectivas variáveis de entradas e de saída, para então se obter as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema e, depois, o projeto do controlador, que fará com que o sistema comporte-se da maneira desejada (em relação aos exemplos temos, respectivamente: melhoria na qualidade da queima do combustível, prevenção de acidentes e mais segurança durante o voo, pouso e decolagem). Na modelagem e no projeto do controlador, faremos o uso da técnica de resolução de equações diferenciais ordinárias por meio da transformada de Laplace, que simplifica o trabalho e tem uso direto no software MATLAB.

Para iniciarmos os estudos em controle de sistemas dinâmicos ao longo desta unidade, suponhamos que você faz parte da equipe de engenharia de uma indústria automotiva e tem a tarefa de implementar um novo sistema de suspensão

automatizada para aumentar o conforto dos passageiros e do motorista do carro. Por onde começar? Como será o funcionamento de um sistema como esse?

Vamos descobrir ao longo dos estudos.

Mãos à obra e um ótimo estudo!

Seção 1.1

Introdução aos sistemas de controle

Diálogo aberto

Olá, aluno! Nesta primeira seção, você conhecerá um pouco sobre o surgimento dos sistemas de controle ao longo da história da humanidade e também lhe serão apresentados conceitos fundamentais para implementação de projetos na área de teoria de controle. Nesse contexto, estudaremos sobre as diferentes arquiteturas dos controladores: seus elementos básicos e princípio de funcionamento. Além disso, faremos comparações analisando as vantagens e desvantagens entre uma arquitetura e outra.

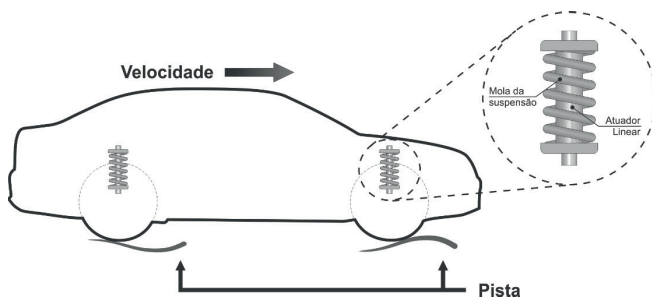
Os conceitos apresentados nesta seção podem ser aplicados no procedimento de solução de qualquer sistema de controle, já que a correta identificação do problema permite que o projeto seja realizado de maneira adequada.

Assim, para aplicar esses conhecimentos, suponha que você faça parte da equipe de engenharia de uma indústria automotiva. Um automóvel é composto de inúmeros sistemas dinâmicos e você é responsável pelo desenvolvimento e análise de sistemas de suspensão. Sendo a suspensão um elemento fundamental na dirigibilidade do automóvel e também de segurança, quanto melhor ele for desenvolvido, mais conforto e segurança para os passageiros teremos. Em uma reunião de novos produtos, foi destinado a você o projeto da nova suspensão ativa da nova linha da montadora. E então, qual deve ser a entrada e a saída dessa suspensão? Esse novo sistema de controle deve funcionar com a topologia em malha aberta ou fechada?

Pronto para descobrir?

Desejo bons estudos e ótimo trabalho!

Figura 1.1 | Ilustração de um carro com detalhe na suspensão da roda



Fonte: elaborada pelo autor.

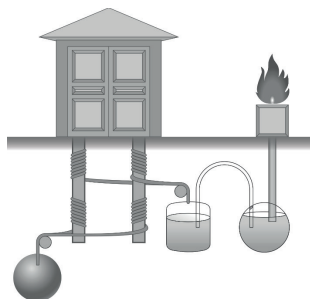
Não é muito difícil ouvir a palavra controle e pensar no controle da televisão ou do videogame. No futebol, há a brincadeira do “controlinho”, no qual o objetivo é ficar continuamente fazendo embaixadas com a bola sem deixá-la cair no chão, ou seja, no controle da bola.

Perceba que essa mesma ideia está por trás do uso da palavra controle:

- Na televisão, usamos o controle para encontrar um canal que gostamos para assistir algo interessante.
- No videogame, usamos o controle para fazer com que atuemos no jogo virtual e consigamos completar algum objetivo.
- No “controlinho”, atuamos na bola a fim de não deixá-la cair no chão.

Embora sejam circunstâncias totalmente distintas, controlar é a mesma coisa: atuar em algo para que um objetivo seja estabelecido. A teoria de controle de sistemas dinâmicos busca exatamente a mesma coisa e, para tal, contamos com conhecimento físico e matemático.

Figura 1.2 | Ilustração do sistema de controle de abertura e fechamento dos portões

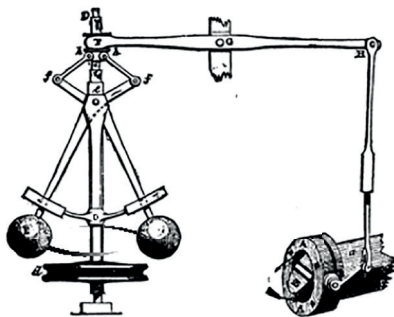


Fonte: elaborada pelo autor.

Esta teoria não é tão recente. Um dos primeiros sistemas de controle automáticos de que se tem notícia foi desenvolvido por Heron de Alexandria (10 d.C. – 70 d.C.), no século I. Tratava-se de um sistema de abertura de portões, como ilustrado na Figura 1.2. Uma pira era acesa e seu calor aquecia a água e o ar do primeiro reservatório subterrâneo, fazendo com que ele se expandisse, transferindo água para outro reservatório que, ficando mais pesado, descia puxando uma corda que estava ligada a um rolete, que finalmente rotacionava a porta. Para esse controle, a **entrada** do sistema era a temperatura da pira, e a **saída** era o ângulo do portão.

No século XVII surgiu pela primeira vez uma formalização matemática de um sistema de controle que era muito utilizado para corrigir a velocidade angular de máquinas a vapor. Esse sistema é denominado governador (ou regulador) centrífugo, e está ilustrado na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Ilustração do governador (ou regulador) centrífugo



Fonte: adaptada de <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=231047>>. Acesso em: 17 jun. 2017.

Os governadores centrífugos eram utilizados para controlar a velocidade das máquinas a vapor por meio da atuação na válvula que limita o fluxo de ar da admissão das máquinas. O eixo D rotaciona devido à potência gerada pelo motor por meio de algum acoplamento (por exemplo, correias) e, junto com o eixo D, as esferas também rotacionam. O aumento da velocidade angular faz com que as esferas se elevem e o mecanismo no topo suba, reduzindo a abertura da borboleta de admissão. A restrição da admissão reduz o trabalho gerado pelo motor e, consequentemente, a velocidade angular desenvolvida pelo eixo. Nesse caso, a **entrada** do sistema era a velocidade angular do eixo do motor, e a **saída** era o ângulo da borboleta da admissão.



Refleta

Será que você conhece outro sistema de controle? Qual seria? Qual(is) tipo(s) de variável(is) esse sistema pode controlar: posição, fluxo, potência? Em qual sistema dinâmico ele atua? Quais são as variáveis de entrada e saída desse sistema de controle?

Avançando na história, em 1922, Nicolas Minorsky foi responsável pela primeira proposta de aplicação de controle PID (proporcional – integrativo – derivativo, tipo clássico de controlador que será visto na Unidade 4) aplicado ao sistema automático de direção dos navios da marinha estadunidense.

Da década de 1950 até a de 1960, com o avanço da ciência, a eletrônica analógica foi muito utilizada para tarefas de controle automático, em que os valores das resistências, capacitores e indutores afetavam a performance do controlador. Já na década de 1970, surgiu a teoria do controle digital, devido ao desenvolvimento dos sistemas digitais (circuitos integrados e microcontroladores).



Refleta

Você sabe a diferença entre um sistema analógico e um sistema digital? Qual é a vantagem de um em relação ao outro? E as desvantagens? Sabemos que a eletrônica digital é vastamente utilizada nos dias atuais. Mas e a eletrônica analógica? Ela continua sendo útil? Você conhece algum exemplo? Você conhece algum exemplo de sistema digital que não seja elétrico nem eletrônico?

O maior avanço na teoria de controle clássico ocorreu até a metade do século XIX, com ferramentas matemáticas muito importantes no projeto e análise de controladores, sendo que as mais importantes serão apresentadas ao longo das unidades deste material.

Na segunda metade do século XIX houve o surgimento de técnicas avançadas de controle, tais como:

- Controle ótimo – cálculo da atuação no sistema por meio da minimização de uma função custo definida pelo projetista.
- Controle robusto – controle com performance e estabilidade robustas com relação às incertezas da modelagem do sistema.
- Inteligência artificial, entre outros.



As técnicas mais avançadas de controle são utilizadas em situações complexas, nas quais as técnicas clássicas não conseguem realizar a tarefa necessária de maneira a alcançar um índice de performance requerido, por exemplo: quando o sistema real está sujeito a falhas e é tarefa do controlador lidar com essas falhas.

Leia o artigo indicado a seguir sobre o desenvolvimento de técnicas de controle robusto e controle tolerante a falha. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ca/v21n1/v21n1a03>>. Acesso em: 17 jun. 2017.

Neste contexto, é notório que a teoria de controle seja uma área extensa com aplicação nos mais diversos sistemas dinâmicos. Para começarmos nossos estudos nessa vasta área de conhecimento, é fundamental a introdução de alguns conceitos básicos, como o aprendizado da arquitetura do controlador.

Imagine-se regulando a temperatura do chuveiro simples antes de começar o banho. A temperatura da água é definida pela vazão do chuveiro: quanto menor o fluxo, maior a temperatura da água; e quanto maior o fluxo, menor a temperatura.

Imagine ainda duas situações:

(a) Você liga o chuveiro, define uma vazão que, por conhecimento prévio do comportamento de seu próprio chuveiro, você julga ser adequada para a temperatura desejada para o banho, e entra para tomar banho sem interferir na vazão novamente.

(b) Você liga o chuveiro e vai se molhando aos poucos, sentindo a temperatura da água e ajustando o fluxo para que a temperatura se adequa àquela que você deseja.

Qual das situações é mais provável que “dê errado” nos dias mais rigorosos do inverno?

Se você prefere não correr o risco de entrar no chuveiro frio durante o inverno, então concordamos que a situação *a* envolve mais riscos que a situação *b*. Na situação *a*, o chuveiro, que pode ser denominado de sistema ou planta, e você, que está no papel de controle ou controlador, estão no que é chamado de **malha aberta** (*open-loop*). Já na situação *b*, vocês estão em **malha fechada** (*closed-loop*). Ou seja, na malha aberta, os cálculos do controlador são baseados em informações que ele recebe do sistema por meio

da retroalimentação, diferentemente da arquitetura em malha aberta, na qual o controlador impõe a atuação por meio de valores pré-definidos, que não se alteram durante o processo.



Assimile

Malha aberta: o controlador não recebe informação sobre o estado do sistema.

Malha fechada: o controlador recebe informação sobre o estado do sistema.

Podemos aplicar e explorar o conceito de malha aberta e malha fechada desde as mais simples tarefas até as mais complexas. Muitas vezes, em uma mesma tarefa, temos ambos os tipos de arquitetura funcionando de maneira concomitante.



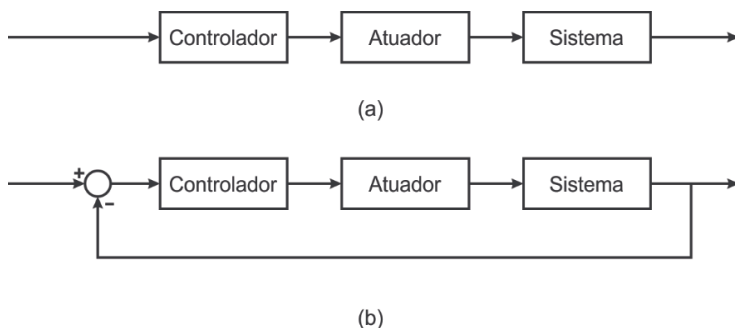
Exemplificando

Um outro exemplo que diferencia o controle de malha fechada e malha aberta é a utilização ou não de automação na iluminação residencial. No caso de haver o sistema de automação, as luzes externas podem se adequar à iluminação solar por meio de um sensor fotossensível: se houver luz do sol, as luzes são desligadas; caso contrário, elas são ligadas e, com isso, você não precisa se preocupar em apagá-las antes de dormir. Esse é um caso em que o controle de iluminação está em malha fechada. Quando não há o sistema de automação, se as luzes ficarem ligadas à noite, quando você acordar, elas estarão no mesmo estado, pois não há retroalimentação, ou seja, o controle das luzes está em malha aberta.

Podemos, então, concluir algumas características da malha aberta e da malha fechada. Na malha aberta, o controle é pré-definido: ele independe do estado do sistema. Com isso, o resultado da atuação deste tipo de arquitetura de controle é altamente suscetível corresponder ao que o sistema deseja obter. Por não haver sensoramento, malha aberta tende a ser mais simples e barata.

Na malha fechada, o controle se beneficia de informações do sistema para definir o sinal de atuação (ou sinal de controle). Essa informação do sistema que retorna ao controle é chamada de **retroalimentação** (*feedback*), ou pode-se chamá-la também de realimentação.

Figura 1.4 | Exemplos de arquitetura básicas um sistema de controle



Fonte: elaborada pelo autor.

Como pode ser visto na Figura 1.4, um sistema de controle básico apresenta algumas estruturas fundamentais: o controlador, o atuador e o sistema. A diferença entre o sistema em malha aberta (Figura 1.4a) e o sistema em malha fechada (Figura 1.4b) é justamente a retroalimentação. Cada elemento pode ser caracterizado da seguinte maneira:

- Sistema ou sistema dinâmico: é o alvo do controlador. Está presente em ambas as arquiteturas. O sistema dinâmico é exatamente o sistema do qual se espera um certo comportamento que pretende ser obtido por meio da atuação do controlador.
- Atuador: é o dispositivo que efetivamente atua no sistema de acordo com comandos vindos do controlador por algum meio, por exemplo: força, torque, diferença de potencial elétrico, pressão, entre outros. Esse elemento também está presente em ambas as arquiteturas.
- Controlador: decide com que intensidade o atuador deve atuar no sistema. Faz parte de ambas as arquiteturas.
- Realimentação: pode existir (malha fechada – Figura 1.4b) ou não (malha aberta – Figura 1.4a) no sistema. Esse elemento, quando em malha fechada, entrega ao controlador informações sobre estado atual da planta. E, de acordo com essas informações, permite que o controlador ajuste a atuação no sistema a fim de que este alcance o comportamento desejado.

Embora a malha fechada seja mais atraente no quesito robustez e mitigação de erros, deve-se ter em mente que é também mais complexo de ser aplicado na prática e, com isso, geralmente possui maior custo financeiro.

Portanto, antes de colocar em prática a resolução de um problema, você deve analisar se há realmente a necessidade de desenvolver um sistema de controle em malha fechada para obter a resposta desejada do sistema dinâmico.

Sem medo de errar

Você tem a tarefa de projetar o novo sistema de suspensão ativa que está sendo desenvolvido. Pontos muito importantes do funcionamento do sistema de controle, como entrada, saída e arquitetura são fundamentais no início do projeto, ou seja, o que for definido para esses parâmetros do controlador afetará todo o desenvolvimento do dispositivo. Então, vamos pensar: a suspensão trabalha no sentido de diminuir o impacto da variação da pista no carro. A pista é uma “fonte” de posições que afeta as rodas, que, por sua vez, afetam a suspensão (as irregularidades da pista fazem com que as rodas do carro em deslocamento vibrem e a afetem). A suspensão tem o papel de mitigar essas vibrações para que a carroceria do automóvel – e, conseqüentemente, seus passageiros – sejam protegidos das vibrações mais intensas (vibrações de alta frequência), proporcionando, assim, maior conforto aos ocupantes do veículo. Então, podemos dizer que a entrada do sistema é o perfil da pista que passa sob a roda do carro.

O sistema de suspensão ativa conta com um atuador, que exercerá esforço no chassi do carro e no pneu para mitigar a vibração que a pista causa. Portanto, a saída do sistema de controle será a força do atuador.

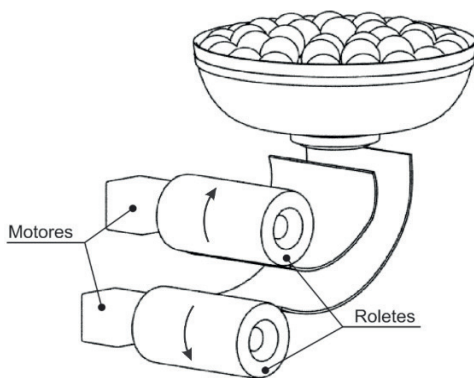
É impossível dizer que a pista tem perfil constante. Há lombadas (quebra-molas), buracos, aclives, declives etc. Logo, um sistema em malha aberta, sem informação da via, não consegue alcançar os resultados desejados exatamente por não atuar de acordo com a necessidade. O sistema deve ser de malha fechada.

Máquina de arremessar bolinhas de tênis de mesa

Descrição da situação-problema

Você é o profissional responsável por automatizar o centro de treinamento de tênis de mesa de sua cidade e foi encarregado de desenvolver uma máquina de arremessar bolas de tênis de mesa para o treino de fundamentos do esporte. A Figura 1.5 é um esboço de como seria o sistema: dois roletes, cada um montado no eixo de um motor elétrico, que rotacionam em sentidos contrários para imprimir velocidade na bola, que desce de um reservatório.

Figura 1.5 | Ilustração da máquina de arremesso de bolas de tênis de mesa



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o técnico dos atletas, essa máquina será utilizada para sessões de treinamento de um mesmo tipo de rebatida (saque, *forehand* ou *backhand*) e, por esse motivo, não há exigência de que a máquina altere a maneira de arremessar a bola.

Em relação à arquitetura do controle da máquina de treinamento, qual é o tipo de controle que melhor se encaixa nas necessidades do projeto?

Resolução da situação-problema

A necessidade de funcionamento do equipamento descrita pelo técnico mostra que o sistema não precisa ser complexo, já que basta que as bolas sejam arremessadas de uma mesma maneira durante toda uma sessão de treinamento. Mesmo tendo um custo

financeiro maior, a arquitetura de malha fechada seria imprescindível, por exemplo, caso a bola arremessada devesse atingir algum local que mudaria de um arremesso para outro, mas não é o caso. Uma arquitetura de malha aberta para o controle se mostra suficiente quando o objetivo do sistema é imutável, assim como o projeto em questão, contando com a vantagem de ser um sistema mais econômico e mais simples de ser fabricado.

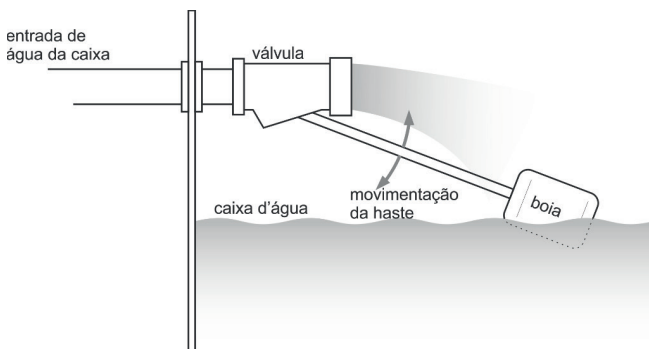
Portanto, a máquina de arremesso de bolas deve ter funcionamento em malha aberta.

Faça valer a pena

1. Saber identificar a variável a ser realimentada é de extrema importância para um sistema de controle, pois a seleção de tal variável afeta tanto a modelagem do sistema dinâmico quanto o projeto do controlador para este. Por vezes, sua má seleção acarreta em um modelo que, além de estar errado, é impossível de ser submetido à ação de um controlador.

As caixas d'água das residências contam com um sistema simples de controle puramente mecânico para que não falte água e nem que ela transborde da caixa. O sistema é composto por uma boia conectada a uma haste, cuja rotação afeta a vazão da válvula.

Ilustração do sistema de controle de nível da caixa d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual é a propriedade (ou variável) que é realimentada para o sistema de controle?

- a) A altura da boia.
- b) O fluxo de água que sai da caixa.
- c) A posição da válvula.
- d) O nível da água dentro da caixa.
- e) O volume de água presente na caixa d'água.

2. Os sistemas de controle podem ser classificados em controle em malha aberta (os que não têm retroalimentação) e controle em malha fechada (os que têm retroalimentação). Embora as diferentes arquiteturas tenham suas peculiaridades tanto na teoria quanto na prática, devemos entender que o uso de uma arquitetura em um sistema de controle não exclui a possibilidade de aplicação da outra arquitetura. Por isso, nos mais variados sistemas de controle que possamos imaginar, existe a presença de ambas as arquiteturas. Então, é imprescindível que o projetista usufrua das vantagens de cada tipo de arquitetura sempre que necessário.

Sobre uma máquina de lavar roupas comum, podemos afirmar que:

I. Ao acionar a máquina, é possível escolher o tipo de lavagem que se deseja realizar. Após completar o ciclo de lavagem, a máquina inicia o enxágue e, no final, acontece a centrifugação. Todos os ciclos do processo citados ocorrem por um intervalo de tempo, o qual é predeterminado de acordo com cada tarefa. Ao final do processo de lavagem, a máquina não garante que todas as roupas estejam devidamente lavadas.

II. A vibração do cesto da máquina de lavar é intensa devido à inevitável distribuição não homogênea das peças de roupa durante a centrifugação. Então, para não avariar o mecanismo da máquina, absorvedores de vibração são conectados à parte rotativa, que contém as roupas, a fim de diminuir a vibração.

III. É possível escolher o nível de água da máquina de acordo com a quantidade de roupas que se deseja lavar.

Aplicando o conceito de arquiteturas de um controlador, podemos afirmar que I, II e III se tratam de:

- a) Malha aberta, malha aberta e malha aberta.
- b) Malha aberta, malha aberta e malha fechada.
- c) Malha aberta, malha fechada e malha aberta.
- d) Malha aberta, malha fechada e malha fechada.
- e) Malha fechada, malha fechada e malha fechada.

3. Deficientes visuais são as pessoas que, por motivo de acidente, de saúde ou congênito, sofreram a perda total ou parcial do sentido da visão. Com isso, a habilidade de andar de maneira independente pelas ruas fica prejudicada, pois esses indivíduos não têm informação de como o ambiente ao redor deles se encontra nem como ele está se modificando. Para andarem pelas ruas de maneira mais independente, os deficientes visuais contam com o auxílio de bengala, cão guia, piso tátil, semáforos sonorizados etc., pois eles contam com pouca ou nenhuma informação sobre o ambiente em que se encontram.

Utilizando-se do contexto de sistema de controle, qual é a utilidade desses tipos de auxílio?

- a) Esses auxílios servem para ajudar a pessoa a chegar ao destino com mais rapidez.
- b) Esses auxílios servem de retroalimentação das situações do ambiente, permitindo que a pessoa tome decisões a respeito de sua locomoção com mais segurança e conforto.
- c) São de pouca utilidade, pois não são confiáveis para que o deficiente visual possa se locomover, o que poderia acarretar em riscos à sua saúde.
- d) Esses tipos de auxílio caracterizam uma malha aberta para o deficiente visual, pois ele não pode ver o lugar onde ele se encontra.
- e) Conceitos de sistema de controle não se aplicam, pois trata-se de seres biológicos.

Seção 1.2

Transformada de Laplace

Diálogo aberto

Na seção anterior, você conheceu um pouco da história do controle e aprendeu conceitos básicos como: malha fechada (com retroalimentação), malha aberta e identificação das variáveis de entrada e saída.

Nesta seção, será apresentada a você uma forma eficiente de obter a resposta de um sistema dinâmico linear invariante no tempo, de acordo com a entrada que ele recebe. Você aprenderá a resolver equações diferenciais ordinárias dos modelos matemáticos, utilizando as transformadas inversa e direta de Laplace, a fim de simplificar e agilizar o processo de resolução.

Você deve prosseguir com sua tarefa de desenvolver um sistema de controle ativo para suspensão veicular. Na seção anterior, você decidiu alguns parâmetros de projeto: o perfil da pista é a entrada do sistema, a força do atuador linear é a saída e o sistema de controle deve funcionar em malha fechada.

Uma etapa importante do projeto é a simulação do sistema real para reconhecer seu comportamento quando excitado por entradas variadas. Essa simulação deve ser feita sem que seja levado em consideração o atuador linear da suspensão, pois seu objetivo é visualizar o comportamento do sistema não atuado.

Então, você tem uma tarefa muito importante: obter a função transferência do sistema.

Bons estudos!

Não pode faltar

O modelo matemático serve para descrever matematicamente o comportamento (aproximado) de um sistema dinâmico. Então, ele é utilizado na análise e projeto de controles, antecipação de comportamentos, realização de ensaios e diversas outras tarefas.

Esses modelos são classificados matematicamente como equações diferenciais. Existem dois tipos:

- As equações diferenciais ordinárias (conhecidas pela sigla EDO), que envolvem derivadas (primeira derivada, segunda derivada...) de uma função desconhecida que, quase sempre, dependerá apenas do tempo. Vamos chamar essa função desconhecida de variável, pois ela vai representar quantidades como corrente elétrica, posição, fluxo de um líquido, temperatura etc., que são variáveis de um sistema dinâmico. Por exemplo, a Equação 1.1 descreve matematicamente o comportamento um circuito elétrico que tem uma fonte de tensão como entrada ($v_{in}(t)$); um resistor R e um indutor L , todos em série; e $i(t)$ é a corrente elétrica:

$$v_{in}(t) = R \cdot i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.1)$$

- E temos as equações diferenciais parciais (EDP), que envolvem derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis. Por exemplo, o problema de condução de calor em um sólido tridimensional, homogêneo e isotrópico (coeficiente de difusão térmica constante em todo o seu volume), sem fontes de calor, é dado pela EDP da Equação 1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

Neste caso, u é a temperatura do sólido, que é função do espaço e do tempo, ou seja, $u = u(x, y, z, t)$. O termo η é o coeficiente de difusão térmica; o termo à esquerda da igualdade é a derivada parcial da temperatura em relação ao tempo; e os termos dentro dos parênteses são as derivadas segunda parciais da temperatura em relação aos eixos coordenados x , y , z .

Nós, que estamos estudando teoria de controle moderno, vamos utilizar as EDOs, que são mais simples. Você irá perceber, ao longo deste material, que esse tipo de equação é aplicável a inúmeros problemas práticos de controle e modelagem de sistemas dinâmicos.

Uma EDO pode ser classificada em linear ou não linear. Para uma EDO ser linear, ela deve poder ser escrita da forma apresentada na Equação 1.3, em que os termos $a_i(t)$ e $b(t)$ são funções dependentes

da mesma variável que $f(t)$ depende. Os sobrescritos de $f(t)$ denotam a ordem de sua derivada, e a EDO é dita linear de ordem n . Uma EDO é dita não linear quando ela não puder ser escrita a partir da Equação 1.3.

$$a_0(t) \cdot f(t) + a_1(t) \cdot f^{(1)}(t) + a_2(t) \cdot f^{(2)}(t) + \dots + a_n(t) \cdot f^{(n)}(t) = b(t) \quad (1.3)$$

Uma última classificação é necessária para caracterizar os tipos de sistemas dinâmicos com os quais vamos trabalhar, que é a de sistemas invariantes no tempo. O termo $a_i(t)$ geralmente descreve alguma propriedade do sistema real. No nosso caso, essas propriedades serão dadas por valores constantes, ou seja, não dependentes de t , como a massa de um corpo, a resistência elétrica, capacitância térmica etc. Tais sistemas são denominados sistemas lineares invariantes no tempo (sistemas LTI ou simplesmente SLIT). Nesses sistemas, a saída depende apenas da variável de entrada, como mostra a Figura 1.6

Figura 1.6 | Bloco de um sistema LIT

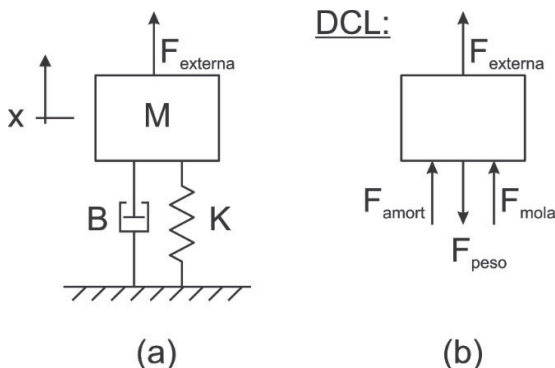


Fonte: elaborada pelo autor.

Embora alguns elementos, na realidade, não tenham suas propriedades completamente lineares, aplicamos a hipótese de que os elementos serão utilizados de forma que seus comportamentos sejam muito próximos do comportamento linear. Por exemplo: se uma mola for deformada acima de um certo limite de comprimento, a Lei de Hooke ($f(t) = k \cdot x(t)$) não é mais aplicável, pois a mola deixa de se comportar de maneira elástica. Mas se o alongamento da mola não for grande o bastante, a hipótese de comportamento linear é adequada. Durante nossos estudos, todos os elementos terão características constantes.

Agora, modelemos um sistema simples como o massa-mola-amortecedor (Figura 1.7) com força externa para aplicar esse conceito.

Figura 1.7 | Ilustração de um sistema massa-mola-amortecedor com Diagrama de Corpo Livre: (a) ilustração do sistema; (b) diagrama de corpo livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Façamos com que a posição $x = 0$ seja definida exatamente naquela em que o sistema se encontra em equilíbrio estático, ou seja, velocidade nula, e na posição em que a força da mola é igual à força peso do corpo.

Ao aplicarmos uma força externa, a equação que rege o deslocamento da massa (Equação 1.4) é obtida por meio da segunda lei de Newton, a partir do diagrama de corpo livre da Figura 1.7b.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sum f = -f_{\text{mola}} - f_{\text{amort}} + f_{\text{ext}} \\ \sum f = M\ddot{x} \end{array} \right. &\Rightarrow -Kx - B\dot{x} + f_{\text{ext}} = M\ddot{x} \\ \Rightarrow M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx &= f_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

A Equação 1.4 é a dita equação diferencial ordinária (EDO) linear a parâmetros constantes cuja solução é uma função no tempo. Nesse caso, a solução será a posição do corpo ao longo do tempo.

Existem vários métodos matemáticos para obter essa solução. Aqui estudaremos o método que envolve a transformada de Laplace, pois uma das vantagens deste método é que ele transforma a EDO em uma equação algébrica, o que torna a resolução do problema mais simples.



Pesquise mais

A utilização da transformada de Laplace traz outras vantagens importantes que são atrativas para que o profissional a utilize como ferramenta.

Confira mais vantagens da transformada de Laplace na resolução de

EDOs no capítulo 4 do livro *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta* do Prof. Dr. Luiz Carlos Felício. Disponível em: <<http://www2.eesc.usp.br/labdin/luiz/Modelagem%20da%20Dinamica%20de%20Sistemas%20e%20Estudo%20da%20Resposta.pdf>>. Acesso em: 17 jun. 2017.

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é dada conceitualmente pela Equação 1.5.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \triangleq F(s) \quad (1.5)$$

Esta transformação leva uma função do domínio do tempo (t) para o domínio da frequência (s).



Assimile

A transformada de Laplace transforma uma função de uma variável real t (domínio do tempo) em uma função de uma variável complexa s (domínio da frequência).

Como pode ser visto na Equação 1.5, a definição da transformada de Laplace se trata de uma integral imprópria. Na prática, para aplicar a transformada, fazemos uso das propriedades da transformada de Laplace, juntamente com resultados já conhecidos por serem bastante recorrentes.



Exemplificando

Mais adiante, vamos conhecer a maneira mais prática de aplicar a transformada de Laplace. Mas, antes disso, vamos ver um exemplo de como fazer um cálculo de transformada de Laplace utilizando a definição para entendermos melhor como surge um resultado. Utilizemos a equação da pressão hidrostática $p(t) = \rho \cdot g \cdot h(t)$ no fundo de um tanque

com fluido de densidade $\rho = 500 \frac{kg}{m^3}$, cujo nível segue a função $h(t) = 5t$ e a gravidade é $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

$$\mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[500 \cdot 9,81 \cdot 5t] = \int_{0^+}^{\infty} 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

Fazendo substituição por partes $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$ em que $u = t \Rightarrow du = dt$ e $dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[p(t)] &= 24.545 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A t \cdot e^{-st} dt \\
&= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\left. \frac{t \cdot e^{-st}}{-s} \right|_{0^+}^A - \int_{0^+}^A \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] \\
&= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_{0^+}^A \right] \\
\mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \left(\lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-sA}}{-s^2} \right] + \frac{1}{s^2} \right) \quad (1.6)
\end{aligned}$$

O primeiro termo dentro do limite da Equação 1.6 é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então, podemos aplicar a regra de L'Hôpital, que assegura que, no caso de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, podemos obter o resultado do limite por meio da divisão da derivada do numerador pela derivada do denominador. Podemos resolver o segundo termo por aplicação direta do limite. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \left(\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{-s \cdot e^{sA}} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-sA}}{-s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \\
&= 24.525 \cdot \left(\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{-sAe^{sA}} + \frac{1}{s^2} \right) \\
\mathcal{L}[p(t)] &= P(s) = \frac{24.525}{s^2}
\end{aligned}$$

Avançando, você verá que poderemos resolver esta transformada em apenas um passo, pois funções afim (conhecidas como rampa) têm transformada conhecida.

Vamos aplicar a transformada de Laplace na Equação 1.4 do sistema da Figura 1.7 para entendermos, na prática, como se realiza o processo. Iniciamos aplicando a transformada, como mostra a Equação 1.7.

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = \mathcal{L}[f_{ext}] \quad (1.7)$$

O lado esquerdo da equação é uma soma de parcelas, cada uma multiplicada por um valor constante. Em um caso como esse, podemos aplicar a **propriedade da linearidade** da transformada de Laplace:

- A transformada da soma das parcelas é igual à soma das transformadas das parcelas ($\mathcal{L}[\ddot{x} + \dot{x} + x] = \mathcal{L}[\ddot{x}] + \mathcal{L}[\dot{x}] + \mathcal{L}[x]$).

- A transformada de uma função multiplicada por uma constante é igual à multiplicação da constante pela transformada da função ($\mathcal{L}[Kx] = K \cdot \mathcal{L}[x]$).

Então, com essa propriedade, podemos reescrever o lado esquerdo da Equação 1.7

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = M \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}] + B \cdot \mathcal{L}[\dot{x}] + K \cdot \mathcal{L}[x] \quad (1.8)$$

Agora, temos as transformadas da derivada primeira e da derivada segunda. Elas também são conhecidas (Equações 1.9 e 1.10).

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s - x(0) \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) \quad (1.10)$$

Como temos condições iniciais nulas, tanto a velocidade ($\dot{x}(0)$) quanto a posição iniciais ($x(0)$) são zero.

Então, substituindo as Equações 1.8, 1.9 e 1.10 em 1.7, temos a Equação 1.11.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ M \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)) + B \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s - x(0)) + K \cdot \mathcal{L}[x] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[x] \cdot (Ms^2 + Bs + K) &= \mathcal{L}[f_{ext}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para escrever a transformada de Laplace de uma função, é comum usar a função em letra maiúscula, por exemplo: a transformada de uma função $f(t)$ (ou simplesmente f) é denotada pela função $F(s)$ (ou apenas F). Então, a Equação 1.12 se torna:

$$\begin{aligned} X \cdot (Ms^2 + Bs + K) &= F_{ext} \Rightarrow \\ \frac{X}{F_{ext}} &= \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \end{aligned} \quad (1.12)$$

A forma como a se encontra a Equação 1.12 é chamada de função transferência. Esse formato é de extrema importância no estudo de modelos dinâmicos e sistemas de controle.

A partir da função transferência e de uma entrada definida, ou seja, uma função temporal para a força externa, podemos obter a resposta do sistema por meio da transformada inversa de Laplace. Algumas entradas amplamente utilizadas têm suas transformadas já conhecidas, como pode ser visto no quadro a seguir:

Função	Transformada de Laplace
$\mu(t - t_0)$ (função degrau ou Heaviside)	$\mathcal{L}[\mu(t - t_0)] = \frac{1}{s} e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$, então $\mathcal{L}[\mu(t)] = \frac{1}{s}$
$t \cdot \mu(t)$ (função rampa)	$\mathcal{L}[t \cdot \mu(t)] = \frac{1}{s^2}$
$\delta(t - t_0)$ (função impulso ou delta de Dirac)	$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$, então $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
$\text{sen}(\omega t)$	$\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t)$	$\mathcal{L}[\text{cos}(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Existem vários outros resultados já conhecidos que você pode utilizar para aplicar tanto a transformada de Laplace direta quanto a inversa.

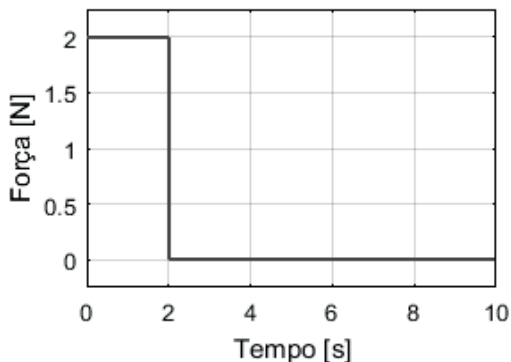
Veja, por exemplo, a tabela presente no apêndice D do livro *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta*, do Prof. Dr. Luiz Carlos Felício.

Disponível em: <<http://www2.eesc.usp.br/labdin/luiz/Modelagem%20da%20Dinamica%20de%20Sistemas%20e%20Estudo%20da%20Resposta.pdf>>. Acesso em: 17 jun. 2017.

Vamos submeter o sistema massa-mola-amortecedor a uma entrada da forma de um pulso quadrado (Equação 1.13, Figura 1.8) de força de 2 segundos de duração com amplitude de $2N$, equivalente a puxar para cima a massa do sistema com uma força de $2N$ durante 2 segundos, começando em $t = 0$.

$$f(t) = 2 \cdot (\mu(t) - \mu(t - 2)) \quad (1.13)$$

Figura 1.8 | Gráfico da entrada de força do sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para aplicar a entrada na função transferência do sistema precisamos primeiro obter sua transformada de Laplace. Observando a propriedade de linearidade e a tabela, obtemos a transformada, como pode ser visto na Equação 1.14.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[2 \cdot (\mu(t) - \mu(t-2))] = 2 \cdot (\mathcal{L}[\mu(t)] - \mathcal{L}[\mu(t-2)]) \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{2}{s}(1 - e^{-2s})\end{aligned}\quad (1.14)$$

Substituindo a Equação 1.14 na função transferência do sistema (Equação 1.12), obtemos a Equação 1.15.

$$\begin{aligned}\text{Entrada 1: } \frac{X}{\frac{2}{s}(1 - e^{-2s})} &= \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \\ X &= \frac{2 - 2e^{-2s}}{Ms^3 + Bs^2 + Ks}\end{aligned}\quad (1.15)$$

A Equação 1.14 descreve a resposta do sistema no domínio da frequência devido à entrada imposta. Para podermos analisar o comportamento do sistema no tempo, precisamos transformar essas equações do domínio da frequência para o domínio do tempo, e isso é feito aplicando-se a transformada inversa de Laplace.

Na prática, isso é realizado rescrevendo-se a equação que está no domínio da frequência com o objetivo de se fazer surgir os resultados da tabela de transformadas de Laplace.

Então, apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.14 para entender na prática como se deve proceder.

É comum obtermos funções transferência, que são divisões de polinômios e, para fazermos surgir resultados conhecidos, usamos o

procedimento de expansão em frações parciais, também utilizado no cálculo de integração de divisão de polinômios.

Para aplicarmos a transformada inversa de Laplace no sistema massa-mola-amortecedor em questão, vamos supor as seguintes propriedades para o sistema: $M = 2\text{kg}$, $K = 20 \frac{N}{m}$ e $B = 14 \frac{N \cdot s}{m}$.

Juntamente com a substituição das propriedades, apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.14.

$$X = \frac{2 - 2e^{-2s}}{2s^3 + 14s^2 + 20s} \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow X = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5} \quad (1.17)$$

Da Equação 1.17, usando a identidade de polinômios, montamos os sistemas de Equações 1.18.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 7A+5B+2C=0 \\ 10A=1-e^{-2s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1-e^{-2s}}{10} \\ B = \frac{e^{-2s}-1}{6} \\ C = \frac{1-e^{-2s}}{15} \end{cases} \quad (1.18)$$

Substituindo A , B e C na Equação 1.17, temos a Equação 1.19.

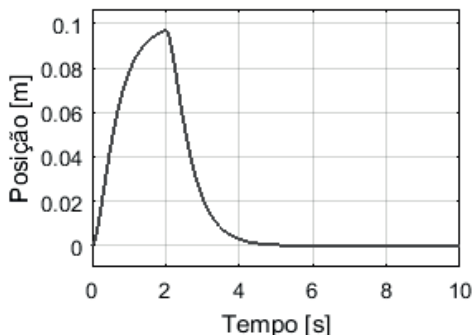
$$\begin{aligned} X &= \frac{1-e^{-2s}}{10s} + \frac{e^{-2s}-1}{6(s+2)} + \frac{1-e^{-2s}}{15(s+5)} \Rightarrow \\ X &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{e^{-2s}}{s+2} - \frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{1}{s+5} - \frac{e^{-2s}}{s+5} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Agora, utilizando a tabela de resultados conhecidos das transformadas de Laplace juntamente com a propriedade da linearidade, temos a Equação 1.20.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X] &= \frac{1}{10} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right] \right) + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \right) + \frac{1}{15} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+5}\right] \right) \\ x(t) &= \frac{1}{10} \cdot (\mu(t) - \mu(t-2)) + \frac{1}{6} \cdot (\mu(t-2) \cdot e^{4-2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{15} \cdot (e^{-2t} - \mu(t-2) \cdot e^{10-5t}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Finalmente, temos a Equação 1.20, que descreve a saída do sistema massa-mola-amortecedor, de acordo com uma entrada pulso quadrado de força. A Figura 1.9 mostra a posição da massa ao longo do tempo. Podemos observar que, para os parâmetros escolhidos, o sistema dinâmico apresenta resposta sobreamortecida.

Figura 1.9 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à entrada pulso quadrado



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

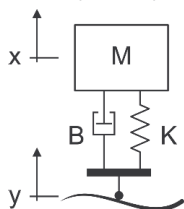
A resposta no tempo encontrada para um sistema massa-mola-amortecedor sobreamortecido com um pulso quadrado como entrada faz sentido?

Sem medo de erro

Com a finalidade de projetar o sistema de controle para um sistema dinâmico, é importante conhecer o comportamento deste quando em funcionamento passivo, ou seja, sem atuação. Por isso, é importante que você obtenha a resposta no tempo da suspensão veicular passiva a fim de entender seu comportamento “natural”.

A Figura 1.10 representa o modelo de uma suspensão veicular passiva, que é matematicamente descrito de acordo com a Equação 1.20, sendo que a posição vertical, x , da carroceria e a posição vertical da roda (a roda é tratada como uma massa pontual, ou seja, sua massa é desprezível), y , são definidas nulas de maneira que a somatória de forças no corpo é nula.

Figura 1.10 | Ilustração do modelo da suspensão passiva veicular



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum F = M\ddot{x}$$

$$-B(\dot{x} - \dot{y}) - K(x - y) = M\ddot{x} \quad (1.20)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 1.20, temos:

$$-BXs + BYs - KX + KY = MXs^2$$

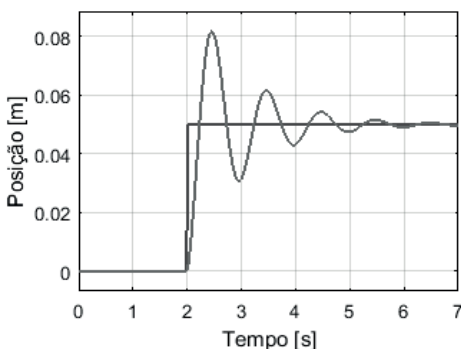
$$\frac{X}{Y} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$$

É sabido que o automóvel tem massa 10^3 kg e a suspensão tem rigidez $4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e amortecimento $2 \cdot 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$. Temos a função transferência e os parâmetros do sistema, mas falta a entrada. Suponha que a entrada seja o automóvel passando por um degrau de **5cm** de altura no asfalto aos 2 segundos de simulação (descrita pela Equação 1.21).

$$y(t) = 0,05 \cdot \mu(t - 2) \quad (1.21)$$

Com todos os dados em mãos, é possível obter o comportamento da posição vertical da carroceria, ou seja, a resposta do sistema à entrada da Equação 1.21. A Figura 1.11 mostra o gráfico da resposta no tempo.

Figura 1.11 | Resposta da suspensão passiva à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

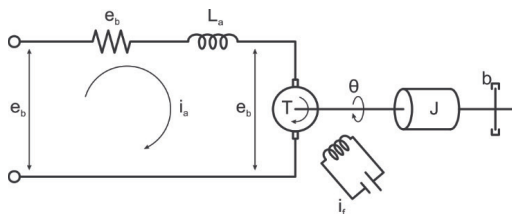
Perceba que a oscilação da carroceria é muito grande: um degrau de 5 cm causa uma vibração de amplitude inicial aproximadamente igual a 8 cm. Por se tratar de um automóvel, tal vibração causa desconforto aos passageiros e pode, inclusive, depreciar a dirigibilidade do automóvel, ou seja, o veículo se torna perigoso tanto para o condutor quanto para os transeuntes e para os outros carros.

Resposta de um motor CC

Descrição da situação-problema

Você é responsável pela área de testes de uma empresa que fabrica motores de corrente contínua (motor CC). As equações do modelo (Equações de 1.22 a 1.24), baseadas na Figura 1.12, já são conhecidas.

Figura 1.12 | Motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (1990, p. 119).

$$e_b = K_b \dot{\theta}(t) \quad (1.22)$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t) = e_a(t) \quad (1.23)$$

$$J \ddot{\theta}(t) + b \dot{\theta}(t) = K i_a(t) \quad (1.24)$$

Em que:

$e_b(t)$ é a força contraeletromotriz [V].

K_b é a constante de força contraeletromotriz $\left[\frac{V \cdot s}{rad} \right]$.

$\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$ são o ângulo (a saída do sistema), a velocidade angular e a aceleração angular do eixo do motor, respectivamente.

L_a é a indutância da armadura [H].

$i_a(t)$ é a corrente de armadura R_a .

R_a é a resistência elétrica da armadura [Ω].

$e_a(t)$ é a tensão aplicada na armadura, ou seja, a entrada do sistema [V].

J é o momento de inércia equivalente do motor e do carregamento no eixo [$kg \cdot m^2$].

b é coeficiente de atrito equivalente do motor e carregamento no eixo $\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$.

K é a constante do motor $\left[\frac{N \cdot m}{A} \right]$.

Como você é o encarregado da área de testes, um novo motor CC, recém-desenvolvido, chega da produção para que você conduza os testes. Ele foi projetado com o propósito de mover um redutor que é muito sensível a vibrações.

O novo equipamento consta com as seguintes características (a resistência de armadura e a inércia do eixo são desprezíveis):

$$L_a = 2,38mH$$

$$R_a = 0\Omega$$

$$K_b = 0,81 \frac{V \cdot s}{m}$$

$$b = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$$

$$J = 0kg \cdot m^2$$

$$K = 1,2 \frac{N \cdot m}{A}$$

Antes de partir para o experimento real, você deve rever o equacionamento do modelo com a entrada igual à que foi considerada em seu desenvolvimento: ligá-lo em tensão de alimentação de **10V**.

Para que o projeto seja dado como bem-sucedido, é necessário que a posição angular do eixo seja incrementado linearmente com o tempo, para que o redutor não sofra com as vibrações.

Afinal, o projeto foi bem sucedido?

Resolução da situação-problema

Aplicando a transformada de Laplace nas Equações 1.22, 1.23 e 1.24 do modelo com condições iniciais nulas (lembrando que $R_a = 0$ e $J = 0$), temos

$$E_b = K_b \Theta s \quad (1.25)$$

$$L_a I_a s + E_b = E_a \quad (1.26)$$

$$b \Theta s = K I_a \quad (1.27)$$

Substituindo a Equação 1.25 pela Equação 1.26, obtemos I_a :

$$I_a = \frac{E_a - K_b \Theta s}{L_a s}$$

Substituindo I_a na Equação 1.27, obtemos a função transferência para o sistema (Equação 1.28).

$$\frac{\Theta}{E_a} = \frac{K}{L_a b s^2 + K K_b s} \quad (1.28)$$

Substituindo E_b pela transformada de Laplace da função degrau de entrada (Equação 1.29) juntamente com os valores numéricos para o sistema, temos a Equação 1.30.

$$E_b = \mathcal{L}[10\mu(t)] = \frac{10}{s} \quad (1.29)$$

$$\Theta = \frac{12}{1.3328 \cdot 10^{-4} s^3 + 0,972 s^2} \quad (1.30)$$

Aplicando frações parciais e, finalmente, a transformada inversa de Laplace, obtemos a Equação 1.31.

$$\theta(t) = 12,3457t + 1,692 \cdot 10^{-4} e^{-7292,92t} - 1,692 \cdot 10^{-4} \quad (1.31)$$

O termo exponencial da Equação 1.31 é desprezível para tempos maiores que poucos microssegundos, ou seja, o regime transitório tem curta duração e, em regime permanente, o ângulo do eixo é linear com o tempo. Portanto, o projeto foi um sucesso.

Faça valer a pena

1. A transformada de Laplace é de grande utilidade para a resolução de equações diferenciais ordinárias, que são obtidas a partir da modelagem de sistemas dinâmicos.

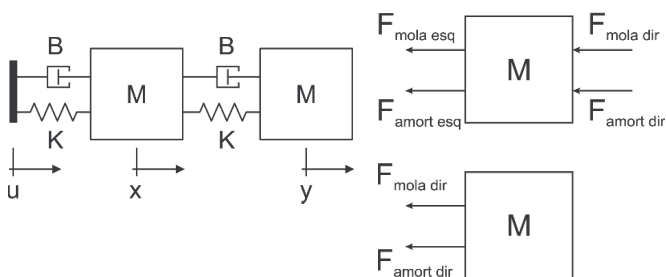
Sobre a transformada de Laplace, podemos afirmar que ela:

- Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência.
- Associa a saída à entrada do sistema.
- Facilita a obtenção da entrada de um sistema dinâmico de parâmetros constantes.
- É uma transformação linear, pois $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$.
- Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio do período da função.

2. O braço de um sistema robótico que desenvolve altas acelerações é submetido a esforços internos de grandes magnitudes, e esses esforços podem fazer com que o braço sofra uma flexão que não pode ser desprezada. Então, para modelar uma situação dinâmica desse tipo, podemos aumentar o número de corpos (acrescentar massa no sistema) conectados entre si por molas e amortecedores.

