



Resistência dos materiais

Resistência dos materiais

Fábio Blas Masuela

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Alberto S. Santana

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Cristiane Lisandra Danna

Danielly Nunes Andrade Noé

Emanuel Santana

Grasiele Aparecida Lourenço

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Paulo Heraldo Costa do Valle

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Armando Diório Filho

Bárbara Nardi Melo

Roberto Mac Intyer Simões

Editorial

Adilson Braga Fontes

André Augusto de Andrade Ramos

Cristiane Lisandra Danna

Diogo Ribeiro Garcia

Emanuel Santana

Erick Silva Griep

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Masuela, Fábio Blas

M447r Resistência dos materiais / Fábio Blas Masuela.

– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A. 2017.
200 p.

ISBN 978-85-522-0279-0

1. Resistência de materiais. I. Título.

CDD 620.11

2017

Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Introdução ao estudo das tensões	7
Seção 1.1 - Treliças	9
Seção 1.2 - Conceito de tensões: tração e compressão	26
Seção 1.3 - Tensões de cisalhamento e de esmagamento	41
Unidade 2 Conceitos de tensão e deformação	57
Seção 2.1 - Tensões de ruptura, coeficientes de segurança e tensões admissíveis	59
Seção 2.2 - Relação entre tensão e deformação	73
Seção 2.3 - Comportamento dos materiais	88
Unidade 3 Estudo das relações tensão-deformação	103
Seção 3.1 - Conceito de deformação específica	105
Seção 3.2 - Tensões em um plano oblíquo e em um caso de carregamento qualquer	119
Seção 3.3 - Estado plano de tensões	134
Unidade 4 Estudo de torção no regime elástico	151
Seção 4.1 - Tensões no regime elástico	153
Seção 4.2 - Deformação em eixos circulares e ângulo de torção no regime elástico	168
Seção 4.3 - Eixo de transmissão	183

Palavras do autor

Seja bem-vindo ao estudo da *Resistência dos materiais*. Esta disciplina tem como objetivo ingressá-lo na área de mecânica dos sólidos. O conteúdo de resistência dos materiais apresentará conceitos da física mecânica de forma prática, a fim de resolver problemas de estruturas. Em tais soluções, serão abordados os conceitos de equilíbrio, esforços, tensões e deformações dos materiais para o desenvolvimento de análises e projetos de estruturas.

Para que você tenha sucesso nesta disciplina, é importante buscar o entendimento dos conceitos, a fim de aplicá-los em diversas situações da vida acadêmica e profissional. Este livro didático trabalhará as competências para você conhecer, realizar e interpretar cálculos para determinar os esforços solicitantes no material, as tensões e as deformações devido às cargas axiais, em qualquer plano e à torção, bem como avaliar as propriedades dos materiais quanto à sua deformação e resistência mecânica. Isso tudo apenas será possível com o autoestudo.

A fim de atingir os resultados esperados, o livro didático está dividido em quatro unidades. Na Unidade 1, iniciaremos o estudo das tensões, conhecendo e compreendendo os princípios básicos de força e tensão e suas diferenças aplicadas em estruturas simples. Em seguida, na Unidade 2, aprofundaremos o conceito tensão e deformação, iniciando por carregamento axial e verificando o comportamento do material, para então, na Unidade 3, estudarmos as relações tensão-deformação para casos de um carregamento qualquer. Por fim, na Unidade 4, estudaremos eixos com seções circulares, que sofrerão tensões e deformações devido a um esforço de torção.

O estudo da resistência dos materiais é a iniciação em um universo a ser explorado na área de mecânica dos sólidos. Muitos serão os desafios, mas o prazer de interpretar os fenômenos da física mecânica e poder aplicá-los no dia a dia, não tem preço. Aproveite este momento e bons estudos.

Introdução ao estudo das tensões

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade de ensino, iniciaremos o estudo de tensões. A partir de uma estrutura em equilíbrio estático, ou seja, estruturas em repouso sob a ação de uma força, obteremos as tensões e verificaremos suas diferenças. Estudaremos, para o exemplo de uma treliça, as tensões normais devido ao carregamento axial, tensões de cisalhamento causadas por forças iguais ou opostas e as tensões de esmagamento provocadas pelos parafusos, pinos e rebites nas conexões de barras da treliça.

A competência de fundamento desta disciplina é conhecer, realizar e interpretar cálculos para determinar os esforços solicitantes ao material, as tensões e as deformações devido às cargas axiais, em qualquer plano e à torção, bem como avaliar as propriedades dos materiais quanto à sua deformação e resistência mecânica.

O resultado de aprendizagem desta unidade é a aplicação e a análise dos conceitos básicos relativos às tensões principais (tração e compressão) e às tensões secundárias (de cisalhamento e de esmagamento) e análise das reações internas devido aos esforços em uma treliça.

O contexto de aprendizagem utilizado como situação da realidade profissional (SR) proposta nesta unidade é focado em uma empresa de logística que possui um galpão com cobertura em estrutura metálica. A fim de melhorar a produtividade do processo de logística, o leiaute do galpão será reorganizado e será necessário apoiar um novo equipamento na treliça da cobertura. O coordenador desse setor, preocupado com a estabilidade da treliça, contratou você, aluno, como projetista, para elaborar um laudo técnico sobre a condição de sobrecarga desejada na treliça. Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

- Calcular os esforços nas barras da treliça, para a situação inicial de projeto e para o novo carregamento proposto, a fim de analisar as alterações que ocorrem nas forças internas.

- Calcular as tensões normais nas barras da treliça e verificar se a nova condição de carregamento é possível de ser aplicada.

- Calcular as tensões atuantes nas ligações das barras e verificar se as conexões suportarão a nova condição de carregamento.

Para isso, serão tratados nas seções desta unidade os conceitos fundamentais de equilíbrio de um corpo rígido, dois métodos de cálculo de barras de uma treliça, tensão devido ao carregamento axial, tensão de cisalhamento e tensão de esmagamento.

Aceita este desafio? Bons estudos.

Seção 1.1

Treliças

Diálogo aberto

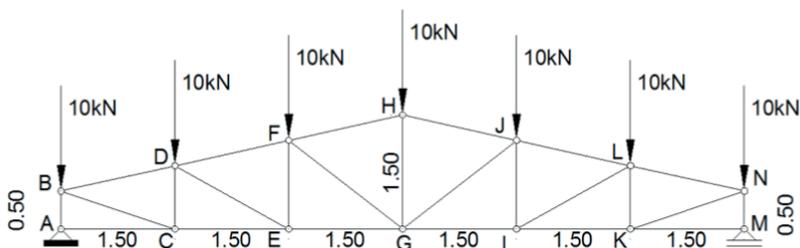
Caro aluno, você sabe a importância da disciplina de Resistência dos materiais? A resistência dos materiais ou mecânica dos sólidos é um segmento da engenharia que proporciona subsídio a diversas áreas de atuação de tecnólogos, engenheiros e arquitetos, neste caso, estudaremos a capacidade dos materiais a resistir esforços. Nesta seção, iniciaremos o estudo dos esforços em uma treliça, identificando quais são os tipos de treliças, para então proporcionar a você a possibilidade de entender, interpretar, projetar e gerenciar o desenvolvimento de novas estruturas. Antes das treliças, estudaremos o conceito de equilíbrio estático das estruturas, a determinação desse equilíbrio e a forma com que as estruturas se apoiam. Verificaremos a condição estática da treliça, a partir do cálculo das forças internas nas barras devido a um carregamento sobre a treliça. Provavelmente você já teve algum contato com esse tipo de estrutura, que é muito utilizada em coberturas em estrutura metálica ou madeira, como na cobertura de um quiosque, da guarita da faculdade, do ginásio de esportes, entre outros.

Para contextualizar a importância desta seção, seu contexto de aprendizagem é focado em uma empresa de logística que precisa reorganizar o leiaute da linha de produção, pois será necessário fixar dois novos equipamentos em uma das treliças do galpão existente. Portanto, deve-se quantificar o esforço que será incluído na estrutura.

Na situação-problema (SP) desta seção, você entregará para o coordenador dessa empresa a análise da estrutura existente, com a verificação dos esforços da treliça, já que será necessário alterar o carregamento da estrutura.

O coordenador da empresa apresentou o projeto existente, conforme Figura 1.1, e comunicou que precisa prender um equipamento no nó E e no nó I. Cada equipamento pesa 3kN. As medidas apresentadas estão em metros (m).

Figura 1.1 | Treliça da situação-problema



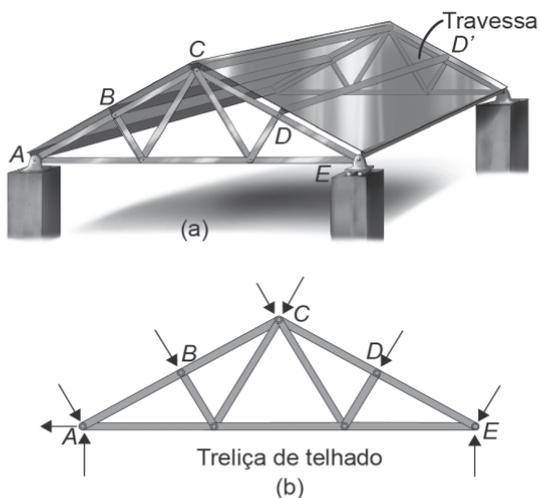
Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de equilíbrio dos corpos rígidos e treliça e os métodos para calcular as forças interna nas barras da treliça. Preparado? Bons estudos!

Não pode faltar

Caro aluno, iniciaremos o estudo da resistência dos materiais, a partir do conhecimento do comportamento de uma estrutura devido às forças que nela atuam. Inicialmente, estudaremos uma treliça, que é uma estrutura formada por barras esbeltas ligadas entre si pela extremidade, formando triângulos ao longo do seu comprimento longitudinal, como mostra a Figura 1.2.

Figura 1.2 | Treliça



Fonte: Hibbeler (2011, p. 195).

A treliça da Figura 1.2a é uma estrutura utilizada, por exemplo, em um telhado, com o objetivo de suportar a carga (peso próprio) da cobertura (telha e trama) e distribuir esses esforços até os apoios (ponto A e E). Nessa condição, temos uma estrutura em equilíbrio estático. Assim, antes de nos aprofundarmos nos métodos de cálculo de uma treliça, precisamos rever um conceito chamado equilíbrio dos corpos rígidos.



Refleta

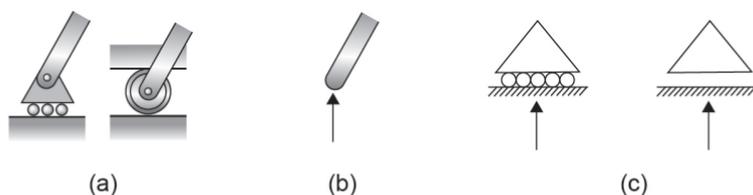
Se o telhado depois de construído permanece estático por toda sua vida útil, qual condição de equilíbrio essa estrutura tem?

Equilíbrio de um corpo rígido

Uma estrutura está em equilíbrio estático quando todas as forças que atuam sobre ela (Figura 1.2b) estão em equilíbrio e atendem às condições de equilíbrio, ou seja, um equilíbrio de forças para impedir o movimento da estrutura e um equilíbrio de momentos para impedir que a estrutura rotacione. Para essa condição de equilíbrio, temos as seguintes equações: $\Sigma F = 0$; $\Sigma M = 0$.

A Figura 1.2b representa o diagrama de corpo livre (DCL) da treliça. Repare que nos pontos "A" e "E", a treliça está apoiada em outra estrutura. Nesses pontos, têm-se uma condição de ação e reação (terceira lei de Newton). É exatamente nesses pontos que devemos entender os tipos de apoios que uma estrutura pode ter e quais reações elas terão. A partir da Figura 1.3, tem-se que o primeiro tipo de apoio, conhecido como apoio móvel ou rolete, é um tipo de apoio simples, ou seja, temos uma estrutura sob a outra, em que a reação de apoio existente é uma força perpendicular ao plano apoiado (normal), como mostrado na Figura 1.3b e 1.3c.

Figura 1.3 | Apoio móvel

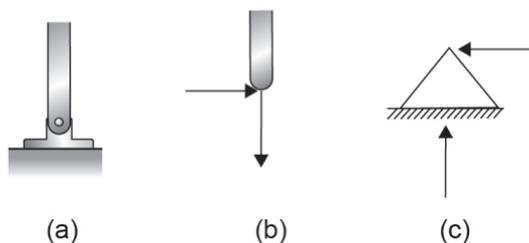


Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 163).

Esse apoio impede o movimento na direção normal do plano, porém permite a liberdade para movimentar no sentido paralelo ao plano e permite uma rotação sob o apoio. A Figura 1.3a representa os apoios com roletes, assim estes deslizam sob o plano. A Figura 1.3b mostra a condição de reação desses roletes e a Figura 1.3c indica esquematicamente como normalmente esse tipo de apoio é representado nos exercícios de resistência dos materiais. Observe as Figuras 1.3b e 1.3c, o vetor força de reação é representado na direção perpendicular ao plano do apoio, assim é comum nomear essa força de reação de apoio como R_y . Caso o plano do apoio fosse vertical, teríamos uma reação de apoio horizontal, assim sendo R_x .

Outro apoio, conhecido como apoio fixo, é um tipo de apoio que impede o movimento nas direções normal e paralela ao plano, porém mantém o apoio livre para rotação, dessa forma, pode ter força de reação de apoio no sentido horizontal e vertical, como mostra a Figura 1.4b e 1.4c.

Figura 1.4 | Apoio fixo

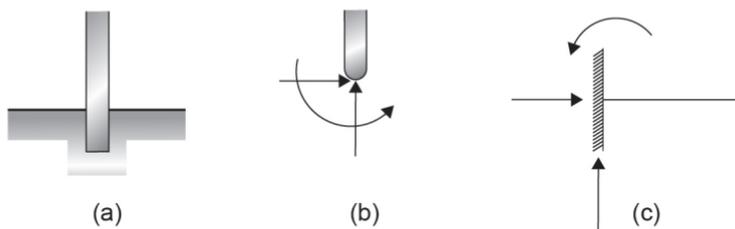


Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 163).

Nestes apoios, normalmente são utilizados pinos, parafusos ou similares nas conexões entre a estrutura e o apoio (Figura 1.4a). A Figura 1.4b apresenta a condição de reação do apoio fixo e a Figura 1.4c representa esquematicamente como normalmente esse tipo de apoio é representado nos exercícios de resistência dos materiais. As Figuras 1.4b e 1.4c apresentam vetores de força de reação na direção horizontal e vertical, que normalmente são nomeadas de R_x e R_y , respectivamente.

Por fim, o apoio de engaste é um tipo de apoio que impede o movimento nas direções normal e paralela ao plano, e também não permite a rotação sob o apoio, dessa forma, pode ter força de reação de apoio no sentido vertical e horizontal e reação de momento, como mostrado na Figura 1.5b e 1.5c.

Figura 1.5 | Engaste



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 163).

Para a condição de engaste, normalmente as estruturas partem de dentro dos apoios. Observando a Figura 1.5a, podemos atribuir alguns sinônimos para a condição engastada, tais como: chumbada, concretada, soldada etc. A Figura 1.5b apresenta a condição de reação no apoio engastado e a Figura 1.5c representa esquematicamente como normalmente esse tipo de apoio é representado nos exercícios de resistência dos materiais. As Figuras 1.5b e 1.5c apresentam três reações de apoio, sendo representadas por um vetor força na direção horizontal (R_x) e um na vertical (R_y), semelhante ao apoio fixo e também uma representação de rotação, na qual temos a reação do momento de uma força, nomeada como M .

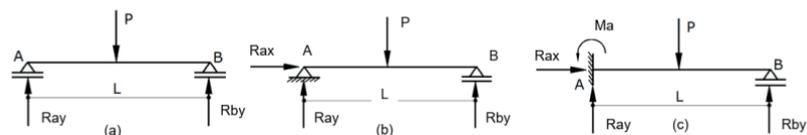


Assimile

Para uma estrutura plana, as equações para a condição de equilíbrio são: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$. Assim, as reações de equilíbrio para cada tipo de apoio ficam: apoio móvel $\rightarrow R_x$ ou R_y ; apoio fixo $\rightarrow R_x$ e R_y ; engaste $\rightarrow R_x$, R_y e M . Todos os símbolos de reação de apoio podem ter subscrita a letra ou número referente ao apoio. Por exemplo: R_{ay} , para o apoio a.

Conhecendo os tipos de apoios que uma estrutura pode ter, podemos classificá-las conforme o número de reações que elas possuem. Assim temos: estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas, conforme as Figuras 1.6a, 1.6b e 1.6c, respectivamente. A primeira, trata de estruturas que possuem vínculos insuficientes para garantir sua estabilidade, as isostáticas possuem os vínculos necessários para sua estabilidade e as hiperestáticas possuem um maior número de vínculos necessários para sua estabilidade. Nosso foco nesta seção são as estruturas isostáticas, em que a quantidade de reações de apoio é igual a quantidade de equações de equilíbrio.

Figura 1.6 | Estrutura isostática



Fonte: elaborada pelo autor.

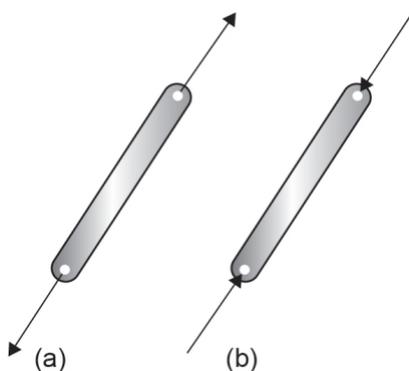
 **Pesquise mais**

Veja mais sobre o equilíbrio dos corpos rígidos no capítulo 4 do livro: BEER, F. P. et al. **Mecânica vetorial para engenheiros**. Estática. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

Existem dois problemas resolvidos superinteressantes, que são os exercícios 4.1 e 4.2, contidos nas páginas 168 e 169.

Voltando para o estudo da treliça (Figura 1.2), entendemos que ela é uma estrutura plana e isostática, sendo que ela, normalmente, tem um apoio fixo e um móvel. A posição onde as barras se encontram é chamada de nó, e repare que as forças sobre a treliça estão localizadas nesses nós. Por esse motivo, as treliças terão forças normais internas em relação à sua seção transversal, podendo ser forças de tração (Figura 1.7a) ou força de compressão (Figura 1.7b).

Figura 1.7 | Forças nas barras da treliça



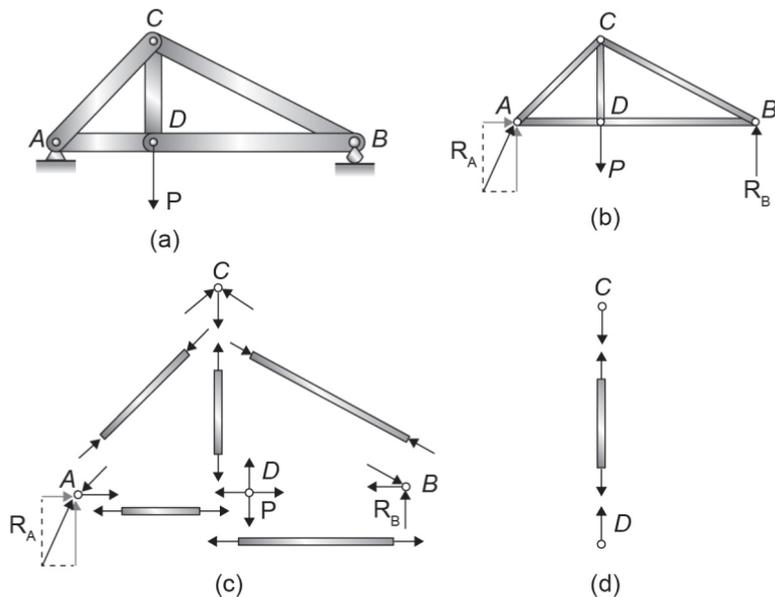
Fonte: Beer et al. (2012, p. 290).

Para calcular as forças internas nas barras de uma treliça serão apresentados dois métodos.

Definição de treliças e suas aplicações - Métodos dos nós

Esse método consiste em calcular as forças nas barras analisando os nós. Isso ocorre uma vez que a treliça estando em equilíbrio, cada nó também estará, como mostra a Figura 1.8. Portanto, temos que a força na barra é igual a força no nó. Assim, no método dos nós é feita uma análise do DCL de cada nó, aplicando as equações de equilíbrio.

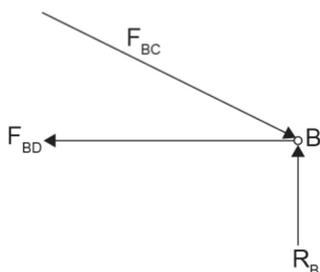
Figura 1.8 | Método dos nós



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 289 e 292).

A análise começa com o desenho esquemático da treliça que deseja calcular (Figura 1.8a). Nela, deverá ser identificada sua geometria, seus carregamentos (força P) e os tipos de apoio (apoio A é fixo e apoio B é móvel). Em seguida, deve ser feito o DCL da estrutura (Figura 1.8b) com as devidas reações de apoio para cada um e o cálculo dessas reações com as equações de equilíbrio ($\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$). Conhecidas as reações de apoio, deverá ser feito o DCL para um primeiro nó, por exemplo nó B. Na Figura 1.9, utilizamos as equações ($\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$). Note que são duas equações de equilíbrio, dessa forma, o nó a ser calculado pode ter apenas duas incógnitas. Calculado o primeiro nó, podemos partir para o próximo, até obtermos todos os resultados das barras.

Figura 1.9 | Diagrama de corpo livre no nó B



Fonte: adaptada de Beer et al. (2012, p. 293).

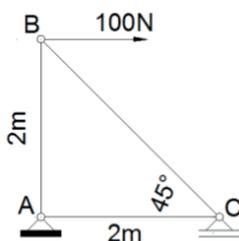
Um cuidado que devemos ter é compreender que a força que está na barra é a mesma que está no nó. Vejamos, por exemplo, a barra CD (Figuras 1.8c e 1.8d): note que a Figura 1.8d mostra a força saindo do nó e saindo da barra, dessa forma, está representado um esforço de tração. Compreenda que, quando há compressão no nó, também haverá compressão na barra e vice-versa. Outro cuidado que se deve ter ao iniciar qualquer exercício, é que o sentido da força não é conhecido, tanto para o DCL da treliça toda (reações de apoio), quanto para o DCL do nó (força nas barras). Deve-se conhecer a direção da força e adotar o sentido dela. Ao final da equação de equilíbrio, se a força resultar em um sinal positivo, o sentido adotado estará correto. Do contrário, se o sinal for negativo, o sentido adotado estará errado. Não tem problema errar o sentido, basta corrigi-lo e continuar os cálculos, assumindo o sentido correto e trabalhando com a intensidade da força em módulo.



Exemplificando

A fim de aplicar os conhecimentos adquiridos, calcularemos as forças que atuam em cada barra da treliça da Figura 1.10 pelo método dos nós.

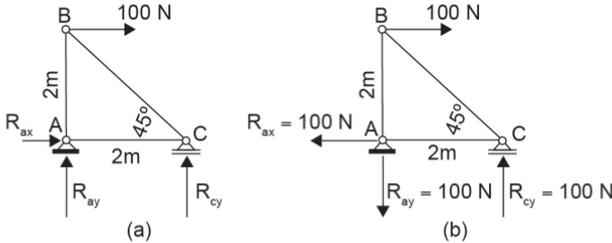
Figura 1.10 | Treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

Primeiro devemos desenhar o DCL da treliça, conforme Figura 1.11a. Utilizando as equações de equilíbrio: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$, tem-se: $R_{ax} = 100N(\leftarrow)$, $R_{ay} = 100N(\downarrow)$ e $R_{cy} = 100N(\uparrow)$, apresentado no DCL na Figura 1.11b.

Figura 1.11 | DCL da treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, calcularemos as forças internas das barras pelo método dos nós. Veja que os três nós estão ligados a duas barras cada, assim pode-se iniciar o cálculo das forças por qualquer uma delas. Iniciaremos pelo nó A, pois nela as barras estão paralelas aos eixos x e y. Isso torna o cálculo mais simples, pois não haverá decomposição de vetores. Para o nó A (Figura 1.12a) é feito o DCL com as forças já conhecidas e as forças das barras que serão calculadas. Note, como não sabemos o sentido das forças, adotaremos como sendo de tração. Assim, temos para $\Sigma F_x = 0$: $-100 + N_{bc} = 0 \therefore N_{bc} = 100N(T)$. E para $\Sigma F_y = 0$ tem-se: $N_{ay} - 100 = 0 \therefore N_{ay} = 100N(T)$.

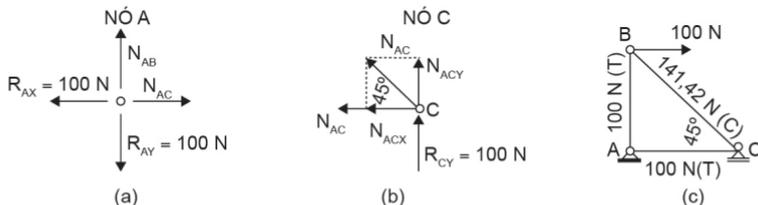
Observe que para as duas barras, os resultados foram positivos e, portanto, o sentido adotado de tração está correto. A seguir, continuamos a utilização do método para o próximo nó. Calcularemos o nó C. Para o nó C (Figura 1.12b), deve-se fazer o DCL com os resultados conhecidos, no caso, a reação no apoio C e a força na barra AC. E a barra que falta calcular, no caso a barra BC. Assim, temos, para $\Sigma F_y = 0$: $N_{bcy} + 100 = 0 \rightarrow$

$$N_{bcy} = -100 \rightarrow (N_{bc} \times \text{sen}(45^\circ)) = -100 \rightarrow N_{bc} = \frac{-100}{\text{sen}(45^\circ)} = -141,42N$$

Portanto, $N_{bc} = 141,42N(C)$.

Por fim, representamos os resultados finais da treliça na Figura 1.12c.

Figura 1.12 | Desenvolvimento e resultado do exercício

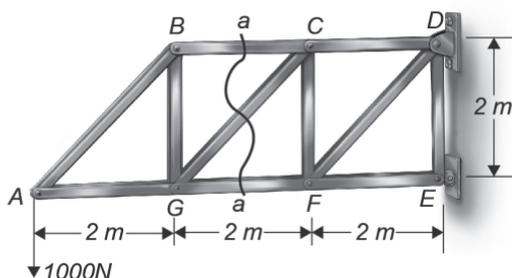


Fonte: elaborada pelo autor.

Método de Ritter ou método de seções

Esse método consiste na realização de um corte sob as barras que deseja calcular. Na Figura 1.13, tem-se um corte a-a sob as barras BC, CG e GF.

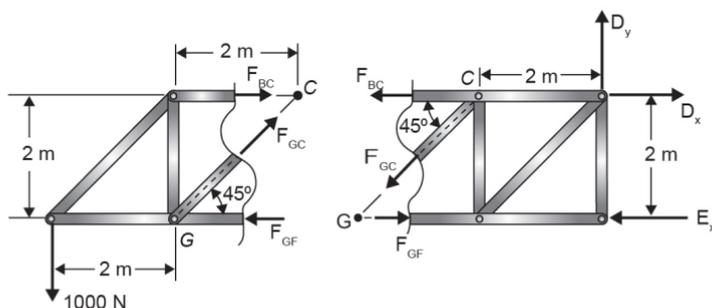
Figura 1.13 | Método de seções



Fonte: Hibbeler (2011, p. 209).

Após o corte a-a, divide-se a treliça em duas partes (Figura 1.13). Assim, deve-se fazer o DCL para um dos lados, conforme mostrado na Figura 1.14.

Figura 1.14 | Método de seções



Fonte: Hibbeler (2011, p. 210).

Pode-se escolher um dos lados para calcular as forças nas barras, utilizando as equações de condição de equilíbrio ($\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$). Normalmente, para esses casos, escolhe-se o lado sem os apoios, evitando assim o cálculo das reações de apoio.



Exemplificando

Vamos calcular os esforços na barra BC, da treliça da Figura 1.13 pelo método de seções.

O corte a-a passa pela barra que desejamos calcular, assim utilizaremos o DCL do lado esquerdo do corte a-a conforme a Figura 1.14.

Para $\Sigma M_G = 0$ tem-se:

$$-(F_{BC} \times 2m) + (1000N \times 2m) = 0 \rightarrow F_{BC} = \frac{(1000N \times 2m)}{2m}$$

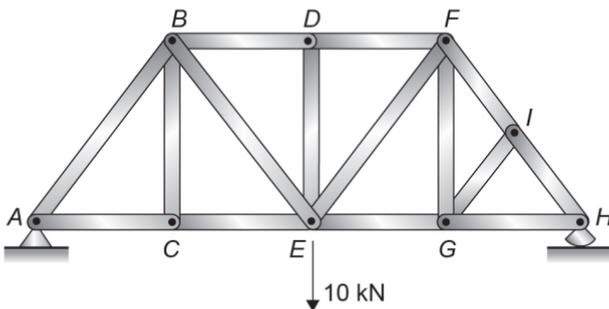
Portanto, $F_{BC} = 1000N(T)$

Sendo que F_{BC} é uma força de tração, pois no DCL foi adotado o sentido da força saindo do nó B (sentido de tração). Como a resposta ao final da equação de equilíbrio resultou em um valor positivo, o sentido adotado estava correto.

Membros de força zero

Após estudarmos dois métodos para calcular as forças internas nas barras, uma forma de simplificar o desenvolvimento dos cálculos é identificar na treliça as barras que não tenham esforços. Essas barras são conhecidas como membros de força zero ou elemento de força nula. Por mais que elas tenham esforço nulo, essas barras são importantes para o travamento da estrutura e também para outros carregamentos que podem ocorrer na estrutura. Para sua identificação, basta observar a treliça e idealizar o DCL dos nós mais simples. Como exemplo, vejamos a Figura 1.15.

Figura 1.15 | Exemplo de membros de força zero



Podemos observar os nós C e D. Observe que não há carregamento nesses nós. Assim, aplicando a condição de equilíbrio em cada nó, podemos concluir que as barras horizontais se equilibram entre si e nas barras verticais, ou seja, BC e DE, não existem forças para equilibrar, assim, essas barras têm esforço nulo.

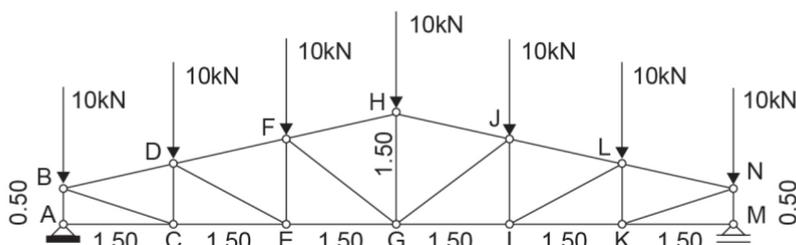
Pesquise mais

Para auxiliar no desenvolvimento dos projetos de treliça, você pode utilizar alguns softwares para apoio. Acesse: <<http://www.alis-sol.com.br/ftool/>> para baixar o programa ftool e ler seu tutorial. Para uso em seu smartphone, pesquise SW Truss, trata-se de um aplicativo simples e fácil de utilizar, nele você também poderá calcular treliças.

Sem medo de errar

Retomando o contexto de aprendizagem, estamos trabalhando com uma empresa de logística que pretende apoiar dois equipamentos novos na treliça da cobertura do galpão da empresa mostrada na Figura 1.16. O coordenador, preocupado com o acréscimo de carga na estrutura, contratou você como projetista, para realizar um laudo técnico dessa situação. Ele apresentou o projeto existente, conforme Figura 1.16, e comunicou que precisa prender um equipamento no nó E e no nó I. Cada equipamento pesa 3kN. As medidas apresentadas estão em metros (m).

Figura 1.16 | Treliça da situação-problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta SP, determinaremos as cargas atuantes nas barras da treliça em duas condições: com e sem os equipamentos na treliça, a fim de analisarmos o acréscimo de sollicitação nas barras devido ao novo carregamento.

A treliça é simétrica, assim, basta calcular as forças das barras para metade da estrutura.

Para calcular todas as barras pelo método dos nós, deve-se primeiro calcular as reações de apoio, para o nó "A" (apoio fixo) e para o nó "M" (apoio móvel), a partir do DCL da estrutura, utilizando as equações de condição de equilíbrio, temos:

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$. Assim, tem-se: $R_{ay} = R_{my} = 35\text{kN}(\uparrow)$ (sem equipamento) $R_{ay} = R_{my} = 38\text{kN}(\uparrow)$ (com equipamento).

Em seguida, você calculará as forças nas barras pelo método dos nós. Assim, terá que fazer um DCL para cada nó e calcular as equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0.$$

Nesta situação-problema, deve-se calcular os nós em ordem alfabética, uma vez que nessa ordem, as situações dos nós sempre se apresentarão com duas incógnitas. Ao final do desenvolvimento, espera-se que o memorial de cálculo apresente os resultados da Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Esforços internos das barras

BARRAS	Sem equipamento (kN)	Com equipamento (kN)
AB=MN	35,00	38,00
AC=KM	0,00	0,00
BD=LN	46,10	51,63
BC=KN	47,44	53,13
CD=KL	15,00	16,80
CE=IK	45,00	50,40
DE=IL	7,35	10,00
DF=JL	52,68	60,58
EG=GI	51,43	59,14
EF=IJ	3,57	1,86
FH=HJ	46,10	52,24
FG=JG	8,14	10,31
GH	10,00	12,66

Fonte: elaborada pelo autor.

Para auxiliar na verificação, você pode utilizar o método de seções. Você também pode utilizar algum software para verificar se o cálculo está correto. Dois softwares simples para calcular treliça são: SW Truss e Ftool.

Com os resultados da Tabela 1.1, você pode perceber que há alterações nas forças internas das barras, com o acréscimo de carga devido ao equipamento. Perceba que em boa parte das barras ocorreu um acréscimo na ordem de 15 a 25%, no qual as barras DE e IL apresentaram o maior acréscimo, em torno de 36%, entretanto, as barras EF e IJ reduziram seus esforços.

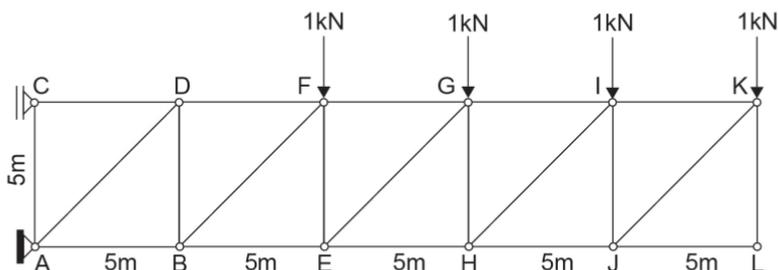
Avançando na prática

Verificando a confiabilidade do software

Descrição da situação-problema

Nesta nova situação-problema, verificaremos os esforços nas barras FG e EH da treliça da Figura 1.17, projetada para um mezanino de uma loja de shopping.

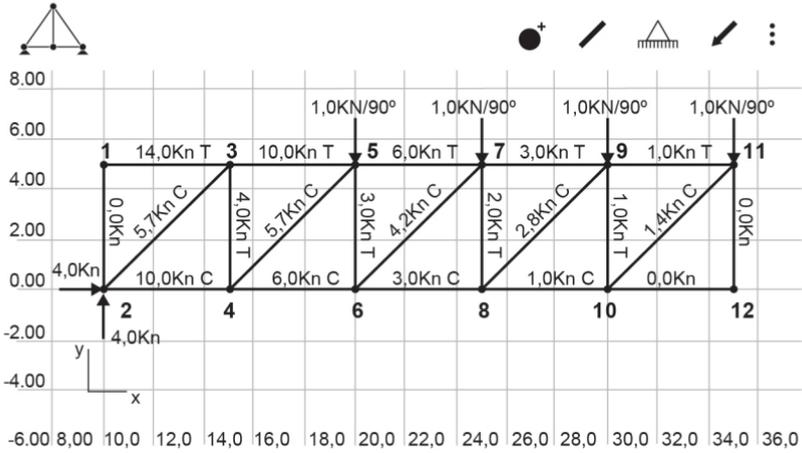
Figura 1.17 | Treliça para mezanino



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa treliça foi modelada no software (SW Truss), conforme a Figura 1.18, em balanço com 25 m de comprimento, para poder atender às exigências do cliente. A fim de verificar se o modelo no software não apresenta nenhum erro de lançamento de informação, é importante o projetista sempre realizar algumas contas “na mão”, para validar o modelo. O resultado apresentado no software está correto?

Figura 1.18 | Resultados obtidos no software

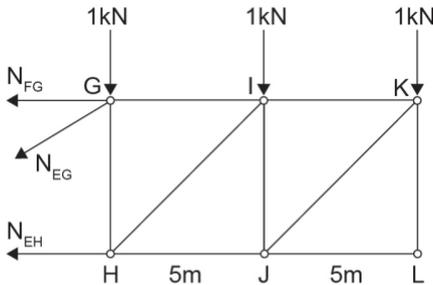


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Deve-se resolver o problema fazendo um corte vertical na treliça, passando pelas barras FG, EG e EH. Assim, desenharemos o DCL do lado direito da estrutura, conforme Figura 1.19, e calcularemos os esforços nas barras.