Suponha que um braço robótico tenha o modelo representado pela figura em questão, cuja função transferência é a equação a seguir:

DCL:



Sendo o equacionamento da massa à esquerda a equação $-K(x-u) - B(\dot{x}-\dot{u}) - K(x-y) - B(\dot{x}-\dot{y}) = M\ddot{x}$ e o equacionamento da massa à direita a equação $-K(y-x) - B(\dot{y}-\dot{x}) = M\ddot{y}$, qual a função transferência entre a saída Y e a entrada U, levando em consideração condições iniciais nulas?

a) $\frac{Y}{U} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$

b) $\frac{Y}{U} = \frac{(Bs + K)^2}{(Ms^2 + Bs + K)(Ms^2 + 2Bs + 2K) - (Bs + K)^2}$

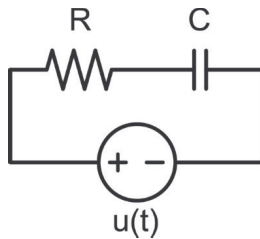
$$c) X = \frac{Y(Bs + K) + U(Bs + K)}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$d) Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$e) \frac{Y}{U} = e^{-\sqrt{\frac{K}{M}}t} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot t\right)$$

3. O sistema elétrico da figura tem a tensão $u(t)$ como entrada e a corrente $i(t)$ como saída, de acordo com a equação a seguir:

Circuito RC



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{I}{U} = \frac{s}{Rs + \frac{1}{C}}$$

Qual é a resposta do sistema com capacitância $3,4\mu C$ e resistência 220Ω para uma entrada senoidal de frequência $60Hz$ e amplitude unitária ($u(t) = \sin(120\pi t)$), supondo condições iniciais nulas?

a) Não existe, pois a transformada de Laplace não é aplicável a sistemas elétricos.

b) O sistema elétrico é descrito por fasores, que são grandezas complexas. Logo, não é necessário obter função transferência.

c) $i(t) = \sin(120\pi t) + 3,4\mu \cos(120\pi t)$.

d) $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \sin(120\pi t) + 1,187 \cdot 10^{-3} e^{-1,337 \cdot 10^3 t}$.

e) $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \sin(120\pi t)$.

Seção 1.3

Problemas práticos sobre sistemas de controle

Diálogo aberto

Nesta seção, começaremos a utilizar o software MATLAB para resolver as equações diferenciais ordinárias resultantes da modelagem de sistemas dinâmicos. Esse software é uma poderosa ferramenta para auxiliar no projeto do controlador para um sistema dinâmico. A utilização do MATLAB facilita e agiliza tanto a visualização e análise da resposta de sistemas dinâmicos quanto a prototipagem de controladores para obtermos o comportamento desejado para o sistema.

Conheceremos os comandos utilizados para inserir as equações diferenciais analíticas no MATLAB para fazer a substituição dos valores das propriedades do sistema real no equacionamento e para aplicar as transformadas direta e inversa de Laplace com a finalidade de obtermos a resposta temporal do sistema para uma dada entrada.

Voltando ao caso em estudo, lembre-se que você faz parte da equipe de engenharia de uma empresa automotiva e tem a tarefa de desenvolver um sistema de suspensão ativa.

Independentemente do sistema dinâmico, antes de começarmos a projetar seu controle, devemos conhecer bem seu comportamento não atuado. Com a suspensão automotiva não é diferente.

Na seção anterior, com a finalidade de conhecer o comportamento da suspensão, você obteve a função transferência do sistema de suspensão passiva. Para continuar o projeto, é importante submeter o modelo a condições próximas às da realidade para que seu comportamento possa ser analisado. Como podemos realizar esse procedimento utilizando o MATLAB?

Não pode faltar

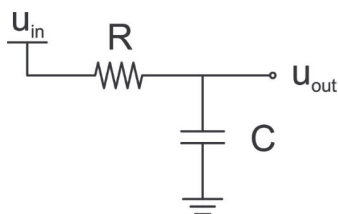
Vimos na Seção 1.2 como trabalhar com a transformada de Laplace. Esta é calculada por meio de uma integral imprópria da multiplicação de um termo exponencial pela função que queremos transformar. Notoriamente, pode ser muito trabalhoso e complexo o

cálculo da transformada de uma função quando feito utilizando-se a definição. Por esse motivo, tanto para a transformada direta quanto para a inversa, fazemos uso de suas propriedades matemáticas, juntamente com uma tabela de resultados conhecidos. Contudo, mesmo com a utilização dessas técnicas, que facilitam a obtenção dos resultados, as tarefas mais comuns presentes no processo do projeto de controladores, como testar a(s) equação(ões) do(s) controlador(es), verificar estabilidade, analisar desempenho etc., podem retardar muito o desenvolvimento de um projeto se forem feitas sem o auxílio computacional.

Portanto, é muito comum a utilização de *softwares* matemáticos como o MATLAB, que permite que você, como projetista do controle, realize as mais diversas análises e testes (tanto com o modelo do sistema dinâmico quanto com o controle que você estiver desenvolvendo) em pouco tempo e com muito menos esforço. Com isso, é possível que você invista mais tempo de projeto procurando e analisando desempenho e testando soluções do que realizando numerosos e complexos cálculos para obter cada único resultado.

Para exemplificar como deve ser utilizado o MATLAB, suponha que você precise simular um filtro passa baixa (circuito Resistor-Capacitor (RC)), ilustrado na Figura 1.13.

Figura 1.13 | Filtro RC



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a lei das malhas com condições iniciais nulas, podemos obter a Equação 1.32 para o filtro.

$$u_{in}(t) = RC \cdot \frac{d}{dt} u_{out}(t) + u_{out}(t) \quad (1.32)$$

E já sabemos que a transformada de Laplace do sistema resulta na Equação 1.33.

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{1+RCs} \quad (1.33)$$

A tarefa é entender como podemos obter a função transferência utilizando o software MATLAB.

Primeiramente, precisamos é inserir a Equação 1.32 no MATLAB, que é feito da maneira como vemos no Quadro 1.2.

Quadro 1.2 | Declaração das variáveis e da Equação 1.32

01	>> syms t u_in(t) R C u_out(t);
02	>> eq14 = u_in - R * C * diff(u_out(t), t) - u_out(t) == 0;

Fonte: elaborada pelo autor.

Na linha 1 do Quadro 1.2, começamos declarando, no *command window* ou em um novo *script*, quais serão as variáveis simbólicas: t para o tempo, $u_{in}(t)$ para a tensão de entrada, R para resistência, C para a capacitância e $u_{out}(t)$ para a tensão do capacitor (tensão de saída).

O MATLAB é um software originalmente numérico e, para lidar com equações analíticas, com variáveis e funções simbólicas, você precisa declarar as variáveis utilizando o comando `syms`, seguido de cada variável a ser declarada.



Pesquise mais

O comando `syms`, pertencente à *toolbox* de matemática simbólica do MATLAB, permite declarar variáveis e funções simbólicas. Entretanto, por serem um tipo diferente de entidade, nem todos os comandos aceitam simbólicos como argumento.

Utilizando o comando `help syms` no *command window*, navegue pela ajuda do MATLAB para descobrir funções que podem ser utilizadas com as variáveis e funções simbólicas ou acesse o link a seguir para saber um pouco mais: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/topicos/intmatl.pdf>>. Acesso em: 9 jun. 2017.

É na linha 2 do Quadro 1.2 que ocorre literalmente a inserção da Equação 1.32. Perceba que o símbolo de igualdade da equação deve necessariamente ser duplo (`==`), caso contrário, o MATLAB não interpretará a expressão como uma equação matemática, mas sim como uma atribuição.



Assimile

Para o MATLAB, o símbolo `=` não é interpretado como nós interpretamos na matemática. Para o software, esse símbolo significa uma operação de atribuição. Ele é utilizado para instanciarmos ou alterarmos variáveis dentro do programa.

Na Equação 1.32 há a presença da derivada da tensão do capacitor e, para inserirmos esse termo no MATLAB, usamos a função `diff`, que, de acordo com o item ajuda (ou *help*) do MATLAB, serve para calcular a derivada numérica de vetores, mas, como a entrada é uma função simbólica, a função `diff` retorna a derivada analítica da função de entrada em relação à variável especificada no segundo argumento que, no caso, é a variável simbólica t .

Agora, podemos utilizar a função `laplace` do MATLAB para transformar toda a expressão `eq14` do domínio do tempo para o domínio da frequência. No caso do circuito, temos o resultado mostrado na linha 4 do Quadro 1.3.

Quadro 1.3 | Transformada de Laplace da Equação 1.32

03	<code>>> l_eq14 = laplace(eq14);</code>
04	<code>l_eq14 = laplace(u_in(t), t, s) == laplace(u_out(t), t, s) + ... - C*R*(u_out(0) - s*laplace(u_out(t), t, s))</code>

Fonte: elaborada pelo autor.

A função `laplace`, por padrão, supõe que a variável original é dada pela letra t , e a variável do resultado da transformada de Laplace é dada pela letra s , o que é um bom padrão, já que o mais comum é utilizar exatamente essas letras.

A Equação 1.34 representa a resposta do MATLAB, apresentada na linha 4 do Quadro 1.3.

$$\mathcal{L}[u_{in}(t)] = \mathcal{L}[u_{out}(t)] + RCs \cdot (u_{out}(t=0) - \mathcal{L}[u_{out}(t)]) \quad (1.34)$$

Como adotamos as condições iniciais nulas, afirmamos que $u_{out}(t=0)=0$ e, para facilitar a visualização, vamos substituir os termos `laplace(u_in(t), t, s)` e `laplace(u_out(t), t, s)` por U_{in} e U_{out} , respectivamente.

Quadro 1.4 | Substituição das condições iniciais nulas

05	<code>>> l_eq14 = subs(l_eq14,{'laplace(u_in(t), t, s)',... 'laplace(u_out(t),t,s)','u_out(0)'},{U_in,U_out,0})</code>
06	<code>l_eq14 = U_in == U_out + C*R*U_out*s</code>

Fonte: elaborada pelo autor.

Para substituir esses valores e variáveis na equação 1_{eq14} , utilizamos a função `subs` (linha 5 do Quadro 1.4), cujo primeiro argumento deve ser a função simbólica na qual ocorrerão as substituições (1_{eq14}). O segundo argumento deve ser uma célula que contém as variáveis simbólicas que serão alvo da substituição (`{'laplace(u_in(t), t, s)', 'laplace(u_out(t), t, s)', 'u_out(0)'}`), e o terceiro argumento deve ser uma célula com valores ou novas variáveis simbólicas, que substituirão as variáveis listadas no argumento anterior (`{U_in, U_out, 0}`). No MATLAB, uma célula é um tipo de variável. Uma célula é delimitada por chaves e seus elementos são separados por vírgulas.

Para obtermos a saída U_{out} do sistema, vamos utilizar a função `solve` (linha 7 do Quadro 1.5).

Quadro 1.5 | Isolando U_{out}

07	<code>>> U_out = solve(1_eq14, U_out)</code>
08	<code>U_out =</code>
	<code>U_in/(C*R*s + 1)</code>

Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro argumento de `solve` é a equação que se deseja resolver, e o segundo argumento indica para qual variável a equação deve ser resolvida. O resultado de `solve` será guardado na variável U_{out} , como mostrado na linha 7. O resultado pode ser observado na linha 8 do Quadro 1.5.

Com isso, temos a saída de tensão U_{out} no domínio da frequência em função da entrada de tensão U_{in} . Para obtermos a resposta temporal do sistema, precisamos definir uma função para a entrada U_{in} e então aplicarmos a transformada inversa de Laplace, que trará a função do domínio da frequência para o domínio do tempo.

Sabemos que o sistema tem condições iniciais nulas ($u_{out}(t=0)=0$). Suponhamos que a resistência e a capacitância são de $10^3 \Omega$ e $10^{-6} F$, respectivamente, e que a tensão de entrada (dada em volts) se comporte como uma função degrau de amplitude $5V$ (Equação 1.35).

$$u_{in}(t) = 5\mu(t) \quad (1.35)$$

No MATLAB, a função degrau é representada pela função `heaviside`, que segue o mesmo padrão do tratamento matemático: `heaviside(t-t0)` gera uma função degrau que é zero para $t < t_0$, vale 0,5 em $t = t_0$ e vale 1 em $t > t_0$.

Como a Equação 1.35 está no domínio do tempo, devemos aplicar a transformada de Laplace para podermos substituir em `U_out`. Juntamente com a transformada de Laplace da entrada degrau, substituímos os valores da resistência e da capacitância (linha 9 do Quadro 1.6).

Quadro 1.6 | Substituição dos parâmetros do sistema e obtenção da equação no domínio de Laplace

09	<code>>> U_out2 = subs(U_out,{'U_in','R','C'},... {laplace(5*heaviside(t)),1000,10^-6})</code>
10	<code>U_out2 = 5/(s*(s/1000 + 1))</code>
11	<code>>>U_out2 = simplify(U_out2)</code>
12	<code>U_out2 = 5000/(s*(s + 1000))</code>
13	<code>>> pretty(U_out2)</code> <div>5000 ----- s (s + 1000)</div>

Fonte: elaborada pelo autor.

As funções utilizadas nas linhas 11 e 12 do Quadro 1.6 não são obrigatórias, mas facilitam a visualização da equação. A função `simplify` simplifica matematicamente a equação e a função `pretty` a mostra de uma maneira mais legível.

Perceba que utilizamos outra variável simbólica, `U_out2`, para armazenar o resultado da substituição numérica. Isso é uma prática interessante, pois dessa maneira mantém-se a equação original (Equação 1.33) intacta para realizarmos outros testes com o sistema substituindo outros valores.

Por termos utilizado a transformada de Laplace, sabemos que estamos no domínio da frequência. Caso desejássemos obter a resposta do sistema no domínio do tempo, precisaríamos aplicar a transformada inversa de Laplace, que é realizada via software pela

função `ilaplace` que, por padrão, supõe que a variável s é a variável do domínio de Laplace e t é a variável de tempo. A transformação inversa é realizada na linha 13 do Quadro 1.7, cujo resultado está apresentado na Equação 1.36.

Quadro 1.7 | Aplicação da transformada inversa de Laplace e geração de gráfico

```
13  >> u_out_degrau = ilaplace(U_out2)
14  u_out_degrau =
    5 - 5*exp(-1000*t)
15  >> ezplot(u_out_tempo,[0 0.01])
16  >> grid on
```

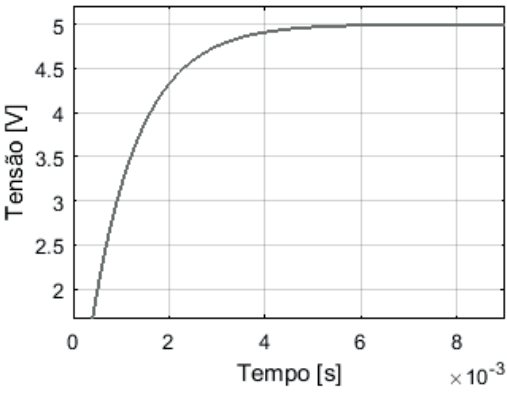
Fonte: elaborada pelo autor.

$$u_{out}(t) = 5 - 5e^{-1000t} \tag{1.36}$$

A linha 15 do Quadro 1.7 mostra como utilizar o comando `ezplot` para traçar o gráfico da resposta no tempo de 0 a 0,01 s, e a linha 16 do Quadro 1.7 ativa a grade do gráfico, para melhor visualização. Perceba que o comando mais comum para traçar gráficos é o `plot`, mas, como temos uma função simbólica, o comando `ezplot` é mais adequado e simplificado para gerar os gráficos.

A Figura 1.14 mostra o gráfico de resposta no tempo da saída apresentada na Equação 1.36.

Figura 1.14 | Resposta no tempo do circuito RC à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Você acompanhou o procedimento da aplicação de uma entrada em um sistema com condições iniciais nulas. Se as condições iniciais não fossem nulas e, por exemplo, o capacitor tivesse uma tensão inicial de **0,5V**, o que teria que ser feito de diferente em relação ao procedimento mostrado?

Para obter respostas para outras entradas, basta utilizar o comando `subs`, o mesmo utilizado na linha 9 do Quadro 1.6, com o valor da entrada desejada no terceiro argumento. Para impor uma entrada senoidal, por exemplo, $u_m(t) = \text{sen}(10t)$, a substituição ficaria:

Quadro 1.8 | Substituição da entrada senoidal

```
17 >> U_out3 = subs(U_out, {'U_in', 'R', 'C'}, ...
    {laplace(sin(10*t)), 1000, 10^-6})
```

Fonte: elaborada pelo autor.

A possibilidade de testar e avaliar diversas entradas diferentes para um sistema simplifica o processo de averiguação da performance da resposta do sistema dinâmico no tempo, fator esse muito importante durante o projeto de um controlador, já que a prototipagem por meio de simulação é o meio mais utilizado na área de desenvolvimento de uma empresa, devido ao mínimo custo que tal processo tem, justamente por não necessitar de um protótipo real. Claramente, o modelo matemático não fornece respostas perfeitamente iguais a um protótipo real, mas a utilização em simulação de um modelo bem concebido garante que o processo de desenvolvimento envolva custos muito menores do que aqueles que seriam gerados com testes em um protótipo real.



Exemplificando

Se para o mesmo circuito RC desejamos obter a resposta no tempo para uma entrada impulso unitário (ou delta de dirac), podemos fazer da seguinte maneira, tirando proveito das variáveis já obtidas, como `U_out`:

Quadro 1.9 | Obtenção da resposta do circuito RC com entrada impulso

```
18 >> U_out4 = subs(U_out, {'U_in', 'R', 'C'}, ...
    {laplace(dirac(t)), 1000, 10^-6})
```

```

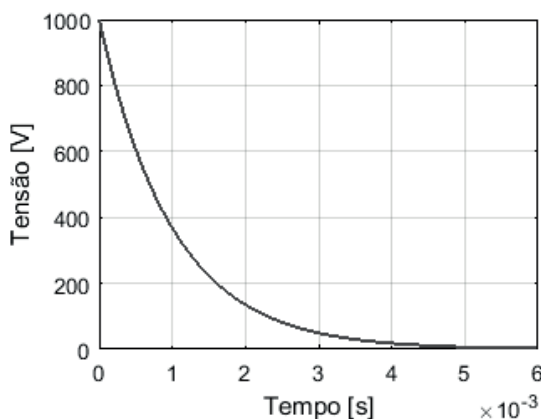
19  U_out4 =
    1/(s/1000 + 1)
20  >> u_out_impulso = ilaplace(U_out4)
21  u_out_impulso =
    1000*exp(-1000*t)
22  >> ezplot(u_out_impulso,[0 6e-3])
23  >>ylim([0 1000])
24  >> grid on

```

Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.15 mostra o resultado de `u_out_impulso`:

Figura 1.15 | Resposta no tempo do circuito RC à entrada impulso unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

O comando `ylim` na linha 18 do Quadro 1.9 serve apenas para adequar os limites do eixo y do gráfico. No caso, ele foi alterado para mostrar de 0 até 1000.

Com isso, podemos definir uma sequência de passos para obter, por meio da transformada de Laplace direta e inversa, a resposta no tempo de um sistema:

Quadro 1.10 | Resumo dos comandos do MATLAB utilizados

Passo	Comando(s)/Comentário(s)	Linha
1. Definir todas as variáveis simbólicas a serem utilizadas.	<code>syms var_1 var_2... var_N</code>	01
2. Inserir a equação diferencial temporal do sistema dinâmico.	Utilizar o <code>==</code> para a igualdade da equação.	02
3. Aplicar a transformada de Laplace.	<code>laplace(fun)</code>	03
4. Aplicar as condições iniciais do sistema.	<code>subs(fun,{'var_1','var_2', ..., 'var_N'}, {num_1,num_2,...,num_N})</code> É interessante substituir as funções cujas transformadas de Laplace são desconhecidas por novas variáveis (declaradas previamente com o comando <code>syms</code>) para facilitar a leitura.	05
5. Resolver a equação para a variável de saída.	<code>solve(fun,[var_1 var_2... var_N])</code>	07
6. Aplicar a entrada no sistema, assim como as propriedades numéricas.	<code>subs(fun,{'var_1','var_2', ..., 'var_N'}, {num_1,num_2,...,num_N})</code> Aplicar a transformada de Laplace na entrada antes de realizar a substituição, caso a função esteja no domínio do tempo. Como já mencionado, é uma boa prática atribuir esta substituição a uma nova variável, para simplificar experimentações com outras propriedades numéricas ou entradas.	09
7. Aplicar a transformada inversa de Laplace.	<code>ilaplace(fun)</code>	13
Notas	<code>var_1, var_2,..., var_N</code> são as variáveis simbólicas declaradas com o comando <code>syms</code> <code>num_1, num_2,..., num_N</code> são variáveis numéricas comuns, ou simplesmente números. <code>fun</code> é uma função simbólica.	

Fonte: elaborado pelo autor.

Sem medo de errar

Relembrando, você faz parte da equipe de engenharia e deve obter a resposta no tempo da suspensão passiva veicular para analisar seu comportamento. O modelo da suspensão passiva, de acordo com o obtido na seção anterior, é dado pela Equação 1.37.

$$-B(\dot{x} - \dot{y}) - K(x - y) = M\ddot{x} \quad (1.37)$$

Para poder avaliar o comportamento de forma mais fácil é fundamental a obtenção do comportamento do sistema ao longo do tempo. Para isso, você pode implementar um programa em MATLAB com a sequência de comandos apresentada no Quadro 1.11 e obter a função transferência com condições iniciais nulas.

Quadro 1.11 | Obtenção da resposta da suspensão veicular passiva

```
>> syms t M B K x(t) y(t)
>> eq = - B * (diff(x(t),t) - diff(y(t),t)) - K * (x(t) - y(t)) == ...
        M*diff(diff(x(t),t),t);
>> l_eq = laplace(eq);
>> syms X Y
>> l_eq = subs(l_eq,...
        {'laplace(x(t),t,s)',...
        'x(0)', 'D(x)(0)', 'laplace(y(t),t,s)', 'y(0)'},...
        {X,0,0,Y,0});

l_eq =

- K*(X - Y) - B*(X*s - Y*s) == M*X*s^2

>> X = solve(l_eq,X);
>> pretty(simplify(X))
      Y (K + B s)
-----
      2
      M s + B s + K
```

Fonte: elaborada pelo autor.

Vale salientar que o novo modelo de carro da linha de produção possui massa do pneu igual a $M = 319 \text{ kg}$, constante da mola utilizada na suspensão igual $K = 23.000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e coeficiente de atrito do sistema equivalente a $B = 1200 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$.

E a entrada selecionada por você para testes é uma lombada (ou quebra-molas). De acordo com nota técnica da CET-SP (Companhia de Engenharia de Tráfego de São Paulo), existem dois tipos de lombadas. A selecionada foi a de tipo 1, que é a lombada para 20km/h, com base no fato de que, tendo em vista a cidade de São Paulo, 20km/h é um valor próximo à velocidade média (EXAME, 2013). Ela tem 1,50 m de largura e 0,08 m de altura no pico, e se encontra a 1 m do pneu do automóvel. Para modelar aproximadamente a curva da lombada, você usou a função seno, como é mostrado na Equação 1.38.

$$y_{lombada}(t) = (\mu(t-1) - \mu(t-1.27)) \cdot 0.08 \cdot \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{0.27}\right) \quad (1.38)$$

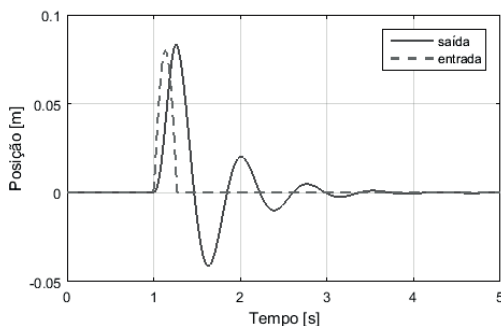
Após aplicar a transformada de Laplace na entrada $y_{lombada}(t)$ e realizar as substituições, você percebe que a equação resultante é extensa, pois é exibida com uma quantidade grande de termos. Então, antes de prosseguir, é interessante simplificá-la com o comando `simplify`. Então, você faz a transformada inversa de Laplace para obter a resposta no tempo da suspensão passiva e finalmente traça o gráfico da função obtida, que é a Figura 1.16.

Quadro 1.12 | Aplicação da transformada inversa de Laplace

```
>> X2 = subs(X, {'M', 'B', 'K', 'Y'}, ...
{319, 1200, 23000,
laplace((heaviside(t-1)-heaviside(t-1.27))*0.08*sin(pi*
(t-1)/.27))})
>> ilaplace(X2)
```

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.16 | Gráfico da entrada lombada e saída do sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

O objetivo da suspensão é atenuar a movimentação da massa suspensa, ou seja, do veículo. A partir da análise do gráfico, podemos inferir que com a suspensão utilizada houve uma deflexão maior que os 8 cm da entrada na carroceria, e a vibração perdurou por aproximadamente 3 segundos, além disso, é possível observar que o sistema foi subamortecido.

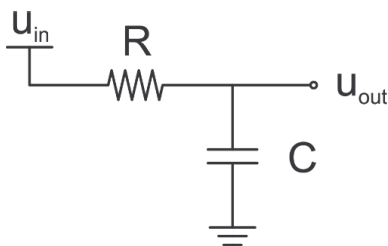
Avançando na prática

Resposta temporal de filtro passa-baixa

Descrição da situação-problema

Durante um experimento de instrumentação da área de pesquisa e desenvolvimento de uma empresa de circuitos eletrônicos, na qual você trabalha na área da engenharia, você precisa saber como irá se comportar o filtro passa-baixa que está sendo desenvolvido para ser instalado no sistema de instrumentação, para que os sinais medidos não sejam afetados por ruídos indesejáveis. Como você pode proceder? Sabe-se que o ruído tem frequência média de $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ com amplitude de aproximadamente 0,1V e que os sinais a serem medidos nunca passam de $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, e têm amplitude de 2V. O filtro é um circuito RC simples (Figura 1.17) de $1\text{M}\Omega$ e $0,2\mu\text{C}$.

Figura 1.17 | Filtro passa-baixa



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Você sabe que a função transferência do circuito RC é dada pela Equação 1.39.

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{1}{1 + RCs} \quad (1.39)$$

De posse da função de transferência do sistema dinâmico, por questão de otimização de custo e tempo de projeto, é interessante realizar uma simulação do funcionamento do filtro antes da implementação física. Sendo assim, você realiza os seguintes comandos de código:

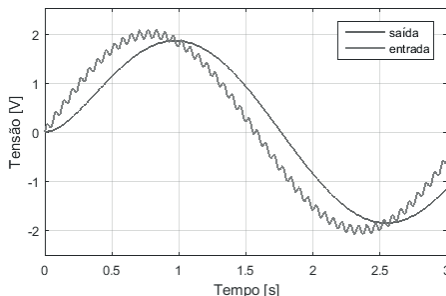
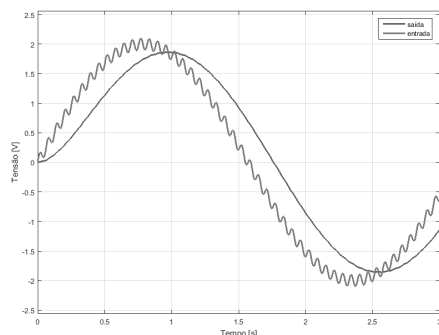
Quadro 1.13 | Comandos para obtenção da resposta no tempo do filtro passa-baixa

```
>> syms U_out U_in R C s U_out2 t u_out;
>> U_out = U_in/(1+R*C*s);
>> u_in = 2*sin(2*t)+0.1*sin(100*t); % sinal a ser medido + ruído
>> U_out2 = subs(U_out,{'U_in','R','C'},{laplace(u_in),10^6,0.2e-6});
>> u_out2 = ilaplace(U_out2);
>> ezplot(u_out2,[0,5])
```

Fonte: elaborada pelo autor.

Você, então, obtém como resposta a Figura 1.18

Figura 1.18 | Comparação de resposta e entrada do filtro



Fonte: elaborada pelo autor.

Comparando a entrada (curva ondulada) com a saída (curva contínua) do sistema, é perceptível que a alta frequência (o ruído) da entrada foi filtrada eficientemente, mas a baixa frequência (o sinal que deve ser medido) também sofreu atenuação. Além disso, a saída sofreu um atraso em relação à entrada. Todos esses efeitos são melhores percebidos com uma análise da resposta no domínio da frequência, que será visto na Unidade 3.

Faça valer a pena

1. Os softwares de matemática são de grande auxílio no projeto e no desenvolvimento de sistemas de controle, pois possibilitam que o projetista aplique importantes conceitos da teoria de forma rápida e automatizada, já que é possível desenvolver scripts que agilizam as tarefas repetitivas. Analise as afirmações a seguir sobre a utilização de softwares como o MATLAB:

I. Possibilitam a solução analítica de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais.

II. Não conseguem lidar com variáveis simbólicas. Só é possível lidar com elas por meio de cálculos manuais.

III. O software facilita o trabalho do projetista de controle, pois apenas disponibiliza uma lista com as transformadas de Laplace de todas as funções.

IV. De posse da função transferência de um modelo dinâmico, a utilização do software facilita e agiliza a realização de simulações da resposta do sistema quando submetido às mais variadas entradas e condições iniciais. Qual(is) afirmação(ões) está(ão) correta(s)?

a) I e IV.

d) Apenas III.

b) II e III.

e) Nenhuma.

c) II, III e IV.

2. A Figura a seguir representa um tanque que tem entrada $q_{in}(t)$ e saída $q_{out}(t)$ em $\frac{m^3}{s}$. A pressão $p \left[\frac{N}{m^2} \right]$ é dada pela segunda equação, a massa total de água presente no sistema (m) é dada pela terceira equação e a resistência fluidica influencia a saída de acordo com a quarta equação e, com da lei da conservação da massa (primeira equação), podemos descrever como o sistema se comporta.

$$\rho \cdot q_{in}(t) - \rho \cdot q_{out}(t) = \frac{d}{dt} m(t)$$

$$p(t) = \rho \cdot g \cdot h(t)$$

$$m(t) = \rho \cdot A \cdot h(t)$$

$$p(t) = R_f \cdot q_{out}(t)$$

Em que:

ρ = densidade da água.

A = área da seção do tanque.

g = aceleração da gravidade.

$m(t)$ = massa total de água no sistema (muda com o tempo).

$h(t)$ = nível de água do tanque.

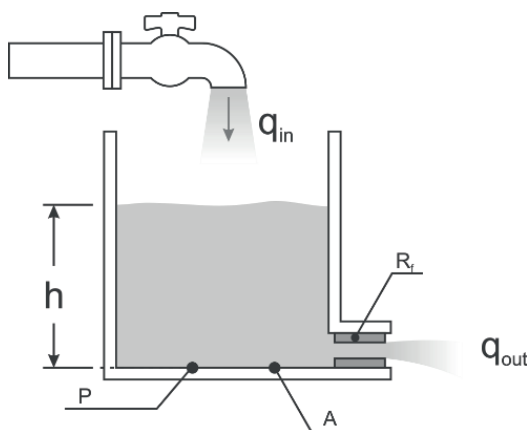
$p(t)$ = pressão manométrica no fundo do tanque.

R_f = resistência fluidica.

$q_{in}(t)$ = vazão de entrada de água.

$q_{out}(t)$ = vazão de saída de água.

Ilustração de um tanque de água



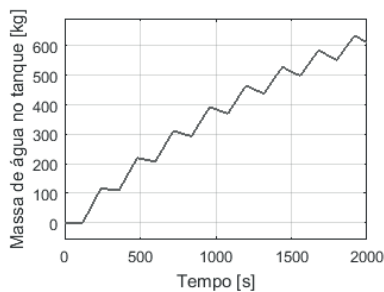
Fonte: elaborada pelo autor.

Um tanque similar ao da figura será utilizado em uma indústria alimentícia da seguinte maneira: a entrada de água ocorre a uma taxa de $0,01 \frac{m^3}{s}$ e funciona em ciclos de 4 minutos, sendo 50% ligada e 50% desligada ao longo de cada ciclo. A resistência fluidica da saída equivale a $981.000 \frac{kg}{s \cdot m^4}$ e o tanque tem área transversal de $2m^2$.

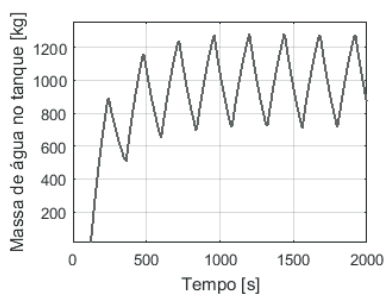
O tanque precisa ser instalado sobre uma estrutura já existente no local. Sabe-se que a estrutura suporta até 2 toneladas além do peso vazio do tanque de água.

A estrutura suportará o pico da massa de água que será atingida ao longo da utilização do tanque? Qual é o comportamento do sistema ao longo do tempo?

a) Sim. A figura a seguir mostra o comportamento do sistema:



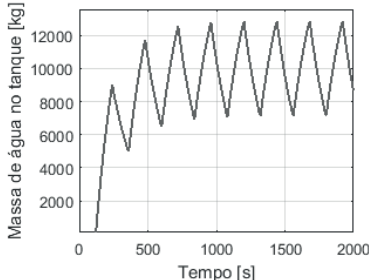
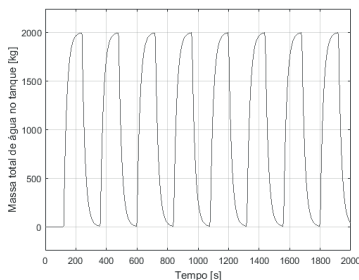
b) Sim, a estrutura suportará o pico da massa de água que será atingida ao longo da utilização do tanque. A figura a seguir mostra o comportamento do sistema:



c) Obviamente, a estrutura suportará o peso do tanque com a água, já que a presença de um ladrão ao fundo do tanque indica que, independentemente da vazão de entrada, o tanque nunca poderá ser preenchido, ou seja, seu comportamento será o de sempre ter massa de água igual a zero.

d) Não. A estrutura não suportará o peso da água e do tanque, pois a presença de qualquer resistência fluidica, independentemente de sua magnitude, fará com que o tanque supere a massa limite de água que a estrutura suporta.

e) Não, a estrutura não suportará a massa de água. A figura a seguir mostra o comportamento do sistema:

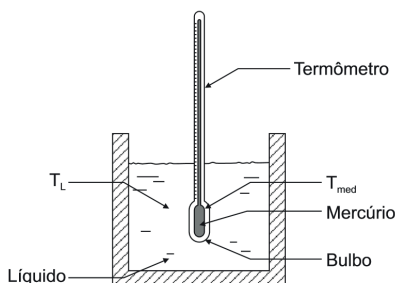


Fonte: elaborada pelo autor.

3. No Brasil, a partir de 1º de janeiro de 2019, será proibida a fabricação, importação, comercialização e uso de termômetros e esfigmomanômetros com coluna de mercúrio em serviços de saúde. Mas, a resolução não se aplica a produtos para pesquisa, calibração de outros instrumentos ou para uso como padrão de referência.

O modelo matemático de um termômetro de bulbo com as devidas hipóteses simplificadoras, como o fato de a temperatura que envolve o termômetro ser uniforme, o vidro do termômetro não armazenar energia e funcionar apenas como uma resistência térmica e a variação da massa de mercúrio no bulbo ser desprezível, é mostrado na equação dada neste exercício, sendo T_L e T_{med} as temperaturas do que será medido (na figura a seguir, é a temperatura de um líquido) e a temperatura indicada pelo termômetro.

Ilustração de uso do termômetro de mercúrio



Fonte: Felício (2010, p. 120).

$$R_t CM(s \cdot T_{med}(s) - t_{med}(0)) + T_{med}(s) = T_L(s)$$

Em que:

R_t = resistência térmica do bulbo de vidro $30 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$.

C = capacitância térmica do mercúrio

$$\left(138,072 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}} \right)$$

M = massa de mercúrio no bulbo (10g).

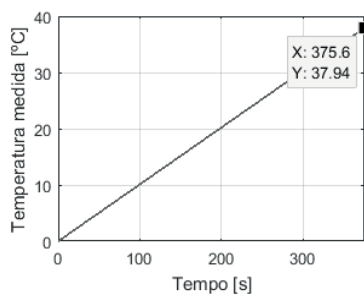
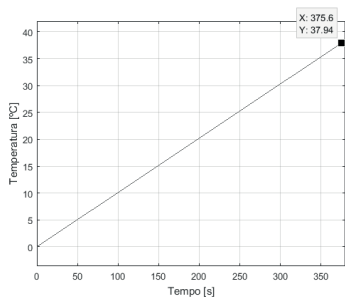
T_{med} = transformada de Laplace da temperatura medida pelo termômetro.

$t_{med}(0)$ = temperatura do termômetro exatamente antes de iniciar o processo de aferição, ou seja, quando o tempo é zero ($t = 0$).

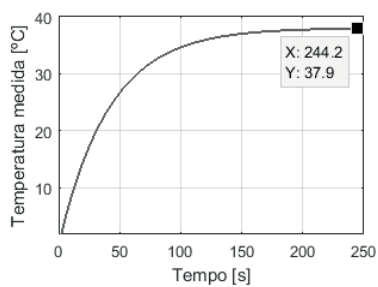
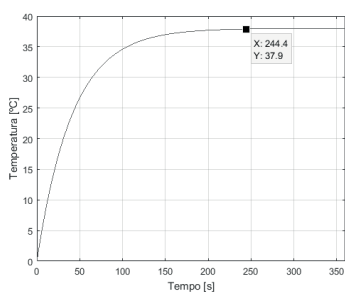
T_L = transformada de Laplace da Temperatura a ser medida.

Como o termômetro com coluna de mercúrio não será proibido para uso em pesquisa, em um líquido com uma cultura específica de bactérias que se encontra à temperatura de 38°C , quanto tempo demora para o aparelho **indicar** a temperatura de $37,9^\circ\text{C}$, sendo que a temperatura ambiente é de 24°C ? Mostre, com o auxílio do MATLAB, a resposta gráfica referente ao comportamento da temperatura ao longo do tempo.

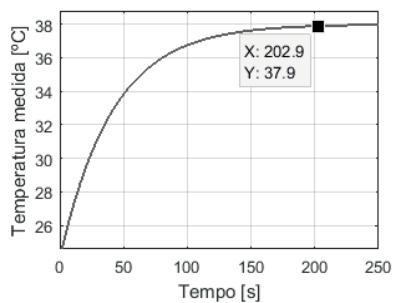
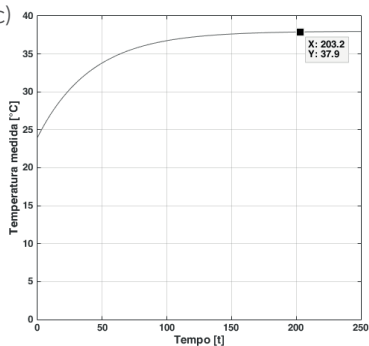
a)



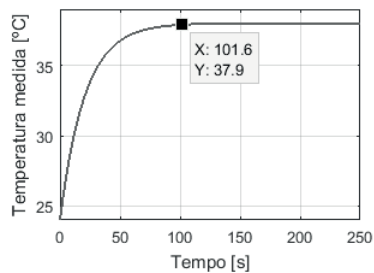
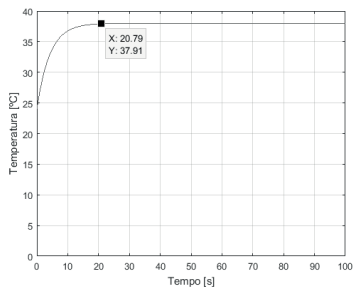
b)



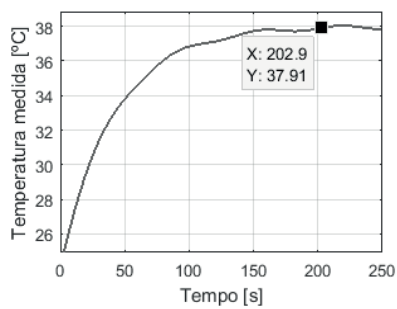
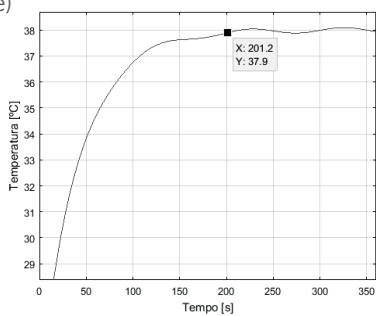
c)



d)



e)



Referências

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos, Rima, 2010.

FREITAS, L. M. **Estudo da Dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson**. 122 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

GUIMARÃES, S. P. Em 4 anos, velocidade média no trânsito de SP caiu 10%. **Exame**, 18 jun. 2013. Disponível em: <<http://exame.abril.com.br/brasil/em-4-anos-velocidade-media-no-transito-de-sp-caiu-10/>>. Acesso em: 8 jun. 2017.

MATHWORKS. **Symbolic Math Toolbox**. 2017. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/symbolic/index.html>>. Acesso em: 31 maio 2017.

NETO, P. N., SUGIMOTO, W., CAMANHO, A. **NT 101 – Instalação de obstáculos: lombadas**. São Paulo: CET, 1984. Disponível em: <<http://www.cetsp.com.br/media/20491/nt101.pdf>>. Acesso em: 17 jun. 2017.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1990.

ROUTLEDGE R. **Discoveries and inventions of the nineteenth century**. 13. ed. 1900.

SIQUEIRA, A. A. G., TERRA, M. H., FRANCISCO, T. B. R., Controle robusto de robôs móveis em formação sujeitos a falhas, **Revista Controle & Automação**, Vol.21 no.1, Jan e Fev 2010

SANTOS, R. J., **Introdução ao MATLAB**, Disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/topicos/intmatl.pdf>>. Acesso em: 9 jun. 2017.

Representação de sistemas de controle

Convite ao estudo

Na Unidade 1, você se familiarizou com conceitos e técnicas básicas que são aplicáveis aos sistemas de controle, arquitetura, obtenção da resposta de um sistema dinâmico a uma entrada utilizando as transformadas direta e inversa de Laplace tanto à mão quanto com auxílio do software MATLAB, entre outros tópicos.

Nesta Unidade 2, veremos importantes maneiras de se representar um sistema dinâmico: desde relembrar conceitos de modelagem de um sistema dinâmico real até métodos diferentes (e complementares) de fazer sua representação.

Geralmente, um sistema dinâmico pode ser representado em mais de uma maneira, e cada maneira permite um certo tipo de abordagem de análise do comportamento do sistema. Ao conhecermos mais de um modo de representação, podemos realizar diferentes análises e, assim, conhecer mais a fundo o sistema com o qual estamos lidando. Logo, podemos projetar um controlador com conhecimento mais abrangente de causa e efeito.

Como de costume, guiaremos nossos estudos por meio de situações-problema de engenharia. Suponha que você trabalha em uma empresa que fabrica acessórios para computador. Em um novo empreendimento da empresa, o objetivo é adicionar um novo produto em sua linha: uma impressora. Sendo você parte da equipe de desenvolvimento, sua tarefa será projetar a parte do controle do cabeçote de impressão. Trata-se de um sistema eletromecânico, que é a parte mais importante do dispositivo. Você deverá conhecer muito bem seu comportamento para garantir a qualidade da impressora e, para isso, deve lançar mão

do modelo no espaço de estados e diagrama de blocos, que permitirão uma análise adequada ao projeto em questão.

Vamos, então, dar início aos trabalhos.

Bom estudo!

Seção 2.1

Modelagem de sistemas físicos

Diálogo aberto

Tudo o que vemos na ciência pode ser, de maneira simplista, resumido em uma tarefa: entender, interpretar e prever o funcionamento da natureza. Cada ramo da ciência especializa-se em estudar em uma parte dela. Antigamente, era mais comum vermos cientistas que contribuíam para várias áreas da ciência. Hoje em dia, vemos uma maior especialização de cada um em uma certa área.

Estamos estudando sistemas de controle. Nosso objetivo é fazer com que algum sistema dinâmico real se comporte da maneira que precisamos. Para projetarmos o controle de algo, precisamos saber sobre o seu funcionamento para que alcancemos nosso objetivo dentro da performance necessária.

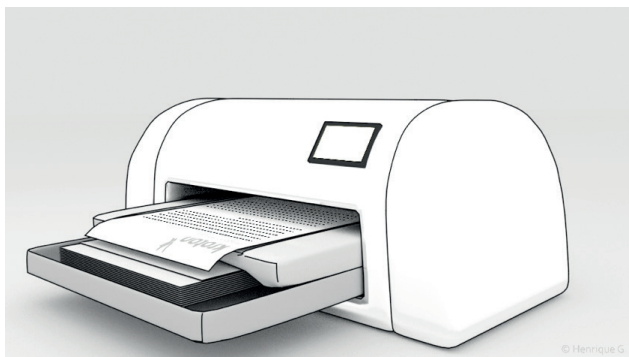
Esse “saber sobre o seu comportamento” passa por conceitos e técnicas de modelagem de sistemas dinâmicos, que se baseiam na aplicação de leis físicas que a ciência gerou. Essas leis são amplamente aceitas e profundamente conhecidas, ou seja, sua exatidão e limitações já foram exaustivamente estudadas. Para fazermos uso dessas leis, precisamos conhecer bem como aplicá-las e quais são as hipóteses sobre o comportamento de um sistema dinâmico que precisamos impor para que não criemos um modelo físico irrealista e, com isso, inutilizável.

Ao chegar nesta disciplina, você já passou por Modelagem de Sistemas Dinâmicos. Então, na Seção 2.1, faremos uma breve revisão dos conceitos de modelagem. Depois, você verá novas formas de representar os modelos dinâmicos: variáveis de estados, equações diferenciais de estado e diagrama de blocos. As duas primeiras são abordagens matemáticas complementares e a última é uma forma gráfica, mas todas têm propriedades valiosas e de grande importância para o desenvolvimento de sistemas de controle.

Agora, você é o responsável pelo departamento de engenharia de uma empresa de acessórios de computador. Para o desenvolvimento do novo produto – uma impressora –, sua tarefa será projetar o controle do cabeçote de impressão. Mas, antes de partir para o projeto

do controle em si, é necessário modelar o sistema eletromecânico em questão. Como você deve proceder? E quais são as maneiras de compartilhar o modelo que você desenvolveu com o restante da equipe?

Figura 2.1 | Ilustração da impressora a ser desenvolvida



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos descobrir? Bons estudos!

Não pode faltar

Como você já sabe, ao falarmos em modelo de um sistema, estamos falando em uma ou mais equações que descrevem seu comportamento, seja no domínio do tempo ou no domínio da frequência (após a aplicação da transformada de Laplace). Para equacionarmos um modelo, precisamos ter conhecimento das equações que melhor descrevem seu comportamento. É nesse ponto que lançamos mão da aplicação das leis físicas. É importante, também, conhecermos as equações constitutivas de elementos que surgem com frequência nos sistemas dinâmicos de cada área.

O Quadro 2.1 traz uma comparação entre as variáveis e os elementos de modelos mecânicos e elétricos. Tenha em mente que, na realidade, não existe um componente que funciona puramente como uma mola, amortecedor, resistência ou indutância elétrica. Quando modelamos um sistema concentramos, na medida do possível, as propriedades dinâmicas em componentes ideais, ou seja, não levamos em conta as incertezas em seus parâmetros ou não linearidades, ou ainda mistura de propriedades.

Quadro 2.1 | Comparação entre os elementos e variáveis mecânicos e elétricos

Mecânica	Elétrica
Variáveis de deslocamento	
Posição $[m]$ $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$	Carga elétrica $[C]$ $q(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(s)$
Variáveis de fluxo	
Velocidade linear $[m/s]$ $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ $v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s)$	Corrente $[A]$ $i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$ $i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s)$
Variáveis de esforço	
Força $[N]$ $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$	Tensão $[V]$ $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$
Elementos inerciais	
Massa $\sum f(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum F(s) = M \cdot sV(s)$ (2ª lei de Newton) Sendo M a massa em $[kg]$	Indutor $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = L \cdot sI(s)$ Sendo L a indutância elétrica $[H]$
Elementos dissipadores de energia	
Amortecedor $f_{amort} = -B \cdot v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{amort} = -B \cdot V(s)$ Sendo B a constante de amortecimento $[N \cdot s/m]$	Resistência $u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = R \cdot I(s)$ Sendo R a resistência elétrica $[\Omega]$
Elementos armazenadores de energia	
Mola $f_{mola} = -K \int v(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{mola} = -\frac{K}{s} V(s)$ (Lei de Hooke) Sendo K a constante de amortecimento $[N/m]$	Capacitor $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$ Sendo C a capacitância elétrica $[F]$

Fonte: elaborado pelo autor

Observando o Quadro 2.1, podemos ver que é possível obter os modelos mecânicos e elétricos que têm comportamento semelhante.

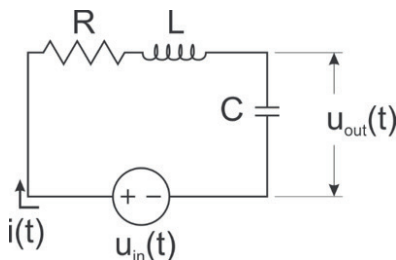


Pesquise mais

As comparações feitas entre elementos ideais de sistemas mecânicos e elétricos também podem ser feitas com outras áreas, como: hidráulica, térmica e pneumática. Para saber um pouco mais, veja no livro *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta*, do Prof. Dr. Luiz Carlos Felício, mais comparações na página 51.

Por exemplo, um circuito resistor-capacitor-indutor (RLC, Figura 2.2) e um sistema massa-mola-amortecedor (Figura 2.3), ambos com condições iniciais nulas, geram equacionamentos análogos (Equações 2.1 e 2.2).

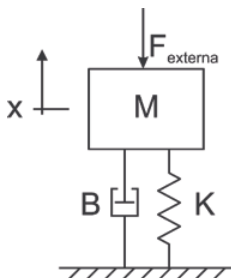
Figura 2.2 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

$$u(t) = LC \cdot \ddot{u}_{out}(t) + RC \cdot \dot{u}(t) + u_{out}(t) \quad (2.1)$$

Figura 2.3 | Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: elaborada pelo autor.

$$F_{externa}(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \quad (2.2)$$

Das Equações 2.1 e 2.2, você já aprendeu a extrair suas funções transferência (Equações 2.3 e 2.4, respectivamente) aplicando a transformada de Laplace, que são uma maneira de representar um sistema dinâmico por meio da razão entre saída e entrada no domínio da frequência.

$$\frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2.3)$$

$$\frac{X}{F_{ext}}(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (2.4)$$

Além da função transferência, há outras maneiras de representar um sistema dinâmico, por exemplo: o espaço de estados e o diagrama de blocos, os quais veremos a seguir.

A representação por meio de equação diferencial de estado se baseia nas variáveis de estado de um sistema. Segundo Dorf (2009), "as variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e podem ser usadas para determinar a resposta futura, dadas as excitações de entrada e as equações descrevendo a dinâmica." A representação em variáveis de estado (ou representação em espaço de estados) é um par de equações matriciais que tem forma geral mostrada pela equação de estado (2.5) e pela equação de saída (2.6).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \text{ em que } \mathbf{x} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (2.6)$$

A Equação 2.5 representa as relações dinâmicas do sistema. A variável \mathbf{x} é um vetor coluna de tamanho $n \times 1$ em que cada elemento é um estado do sistema. O vetor coluna \mathbf{u} representa as entradas do sistema e tem tamanho $m \times 1$. A matriz \mathbf{A} (matriz de estados) é quadrada ($n \times n$), e pode ser interpretada como o próprio sistema dinâmico, pois ela depende apenas deste. A matriz \mathbf{B} , matriz de entrada, tem tamanho $n \times m$.

A Equação 2.6 representa as saídas do sistema, sendo que, usando esse método de representação, um sistema pode ter uma a quantas saídas forem necessárias: basta definir a matriz \mathbf{C} (matriz de saída) da seguinte maneira: se o vetor coluna de saídas \mathbf{y} tem tamanho $p \times 1$, a matriz \mathbf{C} vai ser $p \times n$, em que p é a quantidade de saídas. A matriz \mathbf{D} (matriz de transmissão direta) será $p \times m$, sendo que esta última matriz estabelece qual entrada influencia diretamente em uma saída mas, geralmente, essa matriz é nula.

A representação em espaço de estados sempre consiste em uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, então, para o caso de ambos os sistemas em questão, devido ao fato de serem de ordem superior, precisamos utilizar mais de uma variável de estado.



Assimile

A equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem.

No caso do sistema mecânico da Figura 2.3, os estados serão a posição e a velocidade; a saída será apenas a posição; e a entrada será a força externa, como mostra a Equação 2.7.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} \quad (2.7)$$

$$u(t) = F_{ext}(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Substituindo a Equação 2.7 na Equação 2.2, temos o sistema de EDOs de primeira ordem (Equação 2.8).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{F_{ext}(t)}{M} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Reescrevendo matricialmente e simplificando a notação, temos a Equação 2.9, que é a representação do sistema no espaço de estados.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ em que } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \text{ e } u = F_{ext} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Sendo o circuito RLC um sistema análogo ao massa-mola-amortecedor, a representação em espaço de estados é análoga.



Refleta

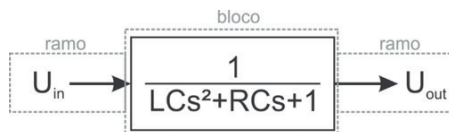
Sabendo que a equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem, quais seriam as variáveis de estados para o circuito RLC? E como ficaria a equação diferencial?

Outra maneira de representar um sistema dinâmico é utilizando-se o diagrama de blocos. Esse método é utilizado após ser aplicada a transformada de Laplace, ou seja, no domínio da frequência. Com o diagrama de blocos, podemos acoplar vários subsistemas independentes e, então, obter uma função transferência única para o sistema resultante como um todo.

No diagrama de blocos, cada bloco representa uma função de transferência, sendo o ramo que entra nele a sua entrada, e o ramo que sai, sua saída. Ou seja, a partir de um diagrama de blocos, podemos extrair a equação da saída multiplicando o bloco pela sua entrada, seguindo a mesma lógica que aprendemos com função de transferência. Vamos aplicar este conceito para a função de transferência do circuito RLC da Figura 2.2.

Podemos representar o circuito RLC em um bloco único, como mostra a Figura 2.4: a saída, U_{out} é igual à entrada U_{in} multiplicada pelo conteúdo do bloco.

Figura 2.4 | Circuito RLC bloco único

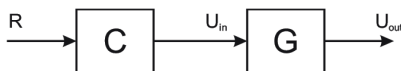


Fonte: elaborada pelo autor.

Como dito, no diagrama de blocos, temos relações multiplicativas. Para cada bloco presente no diagrama, sua saída é igual à sua entrada multiplicada pelo conteúdo do bloco. Para realizarmos uma soma/subtração, utilizamos um bloco somador, que indica a operação: na Figura 2.5, podemos ver que o bloco somador tem saída U_{out} , que é igual a U_{in} subtraindo-se as saídas dos blocos Ls e R , como mostram os sinais que acompanham os ramos que entram no bloco somador. Façamos outro exemplo para melhor entendimento.

Vamos supor que temos um controlador $C(s)$ quem tem tensão como saída e um valor numérico adimensional como entrada. Fazendo $G(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}}(s)$, podemos esboçar um sistema em malha aberta (Figura 2.5).

Figura 2.5 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha aberta



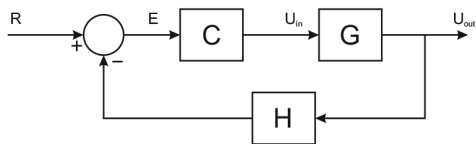
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir do sistema em malha aberta da Figura 2.5, podemos observar que U_{out} é o resultado da multiplicação de U_{in} por G (função transferência do sistema/planta) e, da mesma maneira, U_{in} é a multiplicação de R (referência) por C (função transferência do controlador). Em uma única equação, temos a Equação 2.10.

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot R(s) \Rightarrow \frac{U_{out}}{R}(s) = G(s) \cdot C(s) \quad (2.10)$$

Suponhamos que se deseja realizar o controle em malha fechada. Neste caso, será necessário um sensor $H(s)$ na retroalimentação que converte tensão em um número adimensional, conforme Figura 2.6.

Figura 2.6 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Em um sistema em malha fechada, precisamos ficar atentos ao extrair a função transferência para não cairmos em um ciclo sem fim. É sempre interessante começarmos pelo fim e irmos seguindo o ramo principal, que é onde a planta se encontra. Seguindo de U_{out} (saída) até E (erro), temos a Equação 2.11.

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \quad (2.11)$$

E é o erro, pois é a diferença entre a referência R e o valor medido da saída $H(s) \cdot U_{out}(s)$. Então, E é dado pela Equação 2.12, de acordo com o bloco somador.

$$E(s) = R(s) - \overbrace{H(s) \cdot U_{out}(s)}^{\substack{\text{saída do bloco } H \\ \text{entrada do bloco } H}} \quad (2.12)$$

Substituindo a Equação 2.12 na Equação 2.11 e isolando U_{out} , temos a Equação 2.13, que é a função transferência do sistema em malha fechada.

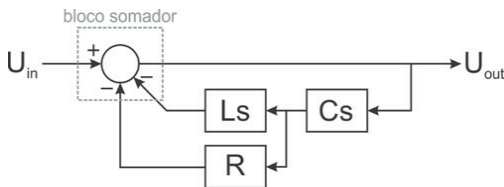
$$U_{out} = G \cdot C \cdot (R - H \cdot U_{out}) \Rightarrow \frac{U_{out}(s)}{R} = \frac{G(s) \cdot C(s)}{1 + G(s) \cdot C(s) \cdot H(s)} \quad (2.13)$$

Perceba que na Figura 2.6 o ramo da retroalimentação é negativo no ponto de soma. Isso define o sistema como um sistema com retroalimentação negativa (ou feedback negativo). Se fosse positivo, seria retroalimentação positiva (ou *feedback* positivo).

Com essas informações, podemos representar o circuito RLC da Figura 2.2 em diagrama de blocos.

Podemos ainda, expandir a representação em mais blocos, como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7 | Circuito RLC com diagrama expandido



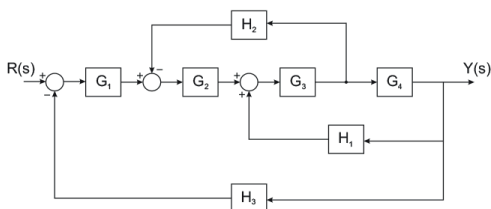
Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Agora, vamos obter a função transferência $\frac{Y}{R}(s)$ para o diagrama de blocos da Figura 2.8.

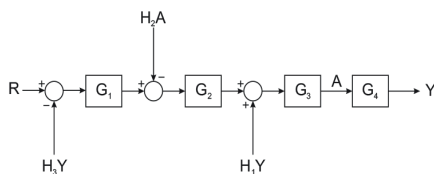
Figura 2.8 | Diagrama de blocos exemplo



Fonte: adaptada de Dorf (2011, p.55).

Para facilitar a obtenção da função transferência, podemos dar um nome aos ramos que forem necessários. Para o diagrama em questão, vamos denominar de **A** a saída de G_3 . Podemos redesenhar o diagrama da forma como foi mostrado na Figura 2.9 e obter diretamente o sistema de Equações 2.14.

Figura 2.9 | Redesenho simplificado do diagrama de blocos



Fonte: adaptada de Dorf (2011, p.55).

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 A + G_1 \cdot (R - H_3 Y))) \quad (2.14)$$

$$A = \frac{Y}{G_4} \quad (2.15)$$

Substituindo **A** da Equação 2.15 na Equação 2.14 e fazendo as manipulações necessárias, obtemos a função transferência $\frac{Y}{R}(s)$ da Equação 2.16

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 \frac{Y}{G_4} + G_1 \cdot (R - H_3 Y)))$$

$$Y = G_4 G_3 H_1 Y - G_4 G_3 G_2 H_2 \frac{Y}{G_4} + G_4 G_3 G_2 G_1 R - G_4 G_3 G_2 G_1 H_3 Y$$

$$Y(1 - G_4 G_3 H_1 + G_3 G_2 H_2 + G_4 G_3 G_2 G_1 H_3) = G_4 G_3 G_2 G_1 R$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_3 G_4 H_3 + G_2 G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 + 1} \quad (2.16)$$

E podemos escrever o sistema em apenas um bloco, como mostra a Figura 2.10.

Raio das polias	$r[m]$	Tensão superior na correia	$T_1[N]$
Atrito interno à rotação do motor	$b\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}\right]$	Tensão inferior na correia	$T_2[N]$
Resistência elétrica do motor	$R[\Omega]$	Ângulo do eixo do motor	$\theta[rad]$
Constante de torque do motor	$K_m\left[\frac{N \cdot m}{A}\right]$	Ângulo da polia passiva	$\theta_p[rad]$
Inércia total à rotação	$J[kg \cdot m^2]$	Posição do cabeçote de impressão	$y[m]$

Fonte: elaborado pelo autor

As trações T_1 e T_2 são as forças que as correias do cabeçote de impressão (modeladas como molas e uma massa) fazem no eixo do motor CC. Elas são dadas pelas Equações 2.17 e 2.18:

$$T_1 = k(r\theta - y) \quad (2.17)$$

$$T_2 = k(y - r\theta) \quad (2.18)$$

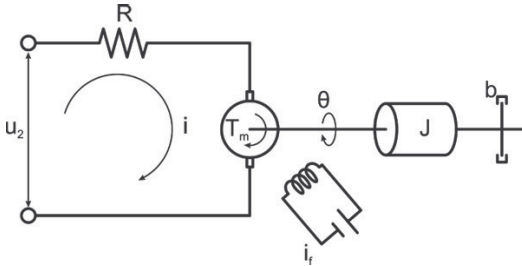
Aplicando a 2ª lei de Newton na massa, temos a Equação 2.19:

$$T_1 - T_2 = m \cdot \ddot{y}$$

$$2k(r\theta - y) = m \cdot \ddot{y} \quad (2.19)$$

Para o motor CC (Figura 2.12), vamos supor que sua indutância seja desprezível.

Figura 2.12 | Modelo do motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (1990, p. 119).

A corrente de campo é $i = \frac{u_2}{R}$ e o torque do motor é $T_m = K_m i$.

Esta última equação relaciona a parte elétrica do sistema (por meio da corrente) com a parte mecânica (por meio do torque). A partir dessas duas equações, conseguimos escrever o torque de saída do motor (

T_m) em função da tensão (u_2) que entra no motor (Equação 2.20).

$$T_m = \frac{K_m}{R} u_2 \quad (2.20)$$

O toque (T_m) do motor é igual ao toque que aciona as correias (T) somado ao torque de perturbação ou de carga indesejado (T_d), conforme Equação 2.21:

$$T_m = T + T_d \quad (2.21)$$

Usando a 2ª lei de Newton para movimentos angulares, temos a Equação 2.22 para o torque (T) que aciona o eixo da polia:

$$T = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r(T_1 - T_2) = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r \cdot m\ddot{y} \quad (2.22)$$

A partir da Figura 2.11, sabemos que $u_2 = -k_2 k_1 \dot{y}$. Substituindo isto na Equação 2.20, temos que $T_m = -\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y}$. Com isso, da Equação 2.21, supondo que não há distúrbios ($T_d = 0$), temos que $-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y} = T$ e, substituindo isto na Equação 2.22, teremos a Equação 2.23:

$$-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y} = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r \cdot m\ddot{y} \quad (2.23)$$

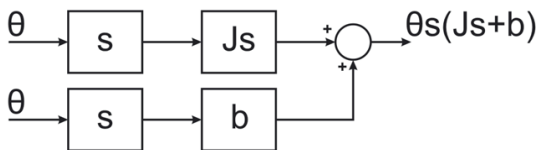
Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, temos a função de transferência do sistema (Equação 2.24):

$$-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 sY = \Theta s(Js + b) + r \cdot mYs^2 \quad (2.24)$$

Com isso, podemos montar o diagrama de blocos do sistema. Vamos fazê-lo passo a passo.

Vamos começar pelo termo $\Theta s(Js + b) = \Theta s \cdot Js + \Theta s \cdot b$. Trata-se de uma soma. Logo, usamos um bloco de soma, como mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13 | Primeiro passo do diagrama de blocos

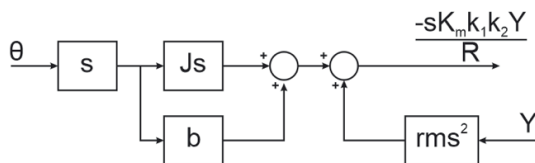


Fonte: elaborada pelo autor.

Temos o termo $\Theta s(Js + b)$, mas perceba que, na Figura 2.13, o início do ramo superior é idêntico ao início do ramo inferior. Então, podemos simplificar o diagrama de blocos e exibir o ramo repetido apenas uma vez, bifurcando-o para baixo e para cima, como mostra a Figura 2.14.

O próximo termo que iremos conectar no diagrama é o $r \cdot mYs^2$, que deve entrar somando com o que já fizemos, também mostrado na Figura 2.14.

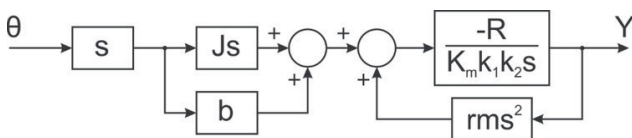
Figura 2.14 | Segundo passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que estamos perto de concluir o diagrama: todos os termos da Equação 2.24 estão presentes nele. Queremos o $Y(s)$ como saída e, no ramo superior à direita, ele aparece multiplicado por uma constante $\frac{-K_m k_1 k_2}{R}$, ou seja, basta multiplicarmos o ramo pelo inverso dessa constante para que obtenhamos o $Y(s)$ desejado. Inclusive, podemos aproveitar o $Y(s)$ superior para bifurcá-lo para ramo inferior. Com isso, fica concluído o diagrama de blocos (Figura 2.15).

Figura 2.15 | Diagrama de blocos da impressora



Fonte: elaborada pelo autor.

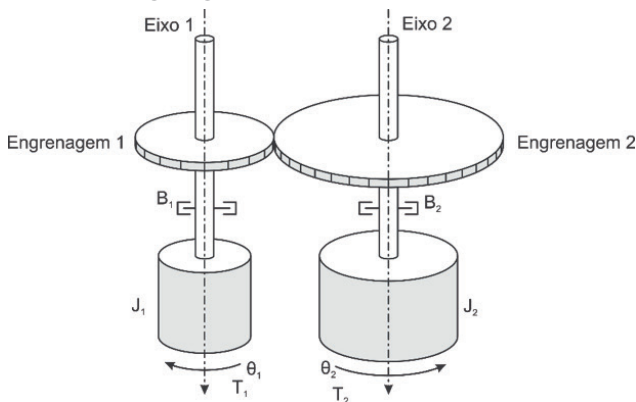
Avançando na prática

Modelagem de um trem de engrenagens

Descrição da situação-problema

Você trabalha como responsável técnico no departamento de desenvolvimento de uma empresa que fabrica redutores. Uma de suas tarefas é fazer o modelo dinâmico tanto em variáveis de estado quanto em diagrama de blocos dos sistemas de redução. O próximo sistema que você deve modelar está ilustrado na Figura 2.16, no qual a entrada é o torque equivalente (levando em consideração a relação de transmissão) e a saída é a velocidade angular do eixo 2.

Figura 2.16 | Trem de engrenagens



Fonte: adaptada de Felicio (2010, p. 374).

Do sistema, temos que $n_{12} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ é a relação de transmissão.

Torque equivalente: $T_e = T_2 + n_{12}T_1$ $[N \cdot m]$.

Atritos no sistema: B_1 e B_2 $\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$.

Inércias à rotação: J_1 e J_2 $[kg \cdot m^2]$.

Ângulos dos eixos: θ_1 e θ_2 $[rad]$.

Como fica cada uma das representações requeridas deste sistema?

Resolução da situação-problema

Começando pela relação de transmissão, temos a Equação 2.25.

$$\theta_1 = \theta_2 n_{12} \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 n_{12} \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 n_{12} \quad (2.25)$$

Aplicando a segunda lei de Newton para movimentos rotativos no primeiro eixo, temos a Equação 2.26.

$$T_1 - B_1 \dot{\theta}_1 + T_t = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (2.26)$$

Em que: T_t é o torque que a engrenagem 2 exerce sobre a engrenagem 1. Substituindo as relações da Equação 2.25 na Equação 2.26, temos a Equação 2.27.

$$T_1 - B_1 n_{12} \dot{\theta}_2 + T_t = J_1 n_{12} \ddot{\theta}_2 \quad (2.27)$$

Analogamente, para o eixo 2, temos a Equação 2.28.

$$T_2 - B_2 \dot{\theta}_2 - T_t n_{12} = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (2.28)$$

Multiplicando a Equação 2.27 por n_{12} e somando-a com a Equação 2.28, temos a Equação 2.29

$$T_1 n_{12} + T_2 - \dot{\theta}_2 (B_1 n_{12}^2 + B_2) = \ddot{\theta}_2 (J_1 n_{12}^2 + J_2) \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_1 n_{12} + T_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} - \dot{\theta}_2 \frac{B_1 n_{12}^2 + B_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} \quad (2.29)$$

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas e isolando $\Theta(s)$, obtemos a Equação 2.30, usando os atalhos $B_e = B_1 n_{12}^2 + B_2$ e $J_e = J_1 n_{12}^2 + J_2$.

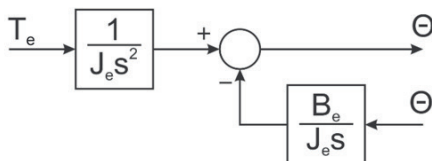
$$s^2 \Theta = \frac{T_e}{J_e} - s \Theta \frac{B_e}{J_e} \Rightarrow$$

$$\Theta = \frac{T_e}{J_e s^2} - \Theta \frac{B_e}{J_e s} \quad (2.30)$$

Na Equação 2.30 não estamos obtendo a saída $s \cdot \Theta(s)$ requerida para o sistema, mas isso não é problema, pois podemos fazê-la aparecer facilmente no diagrama de blocos.

Para montar o diagrama, vamos fazer passo a passo. Primeiramente, precisamos de um bloco de soma para montar o lado direito da equação (Figura 2.17).

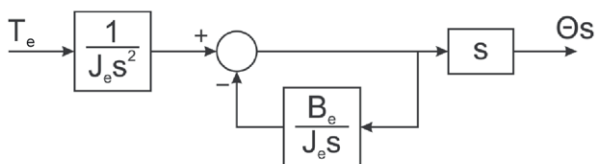
Figura 2.17 | Primeiro passo do diagrama de blocos



Fonte: adaptada de Felicio (2010, p. 374).

Vemos que há Θ nos dois ramos da direita. Então, podemos conectá-los para fechar a malha. Como já frisamos, a saída esperada é a velocidade angular do segundo eixo do trem de engrenagens, ou seja, $s \cdot \Theta(s)$. Para tal, basta conectar ao final um simples bloco com função transferência (s), como mostra a Figura 2.18.

Figura 2.18 | Segundo passo do diagrama de blocos



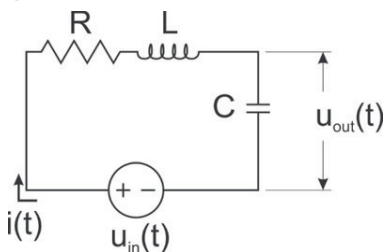
Fonte: adaptada de Felicio (2010, p.374).

Faça valer a pena

1. A modelagem de sistemas dinâmicos é a técnica de representar sistemas reais por meio de equações matemáticas para os mais diversos propósitos, como para projeto de controladores, predição de respostas, análise de sistemas, entre outros.

Considere o circuito RLC a seguir:

Figura 2.2 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Se a saída do sistema for a tensão $u_{out}(t)$ do capacitor e a entrada for a tensão $u_{in}(t)$, como fica o modelo do sistema em espaço de estados?

$$\text{a) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u_{in},$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$\text{b) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{in},$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$\text{c) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u_{in},$$

$$\text{d) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$$\text{e) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u_{in},$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

2. Uma maneira de representar um sistema dinâmico é por meio do uso de variáveis de estado e equação diferencial de estado. Se trata de uma maneira matricial de apresentar o equacionamento do modelo dinâmico. A equação a seguir representa o modelo de um circuito integrador.

$$u_{in}(t) = RC\dot{u}_{out}(t) + LC\ddot{u}_{out}(t) + u_{out}(t)$$

Qual das alternativas mostra a escolha correta das variáveis de estado?

$$\text{a) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{out} \\ \dot{u}_{out} \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ L \\ C \end{bmatrix}.$$

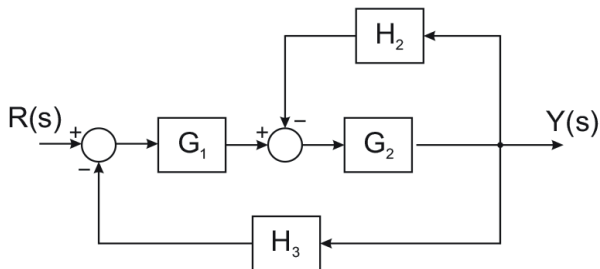
$$\text{d) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{out} \\ \ddot{u}_{out} \end{bmatrix}.$$

$$\text{e) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{in} \\ u_{out} \end{bmatrix}.$$

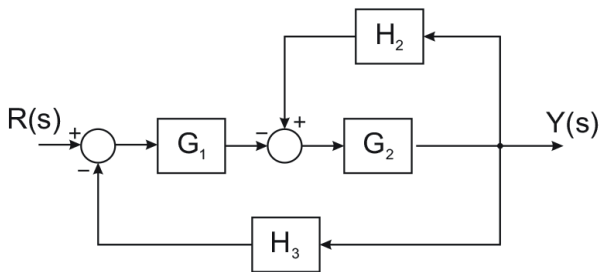
3. A representação de diagrama de blocos de sistemas dinâmicos é uma maneira bastante flexível de se representar um sistema dinâmico, pois há mais de uma maneira de desenhar um diagrama. Mas, mesmo que haja inúmeras maneiras de desenhá-lo, cada diagrama deve sempre ser reduzido à mesma função transferencial.

Qual alternativa mostra um par diagrama de blocos cuja função transferencial difere dos demais?

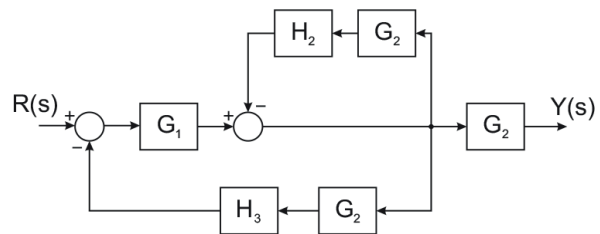
a)



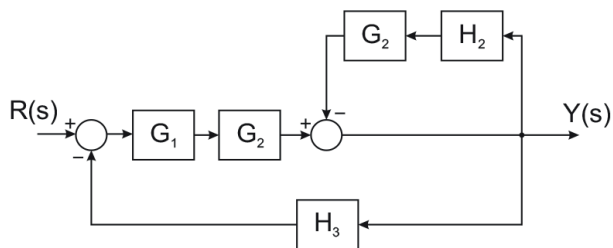
b)



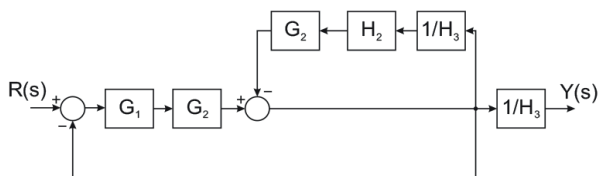
c)



d)



e)



Seção 2.2

Função de transferência

Diálogo aberto

Em seções anteriores, você conheceu uma maneira muito utilizada de representar matematicamente um sistema dinâmico: a função de transferência. Nesta seção, exploraremos um pouco mais as informações que podem ser extraídas dessa forma de representação de um sistema dinâmico e veremos o porquê de a função de transferência ser tão importante no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT).

Vamos aprender a encontrar os polos e zeros da função transferência de um sistema dinâmico, assim como também veremos como prever o comportamento de dois tipos fundamentais de sistemas: de primeira e de segunda ordem.

Até agora, durante os estudos, você já se deparou com sistemas de ambas as ordens, mas agora vamos analisá-los com mais profundidade. É possível obter informações sobre o comportamento desses tipos de sistemas por meio da adequação da função transferência a um formato específico (de cada ordem de sistema dinâmico) de escrevê-la, que veremos ao longo da seção.

Agora, vamos prosseguir com a tarefa que você, membro da equipe de engenharia de uma empresa que fabrica acessórios para computador, deve desenvolver.

Você já obteve o modelo dinâmico do sistema em três representações: no tempo, em espaço de estados e em diagrama de blocos.

Agora, você deve escolher qual é a melhor entrada e a melhor saída para o sistema e obter a representação do modelo dinâmico em função transferência para obter seus os polos e zeros.

Não pode faltar

Como você já sabe, função de transferência é uma maneira de representar um sistema dinâmico. Segundo Ogata (2010), a função de transferência é definida pela relação entre a transformada de Laplace da saída e a da entrada de um SLIT, para condições iniciais nulas.

Um SLIT com condições iniciais nulas pode ser descrito como na Equação 2.31, sendo $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ as propriedades do sistema, Y a saída e X a entrada.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (n \leq m) \quad (2.31)$$

Então, a partir da Equação 2.31, com condições iniciais nulas, podemos obter a função de transferência do sistema (Equação 2.32).

$$\text{Função de transferência} = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.32)$$

Sendo n a maior potência de s no denominador da função transferência, dizemos que o sistema é de ordem n .



Assimile

O conceito de função de transferência é limitado a sistemas SLIT, e a maior potência do denominador da função de transferência define a ordem de um sistema dinâmico.

Seja $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ a função de transferência do sistema dinâmico, então, podemos dizer que, para uma entrada $X(s)$, a saída será $Y(s) = G(s)X(s)$.

Ao aplicarmos uma entrada de impulso unitário no sistema ($\delta(t)$), já sabemos como realizar o procedimento matemático da obtenção da resposta temporal do sistema dinâmico.

$$X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$Y(s) = G(s) \quad (2.33)$$

Ou seja, de acordo com a Equação 2.33, a resposta temporal do sistema para a entrada impulso será a $g(t)$, que é a transformada inversa de Laplace de $G(s)$. Perceba a importância da resposta do sistema à entrada impulso: ela é a própria função de transferência do sistema dinâmico em questão. Tanto que a resposta $g(t)$ é denominada como a função característica do sistema, e ela apresenta as mesmas informações dinâmicas que a função de transferência.

A técnica de submeter um sistema a uma entrada impulso e obter a sua resposta (por meio de sensores) é utilizada para obter a função de transferência em uma técnica denominada identificação de sistemas.

Vale ressaltar que, na prática, é impossível obter um impulso unitário perfeito, pois, para tal, seria necessário transferir uma certa quantidade de energia ao sistema dentro de um período de tempo

infinitamente pequeno. Então, de acordo com as constantes de tempo do sistema dinâmico sujeito ao teste, um pulso de duração relativamente rápida é considerado um impulso.

A constante de tempo de um sistema refere-se ao quão rápido o sistema responde a uma excitação. Tal propriedade é amplamente conhecida para dois tipos de sistemas muito importantes: de primeira e de segunda ordem.

Começemos a discutir sobre o sistema de primeira ordem.

De forma geral, um sistema de primeira ordem pode ter sua função de transferência escrita em sua forma padrão, como mostra a Equação 2.34, em que o parâmetro (τ) é a constante de tempo do sistema.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.34)$$

O denominador da função de transferência é um polinômio em s , e suas raízes são denominadas polos do sistema. Veja que para o sistema de primeira ordem, seu único polo é $s = -\frac{1}{\tau}$. Ao fazermos a transformada inversa de Laplace, vemos que o polo do sistema de primeira ordem aparece no expoente da função exponencial da resposta no tempo ($y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$). Caso o sistema também tenha no numerador um polinômio, as raízes desse polinômio são os zeros do sistema.

A constante de tempo nos informa quanto tempo dura a resposta transitória do sistema, até que seja atingida a resposta em regime permanente. Para entendermos melhor, apliquemos uma entrada degrau unitário ($X(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$) ao sistema (Equação 2.35).

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(\tau s + 1)} \quad (2.35)$$

Aplicando frações parciais (Equação 2.36), temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{A(\tau s + 1) + Bs}{s(\tau s + 1)} \quad (2.36)$$

Calculando A e B por meio de identidade polinomial, temos que $A=1$ e $B=-\tau$. Então, substituindo na Equação 2.30 e aplicando a transformada inversa de Laplace, temos a resposta do sistema de primeira ordem à entrada degrau (Equação 2.37).

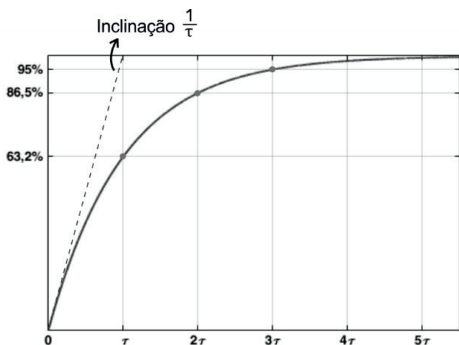
$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1/\tau}\right] \Rightarrow$$

$$y_{\text{entrada degrau}}(t) = \mu(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.37)$$

A Figura 2.19 mostra o formato da resposta.

Figura 2.19 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que após um período de tempo equivalente a τ , o sistema alcança 63,2% da resposta de regime permanente. Matematicamente, a resposta de regime permanente é definida como o estado em que o sistema se encontrará após decorrido um período infinito de tempo do início, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$. Na prática, podemos dizer que o sistema entra em regime permanente quando o sistema alcança em torno de 2% de seu valor final. Mas, matematicamente, como sabemos qual é o valor final? Podemos utilizar o teorema do valor final, que é dado pela Equação 2.38.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \quad (2.38)$$

Ou seja, podemos obter a resposta de um sistema dinâmico em regime permanente (valor final) por meio do cálculo do limite para $s \rightarrow 0$, de s multiplicado pela resposta do sistema a uma determinada entrada (no domínio de Laplace).



Exemplificando

Vamos, então, calcular matematicamente o valor final da resposta de um sistema de primeira ordem à entrada degrau qualquer para podermos saber quando o sistema atinge um valor em torno de 2% em relação ao seu regime permanente.

Uma entrada degrau de amplitude A pode ser dada pela Equação 2.39.

$$x(t) = A \cdot \mu(t) \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s} \quad (2.39)$$

Substituindo a equação 2.39 na Equação 2.34, temos a Equação 2.40.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} \quad (2.40)$$

Aplicando o teorema do valor final, temos o resultado na Equação 2.41.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = s \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = A \quad (2.41)$$

Ou seja, para uma entrada degrau de amplitude A , o valor final de qualquer sistema dinâmico de primeira ordem será A também.

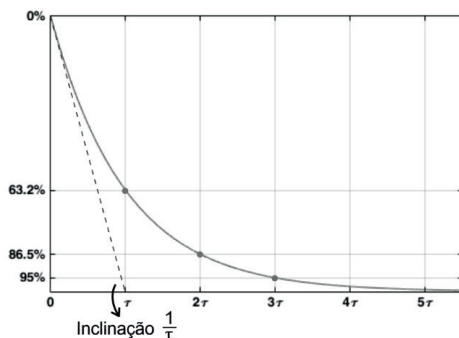
Para entrada impulso, como visto anteriormente, cuja transformada de Laplace é 1 , a resposta temporal do sistema é simplesmente a transformada inversa de Laplace de sua própria função transferência, que podemos ver na Equação 2.42.

$$y_{\text{entrada impulso}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\tau s + 1}\right] \Rightarrow$$

$$y_{\text{entrada impulso}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.42)$$

O formato da resposta à entrada impulso é mostrado pelo gráfico da Figura 2.20.

Figura 2.20 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada impulso



Fonte: elaborada pelo autor.

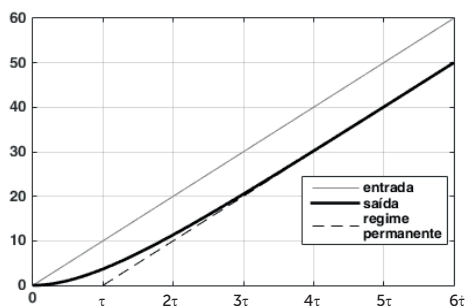
Perceba que em ambos os casos, o sistema de primeira ordem inicia com derivada igual a $\frac{1}{\tau}$ e leva um tempo equivalente a τ para atingir 63,2% de seu regime permanente.

Outra entrada importante para analisar a resposta de sistemas dinâmicos é a entrada rampa unitária ($x(t)=t \Rightarrow X(s)=\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$), pois esta é uma função de entrada simples (uma função afim), que revela o comportamento do sistema quando sob a influência de uma função que muda ao longo do tempo.

Seguindo os mesmos passos anteriores, a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada rampa unitária é dada pela Equação 2.43, e seu gráfico é mostrado na Figura 2.21.

$$y_{\text{entrada rampa}}(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.43)$$

Figura 2.21 | Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada rampa



Fonte: adaptada de Felício (2010, p. 374).

No caso da entrada rampa, o sistema de primeira ordem nunca chega a atingir a referência (ou entrada). Então, dizemos que há um erro de regime permanente (ou simplesmente um erro de regime). E, novamente, o sistema demora um período de 3τ para atingir 95% de seu regime permanente. Aplicando o teorema do valor final, descobrimos que o valor de regime permanente para entrada rampa tende ao ∞ (tendência que pode ser observada no gráfico da Figura 2.21). Assim, podemos usar o teorema do valor final para calcular outro valor: o erro de regime permanente. O conceito de erro é sempre aplicado da mesma maneira: uma referência (no nosso caso, a entrada do sistema) subtraído do sinal que contém o erro (no caso, a saída do sistema). Sendo o erro em função do tempo dado por $e(t)$, aplicamos o teorema do valor final, como mostra a Equação 2.44.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \Rightarrow \\
&\left(\begin{aligned} e(t) &= x(t) - y(t) \Rightarrow \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[x(t)] - \mathcal{L}[y(t)] \Rightarrow \\ E(s) &= X(s) - Y(s) \end{aligned} \right) \\
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (X(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \right) \Rightarrow \\
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[1 - \frac{1}{(\tau s + 1)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\tau s}{(\tau s + 1)} + \frac{1}{(\tau s + 1)} - \frac{1}{(\tau s + 1)} \right) \Rightarrow \\
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau}{(\tau s + 1)} = \tau \\
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \tau \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Ou seja, em regime permanente, a resposta do sistema dinâmico de primeira ordem sempre estará defasado de τ da entrada rampa.



Refleta

Para as entradas impulso e degrau unitário, podemos ver pelos gráficos das Figuras 2.14 e 2.15 que o erro de regime permanente tende a ser zero. Mas, ao invés de unitárias, considere tais entradas de qualquer magnitude. Você consegue calcular qual é o erro de regime quando um SLIT de primeira ordem é submetido a cada uma delas?

Agora, vamos falar um pouco sobre sistema de segunda ordem.

A função transferência de um sistema dinâmico de segunda ordem pode ser escrita em sua forma padrão, como mostra a Equação 2.45.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.45)$$

Os parâmetros ω_n e ζ são a frequência natural de oscilação do sistema e o amortecimento, respectivamente. O valor desses parâmetros define como será a resposta do sistema dinâmico. O valor do amortecimento (ζ) define o formato da curva da resposta do sistema, pois afeta os polos do sistema dinâmico. Os polos de um sistema são os valores de s para os quais o valor da função transferência de um sistema dinâmico tende ao infinito, ou seja, podemos encontrar os polos de um sistema dinâmico, como explicado anteriormente, igualando o polinômio do denominador de sua função transferência a zero como mostra a Equação 2.46.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s = \zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.46)$$

Da Equação 2.46, podemos perceber que o valor de ζ define a classificação do sistema e se os polos serão números complexos ou não. Veja a Equação 2.47:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} (i) \ 0 < \zeta < 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \\ (ii) \ \zeta = 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 = 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \\ (iii) \ \zeta > 1 \Rightarrow \zeta^2 - 1 > 0 \Rightarrow s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (2.47)$$

Se $0 < \zeta < 1$, o sistema é classificado como subamortecido. Ele tem dois polos complexos conjugados e o termo $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, que multiplica a unidade imaginária j , é denominado frequência amortecida do sistema: ω_n . Sua resposta a uma entrada degrau unitária é dada pela Equação 2.48.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}\omega_d t \right) \quad (2.48)$$

Se $\zeta = 1$, o sistema é classificado como criticamente amortecido. Como temos uma raiz real de multiplicidade 2 para o polinômio do denominador da função transferência, então, dizemos que o sistema tem um polo de ordem 2. A resposta a uma entrada degrau unitário é dada pela Equação 2.49.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (2.49)$$

Se $\zeta > 1$, dizemos que o sistema é sobreamortecido. Veja que agora temos dois polos reais. A resposta do sistema é dada pela Equação 2.50.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right] = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \quad (2.50)$$

$$\text{onde: } s_1 = \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right), \text{ e } s_2 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

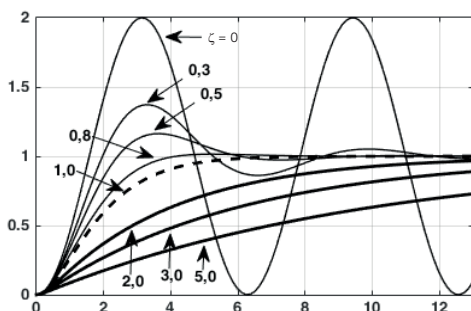
A Figura 2.22 mostra um comparativo entre os tipos de sistemas de segunda ordem. Veja que os sistemas subamortecidos (em linha mais espessa) mostram oscilações na resposta, sendo que para $\zeta = 0$, como a parte real do polo (ou taxa de decaimento) é nula, as oscilações nunca cessam: é como se não houvesse dissipação de energia no sistema, fato que praticamente não ocorre na realidade. Esse tipo de sistema também exibe uma resposta que supera a entrada (ou referência) e, quanto menor o ζ , mais o sistema supera sua referência, e a medida dessa magnitude é denominada sobressinal.

Nos sistemas criticamente amortecidos (linha tracejada), vemos que sua resposta tende a ir ao encontro da referência de maneira assintótica.

Os sistemas sobreamortecidos (em linha menos espessa) seguem o mesmo comportamento anterior, mas de forma mais lenta.

Perceba, ainda, que todos os sistemas, independentemente de seu coeficiente de amortecimento, iniciam a resposta com derivada nula.

Figura 2.22 | Respostas de sistemas de 2ª ordem à entrada degrau unitário



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim como as raízes do polinômio do denominador de uma função transferência é denominado polo do sistema, a raiz do polinômio do numerador é denominada zero da função transferência.

Essa variedade de comportamentos vista na resposta dos sistemas de segunda e primeira ordem fez surgir várias métricas para avaliar tais sistemas (veja a Figura 2.23). As métricas mais utilizadas são:

- Tempo de subida (t_r) – tempo necessário para que o sistema passe:
 - De 0% a 100% do seu valor final para sistemas subamortecidos.
 - De 10% a 90% do seu valor final para sistemas sobreamortecidos ou de primeira ordem.

O tempo de subida é dado pela Equação 2.51.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.51)$$

Sendo \mathbf{s} um número complexo (como visto na Equação 2.46), o valor β é o ângulo feito entre o semieixo real negativo, a origem e o polo no plano real-complexo.

- Tempo de pico, t_p : é o tempo para que o sistema alcance o primeiro pico de sobressinal (Equação 2.52).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.52)$$

- Sobressinal (M_p): é definido como a máxima porcentagem do valor final que a resposta do sistema fica acima do valor final (Equação 2.53).

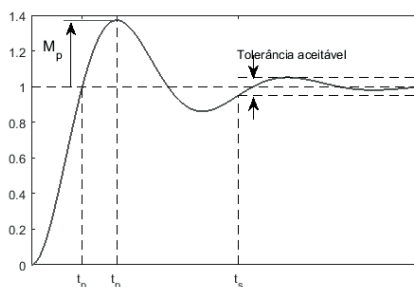
$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} \quad (2.53)$$

- Tempo de acomodação (t_s): é o tempo necessário para que a resposta do sistema fique limitada a uma faixa de valores (geralmente 2% ou 5%) em torno de seu valor final (Equação 2.54).

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ para 2\%, ou} \quad (2.54)$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \text{ para 5\%}$$

Figura 2.23 | Representação gráfica das métricas



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 155).



Pesquise mais

Todas as métricas para os sistemas dinâmicos são obtidas por meio de cálculo e manipulações matemáticas com as respostas temporais dos modelos. Para saber um pouco mais, leia o capítulo do livro indicado a seguir e veja como podemos chegar, matematicamente, nas definições das métricas aqui mostradas:

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. p. 154-158.

Sem medo de errar

Agora, retomemos a tarefa a ser realizada com o modelo do sistema de controle de posição do cabeçote de impressão. Vamos obter a função de transferência do sistema a partir do diagrama de blocos da Figura 2.15.

Percorrendo o diagrama a partir de Y, da direita para a esquerda, temos a Equação 2.55, sendo que A é o ramo entre os dois blocos de soma da Figura 2.15.

$$Y = \frac{-R}{K_m k_1 k_2 s} (rms^2 Y + A) \quad (2.55)$$

Continuando, no mesmo sentido, a partir de A, temos a Equação 2.56.

$$A = Js \cdot s \cdot \Theta + b \cdot s \cdot \Theta \quad (2.56)$$

Substituindo A da Equação 2.56 na Equação 2.55, obtemos a função de transferência (Equação 2.57).

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-R}{K_m k_1 k_2 s} (rms^2 Y + Js^2 \Theta + bs \Theta) \\ Y + \frac{Rrms^2}{K_m k_1 k_2 s} Y &= \frac{-R}{K_m k_1 k_2 s} (Js^2 \Theta + bs \Theta) \\ \left(\frac{K_m k_1 k_2 s}{R} + rms^2 \right) Y &= \Theta (-Js^2 - bs) \\ \frac{Y}{\Theta} s &= \frac{-Js - b}{rms + \frac{K_m k_1 k_2}{R}} \quad (2.57) \end{aligned}$$

Os parâmetros dos sistemas são dados no Quadro 2.3.

Quadro 2.3 | Valores dos parâmetros do sistema

Massa	$m = 0,2kg$
Sensor de luz	$k_1 = 1 \frac{V}{m}$
Raio	$r = 0,15m$
Atrito do motor	$b = 0,25 \frac{Nms}{rad}$
Resistência elétrica do motor	$R = 2 \Omega$
Constante de torque do motor	$K_m = 2 \frac{Nm}{A}$
Inércia total	$J = 0,01 kg \cdot m^2$
Ganho do controlador	$k_2 = 0,1s$
Rigidez da correia	$k = 20 \frac{N}{m}$

Fonte: adaptado de Ogata (2010, p. 132).

Observando o numerador da função transferência, podemos ver que temos um zero em $s = 0$, independentemente dos parâmetros do sistema.

Para encontrarmos os polos da função transferência, vamos utilizar o comando roots do MATLAB para calcular os polos do sistema. Neste comando, precisamos inserir o valor dos coeficientes do polinômio. Então, substituiremos os valores do Quadro 2.3 no denominador da função transferência e a igualaremos a zero (Equação 2.58).

$$1 \cdot s^3 + 25 \cdot s^2 + 290 \cdot s^1 + 5300 \cdot s^0 = 0 \quad (2.58).$$

Utilizando uma calculadora gráfica, obtemos as raízes do polinômio do denominador, ou seja, os polos do sistema.

$$s = \begin{cases} -22,56 \\ -1,22 + 15,28i \\ -1,22 - 15,28i \end{cases}$$

Logo, os polos do sistema são: $(-22,56)$, $(-1,22+15,28i)$ e $(-1,22-15,28i)$.

É importante conhecermos os polos do sistema, pois, mais à frente, veremos que eles impactam a performance e estabilidade deste.

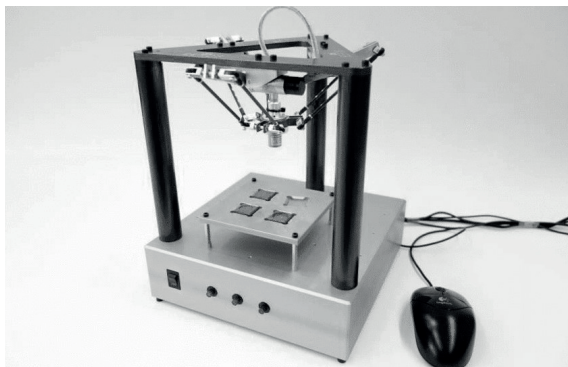
Avançando na prática

Adequação métrica do manipulador delta

Descrição da situação-problema

Um sistema mecatrônico, denominado manipulador delta (Figura 2.24), é muito utilizado em tarefas de pega-e-põe (*pick-and-place*) por sua característica de desenvolver altas acelerações, devido à sua cadeia cinemática fechada.

Figura 2.24 | Manipulador delta



Fonte: <http://www.ntb.ch/fileadmin/_processed_/f/d/csm_EEROSDelta169_96aee8db2.gif>. Acesso em: 6 jul. 2017.

Devido às suas altas acelerações, pode ocorrer de, durante a desaceleração, parar em uma dada posição, a ponta do robô mova-se mais do que o desejado.

O controle de posição utilizado na tarefa de embalar produtos cosméticos de uma linha de produção faz com que o manipulador delta comporte-se como um sistema de segunda ordem.

Sendo os cosméticos objetos frágeis, e, dado o fato de que durante a tarefa de embalar, esses objetos passam suficientemente próximos às embalagens, o erro de movimentação não deve passar de 15% da posição desejada a cada entrada de tensão nos motores do manipulador.

Além de tornar a movimentação do manipulador um sistema de segunda ordem, devido a características construtivas, o coeficiente de amortecimento só pode assumir certos valores predefinidos, a saber: 0,4; 0,5; 0,6; ou 0,7.

Agora, perguntamos: para uma entrada de tensão da forma degrau unitário, de acordo com o requerimento de máximo sobressinal, qual dos fatores de amortecimento disponíveis é o mais adequado para a tarefa de embalar?

Resolução da situação-problema

De acordo com a equação do sobressinal $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}$, podemos calcular o sobressinal para cada caso.

$$\zeta = 0,4 \Rightarrow M_p = e^{-\frac{0,4\pi}{\sqrt{1-0,4^2}}} = 0,254$$

$$\zeta = 0,5 \Rightarrow M_p = 0,163$$

$$\zeta = 0,6 \Rightarrow M_p = 0,095$$

$$\zeta = 0,7 \Rightarrow M_p = 0,046$$

Sabendo não podemos ter sobressinal maior que 15%, então, 0,6 e 0,7 são adequados. Mas, da equação do tempo de subida ($\zeta = 0,6$), sabemos que quanto maior o coeficiente de amortecimento, maior é o tempo de subida, ou seja, mais tempo leva para o sistema se aproximar da referência. Então, obedecendo ao máximo de 15% de sobressinal e escolhendo o valor que resulta no sistema de resposta mais rápida, escolhemos $\zeta = 0,6$.

Faça valer a pena

1. Sistemas de primeira ordem e de segunda ordem sobreamortecidos mostram comportamento semelhante quando submetidos à entrada degrau, pois não apresentam sobressinal e tendem assintoticamente ao seu valor final, que coincide com a referência.

Qual das alternativas apresenta uma afirmação correta em relação a ambos os sistemas em questão?

- a) Um sistema de primeira ordem e um sistema de segunda ordem sobreamortecido apresentam a mesma constante de tempo.
- b) Um sistema de primeira ordem se assemelha ao sistema de segunda ordem sobreamortecido, pois ambos compartilham do coeficiente de amortecimento maior que 1.
- c) Um sistema de segunda ordem sobreamortecido se assemelha a um sistema de primeira ordem, pois o denominador de sua função transferência pode ser reescrito como um polinômio de primeira ordem.
- d) A única diferença entre um sistema de primeira ordem e um sistema de segunda ordem sobreamortecido é que o primeiro sempre apresenta polos complexos de ordem 2 e, no segundo, isso nunca ocorre.
- e) Na resposta à entrada degrau, o sistema de primeira ordem apresenta derivada não nula, diferentemente do sistema de segunda ordem (independentemente do seu coeficiente de amortecimento), que sempre apresenta derivada nula.

2. Apenas com a observação da função transferência de um sistema de segunda ordem podemos obter métricas da sua resposta no tempo por meio de fórmulas conhecidas.

Considere um sistema massa-mola-amortecedor descrito pela função transferência a seguir:

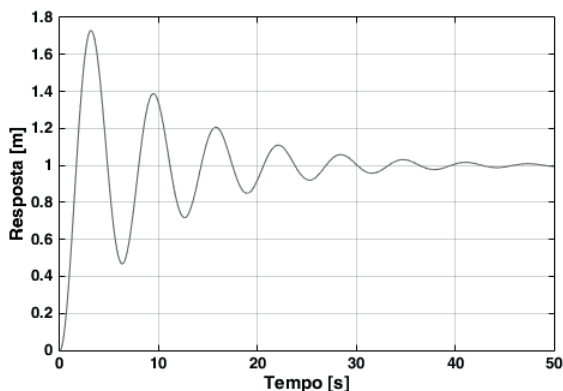
$$G(s) = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K}$$

Sabendo que um sistema de segunda ordem tem o seguinte formato padrão $G(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$, qual é a frequência natural do sistema?

- a) $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$.
- b) $\omega_n = \sqrt{K}$.
- c) $\omega_n = \frac{K}{M}$.
- d) $\omega_n = MBK$.
- e) $\omega_n = K$.

3. A partir das métricas da resposta de um SLIT de segunda ordem, podemos inferir as suas características utilizando fórmulas.

Observe, a seguir, a resposta de um sistema de segunda ordem subamortecido a uma entrada degrau unitário obtida experimentalmente:



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que a máxima amplitude foi de 1,729 m (aos 3,16 s) e o tempo de acomodação dos 5% foi de aproximadamente 30 s.

Qual é a frequência natural, a frequência amortecida e o coeficiente de amortecimento do sistema em questão?

Dados:

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \text{ para } 5\%$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta \omega_n \pi}{\omega_d}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

a) $\omega_n = 0,1$, $\zeta = 1$ e $\omega_d = 0$.

b) $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,01$ e $\omega_d = 0,9999$.

c) $\omega_n = 0,1$, $\zeta = 0,1$ e $\omega_d = 0,0995$.

d) $\omega_n = 1$, $\zeta = 1$ e $\omega_d = 0$.

e) $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,1$ e $\omega_d = 0,9950$.

Seção 2.3

Problemas práticos sobre representação de sistemas

Diálogo aberto

Nesta última seção veremos, de maneira aplicada, os conceitos apresentados nas seções anteriores desta unidade: espaço de estados, diagramas de bloco, função de transferência e análise de resposta de sistemas de primeira e segunda ordem.