Figura 1.19 | Corte na treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

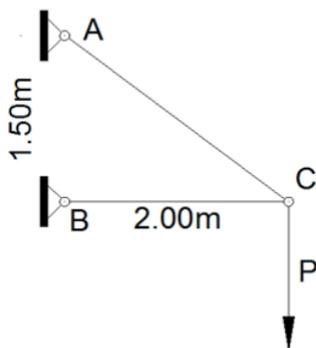
$$\text{Para } \Sigma M_G = 0 \rightarrow -(N_{EH} \times 5m) - (1kN \times 5m) - (1kN \times 10m) = 0 \rightarrow N_{EH} = 3kN(C)$$

$$\text{Para } \Sigma M_E = 0 \rightarrow (N_{FG} \times 5m) - (1kN \times 5m) - (1kN \times 10m) - (1kN \times 15m) = 0 \rightarrow N_{FG} = 6kN(T)$$

Assim, os resultados das forças nas barras no software foram confirmados com os cálculos realizados, utilizando o método de seções.

3. "A treliça é um dos principais tipos de estruturas da engenharia. Ela oferece, ao mesmo tempo, uma solução prática e econômica a muitas situações de engenharia, especialmente no projeto de pontes e edifícios. Uma vez que a treliça está em equilíbrio, cada pino deve estar em equilíbrio". (BEER et al., 2012, p. 289-292)

Um comerciante deseja colocar uma placa publicitária em frente ao seu comércio. As dimensões da placa são apresentadas na Figura. Sabe-se que o material disponível para produzir essa treliça suporta uma força de no máximo 10kN, tanto para compressão quanto para tração. O comerciante quer saber de você qual é a máxima carga (P) que ele pode colocar nesta treliça.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assinale a alternativa correta:

- a) 5kN.
- b) 8kN.
- c) 9kN.
- d) 10kN.
- e) 6kN.

Seção 1.2

Conceito de tensões: tração e compressão

Diálogo aberto

Caro aluno, a disciplina de resistência dos materiais nos proporciona o entendimento do comportamento dos materiais sólidos sujeito a diferentes tipos de carregamento. Esses materiais podem constituir estruturas do nosso cotidiano, por exemplo, casas, carros, trens, pontes, prédios, máquinas, entre outros. Todas essas estruturas, durante sua utilização, estão sujeitas a carregamentos diversos e em cada uma delas existem normas e padrões, específicos de cada área, que proporcionam aos profissionais técnicos subsídios para o dimensionamento. No entanto, há uma coisa em comum nisso tudo, os tecnólogos, os engenheiros ou os arquitetos, que são os desenvolvedores dos novos projetos, precisam conhecer o conceito de tensão, pois assim, entenderão como as estruturas se comportarão e quais materiais e geometrias serão necessários para atender a necessidade do projeto em desenvolvimento.

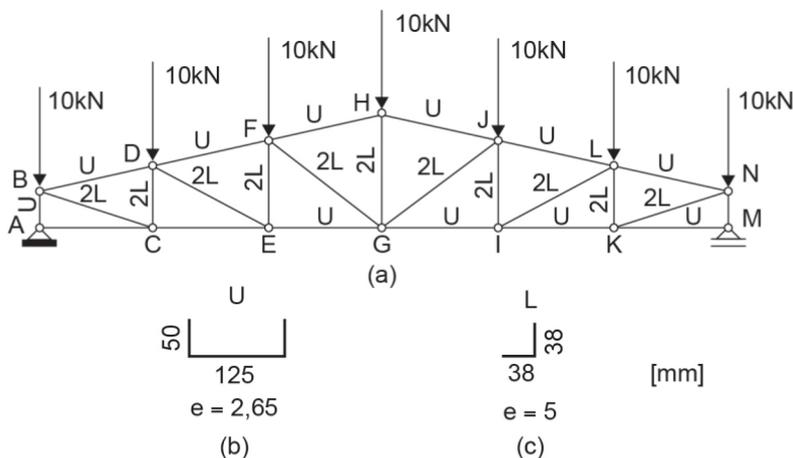
Nesta seção, iniciaremos o conceito de tensão, pois precisamos relacionar a força interna da barra de uma treliça com suas características físicas, para sabermos se ela tem resistência suficiente para manter a estrutura em segurança, atendendo às expectativas do cliente. Para isso, qual o tipo de tensão verificaremos nas barras da treliça? Qual parâmetro devemos analisar, para concluirmos que a estrutura é resistente e segura?

Pensado nessas questões, você continuará ajudando o coordenador da empresa de logística com o problema sobre a mudança de leiaute, e conseqüentemente, atribuindo um novo carregamento à treliça do galpão. Nessa fase do projeto, você calculará as tensões normais atuantes em cada barra e interpretará, segundo o projeto inicial, se a nova situação de carregamento é viável.

O coordenador lhe apresentou o desenho da seção transversal das barras, mostrado na Figura 1.20. Foram utilizados perfis "U" e "L", a Figura 1.20a mostra a localização desses materiais. "2L" representa

dois perfis L junto. As dimensões da seção transversal de cada perfil são apresentadas nas Figuras 1.20b e 1.20c, para os perfis “U e L”, respectivamente. Verificou-se no projeto que a tensão admissível do material dessa barra é de 165 MPa.

Figura 1.20 | Perfil das barras da situação-problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de força axial e tensão normal e entender como se comportam as tensões de tração e a compressão nas estruturas.

Não pode faltar

Introdução aos conceitos de forças e tensões

O estudo da ação de forças nas treliças e o cálculo da força interna delas são utilizados para entendermos como se comporta uma estrutura em relação a uma condição de carregamento. Entretanto, em nenhum momento definimos o tipo do material que receberá esses esforços, nem mesmo qual será a geometria das barras a serem utilizadas. Primeiro, devemos entender melhor o conceito de força. Na resistência dos materiais, força é uma ação que atua sob um corpo que pode lhe causar deformações e/ou alterar seu estado de movimento ou repouso. Importante lembrar que as estruturas sofrem um carregamento externo, no qual acarretará um esforço

interno. Essas forças são nomeadas conforme sua atuação, assim, temos algumas forças na mecânica: peso, de contato, de atrito, normal, cisalhamento, axial, de tração, de compressão. A partir desses diferentes tipos de forças que entenderemos os diferentes tipos de tensões.



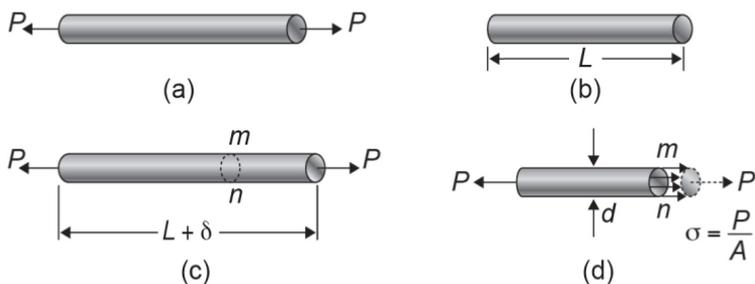
Refleta

Se uma barra de uma treliça se rompe devido a um carregamento, quais são as variáveis relevantes para que esse fenômeno aconteça? Essas variáveis são relevantes também no projeto da estrutura?

Para escolhermos o material ideal e a geometria adequada para um projeto, é necessário compreendermos o conceito de tensão.

Inicialmente, para o estudo da resistência dos materiais ou mecânica dos meios contínuos, consideraremos que os materiais aqui utilizados são contínuos, ou seja, possuem distribuição uniforme da matéria, sem vazios. Consideraremos também que são coesos, ou seja, que todas suas estruturas internas estão bem interligadas, sem trincas. Obviamente, essas condições são as ideais.

Figura 1.21 | Força e tensão



Fonte: adaptada de Gere e Goodno (2010, p. 4).

Para conceituar a definição de tensão, vamos utilizar como exemplo uma barra de treliça com força de tração P , conforme Figura 1.21a. Inicialmente, essa barra possui um comprimento L (Figura 1.21). Quando a barra é solicitada, passa a ter um acréscimo do comprimento δ (Figura 1.21c).

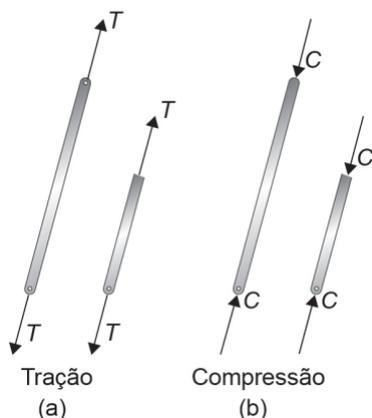
Fazendo um corte na seção m - n e aplicando o diagrama de corpo livre (DCL) no restante da barra (Figura 1.21d) temos a força interna P atuando na área da seção transversal da barra. Observe que a força P é uma resultante de forças distribuídas uniformemente sobre a

área e atua perpendicular à seção transversal. Dessa forma, a razão da força P atuante na seção transversal (A) resulta na tensão normal, representada pela letra grega sigma (σ) e expressa pela Equação 1.1:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

Essa tensão segue o sentido da força, podendo ser uma tensão de tração ou compressão. Adotaremos o sinal positivo para os elementos tracionados, nos quais o sentido da força é para fora da estrutura conforme Figura 1.22a, e negativos para os elementos comprimidos, onde o sentido da força é para dentro da estrutura conforme Figura 1.22b.

Figura 1.22 | Forças normais



Fonte: Meriam e Kraige (2016, p. 133).

As tensões de tração tendem a proporcionar um alongamento na estrutura solicitada e as tensões de compressão tendem a encurtar a estrutura solicitada. O alongamento e o encurtamento nas estruturas são deformações que nelas ocorrem, esse conceito relacionando tensão e deformação será estudado na próxima unidade, no momento, focaremos nossa atenção às tensões de tração e compressão.



Assimile

Segundo Hibbeler (2010, p. 17): "O valor dos componentes da tensão depende do tipo de carga que age sobre o corpo e da orientação do elemento no ponto".

No sistema internacional (S.I.), a força P é expressa em newtons [N], a área A em metros quadrados [m^2] e a tensão em [$\frac{N}{m^2}$] que é equivalente ao Pascal [Pa]. Na prática, é comum utilizarmos múltiplos dessa unidade, tais como quilopascal (kPa), megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa).

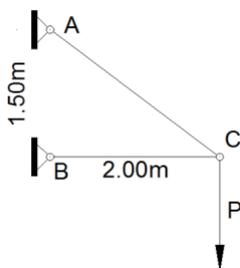
Quando o projeto utilizar o sistema de unidade inglesa, a força será expressa em libras [lb] ou quilolibras [kip], a área da seção transversal em polegadas quadradas [in^2] e a tensão em libras por polegadas ao quadrado [lb/in^2], que equivale ao [psi].



Exemplificando

Para a estrutura apresentada na Figura 1.23, calcular a tensão nas barras, sabendo que são barras circulares com diâmetro de 20 mm. Adote $P = 6\text{kN}$; $N_{ac} = 10\text{kN}(T)$; $N_{bc} = 8\text{kN}(C)$.

Figura 1.23 | Trelíça



Fonte: elaborada pelo autor.

Para tensão na barra AC (σ_{ac}), temos que:

$P = N_{ac} = +10\text{kN} = +10 \times 10^3\text{N}$. Adotamos o sinal positivo, pois trata-se de uma força de tração.

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20\text{mm}}{2} \right)^2 = 314,16\text{mm}^2 = 314,16 \times 10^{-6}\text{m}^2$$

$$\sigma_{ac} = \frac{P}{A} = \frac{+10 \times 10^3\text{N}}{314,16 \times 10^{-6}\text{m}^2} = +31,83 \times 10^6\text{Pa} = +31,83\text{MPa}$$

Para tensão na barra BC (σ_{bc}):

$P = N_{bc} = -8\text{kN} = -8 \times 10^3\text{N}$. Adotamos o sinal negativo, pois trata-se de uma força de compressão.

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20\text{mm}}{2} \right)^2 = 314,16\text{mm}^2 = 314,16 \times 10^{-6}\text{m}^2$$

$$\sigma_{bc} = \frac{P}{A} = \frac{-8 \times 10^3\text{N}}{314,16 \times 10^{-6}\text{m}^2} = -25,46 \times 10^6\text{Pa} = -25,46\text{MPa}$$

Após os cálculos, podemos observar que as tensões acompanham o sentido das forças, dessa forma, obteve-se para a barra AC uma tensão de tração e para a barra BC uma tensão de compressão. Tenha cuidado com as unidades, nesta resolução trabalhamos com as unidades no SI ($N/m^2 = Pa$), porém é usual utilizar ($N/mm^2 = MPa$).

Para o exemplo anterior, após calcular as tensões em cada barra, o projetista deve compará-las com a tensão admissível (σ_{adm}) do material que ele deseja utilizar. Aprofundaremos no conceito de tensão admissível na próxima unidade de ensino, por enquanto, utilizaremos como referência para a tensão máxima a tensão que a estrutura pode suportar. Assim, as tensões nas barras devem ser inferiores à tensão admissível, para que a estrutura suporte o esforço. Supondo que o material em questão seja um aço com $\sigma_{adm} = 165MPa$, conclui-se que as tensões estão bem abaixo do que o material pode suportar. Dessa forma, é função do profissional técnico fazer essa análise e buscar sempre atender às questões de segurança e economia. Um bom projeto deve apresentar uma relação custo/benefício aceitável ao cliente, ou seja, não adianta superdimensionar uma estrutura e esta ficar com custo inviável ou reduzir o custo e proporcionar prejuízo, colocando a segurança e a saúde dos usuários em risco. Para isso, vamos dar continuidade ao exemplo.



Exemplificando

Para a mesma estrutura e carregamento mostrados na Figura 1.23, vamos dimensionar o diâmetro da barra para um material com $\sigma_{adm} = 100MPa$.

Para padronizar as barras na estrutura, calcularemos o diâmetro que atenda as duas barras. Dessa forma, estudaremos a maior força ($N_{ac} = 10kN$).

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \rightarrow A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{10 \times 10^3 N}{100 \times 10^6 Pa} = 0,0001m^2$$

$$A = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{0,0001m^2}{\pi}} = 5,64 \times 10^{-3} m = 5,64mm$$

$$d = 2r = 11,28mm$$

Assim, concluímos que podemos otimizar a estrutura, trabalhando com uma tensão menor.

Observando os exemplos anteriores, para que uma barra não se rompa, esta depende da força interna, da área da seção transversal e das características do material que devem ser analisadas.

Forças axiais e tensão normal média

Consideramos até o momento que as forças internas nas barras atuam paralelamente ao eixo delas, assim, podemos dizer que são forças axiais. É comum ocorrer esse tipo de situação em elementos estruturais ou mecânicos compridos e delgados, como: pendurais, parafusos e treliças.

Veremos, então, a distribuição de tensão média que age em uma seção transversal com carregamento axial (Figura 1.24a). Como a seção transversal da barra é constante, tem-se uma barra prismática. Assim, qualquer lugar da barra, onde se deseja fazer um corte e aplicar o DCL, terá a mesma força P (Figura 1.24b). Para determinar a distribuição de tensão média que atua na área de seção transversal, é necessário adotar duas hipóteses simplificadoras:

1- Para um carregamento, é necessário que a barra permaneça reta e, para uma eventual deformação, a seção transversal deve permanecer plana.

2- Para que ocorra uma deformação uniforme, a carga P deve ser aplicada ao longo do eixo da barra e esta deve ser composta de um material homogêneo e isotrópico (Figura 1.24c).

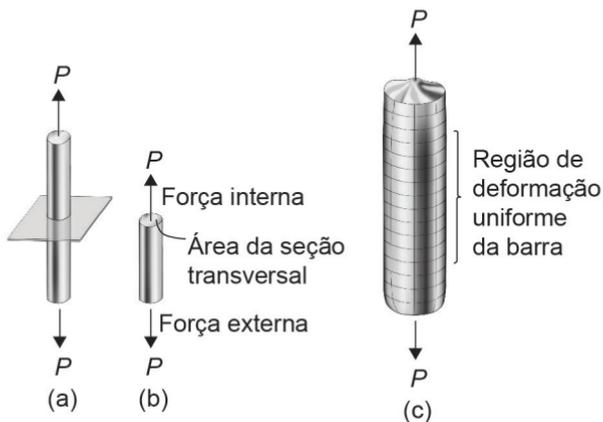


Vocabulário

Materiais homogêneos: são materiais que têm as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume.

Materiais isotrópicos: são materiais que têm as mesmas propriedades em todas as direções.

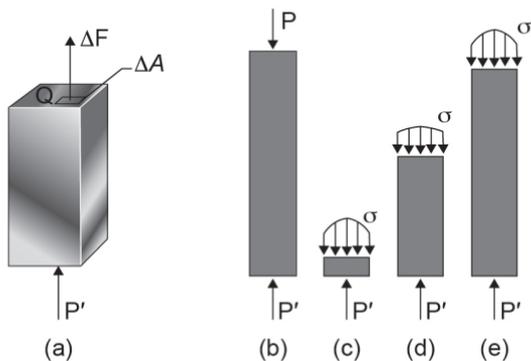
Figura 1.24 | Tensão normal em uma barra



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 16).

Considerando as hipóteses simplificadoras, veremos o que acontece em um dado ponto Q de uma seção transversal (Figura 1.25a).

Figura 1.25 | Distribuição de tensão na barra



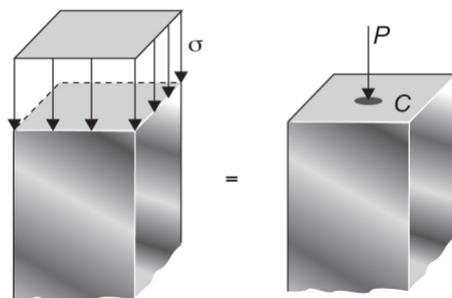
Fonte: adaptada de Beer e Johnson (1995, p. 7-8).

Se dividirmos a intensidade ΔF por ΔA , obtém-se o valor médio da tensão em ΔA . Para ΔA tendendo a zero tem-se (Equação 1.2):

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.2)$$

A tensão definida na Figura 1.25a varia ao longo da barra, conforme Figura 1.25b, 1.25c, 1.25d, 1.25e. Essa variação de esforço ao longo da barra sempre ocorre, entretanto, pode ser avaliada como insignificante. Dessa forma, consideraremos o carregamento uniforme, como previsto nas hipóteses simplificadoras. Assim, sob essa condição, a seção transversal ficará conforme a Figura 1.26.

Figura 1.26 | Distribuição de tensão uniforme



Fonte: Beer e Johnson (1995, p. 9).



Pesquise mais

Veja a dedução completa da distribuição da tensão normal média no capítulo 1 do livro: HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010, p. 14-17.

Tensão normal média máxima

Nas situações discutidas até aqui, as barras possuem sempre seção transversal e carregamento constante. Entretanto, é comum que determinados pontos, ao longo do comprimento longitudinal das estruturas, apresentem variação da área de seção transversal, e também as barras podem sofrer outros carregamentos externos ao longo da barra. Assim, deve-se analisar em qual seção transversal há uma tensão máxima.

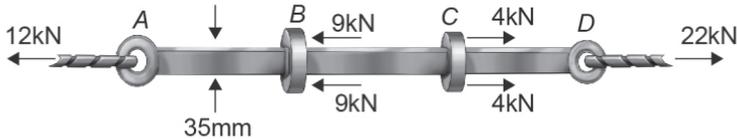
Para isso, verificaremos as forças ao longo da barra e para cada segmento que ocorrer mudança de carregamento, faremos um corte na seção e representaremos o DCL, aplicando uma condição de equilíbrio estático, a fim de descobrir a força desta seção, para então, calcular as tensões e descobrir qual é a máxima.



Exemplificando

Determine a tensão normal média máxima para a barra com largura constante de 35 mm e 10 mm de espessura, apresentada na Figura 1.27.

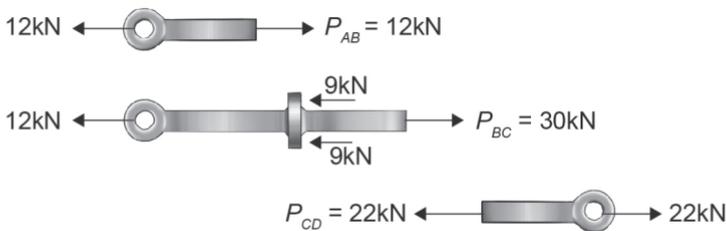
Figura 1.27 | Barra



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 18).

Para descobrir a força interna em cada segmento de barra, devemos realizar um corte na seção em cada segmento e desenhar o DCL, conforme Figura 1.28.

Figura 1.28 | Diagrama de corpo livre dos segmentos



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 18).

Para cada DCL, aplica-se a equação $\Sigma F_x = 0$ de condição de equilíbrio:

Para o segmento AB, tem-se:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -12kN + P_{AB} = 0 \rightarrow P_{AB} = 12kN$$

Para o segmento BC, tem-se:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -12kN - 9kN - 9kN + P_{BC} = 0 \rightarrow P_{BC} = 30kN$$

Para o segmento CD, tem-se:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -P_{CD} + 22kN = 0 \rightarrow P_{CD} = 22kN$$

Note que podemos fazer o DCL em qualquer lado da barra, uma vez que toda sua extensão está em equilíbrio estático. É o mesmo procedimento do método de seções em uma treliça. Com os resultados obtidos, podemos observar que a força máxima ($P_{m\acute{a}x}$) atuante na barra vale 30kN.

Com isso, podemos calcular a tensão normal média máxima

($\sigma_{m\acute{a}x}$):

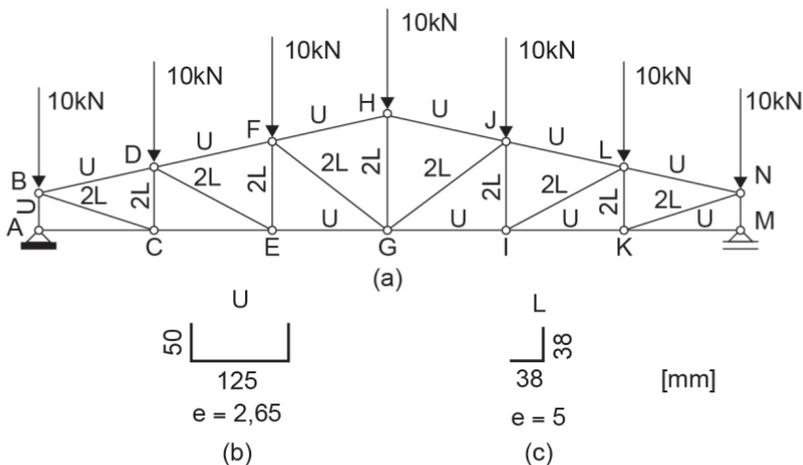
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{A} = \frac{30 \times 10^3 N}{(35mm) \times (10mm)} = 85,70 MPa$$

Por fim, utilizando o método de seções, podemos observar que para uma mesma barra há diferentes esforços internos, pois ao longo da barra são aplicados carregamento diferentes. Assim, a máxima tensão normal média resultará do esforço máximo ao longo da barra.

Sem medo de errar

Ainda no projeto de verificação da treliça, trabalhando na hipótese de aumentar a carga sobre ela, o coordenador lhe apresentou o desenho da seção transversal das barras, mostrado na Figura 1.29. Foram utilizados perfis "U" e "L", a Figura 1.29a mostra a localização desses materiais. "2L" representa dois perfis L juntos. As dimensões da seção transversal de cada perfil são apresentadas nas Figuras 1.29b e 1.29c, para os perfis "U" e "L", respectivamente. Verificou-se no projeto que a tensão admissível do material dessa barra é de 165 MPa.

Figura 1.29 | Perfil das barras da situação-problema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para verificar se a treliça suportará o novo carregamento, deve-se calcular todas as tensões em cada barra, aproveitando a memória de

cálculo das forças internas, obtida na seção anterior, e verificar se as tensões calculadas serão inferiores à tensão admissível de projeto.

Após calcular, espera-se que o novo relatório com as tensões das barras apresente as seguintes informações (Tabela 1.2):

Tabela 1.2 | Tensões nas barras

BARRA				Presente		Futuro	
NOME	PERFIL	A (mm ²)	Sentido da Força	F (kN)	σ (MPa)	F (kN)	σ (MPa)
AB=MN	2L	710,00	Compressão	35,00	49,30	38,00	53,52
AC=KM	U	582,21	-	0,00	0,00	0,00	0,00
BD=LN	U	582,21	Compressão	46,10	79,18	51,63	88,68
BC=KN	2L	710,00	Tração	47,44	66,82	53,13	74,83
CD=KL	2L	710,00	Compressão	15,00	21,13	16,80	23,66
CE=IK	U	582,21	Tração	45,00	77,29	50,40	86,57
DE=IL	2L	710,00	Tração	7,35	10,35	10,00	14,08
DF=JL	U	582,21	Compressão	52,68	90,48	60,58	104,05
EG=GI	U	582,21	Tração	51,43	88,34	59,14	101,58
EF=IJ	2L	710,00	Compressão	3,57	5,03	1,86	2,61
FH=HJ	U	582,21	Compressão	46,10	79,18	52,24	89,73
FG=JG	2L	710,00	Compressão	8,14	11,46	10,31	14,53
GH	2L	710,00	Tração	10,00	14,08	12,66	17,83

Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando os resultados da Tabela 1.2, pode-se notar que as alterações nas tensões normais médias são proporcionais às forças internas nas barras, por conta do acréscimo de carregamento. Pode-se observar também que todas as tensões calculadas estão abaixo da tensão admissível. Dessa forma, o acréscimo do carregamento na treliça não causará prejuízo à estabilidade da estrutura, ou seja, as barras da treliça têm resistência para suportar esse novo carregamento.

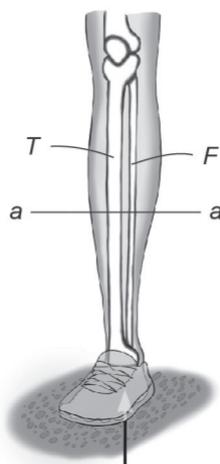
Avançando na prática

Aplicação dos conceitos na área da saúde

Descrição da situação-problema

Quando um homem de 80 kg pula verticalmente, verificou-se que sua tíbia absorvia uma tensão normal média de 2MPa. Tem-se que o osso possui uma seção a-a transversal circular com diâmetro externo de 50 mm e diâmetro interno de 30 mm (Figura 1.30). Considerando que a fibula (F) não está suportando nenhuma carga, determine a força equivalente atuante na tíbia e qual a relação entre a força com o peso do homem:

Figura 1.30 | Esquema da perna



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 26).

Resolução da situação-problema

Para a área da seção transversal da tíbia:

$$A = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} (50^2 - 30^2) = 1256,64 \text{ mm}^2$$

A força atuante da tíbia é de:

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow P = \sigma \cdot A = (2 \text{ MPa}) \cdot (1256,64 \text{ mm}^2) = 2513,28 \text{ N}$$

A relação entre a força equivalente e o peso do homem é de:

$$R = \frac{P}{mg} = \frac{2513,28 \text{ N}}{(80 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)} = \frac{2513,28 \text{ N}}{784,8 \text{ N}} = 3,20$$

Portanto, temos um aumento em 3,20x do peso do homem.

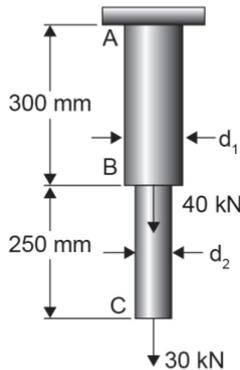
Faça valer a pena

1. Em uma edificação, os pilares são elementos estruturais, conhecidos popularmente como colunas, que transmitem as cargas do edifício para a fundação. Esse carregamento é aplicado no sentido da força peso, ou seja, verticalmente, e distribuído na fundação, gerando uma tensão normal de compressão.

Qual é a tensão normal média para uma força de compressão de intensidade de $1000N$ aplicada em uma placa de dimensão $2m \times 1m$?

- a) 500 kPa.
- b) 50 kPa.
- c) 5 kPa.
- d) 0,5 kPa.
- e) 0,05 kPa.

2. Para erguer cargas verticalmente nas indústrias em geral, são utilizados equipamentos que possuem a capacidade de suportar o peso dos materiais. Existem diversos modelos, como guindastes, gruas, guinchos etc., o que os difere é a forma como são montados e as cargas que podem suportar. A figura a seguir apresenta um esquema de um equipamento para suporte de carga vertical.

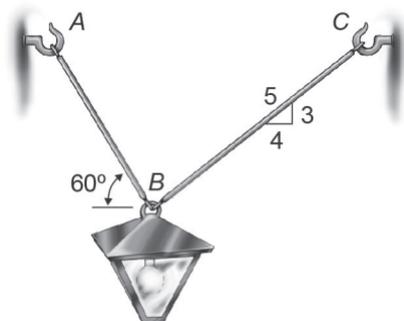


Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 18)

O equipamento acima possui dois trechos distintos, sendo que o segmento AB tem $\sigma_{adm} = 165MPa$ e o segmento BC tem $\sigma_{adm} = 100MPa$. Conhecendo as tensões admissíveis de cada barra, qual deve ser o diâmetro d_1 e d_2 , respectivamente?

- a) 17,57 mm e 19,54 mm.
- b) 29,85 mm e 15,26 mm.
- c) 23,24 mm e 19,54 mm.
- d) 19,54 mm e 23,24 mm.
- e) 22,57 mm e 19,54 mm.

3. Para fixação de uma arandela é necessário o uso de um suporte. Ele pode ser montado de diversas formas, uma delas é utilizando cabos com o propósito de montar uma treliça simples de duas barras, conforme a Figura a seguir:



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 29).

- a) 5,03 MPa e 3,15 MPa.
- b) 0,5 MPa e 0,32 MPa.
- c) 3,15 MPa e 5,03 MPa.
- d) 0,32 MPa e 0,5 MPa.
- e) 3,95 MPa e 2,47 MPa.

Seção 1.3

Tensões de cisalhamento e de esmagamento

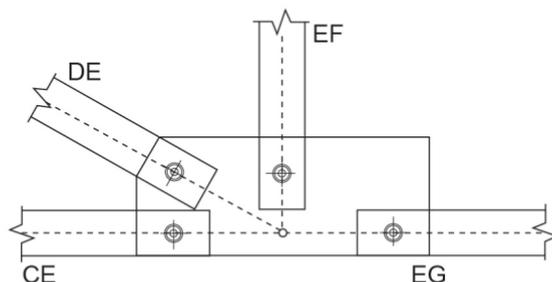
Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior estudamos o conceito de tensão, na qual vimos que este ocorre devido a um carregamento aplicado a uma determinada área de um material. Assim, quando há uma força normal aplicada em uma área na seção transversal de uma estrutura temos uma tensão normal.

Nesta seção, veremos uma outra condição de carregamento na estrutura. Estudaremos o conceito de tensão de cisalhamento e de esmagamento. Veremos como essas condições de esforços ocorrem nas estruturas. Você já deve ter visto pregos, parafusos ou rebites sendo utilizados para juntar algum tipo de estrutura, certo? Nesse sentido, estudaremos as regiões de ligação das estruturas. Como ocorrem as tensões nesses elementos de ligação e a quais tipos de esforços estão sujeitos?

Para finalizar o laudo técnico a ser entregue ao coordenador da empresa de logística, falta verificar as ligações na treliça para ver se atendem às exigências do projeto, devido ao novo carregamento que se pretende colocar. O coordenador antecipou uma informação técnica: para toda treliça, as conexões foram executadas com parafusos com diâmetro de 8 mm e estão sujeitos a cisalhamento simples. No projeto existente, as ligações nos nós da treliça estão conforme a Figura 1.31, que apresenta especificamente o nó E.

Figura 1.31 | Ligação nó E



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos observar que as barras das treliças estão conectadas em uma chapa de espessura de 6,3 mm. Como as diagonais e as montantes foram executadas com dupla cantoneira, cada uma foi parafusada em um dos lados dos banzos superior e inferior. Para todas as conexões, foi possível identificar que o parafuso está sujeito a um cisalhamento simples, pois conecta uma barra na chapa. Sabe-se também que o parafuso não deve exceder a tensão de cisalhamento de 320MPa e as barras não devem exceder a tensão de esmagamento de 400MPa. Assim, você terá que calcular as tensões atuantes nas ligações das barras.

No término desta seção, esperamos que você entenda que, para resolver diversos problemas comuns em máquinas e estruturas, é preciso identificar e calcular as forças tangenciais atuantes nos parafusos, rebites e pinos, e as forças normais no contato das ligações, a fim de poder calcular corretamente as devidas tensões.

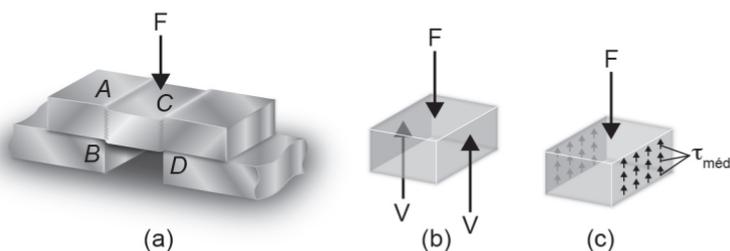
Não pode faltar

Definição de cisalhamento, formulação da tensão de cisalhamento

Caro aluno, o conceito de tensão ocorre quando há um carregamento aplicado em uma determinada área de um material. Assim, o tipo de carregamento define a tensão atuante. Nesta seção, veremos uma nova condição de carregamento na estrutura.

Quando algum elemento estrutural sofre uma sollicitação que proporciona uma força interna tangencial à área da seção transversal da estrutura, dizemos que essa força é uma força de cortante (V), conforme mostra a Figura 1.32.

Figura 1.32 | Força cortante



Fonte: Hibbeler (2010, p. 21).

A Figura 1.32a mostra um prisma retangular apoiado sobre outros dois prismas menores, espaçados entre si. Os apoios são dois elementos rígidos, ou seja, indeformáveis e a peça sobre os apoios é deformável. Ela está recebendo uma carga F , onde no plano transversal AB e CD ocorrem esforços tangenciais (V) na área da seção transversal (A) como vemos na Figura 1.32b. Assim, temos a tensão de cisalhamento média na área da seção, conforme Figura 1.32c e expressa por meio da Equação 1.3:

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} \quad (1.3)$$



Assimile

A tensão de cisalhamento é um tipo de tensão gerada devido à aplicação, na seção transversal de um material, de forças de mesma direção, porém com sentido contrário, proporcionando no material uma deformação ou corte.

A tensão de cisalhamento é representada pela letra grega τ (tau) com unidade no sistema internacional de N/m^2 . É importante ressaltar que essa definição da Equação 1.3 se trata da média da tensão do cisalhamento. Diferentemente da tensão normal, na qual devido à baixa variação utiliza-se a média, na tensão de cisalhamento, em determinados casos, principalmente em vigas, analisa-se toda a área da seção. Por outro lado, para peças pequenas, em que ocorre esforço de cisalhamento do material com flexão desprezível, é possível utilizar a tensão de cisalhamento média para os cálculos. Isso ocorre normalmente em elementos de ligações, como parafusos, pinos, pregos, rebites, entre outros.



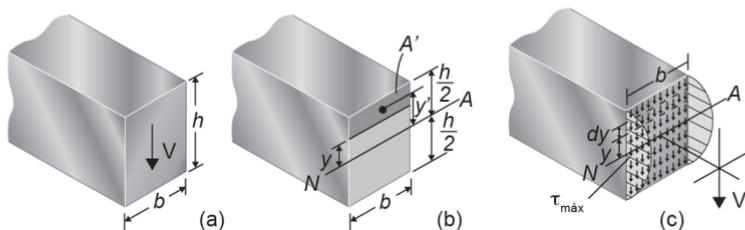
Vocabulário

Flexão: é um esforço resultante normalmente de ações de carregamento transversal, que leva o corpo a se curvar.

Tensão de cisalhamento em elementos estruturais

Segundo Hibbeler (2010, p. 268), "Para uma viga com seção transversal retangular, a tensão de cisalhamento varia parabolicamente com a altura. A tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo do eixo neutro", como pode ser visto na Figura 1.33.

Figura 1.33 | Tensão de cisalhamento em viga



Fonte: Hibbeler (2010, p. 265).

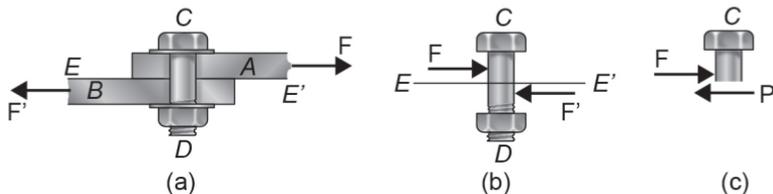


Refleta

Sabendo que tensões médias de cisalhamento ocorrem em elementos de ligação, de que forma essas tensões podem atuar em uma treliça?

Nesta seção, focaremos nas situações de tensão média de cisalhamento que ocorrem normalmente em parafusos, rebites e pinos de máquinas e estruturas. Para essas situações, é frequente apresentar uma condição de cisalhamento simples ou duplo. A Figura 1.34 apresenta duas barras chatas A e B ligadas por um parafuso CD.

Figura 1.34 | Cisalhamento simples



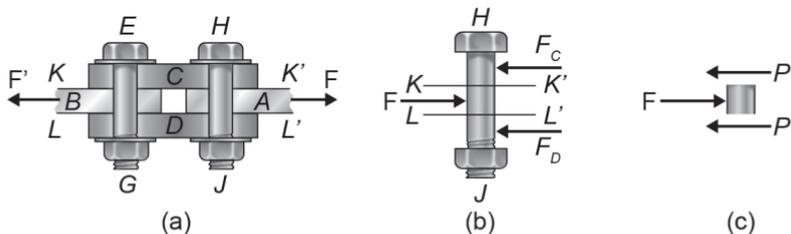
Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 9).