Aplicaremos esses conteúdos usando o software MATLAB, já conhecido por você. Serão apresentados comandos básicos necessários e como utilizá-los para obtermos cada tipo de representação. Você verá que, com o auxílio de alguns comandos do MATLAB, é possível migrar facilmente entre alguns tipos de representações.

Você, como membro da equipe de engenharia de uma empresa de acessórios para computador, já obteve a representação do sistema de controle do cabeçote da impressora em várias formas (função de transferência e diagrama de blocos).

Agora, você deve inserir esses modelos no MATLAB, para que sua equipe possa utilizá-los em testes simulados para prototipagem e ajustes do modelo.

Quais são os procedimentos necessários para completar essa tarefa? Como o software exibirá cada representação do modelo?

Vamos descobrir!

Mãos à obra e bons estudos!

Não pode faltar

No MATLAB é possível lidar com as representações de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, que você conheceu ao longo desta unidade.

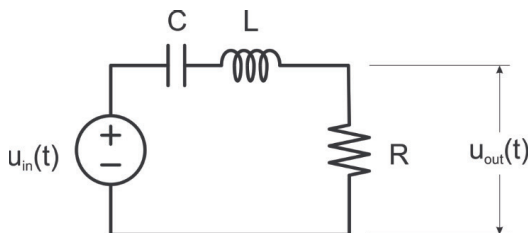
Começemos pela representação em espaço de estados. As Equações 2.59 e 2.60 descrevem a representação de um modelo em espaço de estados.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (2.60)$$

Como já explicado na primeira seção, as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** são, respectivamente, as matrizes de estado, entrada, saída e transição direta. No MATLAB, podemos criar um modelo em espaço de estados utilizando o comando *ss* (*state space*). Considere o circuito RLC da Figura 2.25.

Figura 2.25 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo $u_{in}(t)$ a entrada e $u_{out}(t)$ a saída, sabemos que o modelo do sistema dinâmico é dado pela Equação 2.61.

$$u_{in}(t) = u_{out}(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t u_{out}(t) dt + \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{out}}{dt}(t) \quad (2.61)$$

Para a representação em espaço de estados, escolhemos as variáveis de estado, lembrando que a equação diferencial em espaço de estados é sempre de primeira ordem: fazamos $x_1 = \int_0^t u_{out}(t) dt$, $x_2 = u_{out}(t)$, e $u = u_{in}(t)$. Equacionando as derivadas de ambos os estados, temos as Equações 2.62 e 2.63.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.62)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R}{L} x_2 + \frac{R}{LC} x_1 - \frac{R}{L} u \quad (2.63)$$

Então, temos as equações em espaço de estados (2.64 e 2.65).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix} u \quad (2.64)$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad 1] \mathbf{x} + [0 \quad 0] \cdot u \quad (2.65)$$

$$\text{onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t u_{out}(t) dt \\ u_{out}(t) \end{bmatrix} \text{ e } u = u_{in}(t)$$

Comparando as Equações 2.59 e 2.60 com as Equações 2.64 e 2.65, respectivamente, tomamos conhecimento das matrizes **A**, **B**, **C** e **D**, que são justamente os argumentos que devem ser passados

ao comando `ss` do MATLAB. Mas este comando (assim como todos os que serão utilizados nesta seção) necessita que todas as matrizes contenham apenas valores numéricos. O Quadro 2.4 mostra quais valores foram utilizados para cada elemento do circuito e como é feita a inserção do modelo em espaço de estados no MATLAB. Lembrando que o `%` é utilizado para fazer comentários no MATLAB.

Quadro 2.4 | Inserindo modelo em espaço de estados no MATLAB

1	>> R = 2200; %ohm
2	>> L = 3.8e-3; %henry
3	>> C = 2.2e-6; %farad
4	>> a = [0, 1; -1/(L*C), -R/L];
5	>> b = [0; R/L];
6	>> c = [0, 1];
7	>> d = 0;
8	>> RLCss = ss(a, b, c, d, 'InputName', 'u_in', 'outputname', 'u_out')

Fonte: elaborado pelo autor.

No MATLAB, o resultado da linha 8 (Quadro 2.4) nos apresenta todas as matrizes do sistema em espaço de estados, inserida com o comando `ss`. A última linha diz “modelo em espaço de estados no tempo contínuo”, pois, com o mesmo comando, é possível fazer um modelo com tempo discretizado, mas esse assunto foge de nosso escopo. Na mesma linha, veja que podemos inserir os nomes da entrada (`Uin`) e da saída (`Uout`) do sistema definindo `InputName` e `OutputName`, respectivamente, ao final do comando `ss`, mas eles não são obrigatórios. A documentação de ajuda do MATLAB (acessível digitando-se `help` no *command window* ou pressionando-se a tecla `F1`) mostra outras propriedades que podem ser definidas ao se criar um modelo em espaço de estados. Este modelo é uma variável do tipo `ss` no MATLAB. Com esse tipo de variável, podemos utilizar algumas funções interessantes. Temos, por exemplo, as funções `step` e `impz`, que dão uma entrada degrau e impulso unitário no modelo, respectivamente. Essas funções têm como argumentos o modelo do sistema (obrigatoriamente) e o vetor de tempo (facultativo). Como saída, podemos obter os vetores de saída do modelo e de tempo mas, se utilizarmos as saídas, os comandos não traçarão os gráficos automaticamente. O Quadro 2.3 mostra como utilizar o comando

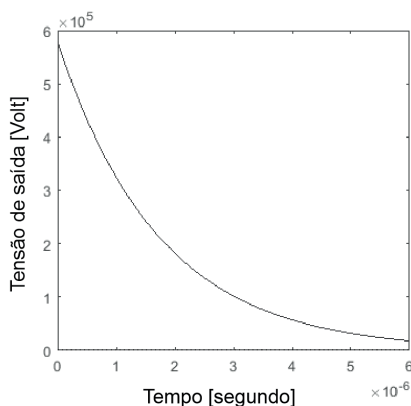
para o modelo RLC_{ss} que acabamos de obter. O gráfico gerado na linha 10 (Quadro 2.5) é exibido na Figura 2.26.

Quadro 2.5 | Uso dos comandos `step` e `impulse`

9	<code>>> [ystep, tstep] = step(RLCss);</code>
10	<code>>> impulse(RLCss, 0:1e-7:6e-6); %Figura 2.20</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 2.26 | Resposta ao impulso unitário do sistema RLC_{ss}



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos inserir o mesmo modelo de circuito RLC no MATLAB na forma de função de transferência. Já sabemos qual é a função transferência do circuito (Equação 2.66).

$$\frac{U_{out}}{U_{in}}(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.66)$$

Na última seção da primeira unidade deste material, você aprendeu a lidar com variáveis e funções simbólicas no MATLAB para aplicar as transformadas direta e inversa de Laplace e, conseqüentemente, obter funções de transferência de SLIT.

Agora, utilizaremos outro método de representar e manipular funções de transferência no MATLAB: utilizaremos o comando `tf` (*transfer function*). Com esse comando, há duas maneiras de inserir o modelo de um sistema. O primeiro é mostrado no Quadro 2.6. O comando `tf` tem como argumentos, respectivamente, o numerador e o denominador da função de transferência, sendo

que devemos tratá-los como polinômios e inserir apenas os coeficientes de maneira decrescente com a potência de **s**. Por exemplo, na Equação 2.66, o numerador é $\frac{R}{L}s$. Então, ele entrará como argumento no comando `tf` da seguinte maneira: `[R/L, 0]`, pois o coeficiente $\frac{R}{L}$ multiplica s^1 e o coeficiente zero multiplica s^0 . Da mesma maneira, o denominador $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$ será representado como `[1, R/L, 1/(L*C)]`.

Quadro 2.6 | Primeiro modo de inserir função de transferência no MATLAB

11	<code>>> R = 2200; %ohm</code>
12	<code>>> L = 3.8e-3; %henry</code>
13	<code>>> C = 2.2e-6; %farad</code>
14	<code>>> RLCTf1 = tf([R/L, 0],[1, R/L, 1/(L*C)])</code> RLCTf1 =
	$\frac{5.789e05 \text{ s}}{s^2 + 5.789e05 \text{ s} + 1.196e08}$
	Continuous-time transfer function.

Fonte: elaborado pelo autor.

Outra maneira de obter exatamente o mesmo resultado é mostrado no Quadro 2.7.

Quadro 2.7 | Segundo modo de inserir função de transferência no MATLAB

15	<code>>> R = 2200; %ohm</code>
16	<code>>> L = 3.8e-3; %henry</code>
17	<code>>> C = 2.2e-6; %farad</code>
18	<code>>> s = tf('s');</code>
19	<code>>> RLCTf2 = (R*s/L)/(s^2+R*s/L+1/(L*C))</code> RLCTf2 =
	$\frac{8.36 \text{ s}}{1.444e-05 \text{ s}^2 + 8.36 \text{ s} + 1727}$
	Continuous-time transfer function.

Fonte: elaborado pelo autor.

Veja que o segundo método é similar ao que você realizou na última seção da unidade anterior, mas o resultado é distinto, pois função de transferência é uma variável do tipo `tf`, que é diferente de uma variável ou função do tipo simbólica. Assim como uma variável do tipo `ss`, variáveis do tipo `tf` também podem ser utilizadas nos comandos `step` e `impz`.



Refleta

Mesmo entrando duas vezes com o mesmo modelo no MATLAB, obtivemos resultados distintos: compare o resultado do Quadro 2.4 com o do Quadro 2.3. Isso significa que fizemos algo de errado?

Ou é realmente possível que duas funções de transferência aparentemente distintas nos retornem o mesmo resultado?

Podemos, ainda, por meio do comando `ss2tf`, converter o quarteto de matrizes do espaço de estados para numerador e denominador de uma função transferência e fazer o oposto com o comando `tf2ss`. O Quadro 2.8 traz um exemplo do uso da função `tf2ss`, utilizando a função de transferência da Equação 2.66.

Quadro 2.8 | Convertendo `tf` para `ss` e `ss` para `tf`

```

20  >> R = 2200; %ohm
21  >> L = 3.8e-3; %henry
22  >> C = 2.2e-6; %farad
23  >> num = [R/L, 0];
24  >> den = [1, R/L, 1/(L*C)];
25  >> [a, b, c, d] = tf2ss(num,den)
26  >> [novo_num,novo_den] = ss2tf(a,b,c,d)

```

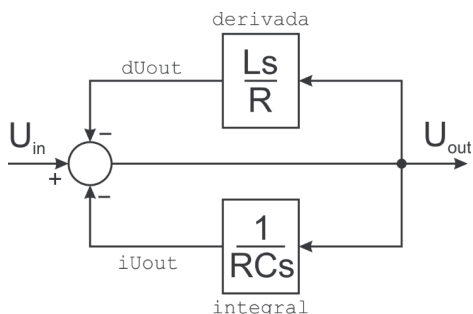
Fonte: elaborado pelo autor.

Também podemos inserir modelos por meio da representação em diagrama de blocos no MATLAB. A Equação 2.61 do circuito RLC, após a transformada de Laplace e o isolamento o termo $U_{out}(s)$, resulta na Equação 2.67.

$$U_{out}(s) = U_{in}(s) - \frac{1}{RCs} U_{out}(s) - \frac{Ls}{R} U_{out}(s) \quad (2.67)$$

Seu diagrama de blocos é mostrado na Figura 2.27.

Figura 2.27 | Diagrama de blocos circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

Existem várias maneiras de se obter o mesmo diagrama de blocos no MATLAB. Para o método que vamos utilizar é necessário que ramos e blocos sejam nomeados no diagrama de blocos, como podemos ver na Figura 2.27. Veja o Quadro 2.9, que mostra como inserir o diagrama de blocos da Figura 2.27.

Quadro 2.9 | Inserindo diagrama de blocos no MATLAB

```

27  >> R = 2200; %ohm
28  >> L = 3.8e-3; %henry
29  >> C = 2.2e-6; %farad
30  >> s = tf('s');
31  >> derivada = L*s/R; % bloco derivada
32  >> derivada.inputname = 'Uout'; %
    entrada do bloco derivada
33  >> derivada.outputname = 'dUout';
    % saída do bloco derivada
34  >> integral = 1/(R*C*s); % bloco integral
35  >> integral.inputname = 'Uout'; %
    entrada do bloco integral
36  >> integral.outputname = 'iUout';
    % saída do bloco integral
37  >> soma = sumblk('Uout = Uin - dUout - iUout');
38  >> RLCblock =
    connect(integral,derivada,soma,'Uin','Uout')
    
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Perceba que utilizamos o comando `tf` para originarmos a variável `s`, que é útil para criarmos os blocos. Cada bloco pode ser criado

tanto da maneira apresentada como inserindo-se numerador e denominador no comando `tf` (como no Quadro 2.6) ou ainda com o comando `ss`. Após criar cada bloco, devemos dar nomes para sua entrada (`inputname`) e para sua saída (`outputname`), que são propriedades das variáveis do tipo `tf` (e `ss` também). O bloco de soma é dado, de maneira literal (por meio de *string*), pelo equacionamento que ele representa, sempre utilizando os mesmos nomes de entradas e saídas dos blocos do diagrama. Por fim, utilizamos o comando `connect` para conectar os blocos criados (primeiros argumentos) e indicar quais são as entradas e saídas (últimos argumentos).



Assimile

É importante que você padronize os nomes que forem dados para os ramos do diagrama de blocos, antes de serem inseridos no MATLAB. É por meio desses nomes que o programa faz as conexões e monta o modelo do sistema.

O resultado do comando `connect` é uma variável do tipo `ss`, ou seja, o MATLAB resolve as conexões do diagrama de blocos criado e retorna um sistema em espaço de estados. Portanto, também podemos submeter este resultado aos comando `step` e `impz`.



Pesquise mais

Existem várias outras funções para criar e manipular ligações entre blocos no MATLAB, como `series`, `append`, `feedback` etc. Navegue por elas para entender melhor seu funcionamento e também para tentar criar diagramas usando outros métodos. Para saber mais sobre essas funções, digite `'help nome_da_função'` no Command Window do MATLAB ou acesse o link indicado. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ref/feedback.html>>. Acesso em: 7 jun. 2017.

Muitas vezes, é necessário impor outras entradas nos sistemas para avaliar suas respostas. Para isso, utilizamos o comando `lsim` (*linear simulation*). Seus argumentos, em ordem, são: o modelo (em `tf` ou `ss`), o vetor de valores da entrada e o vetor de tempo. Vale ressaltar que os dois últimos argumentos devem ter as mesmas dimensões e, assim como `step` e `impz`, ao guardar os valores de retorno do comando em alguma variável, o gráfico não é exibido. O Quadro 2.10 mostra como submeter o sistema `RLCblock` a uma entrada do

tipo dente de serra (Equação 2.68). A resposta (em azul) e a saída (em cinza) são mostradas na Figura 2.28.

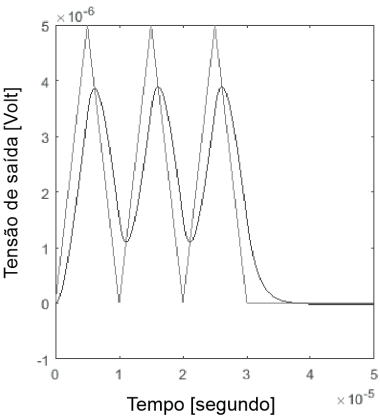
$$\begin{aligned}
 u_{in}(t) = & (\mu(t) - \mu(t - 0,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 0,5 \cdot 10^{-5}) \\
 & - (\mu(t - 0,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 1,5 \cdot 10^{-5}) \\
 & + (\mu(t - 1 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 1,5 \cdot 10^{-5}) \\
 & - (\mu(t - 1,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 2,5 \cdot 10^{-5}) \\
 & + (\mu(t - 2 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 2,5 \cdot 10^{-5}) \\
 & - (\mu(t - 2,5 \cdot 10^{-5}) - \mu(t - 3,5 \cdot 10^{-5})) \cdot (t - 3,5 \cdot 10^{-5})
 \end{aligned}
 \tag{2.68}$$

Quadro 2.10 | Inserindo diagrama de blocos no MATLAB

39	>> tempo = 0:1e-7:.5e-4;
40	>> uin = (heaviside(tempo)-heaviside(tempo-.5e-5)).*tempo-... (heaviside(tempo-.5e-5)-heaviside(tempo-1e-5)).*(tempo-1e-5)+... (heaviside(tempo-1e-5)-heaviside(tempo-1.5e-5)).*(tempo-1e-5)-... (heaviside(tempo-1.5e-5)-heaviside(tempo-2e-5)).*(tempo-2e-5)+... (heaviside(tempo-2e-5)-heaviside(tempo-2.5e-5)).*(tempo-2e-5)-... (heaviside(tempo-2.5e-5)-heaviside(tempo-3e-5)).*(tempo-3e-5);
41	>> lsim(RLCblock,uin,tempo);

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 2.28 | Resposta do modelo **RLCblock** à entrada dente de serra



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Podemos submeter o sistema dinâmico a qualquer entrada com o comando `lsim`. Se, por exemplo, for necessário obter a resposta do sistema à entrada rampa (Equação 2.69), podemos fazer como mostra o Quadro 2.11.

$$u_{in}(t) = \frac{1}{2}t \quad (2.69)$$

Quadro 2.11 | Simulação utilizando `lsim`

```
>> tempo = 0:1e-7:.5e-4;  
>> uin=.5*tempo;  
>> lsim(RLCblock,uin,tempo);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Por último, veremos as funções `stepinfo` e `lsiminfo`. Esses comandos executam a análise da resposta de um sistema dinâmico. O primeiro retorna métricas já conhecidas do sistema quando submetido à entrada degrau unitário como tempo de subida (*rise time*), tempo de acomodação (*settling time*, 2%, por padrão) e sobressinal (*overshoot*), além de outras métricas, como subsinal (*undershoot*), tempo de pico (*peak time*), entre outras. O segundo comando tem como argumentos o vetor de resposta do sistema, o vetor de tempo e o valor final de resposta do sistema, nesta ordem. O comando retorna o tempo de acomodação (2%, por padrão), o valor máximo e mínimo da resposta e o tempo no qual eles ocorrem. O Quadro 2.12 mostra como utilizar os comandos.

Quadro 2.12 | Utilização das funções `stepinfo` e `lsiminfo`

```
42 >> stepinfo(RLCtfl)  
ans =  
    RiseTime: 0  
    SettlingTime: 0.018942918148707  
    SettlingMin: 0.001410620524980  
    SettlingMax: 0.997516553192927  
    Overshoot: Inf  
    Undershoot: 0  
    Peak: 0.997516553192927  
    PeakTime: 1.336863988474220e-05
```

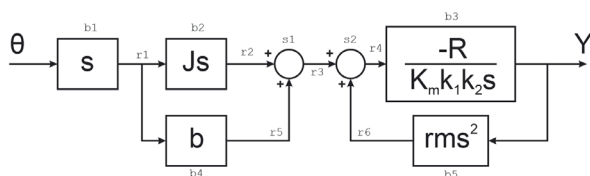
Fonte: elaborado pelo autor.

Sem medo de errar

Agora, você irá inserir o modelo do sistema de controle do cabeçote de impressão no MATLAB usando as representações em função de transferência e diagrama de blocos, para que toda a sua equipe possa utilizar, da maneira que for necessária, o sistema que você já modelou. O Quadro 2.3 mostra os parâmetros do sistema, a Equação 2.70 contém a função de transferência e a Figura 2.29 mostra o diagrama de blocos com seus ramos nomeados.

$$\frac{Y}{\Theta}(s) = \frac{-Js - b}{\frac{K_m}{R}k_2k_1 + rms} \quad (2.70)$$

Figura 2.29 | Diagrama de blocos para inserção no MATLAB



Fonte: elaborada pelo autor.

O Quadro 2.13 mostra como podemos obter a função de transferência no MATLAB a partir da Equação 2.70.

Quadro 2.13 | Modelo da impressora em função de transferência no MATLAB

```
43 >> m = 0.2; %kg
44 >> k1 = 1; %V/m
45 >> r = 0.15; %m
46 >> b = 0.25; %N*m*s/rad
47 >> R = 2; %ohm
48 >> Km = 2; %N*m/A
49 >> J = 0.01; %kg*m^2
50 >> k2 = 0.1; %s
51 >> k = 20; %N/m
52 >> impressora_tf = tf([-J -b],[r*m Km*k1*k2/R]);
```

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 2.14 mostra como montar o diagrama de blocos de acordo com a Figura 2.29.

Quadro 2.14 | Modelo da impressora em diagrama de blocos no MATLAB

53	>b1 = tf([1 0],1,'inputname','theta','outputname','r1')
54	>> b2 = tf([J 0],1,'inputname','r1','outputname','r2')
55	>> b4 = tf(b,1,'inputname','r1','outputname','r5')
56	>> b3 = tf(-R,[Km*k1*k2
57	0],'inputname','r4','outputname','Y')
58	>> b5 = tf([r*m 0 0],1,'inputname','Y','outputname','r6')
59	>> s1 = sumblk('r3 = r2 + r5')
60	>> s2 = sumblk('r4 = r3 + r6')
	>> impressora_block =
	connect(b1,b2,b3,b4,b5,s1,s2,'theta','Y')

Fonte: elaborado pelo autor.

Para saber se os modelos realmente são equivalentes, podemos utilizar a função `stepinfo`: se estiver tudo certo, devemos ver os mesmos resultados para cada modelo. O Quadro 2.15 aplica o comando `stepinfo` para cada modelo.

Quadro 2.15 | Obtenção das métricas das respostas

61	>> stepinfo(impressora_tf)
	ans =
	RiseTime: 0.659101948989551
	SettlingTime: 1.173622333601919
	SettlingMin: -2.499943010860177
	SettlingMax: -2.2930849339695324
	Overshoot: 0
	Undershoot: 0
	Peak: 2.499943010860177
62	PeakTime: 3.163751917773609
	>> stepinfo(impressora_block)
	ans =
	RiseTime: 0.659101948989461
	SettlingTime: 1.173622333601421
	SettlingMin: -2.499999999999926
	SettlingMax: -2.283333333333301
	Overshoot: 0
	Undershoot: 0
	Peak: 2.499999999999926
	PeakTime: 9.242576563277497

Fonte: elaborado pelo autor.

Todas as métricas se mostraram iguais, exceto pelo tempo de pico (*peak time*), mas observe o valor de pico (*peak*) e o tempo de acomodação (*settling time*): a diferença entre os picos é da ordem de 10^{-5} , e o tempo de acomodação é praticamente o mesmo, ou seja, a diferença de tempo entre os picos não influencia na análise, pois ambos os sistemas convergem para um mesmo valor final da mesma forma. Portanto, ambos os modelos estão corretos.

Avançando na prática

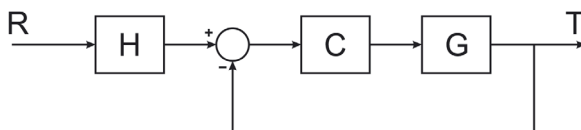
Controle de temperatura de tratamento térmico

Descrição da situação-problema

Em tratamento térmico de materiais metálicos, é comum a utilização de banhos em temperaturas elevadas. Para que o tratamento seja de boa qualidade, é importante que esses banhos tenham sua temperatura bem controlada.

O diagrama de blocos da Figura 2.30 mostra a topologia do funcionamento de um desses controles.

Figura 2.30 | diagrama de blocos do controle de temperatura de tratamento térmico



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 2.30, $H(s)$ é o sensor, que converte a referência em dimensão de temperatura, $C(s)$ é o controlador e $G(s)$ é a planta.

Em um banho específico, o controlador utilizado é do tipo proporcional-integral (PI), dado pela Equação 2.71, sendo que $E(s)$ é a entrada do controlador, ou seja, o erro entre a referência e a temperatura do banho.

$$C(s) = k_p E(s) + k_i \int E(s) dt \quad (2.71)$$

A planta do banho pode ser modelada como um sistema de primeira ordem (Equação 2.72).

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.72)$$

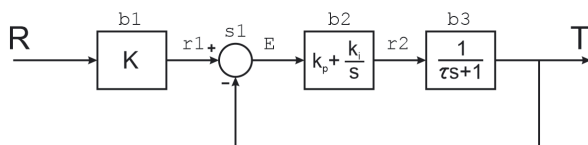
E o sensor $H(s)$ pode ser modelado como apenas um ganho $H(s) = K$.

Para simular todo o sistema e averiguar se a planta $G(s)$ do banho será controlada corretamente, é necessário inseri-lo no MATLAB. Como isso pode ser feito?

Resolução da situação-problema

Supondo que os valores para K , k_p , k_i e τ já existem no MATLAB, podemos inserir o sistema no software como mostra o Quadro 2.16, de acordo com a nomeação dos ramos e blocos da Figura 2.31.

Figura 2.31 | Nomeação dos ramos e blocos do diagrama do controle de temperatura de tratamento



Fonte: elaborada pelo autor.

Quadro 2.16 | Inserindo o diagrama do controle de temperatura no MATLAB

63	>> b1 = tf(K,1,'inputname','R','outputname','r1');
64	>> s1 = sumblk('E = r1 - T');
65	>> b2 = tf([kp ki],[1
66	0],'inputname','E','outputname','r2');
67	>> b3 = tf(1,[tau 1],'inputname','r2','outputname','T');
	>> sistema = connect(b1,b2,b3,s1,'R','T')

Fonte: elaborado pelo autor.

Faça valer a pena

1. O MATLAB permite que sejam utilizadas diferentes formas de representação de modelos de SLIT. Isso é vantajoso para o projetista, pois dá a ele liberdade para desenvolver o projeto da maneira que ele julgar mais conveniente.

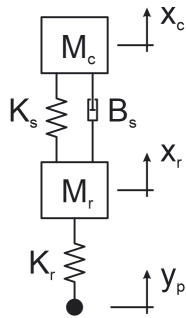
Quais são os tipos de modelo de sistemas dinâmicos em que o MATLAB permite representação?

- O MATLAB permite que sejam representados apenas modelos perfeitos em relação à realidade.
- O MATLAB permite apenas a representação em espaço de estados, que é dado por matrizes, pois o nome do software é *MATrix LABoratory*.
- O MATLAB permite a representação apenas de modelos em espaço de estados e função de transferência.

d) O MATLAB permite a representação de modelos em espaço de estados, diagrama de blocos e função de transferência, em que os dois primeiros compartilham do mesmo tipo de variável, e o último tem um outro tipo de variável.

e) O MATLAB permite a representação de qualquer tipo de modelo de SLIT, pois tem um único tipo especial de variável que se adequa ao modelo.

2. A seguir, temos a figura de um modelo de uma suspensão automotiva:



Fonte: elaborada pelo autor.

Em que:

M_r : massa da roda.	K_s : rigidez da suspensão.
K_r : rigidez do pneu.	B_s : amortecimento da suspensão.
$y_p(t)$: perfil da pista (entrada).	M_c : massa sustentada pela suspensão.
$x_r(t)$: posição vertical da roda (saída).	$x_c(t)$: posição vertical do carro (saída).

Seu modelo em espaço de estados é dado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_s & -B_s & K_s & B_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_s & B_s & -K_s - K_r & -B_s \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_r \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Em que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} \text{ e } u = y_p$$

Para a escolha dos elementos construtivos de um sistema de suspensão, é necessário que o modelo seja inserido no MATLAB para que seja submetido a testes simulados e para que sua resposta seja analisada de acordo com critérios pré-determinados. Suponha que você já tem no programa os valores corretos de todos os parâmetros do sistema, guardados nas seguintes variáveis:

	Variável no MATLAB
M_r : massa da roda.	Mr
K_r : rigidez do pneu.	Kr
$y_p(t)$: perfil da pista (entrada).	yp
$x_r(t)$: posição vertical da roda (saída).	Xr
B_s : amortecimento da suspensão.	Bs
$x_c(t)$: posição vertical do carro (saída).	xc
M_c : massa sustentada pela suspensão.	Mc
K_r : rigidez da suspensão.	Kr

Como você faria para inserir o modelo da suspensão no MATLAB?

a)

```
>> a = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0,
0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];
>> b = [0; 0; 0; Kr];
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
```

b)

```
>> a = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0,
0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];
>> b = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> c = [0, 0, 0, Kr];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
```

c)

```
>> a = [0; 0; 0; Kr];
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];
>> c = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0,
0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];
>> d = 0;
>> sistema = ss(a, b, c, d);
```

d)

```
>> a = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0,  
0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];  
>> b = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];  
>> c = [0, 0, 0, Kr];  
>> d = 0;  
>> sistema = tf(a, b, c, d);
```

e)

```
>> a = [0; 0; 0; Kr];  
>> c = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0];  
>> c = [0, 1, 0, 0; -Ks, -Bs, Ks, Bs; 0,  
0, 0, 1; Ks, Bs, -Ks-Kr, -Bs];  
>> d = 0;  
>> sistema = tf(a, b, c, d);
```

3. No MATLAB é possível montar um diagrama de blocos com a utilização de funções específicas (como `connect`, `sumblk`, `tf` etc) para esse fim. Veja, a seguir, o código de diagrama de blocos no MATLAB, supondo que as variáveis numéricas M, B e K já foram inseridas.

```
>> b1 = tf([B/K 0],1,'inputname','y','outputname','r1');  
>> s1 = sumblk('r2 = y + r1');  
>> b2 = tf(B/K,1,'inputname','r6','outputname','r4');  
>> b3 = tf([M/K 0],1,'inputname','r6','outputname','r3');  
>> b5 = tf([1 0],1,'inputname','x','outputname','r6');  
>> s2 = sumblk('x = r4 + r3 + r2');  
>> sistema = connect(b1, s1, b2, b3, b5, s2);
```

Qual das afirmações está correta?

- a) O bloco b1 é idêntico ao bloco b2.
- b) O bloco b2 tem sua saída conectada ao bloco b3.
- c) O bloco de soma s1 não é utilizado.
- d) O bloco b5 tem sua saída conectada aos blocos b2 e b3.
- e) A saída do sistema tem nome 'y'.

Referências

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: Rima, 2010.

DORF, R. C., BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Análise da estabilidade de sistemas de controle

Convite ao estudo

Até o momento, você aprendeu vários conceitos fundamentais que se situam tanto na teoria básica de controle quanto na de modelagem de sistemas dinâmicos.

Nesta terceira unidade, começaremos a aprender conteúdos que se situam menos em modelagem e muito mais na teoria de controle.

De posse de um sistema dinâmico e, talvez, seu controlador, em malha aberta ou fechada, como podemos dizer se o sistema é “bem comportado”, ou, em outras palavras, como podemos avaliar se o sistema é estável? Esta é uma questão muito importante, pois temos como objetivo conseguir projetar sistemas de controle que, ao receberem uma entrada (ou referência), sejam capazes de entregar uma saída adequada e, para isso, é necessário que o sistema se comporte de maneira estável.

Por estabilidade entendemos que, dada uma entrada limitada qualquer, se a resposta temporal do sistema também for limitada, o sistema é estável (NISE, 2016). Já um sistema instável, além de não se comportar como o desejado, pode representar perigo a operadores usuários do sistema, por exemplo.

Nesta unidade, vamos ver que a estabilidade do sistema pode ser definida de acordo com a localização dos polos e zeros no plano complexo e, além disso, conheceremos outros métodos de avaliar a sua estabilidade, como o método de Routh-Hurwitz, margens de ganho e de fase no diagrama de Bode. Alguns desses métodos, além de nos mostrarem se o sistema é estável ou não, nos trazem a informação de como podemos manipular o sistema a fim de torná-lo estável.

Assim, para abordarmos os conteúdos desta unidade, vamos propor um novo problema de engenharia: suponha que você trabalha no departamento de engenharia de uma agência espacial e esteja envolvido na preparação do lançamento vertical de um veículo espacial (Figura 3.1). Sua tarefa ao longo desta unidade será avaliar o modelo em relação à estabilidade de sua resposta.

Figura 3.1 | Lançamento vertical de um foguete espacial



Fonte: <<https://www.nasa.gov/centers/kennedy/about/history/50thgallery/1969-07-16-5.html>>. Acesso em: 24 jul. 2017.

Bons estudos!

Seção 3.1

Estabilidade de sistemas realimentados

Diálogo aberto

Você já tentou equilibrar uma vassoura (ou um guarda-chuvas) na posição vertical? Você já parou para pensar por que isso é tão difícil?

A tarefa é desafiadora pois, para o ponto de equilíbrio desejado (que consiste em fazer com que o objeto permaneça na posição vertical), o sistema mecânico da vassoura, também conhecido como pêndulo invertido, se trata de um sistema instável.

Sistemas instáveis, por definição, são aqueles cuja saída apresentam valores que divergem, de maneira ilimitada, de seu estado inicial.

Sendo você estudante de controle, é de suma importância que saiba avaliar se o seu sistema, em estudo, é estável ou não. Isto com objetivo de saber como controlá-lo e assim, após desenvolver o sistema de controle, avaliar se o sistema atende aos requisitos desejados.

Além da estabilidade de sistemas dinâmicos, veremos também como podem ser analisados sistemas de ordem superior a dois, já que na segunda unidade deste material você já estudou o comportamento de sistemas de primeira e segunda ordem.

Nesta unidade, você trabalha na equipe de engenharia de uma agência espacial e tem como tarefa estudar o sistema de lançamento vertical de um foguete espacial. Sendo a dinâmica do lançamento do veículo modelada como um pêndulo invertido, como você pode avaliar a estabilidade do sistema?

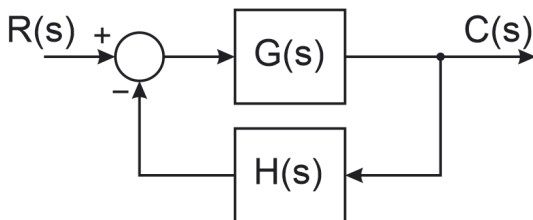
Vamos descobrir?

Bons estudos!

Não pode faltar

Considere o diagrama de blocos da Figura 3.2.

Figura 3.2 | Sistema de controle



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 163).

Já sabemos que sua função de transferência é dada pela Equação 3.1.

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.1)$$

Se a multiplicação $G(s)H(s)$ resultar em um polinômio de primeira ou segunda ordem, já sabemos analisar seu comportamento. Agora, vamos focar no caso em que a multiplicação $G(s)H(s)$ resulta em um polinômio de ordem maior que dois, ou seja, vamos focar em sistemas de ordem superior a dois.

Da Seção 2 da Unidade 2, sabemos que toda função de transferência é dada por uma divisão de polinômios em s . Então, digamos que os blocos $G(s)$ e $H(s)$ são dados de acordo com as Equações 3.2 e 3.3, sendo que $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ e $d(s)$ são polinômios em s .

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (3.2)$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (3.3)$$

Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.1, teremos a Equação 3.4.

$$\begin{aligned} \frac{C}{R}(s) &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (m \leq n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.5)$$

Podemos reescrever a Equação 3.4 por meio da forma fatorada do numerador e do denominador de $\frac{C}{R}(s)$, como mostra a Equação 3.5. Isso pode ser feito utilizando-se o MATLAB para encontrar as raízes dos polinômios, que são os polos ($s = p_i$) do sistema, por meio do comando `roots`.



Exemplificando

Para entendermos como utilizar o comando `roots`, vamos encontrar as raízes do polinômio da Equação 3.6.

$$p(s) = s^5 - 10s^4 + 40s^3 - 70s^2 + 39s \quad (3.6)$$

Assim como no comando `tf`, precisamos inserir os coeficientes do polinômio no comando `roots`, sempre do maior expoente de s , no caso, 4, até o expoente 0, como mostra o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 | Aplicação do comando `roots`

1	>> p = [1 -10 40 -70 39 0];
2	>> roots(p);
	 ans =
	 0.0000 + 0.0000i
	3.0000 + 2.0000i
	3.0000 - 2.0000i
	3.0000 + 0.0000i
	1.0000 + 0.0000i

Fonte: elaborado pelo autor.

Com as raízes obtidas, podemos reescrever a Equação 3.6 da maneira como mostram as Equações 3.7 e 3.8.

$$p(s) = (s - 0)(s - 3 + 2j)(s - 3 - 2j)(s - 3)(s - 1) \quad (3.7)$$

$$p(s) = (s - 0)(s^2 - 6s + 13)(s - 3)(s - 1) \quad (3.8)$$

Para estudarmos sistemas de ordem superior, vamos dividir os sistemas em dois tipos: aqueles que têm apenas polos reais e aqueles que têm polos complexos.

Começaremos com os sistemas que têm apenas polos reais. Ao submetermos o sistema da Figura 3.2 a uma entrada degrau ($R(s) = \frac{1}{s}$), obtemos a resposta $C(s)$ e, aplicando frações parciais, é

possível escrevermos $C(s)$ no formato da Equação 3.9, em que a_i é denominado como resíduo associado ao polo p_i .

$$C(s) = R(s) \cdot \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-p_i} \quad (3.9)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace da Equação 3.9, temos a Equação 3.10.

$$c(t) = \mathcal{L}[C(s)] = \mathcal{L}\left[\frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-p_i}\right] = a \cdot \mu(t) + a_i \cdot \sum_{i=1}^n e^{p_i t} \quad (3.10)$$

Perceba que os polos p_i se tornam os expoentes das exponenciais, ou seja, se houver ao menos um polo positivo, este fará com que a resposta temporal tenda ao infinito (pois $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = \infty$). Quando isso ocorre, dizemos que o sistema é instável. Então, podemos concluir que sistemas que tenham ao menos um polo real positivo são sistemas instáveis, e sistemas estáveis são aqueles que têm todos seus polos negativos (com isso, sua resposta não tende ao infinito).

Agora, vamos supor que além de polos reais, o sistema tenha pares de polos complexos conjugados. Com essa suposição, ao aplicarmos frações parciais na Equação 3.5, obtemos a Equação 3.11 e, após a aplicação da transformada de Laplace, temos a Equação 3.12, em que a , a_j , b_k e c_k são números reais.

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2}, \quad (q+2r=n) \quad (3.11)$$

$$c(t) = a \cdot \mu(t) + \sum_{j=1}^q a_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos\left(t\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}\right) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \operatorname{sen}\left(t\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}\right), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.12)$$

Vemos que, para um sistema de ordem superior, sua resposta nada mais é do que a soma das respostas dos sistemas de primeira e segunda ordem que o "compõem". Para sistemas de segunda ordem, sabemos que seus polos são dados por $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ e, nesse caso, é a parte real dos polos ($-\zeta\omega_n$) que aparece no expoente das exponenciais da Equação 3.12. Logo, a parte real dos polos dos sistemas de segunda ordem, assim como para sistemas de primeira ordem, também precisa ser negativa para que o sistema não tenha uma resposta tendendo ao infinito, ou seja, para que o sistema não seja instável.

Portanto, de maneira geral, para um sistema ser estável, todos os seus polos devem ter a parte real negativa.



Assimile

Para que um sistema dinâmico linear invariante no tempo seja estável, é necessário que todos os seus polos possuam a parte real negativa.

Para um sistema representado em equações de espaço de estados, seus polos podem ser obtidos por meio do cálculo dos autovalores da matriz de estado (matriz **A**). Logo, a estabilidade em representação de equações de espaço de estados pode ser aferida observando-se se a parte real dos autovalores da matriz de estado é negativa.



Pesquise mais

O autovalor é uma propriedade matemática intrínseca de uma matriz. Essa propriedade tem significado físico em vários ramos da ciência, como engenharia civil, estudo de vibrações mecânicas na dinâmica, engenharia de controle, entre outros.

Siga a referência a seguir para relembrar como se realiza o cálculo dos autovalores (e autovetores). Disponível em: <http://www.ufff.br/luis_crocco/files/2011/09/auto_valores.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2017.

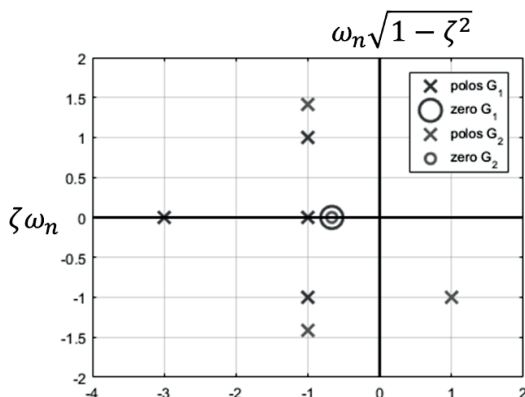
Sendo os polos de um sistema, assim como os zeros, números complexos, podemos utilizar o plano real-complexo para visualizar o posicionamento dos polos e dos zeros dos sistemas. Consideremos dois sistemas representados pelas funções de transferência das Equações 3.13 e 3.14.

$$G_1(s) = \frac{3s + 2}{(-s^2 - 4s - 3)(2s^2 + 4s + 4)} \quad (3.13)$$

$$G_2(s) = \frac{3s + 2}{(s^2 + 2s + 3)(2s^2 - 4s + 4)} \quad (3.14)$$

Podemos localizar seus polos e zeros no plano complexo, como mostra a Figura 3.3. Neste plano, o eixo das abcissas corresponde à parte real dos polos ($\zeta\omega_n$), e o eixo das ordenadas corresponde à parte imaginária dos polos.

Figura 3.3 | Polos no plano real-complexo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como você pode ver, os polos das funções de transferência são representados graficamente pelo "X", e os zeros, pelo "O". Dessa forma, é rápido entender se um sistema é estável ou não pela observação do plano complexo: se os polos estiverem no semiplano esquerdo, o sistema é estável; se os polos estiverem sobre o eixo vertical, o sistema é marginalmente estável; se os polos estiverem no semiplano direito, o sistema é instável.



Reflita

Para encontrar os polos de sistemas, precisamos resolver equações polinomiais dos mais variados graus. Sabemos muito bem resolver equações polinomiais de primeira e segunda ordem, mas e de quarta ordem, por exemplo? Você saberia resolver?

Sem o auxílio de um software de matemática ou de calculadoras avançadas, calcular os polos de um sistema de ordem elevada, tanto por meio das raízes do denominador da função de transferência quanto por meio dos autovalores da matriz de estado, pode ser uma tarefa difícil de ser realizada. Para esse caso, podemos aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Para explicar o procedimento, vamos aplicá-lo às funções de transferência das Equações 3.13 e 3.14.

1. Escrever o polinômio do denominador de forma expandida, conforme a Equação (3.15).

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s + a_n = 0 \quad (3.15)$$

➔ Das Equações 3.13 e 3.14, escrevemos as Equações 3.16 e 3.17.

$$-2s^4 - 12s^3 - 26s^2 - 28s - 12 = 0 \quad (3.16) \quad 2s^4 + 0 \cdot s^3 + 2s^2 - 4s + 12 = 0 \quad (3.17)$$

2. Se houver algum coeficiente a_0, a_1, \dots, a_n negativo ou nulo, então, o sistema é instável.

➔ Embora na Equação 3.16 todas as parcelas sejam negativas, ao multiplicarmos ambos os lados da equação por -1 , todas se tornam positivas. Então, não podemos dizer que o sistema é instável. Já na Equação 3.17, temos um coeficiente nulo (o que multiplica s^3) e um coeficiente negativo (o que multiplica s), logo, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema $G_2(s)$ é instável. Então, não precisamos continuar o procedimento com o sistema da Equação 3.14. Caso não houvesse o termo negativo nem o termo nulo, precisaríamos prosseguir para confirmar (ou negar) a estabilidade do sistema.

3. Organizar os coeficientes dos polinômios em linhas e colunas de uma matriz triangular da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} s^n \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \dots \\ s^{n-1} \quad a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad \dots \\ s^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \dots \\ s^{n-3} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \dots \\ s^{n-4} \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ s^2 \quad e_1 \quad e_2 \\ s \quad f_1 \\ s^0 \quad g_1 \end{array}$$

Sendo que os elementos b_1, b_2, b_3 etc. são calculados como mostra o conjunto de Equações 3.18.

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad \dots \quad (3.18)$$

De modo análogo, multiplicando em cruz os termos das linhas superiores, calculamos os elementos c, d, e etc.

$$\begin{array}{l} c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \quad \dots \\ d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \quad \dots \end{array}$$

De acordo com o critério de Routh-Hurwitz, a quantidade de vezes em que há mudança de sinal na primeira coluna da matriz é exatamente igual à quantidade de polos do sistema que tem parte real positiva, ou seja, se não houver troca de sinal entre quaisquer dois elementos adjacentes na primeira coluna da matriz, o sistema é estável. Porém, caso haja, o sistema é instável.

➔ Montando a matriz para a Equação 3.16, temos:

$$\begin{array}{rcl} s^4 & 2 & 26 \quad 12 \\ s^3 & 12 & 28 \quad 0 \\ s^2 & 21,333 & 12 \\ s^1 & 21,25 & 0 \\ s^0 & 12 & \end{array}$$

Não há mudança de sinal entre nenhum par de elementos adjacentes na primeira coluna. Logo, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema não tem nenhum polo com parte real positiva, portanto, trata-se de um sistema estável.



Exemplificando

Considere o polinômio característico da Equação 3.19. Vamos usar o método de Routh para avaliar sua estabilidade.

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s^2 + 24 \quad (3.19)$$

Montando a matriz, temos:

$$\begin{array}{rcl} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

Veja que ocorrem duas trocas de sinais: de 1 para -22 e de -22 para 24. Segundo o método de Routh-Hurwitz, esse fato indica que há dois polos cujas partes reais são positivas, ou seja, estão no semiplano direito. Portanto, o sistema é instável.

Na aplicação do critério de Routh-Hurwitz, é possível que surjam casos nos quais devam ser aplicadas algumas regras a mais para que o procedimento seja realizado.



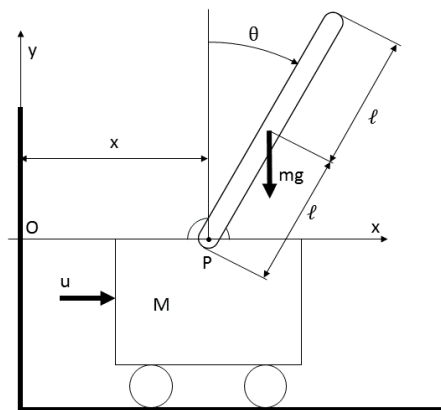
É possível que, durante os cálculos, algum elemento da primeira coluna seja nulo, por isso, não é possível que ele se torne o divisor do cálculo dos elementos subsequentes. Para casos como esses e outros ainda, leia a Seção 5.6 do livro Engenharia de Controle Moderno.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Sem medo de errar

Você, membro da equipe de engenharia, na tarefa de analisar a dinâmica do lançamento vertical de um foguete, deve primeiro obter o modelo do sistema. A Figura 3.4 mostra, de maneira simplificada, como pode ser interpretado o modelo.

Figura 3.4 | Interpretação da dinâmica do lançamento vertical de um foguete



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 61).

Em que: M é a massa da estrutura de lançamento, m é a massa do foguete, g é o valor da aceleração da gravidade local, l é a metade do comprimento total do foguete, θ é o ângulo que o foguete forma com a vertical, u é a força exercida na massa M , x é a posição, O é a origem do sistema de coordenadas (x, y) e P é o ponto no qual o foguete toca o solo.

De acordo com Ogata (2010, p. 61-62), temos as Equações 3.20 e 3.21

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u \quad (3.20)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta \quad (3.21)$$

Isolando \ddot{x} na Equação 3.21 e substituindo-o na 3.20, temos a Equação 3.22 e, aplicando transformada de Laplace nesta, temos a função de transferência na Equação 3.23.

$$\ddot{\theta} \left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right) + \theta(-mg\ell) = u \left(-\frac{m\ell}{M+m} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M+m}}{\left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right) s^2 - mg\ell} \quad (3.23)$$

Da Equação 3.23, vemos que o sistema é de segunda ordem com amortecimento nulo, pela ausência do termo com \mathbf{s}^1 (lembrando que o denominador de um sistema de segunda ordem pode ser escrito da seguinte forma: $\mathbf{s}^2 + 2\zeta\omega_n\mathbf{s} + \omega^2$). Portanto, os polos têm parte real nula e o coeficiente de \mathbf{s}^0 é negativo ($-mg\ell$). Então, de acordo com o critério de Routh-Hurwitz, o sistema é definitivamente instável.

Outra maneira de nos certificarmos da sua instabilidade é observando os polos do sistema, que são mostrados na Equação 3.24.

$$s = \pm \sqrt{\frac{mg\ell}{\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m}}} \quad (3.24)$$

Analisando os polos, para sabermos como eles estão localizados no plano complexo, precisamos analisar o denominador de dentro da raiz da Equação 3.24: se $\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} > 0$, então, teremos polos reais e, consequentemente, um deles será instável.

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $M+m$, temos que $\ell(M+m) + Mm\ell^2 + \cancel{m^2\ell^2} - \cancel{m^2\ell^2} > 0$, o que é verdade, pois todas as propriedades do sistema são parâmetros reais e positivos.

Portanto, novamente, provamos que o sistema é instável com um polo cuja parte real é positiva (está no semiplano direito) e um polo cuja parte real é negativa (está no semiplano esquerdo).

Estabilidade de um sistema de posicionamento

Descrição da situação-problema

Um sistema de posicionamento de lasers ópticos trata-se de uma massa suspensa, que pode ser representada como um modelo de segunda ordem (Equação 3.25).

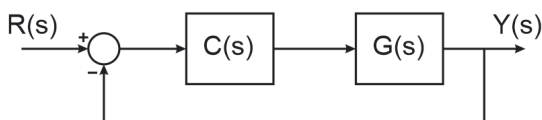
$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (3.25)$$

Esse sistema deve ser controlado de maneira que, caso haja algum impacto em sua base, o posicionamento e o direcionamento do laser não sejam afetados. Esse controle é realizado por meio de um controle proporcional-integrativo-derivativo (PID) (Equação 3.26).

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3.26)$$

O sistema e o controlador interagem de acordo com o diagrama de blocos da Figura 3.5.

Figura 3.5 | Diagrama de blocos do sistema de controle de lasers ópticos



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 61).

A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros de projeto que foram predefinidos para serem utilizadas na construção do sistema real, de acordo com o diagrama de blocos em malha fechada da Figura 3.5.

Tabela 3.1 | Parâmetros do sistema e do controlador

	Parâmetro [variável]	Valor [unidade]
Sistema $G(s)$	Massa suspensa [M]	0,25 [kg]
	Rigidez [K]	1 [N/m]
	Amortecimento [B]	0,5 [Ns/m]
Controlador $C(s)$	Ganho proporcional [k_p]	100 [N/m ²]
	Ganho integral [k_i]	1000 [N/m ² s]
	Ganho derivativo [k_d]	15 [Ns/m ²]

Fonte: elaborada pelo autor.

Seu papel, como responsável técnico, é analisar a estabilidade do sistema para validar, ou não, as decisões tomadas acerca do sistema projetado. Como você pode proceder?

Resolução da situação-problema

Para executar a tarefa de analisar a estabilidade, devemos aplicar os conhecimentos apresentados durante esta seção. Uma maneira relativamente simples e rápida de descobrir se o sistema de posicionamento de lasers ópticos é estável ou não é por meio da aplicação do método de Routh-Hurwitz.

Da Figura 3.3 e das Equações 3.25 e 3.26 podemos escrever a função de transferência do sistema (Equação 3.27).

$$\begin{aligned}\frac{Y}{R}(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}}{1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}} \Rightarrow \\ \frac{Y}{R}(s) &= \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{Ms^3 + Bs^2 + Ks + k_p s + k_i + k_d s^2} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{Ms^3 + (B + k_d)s^2 + (K + k_p)s + k_i} \quad (3.27)\end{aligned}$$

Substituindo valores, temos a Equação 3.28.

$$\frac{Y}{R}(s) = \frac{15s^2 + 100s + 1000}{0,25s^3 + 15,5s^2 + 101s + 1000} \quad (3.28)$$

No denominador da Equação 3.28 não há nenhum coeficiente negativo ou nulo. Então, não é possível afirmar se o sistema é estável ou instável. Devemos proceder com o método e montar a matriz.

s^3	$\frac{1}{4}$	101
s^2	$\frac{31}{2}$	1000
s^1	$\frac{2631}{31}$	0
s^0	1000	

Observando a primeira coluna, vemos que não houve nenhuma troca de sinal entre dois elementos adjacentes. Por isso, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema é estável.

Faça valer a pena

1. Com a análise dos polos de um sistema dinâmico, além de ser possível prever o seu comportamento de acordo com uma entrada, podemos indicar se o sistema é estável ou não.

Sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, indique qual(is) da(s) afirmativa(s) está(ão) correta(s).

I. Um sistema dinâmico só é estável se for possível separá-lo em sistemas de primeira e segunda ordem.

II. Um sistema estável é mais seguro para ser operado do que um sistema instável.

III. Apenas os coeficientes do denominador da função de transferência que multiplicam s^n , com $n > 0$, são relevantes para a determinação da estabilidade ou instabilidade de um sistema dinâmico.

IV. Sendo os polos de um sistema um conjunto de números complexos, se todos os polos tiverem parte real negativa, independentemente da entrada, o sistema é estável.

a) Apenas I e II.

d) Apenas II e IV.

b) Apenas II.

e) Apenas II e III

c) Apenas IV.

2. Durante o projeto de um controlador para um sistema dinâmico, você pode lançar mão das ferramentas de análise de estabilidade para certificar-se que o controlador se comportará de maneira estável, antes mesmo de iniciar seu desenvolvimento no sistema real.

Observe o exemplo de função de transferência de um controlador de terceira ordem, a seguir.

$$C(s) = \frac{1}{s^3 + 2s + 5}$$

Qual alternativa está correta em relação ao controlador?

a) O controlador é estável, pois todos os coeficientes do polinômio do denominador são positivos.

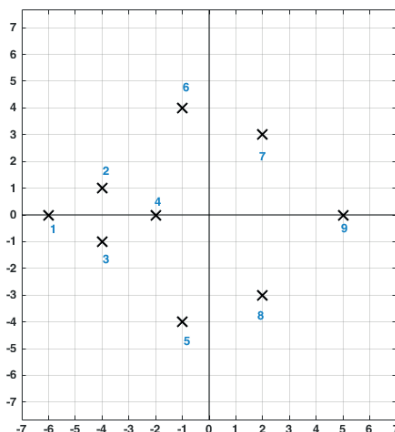
b) O controlador é estável, pois ele pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem juntamente com um de segunda ordem, que são sempre estáveis.

c) O controlador é instável, pois não está em malha fechada.

d) O controlador é instável, pois o coeficiente que multiplica a segunda potência de s é nulo.

e) Não é possível atestar se o controlador é estável ou não sem realizar um teste físico.

3. Uma maneira gráfica de observar os polos de um sistema dinâmico é por meio da utilização do plano complexo. Com ele, podemos ver quais polos do sistema são mais estáveis ou instáveis. Um certo sistema dinâmico com controlador, em malha aberta, tem os polos indicados no plano complexo a seguir.



Fonte: elaborada pelo autor.

O que podemos afirmar sobre o sistema como um todo?

- a) É um sistema estável, pois não tem nenhum polo nulo.
- b) É um sistema instável, pois tem polos com parte imaginária negativa (3, 5, 8).
- c) É um sistema marginalmente estável, pois tem polos com parte imaginária nula (1, 4 e 9).
- d) É um sistema instável, pois tem polos com parte imaginária positiva (2, 6 e 7).
- e) É um sistema instável, pois tem polos com parte real positiva (7, 8 e 9).

Seção 3.2

Diagrama de Bode e lugar das raízes

Diálogo aberto

Na seção anterior, você começou a conhecer maneiras de aferir a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (SLIT) por meio do método de Routh-Hurwitz e da localização dos polos no plano complexo. O primeiro método baseia-se em um método de cálculo que leva em consideração os coeficientes do polinômio do denominador da função de transferência, enquanto o segundo baseia-se na identificação direta dos polos do sistema e na sua localização no plano complexo, sendo que ambos culminam na determinação acerca da estabilidade do sistema estudado.

Nesta seção, continuaremos nesse caminho: você aprenderá sobre o diagrama de Bode (lê-se “bôdi”) e o método do lugar das raízes. Ambas as ferramentas podem ser utilizadas tanto na simples análise de reposta em frequência do sistema quanto na determinação de parâmetros do sistema ou de controle.

Com essas ferramentas, podemos analisar sistemas de qualquer ordem, ou seja, independentemente do sistema que estamos trabalhando, temos como avaliar se o sistema é bem-comportado, assim como saber para quais valores de seus parâmetros construtivos (ou de controle) podemos assegurar que ele terá um bom funcionamento. É com esse objetivo que serão discutidas as técnicas de margens de ganho e de fase no diagrama de Bode, além do lugar das raízes no plano complexo. As margens de ganho e de fase denotam o quanto podemos ajustar o sistema, respectivamente, em relação à sua amplitude e fase de resposta. Já o método do lugar das raízes permite-nos observar o efeito da variação de algum parâmetro do sistema em sua resposta.

Lembrando: você é o responsável técnico do departamento de engenharia de uma agência espacial e está envolvido na preparação do lançamento vertical de um veículo espacial. Na primeira etapa do projeto, você constatou que o sistema é instável. Com um controlador

adequado, por exemplo, em malha fechada, é possível tornar o sistema estável. Como podemos comprovar isso analisando-o com as ferramentas de resposta em frequência?

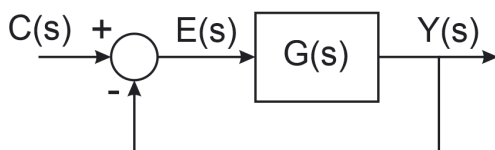
Vamos descobrir?

Bons estudos!

Não pode faltar

Nesta seção, aprenderemos como podemos analisar um sistema linear invariante no tempo (SLIT) de acordo com sua resposta em frequência. Um SLIT representado pelo diagrama de blocos da Figura 3.6 pode ser expressado, como mostra a Equação 3.29.

Figura 3.6 | Diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{Y(s)}{C(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (3.29)$$

Em que: $G(s)$ é o sistema e $C(s)$ é a entrada que resulta na saída $Y(s)$. $E(s)$, que é a entrada de $G(s)$, representa o erro de $Y(s)$ em relação a $C(s)$. Já sabemos que após submetermos o sistema a uma entrada, sua resposta passa por um período transitório e, após isso, entra em regime permanente. Mas, para a análise da resposta em frequência, estamos interessados na resposta do SLIT estável em regime permanente. Podemos obter a função de transferência do sistema em regime permanente substituindo s por $j\omega$, como mostra a Equação 3.30. Podemos ainda, lembrando que a função de transferência é um número complexo, representá-la como mostram as Equações 3.31 (separação da parte real e imaginária) e 3.32 (representação fasorial), sendo que podemos relacionar essas duas últimas equações como mostram as Equações 3.33 (cálculo da fase do fasor) e 3.34 (cálculo da magnitude do fasor), onde j é a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

$$\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = G(j\omega) \quad (3.30)$$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.31)$$

onde $R(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega))$ e $X(j\omega) = \text{Im}(G(j\omega))$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega) \quad (3.32)$$

$$\phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad (3.33)$$

$$|G(j\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2 \quad (3.34)$$

Em regime permanente, um SLIT submetido a uma entrada senoidal apresenta uma saída também senoidal de mesma frequência de oscilação que a entrada. Porém, geralmente, a amplitude ($|G(j\omega)|$), na equação 3.32 da oscilação da resposta e sua fase ($\phi(\omega)$), na Equação 3.32) diferem da amplitude e fase da senoide da entrada sendo que, tanto a defasagem de fase quanto a relação de amplitudes da saída com a entrada (denominada ganho) dependem da frequência de oscilação do sinal senoidal de entrada.

Para observarmos esse fenômeno, utilizamos o diagrama de Bode, que consiste em um par de gráficos que mostra o comportamento do sistema em relação à amplitude de resposta em um gráfico e a fase da resposta do sistema em outro gráfico, ambos em função da frequência do sinal de entrada, e sempre em regime permanente. O diagrama de Bode permite avaliar a estabilidade relativa do sistema de malha fechada (como o sistema da Figura 3.6) a partir da função de transferência em malha aberta (que é apenas a função de transferência $G(s)$ no sistema da Figura 3.6), sem necessidade de calcular a função de transferência em malha fechada.

O gráfico da amplitude mostra a relação da amplitude do sinal de saída ($|Y(j\omega)|$) em relação ao sinal de entrada ($|E(j\omega)|$) no eixo das ordenadas expressa em decibéis, ou seja, a relação é um valor adimensional em decibéis (dB), obtido de acordo com a Equação 3.35, que utiliza o logaritmo na base 10. No eixo das abcissas, temos a frequência ω em $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ em escala logarítmica, que veremos um pouco mais adiante (como na Figura 3.7, por exemplo).

$$20\log \frac{|Y(j\omega)|}{|E(j\omega)|} = 20\log |G(j\omega)| \text{ dB} \quad (3.35)$$

Ou seja, se $|G(j\omega)| < 1$, seu valor em dB é negativo. Se $|G(j\omega)| = 1$, seu valor em dB é zero; e se $|G(j\omega)| > 1$, seu valor em dB é positivo.

Para estudarmos o diagrama de Bode, vamos ver o efeito de fatores básicos, que são encontrados nas funções de transferência, sobre o diagrama, tanto na amplitude quanto na fase da resposta do sistema. Os fatores básicos são:

- O ganho, que é um número real K .
- Fator integral $j\omega$ no denominador e fator derivativo $j\omega$ no numerador.
- Fatores de primeira ordem, que são $1 + j\omega T$ no numerador ou $1 + j\omega T$ no denominador.
- Fatores quadráticos, que são $\left[1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$ no numerador ou no denominador.



Exemplificando

Considere a função de transferência da Equação 3.36.

$$G(s) = \frac{s+3}{(s^2+s+1)(s^2-0,2s+25,01)} \quad (3.36)$$

Inicialmente, vemos que há três fatores: dois de primeira ordem no denominador, e um de primeira ordem no numerador, mas nenhum deles está na forma padrão. É necessário que eles sejam manipulados para serem colocados no formato padrão. As Equações 3.37, 3.38 e 3.39 mostram o resultado das manipulações.

$$s+3 = j\omega + 3 = 3\left(\frac{1}{3}j\omega + 1\right) \quad (3.37)$$

$$s^2 + s + 1 = (j\omega)^2 + (j\omega) + 1 = \left(\frac{j\omega}{1}\right)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{j\omega}{1}\right) + 1 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} s^2 - 0,2s + 25,01 &= (j\omega)^2 - 0,2(j\omega) + 25,01 \\ &= 25,01 \left[\frac{(j\omega)^2}{(\sqrt{25,01})^2} - \frac{0,2j\omega}{25,01} \left(\frac{\sqrt{25,01}}{\sqrt{25,01}}\right) + 1 \right] \\ &= 25,01 \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{25,01}}\right)^2 - 2 \cdot 0,01 \left(\frac{j\omega}{\sqrt{25,01}}\right) + 1 \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

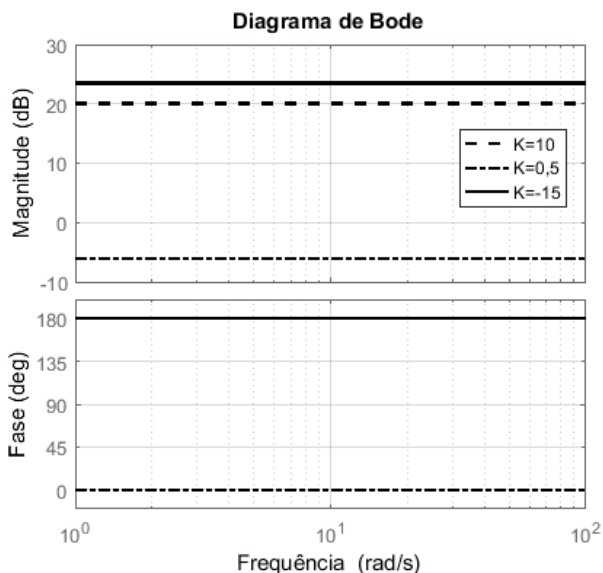
Podemos ver que nas Equações 3.37 e 3.39 sobram ganhos fora dos fatores. Por conseguinte, temos um fator de ganho na função de transferência. Remontando $G(s)$, temos a Equação 3.40.

$$G(s) = \frac{0,12 \left(\frac{1}{3}j\omega + 1\right)}{\left[\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{j\omega}{1}\right) + 1\right] \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{25,01}}\right)^2 - 2 \cdot 0,01 \left(\frac{j\omega}{\sqrt{25,01}}\right) + 1\right]} \quad (3.40)$$

O ganho K é um número real que multiplica a função de transferência e, como já dito, se for maior que a unidade, será positivo em decibéis e, se for menor que a unidade, será negativo em decibéis.

Vemos, na Figura 3.7, o diagrama de Bode para $K = 10$, $K = 0,5$, $K = -15$ que são, em decibéis, $K = 20\log(10) = 20 \text{ dB}$, $K = -6,02 \text{ dB}$, $K = 23,52 \text{ dB}$ (para este último caso, logaritmo de número negativo é um número complexo, mas em decibéis, leva-se em consideração apenas a parte real do resultado do logaritmo).

Figura 3.7 | Diagrama de Bode para o ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos ver que, na magnitude e na fase, independentemente do valor do ganho, o gráfico é uma linha reta horizontal, pois $20\log|K| \text{ dB}$ é constante independentemente de ω . Em relação à fase, se $K > 0$, a fase será de 0° , mas se $K < 0$, a fase será de 180° .

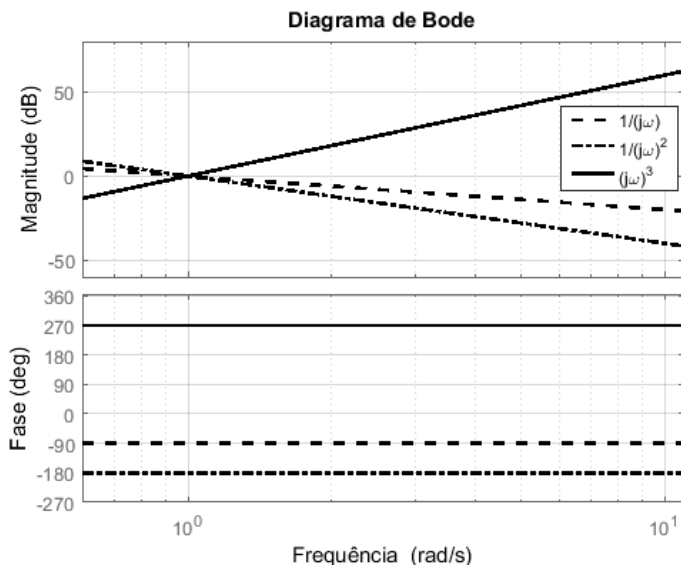
Para os fatores integrativos, supondo que podemos ter uma quantidade n desses fatores, então, podemos agrupar todos e dizer que temos um termo $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$. Então, para esse caso, temos uma amplitude em decibéis de acordo com o cálculo da Equação 3.41.

$$20\log\left|\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n\right| = 20\log\left|\frac{1}{|j\omega|^n}\right| = 20\log\left|\frac{1}{|\omega|^n}\right| = -20\log(\omega^n) = -20n\log(\omega) \text{ dB} \quad (3.41)$$

Analogamente, para n fatores derivativos, ou seja, $(j\omega)^n$, teremos uma amplitude de $20n\log(\omega) \text{ dB}$. Em ambos os casos, quando $\omega = 1$, os fatores integrativos e derivativos passam por 0 dB e, para qualquer

ω , apresentam uma inclinação de $-20n$ dB e $20n$ dB por década, respectivamente, sendo que uma década equivale à distância de ω a 10ω , para qualquer ω . Em relação à fase, o fator integral contribui com $-n \times 90^\circ$ e o fator derivativo, com $n \times 90^\circ$. O diagrama de Bode é mostrado na Figura 3.8 com três exemplos desses fatores.

Figura 3.8 | Diagrama de Bode de fator integral e derivativo



Fonte: elaborada pelo autor.

Fatores de primeira ordem no denominador, ou seja, $G_D(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$, representam um sistema de primeira ordem (como, por exemplo, um circuito resistor-capacitor (RC) em série cuja entrada é uma tensão também em série, e a saída é a tensão no capacitor) e têm sua magnitude calculada de acordo com a Equação 3.42.

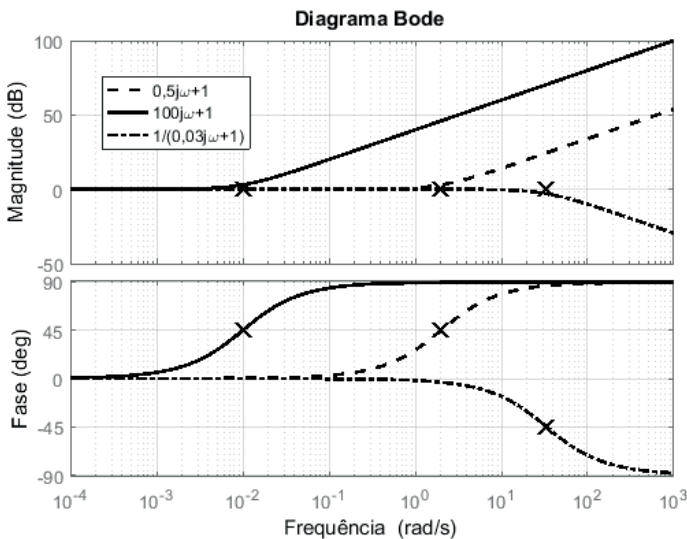
$$20 \log |G_D(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = -20 \log (\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) \text{ dB} \quad (3.42)$$

Para o fator de primeira ordem no numerador $G_N(j\omega) = j\omega T + 1$ sua amplitude é $20 \log (\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$ dB. Para baixas frequências, com $\omega \ll \frac{1}{T}$, tanto $G_D(j\omega)$ quanto $G_N(j\omega)$ conservam a magnitude do sinal de entrada, pois $1 + \omega^2 T^2 \rightarrow 1$, representando um ganho unitário, ou seja, 0 dB. Para altas frequências, teremos comportamentos distintos entre $G_D(j\omega)$ e $G_N(j\omega)$. Com $\omega \gg \frac{1}{T}$, $G_D(j\omega)$ apresenta um decaimento

de 20 dB por década na magnitude, e $G_N(j\omega)$ apresenta um ganho de 20 dB por década. Enquanto $G_D(j\omega)$ tende a atenuar a magnitude do sinal de entrada para zero, $G_N(j\omega)$ tende a amplificar a magnitude do sinal de entrada para infinito com o aumento da frequência. Essas assíntotas, para ambos os casos, se cruzam quando $\omega = \frac{1}{T}$, que é denominada como frequência de corte. Esta frequência divide a resposta do sistema em região de baixa frequência, com $\omega < \frac{1}{T}$ e, em região de alta frequência, com $\omega > \frac{1}{T}$.

Em relação à fase, para baixas frequências, $G_D(j\omega)$ e $G_N(j\omega)$ contribuem com fase de 0° . Para altas frequências, $G_D(j\omega)$ tende a uma fase de -90° , passando por -45° na frequência de corte. O fator $G_N(j\omega)$ tende a uma fase de $+90^\circ$ passando por $+45^\circ$ na frequência de corte. A Figura 3.9 apresenta três exemplos desse tipo de fator.

Figura 3.9 | Exemplos de diagrama de Bode de fatores de primeira ordem



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Na Figura 3.9, o fator de primeira ordem $\frac{1}{0,03j\omega + 1}$ apresenta 0dB, ou seja, ganho unitário para baixas frequências (menores que $33,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) e atenuação de 20dB/década para altas frequências (maiores que $33,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$).

Esse comportamento é observado em circuitos elétricos que funcionam como filtro passa-baixa.

Há também os filtros passa-alta, que têm funcionamento oposto: atenuam com 20dB/década para frequências menores que a de corte e apresentam 0dB para frequências maiores que a de corte. Com os fatores estudados até aqui, fazemos uma pergunta: a composição de quais deles (integrativo, derivativo e primeira ordem) resultaria numa função de transferência que geraria um diagrama de Bode cujo gráfico da magnitude apresenta atenuação de 20db/década para frequências menores que a de corte e ganho unitário para frequências maiores que a de corte?

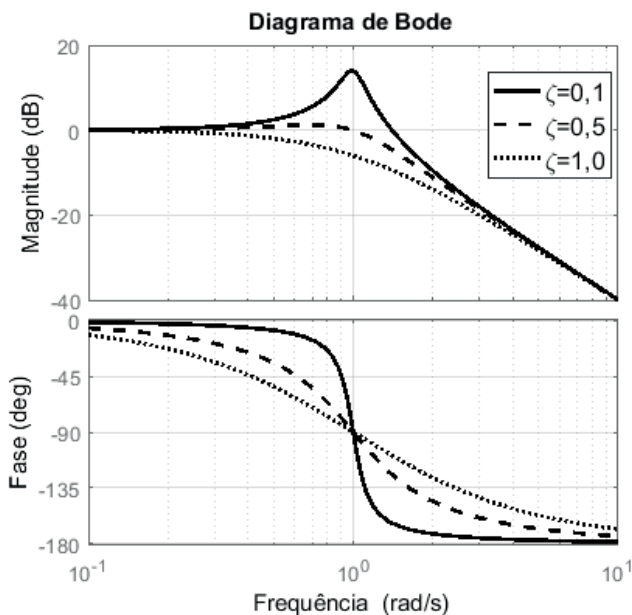
Por último, temos os fatores quadráticos $G_{ao}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$, em

que ω_n é a frequência natural e ζ é o coeficiente de amortecimento. A amplitude de $G_{ao}(j\omega)$ em decibéis é dada na Equação 3.43.

$$20\log|G_{ao}(j\omega)| = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.43)$$

Da Equação 3.40, vemos que, assim como os fatores de primeira ordem, fatores de segunda ordem apresentam 0 dB para frequências baixas ($\omega \ll \omega_n$). Para frequências altas ($\omega \gg \omega_n$) o fator de segunda ordem do tipo $G_{ao}(j\omega)$ contribui com um decaimento de 40 dB por década em altas frequências no gráfico da amplitude, e um fator de segunda ordem do tipo $G_{qn}(j\omega) = 1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ contribui com um aumento de 40 dB por década. As duas assíntotas se cruzam em $\omega = \omega_n$ e, perto dessa frequência, ocorre um pico de ressonância cuja magnitude é definida por ζ : quanto menor for ζ , maior será o pico de ressonância e, quanto maior for ζ , menor o pico. A fase do fator de segunda ordem tende a zero para frequências muito baixas, é igual a -90° para $\omega = \omega_n$ e tende a -180° para altas frequências. O diagrama de Bode é mostrado na Figura 3.10 para demonstrar o efeito do coeficiente de amortecimento de um fator de segunda ordem no denominador com $\omega_n = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Figura 3.10 | Influência de ζ no diagrama de Bode do fator quadrático



Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Perceba que o estudo que estamos fazendo não leva em consideração o valor da amplitude e da fase do diagrama de Bode quando próximo da frequência de corte para os fatores de primeira ordem ou próximo da frequência de ressonância para o fator de segunda ordem. Por isso, dizemos que estudamos as assintotas dos fatores. Pesquise, na referência indicada a seguir, pela diferença entre os valores verdadeiros dos gráficos em relação às assintotas estudadas.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010, p.375-379, cap. 7

Conhecendo a contribuição de cada um desses fatores no diagrama de Bode de um sistema, podemos analisar uma função de transferência e vislumbrar o seu diagrama sem a necessidade de fazermos muitos cálculos, pois basta somarmos o efeito de cada fator para termos uma boa e rápida aproximação de seu diagrama tanto na amplitude em decibéis quanto na fase.



Após o estudo da influência de cada fator, podemos resumir as assíntotas das magnitudes e fases de cada um:

- Ganho K tem magnitude constante $20\log|K|$ dB e fase constante 0° para $K \geq 0$ ou 180° para $K < 0$.
- Integrativo $\frac{1}{(j\omega)^n}$, $n > 0$ tem na magnitude um decaimento constante de $20 \cdot n$ dB/década e fase constante de $-90^\circ \cdot n$.
- Derivativo $(j\omega)^n$, $n > 0$ tem ganho constante de $20 \cdot n$ dB/década na magnitude e fase constante de $90^\circ \cdot n$.
- Primeira ordem no denominador $\frac{1}{j\omega T + 1}$, tem 0 dB/década na magnitude e 0° na fase para $\omega \ll \frac{1}{T}$ e $+20$ dB/década na magnitude e 90° na fase para $\omega \gg \frac{1}{T}$.
- Primeira ordem no numerador $j\omega T + 1$, tem 0 dB/década na magnitude e 0° na fase para $\omega \ll \frac{1}{T}$ e -20 dB/década na magnitude e -90° na fase para $\omega \gg \frac{1}{T}$.
- Quadrático no denominador $\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ tem 0 dB/década na magnitude e 0° na fase para $\omega \ll \omega_n$ e -40 dB/década e -180° na fase para $\omega \gg \omega_n$.
- Quadrático no numerador $1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ tem 0 dB/década na magnitude e 0° na fase para $\omega \ll \omega_n$ e 40 dB/década e $+180^\circ$ na fase para $\omega \gg \omega_n$.

A Equação 3.44 mostra uma função de transferência com um fator integrativo com expoente 1 e dois fatores de primeira ordem no denominador.

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)} \quad (3.44)$$

- O fator integrativo $\frac{1}{j\omega}$ contribui com -20 dB/década e com -90° de fase, ambos constantes.
- O fator de primeira ordem $\frac{1}{j\omega + 1}$ contribui com 0 dB e 0° para $\omega \ll 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e com -20 dB/década e -90° para $\omega \gg 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

- O fator $\frac{1}{0,2j\omega + 1}$ contribui com 0 dB/década e 0° para $\omega < 5 \frac{rad}{s}$ e com -20 dB/década e -90° para $\omega > 5 \frac{rad}{s}$.

Logo, como pode ser visto na Figura 3.11, para baixas frequências, o diagrama de Bode inicia em $\omega = 0,01 \frac{rad}{s}$ com 40 dB e decaimento de 20 dB por década. Em $\omega = 1 \frac{rad}{s}$ tem um canto e, a partir disso, decai com 40 dB por década e, a partir de $\omega = 5 \frac{rad}{s}$, tem um decaimento de 60 dB por década. Na fase, o diagrama começa com -90° e termina em -270° (Figura 3.11).

Com o diagrama de Bode, podemos avaliar a estabilidade de um sistema em relação à sua margem de fase e de ganho. Segundo Dorf e Bishop (2011), a margem de fase é a quantidade de deslocamento de fase do sistema que resultará em um comportamento marginalmente estável (estabilidade crítica), com fase igual a -180° quando a amplitude for 0 dB.

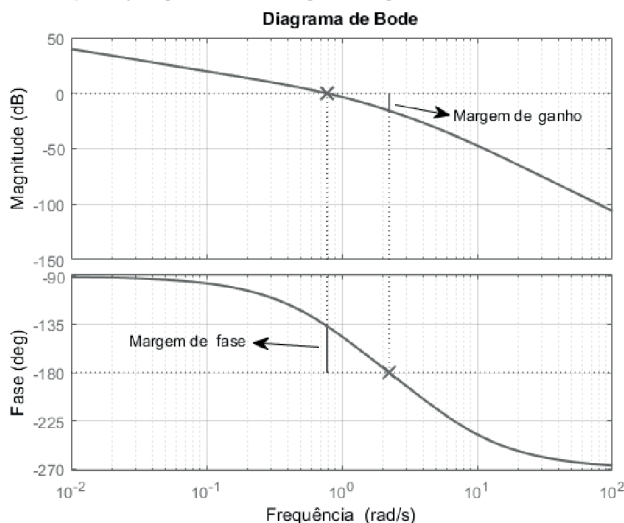
A margem de ganho é o acréscimo que pode ser feito no ganho do sistema, quando a fase for -180°, o que resultará em um comportamento marginalmente estável em 0 dB. Graficamente, a margem de fase e a de ganho são interpretadas, como mostra a Figura 3.11, para o exemplo de sistema da Equação 3.44. Para calcularmos a margem de ganho (**MG**), basta encontrarmos o inverso do módulo da função de transferência.

Para o exemplo da Equação 3.44, temos MG conforme a Equação 3.45.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|} = |j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)| = |-0,2j\omega^3 - 1,2\omega^2 + j\omega| \Rightarrow$$

$$MG = \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} \quad (3.45)$$

Figura 3.11 | Interpretação gráfica das margens de ganho e de fase



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011, p. 424).

Vamos descobrir o ω que precisamos substituir em 3.43 calculando-o ao igualar a fase da função de transferência da Equação 3.45 a -180° (Equação 3.46).

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= -180^\circ \\ \angle \left(\frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)} \right) &= -180^\circ \\ \angle (-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)) &= -180^\circ \\ \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-0,2\omega^3 + \omega}{-1,2\omega^2} \right) &= -180^\circ \\ \frac{1}{-1,2\omega} (-0,2\omega^2 + 1) &= \operatorname{tg}(-180^\circ) \\ -0,2\omega^2 + 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{5} = 2,236 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (3.46)$$

Substituindo a Equação 3.46 na Equação 3.45, temos a Equação 3.47.

$$\begin{aligned}MG &= \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} \\ MG &= \sqrt{(-0,2(\sqrt{5})^3 + \sqrt{5})^2 + (-1,2(\sqrt{5})^2)^2} \\ MG &= 6 \quad (3.47)\end{aligned}$$

$$20 \log MG = 15,563 \text{ dB} \quad (3.48)$$

A Equação 3.48 mostra o valor da margem de ganho em dB. No caso, a margem de ganho (em dB) é positiva: isso significa que o sistema é estável, pois podemos colocar um ganho nele de até 15,563 dB antes de ele tornar-se um sistema marginalmente estável.

Se acaso a margem de ganho (em dB) fosse negativa, o sistema seria instável. Nesse caso, a margem de ganho indicaria o valor do ganho a ser diminuído para tornar o sistema estável.

Para calcularmos a margem de fase, precisamos encontrar a frequência ω na qual o sistema se encontra com 0 dB, ou seja, quando $|G(j\omega)|$ é unitário (Equação 3.49).

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 1 \\ \frac{1}{|j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)|} &= 1 \\ \sqrt{(-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2} &= 1 \\ (-0,2\omega^3 + \omega)^2 + (-1,2\omega^2)^2 &= 1 \\ 0,04\omega^6 + 1,4\omega^4 + \omega^2 - 1 &= 0 \quad (3.49) \end{aligned}$$

Dentre esses valores, que são solução da Equação 3.49, temos quantidades reais positivas, negativas e números complexos. Como sabemos que, fisicamente, a frequência tem que ser uma quantidade real e positiva, por exclusão, o único valor possível para a frequência ω , dentre os calculados, é $0,779 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Agora, precisamos calcular a fase de $G(j\omega)|_{\omega=0,779}$ (Equação 3.50). Observe que o argumento de tg^{-1} representa um número complexo que se encontra no terceiro quadrante, ou seja, devemos tomar cuidado para não confundir o ângulo calculado como se estivesse no quarto quadrante.

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= \angle \left(\frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)} \right) = \angle \left(\frac{1}{-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)} \right) \\ \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= \angle(1) - \angle(-1,2\omega^2 + j(-0,2\omega^3 + \omega)) \\ \angle G(j\omega)|_{\omega=0,779} &= -tg^{-1} \left(\frac{-0,2 \times 0,779^3 + 0,779}{-1,2 \times 0,779^2} \right) = -136,79^\circ \quad (3.50) \end{aligned}$$

A margem de fase (**MF**) é dada pela Equação 3.51, que significa o quanto de fase o sistema pode ter de atraso (por isso o sinal negativo em **MF**) antes de que se atinja a fase de -180° e o sistema se torne marginalmente estável.

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) - MF &= -180^\circ \Rightarrow MF = \angle G(j\omega) + 180^\circ \quad (3.51) \\ \Rightarrow MF &= 43,21^\circ \end{aligned}$$

Os valores de margem de ganho (15,563 dB) e margem de fase (43,21°) são quantidades compatíveis com o que pode ser observado no diagrama de Bode da Figura 3.11.

Para a análise da resposta em frequência, podemos, ainda, utilizar o método do lugar das raízes, que consiste na utilização do plano complexo para entendermos a variedade de resposta em frequência que um sistema pode ter e, inclusive, sabermos em que circunstância ele pode se tornar instável, para tomarmos decisões sobre a escolha de parâmetros do sistema. Existem alguns métodos para esboçarmos o lugar das raízes de forma manual.



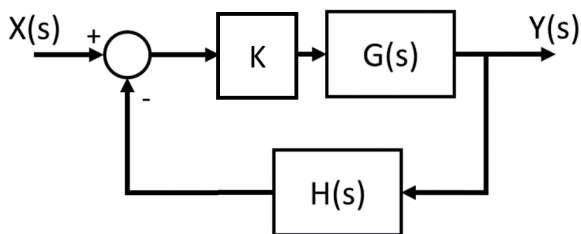
Pesquise mais

Você pode estudar um dos métodos para podermos esboçar o lugar das raízes de forma manual na referência indicada a seguir. Ele consiste em uma sequência de passos que envolvem conceitos já vistos aqui e em disciplinas como Cálculo e Geometria Analítica, mas aplicados na análise da função de transferência.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Cap. 6, p. 249-255.

No método do lugar das raízes, é dado um sistema em malha fechada, como o da Figura 3.12.

Figura 3.12 | Diagrama de blocos em malha fechada



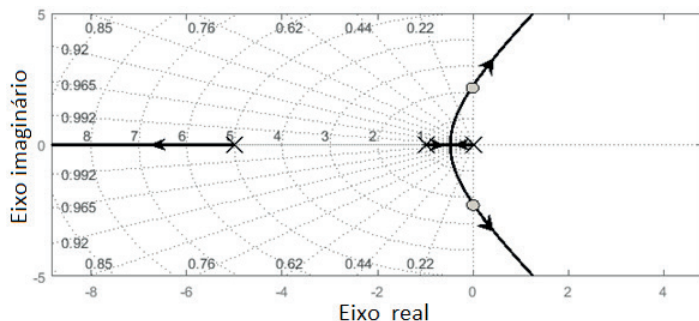
Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando o mesmo $G(s)$ da Equação 3.44, fazendo $H(s)=1$ e deixando K como sendo um valor real variável, temos a Equação 3.52 para a função de transferência de malha fechada.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{K}{s(s+1)(0,2s+1) + K} \quad (3.52)$$

Da Equação 3.52, podemos calcular os polos de malha fechada do sistema e vemos que não há zeros. Utilizando métodos de traçar o lugar das raízes, obtemos, com auxílio de software, o gráfico da Figura 3.13.

Figura 3.13 | Lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

No método do lugar das raízes, os polos são representados no plano complexo por cruzes, e os zeros, por círculos. Em uma função de transferência, a quantidade de polos é sempre maior ou igual à quantidade de zeros, e a quantidade a mais que há de polos em relação a zeros é exatamente a quantidade de trechos do lugar das raízes que tendem ao infinito positivo ou negativo, complexo ou real. No caso da função transferência da Equação 3.52, há três polos a mais que zeros. Então, o lugar das raízes apresentará três trechos tendendo para infinito. O lugar das raízes inicia em $K = 0$ nos polos do sistema e caminha para os zeros, com $K \rightarrow \infty$. Nessa variação do parâmetro K , o sistema pode passar de estável para instável. No sistema em questão, para $K > 6$, o sistema se torna instável (os círculos com preenchimento cinza indicam o lugar no gráfico onde $K = 6$ e as setas apresentam o sentido em que os polos caminham com o aumento do valor de K), pois os polos se movem para o semiplano direito na Figura 3.13.

O eixo horizontal e o vertical da Figura 3.13 são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária dos polos, ou seja, relembrando os polos de um sistema de segunda ordem $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, para $\zeta \leq 1$, o eixo horizontal é $\zeta\omega_n$ e o eixo vertical é $j\omega_d$ (sendo que $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$). Tendo isso em mente, podemos ajustar o valor de K para que o sistema se comporte com um determinado coeficiente de amortecimento e/ou frequência natural, o que é um ajuste

importante, pois esta é uma maneira fazer com que a reposta de um sistema se aproxime àquela que, por motivos de projeto, desejamos que ele tenha.

É possível gerarmos um gráfico de lugar das raízes para qualquer parâmetro do sistema que possa vir a sofrer alteração. Assim, é possível encontrar um intervalo de valores desse parâmetro para o qual o sistema é estável. No caso, temos que o sistema é estável para o intervalo $0 < K < 6$. É sempre importante evitarmos que os polos se aproximem muito do semiplano direito pois, como o processo de modelagem de sistemas dinâmicos envolve certas aproximações, é possível que, mesmo que o modelo aproximado se comporte de maneira estável, o sistema real pode tornar-se instável justamente devido às aproximações que não levam em considerações aspectos dinâmicos que, embora possam ser desprezados durante a modelagem, no limiar da estabilidade, esses aspectos podem vir a causar efeitos indesejados, portanto é sempre uma boa conduta trabalhar com uma distância segura dos polos do sistema até o semiplano direito ao utilizar o método do lugar das raízes.

Sem medo de errar

Agora, você, como membro da equipe de engenharia e desenvolvimento de uma agência espacial, continuará sua tarefa no desenvolvimento do sistema de lançamento vertical de veículos espaciais. Além de já ter em mãos a função de transferência do sistema (Equação 3.53), você deve avaliar o diagrama de Bode do sistema, quando submetido a um controle representado pela função de transferência da Equação 3.54. O Quadro 3.2 mostra os valores dos parâmetros do sistema da Equação 3.53.

$$\frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M+m}}{\left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m}\right)s^2 - mg\ell} \quad (3.53)$$

$$C(s) = (s + 0,2) \cdot (s^2 + 0,4s + 0,05) \quad (3.54)$$

Quadro 3.2 | valores dos parâmetros do sistema de lançamento

Parâmetro	Variável	Valor
Massa do veículo	m	2.938.314,674 kg ^[1]
Massa do sistema de lançamento	M	$\cong 10 \cdot m$ [kg]
Comprimento do veículo	ℓ	110,67288 m ^[2]
Aceleração da gravidade local	G	$9,81 \frac{m}{s^2}$

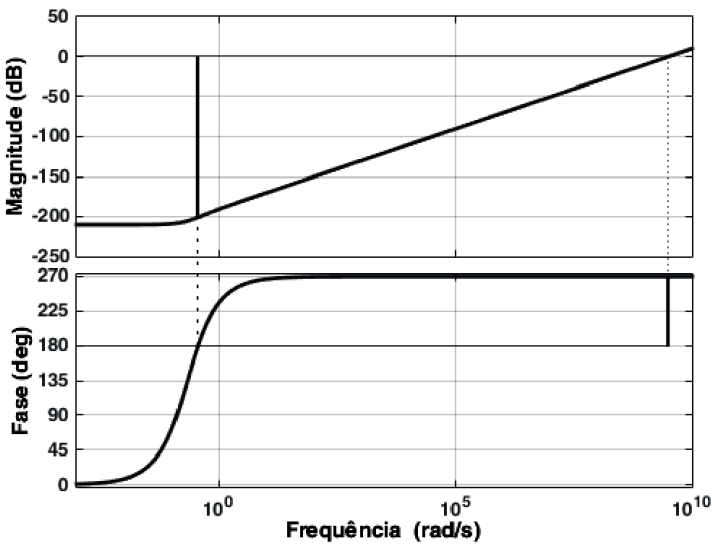
Fonte: adaptado de <https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-19_Ground_Ignition_Weights.htm>; <https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-13_Launch_Vehicle-Spacecraft_Key_Facts.htm>. Acesso em: 22 ago. 2017.

Aplicando os valores do Quadro 3.2, obtemos a função de transferência da Equação 3.55.

$$G(s) = \frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-10,06}{3,272 \times 10^{10} s^2 - 3,19 \times 10^9} \tag{3.55}$$

O diagrama de Bode de $C(s) \cdot G(s)$ é mostrado na Figura 3.14.

Figura 3.14 | Diagrama de bode do sistema com controlador



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo diagrama de Bode, podemos observar que a magnitude é de -210dB para baixas frequências e tende a um ganho de 20dB/década para altas frequências. Podemos ver, ainda, que a margem de ganho é de, aproximadamente, 200dB, e a margem de fase é de 90°.

O sistema dinâmico do lançador vertical era um sistema originalmente instável. A influência do controlador fez com que o sistema, em malha fechada, se tornasse estável. Isso ocorreu pois os zeros de malha aberta que o controlador adicionou ao lugar das raízes possibilitou que os polos do sistema em malha fechada caminhassem para o semiplano esquerdo do plano complexo.

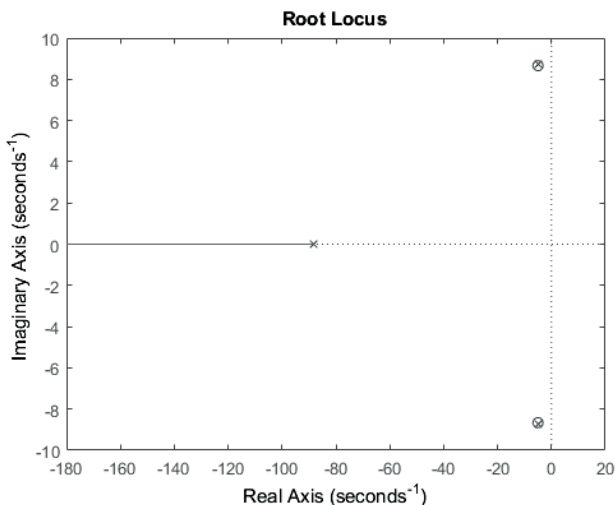
Avançando na prática

Análise da estabilidade do controle de vibração da máquina de lavar

Descrição da situação-problema

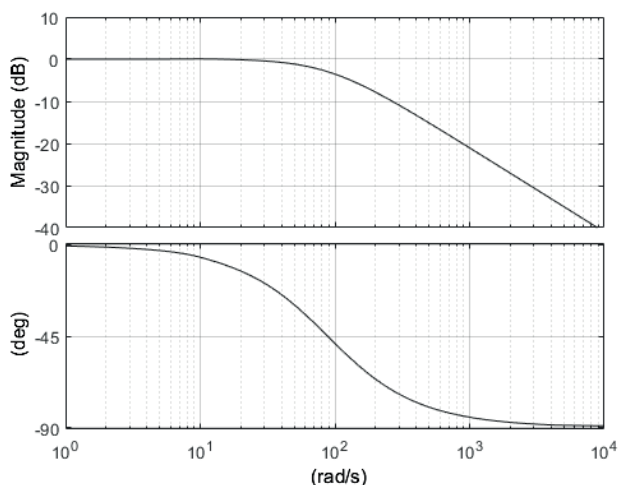
O diagrama de Bode e o lugar das raízes do sistema dinâmico de uma máquina de lavar com seu controle de vibração são mostrados, respectivamente, nas Figuras 3.15 e 3.16.

Figura 3.15 | Lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.16 | Diagrama de Bode



Fonte: elaborada pelo autor.

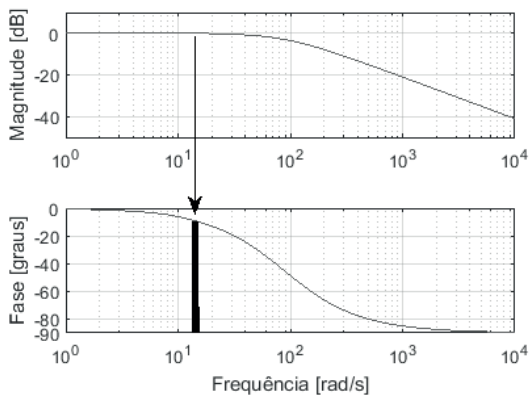
Você é o consultor de projetos de uma empresa de máquinas de lavar e recebe da equipe técnica os seguintes diagramas ilustrados na Figura 3.15 e 3.16. Observando ambas as figuras, o que você poderia afirmar sobre o sistema com relação à sua estabilidade?

Resolução da situação-problema

A partir do lugar das raízes da Figura 3.15, como nenhum trecho do gráfico passa para o semiplano direito, pode-se dizer que não há ganho real positivo que se possa impor ao sistema que fará com que ele se torne instável.

Isso é mostrado mais uma vez pelo diagrama de Bode da Figura 3.16. Trançando as margens de ganho e fase (Figura 3.17), vemos que, independentemente do ganho real positivo que seja inserido no sistema, ele não chega a ficar instável, ou seja, sua margem de ganho é infinita. Por outro lado, há uma margem de fase: pelo gráfico da Figura 3.17 percebe-se que o sistema tem uma margem de fase de aproximadamente 170° a uma frequência de $15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Figura 3.17 | Margens de fase e de ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, foi constatado que o sistema é estável, pois, tanto pela análise de seu lugar das raízes quanto pela análise de seu diagrama de Bode, qualquer valor positivo de ganho pode ser aplicado ao sistema que ele continuará estável.

Faça valer a pena

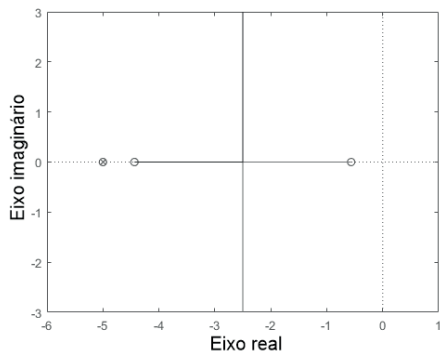
1. A equação característica do sistema é aquela que nos informa quais são seus polos. Embora essa não seja toda a informação necessária sobre o sistema para que ele possa ser analisado de maneira completa, de posse dessa informação, é possível tirarmos algumas conclusões.

Um sistema tem sua equação característica apresentada a seguir.

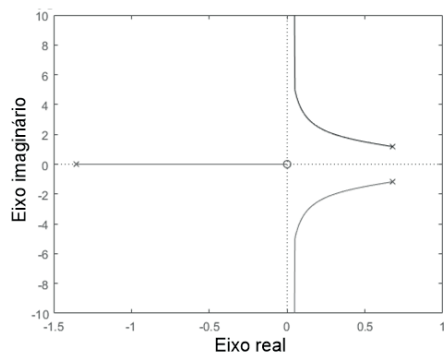
$$s(s + 5) + 2,5 = 0$$

Qual das alternativas apresenta um possível lugar das raízes para esse sistema?

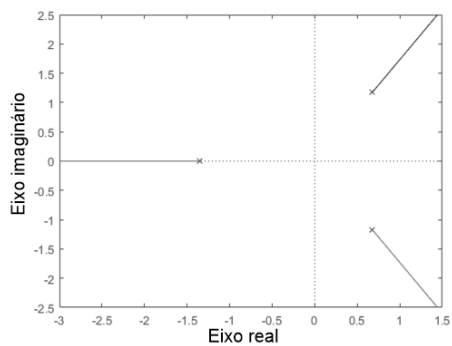
a)



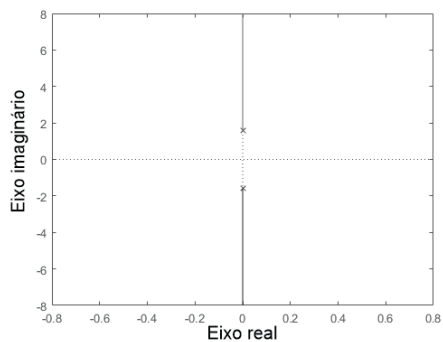
b)



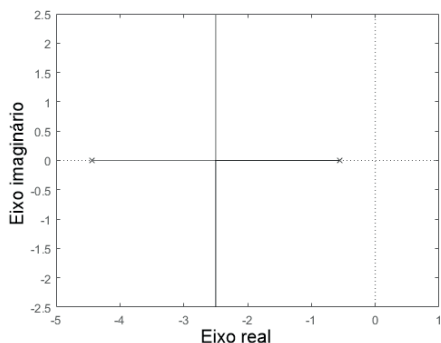
c)



d)

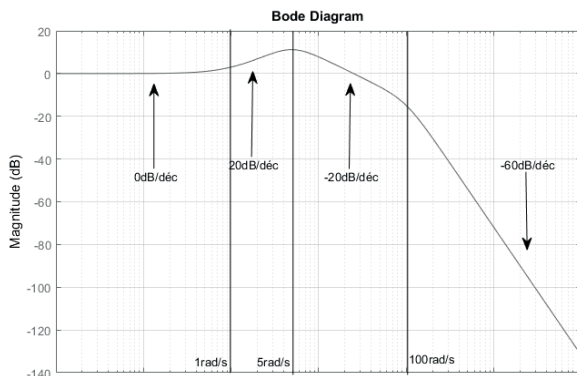


e)



2. Um profissional experiente na área de controle tem a capacidade de rapidamente vislumbrar os fatores que podem estar presentes na função de transferência de um sistema dinâmico por meio da observação do diagrama de Bode do sistema. Por exemplo: a inclinação do gráfico da amplitude em decibéis discrimina a presença dos fatores de ganho, derivativos, integrativos, de primeira e de segunda ordens.

De acordo com a amplitude em decibéis do diagrama de Bode a seguir, qual das alternativas apresenta o sistema que corresponde ao diagrama? Se necessário, suponha que todos os coeficientes de amortecimento são iguais a 0,7.



$$a) G(j\omega) = \frac{\left(\left(\frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}{(j\omega + 1) \left(\left(\frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}$$

$$b) G(j\omega) = \frac{\left(\left(\frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right) \left(\left(\frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}{(j\omega + 1)}$$

$$c) G(j\omega) = (j\omega + 1) \left(\left(\frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right) \left(\left(\frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right).$$

$$d) G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1) \left(\left(\frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}{\left(\left(\frac{j\omega}{0,5} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{0,5} \right) + 1 \right)}.$$

$$e) G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{\left(\left(\frac{j\omega}{5} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{5} \right) + 1 \right) \left(\left(\frac{j\omega}{100} \right)^2 + 1,4 \left(\frac{j\omega}{100} \right) + 1 \right)}.$$

3. É de suma importância que um profissional responsável por elaborar sistemas de controle e por lidar com sistemas dinâmicos tenha conhecimento das técnicas utilizadas para a investigação da estabilidade de sistemas dinâmicos, como as técnicas baseadas no diagrama de Bode e no lugar das raízes, pois, com a utilização delas, além de aferir a estabilidade (ou não) do sistema, o profissional consegue descobrir como (ou se) é possível ajustável a fim de torná-lo estável.

Sobre diagrama de Bode e o método do lugar das raízes, quais das alternativas estão corretas?