Na Figura 1.34a, as barras chatas, representadas por A e B, estão submetidas à força de tração F e F' . Esses esforços proporcionarão tensões no parafuso na seção EE' . A Figura 1.34b apresenta o diagrama de corpo livre (DCL), dessa forma, fazendo um corte na seção EE' e aplicando a equação de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, temos que $F = P$, sendo a carga P , indicada na Figura 1.34c, a força cortante na seção EE' do parafuso. Observe que a literatura comumente apresenta essa força cortante com as letras F , P e V . Para a condição apresentada na Figura 1.34, dizemos que o parafuso está sujeito a cisalhamento simples, enquanto a tensão de cisalhamento média é expressa conforme Equação 1.4:

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.4)$$

Outra situação de carregamento pode aparecer nas estruturas, vejamos a Figura 1.35a: nela são apresentadas duas chapas, C e D, utilizadas para conectar duas barras chatas, A e B, utilizando os parafusos EG e HJ.

Figura 1.35 | Cisalhamento duplo



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 10).

A Figura 1.35b mostra o DCL do parafuso HJ, no qual podemos fazer dois cortes, na seção KK' e LL' para podermos aplicar a equação de equilíbrio, conforme apresentado na Figura 1.35c. Para cada seção, temos a força $P = F/2$. Portanto, concluímos que a tensão de cisalhamento média pode ser expressa conforme Equação 1.5:

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \quad (1.5)$$

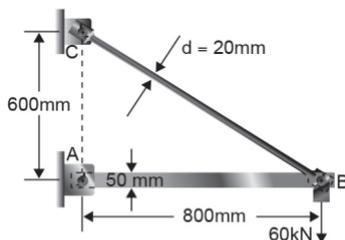
Assim, para a situação apresentada na Figura 1.35, dizemos que o parafuso está sujeito a cisalhamento duplo.



Exemplificando

Para a treliça apresentada na Figura 1.36, vamos calcular as tensões de cisalhamento nos parafusos com diâmetro de 25mm para os nós A e C. Devido ao carregamento de 60kN em B, as forças internas nas barras são: $BC = 100kN(T)$ e $AC = 80kN(C)$. Na ligação B, tem-se um cisalhamento simples e na ligação A um cisalhamento duplo.

Figura 1.36 | Treliça

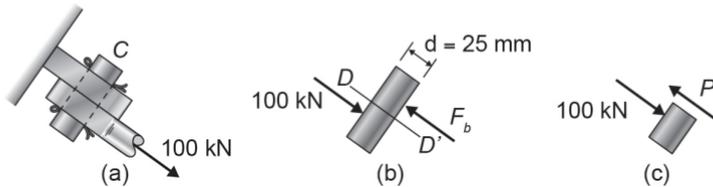


Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 3).

A Figura 1.37 mostra a ligação para o nó C, observe a condição de fixação na Figura 1.37a, nela ocorre um cisalhamento simples no parafuso, como podemos ver no DCL na Figura 1.37b. Fazendo um corte DD' no meio do parafuso, temos o equilíbrio apresentado na Figura 1.37c como: $\Sigma F = 0 \rightarrow P = 100\text{kN}$. Assim, podemos calcular a tensão de cisalhamento no parafuso:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{(100 \times 10^3 \text{ N})}{\frac{\pi (25 \text{ mm})^2}{4}} = 203,72 \text{ MPa}$$

Figura 1.37 | Ligação em C

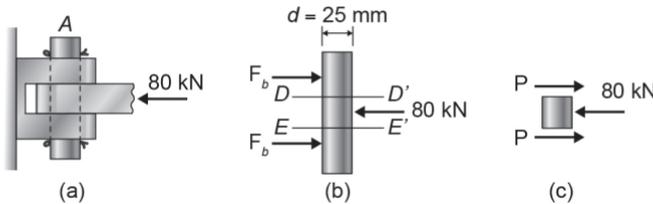


Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 12).

A Figura 1.38 mostra a ligação para o nó A, observe a condição de fixação na Figura 1.38a, nela ocorre um cisalhamento duplo no parafuso, como podemos ver no DCL na Figura 1.38b. Fazendo um corte DD' e EE' no meio do parafuso, temos o equilíbrio apresentado na Figura 1.38c, como: $\Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 40\text{kN}$. Assim, podemos calcular a tensão de cisalhamento no parafuso:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{(40 \times 10^3 \text{ N})}{\frac{\pi (25 \text{ mm})^2}{4}} = 81,49 \text{ MPa}$$

Figura 1.38 | Ligação em A



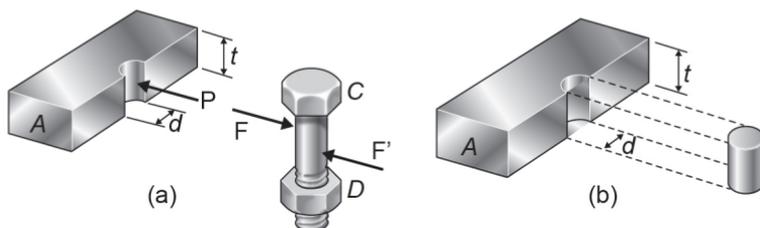
Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 12).

Por fim, podemos identificar a diferença da condição de ligação que submete ao cisalhamento simples ou duplo, ou seja, uma chapa fixa no parafuso para o primeiro e duas para o segundo. Verifica-se também que por haver dois pontos de fixação, o cisalhamento duplo proporciona uma tensão de cisalhamento menor que a outra condição, pois distribui em duas regiões o esforço no parafuso.

Tensão de esmagamento

Nas ligações das estruturas, os parafusos, o rebite e o pino, além de sofrerem tensões de cisalhamento na ligação, podem proporcionar tensões de esmagamento no contato com a superfície das barras que estão conectadas. Vejamos a Figura 1.39a, ela mostra a barra chata e o parafuso, também podemos ver um par de ação e reação que ocorre no contato entre a superfície da barra chata A e o parafuso CD.

Figura 1.39 | Tensão de esmagamento



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 10).

A força P aplicada na barra chata A é a resultante das forças que ocorrem nessa interação. Assim, a tensão de esmagamento, representada por σ_e , resulta da razão da força P pela área retangular de projeção do parafuso sobre a superfície, conforme apresentado na Figura 1.39b. Assim, a tensão de esmagamento é expressa pela Equação 1.6:

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (1.6)$$

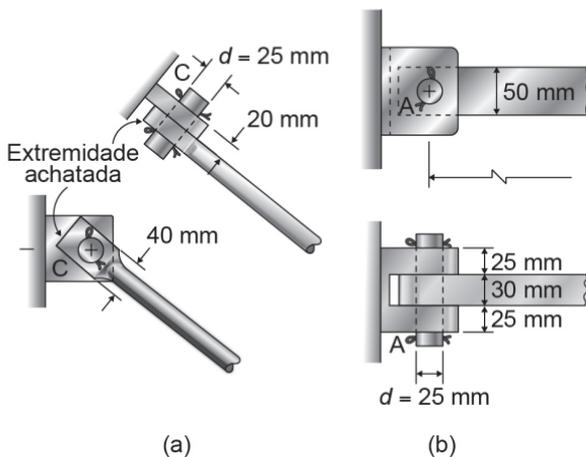
A unidade da tensão de esmagamento no sistema internacional também é N/m^2 .



Exemplificando

Vamos calcular as tensões de esmagamento nas ligações dos apoios A e C , conforme Figura 1.40 da mesma treliça do exemplo anterior (Figura 1.36).

Figura 1.40 | Ligações nos apoios



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 11).

Na Figura 1.40a, a força na barra $BC = 100\text{kN}(T)$, a chapa de apoio e a barra BC têm a mesma espessura $t = 20\text{mm}$ e o parafuso que as conectam tem $d = 25\text{mm}$. Assim, a tensão de esmagamento na barra é a mesma na chapa de apoio, expressas por:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{100 \times 10^3 \text{ N}}{(20\text{mm})(25\text{mm})} = 200\text{MPa}$$

Na Figura 1.40b, a força na barra $AC = 80\text{kN}(C)$, a barra AC possui espessura $t = 30\text{mm}$ e o apoio possui duas chapas $t = 2 \times 25\text{mm} = 50\text{mm}$, o parafuso que as conectam tem $d = 25\text{mm}$. Assim, a tensão de esmagamento na barra é expressa:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{80 \times 10^3 \text{ N}}{(30\text{mm})(25\text{mm})} = 106,67\text{MPa}$$

E a tensão de esmagamento nas chapas dos apoios é dada por:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{80 \times 10^3 \text{ N}}{(50\text{mm})(25\text{mm})} = 64\text{MPa}$$

Por fim, podemos notar que a tensão de esmagamento ocorre na área de contato entre os elementos de ligação, dessa forma, caso seja necessário reduzir a tensão de esmagamento na ligação, basta aumentar a espessura do material e/ou do parafuso.

Situações de possível esmagamento

Vimos que as tensões de esmagamento são tensões normais que atuam no contato dos elementos estruturais. Elas acontecem quando o sistema estrutural possui um carregamento elevado sob áreas

pequenas, como vimos nos exemplos dos elementos de ligação. No entanto, é possível identificar outros exemplos dessa situação.

Em paredes de alvenaria, pode ocorrer esmagamento na argamassa de assentamento que liga os blocos. O cuidado maior deve ser em alvenaria estrutural, onde o conjunto dos blocos e argamassas constituem a estrutura, mas também pode ocorrer em alvenaria de vedação, sendo assim, o peso próprio dos tijolos que proporcionam o esmagamento.

Pilares são elementos essencialmente de compressão, estes podem atuar em edificações de casas e prédios, mas também em mezaninos, cimbramentos etc. São elementos que atuam verticalmente nas estruturas e, como eles transmitem os esforços da estrutura para a base, podem proporcionar o esmagamento desta.

Outra situação de esmagamento pode ocorrer em sistemas de suspensão de máquinas e automóveis. Esse sistema tem como função absorver os impactos que a máquina sofre, assim o conjunto de elementos que atua nesse sistema podem apresentar tensões normais elevadas, causando, assim, esmagamento nas peças que o compõem.

Por fim, esses são alguns exemplos além dos elementos de ligação, mas com certeza, se aprofundarmos em outras áreas, encontraremos mais situações de possível esmagamento.



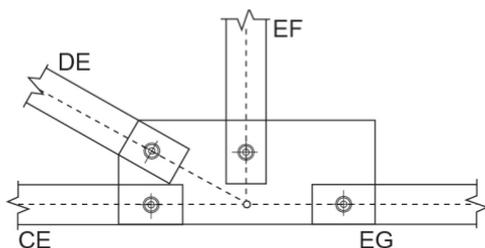
Pesquise mais

Veja mais exemplos de tensão de cisalhamento e de esmagamento na página 15 do livro: BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

Sem medo de errar

De volta à nossa situação-problema, estamos a um passo de concluir nossas tarefas nesta unidade. Para finalizar o laudo técnico a ser entregue ao coordenador sobre a verificação do acréscimo de carga na estrutura, falta apenas verificar as ligações nos nós da treliça. Dessa forma, foi verificado no projeto existente que todas as ligações nos nós da treliça estão conforme a Figura 1.41 que apresenta o nó E.

Figura 1.41 | Ligação nó E



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, podemos observar que as barras das treliças estão conectadas em uma chapa de espessura de 6,3mm. Como as diagonais e as montantes foram executadas com dupla cantoneira, cada cantoneira foi parafusada em um dos lados dos perfis "U" superior e inferior. Para todas as conexões foi utilizado um parafuso com diâmetro de 8mm e foi possível confirmar que o parafuso está sujeito a um cisalhamento simples, pois conecta uma barra na chapa. Sabe-se também que o parafuso não deve exceder a tensão de cisalhamento de 320MPa e as barras não devem exceder a tensão de esmagamento de 400MPa. Com todas essas informações analisaremos as resistências dos parafusos nas ligações. Para isso, vamos calcular a tensão de cisalhamento que ocorre em cada parafuso. Também calcularemos a tensão de esmagamento que o parafuso proporciona nas ligações.

A ligação das barras com a chapa proporciona um cisalhamento simples no parafuso. Assim, utilizando a Equação 1.4, teremos a tensão de cisalhamento para cada parafuso.

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A}, \text{ onde } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (8mm)^2}{4} = 50,27mm^2 \quad (1.4)$$

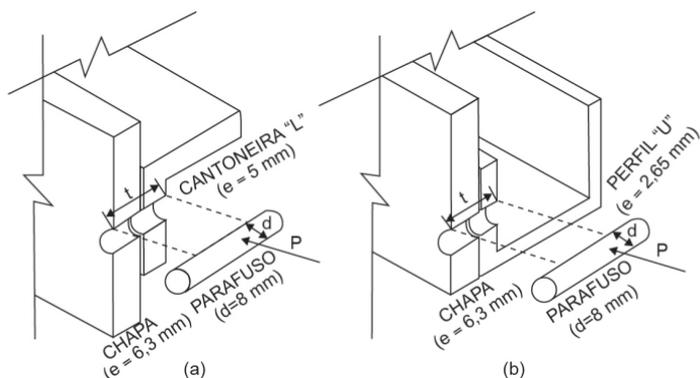
Lembrando que, para cada nó, há o mesmo tipo de ligação para os dois lados da treliça, uma vez que as duplas cantoneiras são parafusadas uma de cada lado, isso faz com que a força interna das barras da treliça divida-se para cada uma das cantoneiras.

Utilizando os esforços das barras (P), calcularemos a tensão de esmagamento conforme Equação 1.6 para o contato do parafuso e perfil mais chapa, na qual:

$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$, d é o diâmetro do parafuso existente ($d = 8mm$), t é a espessura do contato que o parafuso faz na ligação composta pelo

perfil (U ou L) e a chapa de ligação. Assim, para o perfil L (montantes e diagonais), $t=(5+6,3)\text{mm}$ (Figura 1.42a) e para o perfil U (superior e inferior), $t=(2,65+6,3)\text{mm}$ (Figura 1.42b).

Figura 1.42 | Área de esmagamento



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao final de todos os cálculos, espera-se que o memorial de cálculo contido no laudo técnico contenha as informações da Tabela 1.3.

Tabela 1.3 | Esforços na treliça

BARRA		Presente					Futuro				
NOME	PERFIL	A (mm ²)	F (kN)	σ (MPa)	τ (MPa)	σ_e (MPa)	F (kN)	σ (MPa)	τ (MPa)	σ_e (MPa)	
AB=MN	2L	710,00	35,00	49,30	87,04	193,58	38,00	53,52	94,50	210,18	
AC=KM	U	582,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
BD=LN	U	582,21	46,10	79,18	114,64	321,93	51,63	88,68	128,39	360,54	
BC=KN	2L	710,00	47,44	66,82	117,97	262,39	53,13	74,83	132,12	293,86	
CD=KL	2L	710,00	15,00	21,13	37,30	82,96	16,80	23,66	41,78	92,92	
CE=IK	U	582,21	45,00	77,29	111,91	314,25	50,40	86,57	125,33	351,96	
DE=IL	2L	710,00	7,35	10,35	18,28	40,65	10,00	14,08	24,87	55,30	
DF=JL	U	582,21	52,68	90,48	131,00	367,88	60,58	104,05	150,65	423,04	
EG=GI	U	582,21	51,43	88,34	127,90	359,15	59,14	101,58	147,07	412,99	
EF=IJ	2L	710,00	3,57	5,03	8,88	19,75	1,86	2,61	4,61	10,26	
FH=HJ	U	582,21	46,10	79,18	114,64	321,93	52,24	89,73	129,91	364,80	
FG=JG	2L	710,00	8,14	11,46	20,24	45,02	10,31	14,53	25,65	57,05	
GH	2L	710,00	10,00	14,08	24,87	55,31	12,66	17,83	31,48	70,02	

Fonte: elaborada pelo autor.

Deve-se agora analisar os resultados nas condições propostas, assim as tensões calculadas devem ser menores do que as tensões limites de cada peça. Verifica-se que a maior tensão de cisalhamento média nos parafusos que ocorre nas barras DF e JL não excede a tensão de cisalhamento permitida, ou seja: $\tau_{méd_{DF,JL}} = 150,65MPa \leq 320MPa$.

Por outro lado, para as tensões de esmagamento, tem-se quatro barras na condição de sobrecarga que não atendem a tensão de esmagamento permitido ($\sigma_e \leq 400MPa$), são as barras DF e JL com $\sigma_{e_{DF}} = 423,04MPa$ e as barras EG e GI com $\sigma_{e_{EG,GI}} = 412,99MPa$. Dessa forma, será necessário reforçar essas ligações, vamos calcular a espessura necessária para elas utilizando a Equação 1.6, fixando os seguintes valores: $\sigma_e = 400MPa$ e $t = e + 2,65$ (2,65mm é a da barra existente (perfil U), "e" é a espessura necessária para a ligação devido ao novo carregamento), temos:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} \rightarrow t = \frac{P}{\sigma_e d} \rightarrow e = \left(\frac{P}{\sigma_e d} \right) - 2,65.$$

Para as barras DF e JL, a ligação deve contemplar uma chapa com $e \geq 6,82mm$. E para as barras EG e GI, a ligação deve ter uma chapa com $e \geq 6,59mm$.

Em suma, o relatório entregue ao coordenador aprova o novo carregamento na estrutura, tendo apenas uma ressalva quanto ao reforço nas ligações, onde deverão ser trocadas as chapas para os nós D, E, F, G, I, J e L.

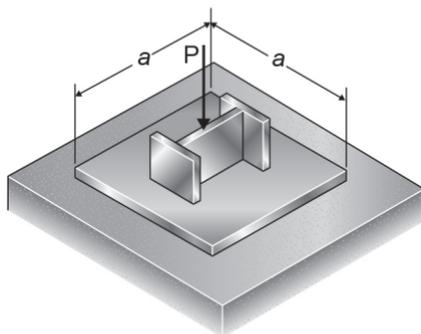
Avançando na prática

Dimensionamento da base de um pilar metálico

Descrição da situação-problema

Para uma obra industrial, dimensionaremos a base de um pilar metálico (W250x80) de modo que ocorra a distribuição da carga P do pilar para a fundação, conforme a Figura 1.43, a fim de que o projeto seja econômico e seguro. Sabe-se que a tensão normal média do pilar não deve exceder a 248MPa, onde possui área da seção transversal de $A = 10.200mm^2$. A tensão de esmagamento do concreto da fundação é limitado a 25MPa. Qual deve ser a solução mais eficiente para uma base quadrada?

Figura 1.43 | Base de um pilar metálico



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 23).

Resolução da situação-problema

Para descobrir a carga que pode ser distribuída na fundação, antes vamos verificar a condição máxima do pilar. Assim, temos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow P = \sigma A = (248 \text{MPa})(10.200 \text{mm}^2) = 2529600 \text{N}$$

Com a carga limite que pode ir para a fundação, veremos então a área que atenda a esse carregamento e a tensão de esmagamento:

$$\sigma_e = \frac{P}{A} \rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{2529600 \text{N}}{25 \text{MPa}} = 101.184 \text{mm}^2$$

Para uma placa quadrada temos:

$$A = a^2 \rightarrow a = \sqrt{A} = \sqrt{101.184 \text{mm}^2} = 318,09 \text{mm}$$

Assim, conclui-se que para atender às exigências de projeto, as dimensões da base (a) devem ser maiores que 318,09mm ($a \geq 318,09 \text{mm}$).

Faça valer a pena

1. “O cimbramento é uma estrutura de suporte provisória, composta por um conjunto de elementos que apoiam as formas horizontais (vigas e lajes), suportando as cargas atuantes (peso próprio do concreto, movimentação de operários e equipamentos etc.) e transmitindo-as ao piso ou ao pavimento inferior. Para tanto, deve ser dimensionado, entre outras coisas, em função da magnitude de carga a ser transferida, da escora e da resistência do material utilizado. Esses elementos normalmente dividem-se em:

- Suporte: escoras, torres etc.
- Trama: vigotas principais (conhecidas também como longarinas) e vigotas secundárias (conhecidas também como barrotes).
- Acessórios: peças que unem, posicionam e ajustam as anteriores”

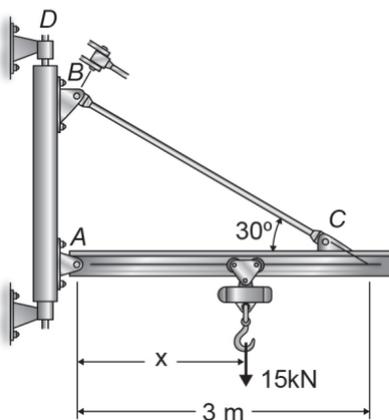
a) 1,60MPa.
b) 2,00MPa.

c) 2,50MPa.
d) 3,00MPa.

e) 3,20MPa.

3. "É um tipo de máquina que, em geral, é equipada com uma grua, cabos ou correntes e roldanas e pode ser utilizada tanto para elevar e baixar materiais como para movê-los horizontalmente. É usado principalmente para levantar itens de peso elevado e transportá-los para outros lugares" (GUINDASTE. [S.l.]: Portogente, [201-?]. Disponível em: <<https://portopedia.com.br/portopedia/73053-guindaste>>. Acesso em: 15 maio 2017).

Para o guindaste apresentado na Figura, calcule a máxima tensão de cisalhamento média no pino B de diâmetro de 16mm, sabendo que este está sujeito a um cisalhamento duplo e que o curso do guindaste (x) é de 0,30m a 3,60m.



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 31).

a) 74,60MPa.
b) 37,30MPa.
c) 179,04 MPa.
d) 89,52MPa.
e) 99,47MPa.

Referências

- BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.
- BEER, F. P. et al. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.
- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos materiais**. 3. ed. Rio de Janeiro: Makron Books, 1995.
- CONSTRUÇÃO EM MADEIRA. Tesoura. [s.d.]. Disponível em: <<http://www.usp.br/nutau/madeira/paginas/cobertura/tesoura.htm>>. Acesso em: 15 maio 2017.
- GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos materiais**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para engenharia - estática**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2016.
- PLESHA, M. E.; GRAY, G. L.; CONSTANZO, F. **Mecânica para engenharia: estática**. Porto Alegre: Bookman, 2014.
- PORTOGENTE. **Guindaste**. 2106. Disponível em: <<https://portogente.com.br/portopedia/73053-guindaste>>. Acesso em: 15 maio 2017.

Conceitos de tensão e deformação

Convite ao estudo

Caro aluno, continuando o assunto abordado na unidade anterior, na qual iniciamos o estudo de tensões, nesta unidade aplicaremos os conceitos estudados em situações de projeto. Aproveitando o conhecimento das definições de esforços e tensões, aprofundaremos o entendimento a respeito da noção de tensão e deformação, iniciando o estudo pelo carregamento axial e verificando o comportamento do material.

A competência de fundamento desta disciplina é conhecer, realizar e interpretar cálculos para determinar os esforços solicitantes no material, as tensões e as deformações devido às cargas axiais, em qualquer plano, e à torção, bem como avaliar as propriedades dos materiais quanto à sua deformação e resistência mecânica.

O resultado de aprendizagem desta unidade é a compreensão da relação entre tensão e deformação e os conceitos de tensões admissíveis e tensões últimas, visando à aplicação do conceito de coeficiente de segurança.

O contexto de aprendizagem utilizado como situação da realidade profissional (SR) proposta nesta unidade é focado em uma empresa de automóveis que possui um novo projeto de carro e montou uma equipe técnica para esse desenvolvimento. Você, aluno, foi contratado como projetista para integrar a equipe de desenvolvimento do sistema de freio do automóvel. A empresa adquiriu um novo material para o desenvolvimento do cabo de freio, assim, você terá de estudar o comportamento deste material. Sabendo que o cabo de freio trabalha sob um esforço de carregamento axial de tração, realizado a partir do acionamento de uma alavanca, o projeto deve satisfazer todas as condições de uso e segurança.

Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

- Calcular as tensões admissíveis e de ruptura do cabo, aplicando o coeficiente de segurança necessário, para então analisar se o novo material utilizado para o projeto atende às exigências necessárias.

- Calcular as deformações do cabo e apresentar um relatório com o gráfico de tensão e deformação do cabo.

- Calcular o módulo de elasticidade e analisar o comportamento do cabo em estado de utilização.

Para isso, serão tratados nas seções desta unidade os conceitos de tensões última e admissíveis, assim como coeficiente de segurança para análise de projeto. Com isso, você será capaz de dimensionar elementos estruturais, utilizando corretamente as tensões, a fim de atender sempre às condições de segurança. Também serão abordados os conceitos de tensão e deformação, bem como o estudo do comportamento dos materiais. Isso tudo fará com que você perceba que há diferença nas propriedades mecânicas entre os materiais, tais diferenças acarretarão em comportamentos distintos, o que tornam importantes essas análises para adequação de uso dos materiais nos projetos de tecnologia.

Está preparado para mais este desafio? Bons estudos!

Seção 2.1

Tensões de ruptura, coeficientes de segurança e tensões admissíveis

Diálogo aberto

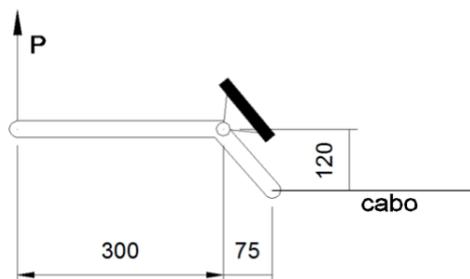
Caro aluno, após finalizar a graduação, você certamente, algum dia, trabalhará em alguma etapa de um projeto de uma estrutura ou máquina. Independentemente do estágio desse projeto, todos os profissionais técnicos têm como objetivo principal a construção da estrutura de forma econômica e segura. Esse objetivo caminha desde a concepção até a finalização do projeto, pois é preciso ser viável economicamente, sem ultrapassar os limites de segurança, e é preciso ser seguro sem consumir recursos financeiros em excesso. Na disciplina de resistência dos materiais, iniciamos esta análise a partir da segurança das estruturas, sendo que para cada projeto será estipulado um coeficiente de segurança. Assim, verificaremos as tensões últimas e admissíveis para o dimensionamento da estrutura.

Para notarmos a importância desta seção, o seu contexto de aprendizagem é focado em uma empresa de automóveis, que está desenvolvendo um novo carro. Você estará na equipe de desenvolvimento do sistema de freio do veículo.

Na situação-problema (SP) desta seção, você calculará e verificará as tensões admissíveis e de ruptura do novo cabo de freio que se pretende implantar, e reportar ao líder do projeto.

O coordenador do projeto lhe apresentou o modelo estrutural, conforme mostrado na Figura 2.1, e pediu para verificar as tensões causadas pelo acionamento da alavanca na haste horizontal do desenho com uma carga P de 200N para uma situação de travamento do sistema. Foi realizado um ensaio de tração e verificou-se que o cabo se rompe com uma carga de 5301,5 N. Neste projeto, por questão de segurança, trabalharemos com o coeficiente de segurança igual a 10.

Figura 2.1 | Modelo estrutural



Fonte: elaborada pelo autor.

Será que o esforço no cabo devido ao carregamento P atingirá as condições de segurança, ficando abaixo das cargas admissíveis e de ruptura? Com isso, quais características do cabo podemos utilizar no projeto? Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de tensões últimas e admissíveis, e coeficiente de segurança.

Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Análise e projeto

A construção de estruturas e máquinas depende de profissionais capacitados a desenvolver bons projetos, atendendo à expectativa do cliente quanto aos seus custos e com a segurança garantida. O que exatamente é projeto? A definição mais simples de projeto é um planejamento de uma ideia para sua realização. Este plano deve ter início e fim e necessita de recursos, sejam eles materiais ou humanos, para o seu desenvolvimento. Assim, um projeto é trabalhado em qualquer área do conhecimento. Essa definição é muito confundida no meio tecnológico, pois engenheiros, arquitetos e tecnólogos tratam de “projeto” os desenhos, as descrições e as especificações das máquinas e estrutura. Na língua portuguesa, ambos são projetos, mas na língua inglesa, a palavra que melhor traduz a primeira definição é *project*, e a segunda, *design*. Nesta disciplina, trataremos de projeto pela segunda definição, pois nos preocuparemos com as formas de máquinas e estruturas que atendam às suas funções de maneira segura e econômica.

Para desenvolver um projeto, o profissional técnico deve conhecer previamente os conceitos de resistência dos materiais, a fim de analisar o comportamento das estruturas idealizadas, e se elas serão capazes de suportar os esforços.



Refleta

Para o comportamento da estrutura, como é possível saber a resistência dos materiais a serem considerados no dimensionamento de uma estrutura?

Já é de conhecimento do aluno o conceito de força e tensão, porém, no desenvolvimento das análises da resistência dos materiais, é preciso conhecer quais esforços atuarão na estrutura em sua fase de utilização e também, para esses esforços, quais os limites de carregamento que o material pode suportar até sua ruptura. Esses parâmetros são importantes para o projeto. Para isso, estudaremos os conceitos de tensões últimas, tensões admissíveis e coeficiente de segurança.

Tensões últimas

A tensão última (σ_u), como o nome já diz, é a tensão que um material pode ter, obtida a partir da força última (P_u), esta força relativa à máxima tensão que atua em uma peça antes dela se romper. Pode ser expressa, então, conforme a Equação 2.1, onde A é a área da seção transversal.

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A} \quad (2.1)$$

As tensões últimas e as forças últimas também são apresentadas na literatura como tensões de ruptura (σ_{rup}) e forças de ruptura (F_{rup} ou P_{rup}). Para se conhecer essas forças e tensões para cada material, normalmente são feitos ensaios em laboratórios ou em campo, ensaios estes que têm como objetivo simular as condições de carregamento de utilização até a ruptura do material. A importância dessa informação para os projetistas é conseguir analisar o comportamento das peças estruturais até a ruptura e propor soluções que terão tensões em utilização (ou tensões atuantes) menores que as de ruptura.



Você pode pesquisar todas os ensaios padronizados pela Associação Brasileira de Normas Técnicas acessando o site: <www.abntcatalogo.com.br>. Acesso em: 22 jun. 2017.

Tensões admissíveis

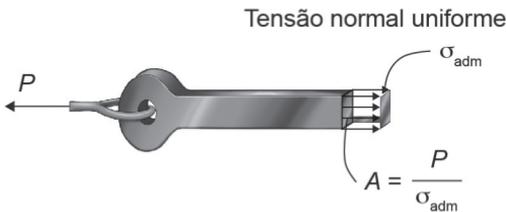
As tensões utilizadas para o dimensionamento dos elementos estruturais são as tensões admissíveis (σ_{adm}), ou seja, é admissível por questão de segurança não expor as peças estruturais às condições de ruptura. Dessa forma, esta tensão é um valor menor que a tensão de ruptura do material.

De maneira análoga às tensões últimas, a tensão admissível é expressa pela Equação 2.2, em que P_{adm} é o carregamento admissível aplicado a uma área A .

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} \quad (2.2)$$

É a partir da Equação 2.2 que são realizados os dimensionamentos estruturais. Dessa forma, podemos dimensionar uma barra sob ação de força axial, conforme Figura 2.2.

Figura 2.2 | Dimensionamento de uma barra



Fonte: Hibbeler (2010, p. 33).

Para o cálculo da área necessária da barra, precisamos definir o carregamento que atenda à necessidade do projeto. Com isso, conhecendo a tensão admissível do material utilizado, obtemos a área conforme a Equação 2.3.

$$A = \frac{P_{adm}}{\sigma_{adm}} \quad (2.3)$$

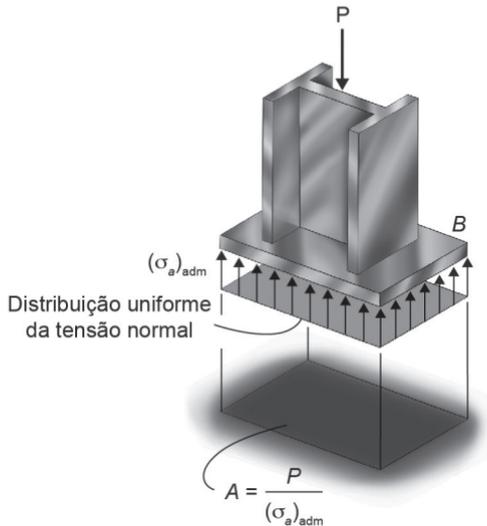
Para a utilização da Equação 2.3 no caso de uma barra tracionada, conforme Figura 2.2, a força de tração na área da seção transversal deve ter sua resultante atuando na centroide da seção transversal, isso fará com que não ocorram outros esforços, além da força normal.



Centroide: é o centro geométrico de uma figura plana.

Outra situação em que um elemento estrutural está submetido à tensão normal é para forças de compressão aplicadas em uma base. Esta situação é apresentada na Figura 2.3, onde há um carregamento de um pilar aplicado na base de uma fundação.

Figura 2.3 | Dimensionamento de uma chapa de uma base



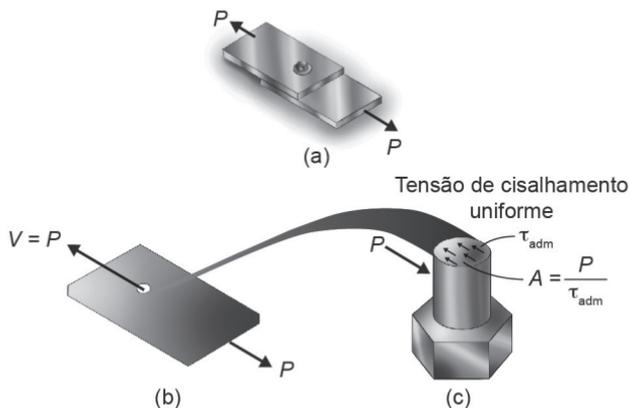
Fonte: Hibbeler (2010, p. 34).

Essa condição proporciona uma tensão de apoio (σ_a). Esta tensão pode proporcionar um esmagamento, caso exceda a tensão admissível. Para evitar isso, é necessário dimensionar a área da base conforme Equação 2.4, considerando que há um carregamento uniformemente distribuído em toda seção transversal.

$$A = \frac{P}{\sigma_{a_{adm}}} \quad (2.4)$$

No dimensionamento dos elementos de ligação, sabe-se que o principal esforço atuante é o cortante, assim, para o dimensionamento do parafuso que liga duas chapas, apresentado na Figura 2.4a, devemos verificar que o parafuso está sujeito a um cisalhamento simples (Figura 2.4c).

Figura 2.4 | Dimensionamento de um parafuso



Fonte: Hibbeler (2010, p. 34).

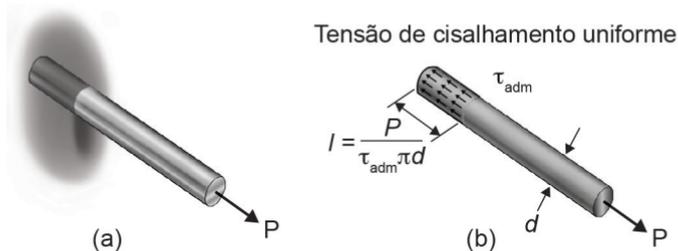
Conhecendo o esforço atuante V e a tensão admissível do parafuso ao cisalhamento, definimos sua área necessária, mostrada na Figura 2.4c, pela Equação 2.5.

$$A = \frac{V}{\tau_{adm}} \quad (2.5)$$

Para a utilização correta da Equação 2.4 para a condição apresentada na Figura 2.3, admite-se que a força cortante está uniformemente distribuída na seção transversal.

Outra situação de dimensionamento de uma peça estrutural submetido a tensões de cisalhamento é para o caso de barras engastadas. A Figura 2.5a apresenta uma barra engastada em concreto, por exemplo, e com carregamento P .

Figura 2.5 | Dimensionamento de comprimento de ancoragem



Fonte: Hibbeler (2010, p. 34).

A Figura 2.5b mostra o diagrama de corpo livre do comprimento (l) da barra que fica dentro do concreto (comprimento de ancoragem). Como há uma carga P de tração na barra, o que mantém

a peça engastada no concreto é a superfície de contato, ou melhor, a tensão de cisalhamento. A área de contato pode ser expressa pela Equação 2.6.

$$A = (\pi d)l \quad (2.6)$$

Na equação apresentada acima, d é o diâmetro da barra. Com isso, podemos calcular o comprimento de engastamento (ou ancoragem) com a Equação 2.7.

$$l = \frac{P}{\tau_{adm} (\pi d)} \quad (2.7)$$



Refleta

O carregamento último é obtido por meio de ensaios de corpos de prova até a ruptura. Como é definida a força admissível?

Coefficiente de segurança

A palavra segurança é muito utilizada no meio técnico para o dimensionamento das estruturas. Trata-se simplesmente de um dos principais objetivos de um projeto estrutural. Dentre muitas definições, a que melhor se encaixa para a área de estruturas é quando se idealiza um projeto estrutural livre de perigos, incertezas, assegurado de danos e riscos eventuais ao usuário. Outros termos que acompanham a segurança das estruturas são a resistência, a estabilidade e a durabilidade. Desenvolveremos os conteúdos sobre resistência na sequência, e os conceitos de estabilidade e durabilidade, de forma resumida, são necessários para termos uma estrutura que proporcione segurança ao usuário, sendo assim, estável e que seja durável por um período que justifique o investimento do projeto.