I. Só podemos utilizar o digrama de Bode e o lugar das raízes em sistemas estáveis.

II. O diagrama de Bode mostra um pico de ressonância na frequência em que o sistema apresenta maior sobressinal em sua resposta transitória.

III. No método do lugar das raízes, a quantidade de trechos que vão para o infinito é igual à quantidade de polos que existem a mais que zeros no sistema.

IV. A margem de fase no diagrama de Bode é uma das maneiras de aferir a estabilidade do sistema, além de permitir que sejam feitas alterações no mesmo até um limite de estabilidade marginal.

V. A saída de um SLIT em regime permanente apresenta a mesma frequência de oscilação que sua fonte de excitação.

a) Apenas V está correta.

b) Todas estão corretas.

c) Apenas II, IV e V.

d) Apenas I, III e IV.

e) Apenas III, IV e V estão corretas.

Seção 3.3

Aplicação de critérios de estabilidade para sistemas realimentados

Diálogo aberto

Nas seções anteriores, você aprendeu como avaliar a resposta em frequência de sistemas dinâmicos invariantes no tempo (SLIT) e entendeu de maneira teórica como prosseguir com a análise da estabilidade desses sistemas utilizando as técnicas da margem de ganho e de fase, lugar das raízes, critério de Routh-Hurwitz e cálculo dos autovalores na representação em espaço de estados.

Nesta seção, veremos como aplicar esses conhecimentos com uso do software de matemática MATLAB e analisar os resultados exibidos pelos programas, assim como entender como utilizar as funções que o MATLAB disponibiliza para esse fim, a saber: `bode`, `margin`, `rlocus`, `eig` e `damp`.

Como já sabemos das tarefas anteriores, o sistema do lançador vertical pode ser modelado como um pêndulo invertido, que é um sistema intrinsecamente instável. Na seção anterior, o controlador proposto atingiu o objetivo de estabilizar o sistema, mas ainda falta investigar como esse controlador pode ser ajustado: há limites para o ajuste de ganho desse controlador? Quais são eles? Como podemos encontrá-los utilizando o MATLAB como ferramenta?

Então, nesta última seção, você deverá avaliar a estabilidade do controlador que foi proposto por parte da equipe para um ganho de malha fechada variável pois, como se trata de um sistema extremamente caro de ser fabricado, é importante que sejam obtidas informações corretas acerca do seu funcionamento e, mais especificamente, se o sistema se comportará de maneira estável e quais ajustes podem ser feitos sem que sua estabilidade seja comprometida.

Bons estudos!

Não pode faltar

Na última seção da unidade anterior, aprendemos a inserir modelos de sistemas dinâmicos no MATLAB utilizando as representações em

função de transferência, diagrama de blocos e matrizes de espaço de estados. Nesta seção, vamos avaliar a estabilidade dos sistemas, independentemente da forma de representação escolhida, por meio de comandos mostrados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 | Comandos utilizados para analisar a estabilidade

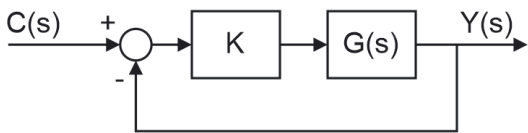
bode	Traça o diagrama de Bode
margin	Traça o diagrama de Bode exibindo as margens de ganho e de fase
rlocus	Traça o lugar das raízes
eig	Obtém os autovalores de uma matriz quadrada
damp	Imprime na tela uma lista dos polos do sistema e suas respectivas informações.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como já sabemos, o diagrama de Bode apresenta o ganho (em decibéis) e a fase (em graus) da saída de um sistema em relação à sua entrada em regime permanente.

Vamos considerar um sistema que pode ser representado como a função de transferência **G(s)** (Equação 3.56) com um ganho (**K**) em malha fechada, como mostram a Figura 3.18 e a Equação 3.57.

Figura 3.18 | Diagrama de bloco do sistema G(s) com ganho K em malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

$$G(s)=\frac{1}{s^3+15s^2+50s}\tag{3.56}$$

$$\frac{Y(s)}{C(s)}=\frac{K\cdot G(s)}{1+K\cdot G(s)}\tag{3.57}$$

Para traçarmos o diagrama de Bode do sistema em malha aberta com ganho **K = 1**, podemos proceder como mostra o Quadro 3.3, utilizando o comando `bode`, que exibe o gráfico mostrado na Figura

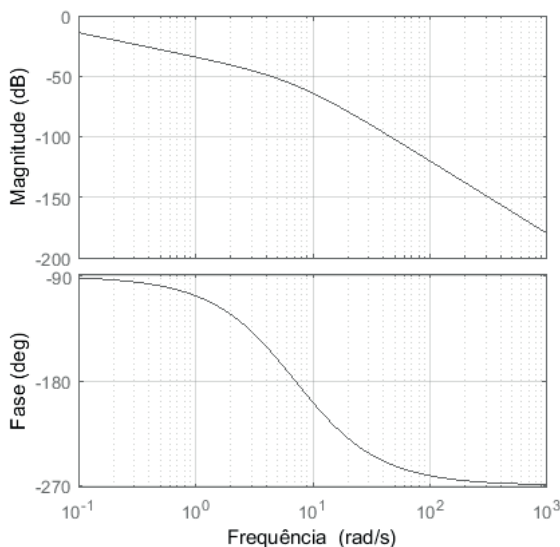
3.19 (no MATLAB, os eixos têm legenda em inglês). O comando `bode` necessita que seu argumento seja uma variável do tipo `tf` (função de transferência) ou `ss` (espaço de estados ou diagrama de blocos).

Quadro 3.3 | Traçando o diagrama de Bode

3	<code>>> G = tf(1,[1, 15, 50, 0]);</code>
4	<code>>> bode(1*G);</code>
5	<code>>> grid;</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.19 | Diagrama de Bode traçado pelo MATLAB



Fonte: elaborado pelo autor.

Pelo diagrama de Bode, podemos avaliar as margens de fase e de ganho de um sistema. Analisando o diagrama da Figura 3.19 podemos ver que o sistema $K \cdot G(s)$ em malha aberta com $K=1$ nunca chegará a uma fase de 180° , ou seja, sua margem de ganho é infinita: independentemente do valor (real e positivo) que K assuma, o sistema não se tornará instável. Por outro lado, vemos que o diagrama de Bode cruza 0 dB em uma frequência de aproximadamente $4,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. No gráfico da fase, vemos que em $4,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ a fase é bem próxima de -180° , ou seja, a margem de fase é bem pequena. Podemos obter no MATLAB o valor para ambas as fases

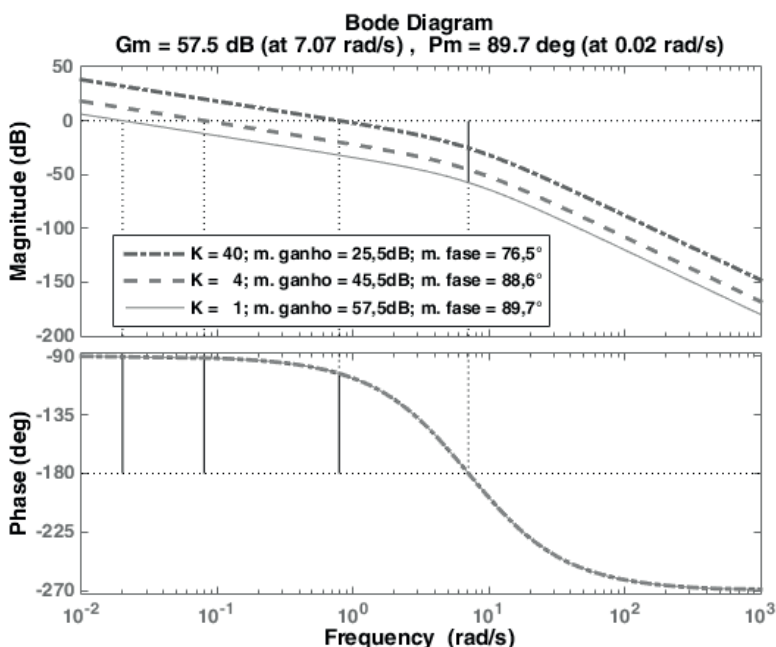
com o comando `margin` (Quadro 3.4). O comando `margin` requer o mesmo tipo de argumento que o comando `bode`. A fim de observar o comportamento de diferentes valores para o ganho K nas margens de estabilidade, traçaremos conjuntamente os gráficos com $K = 40$, $K = 4$ e $K = 1$, sendo que o último dos três é o que terá suas margens de ganho exibidas no título do gráfico (Figura 3.20).

Quadro 3.4 | Obtendo as margens de fase e de ganho

6	<code>>> margin(40*G);</code>
7	<code>>> hold on;</code>
8	<code>>> margin(4*G);</code>
9	<code>>> margin(1*G);</code>
10	<code>>> grid on;</code>
11	<code>>> legend('K=40', 'K=4', 'K=1');</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.20 | Margens de fase e de ganho para vários valores de K



Fonte: elaborado pelo autor.

No título da Figura 3.20, abaixo de *Bode Diagram*, temos a informação de que, para $K=1$ (que foi o último sistema a ser traçado, assim sobrescrevendo as informações dos anteriores no título do gráfico), a margem de ganho (Gm , do inglês, *gain margin*) é de 57,5dB e ocorre na frequência $7,07 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (at 7.07 rad/s). A margem de fase (Pm , do inglês, *phase margin*) vale $89,7^\circ$ (89.7 deg) e ocorre aos $0,02 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (at 0.02 rad/s). Como já estudado na seção anterior, a multiplicação do sistema por qualquer valor real positivo, ou seja, por um ganho, não altera a fase do sistema, e isso é o que pode ser observado no gráfico de fase da Figura 3.20: os três sistemas têm fases idênticas e se sobrepõem. Assim como o comando `bode`, o comando `margin` traça o diagrama de Bode e, além de traçar o diagrama, indica os valores das margens no título e nos próprios gráficos, como pode ser visto no gráfico da fase (*phase*) da Figura 3.20, com as linhas pretas verticais. Com o comando `margin`, é possível também obter os valores das margens de ganho e de fase, além das respectivas frequências nas quais cada um ocorre, como mostra o Quadro 3.5, em que G é o sistema para o qual deseja-se calcular as margens. As saídas desta forma de utilizar o comando são a margem de ganho em adimensional (`m_ganho`), margem de fase em graus (`m_fase`), frequência na qual ocorre a margem de ganho (`w_m_ganho`) e frequência na qual ocorre a margem de fase (`w_m_fase`), ambas em $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Quadro 3.5 | Obtenção das margens de fase e de ganho sem apresentar o diagrama de Bode

```
12 >> [m_ganho, m_fase, w_m_ganho, w_m_fase] = margin(G);
```

Fonte: elaborado pelo autor.



Assimile

Os comandos `bode` e `margin` traçam o diagrama de Bode do sistema dado. Contudo, `margin` traz informações acerca das margens de fase e de ganho no gráfico traçado, diferentemente do `bode`. Além disso, vale ressaltar que o comando `margin` pode omitir o diagrama de Bode quando utilizado da maneira apresentada no Quadro 3.5.

Para visualizarmos as margens do sistema em malha fechada da Figura 3.18, podemos utilizar o comando `feedback` para inseri-lo

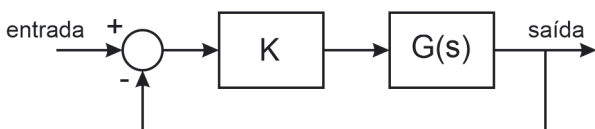
no MATLAB. O comando `feedback` requer como argumento um sistema dinâmico (variável do tipo `tf` ou `ss`), seguido da representação do sistema que representa o ramo da retroalimentação.



Exemplificando

Considere o sistema $G(s)$ (Equação 3.53) em malha fechada, como mostra a Figura 3.21, com um ganho K que foi ajustado com o valor 10. Para obtermos suas margens de fase e de ganho sem traçar o diagrama de Bode, podemos executar o comando `margin`, como mostra o Quadro 3.6.

Figura 3.21 | Diagrama de Blocos em malha fechada com ganho



Fonte: elaborada pelo autor.

Quadro 3.6 | Obtendo as margens de ganho e de fase para o sistema com ganho

```
13 >> [m_ganho, m_fase, w_m_ganho,  
      w_m_fase] = margin(10*G)  
  
m_ganho =  
  
      75  
  
m_fase =  
  
  86.5673  
  
w_m_ganho =  
  
   7.0711  
  
w_m_fase =  
  
   0.1998
```

Fonte: elaborado pelo autor.

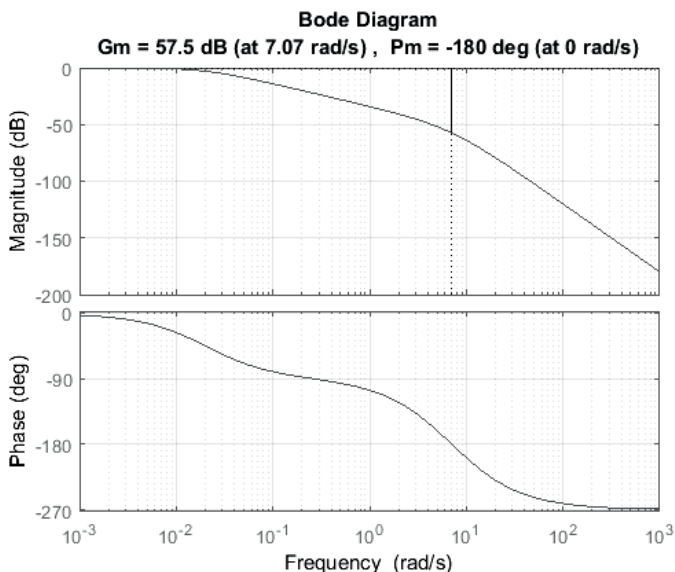
Como vamos utilizar uma retroalimentação unitária, o segundo argumento do comando `feedback` (linha 15 do Quadro 3.7) é o número 1, lembrando que também utilizaremos $K=1$ para o ganho. O resultado é atribuído à variável `MF1` para depois ser utilizado no comando `margin` (linha 16 do Quadro 3.7), que gera a Figura 3.22.