A resistência do material é estudada para saber, além da força de ruptura, até que fase do carregamento o corpo de prova não altera em demasia seu comportamento, mantendo propriedades iniciais desejáveis ao longo de determinado tempo. Dessa forma, para cada material é verificado um carregamento admissível. Para isso, diversos ensaios devem ser realizados, possibilitando a obtenção de uma razão do carregamento último pelo admissível, que é chamada de coeficiente de segurança (CS), conforme Equação 2.8.

$$CS = \frac{P_u}{P_{adm}} \quad (2.8)$$

O coeficiente de segurança também pode ser apresentado na literatura com o nome de fator de segurança (FS). Como vimos, a

segurança diminui o nível de incerteza. Assim, o coeficiente de segurança é acrescido aos cálculos de dimensionamento, a fim de minimizar os efeitos de tais incertezas.

O profissional técnico precisa aplicar os coeficientes de segurança em seus projetos. Tais coeficientes são especificados nas normas técnicas, referentes ao tipo de material, estrutura que se deseja dimensionar e a função que o produto ou obra projetada desempenhará. Desta forma, são observadas as condições admissíveis e últimas de projeto, e de maneira análoga à Equação 2.8, temos o coeficiente de segurança por meio da razão entre a tensão última e admissível, conforme Equação 2.9.

$$CS = \frac{\sigma_u}{\sigma_{adm}} \quad (2.9)$$



Assimile

A escolha do coeficiente de segurança trata-se de um dos mais importantes desafios técnicos. Um CS baixo pode colocar em risco o projeto, perdendo o sentido da segurança, por outro lado, um alto CS pode elevar demais os custos do projeto, inviabilizando-o economicamente.

Por fim, para o desenvolvimento do projeto é preciso levar em consideração a questão da segurança. Com isso, inicialmente é feita uma análise em um modelo pré-concebido em função da necessidade do cliente, adotando os materiais e as primeiras geometrias a serem utilizadas.

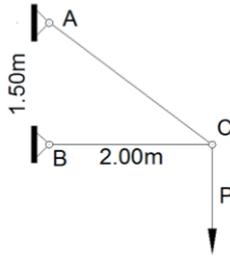
São verificadas as dimensões previamente adotadas para os elementos estruturais lançados no modelo, caso atenda às condições de segurança, as estruturas podem ser dimensionadas.



Exemplificando

Para o dimensionamento da treliça apresentada na Figura 2.6, os comprimentos das barras e o tipo de apoio foram previamente definidos para atender às necessidades do cliente.

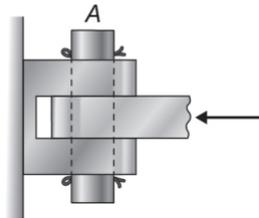
Figura 2.6 | Treliça



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, após adotada a carga P , foram calculadas as forças nas barras: $N_{bc} = 200\text{kN}(T)$ e $N_{bc} = 160\text{kN}(C)$. O material adotado para as barras possui uma $\sigma_u = 600\text{MPa}$ e $CS = 3$ para tensão normal na barra. Os parafusos estão sujeitos a cisalhamento duplo, conforme Figura 2.7, com uma $\tau_u = 350\text{MPa}$ e $CS = 3,5$ para o cisalhamento do parafuso.

Figura 2.7 | Ligação da barra



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 12).

Quais devem ser as dimensões dos parafusos e barras? Pretende-se utilizar uma barra quadrada.

Para o dimensionamento, é necessário utilizar as tensões admissíveis, assim temos:

$$\text{Para as barras: } \sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{CS} = \frac{600\text{MPa}}{3} = 200\text{MPa}$$

$$\text{Para os parafusos: } \tau_{adm} = \frac{\tau_u}{CS} = \frac{350\text{MPa}}{3,5} = 100\text{MPa}$$

Com estes resultados, dimensionaremos as barras quadradas e os parafusos (redondos).

Nas barras quadradas, aplicaremos a fórmula da tensão normal:

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \Rightarrow A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{adm}} \Rightarrow a^2 = \frac{P}{\sigma_{adm}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{P}{\sigma_{adm}}}$$

Em que A_{nec} é a área necessária para barra quadrada (a^2).

Para os parafusos redondos, aplicaremos a fórmula da tensão de cisalhamento:

$$\tau_{adm} = \frac{V}{A} \Rightarrow A_{nec} = \frac{V}{\tau_{adm}} \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = \frac{V}{\tau_{adm}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4V}{\pi \tau_{adm}}}$$

Em que A_{nec} é a área necessária dos parafusos $\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)$.

Com isso, temos:

$$\text{Barra AC: } a = \sqrt{\frac{200 \times 10^3 N}{200 \times 10^6 Pa}} = 0,003162m = 3,162mm$$

$$\text{Barra BC: } a = \sqrt{\frac{160 \times 10^3 N}{200 \times 10^6 Pa}} = 0,02828m = 28,28mm$$

$$\text{Parafuso A: } d = \sqrt{\frac{4 \times 100 \times 10^3 N}{\pi 100 \times 10^6 Pa}} = 0,3568m = 35,68mm$$

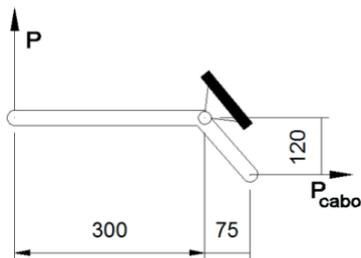
$$\text{Parafuso B: } d = \sqrt{\frac{4 \times 80 \times 10^3 N}{\pi 100 \times 10^6 Pa}} = 0,03192m = 31,92mm$$

Portanto, as medidas obtidas são as dimensões mínimas necessárias, ou seja, o projeto deverá especificar medidas superiores a estas. Normalmente, são utilizados elementos com medidas de padrão comercial.

Sem medo de errar

Retornando ao contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de freio de um automóvel. O líder do projeto desse sistema nomeou você para a análise do cabo de freio, com diâmetro de 3mm, em uma situação de travamento do sistema. A Figura 2.8 apresenta o modelo estrutural da alavanca de acionamento do cabo, as medidas estão em milímetros. Normalmente, o usuário aplica uma carga P na extremidade da alavanca, fazendo com que o cabo se desloque para a esquerda (nesta figura), acionando os freios. No entanto, na situação a ser analisada, o cabo não se deslocará, proporcionando assim um esforço de tração.

Figura 2.8 | Modelo estrutural



Fonte: elaborada pelo autor.

As especificações recomendam uma carga P limite de 200N aplicada na alavanca. Nesta SP, calcularemos e verificaremos as tensões última e admissível, e determinaremos o diâmetro do cabo, atendendo a um coeficiente de segurança igual a 10. Foi realizado ensaio de tração no material a ser utilizado no sistema e obtivemos uma carga de ruptura de 5301,5N.

Primeiramente, analisaremos qual o carregamento admissível do material e, em seguida, calcularemos no modelo, qual carregamento será aplicado no cabo. Assim, temos:

$$CS = \frac{P_u}{P_{adm}} \Rightarrow P_{adm} = \frac{P_u}{CS} = \frac{5301,5N}{10} = 530,15N$$

Para obter a força no cabo (P_{cabo}), utilizaremos a equação de condição de equilíbrio no apoio, considerando positivo o momento anti-horário em torno do apoio:

$$\Sigma M_{\text{apoio}} = 0 \Rightarrow -(P \cdot 0,30m) + (P_{cabo} \cdot 0,12m) = 0 \Rightarrow P_{cabo} = \frac{(200N \cdot 0,30m)}{0,12m} = 500N$$

Portanto, temos que $P_{cabo} \leq P_{adm}$. Podemos observar que a situação de carregamento de projeto está abaixo do carregamento admissível, com isso, podemos prosseguir nos cálculos e análises.

Agora, aplicaremos o diâmetro de 3 mm para o cabo, para obtermos as tensões última e admissível do material:

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A} = \frac{5301,5N}{\frac{\pi(0,003m)^2}{4}} \approx 750 \times 10^6 Pa = 750MPa$$

Portanto,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{CS} = \frac{750MPa}{10} = 75MPa$$

Para finalizar, podemos obter a tensão atuante no projeto:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{500N}{\frac{\pi(0,003m)^2}{4}} = 70,7 \times 10^6 Pa = 70,7MPa$$

Após esse estudo, podemos aprovar o uso do material para o sistema de freio. Assim, o cabo segue as seguintes especificações: $\phi = 3\text{mm}$, $\sigma_{adm} = 75\text{MPa}$, $\sigma_u = 750\text{MPa}$ e $CS = 10$.

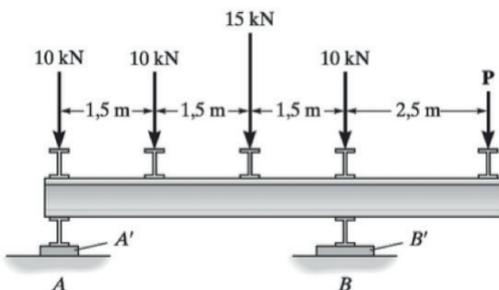
Avançando na prática

Análise estrutural sob novo carregamento

Descrição da situação-problema

Para adaptar uma base existente, mostrada na Figura 2.9, de um equipamento antigo para um novo, será necessário descobrir qual o máximo carregamento P para que as chapas das bases A' e B' suportem esse novo carregamento. As chapas A' e B' têm as dimensões de $80\text{ mm} \times 80\text{ mm}$ e $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$, respectivamente. A tensão normal de ruptura do material das chapas é de 15 MPa e o coeficiente de segurança é igual a 5 .

Figura 2.9 | Viga



Fonte: Hibbeler (2010, p. 41).

Resolução da situação-problema

Para descobrir qual a máxima carga P , calcularemos o equilíbrio na viga. Neste caso, podemos definir qual a máxima reação de apoio, obtida por meio da fórmula de tensão normal admissível.

Primeiramente, descobriremos a tensão admissível:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{CS} = \frac{15\text{MPa}}{5} = 3\text{MPa}.$$

Agora, podemos definir a máxima reação de apoio.

$$\text{Para o apoio A: } \sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{R_a}{A} \Rightarrow R_a = \sigma_{adm} A = (3\text{MPa})(80\text{mm})^2 = 19.200\text{N} = 19,2\text{kN}$$

$$\text{Para o apoio B: } \sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{R_b}{A} \Rightarrow R_b = \sigma_{adm} A = (3\text{MPa})(100\text{mm})^2 = 30.000\text{N} = 30\text{kN}$$

Seção 2.2

Relação entre tensão e deformação

Diálogo aberto

Caro aluno, você já deve ter percebido a importância da resistência dos materiais para a área de estruturas, que, no contexto da disciplina de resistência dos materiais, referem-se às estruturas de máquinas, automóveis, pontes, edificações, reservatórios, entre outros. Em qualquer área da tecnologia que desenvolva um novo projeto com estrutura física, a resistência dos materiais fará parte dos estudos. Até o presente momento, já abordamos diversos conceitos correlacionados às tensões para dimensionamento das estruturas, entretanto, nesta seção, veremos outro conceito necessário a ser analisado pelo profissional técnico que dimensiona estruturas. Este novo assunto é a deformação. Em muitos projetos de estrutura, que atendem às exigências de normas técnicas para sua utilização, não é fácil perceber a deformação que ocorre. Entretanto, há estruturas que precisam deformar para atender às exigências técnicas de utilização. Por exemplo, você já deve ter notado que nas arquibancadas de estádio de futebol, quando a torcida começa a pular, a arquibancada vibra!

Nesta seção, estudaremos o conceito de tensão e deformação para um carregamento axial. Veremos o comportamento de diferentes tipos de materiais por meio da análise e interpretação do diagrama de tensão e deformação.

O contexto de aprendizagem utilizado como situação da realidade profissional trata de uma empresa que está desenvolvendo um novo carro, sendo que você, contratado como projetista, faz parte da equipe de desenvolvimento do sistema de freio do veículo. Assim, na situação-problema desta seção, você calculará as deformações do cabo de freio e apresentará um relatório com o gráfico “tensão e deformação” do cabo. Para isso, foi realizado um ensaio de tração no material do cabo de freio. Para um corpo de prova com diâmetro de 3 mm e comprimento de 300 mm, foram obtidos os dados de carregamento e deformação do ensaio, conforme é apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Dados de ensaio de tração do material

Carga (N)	δ (mm)								
0	0,0000	10 00	0,0631	20 00	0,1271	28 00	0,4371	50 00	1,1571
20 0	0,0125	12 00	0,0759	22 00	0,1671	30 00	0,5171	53 00	1,4571
40 0	0,0250	14 00	0,0887	24 00	0,2071	35 00	0,6071	50 00	1,8571
60 0	0,0375	16 00	0,1015	26 00	0,2571	40 00	0,7571	48 00	2,2571
80 0	0,0503	18 00	0,1143	26 00	0,3071	45 00	0,9571	45 00	2,6571

Fonte: elaborada pelo autor.

Será possível classificar o tipo de material por meio da análise e interpretação do diagrama tensão-deformação?

Para resolver esta situação-problema, devemos conhecer e compreender o conceito de tensão e deformação, além de saber interpretar o diagrama tensão-deformação dos diferentes tipos de materiais.

Preparado? Bons estudos!

Não pode faltar

Tensão e deformação - Carregamento axial

A resistência de um material é a sua capacidade de resistir a esforços, momento em que as tensões no material são geradas. O carregamento sobre o material, além de proporcionar tensões, causa mudança de forma e tamanho. Estas mudanças são definidas como deformações.

As deformações nas estruturas, causadas pela aplicação de cargas, devem ser analisadas pelos profissionais técnicos, pois este fato pode ser imperceptível a olho nu, porém, podem ocorrer mudanças indesejáveis no comportamento e desempenho da estrutura. Também há casos em que ocorrem deformações perceptíveis nas estruturas, que podem proporcionar desconforto aos usuários, por sentirem a estrutura se movimentar. A princípio, a mecânica newtoniana estuda corpos indeformáveis, entretanto, no mundo real, essa situação não existe, posto que as estruturas sempre sofrerão deformação. A questão é, se tais deformações são percebidas ou não pelos usuários. As normas técnicas estabelecem limites para as deformações nas estruturas, os quais devem ser analisados pelos projetistas.

Quando um carregamento é aplicado a uma estrutura, ele proporciona a ela tensões e deformações. Veremos que estes temas estão associados.



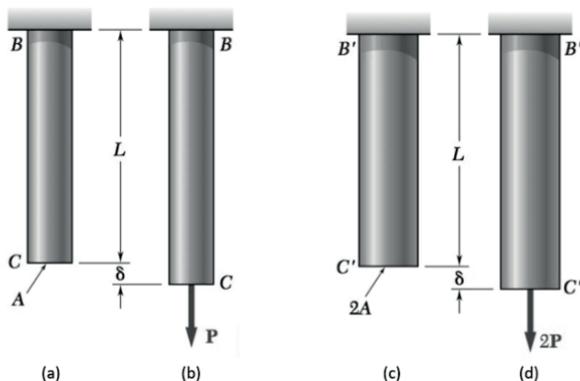
Assimile

Toda vez que uma estrutura recebe um carregamento, ela tende a apresentar mudanças em suas dimensões. Tais mudanças são definidas como deformações, e estas podem ser perceptíveis, sem a presença de equipamentos de aferição, ou não.

Deformação específica normal sob carregamento axial

A deformação de um material é representada pela letra grega δ (delta). A Figura 2.13 apresenta uma barra BC (Figura 2.13a), que sofre um carregamento axial P aplicado em uma área A, ocorrendo assim uma alteração no comprimento original da barra, caracterizado pela deformação δ (Figura 2.13b). A mesma deformação ocorre para a barra B'C' (Figura 2.13c), a qual possui uma área de seção transversal 2A e tem aplicada uma carga 2P (Figura 2.13d). Nos dois casos, podemos notar que a tensão normal média é igual ($\sigma = P/A = 2P/2A$).

Figura 2.13 | Deformação em barras com carregamento axial



Fonte: Beer et al. (2015, p. 51).

A razão da deformação pelo comprimento da barra (L) é denominada de deformação específica normal (ϵ), expressa pela Equação 2.10:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2.10)$$

A deformação específica é representada pela letra grega épsilon, e sua unidade é expressa pela razão de duas grandezas de mesma unidade de medida, assim, no sistema internacional, temos m/m.



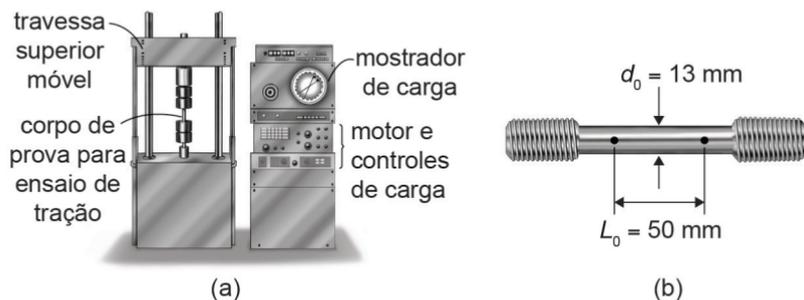
Refleta

Para um carregamento no corpo de prova, ou nas estruturas in loco, como podemos medir a deformação?

Diagrama tensão-deformação

A deformação do material é obtida por meio de ensaios experimentais. Para carregamento axial, pode-se ensaiar um corpo de prova com carregamento de tração ou de compressão. Assim, uma máquina, conforme mostra a Figura 2.14a, é ajustada para colocação de um corpo de prova que se deseja ensaiar. Nela, a travessa superior móvel, quando deslocada para cima, traciona o corpo de prova, e quando movimentada para baixo, comprime o material. A máquina, quando acionada, possui um mostrador de carga que permite ao laboratorista fazer as leituras do carregamento.

Figura 2.14 | Desenho esquemático de uma máquina de ensaio de tração e compressão



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 57).

Para medir a deformação neste ensaio, é marcado no corpo de prova o comprimento L_0 a partir de dois pontos de referência, conforme mostra a Figura 2.14b. No ensaio de tração, os pontos se afastam (aumenta o comprimento do corpo de prova), e temos uma leitura do novo comprimento L . A diferença entre os comprimentos final e inicial fornece o valor da deformação, ou seja, $\delta = L - L_0$. Para pequenas deformações, o sucesso do ensaio apenas é alcançado com a utilização de sensores de deformação, conhecidos como extensômetros.

A partir dos dados obtidos no ensaio de tração, podemos calcular a tensão normal média, expressa pela Equação 2.11:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (2.11)$$

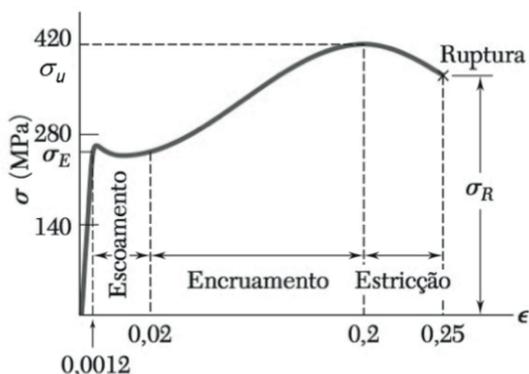
Na equação, o carregamento P é aplicado sobre a área inicial (A_0) da seção transversal do corpo de prova. E a deformação específica normal será dada pela Equação 2.12.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (2.12)$$

A partir desses resultados, podemos obter um diagrama de tensão e deformação, para deformação específica na abscissa e a tensão normal na ordenada. Esse diagrama pode variar muito de um material para outro, dependendo das características mecânicas de cada material. Uma interpretação importante desse diagrama é a possibilidade de identificar dois grupos de materiais: os dúcteis e os frágeis.

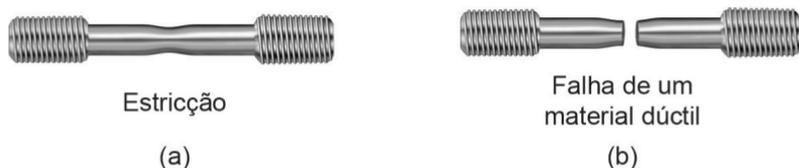
Os materiais dúcteis podem sofrer grandes deformações antes de se romper. Exemplos desse tipo de material são o aço estrutural e quaisquer outros metais. Para o ensaio de tração, o corpo de prova de um material dúctil é submetido a um carregamento crescente, apresentando um aumento proporcional em seu comprimento. Com isso, tem-se uma reta no início do diagrama com um coeficiente angular elevado, conforme mostra a Figura 2.15, até a tensão de escoamento (σ_e). A partir desse ponto, o material escoou, ou seja, sofre uma grande deformação com pouco aumento de carga.

Figura 2.15 | Diagrama tensão-deformação de um material dúctil (aço estrutural)



Após o início do escoamento, nota-se na Figura 2.15 que a deformação pode ser até 200 vezes maior do que antes de iniciar o escoamento. Quando o corpo de prova atinge o valor máximo (σ_u), inicia-se uma redução localizada em seu diâmetro, devido a uma perda de resistência local, conhecida como estricção, fenômeno que pode ser visto na Figura 2.16a.

Figura 2.16 | Perda de resistência local

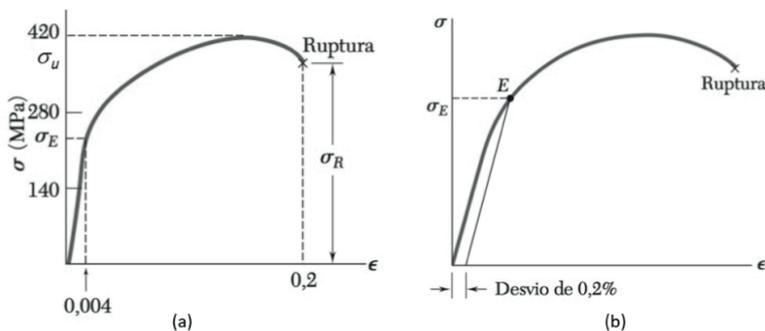


Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 59)

Após o início da estricção, um carregamento menor do que o carregamento último é o suficiente para manter o material se deformando até a sua ruptura (σ_r). Podemos notar na Figura 2.16 que a região de ruptura tem o formato de um cone, com um ângulo aproximadamente de 45° , por conta da estricção.

O diagrama tensão-deformação da Figura 2.15 é de um aço estrutural, mas não são todos os materiais dúcteis que apresentam o diagrama desta forma. A Figura 2.17a apresenta o diagrama tensão-deformação de outro material dúctil, no caso o alumínio.

Figura 2.17 | Diagrama tensão-deformação de um material dúctil (alumínio)



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 54).

Podemos observar que o início do diagrama tensão-deformação do alumínio é diferente do aço estrutural, sendo que o alumínio não apresenta para as tensões um trecho horizontal (patamar de

escoamento). Este material apresenta um aumento de tensões, não linear, até a tensão última. Com isso, não fica claro em que ponto no diagrama tem-se a tensão de escoamento. Convencionou-se chamar de tensão de escoamento aquela que se obtém traçando uma reta paralela ao trecho inicial do diagrama, partindo do eixo da deformação específica igual a 0,2%, conforme Figura 2.17b. Com isso, E é o ponto da tensão de escoamento, obtido no encontro da curva do diagrama, ao fim da reta traçada.

Uma forma de especificar a ductilidade de um material é pelo alongamento percentual ($Al_{\%}$) ou pela redução percentual de área (Red_A). Assim, alongamento percentual é definido conforme a Equação 2.13.

$$Al_{\%} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0} \cdot 100 \quad (2.13)$$

Em que L_0 é o comprimento do corpo de prova e o L_{rup} é o comprimento na ruptura para o ensaio de tração. E a redução percentual de área é definida pela Equação 2.14:

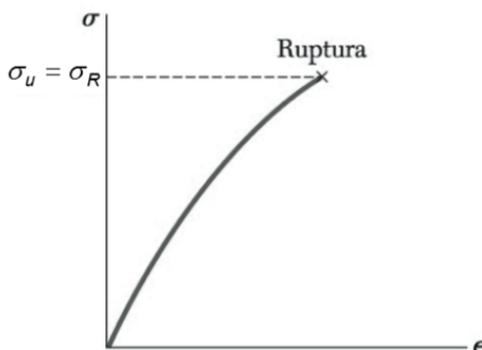
$$Red_A = \frac{A_0 - A_R}{A_0} \cdot 100 \quad (2.14)$$

No qual A_0 é a real seção transversal do corpo de prova e A_R é a área mínima da ruptura. Para o aço estrutural, essa redução é da ordem de 60% a 70%.

Todos os diagramas apresentados são para ensaio de tração. Os materiais dúcteis, utilizados para ensaio de compressão, apresentam um diagrama muito semelhante, não tendo apenas a estricção do material.

Os materiais frágeis não exibem a faixa de escoamento. Exemplos desses materiais são: ferro fundido, vidro, pedra e concreto. A ruptura destes materiais ocorre de forma brusca, não ocorrendo a estricção, rompendo-se em uma superfície perpendicular ao carregamento, sem a formação cônica da região da ruptura, característica da estricção (Figura 2.16). Com isso, pode-se dizer que os materiais frágeis se rompem principalmente pelas tensões normais. A Figura 2.18 apresenta o diagrama tensão e deformação de um material frágil. Podemos notar que a tensão última (σ_u) e a tensão de ruptura (σ_r) é a mesma para esse tipo de material.

Figura 2.18 | Diagrama tensão-deformação de um material frágil



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 55).

A maioria dos materiais frágeis possui uma tensão última muito maior para os ensaios de compressão do que para ensaio de tração. Isso ocorre devido às imperfeições da composição do material, que proporcionam redução de suas resistências à tração.



Pesquise mais

Veja mais sobre as propriedades mecânicas dos materiais no capítulo 3 do livro:

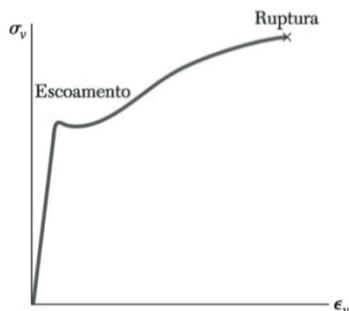
HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010, p.57-62.

Tensões e deformações específicas verdadeiras

As tensões nos diagramas das Figuras 2.15, 2.17 e 2.18 foram obtidas por meio da razão do carregamento (P) pela área da seção transversal (A_0) do corpo de prova, esta é área inicial, sem levar em conta a deformação no decorrer do ensaio. No entanto, a área da seção transversal reduz com o acréscimo do carregamento, com isso, as tensões nos diagramas não correspondem aos valores reais de tensão no material.

As tensões verdadeiras (σ_v) são obtidas pelo carregamento dividido pela área da seção deformada (Figura 2.19).

Figura 2.19 | Tensões verdadeiras e deformações específicas verdadeiras para um material dúctil



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 57).

A deformação específica verdadeira (ϵ_v), ao invés de utilizar a deformação (δ) pelo comprimento inicial (L), utiliza-se de todos os valores consecutivos de L anotados no ensaio. Com isso, define-se a deformação específica verdadeira como o somatório dos valores $\Delta\epsilon$ ($\Delta L/L$), conforme Equação 2.15.

$$\epsilon_v = \Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L) \quad (2.15)$$

Substituindo a somatória por uma integração, a deformação específica verdadeira é expressa pela Equação 2.16.

$$\epsilon_v = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (2.16)$$

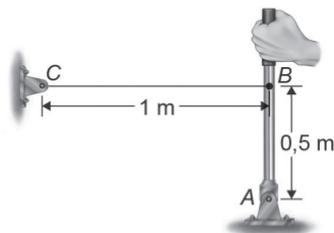
O diagrama da Figura 2.19 apresenta o comportamento real do material. Por outro lado, é comum utilizar o diagrama visto anteriormente (Figura 2.17 e 2.18), pela facilidade de obtenção dos resultados.



Exemplificando

Determinar a deformação específica no cabo BC, sabendo que, ao aplicar uma carga na extremidade B, o cabo deforma 1 mm.

Figura 2.20 | Alavanca



Fonte: Hibbeler (2010, p. 50).

A deformação específica é a razão entre a deformação que ocorre na peça pelo seu comprimento. Assim, temos em metro: $\delta = 0,001m$ e $L = 1m$. Desta forma:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0,001m}{1m} = 0,001m/m$$

Trata-se de uma resolução simples. É importante observar que a deformação utilizada no diagrama tensão-deformação é a deformação específica (ε), com isso, deve-se conhecer o comprimento e a deformação (δ) do corpo de prova para obter a deformação específica.

Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido a importância do diagrama tensão-deformação, e como este gráfico pode ser útil para identificarmos os tipos de materiais. Na próxima seção, continuaremos abordando o diagrama tensão-deformação.

Sem medo de errar

Retomando o contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de freio de um automóvel. Nesta fase do projeto, você deve analisar e calcular a deformação no cabo por meio de um ensaio de tração no material. Os dados do ensaio estão contidos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Dados de ensaio de tração do material

Carga (N)	δ (mm)								
0	0,0000	10	0,0631	20	0,1271	28	0,4371	50	1,1571
20	0,0125	12	0,0759	22	0,1671	30	0,5171	53	1,4571
40	0,0250	14	0,0887	24	0,2071	35	0,6071	50	1,8571
60	0,0375	16	0,1015	26	0,2571	40	0,7571	48	2,2571
80	0,0503	18	0,1143	26	0,3071	45	0,9571	45	2,6571

Fonte: elaborada pelo autor.

O corpo de prova utilizado para este ensaio tem um diâmetro de 3 mm e comprimento de 300 mm. Lembrando que as especificações de projeto do cabo são: $\phi = 3mm$, $\sigma_u = 750MPa$, $\sigma_u = 750MPa$ e $CS = 10$.

Com estas informações, vamos calcular as tensões e as deformações no material e plotar os resultados no diagrama tensão-deformação.

Para o calcular as tensões normais, utilizaremos a expressão a seguir:

$\sigma = \frac{P}{A}$, onde o carregamento é apresentado na Tabela 2.1 e a área obtida pela expressão:

$$A = \pi r^2 = \pi (0,0015 \text{ m})^2 = 7,07 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Podemos obter a deformação específica a partir da razão entre a deformação apresentada na Tabela 2.1 e o comprimento do corpo de prova, que é $L = 0,3\text{m}$:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Após calcular todas as tensões e as deformações específicas, a Tabela 2.2 apresenta os resultados:

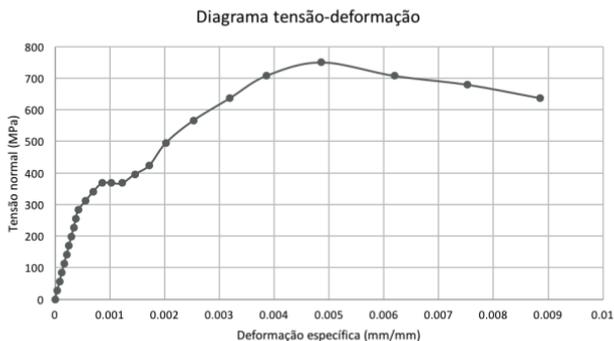
Tabela 2.2 | Tensão e deformação do ensaio de tração

σ (MPa)	ε								
0,00	0,0000 0	141,47	0,0002 1	282,94	0,0004 2	396,12	0,0014 6	707,36	0,0038 6
28,29	0,0000 4	169,77	0,0002 5	311,24	0,0005 6	424,41	0,0017 2	749,80	0,0048 6
56,59	0,0000 8	198,06	0,000 3	339,53	0,0006 9	495,15	0,0020 2	707,36	0,0061 9
84,88	0,0001 3	226,35	0,0003 4	367,82	0,0008 6	565,88	0,0025 2	679,06	0,0075 2
113,18	0,0001 7	254,65	0,0003 8	367,82	0,0010 2	636,62	0,0031 9	636,62	0,0088 6

Fonte: elaborada pelo autor.

Com esses resultados, podemos desenhar o diagrama tensão-deformação, analogamente ao mostrado na Figura 2.21.

Figura 2.21 | Diagrama tensão-deformação



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando o diagrama, podemos verificar que se trata de um material dúctil com:

$$\sigma_u = 749,80\text{MPa} \text{ e } \sigma_{rup} = 636,62\text{MPa}$$

Como a tensão admissível de projeto é de 75MPa, devemos verificar qual a deformação específica para essa tensão. Como esta tensão está na parte reta do gráfico, e não consta na tabela, podemos obter a deformação específica para a tensão admissível interpolando os seguintes dados da Tabela 2.2:

$$56,59\text{MPa} = 0,00008\text{ m/m}$$

$$75\text{MPa} = x$$

$$84,88\text{MPa} = 0,00013\text{ m/m}$$

Com isso, temos:

$$\frac{0,00013 - x}{0,00013 - 0,00008} = \frac{84,88 - 75}{84,88 - 56,59} \Rightarrow x = 0,000125\text{ m/m}$$

Podemos calcular a deformação:

$$\delta = \varepsilon \cdot L = (0,000125\text{ m/m})(0,3\text{m}) = 0,0000375\text{m} = 0,0375\text{mm}$$

Após a realização do ensaio, podemos concluir que o cabo utilizado é um material dúctil e terá uma $\varepsilon = 0,000125\text{ m/m}$ para a tensão admissível de projeto.

Avançando na prática

Controle de qualidade na construção civil

Descrição da situação-problema

Na construção de uma edificação em concreto armado, o concreto é um material frágil, o projeto estrutural especifica a utilização de um concreto com $f_{ck} = 20\text{MPa}$. Este f_{ck} é a tensão de compressão característica do concreto. Esse valor é obtido por ensaio de compressão simples. A Tabela 2.3 apresenta os dados do ensaio de compressão para um corpo de prova de 150mm de diâmetro por 300mm de altura. Esse tipo de concreto pode ser utilizado na construção?

Tabela 2.3 | Dados do ensaio de compressão do concreto

Carga (kN)	Contração (mm)
0,0	0,0000

25,0	0,0150
47,5	0,0300
82,5	0,0500
102,5	0,0650
127,5	0,0850
150,0	0,1000
172,5	0,1125
192,5	0,1250
232,5	0,1550
250,0	0,1750
265,0	0,1875

Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 68).

Resolução da situação-problema

O concreto, por ser um material frágil, tem-se que a tensão de ruptura é igual à tensão última. Estas tensões são obtidas utilizando o resultado do carregamento último do ensaio, $P_u = 265\text{kN}$.

Desta forma, obteremos a tensão normal:

$$f_{ck} = \sigma_u = \frac{P_u}{A} = \frac{265 \times 10^3}{\frac{\pi (0,15)^2}{4}} \approx 15 \times 10^3 \text{ Pa} = 15 \text{ MPa}.$$

Como o f_{ck} calculado para esse tipo de concreto (15MPa) é menor que o f_{ck} necessário, especificado no projeto (20MPa), devemos escolher outro tipo de concreto.

Faça valer a pena

1. Os materiais dúcteis podem sofrer grandes deformações antes de se romperem. Exemplos desses materiais são o aço estrutural e outros metais. Uma forma de especificar a ductilidade de um material é pelo alongamento percentual ou pela redução percentual de área.

Para os dados apresentados na Tabela 2.4, determine o percentual de alongamento do corpo de prova, que possui diâmetro de 13 mm e comprimento de 50 mm.

3. O diagrama tensão-deformação pode variar muito de um material para outro, dependendo das características mecânicas de cada material. Uma interpretação importante deste diagrama é a possibilidade de identificar grupos de materiais.

Desenhe o diagrama tensão-deformação com os dados da tabela a seguir e identifique qual é o tipo de material do corpo de prova.

Tabela 2.6 | Dados de ensaio

σ (MPa)	ϵ (mm/mm)
0,0	0,0000
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 68).

- a) Plástico.
- b) Dúctil.
- c) Frágil.
- d) Rígido.
- e) Duro.

Seção 2.3

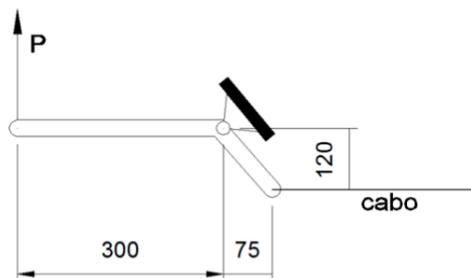
Comportamento dos materiais

Diálogo aberto

Caro aluno, no encerramento desta unidade sobre o estudo do comportamento dos materiais, ressaltamos a continuidade do conteúdo e a importância do entendimento progressivo entre as seções. Com isso, você perceberá a importância do diagrama tensão-deformação para o enunciado de uma lei que talvez você já tenha alguma familiaridade, a lei de Hooke. Com certeza no Ensino Médio ou até mesmo na física da graduação esse tema é tratado em molas com comportamento elástico. Você verá a importância disso nesta seção, na qual estudaremos a lei de Hooke para materiais em comportamento elástico, a fim de sermos capazes de determinar a deformação de um elemento estrutural com carregamento axial.

Para contextualizar esse assunto, continuaremos utilizando como situação da realidade profissional o contexto de aprendizagem focado na empresa que está desenvolvendo um novo carro, em que você faz parte da equipe de desenvolvimento do sistema de freio. Assim, na situação-problema desta seção, você calculará o módulo de elasticidade e analisará o comportamento do cabo em estado de utilização, apresentado na Figura 2.1, da primeira seção, calculando a deformação na pior situação de projeto e para a situação máxima admissível. Para isso, vamos relembrar dados importantes do projeto que já obtivemos nas seções anteriores.

Figura 2.21 | Modelo estrutural



Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 2.7 resume as informações impostas em projetos, são elas a tensão admissível e última, o coeficiente de segurança e a deformação específica para a tensão admissível. A Tabela 2.8 apresenta também o carregamento de projeto (P), o carregamento máximo admissível (P_{adm}), o diâmetro do cabo (ϕ) e o comprimento do cabo (L).

Tabela 2.7 | Informações do projeto

CP	σ_{adm}	σ_u	CS	ϵ	Projeto	P	P_{adm}	ϕ	L
	75MPa	750MPa	10	0,00012 5		500N	530,15N	3mm	1,00m

Fonte: elaborada pelo autor.

Para resolver essa situação-problema, devemos aprender e compreender os conceitos da lei de Hooke, módulo de elasticidade, comportamento elástico e plástico dos materiais, cargas repetidas, fadigas, tudo para deformação de barras sujeitas ao carregamento axial.

Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Lei de Hooke e módulo de elasticidade

Caro aluno, conhecendo o diagrama tensão-deformação, sabemos que as estruturas são submetidas a esforços. A partir desses esforços, podemos obter as tensões com as deformações correspondentes e plotar tais valores no diagrama, conforme Figura 2.22, e interpretá-los. No início da curva no diagrama, identificamos que há uma proporcionalidade entre a tensão e a deformação, portanto, a relação entre as duas variáveis é linear, ou seja, é representada por uma reta. Esse trecho proporcional pode ser expresso pela Equação 2.17:

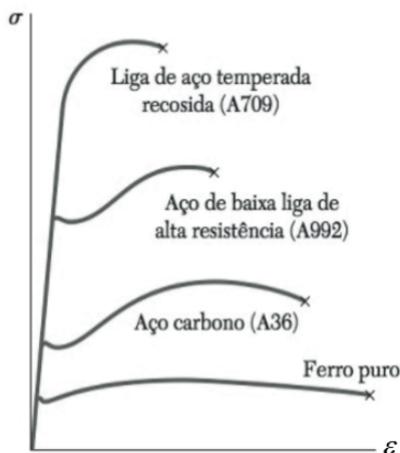
$$\sigma = E\epsilon \quad (2.17)$$

Esta expressão trata-se da Lei de Hooke, definida por Robert Hooke em 1676. O coeficiente E é chamado de módulo de elasticidade do material, ou módulo de Young. Esse módulo representa a inclinação da reta na região inicial do diagrama tensão-deformação. A deformação específica é uma grandeza adimensional, desta forma, o módulo de elasticidade é expresso pela mesma unidade da tensão normal: Pascal, para o sistema internacional, e psi ou ksi para o sistema inglês de unidades.

O módulo de elasticidade caracteriza a rigidez, e a lei de Hooke somente é válida se o material apresentar um comportamento elástico linear. Desta forma, o módulo de elasticidade é uma das propriedades mecânicas mais importantes que estudamos na resistência dos materiais.

A Figura 2.22 apresenta vários diagramas tensão-deformação para o ferro e diferentes tipos de aço. Podemos notar que todos os materiais apresentam diferentes tensões de escoamento, tensões últimas e valores finais de deformação.

Figura 2.22 | Diagramas de tensão-deformação para diferentes materiais



Fonte: Beer et al. (2015, p. 58).

Isto pode ocorrer devido ao processo de produção, composição química, microestrutura e defeitos nos materiais. Mesmo apresentando diferentes propriedades físicas e mecânicas, todos possuem o mesmo módulo de elasticidade no trecho inicial, ou seja, todos os materiais possuem a mesma rigidez, com a mesma capacidade de resistir à deformação neste trecho inicial.



Assimile

Um diagrama tensão-deformação convencional é importante para todas as áreas de tecnologia que trabalhem com materiais sólidos, porque o diagrama proporciona um meio para obtenção de informações sobre a resistência à compressão ou à tração de um material, sem considerar o tamanho ou a forma física da peça.

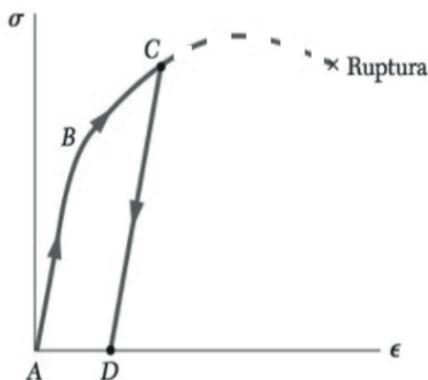
Comportamento elástico e plástico dos materiais

Se a intensidade e o tipo de deformação sofridos deixarem de existir quando for retirado o carregamento, diz-se que o material apresenta um comportamento elástico. O valor limite para que isso ocorra é conhecido como limite de elasticidade.

Para os materiais que apresentam um início de escoamento fácil de identificar, ou seja, uma região reta muito bem definida, conforme Figura 2.15 da seção anterior, seu limite de elasticidade e seu limite de proporcionalidade são os mesmos que a tensão de escoamento. Portanto, seu comportamento elástico ocorre até esta tensão de escoamento.

Caso o limite de elasticidade seja ultrapassado, o material sofrerá uma deformação. No entanto, quando for descarregado, não voltará mais para suas dimensões iniciais, ou seja, o material apresentará uma deformação permanente ou plástica. A Figura 2.23 apresenta a situação que acabamos de descrever em um diagrama tensão-deformação.

Figura 2.23 | Diagrama de tensão-deformação de um material dúctil



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 59).

O material dúctil da Figura 2.23 recebe um carregamento que tem início no ponto A e vai até o ponto C, quando é descarregado. Por ter passado o limite de proporcionalidade, representado pelo trecho reto AB, o material apresentará uma deformação permanente, registrada no ponto D. Essa deformação plástica, em muitos casos, não ocorre apenas quando é atingido o limite de tensão de escoamento, também pode ocorrer devido ao tempo em

que a estrutura fica sujeita ao carregamento. Assim, a deformação plástica, que depende da tensão, é conhecida por deformação lenta. A deformação que depende do tempo de carregamento, e também da temperatura, é conhecida por fluência.

Para os materiais em que não é possível identificar facilmente o início do escoamento, a determinação da tensão convencional de escoamento é obtida a partir da Figura 2.17, apresentada na seção anterior. Nesse caso, a linha reta utilizada para definir a tensão convencional de escoamento, é a curva de descarregamento depois que atingida a tensão de escoamento. Próximo à tensão convencional de escoamento, o material não se comportará perfeitamente elástico, tendo uma pequena deformação plástica na proximidade do ponto C.



Refleta

Existe a possibilidade de ocorrer uma ruptura frágil para os materiais dúcteis? Se sim, qual é o motivo desse comportamento, que determina uma ruptura típica de materiais frágeis?

Cargas repetidas e fadigas

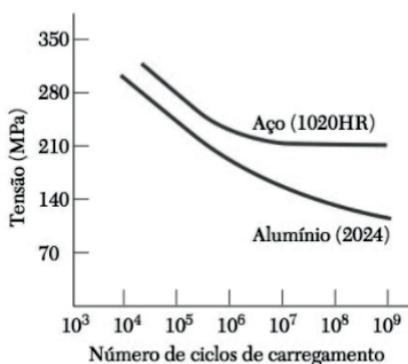
Vimos que o material que sofre um carregamento sem ultrapassar os limites de elasticidade estará sempre retornando às dimensões iniciais quando descarregado. Essa condição é válida para materiais elásticos, porém, há um limite de carregamento que um material pode suportar repetidas vezes, em um determinado tempo. Esse limite pode variar para cada material, mas devemos saber que não existirá um material com capacidade de carga infinita. Os materiais possuem uma vida útil, assim, é preciso conhecê-la para não extrapolar, fazendo com que o material sofra uma ruptura, mesmo atendendo às condições iniciais de projeto. Esse fenômeno é conhecido por fadiga, e a ruptura por fadiga é sempre uma ruptura frágil (sem "aviso"), até mesmo para os materiais dúcteis.

Para o projeto de estruturas e componentes de máquinas, é necessário considerar a fadiga do material. Portanto, é preciso conhecer os limites de carregamento repetidos e alternados que o material pode suportar. O ciclo de carregamento que pode ocorrer durante a vida útil da estrutura varia muito de uma condição para outra. Por exemplo, uma ponte rolante pode ser carregada repetidas

vezes por 25 anos e um virabrequim do motor de um carro pode ser carregado até o veículo rodar 300.000 km.

O número de ciclos de carregamento repetidos ou alternados de um material aplicado em uma estrutura, normalmente é obtido experimentalmente e também há normas regulamentadoras que recomendam métodos para estas análises. A Figura 2.24 apresenta um gráfico com os resultados obtidos para um ensaio de números de ciclos de carregamento.

Figura 2.24 | Número de ciclos de carregamento



Fonte: Beer et al. (2015, p. 61).

Na Figura 2.24, podemos observar que para valores altos de tensão de ruptura há um número de ciclos de carregamento menor, tendo em vista que as tensões mais baixas proporcionam um maior número de ciclos de carregamento, aumentando assim o limite de utilização do material antes de sua fadiga. Vale ressaltar que a fadiga independe do limite de resistência para os materiais que não são carregados por um esforço repetido.



Pesquise mais

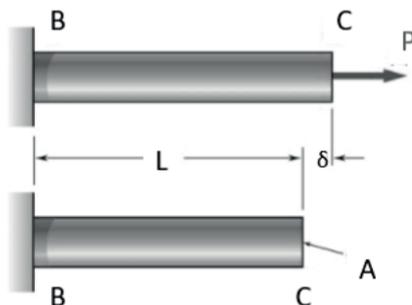
Veja mais sobre o comportamento elástico e plástico dos materiais na página 59 do livro:

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

Deformações de barras sujeitas a cargas axiais

Para uma barra com carregamento axial, conforme será mostrado na Figura 2.25, se a tensão atuante não exceder o limite de elasticidade do material, podemos aplicar a lei de Hooke.

Figura 2.25 | Deformação em barra axialmente carregada



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 62).

Assim, podemos expressar a deformação específica conforme a Equação 2.18.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \quad (2.18)$$

Podemos expressar a deformação em função da deformação específica, conforme Equação 2.19.

$$\delta = \varepsilon L \quad (2.19)$$

Juntando a Equação 2.18 e 2.19, obtemos a Equação 2.20.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (2.20)$$

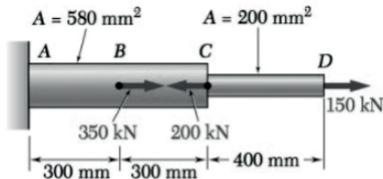
A Equação 2.20 pode ser utilizada apenas para peças estruturais com seções transversais constantes e sujeitas a uma única carga axial, ou seja, que tenham o módulo de elasticidade constante em relação à tensão-deformação. Para estruturas que tenham mais de uma força aplicada em vários pontos diferentes ou tenham dimensões variáveis com diferentes materiais, conforme Figura 2.26 do *Exemplificando* a seguir, podemos definir a deformação total respeitando a Equação 2.20, observando em cada seção a ocorrência de alteração em alguma das variáveis da equação. Assim, para cada mudança dessas, podemos chamar as variáveis de P_i , L_i , A_i e E_i , sendo respectivamente, a força, o comprimento, a área e o módulo de elasticidade correspondente a uma trecho i . Expressaremos a deformação total conforme a Equação 2.21.

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (2.21)$$



Neste exemplo, determinaremos a deformação na barra para o carregamento apresentado na Figura 2.26. Sabendo que o segmento AC tem $E = 250\text{GPa}$ e o segmento CD tem $E = 200\text{GPa}$.

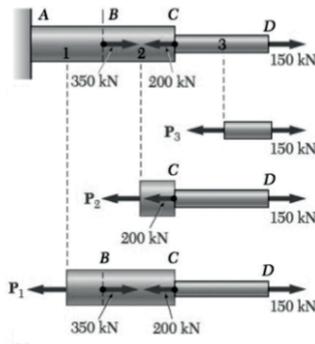
Figura 2.26 | Desenho esquemático e distribuição de tensões na barra



Fonte: Beer et al. (2015, p. 63).

Primeiramente, precisamos identificar as forças internas ao longo da barra. Assim, aplicaremos o método de seções e desenharemos os diagramas de corpo livre de cada segmento, a fim de obter as forças internas, conforme mostra a Figura 2.27.

Figura 2.27 | Diagrama de corpo livre



Fonte: Beer et al. (2015, p. 63).

Aplicando a equação de condição de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, temos:

$$P_1 = 300\text{kN}, P_2 = -50\text{kN} \text{ e } P_3 = 150\text{kN}.$$

Utilizando a Equação 2.21, temos:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3 E_3}$$

$$\delta = \frac{(300 \times 10^3)(0,30)}{(0,00058)(250 \times 10^9)} + \frac{(-50 \times 10^3)(0,30)}{(0,00058)(250 \times 10^9)} + \frac{(300 \times 10^3)(0,40)}{(0,00020)(200 \times 10^9)}$$

$$\delta = 0,00352\text{m} = 3,52\text{mm}$$

Desta forma, a deformação total resultou em 3,52 mm. Observe que força P_2 está no sentido contrário à deformação, proporcionando, assim, um encurtamento, porém, como as demais forças proporcionaram uma deformação maior e de alongamento, a deformação total foi a soma das três deformações, na qual o encurtamento é proporcionado por conta de uma força com sentido para a esquerda e os alongamentos são proporcionados pois existem forças que possuem sentido para a direita.

Ao término desta seção, espera-se que você tenha compreendido a importância da lei de Hooke, do módulo de elasticidade, das deformações nos materiais, sabendo diferenciar as deformações elásticas e plásticas. Isso tudo colabora para o entendimento do comportamento do material.

Sem medo de errar

Retornando ao contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de freio de um automóvel. Estamos a um passo de finalizar nosso compromisso com o projeto. Por meio dos resultados obtidos nos ensaios, determinaremos o módulo de elasticidade do material juntamente com as deformações que podem ocorrer no cabo. Utilizaremos, então, os dados da Tabela 2.7 para a finalização do projeto.

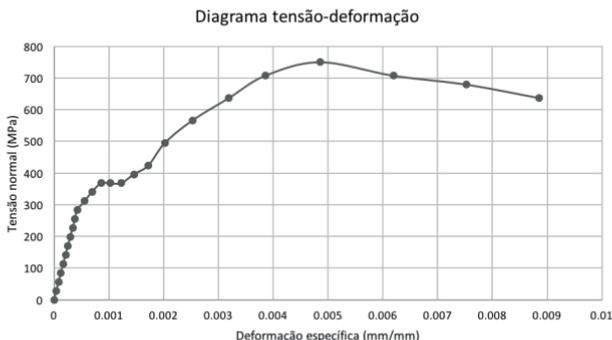
Tabela 2.7 | Informações do projeto

CP	σ_{adm}	σ_u	CS	ϵ	Projeto	P	P_{adm}	ϕ	L
	75MPa	750MPa	10	0,00012 5		500N	530,15N	3mm	1,00m

Fonte: elaborada pelo autor.

Antes, vamos novamente analisar o diagrama tensão-deformação obtido na seção anterior, conforme Figura 2.21.

Figura 2.21 | Diagrama tensão-deformação



Fonte: elaborada pelo autor.

Repare que a tensão admissível para o projeto pertence ao trecho representado pela reta inicial do diagrama. Lembrando que essa reta exprime uma relação linear entre tensão e deformação. Assim, podemos afirmar que, nas condições de projeto, o cabo terá um comportamento elástico. Essa situação normalmente é a desejada para a maioria dos projetos, sendo que para o nosso não é diferente, pois não queremos que a peça apresente uma deformação plástica. Por esse motivo, a tensão admissível de projeto está dentro da região elástica do material.

A partir da deformação específica de 0,000125 para a tensão admissível de 75MPa, podemos então determinar o módulo de elasticidade do material (E), utilizando a Equação da lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{75 \times 10^6 \text{ Pa}}{0,000125} = 600 \times 10^9 \text{ Pa} = 600 \text{ GPa}$$

Também podemos determinar qual o alongamento do cabo para a carga considerada no projeto ($P = 500 \text{ N}$) e a máxima admissível ($P_{adm} = 530,15 \text{ N}$):

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(500 \text{ N})(1 \text{ m})}{\frac{\pi (0,003 \text{ m})^2}{4} (600 \times 10^9 \text{ Pa})} = 1,18 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,118 \text{ mm}$$

$$\delta_{adm} = \frac{P_{adm}L}{AE} = \frac{(530,15 \text{ N})(1 \text{ m})}{\frac{\pi (0,003 \text{ m})^2}{4} (600 \times 10^9 \text{ Pa})} = 1,25 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,125 \text{ mm}$$

Após efetuar todos os cálculos, conseguimos determinar o módulo de elasticidade de **600GPa** do material a ser utilizado, bem como a

deformação que a peça pode ter na pior situação de projeto e para a máxima carga admissível. Podemos, então, juntar com as demais informações obtidas nas seções anteriores e entregar a análise final do projeto ao coordenador.

Conclui-se que a partir dos conteúdos abordados na unidade de conceitos de tensão e deformação, podemos determinar as tensões admissível e última com o coeficiente de segurança para dimensionar e verificar uma peça de um projeto. Vimos também que é importante estudar a relação tensão e deformação para interpretar o comportamento da peça do projeto, podendo utilizar a interpretação do diagrama tensão-deformação.

Avançando na prática

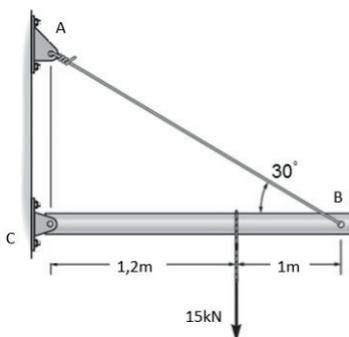
Aplicação dos conceitos para realizar o içamento de um material

Descrição da situação-problema

Para a realização dos trabalhos em uma oficina mecânica é utilizado um suporte de um guincho preso à estrutura da parede, o qual sustenta uma carga de até 15kN quando utilizado, conforme Figura 2.28. Qual será a deformação do cabo AB para essa situação apresentada?

Dados: o cabo tem diâmetro de 3 mm e módulo de elasticidade de 250GPa.

Figura 2.28 | Desenho esquemático de um guincho



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 71).

Resolução da situação-problema

Para determinar a deformação no cabo AB, primeiramente, precisamos descobrir qual a força interna do cabo e o seu comprimento. Para determinar a força interna, devemos calcular o equilíbrio da barra BC utilizando as equações de condição de

equilíbrio. Adotando o sentido positivo para momento anti-horário.

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow (F_{ab_x} \cdot 2,2m) - (15 \times 10^3 N \cdot 1,2m) = 0 \Rightarrow F_{ab_x} = \frac{(15 \times 10^3 N \cdot 1,2m)}{2,2m} = 8,18 \times 10^3 N$$

$$F_{ab} = \frac{F_{ab_x}}{\text{sen}(30^\circ)} = \frac{8,18 \times 10^3 N}{\text{sen}(30^\circ)} = 16,36 \times 10^3 N$$

Para determinar o comprimento do cabo, devemos calcular a hipotenusa do triângulo ABC.

$$L = \frac{2,2m}{\cos(30^\circ)} = 2,54m$$

Agora, podemos calcular a deformação no cabo:

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(16,36 \times 10^3 N)(2,54m)}{\left[\frac{\pi (0,003m)^2}{4} \right] (250 \times 10^9 Pa)} = 2,53 \times 10^{-2} m = 23,5mm$$

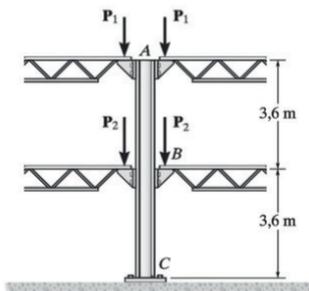
Concluimos que, para a situação apresentada no diagrama de corpo livre, o cabo se deformará 23,5 mm. É necessário verificar se tal deformação não compromete a condição de utilização.

Faça valer a pena

1. Em uma edificação, os pilares são elementos estruturais, conhecidos popularmente como colunas, que transmitem as cargas do edifício para a fundação. Esse carregamento é aplicado no sentido da força peso, ou seja, verticalmente, e distribuído na fundação, gerando uma tensão normal de compressão.

Determine o deslocamento no topo do pilar A, apresentado na figura, para um pilar quadrado de seção de 0,20 m por 0,20 m e carregamento $P_1 = 250kN$ e $P_2 = 300kN$, com $E = 250GPa$.

Figura 2.29 | Desenho esquemático do pilar



Fonte: Hibbeler (2010, p. 91).

- a) 0,576 mm.
- b) 0,875 mm.
- c) 1,120 mm.

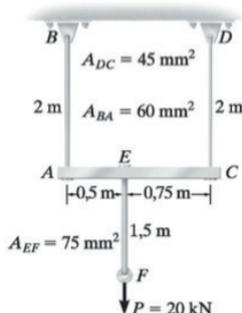
- d) 1,157 mm.
- e) 1,857 mm.

2.

Se a barra for submetida a várias forças axiais diferentes, ou se a área da seção transversal ou o módulo de elasticidade mudar repentinamente de uma região da barra para outra a equação da deformação poderá ser aplicada a cada segmento da barra onde todas essas quantidades são constantes. (HIBBELER, 2010, p. 87)

Para o suporte apresentado na Figura, determine o deslocamento vertical do ponto F, sabendo que as barras AB, CD e EF são deformáveis e têm $E = 400\text{GPa}$, e a barra AC trata-se de uma barra indeformável.

Figura 2.30 | Desenho esquemático do suporte



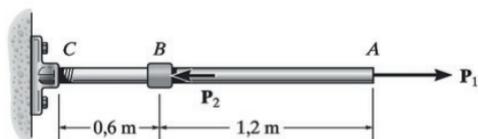
Fonte: Hibbeler (2010, p. 93).

- a) 0,889 mm. c) 1,000 mm. e) 1,956 mm.
b) 0,956 mm. d) 1,567 mm.

3. Para uma barra com carregamento axial, se a tensão atuante não exceder o limite de elasticidade do material, podemos aplicar a lei de Hooke. Com isso, o diagrama apresenta uma proporcionalidade entre a tensão e a deformação, fazendo com que o trecho inicial do diagrama tensão-deformação seja uma reta.

Calcule a deformação da barra apresentada na figura. Considere: $P_1 = 100\text{kN}$, $P_2 = 70\text{kN}$, diâmetro dos dois trechos de 20 mm, $E_{bc} = 200\text{GPa}$ e $E_{ab} = 100\text{GPa}$.

Figura 2.31 | Barra



Fonte: Hibbeler (2010, p. 92).

- a) 0,29 mm. d) 5,03 mm.
b) 3,82 mm. e) 5,57 mm.
c) 4,11 mm.

Referências

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2012.

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Estudo das relações tensão-deformação

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade, complementaremos o conteúdo abordado nas unidades anteriores, onde estudamos o conceito de tensões, conhecendo e compreendendo os princípios básicos de força e tensão e suas diferenças aplicadas em estruturas simples, em seguida, nos aprofundaremos no conceito tensão e deformação para um carregamento axial, verificando o comportamento do material. Agora, estudaremos as relações tensão-deformação para casos de um carregamento qualquer.

As competências de fundamento desta disciplina são conhecer, realizar e interpretar cálculos para determinar: os esforços solicitantes no material, as tensões e as deformações devido às cargas axiais, em qualquer plano, e à torção, bem como avaliar as propriedades dos materiais quanto à sua deformação e resistência mecânica.

O resultado de aprendizagem desta unidade é a compreensão do diagrama tensão-deformação, definindo o estado de deformação dos materiais em elástico e plástico, e do estado de tensões, visando suas aplicações e análises.

O contexto de aprendizagem utilizado como situação da realidade profissional (SR) proposta nesta unidade é focado em uma concessionária de rodovia que colocará placas de sinalização nas estradas, devido à nova lei que obriga o uso de farol aceso. Assim, em um determinado ponto da rodovia, será necessária a elaboração de uma nova estrutura para a fixação das placas. Com isso, a concessionária contratou um escritório de projetos para elaboração desse novo trabalho. A responsabilidade pelo desenvolvimento deste projeto ficou para uma equipe de projetistas na qual você, aluno, está inserido.

Você terá de analisar as tensões atuantes no novo modelo proposto e reportar à equipe para o sucesso do projeto.

Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

- Calcular e analisar as deformações no suporte da placa em estado de utilização.

- Calcular e analisar as tensões atuantes na emenda da barra de suporte da placa de sinalização.

- Calcular as tensões principais e a tensão máxima de cisalhamento na barra do suporte da placa de sinalização.

Para isso, será tratado nas seções desta unidade o conceito de deformação específica, definido para casos de carregamento multiaxial e para deformações por cisalhamento. Também serão abordados casos com tensões em um plano oblíquo e em um caso de carregamento qualquer, de modo que você verá situações além do carregamento axial e entenderá o conceito de estado plano de tensões.

Preparado para este novo desafio? Bons estudos!

Seção 3.1

Conceito de deformação específica

Diálogo aberto

Caro aluno, já é de nosso conhecimento o conceito de deformação específica para um carregamento axial. Nesta nova etapa dos estudos, veremos que além da deformação na direção do carregamento, ocorrerão deformações nas demais direções.

Esta situação você já deve ter presenciado no seu dia a dia. Você já esticou uma tira de borracha? Você deve ter notado que, ao esticar o material longitudinalmente, as dimensões transversais reduzem de tamanho. Esta situação, do ponto de vista prático, fica evidente nos ensaios de tração ou de compressão, discutidos na unidade anterior, se você lembrar, quando uma barra era exposta a um carregamento axial ocorria redução de área no trecho médio do corpo de prova, e quando um corpo de prova era submetido a um ensaio de compressão, neste trecho médio aparentava uma protuberância na lateral do corpo de prova. Além desta situação para carregamento axial, iniciaremos análises em condições de múltiplo carregamento, por exemplo, quando você está submerso em uma piscina cheia de água, condição na qual você sofre pressão de todos os lados!

Para notarmos a importância desta seção, o contexto de aprendizagem é focado na necessidade de uma concessionária de rodovia que pretende colocar novas placas de sinalização ao longo de uma determinada autopista. Com isso, você integrará a equipe contratada pela concessionária para analisar os projetos a serem implantados.

Na situação-problema (SP) desta seção, você calculará e analisará as deformações no suporte da placa em estado de utilização e reportará ao coordenador do projeto.

O coordenador do projeto lhe apresentou o desenho esquemático da fixação da placa de sinalização, conforme mostrado na Figura 3.1, e pediu para que você calculasse as deformações que ocorrem no suporte, já dimensionado, que sustenta a placa de sinalização. Este suporte está engastado em um pórtico acima dele (Figura 3.1a). O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada e de

dimensões de **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm** (Figura 3.1b), seu comprimento é de **1,50m**. As propriedades mecânicas do material adotado são: Módulo de elasticidade ($E = 70GPa$) e coeficiente de Poisson ($\nu = 0,30$).

Figura 3.1 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa de sinalização pesa **2kN** e, por condição de segurança, o suporte não poderá deformar mais que **0,05mm** no sentido longitudinal e **0,5 μ m** no sentido transversal. Para esta situação, o suporte atenderá à condição de segurança? Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de deformação específica e coeficiente de Poisson.

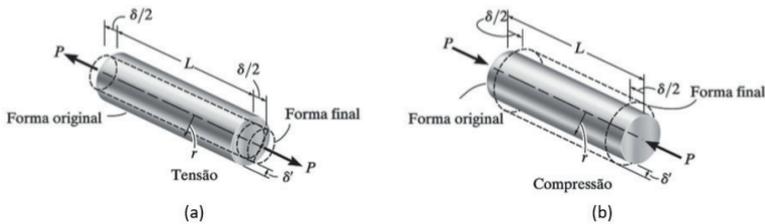
Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Coefficiente de Poisson

Quando uma barra é submetida a um carregamento de tração axial, além de se alongar no sentido longitudinal, como vimos na unidade anterior, a peça se contrairá lateralmente (Figura 3.2a). Vejamos, como exemplo, um elástico: quando esticado, seu diâmetro diminui. O mesmo princípio ocorre quando comprimimos um material. Mudando o sentido da força, que agora passa a ser de compressão, o material tenderá a contrair no sentido longitudinal e expandir no sentido lateral (Figura 3.2b).

Figura 3.2 | Deformação na barra devido a um carregamento axial



Fonte: Hibbeler (2010, p. 73).

A Figura 3.2a apresenta uma barra com carregamento axial de tração (P). Devido a esta força, pode-se notar que há um alongamento (δ) no comprimento (L) e uma contração (δ') no raio (r) da barra. Tem-se que deformações semelhantes ocorrem como mostra a Figura 3.2b. No entanto, há um encurtamento (δ) no comprimento (L) e uma expansão (δ') no raio (r). Com isso, podemos expressar as Equações 3.1 e 3.2 para essas duas deformações:

$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_{trans} = \frac{\delta'}{r} \quad (3.2)$$

Onde ϵ_{long} é a deformação específica longitudinal e ϵ_{trans} a deformação específica transversal.

O cientista francês S. D. Poisson verificou que, para o cálculo da deformação de um material, considerando-se a faixa elástica, a razão entre as deformações transversal e longitudinal eram constantes, uma vez que as deformações δ e δ' são proporcionais. Por isso, esta constante é chamada de coeficiente de Poisson (ν), sendo que o valor numérico é único para cada material homogêneo e isotrópico, e pode ser expresso pela Equação 3.3:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{trans}}{\epsilon_{long}} \quad (3.3)$$

O sinal negativo da Equação 3.3 se dá devido ao fato de que as deformações sempre serão contrárias uma à outra, ou seja, quando ocorrer uma deformação positiva (alongamento) no sentido longitudinal, existirá uma deformação negativa (encurtamento) no sentido transversal, e vice-versa.

O coeficiente de Poisson é adimensional e seu valor para os materiais podem variar de $0 \leq \nu \leq 0,5$, sendo mais comum encontrar valores entre $0,25 \leq \nu \leq 0,33$.

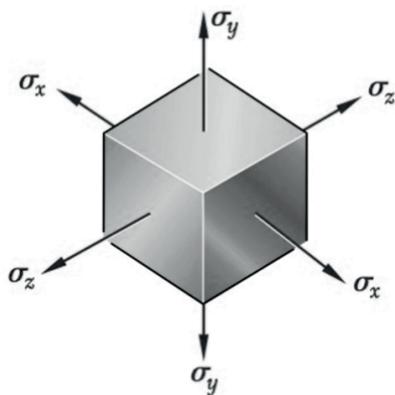


Dentre as propriedades mecânicas dos materiais, o coeficiente de Poisson (ν) é a propriedade que mede a relação entre as deformações transversal e longitudinal, podendo apresentar uma faixa de valores entre $0 \leq \nu \leq 0,5$, de grandeza adimensional.

Estados múltiplos de carregamento

Até o momento, estudamos apenas peças com carregamento axial. Nesta seção, iniciaremos o estudo de elementos estruturais para carregamento atuando nas três direções do eixo coordenado cartesiano, proporcionando tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , todas diferentes de zero. Com isso, teremos o que é chamado de estado múltiplo de carregamento ou um carregamento multiaxial, conforme mostra a Figura 3.3.

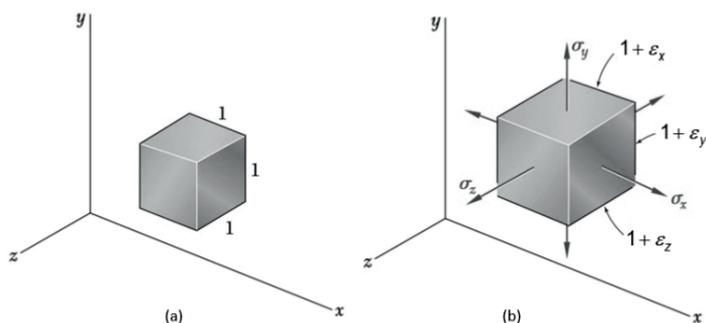
Figura 3.3 | Estado de tensão para um carregamento multiaxial



Fonte: Beer et al. (2015, p. 89).

Para nosso estudo, consideraremos um cubo elementar de aresta unitária, conforme a Figura 3.4a. Este cubo, ao ser carregado nas três direções, deformará, tornando-se um paralelepípedo-retângulo de lados medindo $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$ e $1 + \epsilon_z$, onde ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z são as deformações específicas nas direções dos eixos coordenados, conforme Figura 3.4b.

Figura 3.4 | Cubo elementar para tensões normais



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 90).

Para esse modelo apresentado na Figura 3.4, expressaremos as equações a partir dos componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z em função dos componentes de tensão σ_x , σ_y e σ_z . Para isso, teremos de analisar separadamente cada efeito dos componentes de tensão, considerando o princípio de superposição. Este princípio afirma que podemos determinar separadamente os efeitos dos vários carregamentos, que ocorrem de forma combinada, e juntar os resultados obtidos. São necessárias duas condições para utilização deste princípio:

1. Tem de haver linearidade entre a deformação e a tensão.
2. A deformação devido a um carregamento será pequena e não afetará as condições do outro carregamento.



Refleta

Um estado múltiplo de tensões ocorre apenas quando temos tensões normais? Havendo tensões de cisalhamento sobre o material, qual seria o seu comportamento mecânico?

Generalização da Lei de Hooke

Para uma barra com comportamento elástico, é válida a Lei de Hooke. Assim, se a barra está sujeita a um carregamento axial de tração, podemos expressar a Equação 3.4 para determinar a deformação específica na direção x dos eixos coordenados.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.4)$$

Tem-se que, para uma barra com alongamento no eixo x , conforme Equação 3.4, a barra terá um encurtamento nas outras direções. Com isso, podemos expressar a deformação específica para as outras duas direções, para o exemplo mostrado na Figura 3.2, de modo análogo à Equação 3.3, obtemos a Equação 3.5:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (3.5)$$

Para o exemplo da Figura 3.3 (estado múltiplo de tensão), de modo análogo às Equações 3.4 e 3.5, podemos expressar as deformações para todas as direções, conforme as Equações 3.6, 3.7 e 3.8.

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.8)$$

Estas equações são conhecidas como Lei de Hooke generalizada para carregamento multiaxial. Lembrando que esta equação é válida apenas para materiais com comportamento elástico, sendo que o sentido positivo representa tensão de tração e o negativo tensão de compressão.



Exemplificando

Um bloco com dimensões de ($L_x = 80\text{mm}; L_y = 50\text{mm}; L_z = 60\text{mm}$) se encontra sob pressão uniforme em todas as faces. Com isso, foi medida a variação de comprimento em x de $-30\mu\text{m}$. Desta forma, precisamos determinar a variação de comprimento das outras arestas e a pressão aplicada no bloco. Sabemos que $E = 200\text{GPa}$ e $\nu = 0,30$.

Solução:

Para determinar a variação do comprimento, podemos utilizar a equação da Lei de Hooke generalizada para tensão de compressão, ou seja, com sinais trocados referente às Equações 3.6, 3.7 e 3.8.

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = +\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = +\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_z}{E}$$

Como a pressão atuante é uniforme, podemos dizer que $p = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$.

Com isso, as deformações específicas são iguais, conforme a Equação 3.9 a seguir:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E} + \frac{\nu p}{E} + \frac{\nu p}{E} = -\frac{p}{E}(1-2\nu) \quad (3.9)$$

Sabemos que a deformação em x é $\delta_x = -30\mu\text{m} = -30 \times 10^{-6}\text{m}$, podemos, então, determinar a deformação específica em x:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x} = \frac{-30 \times 10^{-6}}{80 \times 10^{-3}} = -375 \times 10^{-6} = -375\mu \quad \therefore \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -375\mu$$

Agora, podemos determinar as deformações nas outras direções e a pressão atuante no bloco:

$$\delta_y = \varepsilon_y L_y = (-375 \times 10^{-6})(50 \times 10^{-3}\text{m}) = -18,75 \times 10^{-6}\text{m} = -18,75\mu\text{m}$$

$$\delta_z = \varepsilon_z L_z = (-375 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3}\text{m}) = -22,5 \times 10^{-6}\text{m} = -22,5\mu\text{m}$$

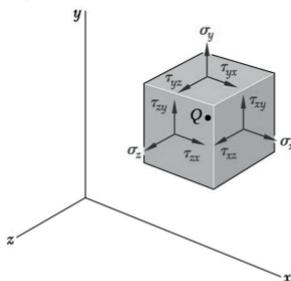
$$p = -\frac{E\varepsilon_x}{1-2\nu} = -\frac{(200 \times 10^9\text{Pa})(-375 \times 10^{-6})}{1-(2 \cdot 0,30)} = -187,5 \times 10^6\text{Pa} = -187,5\text{MPa}$$

Portanto, para uma pressão uniforme de $p = -187,5\text{MPa}$ no bloco, ocorreu uma deformação específica de $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -375\mu$ que proporcionou as deformações nas arestas de $\delta_x = -30\mu\text{m}$, $\delta_y = -18,75\mu\text{m}$ e $\delta_z = -22,5\mu\text{m}$.

Deformação de cisalhamento

Até o momento, estudamos as deformações devidas à tensão normal. Quando as tensões de cisalhamento são aplicadas em uma peça, estas tensões proporcionam uma mudança nos ângulos que formam as faces da peça. A Equação 3.6 relaciona apenas tensões normais e deformações específicas, assumindo o que mostra a Figura 3.3, em que não há incidência de tensão de cisalhamento. Entretanto, podem ocorrer casos nos quais há um estado de tensão mais geral, contendo, além das tensões normais, as tensões de cisalhamento, por exemplo, τ_{xy} , τ_{zx} e τ_{yz} , bem como as tensões correspondentes $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, conforme mostra a Figura 3.5. Estas tensões de cisalhamento não influenciam na dedução da Equação 3.6, enquanto as deformações por cisalhamento permanecerem desprezíveis.