Quadro 3.7 | Obtendo as margens de fase e de ganho para o sistema em malha fechada

```
14  >> close all;
15  >> MF1 = feedback(1*G,1);
16  >> margin(MF1);
17  >> grid on;
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.22 | Diagrama de Bode de malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a margem de ganho do sistema em malha fechada (Figura 3.22) é a mesma que a do sistema em malha aberta (Figura 3.20). Isso é verdade para um sistema SLIT: para encontrarmos a margem de ganho de um sistema em malha fechada, basta obtermos a margem de ganho do sistema em malha aberta, pois ambas serão iguais.



Realize o teste desse conceito no MATLAB: invente uma função de transferência e obtenha sua margem de ganho. Agora, faça um sistema em malha fechada com ele e obtenha a nova margem de ganho. Os valores de margem de ganho são iguais? Assim, é necessário que calculemos sua função de transferência em malha fechada para estudarmos sua estabilidade?

Temos que a margem de ganho de $G(s)$ é de 57,5dB que, em ganho adimensional, equivale a aproximadamente 750, ou seja, se impusermos um ganho de 750 a $G(s)$, ele se tornará um sistema marginalmente estável, logo, sua margem de fase será 0dB, ou 1 em adimensional. Isso pode ser notado ao observarmos o resultado do comando exibido no Quadro 3.8.

Quadro 3.8 | Nova margem de fase ao tornar $G(s)$ marginalmente estável

18	<pre>>> [m_ganho, m_fase, w_m_ganho, w_m_fase] = margin(750*G) m_ganho = 1 m_fase = 2.3353e-05 w_m_ganho = 7.0711 w_m_fase = 7.0711</pre>
----	--

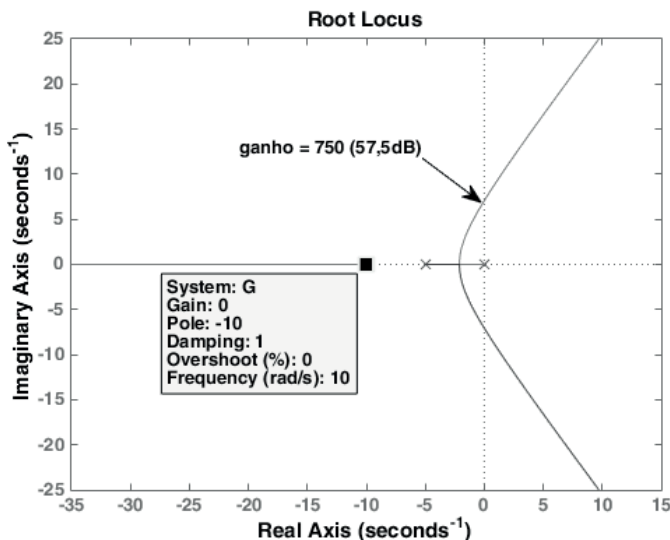
Fonte: elaborado pelo autor.

Para obtermos o lugar das raízes do sistema da Figura 3.18 com o ganho K como variável, basta que passemos a função de transferência $G(s)$ como argumento para o comando `rllocus`, como mostra o Quadro 3.9, para obtermos o gráfico da Figura 3.23.


19	>> close all;
20	>> rlocus(G) ;
21	>> grid on;

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.23 | Gráfico do lugar das raízes



Fonte: elaborada pelo autor.

Para $K \rightarrow 0$, as raízes da equação característica do sistema da Equação 3.53, ou seja, seus polos, tendem a -10 ; -5 e 0 , indicadas pelas cruzeiras na Figura 3.23. Com a ferramenta *data cursor* () , podemos clicar no gráfico e obter valores para o ganho (*gain*) e seus efeitos no sistema de malha fechada, representados pelos parâmetros: amortecimento (*damping*), sobressinal (*overshoot*) e frequência natural (*frequency*).



Assimile

Podemos obter importantes dados do gráfico do lugar das raízes utilizando a ferramenta *data cursor*, acessível na barra de ferramentas da janela do gráfico.

O que observamos no diagrama de Bode da Figura 3.19 se repete no lugar das raízes da Figura 3.23: para um valor de 750 (ou 57,5dB) no ganho K , o sistema torna-se marginalmente estável. Alterando o valor para o ganho K , alteramos o comportamento dinâmico do sistema. Podemos fazer com que ele responda de maneira mais ágil, mais lenta, com maior ou menor sobressinal etc. Como já conhecemos as métricas no tempo (tempo de subida, sobressinal, tempo de acomodação) e suas dependências com o coeficiente de amortecimento e frequência natural do sistema, podemos calcular o valor do ganho K para que os polos se encontrem na região do plano complexo que cause o comportamento desejado para o sistema dinâmico. Nesta tarefa, podemos utilizar o comando `damp`, que imprime na tela informações acerca de cada polo do sistema, como pode ser visto seu resultado no Quadro 3.10 quando aplicado ao sistema $G(s)$.

Quadro 3.10 | Utilização do comando `damp`

22	>> damp (G)			
	Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
	0.00e+00	-1.00e+00	0.00e+00	Inf
	-5.00e+00	1.00e+00	5.00e+00	2.00e-01
	-1.00e+01	1.00e+00	1.00e+01	1.00e-01

Fonte: elaborado pelo autor.

Temos também o critério de Routh-Hurwitz para avaliar a estabilidade de um SLIT. Já sabemos que o critério de Routh-Hurwitz é um método que pode ser aplicado de modo iterativo. Então, para utilizá-lo no MATLAB, devemos aplicar os cálculos repetidamente, percorrendo os coeficientes da equação característica para sistemas que necessitam que a matriz seja calculada, ou seja, para sistemas que tenham todos os coeficientes de sua equação característica com o mesmo sinal (positivo ou negativo). A Equação 3.58 mostra a equação característica do sistema da Figura 3.18 com $K = 5$. O Quadro 3.11 mostra como podemos aplicar o critério de Routh-Hurwitz para o caso da Equação 3.58.

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 5 \quad (3.58)$$

Quadro 3.11 | Aplicando o critério de Routh-Hurwitz

23	<pre>>> coef = [1 15 50 5] coef = 1 15 50 5 >> a(1) = coef(1);</pre>
24	<pre>>> a(2) = coef(2);</pre>
25	<pre>>> a(3) = coef(3);</pre>
26	<pre>>> a(4) = coef(4)</pre>
27	<pre>a = 1 15 50 5 >> b(1) = (a(2)*a(3)-a(4)*a(1))/a(2) b =</pre>
28	<pre>49.6667 >> c(1) = (b(1)*a(4)-a(2)*0)/b(1) c =</pre>
29	<pre>5 >>[a(1); a(2); b(1); c(1)] %primeira coluna ans =</pre>
30	<pre>1.0000 15.0000 49.6667 5.0000</pre>

Fonte: elaborado pelo autor.

O vetor a corresponde à primeira e segunda linha da matriz do método, que vem diretamente do vetor coef, que são os coeficientes do polinômio do denominador. O vetor b (que, nesse caso, possui apenas um elemento), são os da terceira linha, calculados a partir da primeira e da segunda linha; assim como o vetor c (também um único elemento para este caso), que é a quarta linha, depende da segunda e terceira linhas. A linha 28 do Quadro 3.11 calcula o que é mostrado na Equação 3.59, de acordo com o método do critério de Routh-Hurwitz.

$$b_1 = \frac{a_2 \cdot a_3 - a_4 \cdot a_1}{a_2} \quad (3.59)$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, como não há mudança de sinal na primeira coluna, o sistema é, como já esperado, estável.



Pesquise mais

O MATLAB não disponibiliza um comando pronto que performe o método do critério de Routh-Hurwitz, mas alguns usuários desenvolveram e disponibilizaram o algoritmo do critério. Você pode fazer o download, testá-lo e estudar o código para entender como as operações são realizadas. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/58-routh-m>>. Acesso em: 31 jul. 2017.

Por último, temos a representação em espaço de estados do sistema em malha fechada da Equação 3.53, com $K=1$, como mostra a Equação 3.60.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -50 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.60)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Por meio do cálculo dos autovalores da matriz de estados, podemos aferir a estabilidade de um sistema dinâmico. Os autovalores de uma matriz quadrada podem ser calculados no MATLAB por meio do uso do comando `eig` (do inglês, *eigenvalues*), e seu argumento é justamente a matriz para a qual se deseja calcular os autovalores, como mostra o Quadro 3.12.

Quadro 3.12 | Calculando os autovalores para aferir a estabilidade de um sistema em espaço de estados

31	>> A = [-15, -50, -1; 1 0 0; 0 1 0];
32	>> eig(A)
	ans =
	-10.0199
	-4.9600
	-0.0201

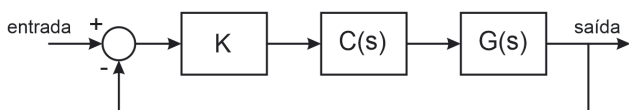
Fonte: elaborado pelo autor.

Como esperado dos resultados anteriores das margens de ganho e de fase e do lugar das raízes, a parte real dos autovalores da matriz de estados é negativa. Por isso, o sistema é estável.

Sem medo de errar

Você, como projetista membro da equipe de engenharia de uma agência espacial, recebeu a tarefa de avaliar a estabilidade do controlador projetado para o sistema de lançamento de veículos espaciais. É necessário que seja conhecido o limite de ajuste do ganho do controlador para o qual o sistema se torne marginalmente estável pois, com esta informação, você e sua equipe saberão qual é o valor máximo de ajuste do ganho que garante que não serão causadas avarias no sistema e que ele não se tornará inseguro, ou seja, vocês conhecerão quais são os valores de ganho abaixo desse máximo, para que o sistema seja estável. A Figura 3.24 mostra a representação em diagrama de blocos da configuração do sistema.

Figura 3.24 | Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com controlador e ganho ajustável



Fonte: elaborada pelo autor.

Para alcançar o objetivo, você deve analisar o gráfico do lugar das raízes do sistema para encontrar o valor do ganho K que estabiliza o sistema.

A função de transferência do sistema é dada pela Equação 3.61. O controlador é dado pela Equação 3.62, e os parâmetros estão no Quadro 3.13.

$$G(s) = \frac{\Theta}{U}(s) = \frac{-\frac{m\ell}{M+m}}{\left(\ell + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m}\right)s^2 - mg\ell} \quad (3.61)$$

$$C(s) = (s + 0,2) \cdot (s^2 + 0,4s + 0,05) \quad (3.62)$$

Quadro 3.13 | valores dos parâmetros do sistema de lançamento

Parâmetro	Variável	Valor
Massa do veículo	m	$2.938.314,674 \text{ kg}^{[1]}$
Massa do sistema de lançamento	M	$\cong 10 \cdot m \text{ [kg]}$
Comprimento do veículo	ℓ	$110,67288 \text{ m}^{[2]}$
Aceleração da gravidade local	G	$9,81 \frac{m}{s^2}$

Fonte: adaptado de <https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-19_Ground_Ignition_Weights.htm>; <https://history.nasa.gov/SP-4029/Apollo_18-13_Launch_Vehicle-Spacecraft_Key_Facts.htm>. Acesso em: 22 ago. 2017.

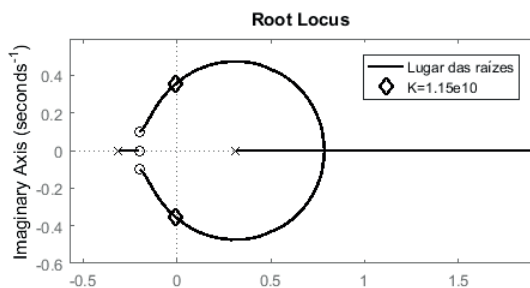
Inserindo as equações no MATLAB, podemos utilizar o comando `rlocus`, como mostra o Quadro 3.14, para avaliar para quais valores de ganho o sistema se torna estável.

Quadro 3.14 | Obtendo o lugar das raízes para o sistema de lançamento

33	<code>>> close all</code>	% fecha tudo
34	<code>>> clear all</code>	% apaga tudo
35	<code>>> clc</code>	% limpa tela
36	<code>>> m = 2938314.674;</code>	% [kg]
37	<code>>> M = 10*m;</code>	% [kg]
38	<code>>> l = 110.67288;</code>	% [m]
39	<code>>> g = 9.81;</code>	% [m/s^2]
40	<code>>> G = tf(-(m*l/(M+m)), [1+m*l*1-(m*m*l*1/(M+m)) 0 -</code>	
41	<code>m*g*l]);</code>	
	<code>>> C = tf(1,[1, .6, .13, .01]);</code>	
42	<code>>> rlocus(C*G);</code>	

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3.25 | Lugar das raízes dos sistemas de lançamento vertical com controle



Fonte: elaborada pelo autor.

Você já sabe que, no lugar das raízes, os polos (representados pelas cruces) caminham do seu valor em malha aberta, em que $K \rightarrow 0$, para os zeros (representados pelos círculos), em que $K \rightarrow \infty$. Na Figura 3.25, percebe-se que há um valor para K no qual o sistema caracteriza-se como marginalmente estável (parte real do polo é nula), e esse valor, indicado pelos losangos, é de aproximadamente $K = 1,15 \cdot 10^{10}$. Com isso, pode-se concluir que, para o sistema e controlador em questão, em malha fechada, temos que se $K > 1,15 \cdot 10^{10}$, o sistema é estável.

Avançando na prática

Estabilidade da mesa da impressora 3D

Descrição da situação-problema

Você, em sua nova aposta de empreendedorismo, monta uma empresa que fabrica impressoras de prototipagem rápida, as famosas impressoras 3D. No sistema da impressora, é importante que a mesa que sustenta o protótipo durante a impressão mantenha-se nivelada para que não haja problemas durante o processo. A mesa da impressora 3D é apoiada sobre molas para que a vibração da movimentação do cabeçote de impressão não interfira no posicionamento da peça. Porém, como a estrutura da impressora 3D não é totalmente rígida e as acelerações desenvolvidas pelos motores de passo que movem o cabeçote durante o processo de impressão não são desprezíveis, é necessário que haja um controle ativo da posição da mesa para que o processo de impressão não resulte em erros no objeto impresso. Nesse controle, a entrada do sistema em malha fechada é a posição desejada, e a saída é a posição real da mesa.

O modelo da mesa é apresentado na Equação 3.63 (sua entrada é a força de atuação do controlador e sua saída é a própria posição da mesa) e a equação do controlador se encontra na Equação 3.64 (sua entrada é o erro de posição da mesa e sua saída é a força que será exercida na mesa).

$$G(s) = \frac{0,8}{0,003s^2 + 0,02s + 0,8} \quad (3.63)$$

$$C(s) = s + 10 \quad (3.64)$$

Para esse sistema e controlador, qual é o comportamento esperado da resposta em frequência? Como isso afeta o processo de ajuste do parâmetro do ganho?

Resolução da situação-problema

O Quadro 3.15 mostra como podemos inserir as funções de transferência no MATLAB e obter informações sobre elas como comando `damp`.

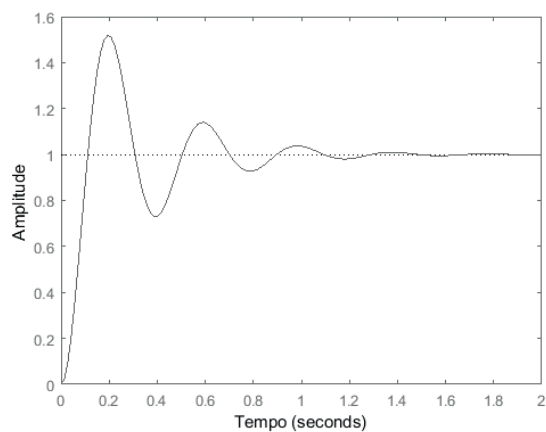
Quadro 3.15 | inserindo o sistema da impressora 3D no MATLAB e traçando o lugar das raízes

43	<code>>> close all</code>	<code>% fecha tudo</code>
44	<code>>> clear all</code>	<code>% apaga tudo</code>
45	<code>>> clc</code>	<code>% limpa tela</code>
46	<code>>> G = tf(.8, [0.003, 0.02, 0.8]);</code>	
47	<code>>> C = tf([1, 10]);</code>	
48	<code>>> damp(G)</code>	
49	<code>>> damp(feedback(C*G,1))</code>	

Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado da linha 48 do Quadro 3.15 nos diz que os coeficientes de amortecimento dos polos de malha aberta, ou seja, a mesa sem malha de controle ativo fechada, é 0,2. Esse coeficiente de amortecimento faz com que o sistema tenha grande sobressinal e grande tempo de acomodação, fazendo com que o sistema oscile, como pode ser vista, na Figura 3.26, a resposta da mesa em malha aberta a uma entrada degrau unitário de força.

Figura 3.26 | Resposta da mesa em malha aberta ao degrau unitário

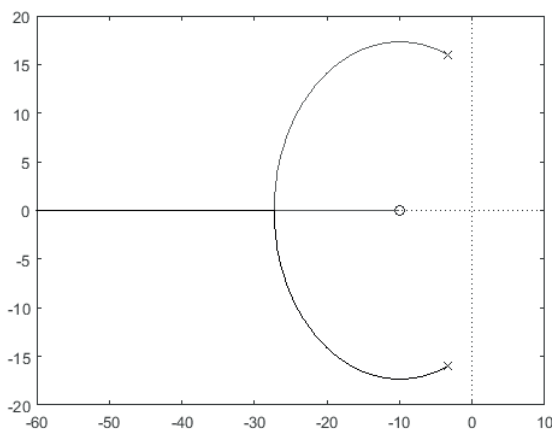


Fonte: elaborada pelo autor.

Com o controlador e em malha fechada, o sistema apresenta fator de amortecimento 1 (resultado da linha 48 do Quadro 3.15) que, como já sabemos, não permite que o sistema oscile ou tenha qualquer sobressinal.

Ao traçar o lugar das raízes da mesa com o controlador (Figura 3.27), vemos que o sistema pode ser submetido a qualquer valor de ganho real, pois isso não fará com que o sistema se torne instável. Desse modo, o projetista pode ficar livre para escolher um ganho que vá ao encontro de específicas necessidades de performance do sistema de controle da mesa.

Figura 3.27 | Lugar das raízes da mesa com controlador



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. O MATLAB é um software poderoso que pode auxiliar o projetista de controle a desenvolver controladores para sistemas dinâmicos e avaliar sua estabilidade baseando-se em diferentes métodos desenvolvidos pela ciência.

Sobre a utilização do MATLAB para aferir a estabilidade de sistemas dinâmicos, assinale a alternativa correta.

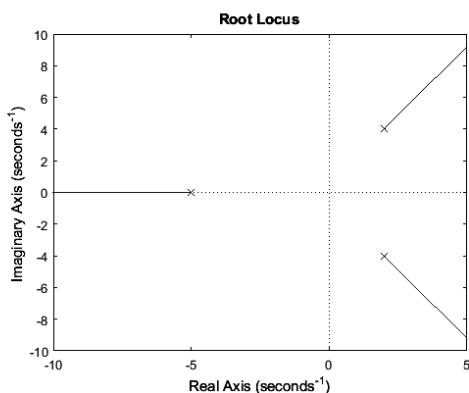
- a) Os comandos `bode` e `margin` são idênticos, pois ambos traçam o diagrama de Bode.
- b) O comando `rlocus` é utilizado para, a partir do sistema em malha aberta, com ganho variável, aferir a estabilidade do sistema em malha fechada observando-se seus polos no plano complexo.

- c) O comando `eig` retorna se um sistema em espaço de estados é estável ou não.
- d) O MATLAB tem um comando específico que performa o critério de Routh-Hurwitz.
- e) O comando `tf` não tem utilidade no sentido de avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos.

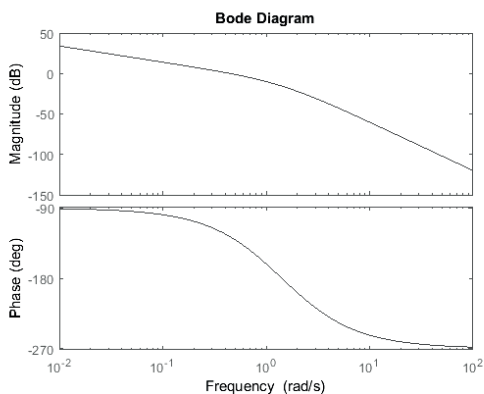
2. Os principais comandos utilizados no MATLAB para avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos requerem como argumento simplesmente a variável que representa o sistema.

Observando as imagens a seguir, qual comando foi utilizado para gerá-las? Suponha que o sistema em questão já tenha sido inserido no MATLAB na variável `G`.

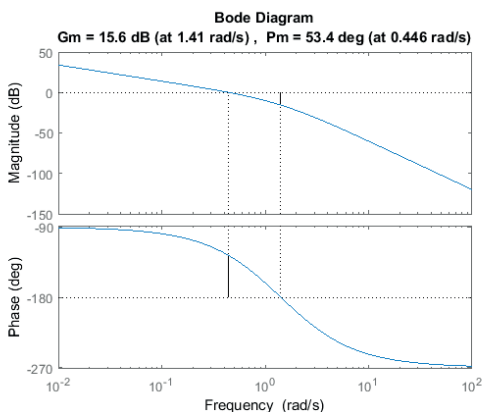
I.



II.



III.



- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) | c) | e) |
| I. <code>rlocus(G)</code> ; | I. <code>eig(G)</code> ; | I. <code>bode(G)</code> ; |
| II. <code>bode(G)</code> ; | II. <code>bode(G)</code> ; | II. <code>margin(G)</code> ; |
| III. <code>margin(G)</code> ; | III. <code>margin(G)</code> ; | III. <code>rlocus(G)</code> ; |
| b) | d) | |
| I. <code>rlocus(G)</code> ; | I. <code>eig(G)</code> ; | |
| II. <code>margin(G)</code> ; | II. <code>margin(G)</code> ; | |
| III. <code>bode(G)</code> ; | III. <code>bode(G)</code> ; | |

3. Com a aplicação do critério de Routh-Hurwitz, podemos avaliar a estabilidade de um sistema dinâmico e, se houver uma variável do sistema não definida, podemos utilizar o critério para estabelecer limites de variação para essa variável e, com isso, garantir a estabilidade do sistema.

No MATLAB, não há uma função que realize os cálculos do critério de Routh-Hurwitz. Com base neste contexto, analise as afirmações a seguir:

I. Então, não há como realizar os cálculos do critério no software.

II. A única forma de realizar os cálculos é fazendo o download de comandos criados por outros usuários do MATLAB.

III. É possível fazer os cálculos do método passo a passo para analisar a estabilidade do sistema dinâmico.

IV. É possível que nós mesmos elaboremos o algoritmo de um comando que realize os passos do critério de Routh-Hurwitz.

Quais das afirmações estão corretas?

- Apenas I e II.
- Apenas I e III.
- Apenas II e III.
- Apenas III e IV.
- Apenas II e IV.

Referências

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de Controle Modernos**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Projeto de controladores para processos industriais

Convite ao estudo

Olá, aluno! Ao longo deste material, você conheceu os primórdios do controle automático e seus fundamentos, passando pelas nomenclaturas básicas e diferentes arquiteturas de controle, além das maneiras mais comuns de se representar os sistemas dinâmicos e seus modelos matemáticos. Você aprendeu também como se deve proceder para analisar os sistemas dinâmicos tanto no domínio do tempo com as métricas temporais de desempenho quanto no domínio da frequência. Foram apresentadas técnicas para análise de estabilidade e métodos de estudo da faixa de valores de parâmetros do sistema na qual este se torna estável ou instável.

Nesta unidade, lhe serão apresentados os tipos de controladores mais utilizados na indústria, entre eles, o controlador PID. Você também aprenderá métodos utilizados para ajustá-los, os chamados métodos de sintonia de PID. E, na aplicação desses conceitos, você utilizará o MATLAB tanto para fazer a sintonia manualmente quanto automaticamente.

Ao longo desta unidade, você é responsável pelo projeto de aprimoramento do sistema de controle de posição de uma fresadora para que a máquina se torne mais eficiente, o que, no caso, significa diminuir o tempo de acomodação e o sobressinal máximo da resposta do sistema. A fresadora é uma máquina de usinagem que desenvolve o processo de fresamento por meio da movimentação (rotacional e translacional) de uma ferramenta chamada fresa. Seu objetivo é projetar e validar o controlador que será responsável pelo posicionamento da fresa durante o processo de corte das peças. Ao longo deste material, você obterá as ferramentas necessárias para desempenhar esse papel. Bons estudos!

Seção 4.1

Controladores industriais

Diálogo aberto

Nesta seção, você aprenderá quais são as ações básicas de controle, que são as constituintes dos controladores vastamente utilizados na indústria:

- Liga-desliga.
- Proporcional.
- Derivativo.
- Integral.

Cada uma das ações básicas causa efeitos característicos ao serem aplicados em uma malha de controle. É importante que você, futuro profissional da área, conheça esses efeitos, pois ao desenvolver o projeto de um controlador, saber ajustar empiricamente cada uma das ações permite que sejam resolvidos problemas de adequação de desempenho da resposta do sistema com maior facilidade.

Serão introduzidos também exemplos esquemáticos de circuitos elétricos que funcionam como as ações de controle proporcional, derivativa e integral, assim como esquemáticos pneumáticos e hidráulicos de controladores que são uma junção desses três tipos de ações.

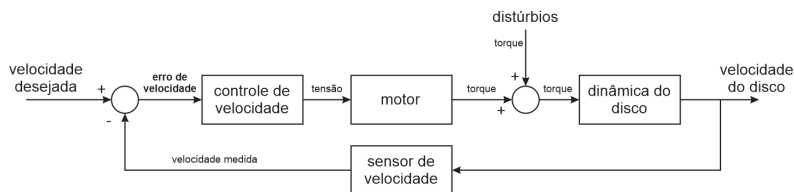
Nesta seção, você dará seus primeiros passos na tarefa a ser desenvolvida com a fresadora. A máquina, que está funcional, tem um controlador já embarcado na sua malha de controle de posição da ferramenta de corte (a fresa). Como o controlador causa grande impacto na eficiência da máquina e sua produtividade é de grande importância, você deve analisá-lo para descobrir de que tipo é esse controlador atualmente. Sendo o objetivo principal aumentar a produtividade da fresadora, o controlador atual atende aos novos requisitos de desempenho?

Vamos descobrir! Mãos à obra!

Não pode faltar

Quando vamos controlar algum sistema dinâmico, geralmente desejamos que o sistema siga uma referência definida de alguma maneira. O *hard drive disk* (HDD) de um notebook, por exemplo, necessita girar a uma velocidade constante (geralmente 7.200 rpm), mas ao mover o computador de um lado ao outro enquanto ligado, isso pode fazer com que cargas dinâmicas atrapalhem a rotação do disco, levando a erros de escrita e leitura de dados e talvez até corrompendo dados, avariando o HDD. Para evitar esses problemas, o motor que gira o disco recebe uma entrada (tensão) a partir de um controlador que, por sua vez, tem como entrada o erro (valor desejado menos o valor real atual) de velocidade angular do disco (obtido por um sensor). A partir dessa informação, calcula-se a tensão que deve ser aplicada ao motor, de forma que, mesmo com os distúrbios de uma movimentação do notebook, o sistema continue a girar com sua velocidade predefinida. A Figura 4.1 apresenta o diagrama de blocos do sistema.

Figura 4.1 | Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade de um HDD



Fonte: elaborada pelo autor.

Em controle, geralmente utilizamos o valor do erro de operação de um sistema para definirmos, ou seja, calcularmos qual a ação de controle a qual o sistema será submetido. Podemos criar e aplicar qualquer lei de controle que desejarmos, mas existem algumas ações básicas de controle que tendem a ser as primeiras a serem testadas e analisadas no início do projeto de um controlador. São elas:

- Ação liga-desliga (também conhecida como de duas posições ou *on-off*).
- Ação proporcional.
- Ação derivativa.
- Ação integral.

A ação liga-desliga se trata do tipo mais simples de controle. Matematicamente, temos a Equação 4.1.

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & , \text{ para } e(t) \geq 0 \\ U_2 & , \text{ para } e(t) < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

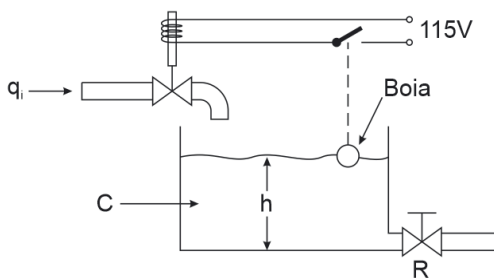
Na Equação 4.1, sendo $u(t)$ a ação de controle e $e(t)$ o erro (ambos temporais), se o erro for negativo, a ação será U_2 ; se for positivo, a ação será U_1 . É comum encontrarmos controladores desse tipo em que temos U_2 nulo ou até mesmo igual a $-U_1$. Para ocorrer o chaveamento, é possível ainda que seja inserido um intervalo diferencial entre os valores de erro para os quais o valor da ação de controle é alterada. Com isso, a ação de controle atual é mantida, mesmo que o erro se encontre dentro da faixa de valores que o intervalo diferencial representa.



Exemplificando

Um sistema de controle de nível de um tanque tem um controle liga-desliga na válvula de entrada do líquido, acionada automaticamente por uma boia, que funciona como sensor do nível (Figura 4.2).

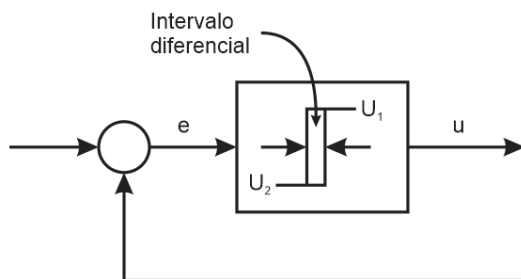
Figura 4.2 | Sistema de tanque com controle liga-desliga de nível



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

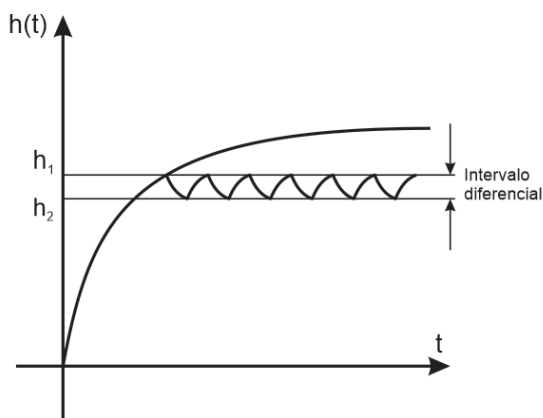
Com a presença do intervalo diferencial (Figura 4.3), há uma faixa de valores, entre o erro máximo e o erro mínimo permitidos, para a qual a ação de controle não muda de valor. Com isso, a quantidade de chaveamentos diminui e, consequentemente, a vida útil do componente que faz o papel da chave aumenta. O resultado da presença do intervalo diferencial é mostrado na Figura 4.4: quanto maior o intervalo, maior a faixa de erro permitida.

Figura 4.3 | Diagrama de bloco do controlador liga-desliga



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

Figura 4.4 | Comportamento do sistema submetido à ação de controle liga-desliga



Fonte: Ogata (2010, p. 20).

Na Figura 4.4, o nível h_1 é o nível máximo permitido, e o nível h_2 é o mínimo permitido.

Na ação de controle proporcional, o sinal de controle é dado pela multiplicação do erro por um número real. No domínio do tempo, temos a Equação 4.2 e, no domínio da frequência, a Equação 4.3.

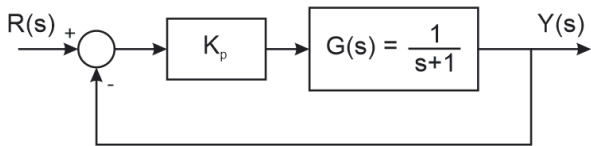
$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4.3)$$

Na unidade anterior, vimos que K_p também pode ser chamado de ganho. Como ele também representa uma ação proporcional, é chamado de ganho proporcional. A sua aplicação em um sistema em malha fechada faz com que o sistema controlado apresente um erro de regime permanente em sua resposta. A Figura 4.5 mostra um exemplo de diagrama de blocos com sistema de primeira ordem (Equação 4.4) submetido a uma ação de controle proporcional em malha fechada, e a Figura 4.6 mostra a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada para diferentes valores de ganho proporcional.

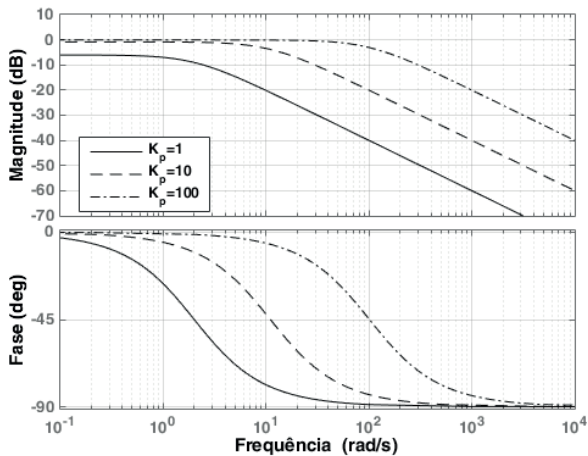
$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \tag{4.4}$$

Figura 4.5 | Diagrama de blocos em malha fechada do sistema de primeira ordem com ação de controle proporcional



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.6 | Diagrama de Bode para diferentes valores do ganho proporcional



Fonte: elaborada pelo autor.

No gráfico da magnitude do sistema em malha fechada (Figura 4.6) é perceptível que, com o aumento de K_p , a amplitude da resposta

do sistema em regime permanente tende a se igualar à amplitude da entrada $R(s)$ (Figura 4.5) para uma maior faixa de frequências (ganho de 0 dB), assim como a fase tende a ser nula. Em outros sistemas, como os de segunda ordem, apesar de anular o erro de regime permanente, o aumento do ganho proporcional faz com que o sistema responda com um maior sobressinal e grande oscilação, o que geralmente não é um comportamento desejável.



Refleta

Crie um modelo de um sistema dinâmico de segunda ordem estável (você pode encontrar o formato padrão do sistema de segunda ordem na 2ª seção da 2ª unidade deste material) e obtenha a sua função de transferência em malha fechada com uma ação de controle proporcional (baseie-se no diagrama de blocos da Figura 4.5), cuja função de transferência em malha fechada é dada por $\frac{Y(s)}{R(s)}$. Aplique uma entrada degrau ao sistema para vários valores de ganho e observe o gráfico da saída no tempo. O que ocorre com a resposta observada em relação ao seu período transitório? E em relação ao seu valor de regime permanente?

A ação derivativa é definida pela derivada do erro. Matematicamente, temos a Equação 4.5 no tempo e, aplicando a transformada de Laplace, temos a Equação 4.6, em que T_d é denominado tempo derivativo.

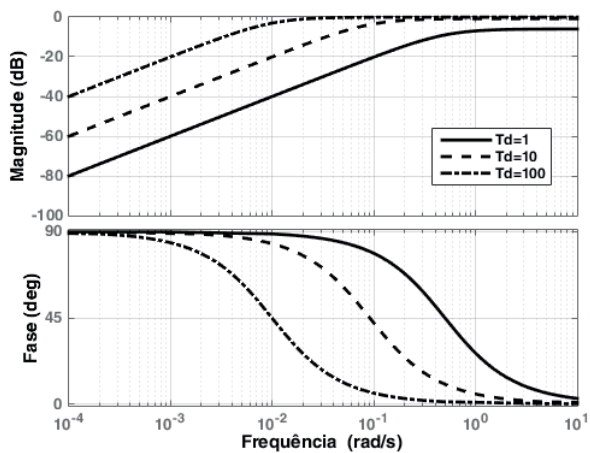
$$u(t) = T_d \frac{d}{dt} e(t) = T_d \dot{e}(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = T_d s \quad (4.6)$$

O diagrama de Bode de um sistema em malha fechada é similar ao da Figura 4.5, mas com o controlador sendo uma ação derivativa, conforme apresentado na Figura 4.7, mostra que, com o aumento do tempo derivativo T_d , a magnitude de 0dB e a fase de 0° vai se estendendo para as baixas frequências, e isso torna a resposta do sistema mais sensível às variações do erro. Por outro lado, no regime transiente, o aumento de T_d faz com que o sistema tenha um maior tempo de acomodação (reveja tempo de acomodação e outras métricas de resposta temporal na Seção 2.2 da Unidade 2 deste

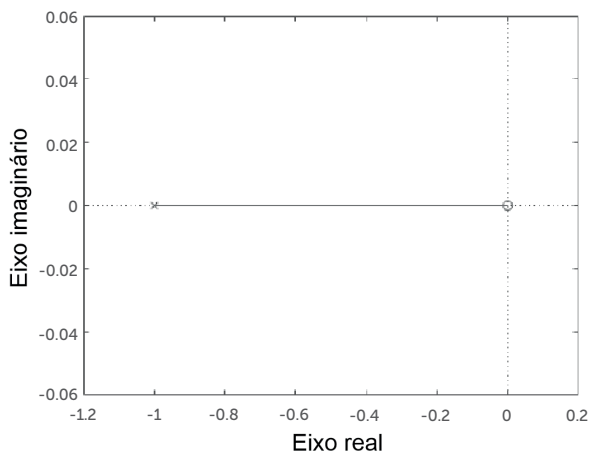
material), como pode ser visto no gráfico do lugar das raízes (Figura 4.8), devido ao zero que o controlador adiciona na origem do plano complexo. O aumento do tempo derivativo faz com que as raízes do sistema caminhem para os zeros e quanto menor for a parte real da raiz, maior é seu tempo de acomodação.

Figura 4.7 | Diagrama de Bode para diferentes valores da ação de controle derivativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.8 | Lugar das raízes do sistema de primeira ordem ação derivativa



Fonte: elaborada pelo autor.



Conhecer as implicações da utilização de cada ação de controle é muito importante. Para ver mais detalhes dos efeitos da ação derivativa, pesquise na referência indicada.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

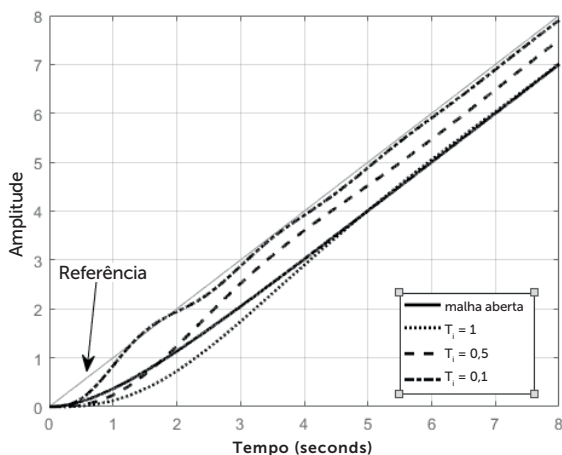
A ação integral de controle é dada pela integral do sinal de erro, representada pela Equação 4.7 no domínio tempo e 4.8 no domínio da frequência, em que T_i é denominado tempo integrativo.

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (4.7)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad (4.8)$$

A ação integrativa tende a mitigar o erro de regime que pode haver na resposta do sistema, mas pode fazer com que a resposta apresente oscilações que decrementem lentamente, o que geralmente é um comportamento indesejável. A Figura 4.9 mostra a resposta à entrada rampa do sistema de primeira ordem $G(s)$ (Equação 4.4) em malha aberta e em malha fechada para diferentes ações integrais.

Figura 4.9 | Comparação de resposta do sistema não controlado com sistema controlado por ação integral



Fonte: elaborada pelo autor.

A ação integral adiciona um polo na origem e seu tempo integrativo encontra-se no denominador, logo, assim como na ação derivativa, o sistema tem um aumento no tempo de acomodação com o aumento de T_i .



Assimile

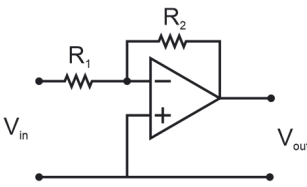
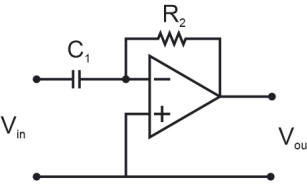
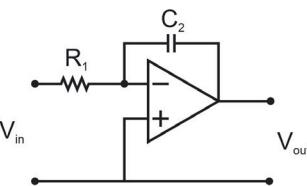
- Ação proporcional
 - Não adiciona zeros nem polos ao sistema.
 - Aumento do ganho K_p diminui o tempo de subida, mas pode deixar o sistema com resposta muito oscilatória ou até instável.
- Ação derivativa
 - Adiciona um zero na origem do plano complexo no lugar das raízes do sistema.
 - Sua aplicação deixa o sistema mais sensível à variação do erro e pode aumentar o tempo de acomodação da resposta.
- Ação integral
 - Adiciona um polo na origem do plano complexo no lugar das raízes do sistema.
 - Sua aplicação elimina o erro de regime permanente, mas pode tornar a resposta do sistema excessivamente oscilante.

Agora, vamos ver como podemos realizar essas ações básicas de controle na prática utilizando sistemas eletrônicos, pneumáticos e hidráulicos.

Com sistemas eletrônicos, é extremamente mais simples de se obter cada um desses tipos de ações de controle do que com sistemas pneumáticos e hidráulicos.

Para a ação liga-desliga, em uma aplicação em que a frequência de chaveamento é baixa (abaixo de 5Hz), podemos utilizar relés que têm como entrada uma corrente baixa (da ordem de 0,1 A) e podem chavear circuitos com altas tensões. Caso a frequência de chaveamento seja alta, podemos utilizar transistores, que podem chegar a uma frequência de chaveamento de 1,5GHz.

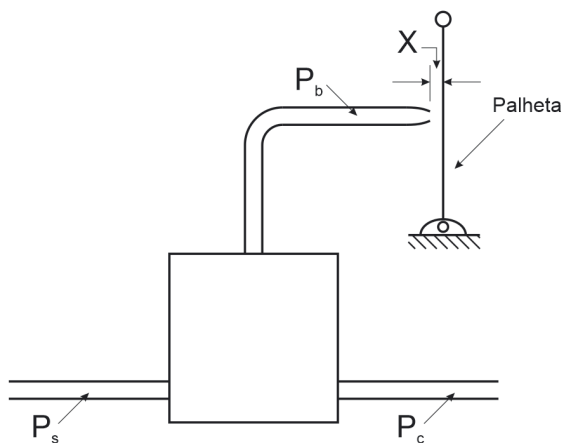
Para as ações proporcional, derivativa e integral, utiliza-se amplificadores operacionais. O Quadro 4.1 exibe um exemplo de circuito amplificador para cada ação.

Circuito	Função de transferência
<p>Ação proporcional</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{R_1}{R_2}$ $K_p = -\frac{R_1}{R_2}$
<p>Ação derivativa</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -R_2 C_1 s$ $T_d = -R_2 C_1$
<p>Ação integrativa</p> 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{1}{R_1 C_2 s}$ $T_i = -R_1 C_2$

Fonte: elaborada pelo autor.

Para um sistema pneumático, a ação de controle liga-desliga pode ser obtida com um controlador, como o mostrado na Figura 4.10: a pressão P_s , que alimenta o sistema, pode escapar por P_b (e não passa por P_c , não enviando sinal de controle para o sistema) dependendo da distância da X entre a palheta e o bocal. Se o bocal estiver suficientemente fechado pela palheta, a pressão P_c tende a ser igual a P_s . Caso contrário, P_c é nulo.

Figura 4.10 | Controlador liga-desliga pneumático

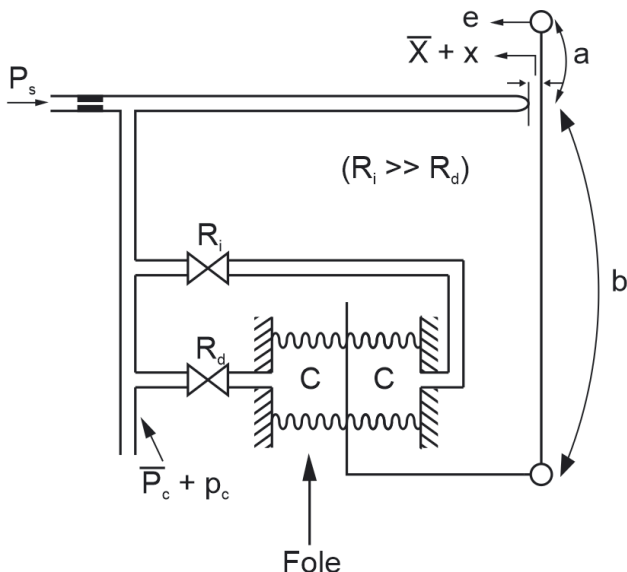


Fonte: Ogata (2010, p. 104).

A Figura 4.11 mostra o esquemático de um controlador pneumático, alimentado pela pressão P_s , que é formado de três ações básicas: proporcional, derivativa e integral. A distância X da palheta até o bocal é definida pelo erro e pela posição do fole (formado por duas capacitâncias fluídicas de valor C), sendo que essas distâncias são ponderadas pela alavanca, de comprimento total $a + b$, da própria palheta. O aumento do erro e faz com que a palheta se aproxime do bocal e, com isso, aumente a pressão $\bar{P}_c + p_c$ e a pressão do fole – que funciona como uma ação proporcional –, mas, como a resistência fluídica R_i é muito maior que a resistência fluídica R_d , o fole da esquerda se expande mais rápido e faz com que a palheta se distancie do bocal, diminuindo a pressão de saída. Após um tempo, as pressões dos foles se igualam e a posição da palheta retorna à posição de equilíbrio. O fole da esquerda, em conjunto com a resistência R_d e a realimentação na haste, compõe a ação de controle derivativa. Analogamente, o fole da direita com a resistência R_i e a realimentação para a haste compõem a ação de controle integral. Para utilizar esse tipo de controlador, o erro que se deseja eliminar deve ser convertido mecanicamente em uma movimentação linear, para que possa ser conectada ao ponto e da palheta. A pressão de saída $\bar{P}_c + p_c$ do controlador deve ser conectada ao atuador da planta ou processo que gerou o sinal de erro, fechando, assim, a malha do sistema. A pressão de saída é $\bar{P}_c + p_c$ pois, como

dito anteriormente, sistemas fluidicos são geralmente modelados por meio de linearização em torno de um ponto de operação que, no caso, é indicado pela pressão \bar{P}_c , enquanto que a parcela p_c da pressão total de saída (que alimenta o atuador) indica a flutuação de valor em torno do ponto de operação.

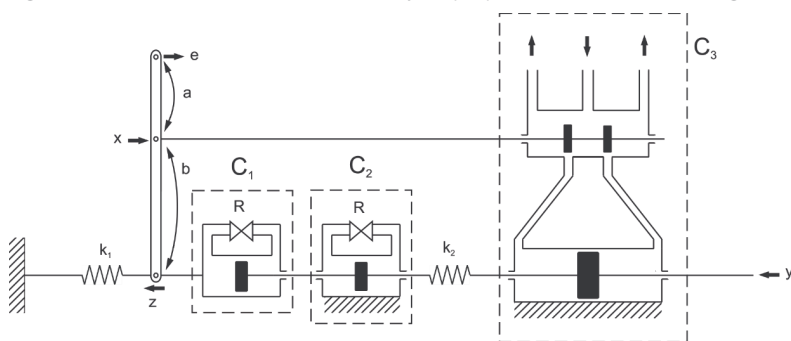
Figura 4.11 | Controlador pneumático com ações proporcional, derivativa e integral



Fonte: Ogata (2010, p. 111).

Em sistemas hidráulicos, um controlador que apresenta as ações de controle proporcional, derivativa e integral é exibido na Figura 4.12. O erro e define a posição superior da haste que, de acordo com sua alavanca, move o eixo da válvula piloto do servomotor. Se a válvula se mover para a direita, o fluxo de óleo sob pressão que entra no servo motor fará com que o cilindro de potência se mova para a esquerda, movimentando consigo todo o eixo do cilindro de potência que moverá a haste para a esquerda, mitigando o movimento que o erro impôs a esta no início. Em conjunto, o controlador C_1 e a mola k_1 , desenvolvem a ação integral de controle e configuram um amortecedor hidráulico. C_2 , por sua vez, desenvolve a ação derivativa; e C_3 , em conjunto com a haste de comprimento $a + b$, desenvolve a ação de controle proporcional.

Figura 4.12 | Controlador hidráulico com ações proporcional, derivativa e integral



Fonte: Ogata (2010, p. 122).



Pesquise mais

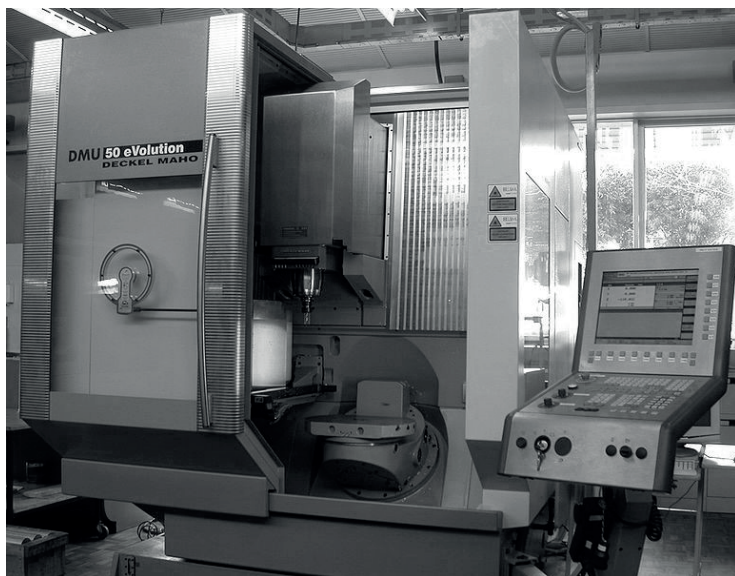
Os sistemas pneumáticos e hidráulicos são tipos de sistemas com comportamento intrinsecamente não lineares, o que torna difícil a obtenção matemática de seus modelos. Para lidar com esses tipos de sistemas, costuma-se linearizá-los em torno do seu ponto (ou estado) de operação. Embora essa técnica acarrete em perda de generalidade, ela traz muitas vantagens em termos de manipulação matemática, como a simulação prévia dos efeitos de utilização do sistema. Veja a referência a seguir para entender melhor como se procede para realizar a linearização desses tipos de sistemas, assim como vantagens e desvantagens de se utilizar cada um deles e, ainda, mais detalhes do funcionamento dos controladores.

O GATA. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010. Cap. 4

Sem medo de errar

Sua tarefa é analisar o controlador de posição que se encontra implementado em uma fresadora (a Figura 4.13 mostra um exemplo de máquina fresadora) para avaliar se ele se encontra dentro das novas especificações de desempenho.

Figura 4.13 | Máquina fresadora



Fonte: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DeckelMaho-DMU50e-MachiningCenter.jpg>>. Acesso em: 31 set. 2017.

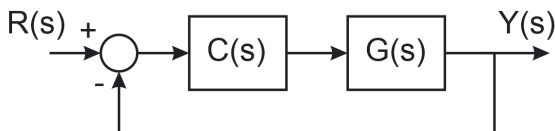
O modelo do sistema dinâmico da fresadora é dado pela Equação, 4.9 e o controlador é dado pela Equação 4.10. Após análise do tempo de fabricação de uma peça na fresadora, percebeu-se que esse tempo deve ser diminuído, pois, atualmente, o processo de fabricação precisa ser mais ágil para atender às demandas de entrega do produto, ou seja, a máquina tem que ser capaz de responder de maneira mais rápida aos comandos de posicionamento da ferramenta. De acordo com a nova necessidade de agilizar o processo e com estudos do que deve ser alterado para atender a essa demanda, decidiu-se que o tempo de acomodação do sistema não deveria ser maior que 10 segundos. Para não ter perigo de o erro de posição ser grande o suficiente para piorar a qualidade final das peças, o valor máximo de sobressinal foi definido como sendo de 10% o tempo de acomodação. Embora estes valores pareçam elevados, devemos lembrar que a inércia do sistema como um todo é muito grande. Na prática, o sistema nunca receberia um sinal com alteração tão brusca como é o exemplo da entrada degrau, mas se o sistema se comportar de acordo com as especificações desejadas para a entrada degrau, então, estarão satisfeitas as necessidades do projeto.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.9)$$

$$C(s) = 4,622 \left(\frac{1}{12s} + 1 \right) \quad (4.10)$$

O sistema funciona como mostrado no diagrama de blocos da Figura 4.14.

Figura 4.14 | Diagrama de blocos do sistema de posição da fresa



Fonte: elaborada pelo autor.

A função de transferência do sistema é mostrada na Equação 4.11.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{110,9s + 9,244}{12s^4 + 72s^3 + 60s^2 + 110,9s + 9,244} \quad (4.11)$$

Obtendo as informações da resposta do sistema com o controlador a entrada degrau utilizando o MATLAB, vemos que o tempo de acomodação é de 13,9 segundos e o sobressinal é de 55,8%. O controlador utilizado possui uma ação proporcional ($K_p = 4,622$) somada a uma ação integral $\left(\frac{1}{2,596s} \right)$.

Como o controlador utilizado até então não atende às novas especificações de desempenho, é necessário que seus ganhos sejam reajustados, ou mesmo que o controlador seja substituído.

Avançando na prática

Controle de posição da porta de um forno

Descrição da situação-problema

Uma empresa de pintura eletrostática tem sua linha de produção totalmente automatizada. As peças são penduradas em um trilho suspenso que as levam por toda a linha para passar pelos estágios do processo: limpeza, pintura e secagem. Para a secagem da tinta, são utilizados fornos montados sobre a linha (Figura 4.15) de modo que, ao saírem do forno, as peças estejam prontas para serem entregues.

Figura 4.15 | Forno utilizado no processo



Fonte: <http://www.solucoesindustriais.com.br/images/produtos/imagens_10112/p_filtros-para-estufa-de-pintura-20.jpg>. Acesso em: 5 set. 2017.

Você recebe um telefonema do proprietário da empresa pedindo-lhe para averiguar o problema que apareceu: a empresa está tendo um grande aumento de gasto com energia e as peças não estão saindo secas do forno. Sabe-se que o controle de temperatura, em malha fechada, é composto pelas ações proporcional, derivativa e integral, sendo que cada ação é executada por uma placa de circuito independente. O sintoma é: embora o técnico responsável pelo equipamento tenha aumentado o ganho do controlador, ainda assim, há defasagem entre o valor observado e o valor desejado.

O que pode ter acontecido?

Resolução da situação-problema

Como os circuitos responsáveis por cada ação de controle estão montados em placas independentes, podemos começar a análise supondo que o possível mau funcionamento da placa de uma das ações não influencie o mau funcionamento da outra ação de controle.

O proprietário da empresa informou que o sintoma do problema é a não eliminação do erro de regime permanente do sistema de

aquecimento do forno, ou seja, a temperatura objetivo para o bom processo de cura da tinta não é atingida.

Sabemos que as ações de controle responsáveis pela mitigação e eliminação do erro de regime permanente são, respectivamente, as ações proporcional e integral, mas o proprietário também informou que embora o técnico responsável pelo equipamento ter aumentado o ganho do controlador causou uma aproximação da temperatura do forno à temperatura desejada, o erro de regime não foi eliminado. Esse fato nos diz que a placa da ação proporcional está funcionando bem, pois tal comportamento é o esperado para esse tipo de ação.

Por fim, podemos concluir que possivelmente a placa do circuito da ação de controle integral deixou de funcionar adequadamente, pois como há erro de regime, essa ação não está sendo aplicada.

Faça valer a pena

1. Existem ações básicas de controle que podem ser aplicadas nos sistemas dinâmicos que, em geral, são as mais simples de serem implementadas na prática e solucionam uma grande gama de problemas de controle quando bem ajustadas.

Em relação às ações básicas de controle, leia as afirmações a seguir:

I. A ação de controle proporcional corresponde ao fator de ganho do diagrama de Bode.

II. A ação de controle liga-desliga não pode ser utilizada em sistemas pneumáticos, pois não é possível desligar o ar atmosférico.

III. As ações básicas de controle devem ser utilizadas separadamente.

IV. A ação de controle proporcional é pouco utilizada por causa de sua impossibilidade de atuar no erro de regime.

Qual alternativa contém a afirmação verdadeira?

a) I.

b) II.

c) III.

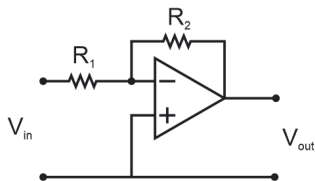
d) IV.

e) Nenhuma afirmativa é verdadeira.

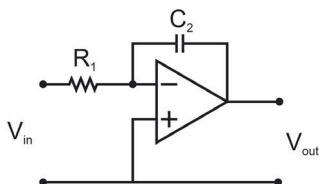
2. Em circuitos elétricos, de posse do conhecimento do comportamento de seus elementos básicos, é relativamente simples criar ações de controle liga-desliga, proporcional, derivativo e integrativo utilizando-se relés, transistores e/ou amplificadores operacionais, também conhecidos como AmpOp.

Relacione os circuitos a seguir às suas respectivas ações de controle.

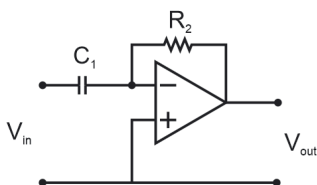
I.



II.



III.



(a). Ação proporcional.

(b). Ação derivativa.

(c). Ação integral.

a) a-I, b-III, c-II.

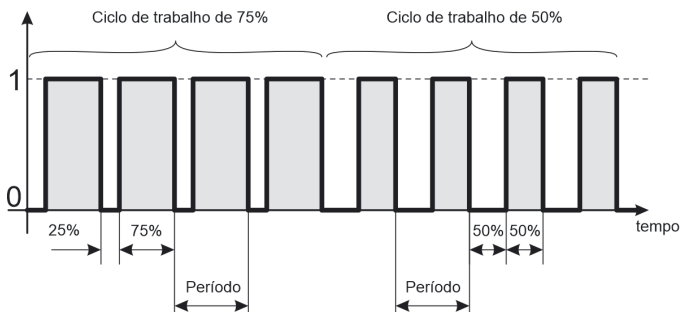
c) a-II, b-III, c-I.

e) a-II, b-I, c-III.

b) a-I, b-II, c-III.

d) a-III, b-II, c-I.

3. Uma técnica muito utilizada para controlar motores elétricos é o *PWM* (do inglês *pulse-width-modulation*, ou modulação por largura de pulso, em português). Nessa técnica, a potência necessária é entregue pelo controle ao sistema por meio de um trem de pulsos, ou seja, por uma onda quadrada, ilustrada a seguir, na qual o valor binário 1 corresponde a ligar e o valor binário 0 corresponde a desligar.



Com esse tipo de técnica, ao utilizar um período de tempo de chaveamento muito menor que a constante de tempo do sistema controlado, o sinal de controle será “assimilado” pelo sistema como uma onda cuja potência é dada de acordo com o ciclo de trabalho.

O *PWM* é gerado, majoritariamente, por um circuito eletrônico de baixa potência, que tem o papel de controlador (circuito I). Seu sinal passa por um outro circuito (circuito II), que faz a interface entre a baixa e a alta potência por meio de amplificação do sinal para controlar, por exemplo, motores trifásicos.

Qual das alternativas caracteriza corretamente os circuitos I e II?

- Circuito I: ação de controle liga-desliga; circuito II: ação de controle proporcional.
- Circuito I: ação de controle liga-integral; circuito II: ação de controle derivativo.
- Circuito I: ação de controle derivativo; circuito II: ação de controle integral.
- Circuito I: ação de controle liga-desliga; circuito II: ação de controle liga-desliga.
- Circuito I: ação de controle proporcional; circuito II: ação de controle proporcional.

Seção 4.2

Controladores PID

Diálogo aberto

Na seção anterior, você conheceu as ações básicas de controle, como a ação proporcional, ação derivativa e ação integral por meio de suas equações e efeitos no lugar das raízes do sistema em malha fechada. Essas três ações constituem controladores muito utilizados na indústria. São elas:

- Controlador P (apenas ação proporcional).
- Controlador PI (ação proporcional e integral).
- Controlador PID (ação proporcional, integral e derivativa).

Esses tipos de controladores se mostram muito importantes, pois mesmo sem conhecimento físico-matemático (modelo dinâmico) do sistema a ser controlado é possível obter um comportamento adequado utilizando-se principalmente o PID.

Nesta seção, estudaremos os efeitos que esses controladores têm nos sistemas dinâmicos utilizando análise temporal e no domínio da frequência. Além disso, veremos como podemos ajustar os parâmetros de controle para obtermos um comportamento desejado na resposta do sistema em malha fechada. Veremos também os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols nos auxiliarão na obtenção dos valores dos parâmetros desses controladores.

Neste contexto, continuaremos com a aplicação dos conhecimentos no problema sobre o qual você é responsável técnico: controle de posição de uma máquina fresadora. Você já percebeu que o controlador atual da máquina não é adequado às novas especificações de resposta no tempo (menos de 10% de sobressinal e 1 minuto de tempo de acomodação). O que pode ser feito em relação ao controlador para adequar a resposta da máquina?

Vamos descobrir! Bons estudos!

Não pode faltar

Na última seção, você conheceu as ações básicas de controle: a proporcional, a derivativa e a integral. Utilizando essas ações, podemos criar controladores vastamente utilizados na indústria, como controladores P (apenas proporcional), PD (proporcional-derivativo), PI (proporcional-integral), PID (proporcional-integrativo-derivativo), PI-D e I-PD (controladores proporcional-integral-derivativo modificados), entre outras possibilidades. Os dispositivos do tipo CLP (controlador lógico programável), por exemplo, geralmente vêm com algoritmo de controle PID pré-implementados, ficando a cargo do usuário ajustar (sintonizar) os parâmetros do controlador. Esse tipo de dispositivo é muito utilizado para controlar motores, por exemplo.

Aqui focaremos nos controladores P, PI e PID, assim como em métodos de sintonia, pois incrementando a complexidade do controlador podemos entender o efeito de cada ação de controle.



Pesquise mais

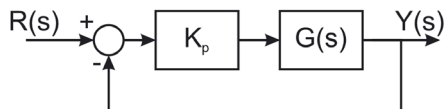
Como já mencionado, existem os controladores PID modificados, como o PI-D e o I-PD, no qual a realimentação não é unitária ou há mais de uma retroalimentação. Esses tipos de controladores são relativamente mais complexos e têm um diagrama de blocos modificado, mas têm vantagens em relação ao esquema PID básico. Siga a referência indicada para obter mais informações sobre os controladores PID modificados.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

Sabemos que a ação de controle P não acrescenta polos nem zeros no sistema em malha fechada. Ele apenas faz com que as raízes do sistema caminhem dos polos para os zeros de malha fechada. Ao utilizar o controlador P, a resposta de um sistema como o da Figura 4.16 a uma entrada degrau apresenta um erro estacionário de regime calculado utilizando-se o teorema do valor final, como mostra a Equação 4.12. O sistema utilizado no exemplo é apresentado na

Figura 4.16, em que $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$.

Figura 4.16 | Sistema de controle em malha fechada com ganho proporcional

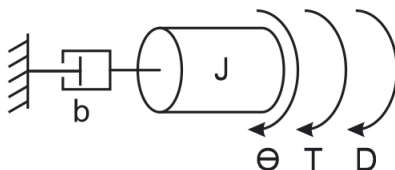


Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 197).

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{K_p}{Ts + 1 + K_p} \right) \\
 &= \frac{1}{1 + K_p}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

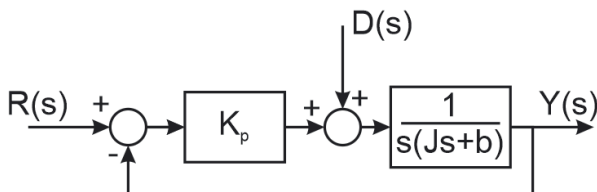
Ainda com o controlador proporcional, vamos ver como ele se comporta com um sistema onde há distúrbios. O exemplo é o da Figura 4.17 que apresenta um sistema rotacional com inércia J e amortecimento viscoso b , cuja entrada é um torque T ; o distúrbio do sistema é o torque D ; e a saída é o ângulo θ . Seu modelo em diagrama de blocos com controlador proporcional é mostrado na Figura 4.18.

Figura 4.17 | Sistema mecânico rotacional



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.18 | Diagrama de blocos do sistema rotacional com distúrbio



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 199).

Pelo teorema do valor final, temos que, com entrada $R(s) = 0$ e o distúrbio sendo uma perturbação em degrau de amplitude α , o sistema apresenta erro de regime permanente de valor $-\frac{\alpha}{K_p}$, como mostra a Equação 4.13.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(0 - \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{1}{Js^2 + bs + K_p} \right) \\
&= -\frac{\alpha}{K_p}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para diminuir o erro, podemos melhorar a resposta desses tipos de sistemas adicionando a ação de controle integral, ou seja, utilizando um controlador PI. O modelo matemático do controlador PI é dado pela Equação 4.14.

$$C_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_p}{T_i s} = \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \tag{4.14}$$

A adição da ação integral de controle ao sistema faz com que sejam adicionados um polo de malha aberta na origem do plano complexo e um zero de malha aberta em $-\frac{1}{T_i}$, em que T_i é o tempo integral da ação de controle integral.

Ao substituirmos o controlador tipo P da Figura 4.16 por um controlador PI, o erro de regime permanente a uma entrada degrau se torna nulo, como pode ser observado na Equação 4.15.

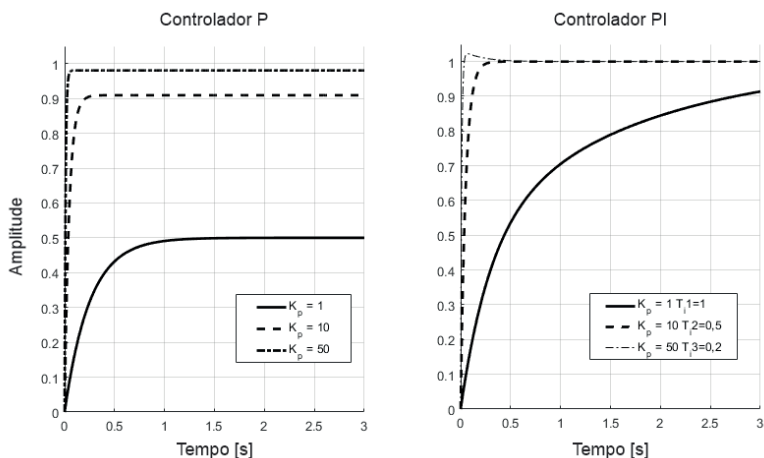
$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i Ts^2 + (T_i + K_p)s + K_p} \right) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_p (T_i s + 1)}{T_i Ts^2 + (1 + K_p)T_i s + K_p} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

O mesmo acontece com o sistema cujo diagrama de blocos se encontra na Figura 4.16. Ao substituir o controlador P (K_p) por um controlador PI, o erro de regime desaparece permanente (Equação 4.16).

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(0 - \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{T_i s}{JT_i s^3 + bT_i s^2 + K_p T_i s + K_p} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A Figura 4.19 mostra as respostas ao degrau de um sistema de primeira ordem $\frac{1}{0,5s + 1}$ em malha fechada (configuração da Figura 4.16) com diferentes configurações de controladores P e PI.

Figura 4.19 | Resposta temporal de um sistema de primeira ordem com controladores P e PI



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que o controlador PI, diferentemente do controlador P, consegue eliminar o erro de regime permanente para a entrada degrau unitário.



Refleta

Para o mesmo sistema dinâmico de primeira ordem, qual é o erro de regime permanente para uma entrada rampa quando utilizamos um controlador P? E com relação a um controlador PI? Qual é a diferença?

O controlador do tipo PID, com a presença das três ações de controle, permite maior poder de manipulação da resposta do sistema por parte do projetista. A vantagem de se utilizar a ação derivativa é que ela torna o sistema mais sensível a variações no erro, atuando, assim, de maneira antecipada sobre o erro, mas também causa aumento no tempo de acomodação do sistema. Veja a Equação 4.17, do controlador PID.

$$C(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s} \quad (4.17)$$

Vemos que o controlador PID adiciona um polo de malha aberta na origem e dois zeros em $\frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_d T_i}}{2}$. Se observarmos as fórmulas das métricas temporais da resposta de um sistema, como o tempo

de subida (t_r , Equação 4.18), o tempo de pico (t_p , Equação 4.19) e o valor do sobressinal (M_p , Equação 4.20), percebemos que, alterando os valores T_d e T_i , juntamente com o ganho K_p , podemos fazer com que a resposta temporal do sistema se aproxime da resposta desejada, de acordo com os requisitos das métricas temporais.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} \quad (4.18)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (4.19)$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (4.20)$$

Uma das maneiras de escolher os valores K_p , T_i e T_d para o controlador PID é utilizar as especificações de desempenho do projeto a ser desenvolvido de modo a limitar os valores aplicáveis aos parâmetros do controlador. De posse do modelo dinâmico do sistema, existem métodos analíticos de alocação de polos nos quais o gráfico do lugar das raízes é utilizado para fazer com que os parâmetros do controlador utilizado forcem as raízes do sistema a aproximarem-se dos resultados desejados.



Pesquise mais

O gráfico do lugar das raízes de um sistema apresenta muitas informações sobre cada um dos polos e zeros. Os métodos analíticos fazem uso dessas informações para alocar estrategicamente os polos e, conseqüentemente, definir os parâmetros do controlador para obter o comportamento desejado. Acompanhe a utilização de métodos analíticos na referência indicada a seguir.

Nise, Norman S. **Engenharia de Controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. p 378 - 380

Por outro lado, é muito comum surgir a tarefa de se controlar um processo ou sistema sem que haja informação sobre o modelo ou não é possível (ou, por motivos financeiros e de tempo necessário) modelar-se o sistema.

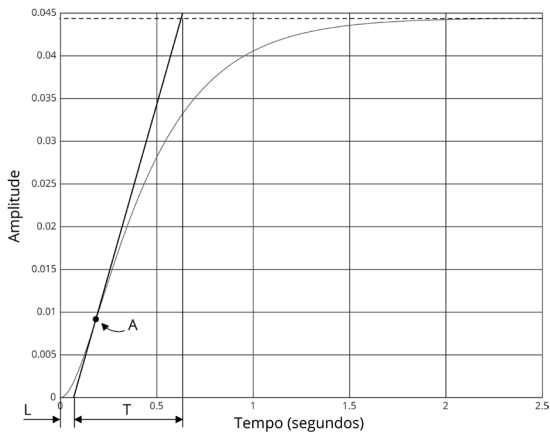
Mesmo para esse caso, existem vários métodos de sintonia de PID. Estudaremos os de Ziegler-Nichols, que são dois métodos de ajuste

de parâmetros que resultam em um trio de valores K_p , T_i e T_d que fornecem uma operação estável para o sistema, mas não garantem quaisquer requisitos de desempenho. Esses métodos devem ser encarados como um valor inicial para os três valores, para aí então, com um sistema estável e, tendo o conhecimento do efeito que o ajuste de cada uma das ações de controle do PID causa, refinar a resposta do sistema para ir ao encontro do comportamento desejado. Um dos métodos baseia-se na resposta do sistema em malha aberta a um degrau. O outro inicia seu processo com o ajuste do ganho proporcional de malha fechada para tornar o sistema marginalmente estável. Aqui apresentaremos o primeiro método, que se aplica a sistemas que respondem à entrada degrau com uma curva que tem um formato em S.

Considere o sistema $G(s)$ (Equação 4.21). Embora conheçamos seu modelo, aplicaremos o método (sem perda de generalidade) a ele. Como dito, devemos impor uma entrada degrau ao sistema e observar sua resposta (Figura 4.20).

$$G(s) = \frac{s + 8}{(s + 3)(s + 6)(s + 10)} \tag{4.21}$$

Figura 4.20 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a resposta em mãos, devemos encontrar o ponto A, que é o ponto de inflexão da curva (ponto qual a segunda derivada da função é nula) e traçar uma reta tangente à curva nesse ponto. A distância horizontal da origem do sistema de coordenadas até o ponto de

cruzamento da reta com o eixo horizontal define a quantidade L que, no caso, vale 0,055 segundos. A distância horizontal entre o ponto de cruzamento da reta com o eixo horizontal e o ponto de cruzamento da reta com o valor de regime permanente define a quantidade T que, no caso, vale 0,6270 segundos. Ambos os valores estão indicados na Figura 4.20. De posse de T e L , recorremos ao quadro de valores indicados (Quadro 4.2) pelo método de Ziegler-Nichols para os valores de K_p , T_i e T_d .

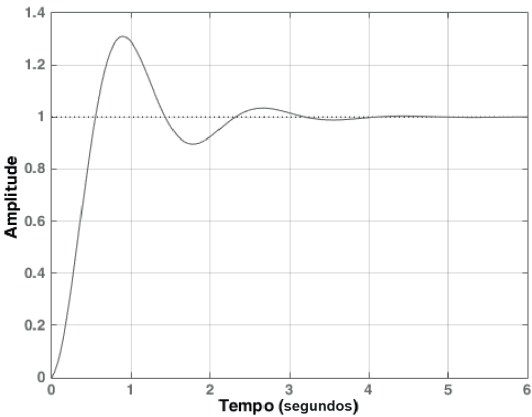
Quadro 4.2 | Valores do método de Ziegler-Nichols para os parâmetros do controlador

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Fonte: Ogata (2010, p. 524).

Perceba que o método de sintonia de controladores não se limita aos do tipo PID, mas também indica valores para os controladores P e PI. Para o sistema da Equação 4.21, de acordo com o método, seu controlador PID é ajustado com $K_p=13,5168$, $T_i=0,1113$ e $T_d=0,0278$. A resposta em malha fechada à entrada degrau desse sistema com o controlador proposto é mostrada na Figura 4.21.

Figura 4.21 | Reposta do sistema controlado após a aplicação do método de Ziegler-Nichols



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, obtemos um sistema com uma resposta estável, com erro de regime permanente nulo, sobressinal de 30,9%, tempo de acomodação de 2,95 segundos e tempo de subida de 0,386 segundos.

Perceba que não utilizamos nenhuma especificação de desempenho para calcularmos os ganhos do controlador, ou seja, não devemos esperar que o fato de sintonizar um controlador usando método de sintonia resolverá um problema de controle. A vantagem que métodos como esse apresentam a garantia de se iniciar o projeto com um controlador pelo menos estável.

O outro método de sintonização inicia-se colocando-se o modelo $G(s)$ em malha fechada com um controlador do tipo P. O ganho do controlador é ajustado até encontrar-se o valor que faz o sistema responder de maneira marginalmente estável à entrada degrau. Esse valor de ganho é denominado ganho crítico (K_{cr}). Observando-se a resposta oscilatória do sistema (em regime permanente), devemos obter o seu período de oscilação, denominado período crítico (P_{cr}). A partir desses dois valores, obtemos os valores dos controladores do tipo P, PI e PID, segundo este método, como mostra o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Cálculo dos parâmetros do controlador

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$
K_{cr} : ganho crítico; P_{cr} : período crítico			

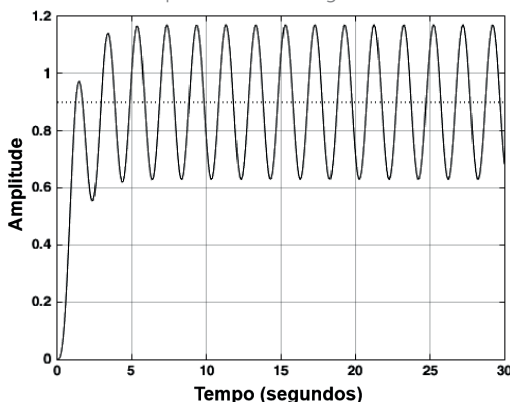
Fonte: Ogata (2010, p. 525).

Para exemplificar, apliquemos o método no sistema da Equação 4.22.

$$G(s)=\frac{1}{s^3+s^2+10s+1} \tag{4.22}$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz (veja o procedimento na Seção 1 da Unidade 3), temos que o ganho crítico para esse sistema é $K_{cr}=9$. A Figura 4.22 mostra que, com esse ganho, o sistema realmente se torna marginalmente estável.

Figura 4.22 | Sistema com comportamento marginalmente estável



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, precisamos calcular o período de oscilação da resposta do sistema. Na Seção 2 da Unidade 3, vimos que se substituímos a variável **s** por $j\omega$, obtemos a função de transferência do sistema em regime permanente. Com isso, podemos calcular a frequência de oscilação do sistema (igualando a equação característica do sistema de malha fechada a zero para calcular seu polo) e, então, encontrar o período de oscilação crítico.

A Equação 4.23 mostra o resultado para a frequência de oscilação.

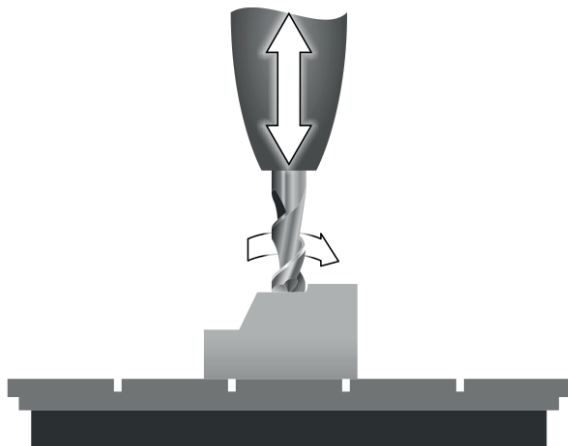
$$\begin{aligned} s^3 + s^2 + 10s + 1 + K_{cr} &= 0 \\ -j\omega^3 + \omega^2 + 10j\omega + 1 + K_{cr} &= 0 \\ (\omega^2 + 10) + j(-\omega^2 + 10\omega) &= 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} -10 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ rad/s} \\ 10 \text{ rad/s} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como o período (em segundos) é dado por $\frac{2\pi}{\omega}$ (com ω em rad/s), temos que $P_{cr} = 3,173$ segundos. Agora, basta substituímos os valores de K_{cr} e P_{cr} no Quadro 4.3 para encontrar os valores do controlador desejado. Se procuramos, por exemplo, apenas um controlador P, então, de acordo com o método, seu ganho deve ser $K_p = 0,5K_{cr} = 4,5$.

Sem medo de errar

Agora, vamos continuar a tarefa iniciada na seção anterior: a análise do controle de posição da fresadora. Como ilustrado na Figura 4.23, esse controlador é responsável pela movimentação vertical.

Figura 4.23 | Ilustração da movimentação estudada



Fonte: elaborada pelo autor.

Vimos que o controlador PI (Equação 4.22), com o ajuste existente, não é adequado às novas necessidades de produção da fresa (modelo na Equação 4.23). Então, você, como responsável pelo projeto de aprimoramento da máquina, deve atualizar o controlador atual, substituindo-o por um controlador que seja adequado.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.22)$$

$$C(s) = 4,622 \left(\frac{1}{12s} + 1 \right) \quad (4.23)$$

Ao analisarmos a resposta do sistema em malha fechada a uma entrada degrau, vemos que o controlador realmente não se adequa às novas especificações de desempenho, pois apresenta sobressinal de 55,8% (sendo que o limite é de 10%) e tempo de acomodação de 13,9s (sendo que o limite é de 10s).

Para iniciar o processo de sintonia de um novo controlador PID, utilizaremos o segundo método de Ziegler-Nichols (pois esse sistema não apresenta saída em formato S para uma entrada degrau), cujo primeiro passo é tornar o sistema marginalmente estável. Para descobrir qual é o ganho que torna o sistema marginalmente estável (ganho crítico), podemos recorrer ao critério de Routh-Hurwitz, sendo que a função de transferência em malha fechada (saída $Y(s)$ por entrada $R(s)$) do sistema com um controlador P é a Equação 4.24.

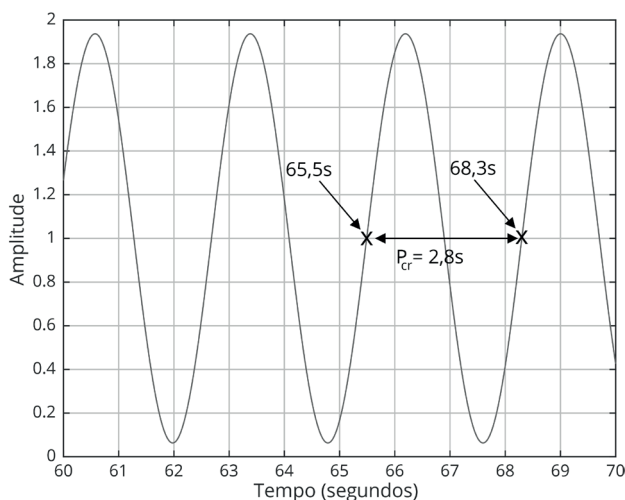
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p}$$

s^3	1	5	0
s^2	6	$2K_p$	0
s^1	$\frac{30 - 2K_p}{6}$	0	
s^0	$2K_p$		

(4.24)

Então, como pelo critério de Routh-Hurwitz todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos para que o sistema seja estável, para que o sistema seja marginalmente estável, basta que um desses elementos seja nulo. Para fazer com que o terceiro elemento seja nulo, K_p deve ser 15. Agora, precisamos encontrar o período crítico, que é o período de oscilação da resposta marginalmente estável em regime permanente. A resposta do sistema com $K_p = 15$ é mostrada na Figura 4.24.

Figura 4.24 | Resposta do sistema em malha fechada com ganho crítico



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a resposta do sistema marginalmente estável (Figura 4.24), o período crítico é $P_{cr} = 2,8s$. Com os valores de ganho e período críticos, recorreremos ao quadro de cálculo dos parâmetros do controlador PID.

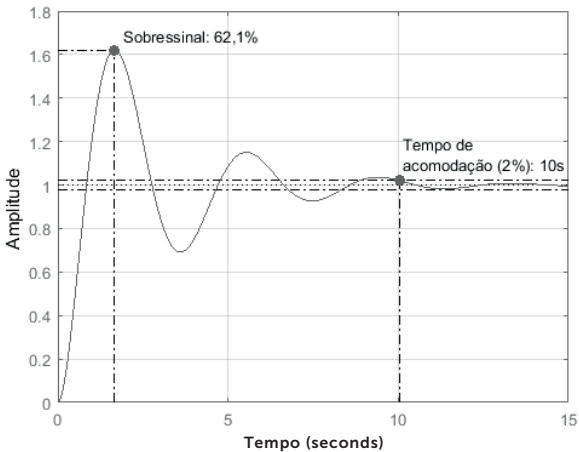
Quadro 4.4 | Tabela de cálculo dos parâmetros do controlador

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$
K_{cr} : ganho crítico; P_{cr} : período crítico			

Fonte: Ogata (2010, p. 525).

De acordo com a última linha do Quadro 4.4, $K_p=9$, $T_i=1,4$ e $T_d=0,35$. Com esses valores temos um novo controlador PID (Equação 4.25), cuja resposta ao degrau unitário é exibida na Figura 4.25.

Figura 4.25 | Reposta do sistema em malha fechada com controlador PID sintonizado



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se que, embora o método tenha levado à obtenção de um controlador PID estável para o sistema com um tempo de acomodação adequado (10 segundos), o sobressinal está em 62,1%, o que é inaceitável para o propósito do projeto, pois o máximo aceito é de 10%. Então, precisamos efetuar ajustes nos parâmetros do PID para que encontremos valores que façam a resposta do sistema adequar-se às necessidades impostas. Podemos, por exemplo, aumentar o

tempo integrativo, pois o sistema demonstra bastante oscilação. Com isso, o alto pico de resposta também deve diminuir. Da maneira que estão os ganhos, aumentar o proporcional fará com que o sistema responda de maneira mais rápida, mas tende a aumentar a oscilação da resposta. O aumento do tempo derivativo é benéfico para o sistema, pois irá agir como um amortecimento, diminuindo tanto a oscilação quanto o pico do sobressinal.

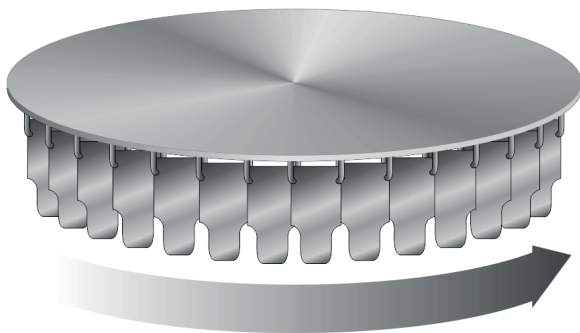
Avançando na prática

Controlador PI para sistema de rotação de peças

Descrição da situação-problema

O modelo do sistema de rotação de grandes peças dentro de um forno industrial de uma empresa de tratamento térmico, ilustrado na Figura 4.26, é mostrado na Equação 4.25.

Figura 4.26 | Ilustração do sistema rotativo



Fonte: elaborada pelo autor.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(10s+1)^2} \quad (4.25)$$

Sua tarefa é obter um controlador para o sistema. Embora ele não apresente erro de regime permanente, é necessário que tenha resposta rápida para que o processo de cura da tinta ocorra de maneira uniforme e haja aumento na velocidade de produção.

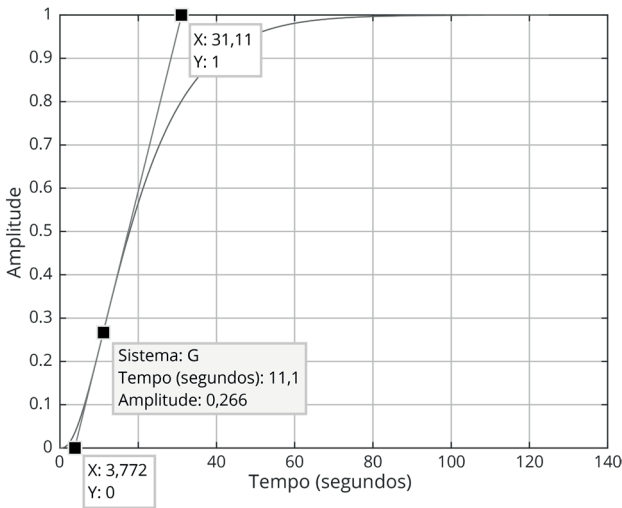
Resolução da situação-problema

Para o caso, como o único problema é o erro de regime, podemos utilizar um controlador PI para o sistema, que é mais simples que um

PID, mas conta com a ação integral, que elimina o erro de regime. No caso em estudo, um simples controlador P não eliminaria o erro de regime em malha fechada. Os controladores PI e PID o fariam. Como a preocupação é sobre o erro de regime e é necessário que o sistema responda mais rapidamente, a ação de controle derivativa pode atrapalhar o objetivo a ser alcançado. Então, escolhe-se utilizar o controlador do tipo PI.

A resposta à entrada degrau é mostrada na Figura 4.27.

Figura 4.27 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Observando a resposta, calcula-se os valores T e L do método de Ziegler-Nichols: T é dado pela distância horizontal entre o mais superior, indicado na Figura 4.27, e o mais inferior, ou seja, $T = 31,11 - 3,772 = 27,338$; e L é dado pela distância do ponto mais inferior à origem. Logo, $L = 3,772 - 0 = 3,772$. Portanto, de acordo com a quando 4.4, temos o controlador PI na Equação 4.26.

$$C_{PI}(s) = 6,523 \left(1 + \frac{1}{12,573s} \right)$$

Faça valer a pena

1. As ações básicas de controle são muito utilizadas na indústria por serem fáceis de implementar e por haver técnicas de sintonia para seus parâmetros, que permitem que seja obtida uma reposta estável de maneira ágil, sem ser necessário que se tenha conhecimento do modelo físico-matemático da planta (ou processo).

Sobre as ações básicas de controle proporcional, integral e derivativo, analise as afirmações a seguir:

I. O ganho do controlador proporcional geralmente é aquele que analisamos no gráfico do lugar das raízes de um modelo dinâmico.

II. O controlador do tipo proporcional-integral só deve ser utilizado quando houver erro de regime.

III. O controlador PID pode ser utilizado e sintonizado mesmo quando não houver conhecimento do modelo dinâmico do sistema a ser controlado.

IV. O controlador PID pode ser sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols da resposta ao degrau, sempre e para qualquer modelo.

Quais afirmações são verdadeiras?

a) Apenas I e II.

b) Apenas II e III.

c) Apenas III e IV.

d) Apenas I e III.

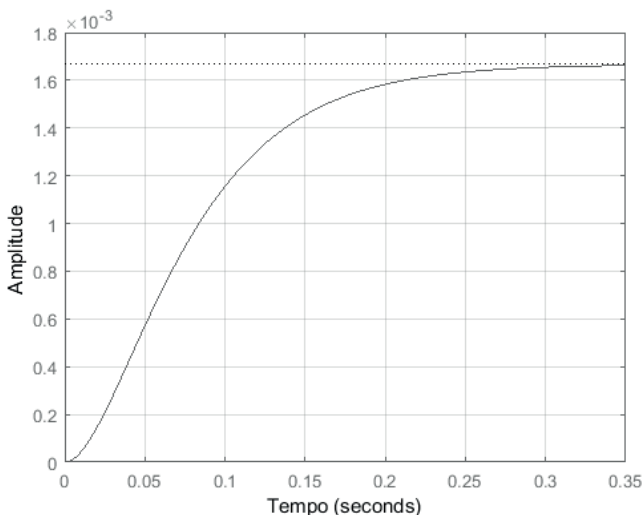
e) Nenhuma afirmação está correta.

2. O controlador PID e os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols são de extrema utilidade quando não se conhece o modelo dinâmico do sistema a ser controlado, mas esse fato não limita sua utilização apenas a esse caso. Mesmo conhecendo-se o modelo do sistema, é possível aplicar esses métodos.

Considere o sistema dinâmico a seguir.

$$G(s) = \frac{1}{(s + 20)(s + 30)}$$

Que tem a seguinte resposta em malha aberta à entrada degrau:



Qual das alternativas a seguir apresenta, de forma sucinta, um método de sintonia de um controlador PID para o sistema?

- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto de inflexão. Obtém-se a distância horizontal L (da origem até o cruzamento da reta com o eixo horizontal) e a distância horizontal T (do cruzamento da reta com eixo horizontal até o cruzamento da reta tangente com o valor de resposta de regime permanente). Usa-se L e T para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto de inflexão. Obtém-se a distância horizontal L (da origem do eixo do tempo até o ponto de inflexão da curva) e a distância horizontal T (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto de inflexão da curva). Usa-se L e T para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal L (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal T (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto crítico da curva). Usa-se L e T para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.
- Traça-se uma reta perpendicular à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal L (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal T (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto crítico da curva). Usa-se L e T para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.

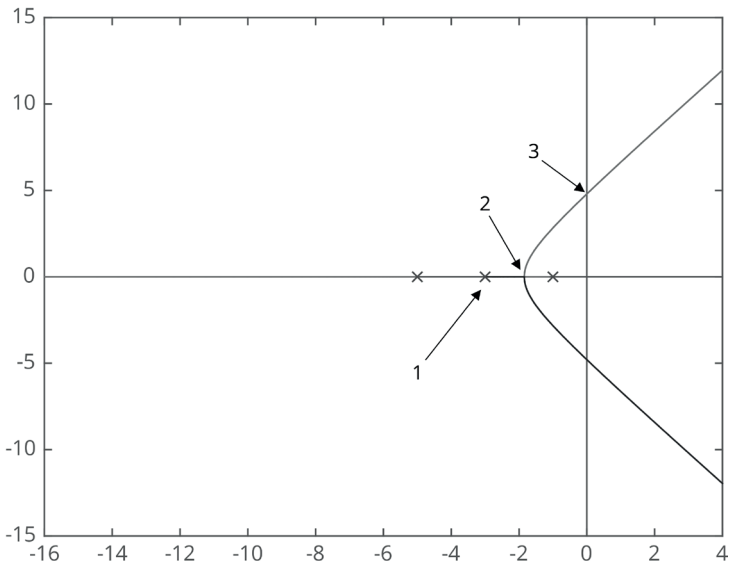
e) Traça-se uma reta tangente à curva da resposta no seu ponto crítico. Obtém-se a distância horizontal L (da origem do eixo do tempo até o ponto crítico da curva) e a distância horizontal T (do ponto em que a reta cruza o eixo do tempo até o ponto crítico da curva). Usa-se L e T para encontrar os parâmetros do controlador de acordo com a tabela de valores do método.

3. Um dos métodos de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID começa com a aplicação de um controlador P ao modelo. Encontra-se o ganho de malha fechada que faz com que o sistema responda de maneira marginalmente estável. Esse ganho será chamado K_{cr} e o período de oscilação do sistema será P_{cr} . Então, de posse desses valores, recorre-se à tabela de cálculo dos parâmetros do controlador.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5P_{cr}$	∞	0
PI	$0,42K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Fonte: Ogata (2010, p. 525).

Suponha que já tenha sido obtido o gráfico do lugar das raízes do sistema, ao qual será aplicado o método descrito para a sintonia de controladores (eixo horizontal é real e eixo vertical é imaginário).



Qual das alternativas indica o ponto correto do ganho a ser utilizado no método?

- a) Ponto 1.
- b) Ponto 2.
- c) Ponto 3.
- d) Qualquer valor de ganho que faça o polo do sistema ficar após o ponto 3.
- e) É necessário observar a resposta temporal do sistema para aplicar o método.

Seção 4.3

Problemas práticos sobre resposta transitória e controladores PID

Diálogo aberto

Nesta última unidade, você teve contato com as ações básicas de controle (proporcional (P), integral (I) e derivativo (D)). Você também aprendeu sobre os controladores formados a partir dessas ações básicas (P, PI e PID) e aprendeu a sintonizá-los de acordo com o método de Ziegler-Nichols, que tem a propriedade de ser utilizado sem que haja conhecimento da função transferência da planta (ou processo) a ser controlada.

Nesta seção, você aplicará o método já aprendido utilizando o MATLAB e também conhecerá uma poderosa ferramenta que o auxiliará no projeto de controladores: *Control and Estimation Tools Manager* (gerenciador de tarefas de controle e estimação), também conhecida como *sisotool*.

Com essa ferramenta, veremos como é possível utilizar sintonizador automático de controladores P, PI e PID, alterar o ganho de controladores diretamente no gráfico do lugar das raízes ou no diagrama de Bode e observar o efeito causado por essa mudança em tempo real no gráfico de resposta do sistema. Será possível editar o gráfico do lugar das raízes adicionando ou retirando polos e zeros do controlador.

Ao final, aplicaremos esses novos conhecimentos à sua tarefa de atualizar o controlador da máquina de fresar para que esta torne-se adequada às novas necessidades do processo de fabricação de sua linha de produção.

Para encerrar esta última unidade com chave de ouro, bons estudos e mãos à obra!

Não pode faltar

Na seção anterior, conhecemos os métodos de Ziegler–Nichols para sintonização de controladores PID. Um dos métodos é iniciado em malha aberta, que depende da resposta da planta em forma de S a uma entrada degrau, e o outro é iniciado em malha fechada com controlador proporcional, que torna o sistema marginalmente estável.

Com o auxílio do MATLAB, podemos aplicar ambos os métodos de maneira mais precisa do que apenas observar os gráficos e obtermos valores de maneira visual. Primeiramente, de acordo com o método de malha aberta, vamos encontrar um controlador PID para o sistema da Equação 4.27.

$$G(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)^2} \quad (4.27)$$

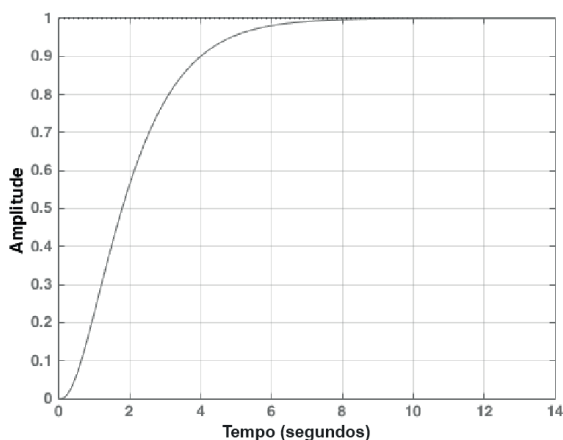
Ao submeter o sistema da Equação 4.27 a uma entrada degrau, de acordo com o Quadro 4.5 obtemos a Figura 4.27.

Quadro 4.5 | Obtenção da resposta do sistema à entrada degrau

1	>> s = tf('s');
2	>> G = 10 / ((s+10) * (s+1)^2);
3	>> step(G);

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.27 | Resposta à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

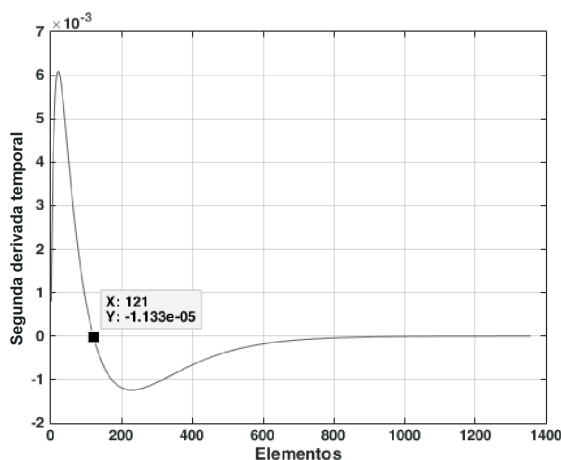
De acordo com o método, precisamos encontrar o ponto de inflexão do gráfico da resposta. Para isso, precisamos obter o vetor da resposta. Isso pode ser feito utilizando o comando `step`, de acordo com a linha 4 do Quadro 4.6. Depois disso, geramos o gráfico da segunda derivada temporal da resposta para encontrarmos o ponto de inflexão, que é definido como o ponto onde a segunda derivada temporal da curva é nula, como mostram o Quadro 4.6 e a Figura 4.28.

Quadro 4.6 | Obtenção da resposta do sistema à entrada degrau

4	<code>>> [resposta, tempo] = step(G);</code>
5	<code>>> derivada2 = diff(resposta,2) / (tempo(2)-tempo(1));</code>
6	<code>>> plot(derivada2);</code>
7	<code>>> xlabel('Elementos');</code>
8	<code>>> ylabel('2^a derivada temporal');</code>
9	<code>>> grid;</code>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.28 | Segunda derivada da resposta temporal



Fonte: elaborada pelo autor.

Para obtermos o valor mais próximo de aceleração nula, utilizamos a ferramenta *Data Cursor* (ícone de cursor) da barra de ferramentas da janela do gráfico gerado. Perceba que o eixo horizontal da Figura 4.23 não corresponde ao tempo, mas sim aos elementos do vetor (ou *array*) *derivada2*. Então, com o *Data Cursor*, vemos que a menor aceleração em módulo é o 121º elemento do vetor *derivada2*. Logo, como o vetor *tempo* é coerente com o vetor *derivada2*, podemos concluir que o ponto de

inflexão ocorre no tempo relativo ao 121º elemento do vetor tempo, cujo valor de 1,105 segundos é obtido no Quadro 4.7 juntamente com a resposta do sistema, cujo valor é 0,266.

Quadro 4.7 | Tempo do ponto de inflexão

10	>> tempo(121)
	ans =
	1.105240844637117
11	>> resposta(121)
	ans =
	0.266312676507214

Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, precisamos traçar uma reta tangente à curva no seu ponto de inflexão. Sabemos que a equação da reta é da forma $y = a \times t + b$, sendo que a é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear. O valor de a será o valor da derivada da temporal da resposta no ponto de inflexão (linha 13 do Quadro 4.8). O valor de b será obtido substituindo-se os valores de tempo do ponto de inflexão t_{inf} e da resposta y_{inf} na equação da reta, de acordo com a Equação 4.28, que corresponde à linha 14 do Quadro 4.8.

$$y_{inf} = a \times t_{inf} + b \Rightarrow b = y_{inf} - a \times t_{inf} \quad (4.28)$$

Quadro 4.8 | Cálculo dos coeficientes angular e linear

12	>> derivada1 = diff(resposta,1) / (tempo(2)-tempo(1));
13	>> a = derivada1(121);
14	>> b = resposta(121)-a*tempo(121);

Fonte: elaborado pelo autor.



Reflita

O comando `diff`, quando aplicado a um vetor de valores, realiza a subtração entre dois elementos consecutivos. Por exemplo, se temos um vetor `a=[1,3,10,33]`, o comando `diff(a)` retornará o vetor `[2, 7, 23]`, que é resultado das subtrações dos elementos de `a`, respectivamente: 3-1, 10-3 e 33-10.

Na linha 12 do Quadro 4.8 foi utilizado o comando diff dividindo-o pela subtração de dois elementos consecutivos do vetor temporal para se obter a derivada do vetor resposta. Matematicamente, qual é o sentido de se dividir o resultado do comando diff pela subtração dos dois elementos consecutivos do vetor tempo?

Com a equação da reta tangente definida, precisamos calcular em quais tempos a reta cruza a resposta de regime permanente (no caso, 1), como mostra a Equação 4.29, e o eixo do tempo, como mostra a Equação 4.30.

$$1 = a \times t_1 + b \Rightarrow t_1 = \frac{1-b}{a} \quad (4.29)$$

$$0 = a \times t_0 + b \Rightarrow t_0 = -\frac{b}{a} \quad (4.30)$$

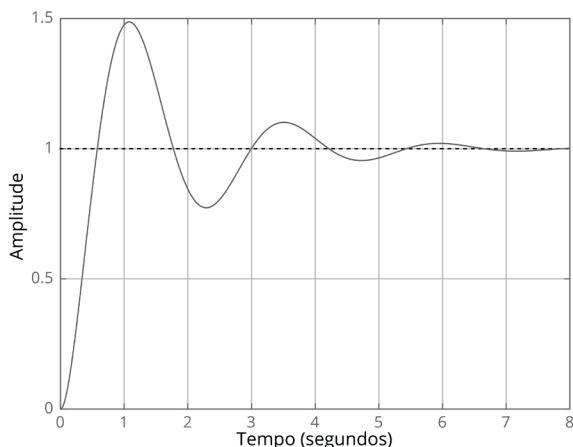
Dessa maneira, $t_1 = 3,111 \text{ s}$ e $t_0 = 0,377 \text{ s}$. Então, podemos calcular os parâmetros T e L do método de Ziegler-Nichols de malha aberta: $T = t_1 - t_0 = 2,734 \text{ s}$ e $L = t_0 - 0 = 0,377 \text{ s}$. De acordo com a Tabela 4.2 (Seção 2 desta quarta unidade), temos os valores $K_p = 8,698$, $T_i = 0,754$ e $T_d = 0,188$. Utilizando o sistema da Equação 4.27 em malha fechada com o controlador PID encontrado, obtemos a resposta ao degrau como indicado no Quadro 4.9, que exibe o gráfico da Figura 4.29 e apresenta sobressinal de 48,6%, tempo de subida de 0,400 segundos e tempo de acomodamento de 6,025 segundos.

Quadro 4.9 | Aplicação do controlador encontrado de acordo com o método de Ziegler-Nichols

15	>> t1 = (1-b) / a;
16	>> t0 = -b/a;
17	>> T = t1 - t0;
18	>> L = t0 - 0;
19	>> Kp = 1.2*t/L; Ti = 2*L; Td = 0.5*L;
20	>> PID = Kp*(1+Td*s+1/(Ti*s));
21	>> step(feedback(PID*G,1));

Fonte: elaborado pelo autor.

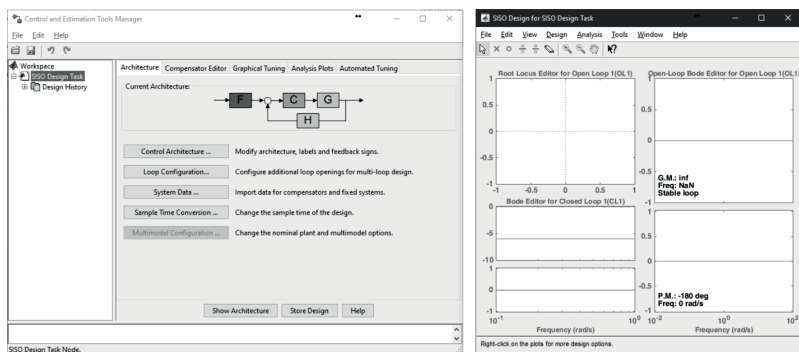
Figura 4.29 | Resposta do sistema submetido ao controlador PID



Fonte: elaborada pelo autor.

No MATLAB, ao invés de aplicarmos manualmente esse método de sintonia de controlador PID, podemos projetar e modelar nosso PID (ou outro controlador qualquer) com o comando `sisotool` para utilizarmos a ferramenta *SISO Design* (projeto de sistema de uma entrada e uma saída). Ao entrarmos com o comando, as janelas da ferramenta são apresentadas, como mostrado na Figura 4.30 (é importante ressaltar que foi utilizada a versão R2015a do MATLAB, pois versões mais novas podem sofrer alterações).

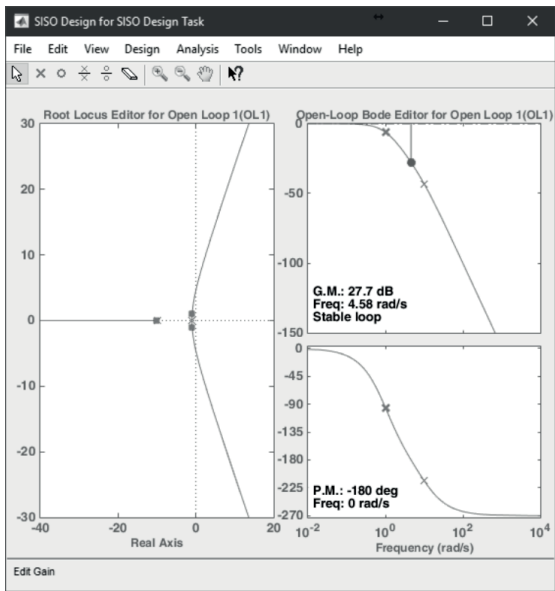
Figura 4.30 | Ferramenta SISO Design do MATLAB



Fonte: adaptada de Matlab (2015).

A malha de controle padrão considerada é exibida na janela *Control and Estimation Tool Manager* (ferramenta de gerenciamento de controle e estimação), e podemos ver que essa é aplicável ao nosso problema. Caso deseje utilizar uma malha diferente, você pode escolher dentre as opções disponíveis em "*Control Architecture ...*" (arquitetura do controle) e até customizar a malha que está sendo utilizada. Agora, vamos importar nosso sistema ($G(s)$, Equação 2.47): basta clicar em "*System Data...*" (dados do sistema) selecionar o bloco G da lista que aparece; clicar em "*Browse ...*" (navegar); selecionar a variável G , que representa o nosso sistema dinâmico e já tínhamos inserido no MATLAB previamente; e então clicar em "*Import*" (importar). Deixe os blocos C , H e F com valor 1, pois não há nenhum sistema influenciando a entrada da nossa malha fechada (logo $F=1$), não estamos aplicando nenhum controle ($C=1$) e nossa retroalimentação é unitária (logo $H=1$). Ao fecharmos a janela que usamos para fazer a importação e clicarmos em "OK" na janela *System Data*, a janela *SISO Design for SISO Design Task* (projeto de sistema SISO para tarefa de projeto de sistema SISO) é atualizada com gráficos do sistema e controlador que importamos.

Figura 4.31 | Ferramenta SISO Design do MATLAB



Fonte: adaptada de MATLAB (2015).


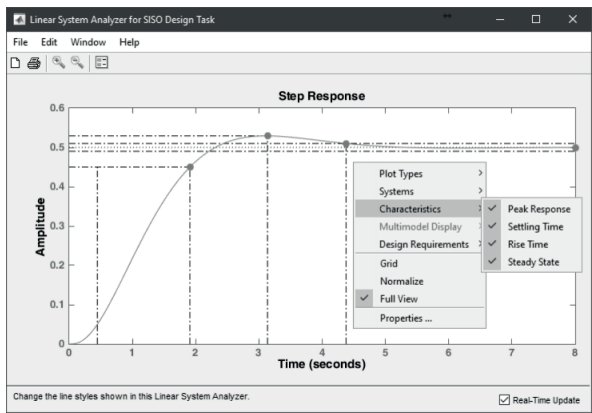
Na Figura 4.26, à esquerda, vemos o lugar das raízes do sistema, sendo que os polos (e zeros, se existissem) são indicados em azul. À direita, vemos seu diagrama de Bode com o gráfico da magnitude acima e da fase abaixo, que indica a margem de ganho (ponto amarelo e G. M. na magnitude) e a margem de fase (ponto amarelo – caso houvesse – e P.M. na fase). No lugar das raízes, os pontos magentas representam as raízes do sistema para o ganho atual que, no caso, é unitário. Com a ferramenta seta , podemos arrastar os pontos magentas ao longo do lugar das raízes, alterando o ganho (que era unitário). Isso é equivalente a arrastar o gráfico da magnitude do diagrama de Bode. Enquanto realizamos essa operação, no canto inferior esquerdo da janela é indicada a localização da raiz concomitante à movimentação. É possível observarmos os efeitos da alteração do ganho para a resposta à entrada degrau. Para tal, dentro do menu superior, devemos clicar em “Analyze” (análise), e então em “Response to Step Command” (resposta ao comando degrau), e a janela *Linear System Analyzer for SISO Design Task* aparecerá. Para observar as métricas de resposta temporal diretamente no gráfico, basta clicar com o botão direito sobre ele e escolhê-las: *peak response* (sobressinal), *settling time* (tempo de acomodação de 2%), *rise time* (tempo de subida) e *steady state* (valor de regime permanente). As métricas temporais são indicadas diretamente no gráfico, como mostra a Figura 4.27.

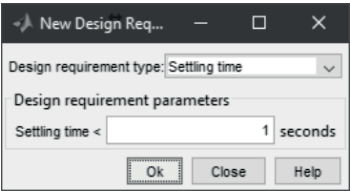
Figura 4.32 | Resposta à entrada degrau exibida pela ferramenta de projeto SISO



Fonte: MATLAB (2015).

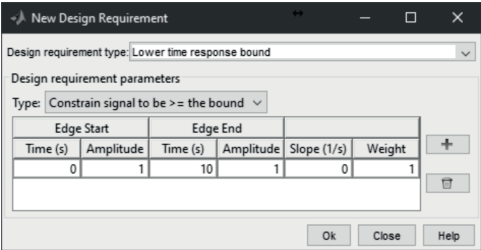
Quando estamos projetando um controlador para um sistema dinâmico, é comum termos que levar em consideração as especificações de desempenho necessárias para o funcionamento adequado do sistema controlado. Para essa finalidade, podemos inserir as especificações tanto no gráfico do lugar das raízes quanto na própria resposta ao degrau. Basta clicarmos com o botão direito sobre o gráfico, e então em “Design Requirements” e “New”. No lugar das raízes, abrir-se-á uma pequena janela (Figura 4.28), que nos permite inserir especificações relacionadas ao *settling time* (tempo de acomodação), *percent overshoot* (sobressinal percentual), *damping ratio* (fator de amortecimento), *natural frequency* (frequência natural) e *region of interest* (região de interesse). No gráfico da resposta à entrada degrau, a janela que se abre (Figura 4.29) permite que adicionemos especificações de três maneiras diferentes: “*Step response bound*” (limite de resposta ao degrau), na qual preenchemos valores de tempo de subida, tempo de acomodação, valor de sobressinal etc., e “*Upper time response bound*” (limite superior de resposta temporal) e “*Lower time response bound*” (limite inferior de resposta temporal), nos quais podemos definir limites superiores e inferiores, respectivamente, para a resposta temporal de maneira customizada.

Figura 4.33 | Janela de especificação das restrições de resposta temporal no gráfico do lugar das raízes



Fonte: MATLAB (2015).

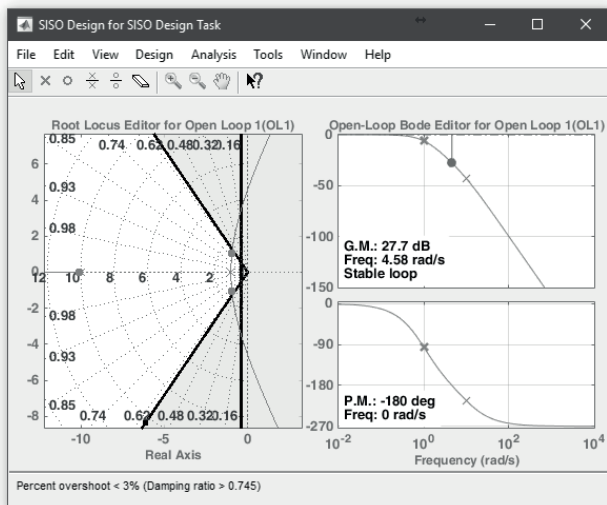
Figura 4.34 | Janela de especificação das restrições de resposta temporal no gráfico de resposta ao degrau



Fonte: MATLAB (2015).

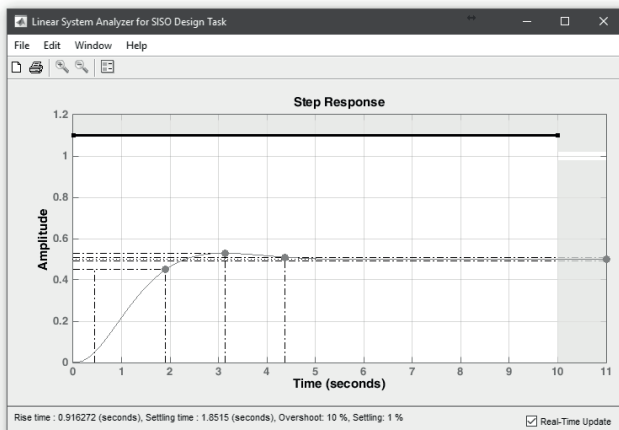
Adicionemos as seguintes restrições no gráfico do lugar das raízes e na resposta ao degrau: sobressinal máximo de 10% e tempo de acomodação de até 10 segundos, além do erro de regime nulo. Então o gráfico do lugar das raízes fica como mostra a Figura 4.35, e o gráfico da resposta ao degrau fica de acordo com a Figura 4.36.

Figura 4.35 | Representação das restrições de desempenho no gráfico do lugar das raízes



Fonte: MATLAB (2015).

Figura 4.36 | Representação das restrições de desempenho na resposta ao degrau



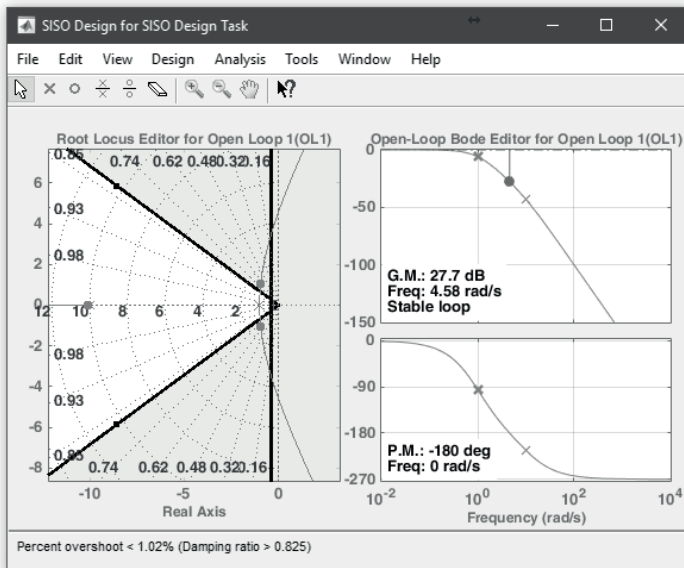
Fonte: MATLAB (2015).



Exemplificando






Após adicionarmos as especificações de desempenho, podemos editá-las clicando com o botão direito sobre elas e selecionando “Edit...” ou excluí-las, selecionando “Delete”. Podemos ainda editá-las graficamente tanto no gráfico do lugar das raízes quanto no gráfico da resposta temporal simplesmente arrastando as linhas que são suas representações gráficas. Por exemplo, a partir da Figura 4.35, ao arrastarmos as linhas que representam o sobressinal especificado de modo a deixar mais estrita a faixa de valores aceitáveis, obtemos o que é exibido na Figura 4.37, na qual a restrição de sobressinal foi editada graficamente para ser aproximadamente 1%.

Figura 4.37 | Especificação de desempenho alterada graficamente



Fonte: MATLAB (2015).

O sistema em malha fechada e sem controlador (ou com um controlador de ganho proporcional unitário) não é adequado, pois não apresenta erro de regime permanente nulo, como mostra o gráfico da Figura 4.36, e variação do ganho não fará com que o sistema responda satisfatoriamente, pois sabemos que o controlador proporcional sozinho não elimina o erro de regime permanente. Logo,

é necessário modificar o controlador. Vamos propor um controlador PI para executar a tarefa. O controlador PI tem um zero real e um polo na origem. Podemos adicioná-los utilizando as ferramentas de edição do gráfico do lugar das raízes que podem ser encontradas na parte superior da janela (Figura 4.35):  adiciona um polo real,  adiciona um zero real,  adiciona um par de polos complexos conjugados,  adiciona um par de polos complexos conjugados e  pode ser utilizado para apagar zeros ou polos do gráfico, clicando-se em cada um deles.

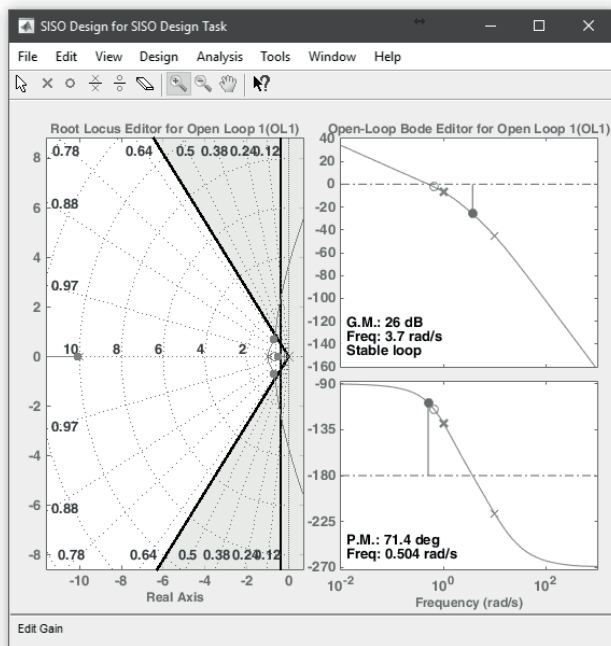


Assimile

A adição, exclusão ou edição (movimentar com o mouse) de polos e zeros do gráfico de lugar das raízes apenas afeta o controlador ($C(s)$), e não a planta ($G(s)$).

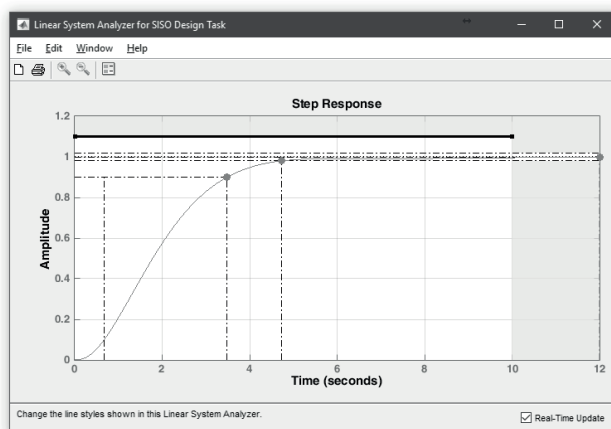
Após adicionar os polos ou zeros, podemos movê-los pelo plano (respeitando o fato de eles serem complexos ou reais), assim como podemos mover as raízes ao longo gráfico (alterando o ganho proporcional). Experimentando os posicionamentos para o único zero do controlador PI, podemos perceber que a localização $-0,65 + 0 \cdot i$ no plano complexo para o zero juntamente com um ganho proporcional de **0,5** atendem às especificações de desempenho impostas (10% de máximo sobressinal e 10 segundos de tempo de acomodação). Os valores exatos do controlador podem ser observados e editados numericamente clicando-se com o botão direito no gráfico do lugar das raízes e escolhendo-se "*Edit Compensator...*" (editar compensador). As Figuras 4.38 e 4.39 apresentam o resultado do controlador PI projetado no lugar das raízes e na resposta à entrada degrau, respectivamente. Obtemos sobressinal e erro de regime permanente nulos e tempo de acomodação de 4,74 segundos, que são adequados aos requisitos propostos.

Figura 4.38 | Lugar das raízes resultante com o controlador PI projetado



Fonte: MATLAB (2015).

Figura 4.39 | Resposta à entrada degrau com o controlador PI projetado

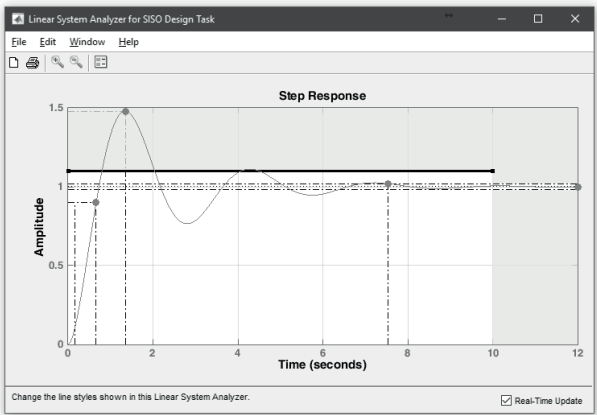


Fonte: MATLAB (2015).

Dependendo do sistema dinâmico com o qual estamos trabalhando pode ser trabalhoso obter um controlador que seja estável para o sistema. Nesses casos, pode ser interessante iniciar o projeto do controlador com métodos conhecidos de sintonia de controladores. Essa ferramenta do MATLAB disponibiliza alguns métodos automatizados de sintonia de controladores. Podemos acessá-los clicando em “Tools” (ferramentas) e em “Automated Tuning...” (sintonia automatizada) no menu superior, que está representado na Figura 4.38. A janela que aparece permite-nos utilizar vários métodos além do “PID Tuning”, mas aqui focaremos apenas neste. O controlador C exibido é exatamente o controlador que você projetou até o momento. Na lista “Tuning method” (método de sintonia), ao selecionarmos “Classical design formulas” (fórmulas clássicas de projeto), e depois “Ziegler-Nichols step response” (resposta ao degrau de Ziegler–Nichols), podemos selecionar entre os tipos de controladores P, PI, PID e PID com filtro derivativo (“PID with derivative filter”), sendo que foi selecionada a opção PID, e, ao clicarmos em “Update Compensator” (atualizar compensador), o MATLAB aplicará o método de Ziegler-Nichols, que já estudamos, e sobrescreverá nosso controlador. Ao aplicarmos o método, obtemos o controlador da Equação 4.31, e a resposta tem sobressinal de 47,9%, tempo de subida de 0,507 segundos e tempo de acomodamento de 7,54 segundos, como mostra a Figura 4.40.

$$C(s)_{PID \text{ automatizado}} = 7,8695 \frac{(1 + 0,38s)^2}{s} \quad (4.31)$$

Figura 4.39 | Resposta à entrada degrau com o controlador PI projetado

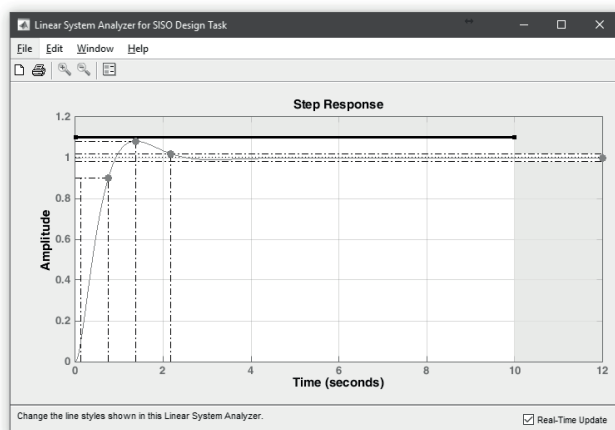


Fonte: MATLAB (2015).

A partir do ganho, zero e polo definidos com a sintonia automática, tendo-se conseguido estabilizar o sistema, o processo de ajuste de localização dos zeros e polos do sistema é simplificado, potencialmente levando a uma resposta que, além de estar dentro das especificações de desempenho, mostra-se muito boa em termos de sobressinal, tempo de acomodação, tempo de subida etc., como podemos ver na Figura 4.41, cuja resposta foi obtida após movermos os zeros e o ganho no lugar das raízes, o que resultou no controlador da Equação 4.32.

$$C_{PID \text{ automatizado ajustado}}(s) = 2,7931 \frac{(1 + 1,5s)(1 + 0,43s)}{s} \quad (4.32)$$

Figura 4.41 | Reposta obtida com controlador PID sintonizado automaticamente e ajustado manualmente



Fonte: MATLAB (2015).



Pesquise mais

O *sisotool* da *Control System Toolbox* do MATLAB é uma ferramenta bastante completa, que facilita grandemente o projeto de controladores para os mais diversos sistemas dinâmicos. Existem muitas possibilidades de uso da ferramenta que não foram exploradas aqui. Veja no site da *MathWorks* mais exemplos relacionados a essa ferramenta.

CONTROL System Designer. **Mathworks**. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ref/controlsystemdesigner-app.html>>. Acesso em: 5 set. 2017.

Sem medo de errar

Você, como projetista responsável pela atualização do controlador PID do sistema de posição da ferramenta da fresadora, já percebeu que o sistema dinâmico da máquina (Equação 4.33) submetido a um PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols (Equação 4.34) atende à especificação de tempo máximo de acomodação (10 segundos), mas tem um sobressinal de 62,1%, que é maior que o máximo permitido (10%).

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} PID(s) &= 9 \left(1 + \frac{1}{1,4s} + 0,35s \right) \\ &= \frac{4,41s^2 + 12,6s + 9}{1,4s} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Utilizando a ferramenta `sisotool`, vamos ajustar o controlador PID para atingirmos o nosso objetivo de fazer o sistema responder de acordo com as restrições impostas. Primeiramente, devemos inserir tanto o sistema $G(s)$ quanto o controlador $PID(s)$ no MATLAB, e então, abrimos o `sisotool`, como mostra o Quadro 4.10.

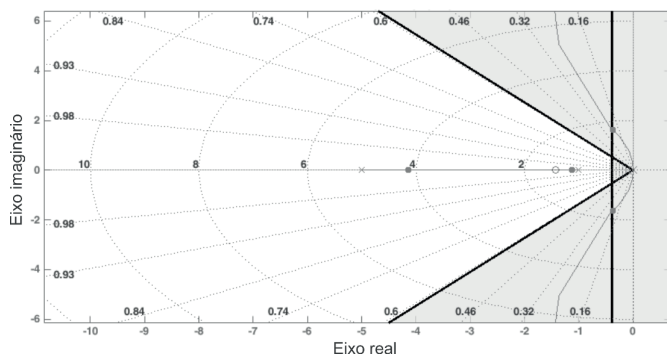
Quadro 4.10 | Inserindo planta e controlador no MATLAB e abrindo `sisotool`

22	>> s = tf('s');
23	>> G = 2/(s*(s+1)*(s+5));
24	>> PID = tf([4.41 12.6 9],[1.4 0]);
25	>> sisotool

Fonte: elaborado pelo autor.

Após aparecer a janela da ferramenta, importamos a planta G para o bloco G e o controlador PID para o bloco C . Logo após, adicionamos as restrições de sobressinal (10%) e de tempo e acomodação (10 segundos) no gráfico do lugar das raízes, que fica como mostra A Figura 4.42.

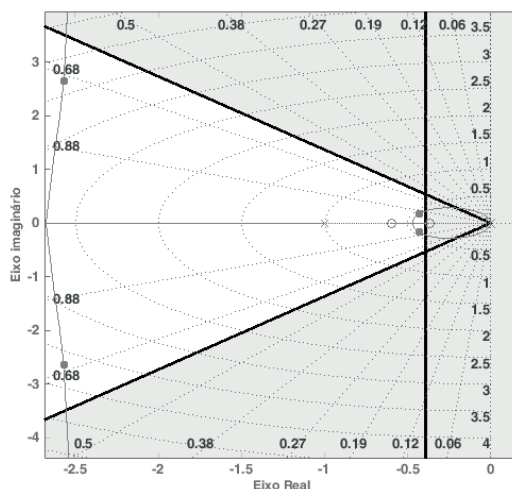
Figura 4.42 | Lugar das raízes com PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols



Fonte: MATLAB (2015).

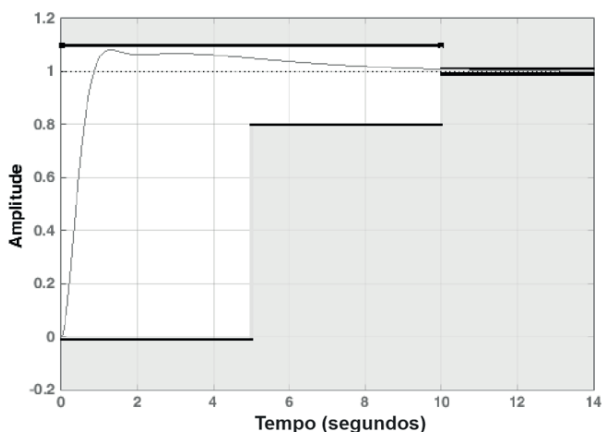
Observando a Figura 4.42, podemos ver que não há ganho proporcional que faça com que as raízes do sistema situem-se na região adequada às restrições impostas. Logo, é necessário ajustar a posição dos zeros do controlador PID sintonizado. Arrastando ambos os zeros para mais próximos da origem, mas antes saírem da região delimitada pela restrição do tempo de acomodação, vemos que podemos fazer com que as raízes do sistema encontrem-se dentro da região de interesse. Por fim, ajustamos o ganho arrastando os pontos magentas observando a curva de resposta à entrada degrau. O gráfico do lugar das raízes é mostrado na Figura 4.43 e a resposta à entrada degrau é exibida na Figura 4.44.

Figura 4.43 | Lugar das raízes do sistema após o ajuste manual do controlador PID



Fonte: MATLAB (2015).

Figura 4.44 | Resposta à entrada degrau com controlador PID ajustado



Fonte: MATLAB (2015).

Por fim, com essas alterações feitas no gráfico do lugar das raízes do sistema obtemos o seguinte controlador PID – que não é o único controlador que é adequado ao projeto – na Equação 4.35.

$$C_{PID}(s) = 1,4579 \cdot \frac{(1 + 1,7s)(1 + 2,7s)}{s} \quad (4.35)$$

Avançando na prática

Melhoria do conforto dos passageiros veiculares com uso de controlador PID

Descrição da situação-problema

O sistema de suspensão de um veículo tem sua função de transferência de acordo com a Equação 4.36, em que $X(s)$ é a saída, ou seja, a posição vertical do modelo simplificado do carro; e $Y(s)$ é a entrada, ou seja, a posição vertical da pista.

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1200s + 23000}{319s^2 + 1200s + 23000} \quad (4.36)$$

Para uma entrada degrau, esse sistema apresenta tempo de acomodação de 1,95 segundos e sobressinal de 54,1%. Esses valores se encontram fora das especificações de desempenho necessárias: tempo de acomodação de 0,5 segundos e sobressinal máximo de 8%. É necessário que seja projetado um controlador que faça com que o sistema responda adequadamente.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, devemos inserir a função de transferência no MATLAB e, então, entrar com o comando `sisotool`.

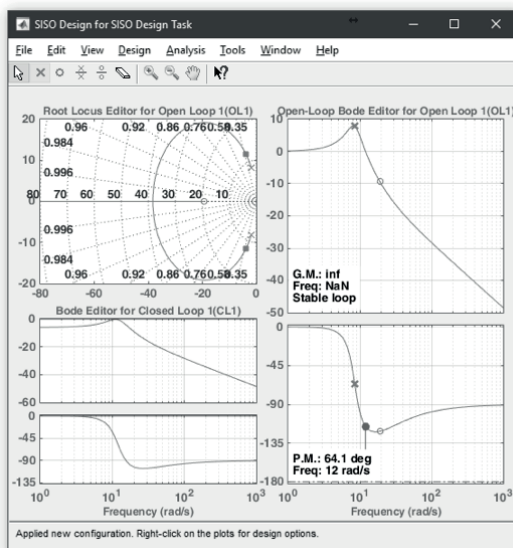
Quadro 4.11 | Inserindo o modelo no MATLAB e abrindo a ferramenta `sisotool`