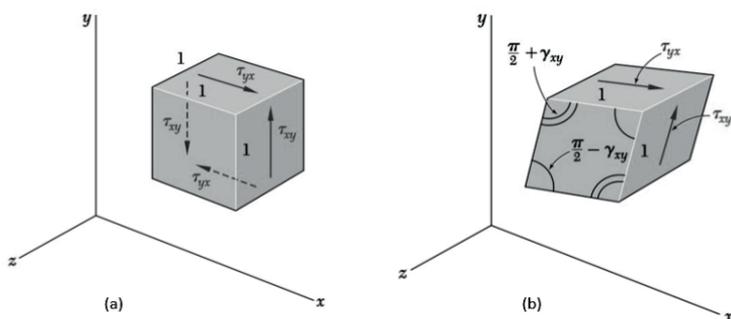
Figura 3.5 | Estado de tensão geral



Fonte: Beer et al. (2015, p. 93).

As deformações por tensão de cisalhamento tendem a deformar o cubo elementar em um paralelepípedo oblíquo. Consideraremos o cubo elementar com aresta igual a 1 e as tensões de cisalhamento aplicadas em suas faces, conforme mostra a Figura 3.6a. O cubo se deformará, conforme a Figura 3.6b.

Figura 3.6 | Cubo elementar para tensões gerais

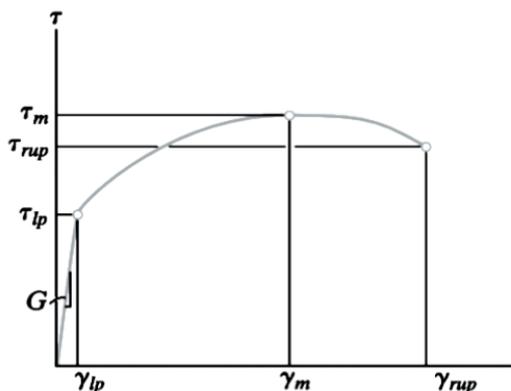


Fonte: Beer et al. (2015, p. 94).

Na deformação do cubo apresentado na Figura 3.6b, ocorre a mudança dos ângulos internos em duas faces, nas quais não atuam as tensões de cisalhamento. Estas faces terão dois ângulos reduzidos de tamanho para $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ e dois ângulos aumentados o tamanho para $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$.

A distorção do ângulo é conhecida como deformação de cisalhamento, representada pela letra grega γ , e expressa em radianos. As letras subscritas são correspondentes às direções em que ocorrem a mudança do ângulo. Estes ângulos podem ser medidos em ensaios de torção em laboratório para constatação do comportamento do material. Para o estudo do cisalhamento puro, é ensaiado um corpo de prova na forma de um tubo fino submetido a um esforço de torção. Não entraremos no mérito de detalhar a aplicação da carga de torção, pois será assunto da Unidade 4, o que importa agora para nós é que, por meio deste ensaio, é possível determinar um diagrama tensão-deformação de cisalhamento. De modo análogo ao ensaio de tração, o diagrama tensão-deformação de cisalhamento também apresentará um trecho inicial reto com comportamento linear elástico até um limite de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento (τ_p) e a deformação (γ_p), conforme Figura 3.7.

Figura 3.7 | Diagrama tensão-deformação de cisalhamento



Fonte: Hibbeler (2010, p. 74).

A Figura 3.7 também apresenta a tensão última ou máxima (τ_m) e a tensão de ruptura (τ_{rup}). O trecho linear elástico, aplicado para a maioria dos materiais, respeita a Lei de Hooke para cisalhamento e é expressa conforme Equação 3.10.

$$\tau = G\gamma \quad (3.10)$$

Em que G é chamado de módulo de elasticidade ao cisalhamento, ou transversal e até mesmo módulo de rigidez. Seu valor também pode ser medido pela inclinação da reta do diagrama tensão-deformação de cisalhamento, e tem a mesma unidade que o módulo de elasticidade longitudinal, o Pascal (Pa), pois a deformação γ é medida em radiano, uma quantidade adimensional.

As grandezas G , E e ν são correlacionadas conforme a Equação 3.11.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.11)$$



Pesquise mais

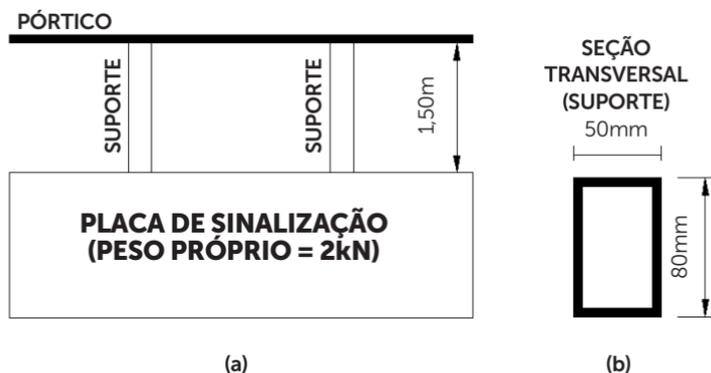
Veja a dedução completa das relações entre o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade transversal, apresentada na Equação 3.11, nas páginas 96-98 do livro: BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido a importância dela para o seu desenvolvimento profissional, uma vez que o conceito de deformação específica está presente em qualquer estrutura ou máquina que sofra um carregamento, e os estados múltiplos de tensões ocorrem em praticamente todas as peças que são submetidas a qualquer tipo de carregamento.

Sem medo de errar

Retornando ao contexto de aprendizagem, estamos trabalhando na análise dos projetos de suporte de sinalização para uma concessionária de rodovia. O coordenador do projeto solicitou que você calculasse as deformações que ocorrerão no suporte, já dimensionado, que sustenta a placa de sinalização. Além disso, ele lhe apresentou o desenho esquemático da fixação da placa de sinalização, sendo que, conforme mostrado na Figura 3.1, os apoios da placa são simétricos. Este suporte está engastado em um pórtico acima dele (Figura 3.1a). O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada de dimensões **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm** (Figura 3.1b), seu comprimento é de **1,50m**, conforme Figura 3.1. As propriedades mecânicas do material adotado são: Módulo de elasticidade ($E = 70\text{GPa}$) e coeficiente de Poisson ($\nu = 0,30$).

Figura 3.1 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa de sinalização pesa **2kN**, e por condição de segurança, o suporte não poderá deformar mais que **0,05mm** no sentido longitudinal e **0,5 μm** no sentido transversal.

Para poder calcular a deformação no suporte, precisamos primeiro determinar a tensão que ocorre na barra do suporte. Como o apoio é simétrico, o peso de $2kN$ se dividirá por igual para cada barra. Portanto, o carregamento em cada barra de suporte é $P = 1kN = 1000N$. Esta carga atua na área de seção transversal quadrada vazada, desta forma, podemos determinar a área da seção transversal externa ($50mm \times 80mm$) menos a seção interna, sendo a seção externa menos a espessura de cada lado ($40mm \times 70mm$):

$$A = (50 \times 10^{-3} m \cdot 80 \times 10^{-3} m) - (40 \times 10^{-3} m \cdot 70 \times 10^{-3} m) = 0,0012m^2$$

Com estas informações, podemos determinar a tensão normal na barra:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{1000N}{0,0012m^2} = 833,33 \times 10^3 N = 833,33kPa$$

Assim, a deformação específica longitudinal será:

$$\varepsilon_{long} = \frac{\sigma}{E} = \frac{833,33 \times 10^3 N}{70 \times 10^9 Pa} = 1,19 \times 10^{-5} m$$

Como foi fornecido o coeficiente de Poisson ($\nu = 0,30$), podemos determinar a deformação específica transversal:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \Rightarrow \varepsilon_{trans} = -\nu \varepsilon_{long} = -0,30 \cdot 1,19 \times 10^{-5} = -3,57 \times 10^{-6}$$

Conhecendo as deformações específicas, podemos calcular as deformações em todas as direções. Vamos considerar as seguintes dimensões: $L_x = 0,05m$, $L_y = 0,08m$ e $L_z = 1,50m$. E as deformações específicas: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -3,57 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon_z = 1,19 \times 10^{-5}$.

Assim, a deformação longitudinal (z) será:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_z}{L_z} \Rightarrow \delta_z = \varepsilon_z L_z = 1,19 \times 10^{-5} \cdot 1,50m = 0,018 \times 10^{-3} m = 0,018mm$$

A deformação na direção x será:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x} \Rightarrow \delta_x = \varepsilon_x L_x = -3,57 \times 10^{-6} \cdot 0,05m = -0,18 \times 10^{-6} m = -0,18\mu m$$

E a deformação na direção y será:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y} \Rightarrow \delta_y = \varepsilon_y L_y = -3,57 \times 10^{-6} \cdot 0,08m = -0,29 \times 10^{-6} m = -0,29\mu m$$

Portanto, devido ao carregamento de utilização, cada barra de suporte da placa de sinalização terá as seguintes deformações: $\delta_x = -0,18\mu m$ e $\delta_y = -0,29\mu m$ (contração na seção transversal), $\delta_z = 0,018mm$ (alongamento longitudinal).

Podemos concluir que $\delta_x < 0,5\mu m$, $\delta_y < 0,5\mu m$ e $\delta_z < 0,05mm$, portanto as deformações atendem às condições de segurança impostas para a situação de projeto.

Avançando na prática

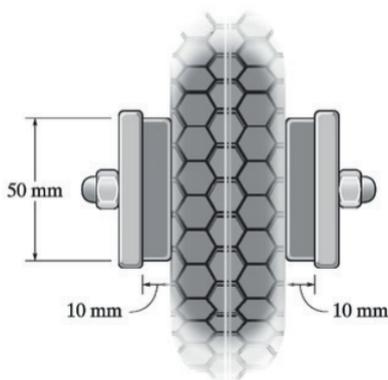
Aplicação do conceito de deformação de cisalhamento para o sistema de freio de uma bicicleta

Descrição da situação-problema

A Figura 3.8 apresenta o perfil esquemático do sistema de freio de uma bicicleta. Para este freio, é utilizada uma borracha de cada lado, com seção transversal em contato com o pneu de 20mm por 50mm . Sabendo que o módulo de elasticidade transversal é de $0,2\text{MPa}$ e que a deformação por cisalhamento não deve exceder a $0,5\text{rad}$, qual deverá ser a maior força de atrito que o sistema pode suportar?

Resolução da situação-problema

Figura 3.8 | Perfil esquemático do sistema de freio de uma bicicleta



Fonte: Hibbeler (2010, p. 79).

Para determinar a máxima força de atrito que a borracha do freio pode suportar, primeiramente devemos descobrir qual a máxima tensão de cisalhamento, sabendo que o limite de deformação por cisalhamento é de $\gamma = 0,5\text{rad}$ e o módulo de elasticidade transversal é de $G = 0,2\text{MPa}$.

Utilizando a equação da Lei de Hooke, temos:

$$\tau = G\gamma = 0,2 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,5 = 0,1 \times 10^6 \text{ Pa} = 0,1\text{MPa}$$

Com isso, podemos determinar a força de atrito na borracha, utilizando a equação da tensão de cisalhamento:

$$\tau = \frac{V}{A} \Rightarrow V = \tau A = 0,1 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot (0,02\text{m} \cdot 0,05\text{m}) = 100\text{N}$$

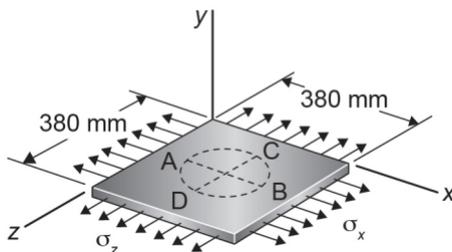
Portanto, a força de atrito máximo que a borracha pode suportar é de $100N$, desta forma, o sistema de acionamento deve ser dimensionado para que não exceda este carregamento.

Faça valer a pena

1. Tem-se que a generalização da Lei de Hooke ocorre em casos de carregamento multiaxial, sendo que esta lei é válida apenas para materiais com comportamento elástico, sendo que o sentido positivo representa tensão de tração e o negativo tensão de compressão.

Uma placa, apresentada na figura a seguir, originalmente tem espessura $L_y = 25mm$ e nela é desenhado um círculo com diâmetro de $200mm$. Sabendo que as tensões aplicadas têm intensidade de $\sigma_x = 90MPa$ e $\sigma_z = 150MPa$ e o material tem um coeficiente Poisson $\nu = 0,30$ e um módulo de elasticidade $E = 100GPa$, deseja-se saber qual o comprimento em AB (ϕ_{AB}), o comprimento em CD (ϕ_{CD}) e a espessura da placa após a aplicação das tensões.

Figura 3.9 | Desenho esquemático da placa



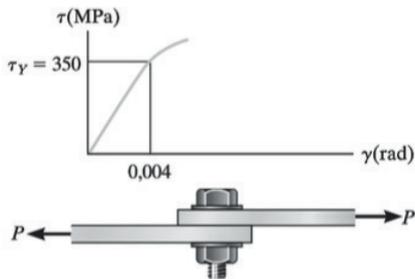
Fonte: Beer et al. (2015, p. 102).

- a) $\phi_{AB} = 200,29mm$; $\phi_{CD} = 200,65mm$; $L_y = 24,78mm$.
- b) $\phi_{AB} = 200,25mm$; $\phi_{CD} = 200,55mm$; $L_y = 24,80mm$.
- c) $\phi_{AB} = 200,19mm$; $\phi_{CD} = 200,45mm$; $L_y = 24,88mm$.
- d) $\phi_{AB} = 200,15mm$; $\phi_{CD} = 200,35mm$; $L_y = 24,90mm$.
- e) $\phi_{AB} = 200,09mm$; $\phi_{CD} = 200,25mm$; $L_y = 24,98mm$.

2. De modo análogo ao ensaio de tração, o diagrama tensão-deformação de cisalhamento também apresentará um trecho inicial reto com comportamento linear elástico até um limite de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento (τ_{lp}) e a deformação (γ_{lp}).

A partir do diagrama tensão-deformação de cisalhamento do material do elemento de ligação apresentado na figura, determine o módulo de elasticidade e o carregamento P necessário para provocar o escoamento do material. Sabendo que o parafuso tem diâmetro de 5 mm e coeficiente de Poisson igual a 0,35.

Figura 3.10 | Diagrama tensão-deformação de cisalhamento

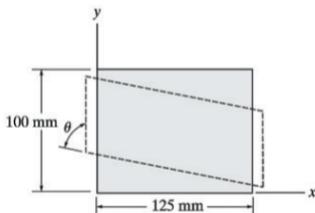


Fonte: Hibbeler (2010, p. 79).

- a) $E = 87,5\text{GPa}$ e $P = 5,76\text{kPa}$.
- b) $E = 105,85\text{GPa}$ e $P = 6,05\text{kPa}$.
- c) $E = 236,25\text{GPa}$ e $P = 6,87\text{kPa}$.
- d) $E = 254,26\text{GPa}$ e $P = 7,04\text{kPa}$.
- e) $E = 287,24\text{GPa}$ e $P = 7,56\text{kPa}$.

3. A distorção do ângulo interno de uma peça é conhecida como deformação de cisalhamento, representada pela letra grega γ , e expressa em radianos. As letras subscritas são correspondentes às direções nas quais ocorrem a mudança do ângulo. Estas propriedades podem ser medidas em ensaios de laboratório para constatação do comportamento do material. Para o bloco apresentado na figura a seguir, é aplicada uma tensão de compressão que faz o bloco se deformar 2 mm ao longo do eixo y , com isso, sua forma sofre uma inclinação $\theta = 88^\circ$. Determine ε_x , ε_y e γ_{xy} , considerando $\nu = 0,3$.

Figura 3.11 | Desenho esquemático da deformação de um bloco



Fonte: Hibbeler (2010, p. 78).

- a) $\varepsilon_x = 0,006$; $\varepsilon_y = -0,02$; $\gamma_{xy} = 0,0392$.
- b) $\varepsilon_x = 0,005$; $\varepsilon_y = -0,015$; $\gamma_{xy} = 0,0355$.
- c) $\varepsilon_x = 0,004$; $\varepsilon_y = -0,01$; $\gamma_{xy} = 0,0305$.
- d) $\varepsilon_x = 0,003$; $\varepsilon_y = -0,008$; $\varepsilon_x = 0,005$.
- e) $\varepsilon_x = 0,002$; $\varepsilon_y = -0,005$; $\gamma_{xy} = 0,0285$.

Seção 3.2

Tensões em um plano oblíquo e em um caso de carregamento qualquer

Diálogo aberto

Caro aluno, já é de nosso conhecimento o caso de tensão normal que ocorre em uma peça sujeita a carregamento axial, assim como o caso de tensão de cisalhamento que atua em um parafuso sujeito a um esforço cortante, visto em ligações entre peças também sujeitas a carregamento axial. Nesta seção, veremos situações em que um carregamento axial pode ocasionar tensões normal e de cisalhamento ao mesmo tempo. Estas situações serão abordadas no estudo de tensões em um plano oblíquo. Este nome pode parecer complexo, porém, você já deve ter reparado que o vidro do para-brisa dos automóveis é inclinado. Estes são construídos assim para “cortar” o vento, ou seja, proporcionam componentes de tensões, os quais veremos nesta seção, que reduzem o esforço no vidro, caso este fosse reto ao plano do carro.

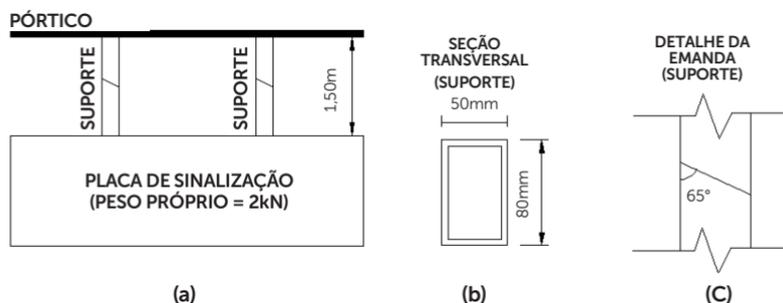
Para notarmos a importância desta seção, continuaremos no contexto de aprendizagem dessa unidade, em que uma concessionária de rodovia pretende colocar novas placas de sinalização ao longo de uma determinada autopista. Lembrando que você faz parte da equipe contratada pela concessionária para analisar os projetos a serem implantados.

Suponha que, na situação-problema (SP) desta seção, para aproveitar todo o material comprado para fabricação das placas de sinalização, em alguns casos foi necessário fazer emendas no suporte das placas. Assim, você calculará e analisará as tensões atuantes na emenda da barra de suporte da placa de sinalização e reportar ao coordenador do projeto.

O coordenador do projeto lhe apresentou o desenho esquemático da fixação da placa de sinalização, conforme mostrado na Figura 3.12, e pediu para que você calculasse as tensões atuantes na emenda da barra de suporte da placa de sinalização. Conforme já apresentado, o suporte está engastado em um pórtico acima dele (Figura 3.12a).

O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada e de dimensões de **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm** (Figura 3.12b), sendo que seu comprimento é de **1,50m**. As emendas são feitas na metade do comprimento da barra de suporte, com uma inclinação, conforme mostrado na Figura 3.12c.

Figura 3.12 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa de sinalização pesa **2kN** e, por condição de segurança, a tensão admissível na emenda é de $\sigma = 800\text{kPa}$ e $\tau = 600\text{kPa}$. Para esta situação, a emenda feita no suporte atenderá à condição de segurança?

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de tensões em um plano oblíquo ao eixo e, em um caso de carregamento qualquer, componentes das tensões e estado de tensões.

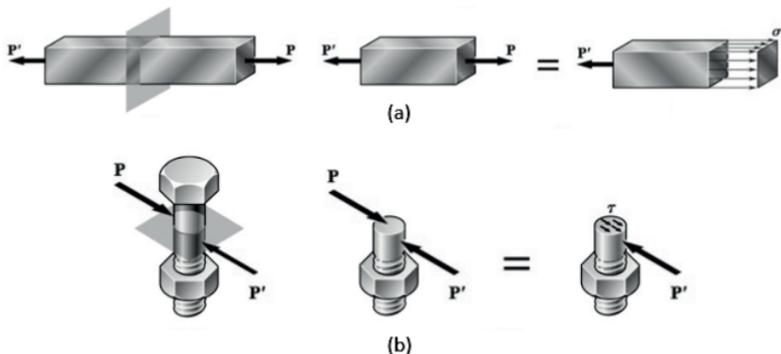
Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Tensões em um plano oblíquo ao eixo

Vimos até aqui casos independentes de carregamento axial ocasionando tensão normal para um plano (Figura 3.13a), e vimos também a aplicação de um esforço cortante atuando em um elemento de ligação, como rebites e parafusos, ocasionando tensão de cisalhamento (Figura 3.13b).

Figura 3.13 | Casos de tensões normal e cisalhamento independentes



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 25).



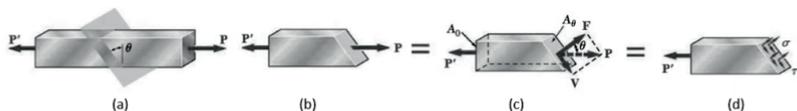
Refleta

É possível, para o mesmo carregamento axial, ocorrerem tensões normais e de cisalhamento? Se for possível, de que forma isto ocorre?

Nesta seção, analisaremos casos em que as tensões normais e cisalhantes ocorrem simultaneamente. Veremos que um carregamento axial pode causar tensões normais e cisalhantes, desde que o plano de aplicação do carregamento e o carregamento não sejam perpendiculares entre si. Da mesma forma, os esforços cortantes atuantes na seção transversal de um parafuso podem causar tensões normais e cisalhantes, atuantes em cada um dos infinitos planos não perpendiculares ao eixo do parafuso.

A Figura 3.13a apresenta uma barra com carregamento axial, em que consideraremos um plano com área A_0 perpendicular ao eixo da barra. Vejamos o que acontece na barra para um plano inclinado com um determinado ângulo θ , conforme Figura 3.14a.

Figura 3.14 | Tensões em um plano oblíquo ao eixo



Fonte: Beer et al. (2015, p. 25).

Repare que o carregamento P permanece na mesma direção (Figura 3.14b). No entanto, como a área de atuação do carregamento está inclinada (A_θ), esta carga possui dois componentes de força, um atuando normal (F) à área inclinada e outro tangente (V) a esta área, conforme Figura 3.14c. Estes esforços proporcionam tensões normal e cisalhante, respectivamente, conforme Figura 3.14d. Para esta análise, podemos deduzir que as forças normal (F) e cortante (V), apresentadas na Figura 3.14c, podem ser expressas conforme Equações 3.12 e 3.13:

$$F = P \cos \theta \quad (3.12)$$

$$V = P \operatorname{sen} \theta \quad (3.13)$$

Estes esforços, atuantes na área inclinada (A_θ), ocasionam o surgimento das tensões normal (σ) e de cisalhamento (τ), mostradas na Figura 3.14d. Essas tensões podem ser expressas pelas Equações 3.14 e 3.15.

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad (3.14)$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} \quad (3.15)$$

Para a Figura 3.14c, podemos escrever a área inclinada (A_θ) em função da área inicial do plano reto (A_0), conforme a Equação 3.16:

$$A_\theta = \frac{A_0}{\cos \theta} \quad (3.16)$$

Agora, juntando as Equações 3.12, 3.14 e 3.16, teremos a Equação 3.17, e juntando as Equações 3.13, 3.15 e 3.16, teremos a Equação 3.18.

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad (3.17)$$

$$\tau = \frac{P \operatorname{sen} \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (3.18)$$

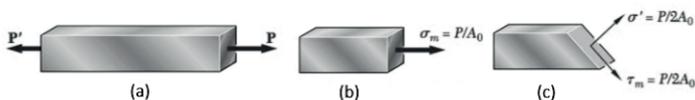
Note que na Equação 3.17, quando o ângulo θ é igual a zero, a tensão normal será máxima ($\sigma_m = P/A_0$), conforme Figura 3.15b, por outro lado, a tensão normal tende a zero quando o ângulo θ se aproxima de 90° . Para a Equação 3.18, a tensão de cisalhamento é nula quando $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$. No entanto, para $\theta = 45^\circ$, tem-se a máxima tensão de cisalhamento, conforme a Equação 3.19.

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (3.19)$$

Tem-se que, se o ângulo for $\theta = 45^\circ$, a tensão normal (σ') será igual à tensão de cisalhamento, conforme Equação 3.20 e Figura 3.15c.

$$\sigma' = \frac{P}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (3.20)$$

Figura 3.15 | Tensões em um plano reto e oblíquo



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 26).

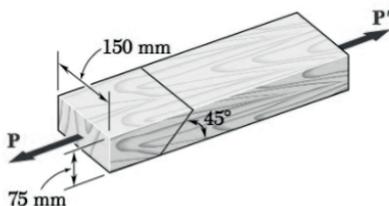
Por fim, quando o plano apresentar uma tensão normal máxima, não haverá nenhuma tensão de cisalhamento (Figura 3.15b), e quando a inclinação do plano for de 45° , os componentes de tensões normal e de cisalhamento terão a mesma intensidade (Figura 3.15c).



Exemplificando

Duas barras de madeira foram coladas e formaram uma emenda, conforme Figura 3.16. Sabendo que a carga vale $P = 10\text{kN}$, determine as tensões normal e cisalhante na emenda desta barra.

Figura 3.16 | Barra com emenda



Fonte: Beer et al. (2015, p. 36).

Para utilizarmos as equações desenvolvidas anteriormente, temos de ter atenção, pois o ângulo θ é medido a partir do eixo vertical (plano perpendicular ao eixo longitudinal da barra) até a emenda. Desta forma, para este caso temos:

$$\theta = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Para o ângulo θ igual a 45° , vimos que a tensão normal é igual à máxima tensão de cisalhamento (Equações 3.19 e 3.20), temos então:

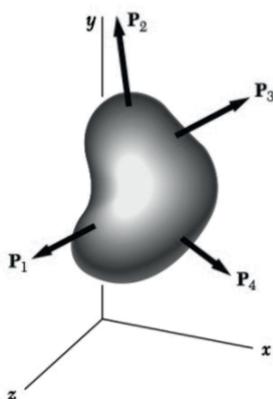
$$\sigma' = \tau_m = \frac{P}{2A_0} = \frac{10 \times 10^3 \text{ N}}{2 \cdot (0,15\text{m}) \cdot (0,075\text{m})} = 444,44 \times 10^3 \text{ Pa} = 444,44 \text{ kPa}$$

Caso o ângulo $\theta \neq 45^\circ$, as tensões normal e cisalhante seriam diferentes entre si.

Tensões em um caso de carregamento qualquer

Agora, veremos casos de tensões para um carregamento qualquer. Vamos analisar um material no qual há múltiplas cargas aplicadas, conforme Figura 3.17.

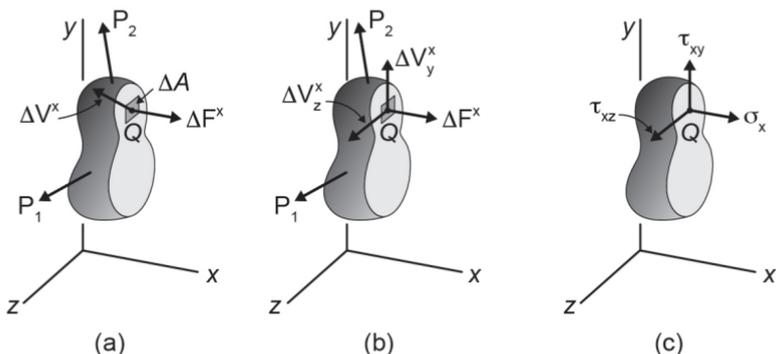
Figura 3.17 | Múltiplo carregamento em um material



Fonte: Beer et al. (2015, p. 26).

Analisaremos as condições de tensões em um determinado ponto Q , no interior do material. Para isso, faremos um corte na seção do material em um plano paralelo ao plano yz , conforme mostra a Figura 3.18a.

Figura 3.18 | Esforços atuantes em um determinado material



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 27).

Para o ponto Q , adotaremos uma área ΔA na qual as forças normal (ΔF^x) e cortante (ΔV^x) agem sob essa área. O índice X sobrescrito indica que as forças ΔF^x e ΔV^x agem em uma superfície perpendicular ao eixo X . A força normal tem sua direção bem definida, enquanto que a força cortante pode agir em diversas direções do plano. Neste caso, utilizaremos seus componentes com direção paralela aos eixos y e Z , sendo elas ΔV_y^x e ΔV_z^x , respectivamente, conforme apresentado na Figura 3.15b. Por fim, podemos dividir todas as forças pela área ΔA . Considerando que esta área tende a zero, obtemos os três componentes de tensões expressos nas Equações 3.21, 3.22 e 3.23, que são apresentadas na Figura 3.15c.

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad (3.21)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad (3.22)$$

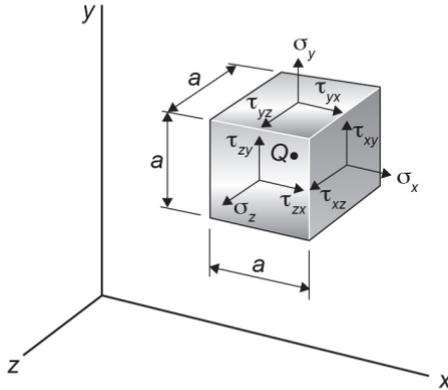
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \quad (3.23)$$

Para as tensões τ_{xy} e τ_{xz} , o primeiro índice subscrito indica que as tensões atuam perpendicularmente ao eixo x , e o segundo índice refere-se à direção do componente. As tensões têm sentidos positivos dependentes das faces onde atuam. Veja a tensão normal de tração: ela é positiva se traciona, está a favor do eixo quando atuante na face frontal e contra o eixo quando atuante na face posterior. Para a tensão normal, o sentido positivo é adotado como esforço de tração e o negativo como esforço de compressão.

Estado de tensões

Para melhorar o entendimento do estado de tensões do ponto Q no material, analisaremos um cubo de lado a com centro no ponto Q , sendo que as tensões são aplicadas em cada face do cubo, conforme mostra a Figura 3.16. Nas faces visíveis da Figura 3.19, temos as tensões normais σ_x , σ_y e σ_z aplicadas às faces perpendiculares aos eixos X , Y e Z , respectivamente, e as seis tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy} . Nas faces não visíveis da Figura 3.19, as tensões terão mesmo módulo, mas com sentidos opostos.

Figura 3.19 | Estado de tensões



Fonte: Beer et al. (2015, p. 26).

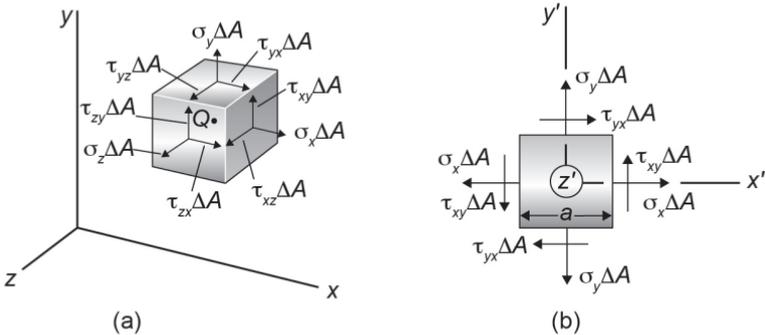
Componentes das tensões

Nesta etapa, iremos verificaremos algumas relações importantes entre os componentes das tensões cisalhantes. Para o diagrama de corpo livre, apresentado na Figura 3.20, verificamos as forças normais e cortantes em todas as faces. Estas forças são definidas como o produto da tensão pela área, para podermos fazer o equilíbrio de forças. Com isso, podemos obter as equações de condições de equilíbrio, conforme Equações 3.24 e 3.25.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \tag{3.24}$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \tag{3.25}$$

Figura 3.20 | Diagrama de corpo livre de um estado de tensão



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 28).

Para satisfazer as Equações 3.24, é de nosso conhecimento que as tensões das faces não visíveis têm as mesmas intensidades, porém, com sentido contrário ao das faces visíveis. A Figura 3.20b apresenta o diagrama de corpo livre (DCL) do plano xy do cubo da Figura 3.20a. Para este DCL, verificaremos as condições de equilíbrio para $\Sigma M_z = 0$ no eixo Z . Repare que apenas as tensões de cisalhamento possuem momentos sobre o eixo. Considerando o sentido anti-horário positivo, temos (Equação 3.26):

$$(\tau_{xy}\Delta A)\frac{a}{2} + (\tau_{xy}\Delta A)\frac{a}{2} - (\tau_{yx}\Delta A)\frac{a}{2} - (\tau_{yx}\Delta A)\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow (\tau_{xy}\Delta A)a - (\tau_{yx}\Delta A)a = 0 \quad (3.26)$$

A partir desta equação, podemos concluir que as tensões de cisalhamento atuantes em faces perpendiculares entre si são iguais, conforme Equação 3.27.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.27)$$

Para $\Sigma M_x = 0$ e $\Sigma M_y = 0$, teremos as Equações 3.28 e 3.29, respectivamente, de modo análogo à $\Sigma M_z = 0$.

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.28)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (3.29)$$

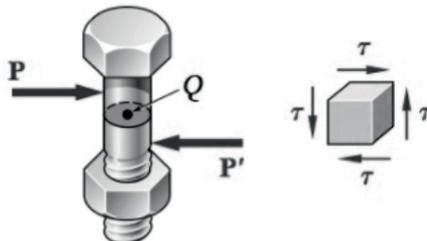


Assimile

As Equações 3.27, 3.28 e 3.29 mostram que, para definir o estado de tensões em um determinado ponto Q, são necessários apenas seis componentes aos invés de nove, uma vez que, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, com isso, os seis componentes são: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} .

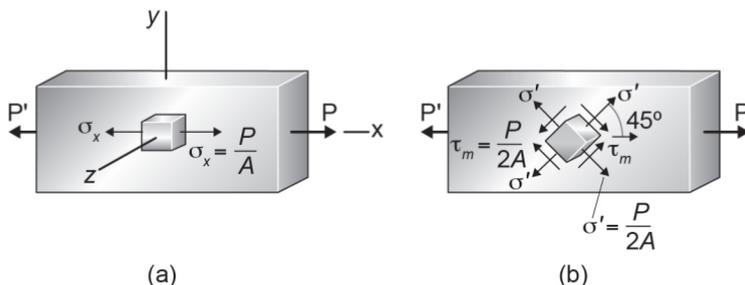
Para o parafuso mostrado na Figura 3.21, podemos verificar um determinado cubo infinitesimal no ponto Q, no qual as tensões de cisalhamento são iguais nas faces horizontais e verticais.

Figura 3.21 | Tensão de cisalhamento no ponto Q



Para a barra apresentada na Figura 3.22, podemos considerar um cubo no meio da barra, conforme Figura 3.22a, em que as faces do cubo são paralelas às faces da barra. Nas condições apresentadas na Figura 3.19a, o estado de tensão tem apenas uma tensão normal ($\sigma_x = P/A$). Por outro lado, se o cubo for rotacionado em torno do eixo z a um ângulo de 45° , teremos as tensões normal e de cisalhamento com mesma intensidade ($\sigma' = \tau_m = P/2A$). Nos aprofundaremos mais neste assunto na próxima seção.

Figura 3.22 | Diferentes componentes para o mesmo estado de tensão



Fonte: Beer et al. (2015, p. 29).

Pesquise mais

Veja sobre estado de tensões no capítulo 7 do livro:

BEER, F. P et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

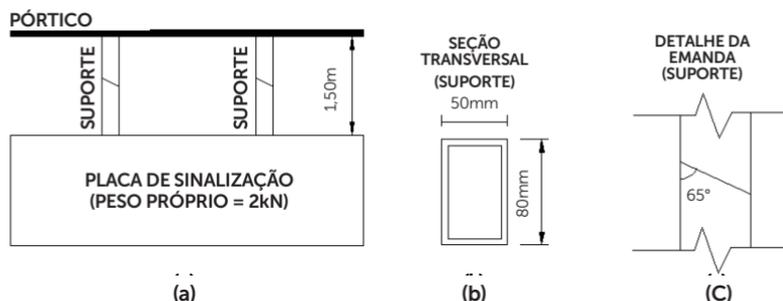
Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido a importância dos casos de tensões para um plano oblíquo e para um carregamento qualquer, sendo possível reconhecer o estado de tensão para poder analisar e determinar os componentes das tensões.

Sem medo de errar

Retornando ao contexto de aprendizagem, estamos trabalhando na análise do projeto dos suportes das placas de sinalização para uma concessionária de rodovia. O coordenador do projeto solicitou que você calculasse e analisasse as tensões que atuarão na emenda da barra de suporte da placa de sinalização, já dimensionada, que sustenta a placa referida. Além disso, ele lhe apresentou o desenho esquemático da fixação da placa de sinalização, sendo que os apoios da placa são simétricos, conforme mostrado na Figura 3.9.

Este suporte está engastado em um pórtico acima dele. O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada de dimensões com **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm**, seu comprimento é de **1,50m**, conforme Figura 3.9b. As emendas são feitas na metade do comprimento da barra de suporte, a Figura 3.12c mostra a inclinação da emenda.

Figura 3.12 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa de sinalização pesa **2kN** e, por condição de segurança, a tensão admissível na emenda é de $\sigma = 800kPa$ e $\tau = 600kPa$.

Para calcularmos e analisarmos as tensões atuantes na emenda do suporte, devemos primeiramente identificar o carregamento no suporte. Como o apoio é simétrico, o peso de **2kN** se dividirá por igual para cada barra. Portanto, o carregamento em cada barra de suporte é $P = 1kN = 1000N$. Esta carga atua na área de seção transversal quadrada vazada. Desta forma, podemos determinar a área da seção transversal externa (**50mm x 80mm**) menos a seção interna, sendo a seção externa menos a espessura de cada lado (**40mm x 70mm**):

$$A_0 = (50 \times 10^{-3} m \cdot 80 \times 10^{-3} m) - (40 \times 10^{-3} m \cdot 70 \times 10^{-3} m) = 0,0012 m^2$$

Vimos nesta seção que, para obter a tensão normal e de cisalhamento em um plano oblíquo, podemos utilizar as seguintes equações:

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \text{e} \quad \tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

O carregamento e a área já identificamos. Temos de ter cuidado com o ângulo θ que, para o desenvolvimentos das equações desta seção, é o ângulo que parte de um eixo perpendicular ao eixo da barra até o plano inclinado. Com isso, temos que o ângulo é:

$$\theta = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

Como as tensões admissíveis são $\sigma = 800 \text{ kPa}$ e $\tau = 600 \text{ kPa}$, verificaremos qual o carregamento P admissível e analisaremos se a condição de projeto atende às condições de segurança. Para a tensão normal, o carregamento admissível deve ser:

$$P = \frac{\sigma A_0}{\cos^2 \theta} = \frac{800 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot 0,0012 \text{ m}^2}{\cos^2 25^\circ} = 1168,74 \text{ N}$$

E para a tensão de cisalhamento, o carregamento admissível deve ser:

$$P = \frac{\tau A_0}{\text{sen} \theta \cos \theta} = \frac{600 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot 0,0012 \text{ m}^2}{\text{sen} 25^\circ \cos 25^\circ} = 1879,79 \text{ N}$$

Como o carregamento de projeto ($P = 1000 \text{ N}$) é menor que os carregamentos para as tensões admissíveis, a emenda realizada para aproveitamento de material pode ser realizada com segurança. Entretanto, se a emenda fosse realizada a um ângulo de $\theta = 45^\circ$, o menor carregamento admissível estaria com uma folga maior, como podemos ver a seguir.

Para $\theta = 45^\circ$ podemos utilizar a mesma equação: $\tau_m = \sigma' = \frac{P}{2A_0}$

Com isso, temos:

Para a tensão normal, o carregamento admissível poderia ser:

$$P = \tau \cdot 2 \cdot A_0 = 600 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 0,0012 \text{ m}^2 = 1440 \text{ N}$$

E para a tensão de cisalhamento, o carregamento admissível poderia ser:

$$P = \sigma \cdot 2 \cdot A_0 = 800 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 0,0012 \text{ m}^2 = 1920 \text{ N}$$

Podemos comparar que para $\theta = 45^\circ$ os carregamentos admissíveis são maiores que para $\theta = 25^\circ$. Assim, devido à forma como será executada, a emenda atende às condições de segurança. Entretanto, pensando na segurança, o projeto estaria mais seguro se a emenda fosse executada com um ângulo de 45° .

Avançando na prática

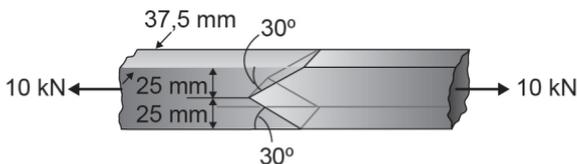
Tensões em um plano oblíquo em emenda de fuselagem de um avião

Descrição da situação-problema

Para a construção de um avião, em determinados pontos da estrutura, é necessário executar uma emenda tipo boca-de-peixe, conforme mostra a Figura 3.23. Esta emenda interliga dois elementos

por uma solda. Considerando que cada plano inclinado suporta uma força horizontal de 5 kN , determine a tensão de cisalhamento e a tensão normal no plano de cada solda.

Figura 3.23 | Emenda tipo boca-de-peixe



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 28).

Resolução da situação-problema

Segundo o enunciado, devemos dividir o carregamento axial para cada plano. Desta forma, podemos utilizar as equações de tensão normal e tensão de cisalhamento desenvolvidas nesta seção:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \text{e} \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

Os dados são: $P = 5 \times 10^3 \text{ N}$, $A_0 = (0,025\text{ m})(0,0375\text{ m}) = 0,0009375\text{ m}^2$ e

$\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Com isso, temos:

$$\sigma = \frac{5 \times 10^3 \text{ N}}{0,0009375\text{ m}^2} \cos^2 60^\circ = 1333,33 \times 10^3 \text{ Pa} = 1333,33\text{ kPa}$$

$$\tau = \frac{5 \times 10^3 \text{ N}}{0,0009375\text{ m}^2} \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2309,40 \times 10^3 \text{ Pa} = 2309,40\text{ kPa}$$

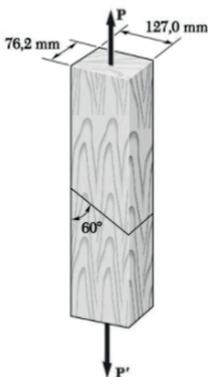
Desta forma, podemos concluir que este tipo de emenda terá uma tensão normal $\sigma = 1333,33\text{ kPa}$ e tensão de cisalhamento $\tau = 2309,40\text{ kPa}$.

Faça valer a pena

1. Um carregamento axial pode causar tensões normais e cisalhantes, desde que o plano de aplicação do carregamento e o carregamento não sejam perpendiculares entre si. Da mesma forma, os esforços cortantes, atuantes na seção transversal de um parafuso, podem causar tensões normais e cisalhantes, atuantes em cada um dos infinitos planos não perpendiculares ao eixo do parafuso.

Para uma emenda de uma barra de madeira, mostrada na figura a seguir, determine a tensão normal e a tensão de cisalhamento na emenda, sabendo que o carregamento é $P = 8\text{ kN}$.

Figura 3.24 | Barra com emenda

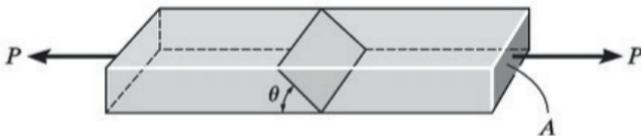


Fonte: Beer et al. (2015, p. 36).

- a) $\sigma = 600,00kPa$ e $\tau = 312,60kPa$.
- b) $\sigma = 610,50kPa$ e $\tau = 325,45kPa$.
- c) $\sigma = 620,00kPa$ e $\tau = 357,96kPa$.
- d) $\sigma = 620,50kPa$ e $\tau = 389,69kPa$.
- e) $\sigma = 630,00kPa$ e $\tau = 398,87kPa$.

2. Para tensões em um plano oblíquo ao eixo, quando o plano inclinado tem um ângulo $\theta = 0$, tem-se uma tensão normal máxima ($\sigma_m = P/A_0$). Por outro lado, a tensão tende a zero quando o ângulo θ se aproxima de 90° . A tensão de cisalhamento é nula quando $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$. No entanto, para $\theta = 45^\circ$, tem-se a máxima tensão de cisalhamento. Determine a tensão normal e a de cisalhamento para o plano oblíquo apresentado na figura a seguir.

Figura 3.25 | Tensão em um plano oblíquo



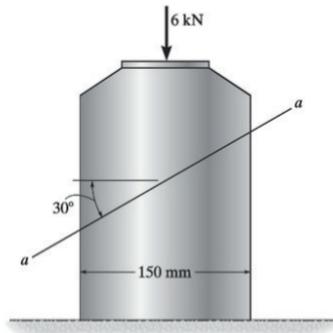
Fonte: Hibbeler (2010, p. 31).

- a) $\sigma = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$ e $\tau = \frac{P}{A} \text{sen} \theta \cos \theta$.
- b) $\sigma = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$ e $\tau = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$.
- c) $\sigma = \frac{P}{2A}$ e $\tau = \frac{P}{2A}$.
- d) $\sigma = \frac{P}{A} \text{sen}^2 \theta$ e $\tau = \frac{P}{A} \text{sen}^2 \theta$.
- e) $\sigma = \frac{P}{A} \text{sen}^2 \theta$ e $\tau = \frac{P}{A} \text{sen} \theta \cos \theta$.

3. Vimos que forças axiais aplicadas em um elemento de barra provocavam tensões normais na barra, enquanto forças transversais agindo sobre parafusos e pinos provocavam tensões de cisalhamento nas conexões. A razão pela qual se observou uma relação entre forças axiais e tensões normais, por um lado, e forças transversais e tensões de cisalhamento, por outro lado, era porque as tensões estavam sendo determinadas apenas em planos perpendiculares ao eixo do elemento ou conexão. (BEER et al., 2015, p. 25)

Em um bloco de apoio quadrado, com lado medindo 150mm , conforme mostrado na figura, temos um carregamento de 6kN . Determine a tensão normal e de cisalhamento na seção $a - a$.

Figura 3.26 | Bloco de apoio



Fonte: Hibbeler (2010, p. 45).

- a) $\sigma = 0,2\text{MPa}$ e $\tau = 0,115\text{MPa}$.
- b) $\sigma = 0,25\text{MPa}$ e $\tau = 0,125\text{MPa}$.
- c) $\sigma = 0,3\text{MPa}$ e $\tau = 0,13\text{MPa}$.
- d) $\sigma = 0,35\text{MPa}$ e $\tau = 0,135\text{MPa}$.
- e) $\sigma = 0,4\text{MPa}$ e $\tau = 0,145\text{MPa}$.

Seção 3.3

Estado plano de tensões

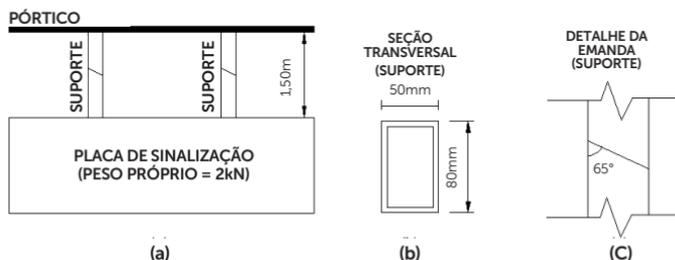
Diálogo aberto

Caro aluno, já é de nosso conhecimento o conceito de estado de tensão. Nesta seção, estudaremos sobre este assunto em um plano, ou seja, estudaremos um estado plano de tensão. Por que estudar apenas para um plano? Apesar dos problemas que envolvem mecânica dos sólidos serem tridimensionais, resolver estes casos para um plano torna mais simples a resolução dos problemas. Isto reduzirá o número dos componentes de tensões vistas no estado de tensão.

Para notarmos a importância desta seção, continuaremos no contexto de aprendizagem desta unidade, em que uma concessionária de rodovia pretende colocar novas placas de sinalização ao longo de uma determinada autopista. Lembrando que você faz parte da equipe contratada pela concessionária para analisar os projetos a serem implantados.

Assim, na situação-problema desta seção, você calculará as tensões principais e a tensão máxima de cisalhamento na metade da barra do suporte da placa de sinalização e reportar ao coordenador do projeto. Lembrando que, para alguns casos, foi necessário fazer emendas no suporte das placas. Conforme já apresentado, o suporte está engastado em um pórtico acima dele (Figura 3.12a). O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada e de dimensões de **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm** (Figura 3.12b), sendo que seu comprimento é de **1,50m**. As emendas são feitas na metade do comprimento da barra de suporte, com uma inclinação conforme mostrado na Figura 3.12c.

Figura 3.12 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

A placa de sinalização pesa $2kN$ e, por condição de segurança, a tensão admissível na emenda é de $\sigma = 800kPa$ e $\tau = 600kPa$. Importante salientar que, para simplificar este problema, está sendo desprezada a ação do vento. Para esta situação, qual deverá ser a tensão principal e tensão máxima de cisalhamento para barra do suporte com e sem as emendas? Para estas tensões, você deve representar os resultados graficamente para compor o relatório que será apresentado ao coordenador.

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de estado plano de tensão, a partir dos quais podemos determinar tensões principais e tensão máxima de cisalhamento de forma algébrica ou por meio de representação gráfica no círculo de Mohr.

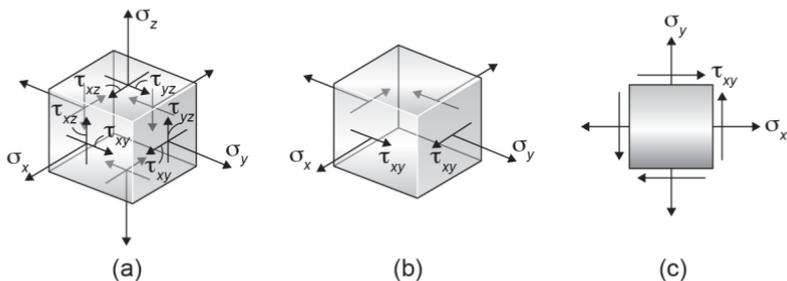
Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Estado plano de tensões

Tem-se que o estado geral de tensão em um ponto é determinado por seis componentes: três componentes de tensão normal e outros três componentes de tensão de cisalhamento, conforme mostra a Figura 3.27a. Este estado tridimensional de tensão, na prática profissional, para facilitar a interpretação dos problemas reais, é simplificado a um estado plano de tensão, conforme Figura 3.27c. Neste caso, trabalharemos com as tensões $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ e utilizar o plano x e y para nossa análise, conforme Figura 3.21c. Com isso, teremos apenas as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} .

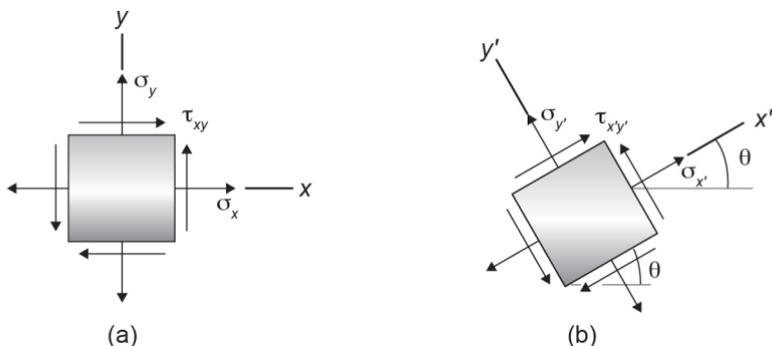
Figura 3.27 | Simplificação do estado tridimensional de tensões



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 321).

Seja o estado plano de tensões apresentado na Figura 3.28, teremos os três componentes de tensões atuantes no elemento quadrangular devido à uma determinada orientação, conforme Figura 3.28a. Estes componentes serão diferentes caso o elemento quadrangular sofra uma mudança de direção (rotação θ), conforme Figura 3.28b.

Figura 3.28 | Estado plano de tensão



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 322).

A seguir, verificaremos como obter as tensões na direções x' e y' , partindo da orientação x e y . Este procedimento é conhecido como transformação de tensão no plano.

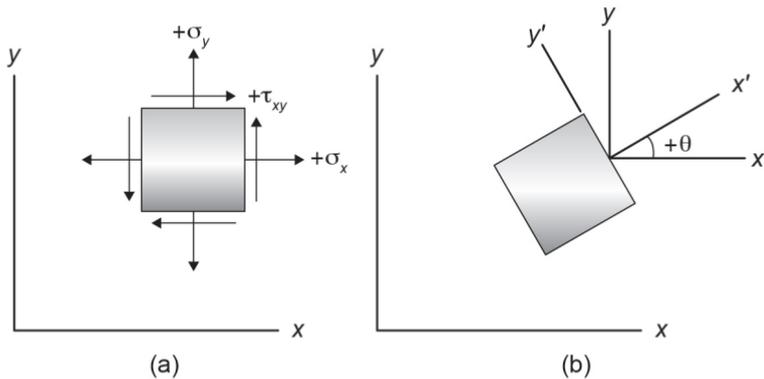


Assimile

Para uma direção específica, o estado plano de tensão é representado apenas por dois ou, no máximo, três componentes de tensão coplanares.

Definiremos as convenções de sinais aplicadas nesta transformação de tensão. É convencionalizado que as tensões normais terão sinal positivo quando elas tiverem sentido saindo da face do plano, sendo que as tensões de cisalhamento terão sinal positivo quando os componentes superior e do lado direito tiverem sentido para direita e para cima, respectivamente, conforme Figura 3.29a. Assim, o sinal negativo terá o sentido contrário ao sentido positivo descrito anteriormente. O ângulo θ , que define a orientação do plano inclinado, será positivo se tiver sentido anti-horário, conforme mostra a Figura 3.29b.

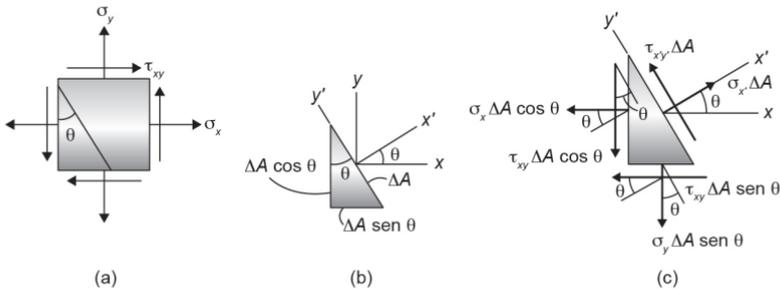
Figura 3.29 | Convenção de sinais



Fonte: Hibbeler (2010, p. 325).

Com isso, para determinar os componentes apresentadas na Figura 3.28b, efetuaremos um corte no plano, conforme apresentado na Figura 3.30a, para analisar o elemento apresentado na Figura 3.30b. Devemos fazer um diagrama de corpo livre com as forças atuantes em cada face. Desta forma, multiplicaremos as tensões pelas áreas das faces, sendo a área seccionada ΔA e a área das faces horizontais e verticais sendo $\Delta A \text{sen} \theta$ e $\Delta A \text{cos} \theta$, respectivamente, conforme Figura 3.30b.

Figura 3.30 | Transformação de tensão no plano



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 325).

Neste diagrama de corpo livre, aplicaremos as equações de condição de equilíbrio para as forças. Com isso, temos, para $\sum F_{x'} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \text{sen} \theta) \text{cos} \theta - (\sigma_y \Delta A \text{sen} \theta) \text{sen} \theta - (\tau_{xy} \Delta A \text{cos} \theta) \text{sen} \theta - (\sigma_x \Delta A \text{cos} \theta) \text{cos} \theta &= 0 \\ \Rightarrow \sigma_{x'} = \sigma_x \text{cos}^2 \theta + \sigma_y \text{sen}^2 \theta + \tau_{xy} (2 \text{sen} \theta \text{cos} \theta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

E para $\Sigma F_y = 0$:

$$\tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \text{sen} \theta) \text{sen} \theta - (\sigma_y \Delta A \text{sen} \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \text{sen} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \text{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \quad (3.31)$$

Podemos simplificar as Equações 3.30 e 3.31 utilizando algumas relações trigonométricas, tais como: $\text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$, $\text{sen}^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ e $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$. Com isso, obtemos:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta \quad (3.32)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3.33)$$

Para obtermos $\sigma_{y'}$, podemos substituir $\theta = \theta + 90^\circ$ na Equação 3.32 e obter a seguinte equação:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \text{sen} 2\theta \quad (3.34)$$



Refleta

Para um estado plano de tensões, a orientação do plano pode nos apresentar infinitas possibilidades. Como deve-se proceder para não perder tempo e determinar as tensões mais relevantes para o problema proposto?

Tensões principais

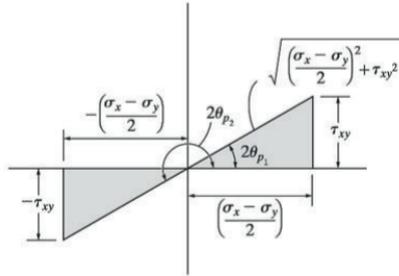
Na prática profissional, é comum a busca pela direção em que ocorrerão as máximas tensões no plano. Com isso, para se determinar a tensão normal máxima e mínima, devemos derivar a Equação 3.32 em relação a θ igualando a zero:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2 \text{sen} 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{tg} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (3.35)$$

Em que $\theta = \theta_p$. Esta solução possui duas raízes, θ_{p1} e θ_{p2} . Para a Equação 3.35, pode-se representar em um plano cartesiano conforme Figura 3.25. Nesta figura, podemos verificar que os ângulos $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ estão afastados entre si a 180° , conseqüentemente, θ_{p1} e θ_{p2} estão afastados a 90° .

Figura 3.31 | Plano cartesiano



Fonte: Hibbeler (2010, p. 327).

Para obtenção das tensões principais, é preciso substituir os ângulos θ_{p1} e θ_{p2} na Equação 3.32. Para isso, podemos obter seno e cosseno dos triângulos da Figura 3.25. Assim, temos, para θ_{p1} :

$$\text{sen}2\theta_{p1} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (3.36)$$

$$\text{cos}2\theta_{p1} = \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (3.37)$$

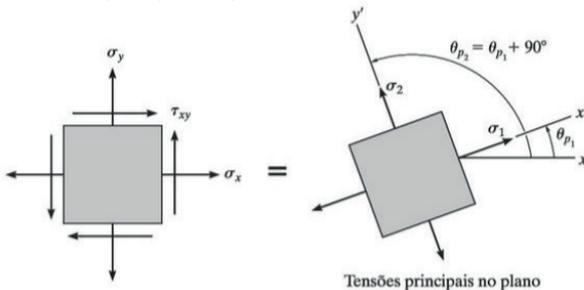
E para θ_{p2} , tem-se $\text{sen}2\theta_{p2} = -\text{sen}2\theta_{p1}$ e $\text{cos}2\theta_{p2} = -\text{cos}2\theta_{p1}$

Substituindo o conjunto das Equações 3.36 e 3.37 na Equação 3.32 e simplificando-a, obtemos a Equação 3.38:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.38)$$

Em que $\sigma_1 > \sigma_2$, com σ_1 sendo a tensão máxima e σ_2 a tensão mínima, ambas são tensões principais no plano, e os correspondentes planos em que atuam as tensões principais são denominados de planos principais de tensão, conforme mostrado na Figura 3.32. Para este caso, nenhuma tensão de cisalhamento atua sob o plano principal.

Figura 3.32 | Tensões principais no plano



Fonte: Hibbeler (2010, p. 328).

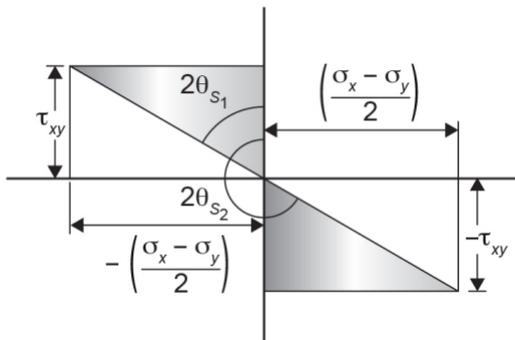
Tensão de cisalhamento máximo

Para obtenção da direção de um plano em que temos a ocorrência da tensão de cisalhamento máxima, devemos derivar a Equação 3.33 em relação a θ e, igualando a zero, obtemos:

$$\operatorname{tg}2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (3.39)$$

De modo análogo às tensões principais, a Equação 3.39 possui duas raízes θ_{s1} e θ_{s2} que podem ser determinadas pelos triângulos apresentados na Figura 3.33. Comparando a Figura 3.32 com a 3.33, nota-se que $2\theta_s$ está a 90° de $2\theta_p$. Portanto, θ_s está a 45° de θ_p , ou seja, o plano em que temos a ocorrência da tensão de cisalhamento máxima está a 45° do plano principal de tensões.

Figura 3.33 | Plano cartesiano



Fonte: Hibbeler (2010, p. 328).

De modo análogo às tensões principais, a equação de tensão de cisalhamento máxima (Equação 3.40) pode ser obtida por meio das relações trigonométricas $\operatorname{sen}2\theta_s$ e $\operatorname{cos}2\theta_s$ (obtidas da Figura 3.33) e substituindo na Equação 3.33.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.40)$$

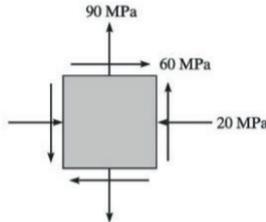
Substituindo as relações trigonométricas $\operatorname{sen}2\theta_s$ e $\operatorname{cos}2\theta_s$ obtidas da Figura 3.27 na Equação 3.32, obtém-se a Equação 3.41 da tensão média das tensões no plano de máxima tensão de cisalhamento.

$$\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (3.41)$$



Para o estado plano de tensão apresentado na Figura 3.34, determine a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média.

Figura 3.34 | Estado plano de tensão



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 331).

Analisando a Figura 3.28, verifica-se que: $\sigma_x = -20\text{MPa}$, $\sigma_y = 90\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = 60\text{MPa}$.

Utilizando a Equação 3.40, temos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} = 81,39\text{MPa}$$

E utilizando a Equação 3.41, temos:

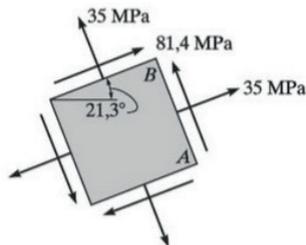
$$\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35\text{MPa}$$

Se quisermos representar graficamente este resultado, vamos determinar em qual orientação ocorre estas tensões. Para isso, podemos utilizar a Equação 3.41.

$$\begin{aligned} \text{tg}2\theta_s &= \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60} = 0,9167 \\ 2\theta_s &= \text{artg}(0,9167) = 42,5^\circ \\ 2\theta_s &= 42,5^\circ \Rightarrow \theta_s = 21,3^\circ \end{aligned}$$

Com isso, podemos representar o estado de tensão para a tensão máxima de cisalhamento e tensão média, conforme Figura 3.35.

Figura 3.35 | Estado plano de tensão



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 331).

Círculo de Mohr para o estado plano de tensões

As equações para transformação da tensão no plano possuem uma solução gráfica. Esta solução gráfica facilita a visualização da variação dos componentes de tensões. Para isso, reescreveremos as Equações 3.32 e 3.33 na forma:

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (3.42)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3.43)$$

Elevando ao quadrado as duas Equações e somando-as, obtemos:

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.44)$$

Simplificando a Equação 3.44, obtemos a Equação 3.45:

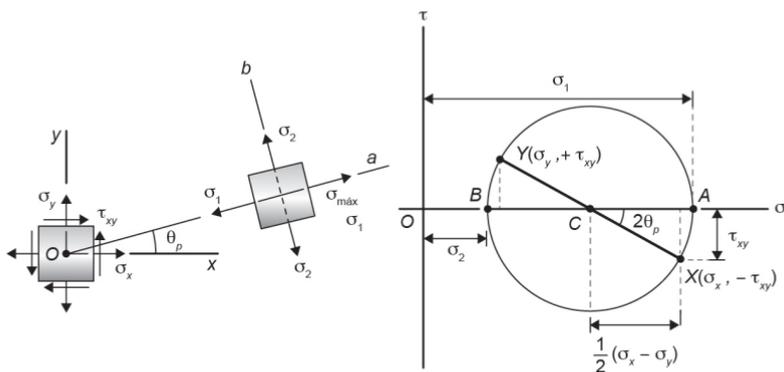
$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (3.45)$$

Em que $\sigma_{\text{méd}}$ foi apresentado na Equação 3.40 e podemos escrever o raio R como:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.46)$$

Tem-se que a Equação 3.46 refere-se a um círculo de raio R, repare que o raio do círculo (Equação 3.46) é igual ao valor da tensão de cisalhamento máxima (Equação 3.40). Podemos construir este círculo em um plano cartesiano de σ para o eixo das abscissas e τ para os eixos das ordenadas, conforme Figura 3.36.

Figura 3.36 | Círculo de Mohr



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 466).

A Figura 3.36 é conhecida como círculo de Mohr. Note que os pontos A e B são os valores das tensões principais de coordenadas $(\sigma_1; 0)$ e $(\sigma_2; 0)$, respectivamente, e centro C de $(\sigma_{méd}; 0)$. Os pontos X e Y são coordenadas das tensões orientadas a $2\theta_p$ do plano principal.



Pesquise mais

Veja mais sobre transformações de tensão no capítulo 7 do livro: BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

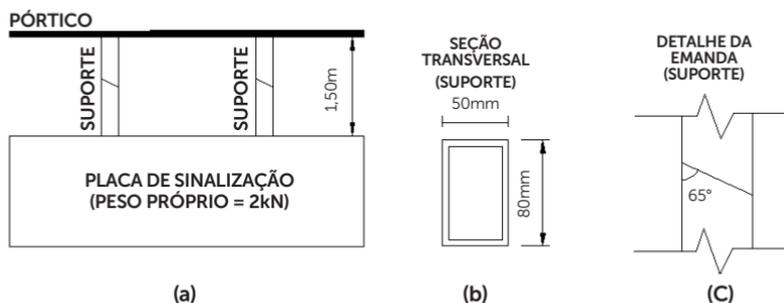
Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido a importância do conceito de estado plano de tensão, sabendo aplicá-lo para os problemas práticos profissionais.

Sem medo de errar

Retornando ao contexto de aprendizagem, estamos trabalhando na análise do projeto dos suportes das placas de sinalização para uma concessionária de rodovia.

Lembrando que a placa de sinalização pesa **2kN** e o desenho esquemático da fixação da placa de sinalização é apresentado na Figura 3.12. Este suporte está engastado em um pórtico acima dele. O suporte é uma barra quadrada com seção transversal vazada de dimensões com **50mm** por **80mm** e espessura de **5mm**, e seu comprimento é de **1,50m**, conforme Figura 3.12b. As emendas são feitas na metade do comprimento da barra de suporte, a Figura 3.12c mostra a inclinação da emenda.

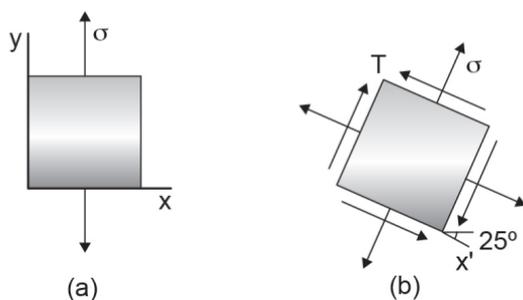
Figura 3.12 | Desenho esquemático da placa de sinalização



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o término do projeto, devemos calcular a tensão principal e tensão máxima de cisalhamento para barra do suporte com e sem as emendas, representando graficamente para compor o relatório que será apresentado ao coordenador. A Figura 3.37 apresenta o estado plano de tensão na barra do suporte. A Figura 3.37a é o plano do suporte sem a emenda e a Figura 3.37b é o plano da emenda do suporte.

Figura 3.37 | Estado plano de tensão



Fonte: elaborada pelo autor.

A tensão normal sem a emenda será o peso atuante em cada suporte (1000N) dividido pela área da seção transversal ($A_0 = 0,0012m^2$). Assim, temos:

$$\sigma_y = \frac{1000N}{0,0012m^2} = 833,33 \times 10^3 Pa = 833,33kPa.$$

Para o estado plano de tensões da Figura 3.37a, temos $\sigma_y = 833,33kPa$, $\sigma_x = 0$ e $\tau_{xy} = 0$, com isso, podemos determinar as tensões principais:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{0 + 833,33}{2} + \sqrt{\left(\frac{0 - 833,33}{2}\right)^2} + 0 = 833,33MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{0 + 833,33}{2} - \sqrt{\left(\frac{0 - 833,33}{2}\right)^2} + 0 = 0$$

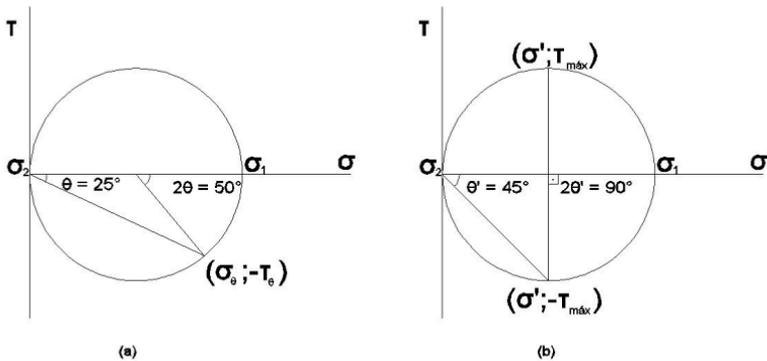
Com esses dados, podemos determinar a tensão média e a tensão de cisalhamento máxima para podermos construir o círculo de Mohr:

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 833,33}{2} = 416,66kPa$$

$$R = \tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{0 - 833,33}{2}\right)^2} + 0 = 416,66kPa$$

A tensão média é representada no centro da circunferência. Podemos representar as tensões no círculo de Mohr desenhado na Figura 3.38.

Figura 3.38 | Círculo de Mohr



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 3.38a apresenta o plano da emenda da barra com as tensões na orientação de θ , sabendo que o ângulo é $\theta = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. Já a Figura 3.38b apresenta o círculo para tensão máxima de cisalhamento com ângulo θ igual a 45° .

As tensões no plano com orientação $\theta = 25^\circ$, podem ser obtidas no gráfico da Figura 3.32a, ou calculado conforme equações a seguir:

$$\sigma_{\theta'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = \frac{0 + 833,33}{2} - \frac{0 - 833,33}{2} \cos 2(25^\circ) - 0 = 684,49 \text{ kPa}$$

$$\tau_{\theta'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{0 - 833,33}{2} \operatorname{sen} 2(25^\circ) + 0 = 319,18 \text{ kPa}$$

Os cálculos acima também podem ser obtidos por meio de relações trigonométricas.

Por fim, podemos verificar que a construção do círculo de Mohr facilita a transformação de tensão, tornando mais simples a obtenção das tensões em qualquer plano.

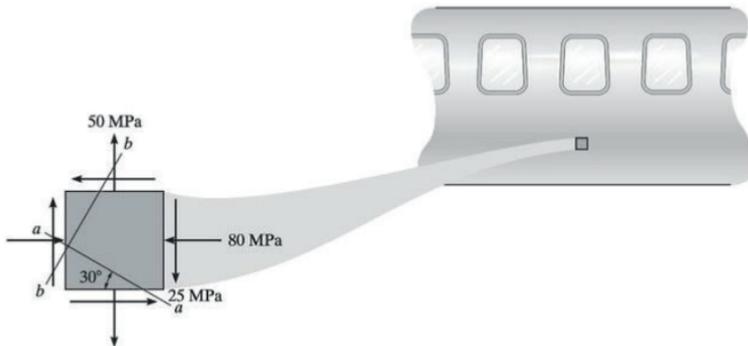
Avançando na prática

Estado plano de tensão na fuselagem de um avião

Descrição da situação-problema

Para se dimensionar o material necessário a ser utilizado na superfície de um avião, devem ser determinadas as tensões principais para o estado de tensão, apresentado na Figura 3.39. Determine também as tensões na seção **a - a**.

Figura 3.39 | Estado plano de tensão da fuselagem de um avião



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 323).

Resolução da situação-problema

Para determinar as tensões principais, podemos utilizar a equação a seguir, sabendo que $\sigma_x = -80\text{MPa}$, $\sigma_y = 50\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = -25\text{MPa}$.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-80 + 50}{2} + \sqrt{\left(\frac{-80 - 50}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 54,64\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-80 + 50}{2} - \sqrt{\left(\frac{-80 - 50}{2}\right)^2 + (-25)^2} = -84,64\text{MPa}$$

E para as tensões no plano **a – a**, podemos utilizar as Equações desenvolvidas nesta seção. Entretanto, temos de ter cuidado, pois o ângulo da inclinação do plano será: $\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, assim, temos:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(60^\circ) - 25 \sin 2(60^\circ)$$

$$\sigma_{x'} = -4,15\text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{-80 - 50}{2} \sin 2(60^\circ) - 25 \cos 2(60^\circ) = 43,79\text{MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{-80 + 50}{2} - \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(60^\circ) - 25 \sin 2(60^\circ)$$

$$\sigma_{y'} = -47,5\text{MPa}$$

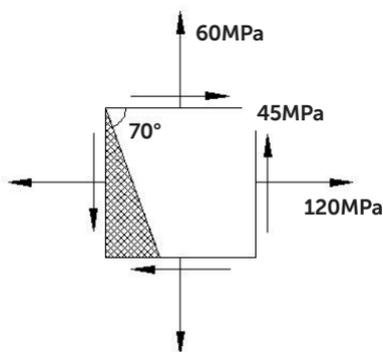
Com estes resultados, podemos concluir que as tensões no plano **a – a** estão dentro do intervalo das tensões principais.

Faça valer a pena

1. O estado geral de tensão em um ponto é determinado por seis componentes, três componentes de tensão normal e outros três componentes de tensão de cisalhamento. Este estado de tensão, na prática profissional, para facilitar a interpretação dos problemas reais, é simplificado a um estado plano de tensão.

Determine as tensões normal e de cisalhamento que atuam na face oblíqua da região hachurada apresentada na figura. Desenvolva pelo método de análise com base no equilíbrio do elemento hachurado.

Figura 3.40 | Estado de tensão



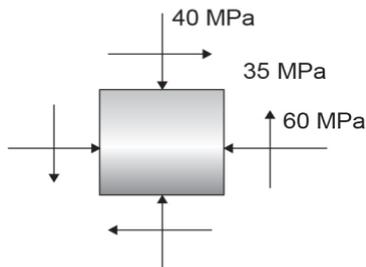
Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 462).

- a) $\sigma = 141,9 \text{ MPa}$ e $\tau = 15,19 \text{ MPa}$.
- b) $\sigma = 151,9 \text{ MPa}$ e $\tau = 16,19 \text{ MPa}$.
- c) $\sigma = 161,9 \text{ MPa}$ e $\tau = 17,19 \text{ MPa}$.
- d) $\sigma = 171,9 \text{ MPa}$ e $\tau = 18,19 \text{ MPa}$.
- e) $\sigma = 181,9 \text{ MPa}$ e $\tau = 19,19 \text{ MPa}$.