```
22 >> G = tf([1200 23000],[319 1200 23000]);  
23 >> sisotool
```

Fonte: elaborado pelo autor.

Na ferramenta, precisamos importar nosso sistema para o bloco G da planta. Com isso, já podemos observar seu gráfico do lugar das raízes e o diagrama de Bode, como mostra a Figura 4.45.

Figura 4.45 | Lugar das raízes e diagrama de Bode do sistema da suspensão (`sisotool`)



Fonte: MATLAB (2015).

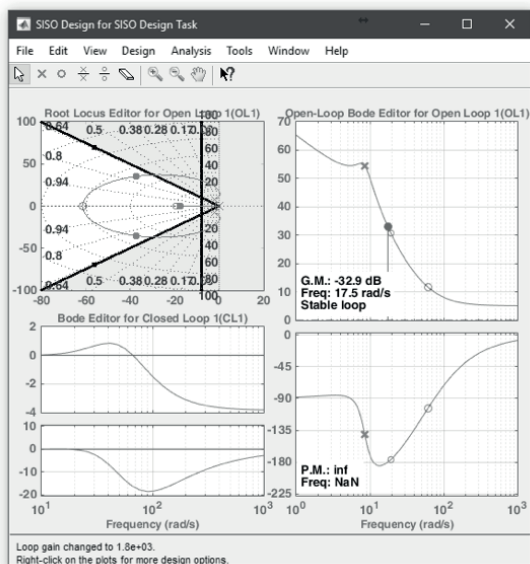
Como primeiro passo, podemos utilizar a sintonia automatizada de PID de acordo com o método de Ziegler-Nichols de malha aberta para obtermos valores iniciais dos parâmetros do controlador. Com isso, obtemos o controlador PID da Equação 4.37.

$$C_{\text{auto PID}}(s) = 213,16 \frac{(1 + 0,016s)^2}{s} \quad (4.37)$$

Inserindo as restrições de máximo sobressinal 8% e tempo de acomodação de 0,5 segundos, podemos observar que, com um ganho maior que 1800, o sistema atende às restrições de desempenho

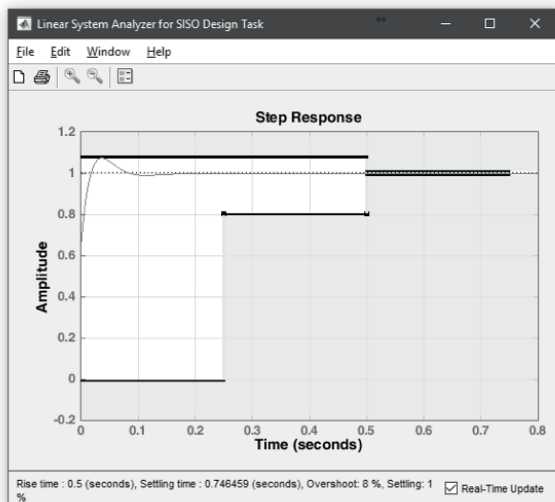
(Figura 4.46), portanto é, sim, possível. Por exemplo, com um ganho de 2000, a resposta do sistema à entrada degrau é apresentada na Figura 4.47.

Figura 4.46 | Sistema com controlador PID automaticamente ajustado



Fonte: MATLAB (2015).

Figura 4.47 | Resposta controlada do sistema de suspensão veicular



Fonte: MATLAB (2015).

Faça valer a pena

1. O MATLAB é um programa de matemática muito utilizado para estudo e simulação de sistemas dinâmicos. Seu ferramental disponível pode ser expandido com a utilização *Control system toolbox*, que apresenta importantes ferramentas, como o *Control and Estimation Tool Manager*, que auxiliam o projetista e facilitam o processo de projeto de controladores. Das alternativas a seguir, qual apresenta uma afirmação verdadeira acerca do comando `sisotool`?

- a) Com o comando `sisotool`, é possível simplificar sistemas complexos para que eles possam ser controlados.
- b) O comando `sisotool` permite manipular sistemas dinâmicos sem ter o conhecimento de seu modelo ou função de transferência.
- c) Com a ferramenta `sisotool`, podemos desenhar qualquer diagrama de blocos que seja necessário.
- d) A ferramenta `sisotool` permite extrair o lugar das raízes de um sistema dinâmico a partir de sua resposta à entrada degrau.
- e) Com o comando `sisotool`, é possível avaliar o sistema dinâmico de diversas maneiras e projetar controladores.

2. Sendo o método de Ziegler-Nichols uma sequência de passos lógicos e de cálculos, a *toolbox* de controle do MATLAB disponibiliza esse e outros métodos de sintonia de controladores. Com apenas um clique, podemos obter um controlador P, PI, ou PID ajustado para a planta ou processo com o qual estamos trabalhando.

Das alternativas a seguir, qual melhor apresenta como poderia ser programado, de maneira resumida, o método de sintonia de controlador PID de Ziegler-Nichols?

- a)
 - 1. Obter a resposta do sistema com o comando `step`.
 - 2. Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.
 - 3. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.
 - 4. Com a equação da reta, obter os valores T e L.
 - 5. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI, ou PID).
- b)
 - 1. Obter a resposta do sistema com o comando `tf`.
 - 2. Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.
 - 3. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.
 - 4. Com a equação da reta, obter os valores T e L.

5. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI, ou PID).

c)

1. Encontrar a equação da reta tangente à curva, que passa pelo ponto de inflexão.

2. Com a equação da reta, obter os valores T e L.

3. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI, ou PID).

d)

1. Obter a resposta do sistema com o comando `impulse`.

2. Encontrar o seu ponto de inflexão com o comando `diff`.

3. Obter os valores T e L.

4. Com os valores T e L, obter os parâmetros do controlador desejado (P, PI, ou PID).

e)

1. Basta utilizar a tabela do método de sintonia de controladores de Ziegler-Nichols para calcular os parâmetros de cada ação de controle desejada.

3. Com a ferramenta `sisotool`, temos a possibilidade de criar qualquer controlador de que precisarmos, com quantos zeros ou polos forem necessários, em qualquer posição do plano complexo simplesmente arrastando-os.

Como podemos criar graficamente um controlador PID qualquer na interface gráfica da ferramenta `sisotool`?

a) Basta importar o controlador pronto utilizando o menu da ferramenta.

b) É necessário utilizar o comando de adicionar polos reais (**×**) para incluir os três polos do controlador.

c) É necessário utilizar o comando de adicionar zeros reais (**○**) para incluir os três zeros do controlador.

d) É necessário utilizar o comando de adicionar polos complexos (**$\frac{\times}{\times}$**) para adicionar um polo complexo para cada ação integral e derivativa, e o comando de adicionar zeros reais (**○**) para adicionar um zero para a ação proporcional.

e) É necessário utilizar o comando **×** para adicionar um polo real na origem o comando de adicionar zeros complexos (**$\frac{o}{o}$**) ou reais (**○**) para adicionar mais dois zeros no plano complexo.

Referências

CONTROL System Designer. **Mathworks**. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ref/controlsystemdesigner-app.html>>. Acesso em: 5 set. 2017.

DORF, R. C., BISHOP, R. H. **Sistemas de controles modernos**. 11. ed. São Paulo: LTC, 2011.

FELICIO, L. C. **Dinâmicas de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: Rima, 2010.

MATLAB.EXE: Matrix Laboratory. Versão R2015a. [S.l.]: MathWorks, 2015. Software.

Configuração mínima: Processador Intel ou AMD x86 com suporte a instruções SSE2, 1GB de espaço no HD, 2GB de memória RAM.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.



ISBN 978-85-522-0283-7



9 788552 202837 >