2. Na prática profissional, é comum a busca pela direção em que ocorrerão as máximas tensões no plano. Com isso, para se determinar a tensão normal máxima e mínima, devemos derivar a equação dos componentes de tensão em relação ao ângulo do plano inclinado e igualando a zero. Assim, temos as equações das tensões principais.

Determine as tensões principais para o estado de tensão apresentado na figura.

Figura 3.41 | Estado de tensão



Fonte: Beer et al. (2015, p. 462).

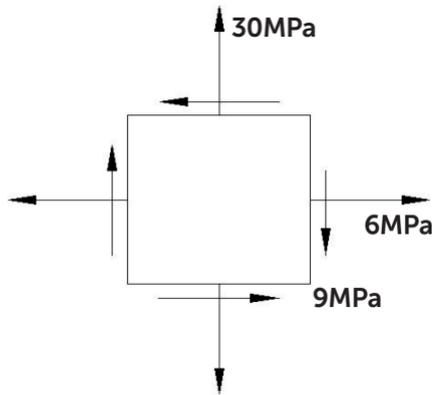
- a) $\sigma_1 = -10,6\text{MPa}$ e $\sigma_2 = -83,4\text{MPa}$.
- b) $\sigma_1 = -11,6\text{MPa}$ e $\sigma_2 = -84,4\text{MPa}$.
- c) $\sigma_1 = -12,6\text{MPa}$ e $\sigma_2 = -84,4\text{MPa}$.
- d) $\sigma_1 = -13,6\text{MPa}$ e $\sigma_2 = -86,4\text{MPa}$.
- e) $\sigma_1 = -14,6\text{MPa}$ e $\sigma_2 = -87,4\text{MPa}$.

3. O estado de tensão no ponto também pode ser representado como a tensão de cisalhamento máxima no plano. Nesse caso, uma tensão normal média também age no elemento.

Os planos para tensão de cisalhamento máxima podem ser determinados orientando um elemento a 45° em relação à posição de um elemento que define os planos das tensões principais. (HIBBELER, 2010, p. 329)

Determine a tensão máxima de cisalhamento e a orientação deste plano para o estado de tensão apresentado na figura.

Figura 3.42 | Estado de tensão



Fonte: Beer et al. (2015, p. 462).

- a) $\tau_{\text{máx}} = 5\text{MPa}$; $\theta_{s1} = -16,6^\circ$; $\theta_{s2} = 73,4^\circ$.
- b) $\tau_{\text{máx}} = 10\text{MPa}$; $\theta_{s1} = -20,6^\circ$; $\theta_{s2} = 69,4^\circ$.
- c) $\tau_{\text{máx}} = 15\text{MPa}$; $\theta_{s1} = -26,6^\circ$; $\theta_{s2} = 63,4^\circ$.
- d) $\tau_{\text{máx}} = 20\text{MPa}$; $\theta_{s1} = -36,6^\circ$; $\theta_{s2} = 53,4^\circ$.
- e) $\tau_{\text{máx}} = 25\text{MPa}$; $\theta_{s1} = -46,6^\circ$; $\theta_{s2} = 43,4^\circ$.

Referências

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Estudo de torção no regime elástico

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade de ensino estudaremos os elementos estruturais sujeitos ao carregamento de torção. Para isso, as peças estruturais utilizadas serão eixos ou tubos, maciços ou vazados. Estudaremos os casos mais usuais para os elementos de seção transversal circular. Determinaremos as tensões no interior dos eixos e verificaremos os ângulos de torção e deformação que possam ocorrer para os materiais com comportamento elástico linear.

A competência de fundamento desta disciplina é conhecer, realizar e interpretar cálculos para determinar os esforços solicitantes no material, as tensões e as deformações devido às cargas axiais, em qualquer plano, e à torção, bem como avaliar as propriedades dos materiais quanto à sua deformação e resistência mecânica.

O resultado de aprendizagem desta unidade é a compreensão e a aplicação das tensões e deformações em regime elástico para situações de torção.

O contexto de aprendizagem utilizado como situação da realidade profissional (SR) proposta nesta unidade é focado em uma montadora de automóveis que apresentará ao mercado um novo modelo de carro com motor mais potente em comparação com a versão anterior. Para isso, terão de ser feitos ajustes nos sistemas mecânicos existentes. O sistema de transmissão foi atribuído a uma equipe de projetistas da qual você, aluno, faz parte. Para o sucesso do projeto, você terá de analisar as novas condições de carregamento no eixo de transmissão e apresentar o relatório sobre o comportamento do material.

Para atingir os objetivos desta unidade, você deve estar apto a:

- Calcular a tensão de cisalhamento no eixo de transmissão e analisar se ela atende às exigências de projeto.
- Calcular o ângulo de torção devido ao carregamento e analisar se atende às exigências de projeto.
- Modelar o eixo de transmissão no software de análise, a fim de simular situações para diferentes motores e otimização do eixo.

Para isso, serão tratados nas seções desta unidade os conceitos de tensões no regime elástico e tensão de cisalhamento em um eixo maciço e vazado. Também serão abordados o conceito de deformação em eixos circulares e ângulo de torção no regime elástico. Tudo isso para que seja possível elaborar um projeto de eixo de transmissão, calculando as tensões de cisalhamento, os ângulos de torção e as verificações da deformação.

Está preparado para mais este desafio?

Bons estudos!

Seção 4.1

Tensões no regime elástico

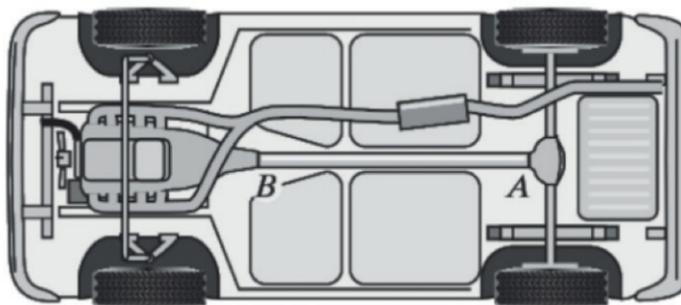
Diálogo aberto

Caro aluno, já é de nosso conhecimento o conceito de tensão e deformação para um carregamento axial. Nesta nova etapa, estudaremos elementos estruturais sujeitos a um carregamento de torção. Analisaremos as tensões nestes elementos em seções transversais circulares, submetidos ao torque. Esse novo esforço que estudaremos é muito aplicado na prática profissional. Sua aplicação mais comum é para eixos de transmissão dos veículos automotores, mastros de barcos à vela e pilares de edifícios altos sujeitos à ação de ventos.

Para notarmos a importância desse assunto, o contexto de aprendizagem desta seção é focado em uma montadora de automóveis que apresentará ao mercado um novo modelo de carro com motor mais potente em comparação com a versão anterior. Para isso, terão de ser feitos ajustes nos sistemas mecânicos existentes. Você faz parte da equipe de desenvolvimento desse sistema de transmissão do veículo. Na situação-problema (SP) desta seção, você calculará a tensão de cisalhamento no eixo de transmissão e analisará se atende às exigências de projeto.

O coordenador do projeto lhe apresentou o desenho esquemático do sistema de transmissão do veículo, conforme mostra a Figura 4.1, e pediu para você verificar as tensões de cisalhamento no eixo de transmissão do modelo anterior para o torque (τ) do novo motor de **2000N.m**. O eixo de transmissão do modelo anterior é um tubo que possui um diâmetro externo de **65mm** e interno de **55mm**.

Figura 4.1 | Desenho esquemático do sistema de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

Além de calcular as tensões de cisalhamento no eixo de transmissão do modelo anterior para o torque do novo motor, o coordenador pediu para, se necessário ou possível, redimensionar o eixo de transmissão que possui uma resistência de tensão de cisalhamento admissível de 200 MPa. Nesse caso, você terá de calcular uma nova espessura para o eixo de transmissão, uma vez que o diâmetro externo deve ser mantido. Para esse trabalho, será que as tensões de cisalhamento do eixo de transmissão atendem à condição de projeto para o novo motor? Quais dimensões seriam indicadas para o novo sistema de transmissão?

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de tensões no regime elástico e sermos capazes de determinar as tensões de cisalhamento para um eixo sujeito a um esforço de torção.

Vamos lá? Bons estudos!

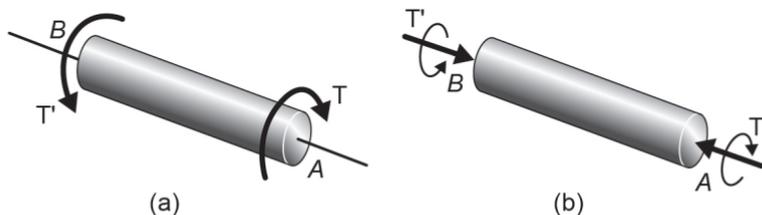
Não pode faltar

Análise preliminar das tensões em um eixo

Para se fazer uma análise preliminar das tensões atuantes em um eixo devido a esforço de torção, estudaremos as tensões proporcionadas em elementos de seção transversal circular sujeitos a esforços que tendem a torcer a peça. Esses esforços são chamados de momento de torção, momento torcional, torque ou apenas torçor, representado pela letra T , conforme Figura 4.2. Repare na Figura 4.2a que os esforços T e T' possuem a mesma intensidade, porém

sentidos contrários entre si. Estes esforços são grandezas vetoriais e são representadas de duas formas: com setas curvas, conforme Figura 4.2a ou com vetores conjugados, conforme Figura 4.2b.

Figura 4.2 | Eixo esquemático sob ação de torque

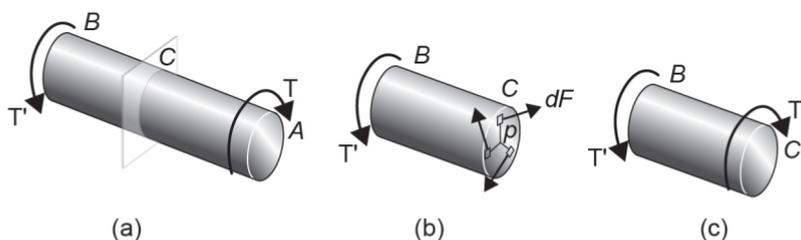


Fonte: Beer et al. (2015, p. 137).

Tensão de cisalhamento em um eixo circular

Para realizarmos uma análise preliminar das tensões em um eixo, vamos considerar um eixo AB sujeito ao esforço de momento de torção T e T' , de mesma intensidade e sentidos opostos entre si, conforme Figura 4.3a. Na figura 4.3a, fazemos um corte no ponto C do eixo para então verificarmos o diagrama de corpo livre do novo segmento BC, conforme Figura 4.3b.

Figura 4.3 | Barra de seção circular submetida ao torque



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 139).

Nesse diagrama de corpo livre, a seção transversal C apresenta as forças internas de cisalhamento (dF) com distâncias perpendiculares (ρ) até o eixo da circunferência da seção transversal. Para as condições de equilíbrio do segmento BC, a somatória dos momentos provocados pelas forças de cisalhamento com relação ao centro da seção circular deve ser igual ao torque T' aplicado na extremidade do eixo, como mostra a Equação 4.1:

$$\int \rho dF = T \quad (4.1)$$

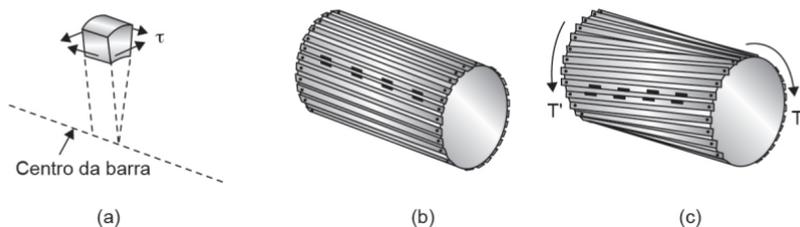
Sabendo que $dF = \tau dA$, em que τ é a tensão de cisalhamento atuante na área dA , teremos a Equação 4.2:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T \quad (4.2)$$

Apesar de conseguirmos relacionar as tensões de cisalhamento que ocorrem em um eixo submetido ao torque, a partir da Equação 4.2 não é possível identificar de que forma ocorre a distribuição de tensão na seção transversal. Por esse motivo, para se obter a distribuição de tensão, deveremos analisar um eixo estaticamente indeterminado.

A tensão de cisalhamento não ocorre somente em um plano. Um torque aplicado em uma barra, provoca uma tensão de cisalhamento nas faces perpendiculares ao eixo longitudinal da barra, conforme Figura 4.4a.

Figura 4.4 | Tensão de cisalhamento em uma barra



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 139-140).

Para facilitar a visualização das tensões de cisalhamento ocorrendo em mais de um plano, vejamos uma barra formada por tiras, conforme a Figura 4.4b. Repare que foram feitas marcas na barra da Figura 4.4b no sentido longitudinal. Ao aplicar o torque nessa barra, as marcas deslizam ao longo do eixo longitudinal e em torno do raio da circunferência da seção transversal, conforme Figura 4.4c.



Refleta

Considere materiais homogêneos submetidos a um esforço de torção, que proporciona tensões de cisalhamento. A Lei de Hooke é aplicável a esses materiais nessa condição de esforço?

Tensões no regime elástico

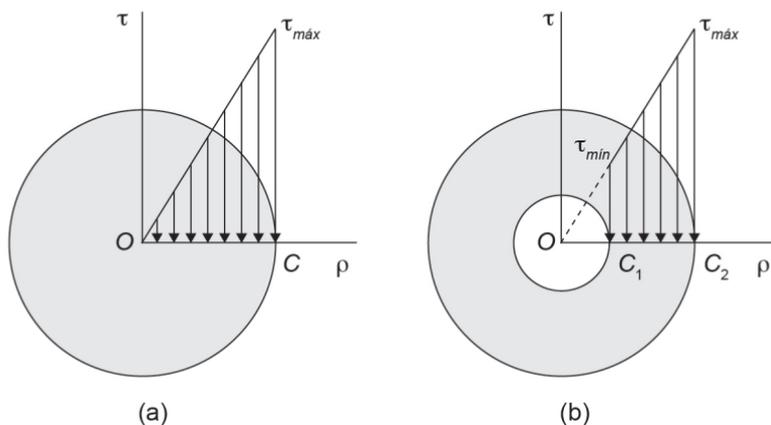
Para um material elástico linear, a Lei de Hooke se aplica para tensão e deformação de cisalhamento, conforme vimos na seção anterior, expressa pela Equação 3.10.

$$\tau = G\gamma \quad (3.10)$$

Lembrando que a letra G é o módulo de elasticidade transversal do material e γ representa a deformação por cisalhamento.

Outras equações podem ser determinadas por meio da análise do diagrama de distribuição de tensões de cisalhamento em uma barra submetida ao torque, apresentado na Figura 4.5. O diagrama dessa figura mostra no eixo das abscissas a distância ao centro da seção transversal do eixo e, no eixo das ordenadas, as tensões de cisalhamento. Como o torque é verificado a partir do centro da circunferência, não há tensão de cisalhamento no centro. Por outro lado, na borda no eixo tem-se máxima tensão de cisalhamento, formando assim uma distribuição de tensão triangular, conforme Figura 4.5a.

Figura 4.5 | Distribuição de tensões de cisalhamento em uma barra submetida a um torque



Fonte: Beer et al. (2015, p. 143).

As medidas intermediárias do eixo das abscissas são representadas pela letra ρ , sendo a letra C a representação do raio. Com isso, podemos expressar através de semelhança de triângulos a Equação 4.3 para obtenção da tensão de cisalhamento em função da tensão máxima:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{m\acute{a}x} \quad (4.3)$$

Para eixos vazados, conforme Figura 4.5b, nos quais a tens\~ao de cisalhamento m\~inima ($\tau_{m\acute{i}n}$) est\~a localizada em c_1 e a tens\~ao m\~axima ($\tau_{m\acute{a}x}$) est\~a localizada em c_2 , podemos escrever conforme a Equa\~cao 4.4 para correlacionar essas tens\~oes.

$$\tau_{m\acute{i}n} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{m\acute{a}x} \quad (4.4)$$

As Equa\~coes 4.3 e 4.4 s\~ao v\~alidas caso o esfor\~co sobre o eixo n\~ao exceda o limite de proporcionalidade do material.



Assimile

A distribui\~cao de tens\~ao de cisalhamento ocorre linearmente com a dist\~ancia do eixo de uma barra circular sob esfor\~co de tor\~cao, desde que n\~ao exceda a tens\~ao de escoamento do material, a fim de que a Lei de Hooke seja v\~alida.

Juntando as Equa\~coes 4.2 e 4.3, podemos obter a Equa\~cao 4.5:

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{c} \int \rho^2 dA \quad (4.5)$$

A integra\~cao do \~ultimo termo da Equa\~cao 4.5 representa o momento polar de in\~ercia $J = \int \rho^2 dA$ da se\~cao transversal em rela\~cao ao centro do eixo, calculado pela Equa\~cao 4.6:

$$T = \frac{\tau_{m\acute{a}x} J}{c} \quad (4.6)$$

Podemos reorganizar a Equa\~cao 4.6 para obtermos a tens\~ao de cisalhamento m\~axima, conforme Equa\~cao 4.7.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \quad (4.7)$$

Juntando as Equa\~coes 4.3 e 4.7, obtemos a Equa\~cao 4.8.

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (4.8)$$

As Equa\~coes 4.7 e 4.8 s\~ao conhecidas como f\~ormulas para o c\~alculo da tor\~cao no regime el\~astico. A unidade no sistema internacional para o torque (T) \~e expresso em **N.m**, os raios (c ou ρ) em metros e o momento polar de in\~ercia em **m⁴**. A tens\~ao de cisalhamento, como j\~a vimos, \~e expressa em **N/m²** ou **Pa**.

Tensão de cisalhamento em um eixo maciço e vazado

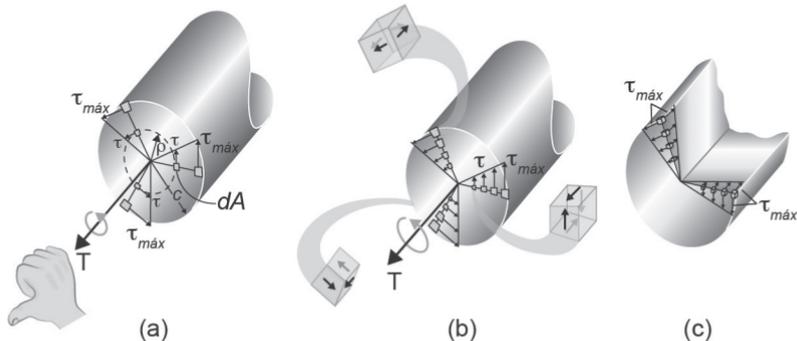
Para eixos maciços, o momento polar de inércia (J) de um círculo de raio c é expresso pela Equação 4.9.

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 \quad (4.9)$$

Essa propriedade geométrica da área circular é sempre positiva.

Para representarmos o esforço de torção, utilizamos a regra da mão direita para orientar o vetor. Conforme a Figura 4.6a, temos o sentido do vetor no mesmo sentido do polegar, e o sentido do torque orientado pelos demais dedos.

Figura 4.6 | Barra de seção circular maciça submetida a um torque



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 127-128).

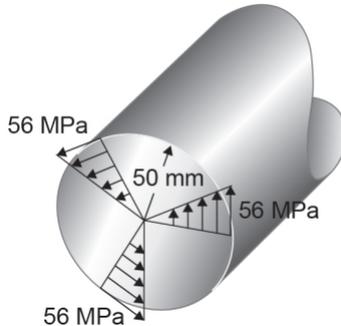
As Figuras 4.6b e 4.6c reforçam que o torque no eixo da barra, além de desenvolver uma distribuição de tensão de cisalhamento ao longo do plano da seção transversal, também provoca uma distribuição de tensão de cisalhamento ao longo de um plano axial.

Para proceder na análise em barras sob efeito de torção, devemos seguir algumas etapas importantes: primeiramente, identificar o carregamento interno da barra, para isso, deve-se seccionar a barra perpendicularmente à seção transversal e desenhar o diagrama de corpo livre, utilizando as equações de condição de equilíbrio necessárias para determinar o torque interno da seção, para então ser possível calcular as tensões de cisalhamento atuantes na barra. Para o cálculo da tensão de cisalhamento, como vimos anteriormente nesta seção, devemos identificar, além do torque atuante na barra, as propriedades geométricas, tais como o raio da seção transversal e o momento polar de inércia. Por fim, podemos determinar a tensão de cisalhamento utilizando a Equação 4.7 e 4.8.



A Figura 4.7 apresenta um diagrama de distribuição de tensão de cisalhamento em um eixo maciço. Determine o torque para essa condição.

Figura 4.7 | Diagrama de tensão de cisalhamento em uma barra



Fonte: adaptada de Hibbeler (2010, p. 130).

Para o diagrama apresentado, podemos identificar a tensão de cisalhamento máxima e o raio do círculo da seção transversal:

$$\tau_{\text{máx}} = 56 \text{ MPa} = 56 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad c = 50 \text{ mm} = 0,050 \text{ m}.$$

Com isso, devemos primeiro calcular o momento polar de inércia:

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (0,05)^4 = 9,82 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Com os dados acima identificados, podemos calcular o torque na barra:

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} = \frac{(56 \times 10^6 \text{ Pa})(9,82 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0,050 \text{ m}} = 11 \times 10^3 \text{ N.m} = 11 \text{ kN.m}$$

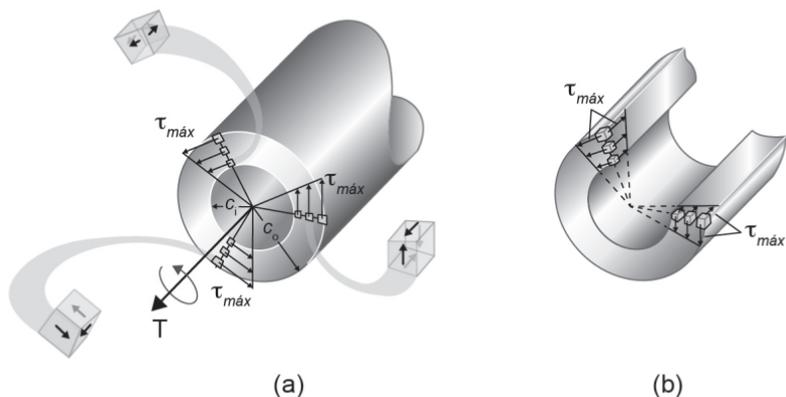
Dessa forma, identificamos que o torque de **11 kN.m** proporciona uma tensão máxima de cisalhamento na barra de **56 MPa**. Interessante salientar que não importa de qual material a barra maciça é feita, a tensão e o torque sempre serão os mesmos para um raio de 50 mm.

Para elementos de eixos vazados, com raio interno (c_1) e externo (c_2), o momento polar de inércia é expresso pela Equação 4.10.

$$J = \frac{1}{2} \pi c_2^4 - \frac{1}{2} \pi c_1^4 = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) \quad (4.10)$$

Da mesma forma que ocorre para um eixo maciço, as tensões de cisalhamento distribuídas no plano da seção transversal do eixo vasado variam ao longo do raio de forma linear, conforme Figura 4.8a.

Figura 4.8 | Barra de seção circular vazada submetida a um torque



Fonte: Hibbeler (2010, p. 129).

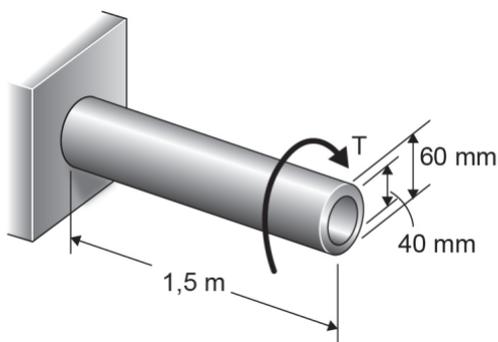
A tensão de cisalhamento também varia linearmente ao longo do sentido longitudinal, conforme Figura 4.8b.



Exemplificando

A Figura 4.9 apresenta as dimensões de um tubo sob esforço de um torque T . Determine o maior torque que pode ser aplicado sabendo que a tensão de cisalhamento é de 120MPa .

Figura 4.9 | Torque aplicado à extremidade de um tubo



Fonte: Beer et al. (2015, p. 144).

Para calcular o torque no tubo, podemos utilizar a Equação 4.6:

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} \quad (4.6)$$

Para isso, devemos primeiro calcular o momento polar de inércia:

$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi [(0,030\text{m})^4 - (0,020\text{m})^4] = 1,021 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

Com os dados acima identificados, podemos calcular o torque no tubo:

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} = \frac{(120 \times 10^6 \text{Pa})(1,021 \times 10^{-6} \text{m}^4)}{0,030\text{m}} = 4,08 \times 10^3 \text{N.m} = 4,08 \text{kN.m}$$

Dessa forma, identificamos que o torque de **4,08kN.m** proporciona uma tensão de cisalhamento no tubo de **120MPa**. Essa tensão de cisalhamento é a máxima, atuando na borda externa do tubo. Por ser um elemento vazado, podemos calcular a tensão mínima que ocorre na superfície interna do tubo utilizando a Equação 4.4:

$$\tau_{\text{min}} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\text{máx}} = \frac{0,20\text{m}}{0,03\text{m}} (120 \times 10^6 \text{Pa}) = 80 \times 10^6 \text{Pa} = 80 \text{MPa}$$

Portanto, tem-se para esse tubo, quando submetido a um torque de **4,08kN.m**, uma tensão de cisalhamento mínima de **80MPa** e uma tensão de cisalhamento máxima de **120MPa**.

Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido a importância do conceito de tensões no regime elástico e esteja capaz de determinar as tensões de cisalhamento para um eixo sujeito a um esforço de torção.



Pesquise mais

Veja mais sobre os procedimentos de análise de torção em uma barra no capítulo 5 do livro:

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. p. 123-129.

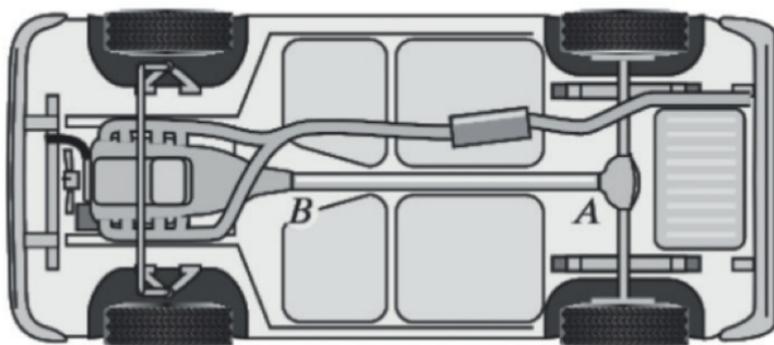
Bons estudos! E até mais!

Sem medo de errar

Retomando o contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de transmissão de um automóvel. O coordenador do projeto lhe apresentou o desenho esquemático do sistema de transmissão do veículo, conforme mostrado na Figura 4.1, e pediu para verificar as tensões de cisalhamento no eixo de transmissão do modelo anterior para o torque (T) do novo motor de **2000N.m**. O eixo de transmissão do modelo anterior é feito com um

tubo que possui um diâmetro externo de **65mm** e interno de **55mm**.

Figura 4.1 | Desenho esquemático do sistema de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

Além de calcular as tensões de cisalhamento no eixo de transmissão do modelo anterior para o torque do novo motor, o coordenador pediu para, se necessário ou possível, redimensionar o eixo de transmissão, que possui uma resistência de tensão de cisalhamento admissível de 200 MPa. Dessa forma, você terá de calcular uma nova espessura para o eixo de transmissão, uma vez que o diâmetro externo deve ser mantido.

Para uma primeira análise, temos os seguintes dados apresentados pelo coordenador:

O torque do Motor: $T = 2000N.m$, temos também os diâmetros do eixo existente. Com isso, podemos determinar os raios do círculo da seção transversal:

$$c_2 = \frac{65mm}{2} = 32,5mm = 0,0325m \text{ e } c_1 = \frac{55mm}{2} = 27,5mm = 0,0275m.$$

Com esses raios, podemos determinar o momento polar de inércia para esse eixo vazado:

$$J = \frac{\pi}{2} \left[(0,0325m)^4 - (0,0275m)^4 \right] = 8,54 \times 10^{-7} m^4$$

Por fim, podemos determinar a tensão de cisalhamento no eixo de transmissão:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} = \frac{(2000N.m)(0,0325m)}{8,54 \times 10^{-7} m^4} = 76,1 \times 10^6 Pa = 76,1MPa$$

Observe que a tensão de cisalhamento máxima no eixo de transmissão existente, calculada para o novo motor, é menor que a

tensão de cisalhamento admissível ($71,1\text{MPa} < 200\text{MPa}$). Dessa forma, o eixo de transmissão existente atende às condições de projeto para o novo motor.

O coordenador pediu para redimensionar a espessura do tubo, visando redução de custo. Dessa forma, precisamos redefinir o raio interno do eixo vazado, uma vez que o raio externo não pode ser alterado. Com isso, temos os seguintes dados:

O torque do Motor: $T = 2000\text{N.m}$, também temos o diâmetro externo do eixo existente. Com isso, podemos determinar raio do círculo da seção transversal:

$$c_2 = \frac{65\text{mm}}{2} = 32,5\text{mm} = 0,0325\text{m} \text{ e } c_1 = ?.$$

Determinaremos o raio interno para a tensão de cisalhamento admissível do eixo de transmissão que é $\tau_{adm} = 200\text{MPa}$.

Usaremos a seguinte equação com os dados obtidos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow 200 \times 10^6 \text{ Pa} = \frac{(2000\text{N.m})(0,0325\text{m})}{\frac{\pi}{2}[(0,0325\text{m})^4 - (c_1)^4]}$$

Isolando a incógnita c_1 , temos:

$$c_1 = \sqrt[4]{(0,0325\text{m})^4 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{2000\text{N.m} \times 0,0325\text{m}}{200 \times 10^6 \text{ Pa}} \right)} = 0,030875 = 30,9\text{mm}$$

Com o resultado do raio interno, podemos obter a espessura mínima necessária, calculada a partir da diferença entre os raios:

$$e = c_2 - c_1 = 32,5\text{mm} - 30,9\text{mm} = 1,6\text{mm}.$$

Para efeito de comparação, vamos calcular a espessura do eixo de transmissão existente:

$$e = c_2 - c_1 = 32,5\text{mm} - 27,5\text{mm} = 5\text{mm}$$

Por fim, podemos concluir que o eixo de transmissão existente é capaz de resistir ao torque do novo motor, entretanto, é possível reduzir a espessura do eixo.

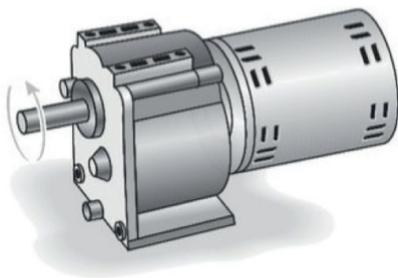
Avançando na prática

Tensões em eixos de engrenagens

Descrição da situação-problema

Para o motor de engrenagens apresentado na Figura 4.10, podemos desenvolver um torque de até 15kN.m . Sabe-se que a tensão de cisalhamento admissível do eixo das engrenagens, que será acoplado a esse motor, é de $\tau_{adm} = 50\text{MPa}$. Qual deve ser o menor diâmetro necessário do eixo para utilizar nesse sistema?

Figura 4.10 | Motor de engrenagens



Fonte: Hibbeler (2010, p.138).

Resolução da situação-problema

Para determinar o menor diâmetro necessário do eixo aplicado ao sistema apresentado anteriormente, devemos utilizar a seguinte equação:

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J}$$

Para essa equação, a tensão de cisalhamento admissível do material é $\tau_{adm} = 50 \text{MPa}$ e o torque é $T = 15 \text{kN.m} = 15 \times 10^3 \text{N.m}$.

Devemos inserir as propriedades geométricas em função do diâmetro (d), assim temos:

O raio: $c = \frac{d}{2}$, logo o momento polar de inércia: $J = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^4$.

Agora, podemos utilizar a equação inicialmente apresentada:

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow J = \frac{T.d}{2\tau_{adm}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{T.d}{2\tau_{adm}} \Rightarrow \frac{\pi d^4}{2 \cdot 16} = \frac{T.d}{2\tau_{adm}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau_{adm}}}$$

Atribuindo os valores para equação, temos:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16(15 \times 10^3 \text{N.m})}{\pi(50 \times 10^6 \text{Pa})}} = 0,1152 \text{m} = 115,2 \text{mm}.$$

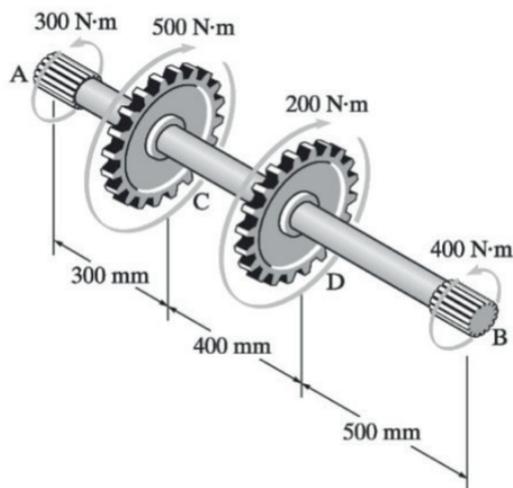
Portanto, o diâmetro do eixo maciço que atende às condições desse projeto deve ser superior a **115,2mm**.

Faça valer a pena

1. "O torque interno T não somente desenvolve uma distribuição linear da tensão de cisalhamento ao longo de cada linha radial no plano da área de seção transversal, como também uma distribuição de tensão de cisalhamento associada é desenvolvida ao longo de um plano axial". (HIBBELER, 2010, p. 128)

Para o eixo de engrenagens apresentado na figura a seguir, determine a tensão de cisalhamento máxima atuante no eixo, sabendo que o diâmetro do eixo é de 25mm .

Eixo de engrenagens

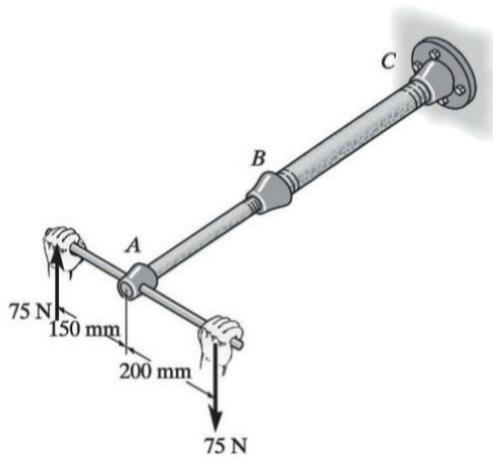


Fonte: Hibbeler (2010, p. 134).

- a) $89,7\text{MPa}$.
- b) $96,1\text{MPa}$.
- c) $105,3\text{MPa}$.
- d) $115,8\text{MPa}$.
- e) $130,4\text{MPa}$.

2. "A fórmula da torção é baseada no requisito de que o torque resultante na seção transversal seja igual ao torque produzido pela distribuição linear da tensão de cisalhamento em torno da linha central longitudinal do eixo. É necessário que o eixo ou tubo tenha seção transversal circular e que seja feito de material homogêneo de comportamento linear elástico". (HIBBELER, 2010, p. 129)

Para o conjunto de tubos apresentado na figura a seguir, determine a tensão de cisalhamento máxima para cada segmento, sabendo que o diâmetro externo do segmento AB é de 20mm e do segmento BC é de 25mm , sendo que ambos os tubos têm espessura de 2mm .



Fonte: Hibbeler (2010, p. 134).

- a) $\tau_{m\acute{a}x_{AB}} = 22,8\text{MPa}$ e $\tau_{m\acute{a}x_{BC}} = 10,0\text{MPa}$.
- b) $\tau_{m\acute{a}x_{AB}} = 25,2\text{MPa}$ e $\tau_{m\acute{a}x_{BC}} = 15,5\text{MPa}$.
- c) $\tau_{m\acute{a}x_{AB}} = 28,3\text{MPa}$ e $\tau_{m\acute{a}x_{BC}} = 17,0\text{MPa}$.
- d) $\tau_{m\acute{a}x_{AB}} = 32,4\text{MPa}$ e $\tau_{m\acute{a}x_{BC}} = 18,5\text{MPa}$.
- e) $\tau_{m\acute{a}x_{AB}} = 36,9\text{MPa}$ e $\tau_{m\acute{a}x_{BC}} = 20,0\text{MPa}$.

3. "Pela Lei de Hooke, para um material homogêneo com comportamento linear elástico, a tensão de cisalhamento ao longo de qualquer linha radial do eixo também varia linearmente, de zero na linha central do eixo até um valor máximo em seu contorno externo. Essa tensão de cisalhamento máxima não deve ultrapassar o limite de proporcionalidade do material". (HIBBELER, 2010, p. 129)

Para um tubo de aço com diâmetro externo de 60mm e resistente a uma tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 70\text{MPa}$, determine a espessura do tubo para que seja capaz de suportar um torque de 1000N.m .

- a) 3mm .
- b) 5mm .
- c) 7mm .
- d) 9mm .
- e) 11mm .

Seção 4.2

Deformação em eixos circulares e ângulo de torção no regime elástico

Diálogo aberto

Caro aluno, já é de nosso conhecimento a análise de tensões devido a um carregamento de torção. Estudaremos agora, nesta seção, o conceito de deformação para eixos circulares, com ângulo de torção no regime elástico. Veremos casos de sistemas estaticamente indeterminados e reforçaremos o conceito de torção.

O termo torção nos remete a sistemas mecânicos, torque de motores etc. No entanto, vamos pensar nas pequenas coisas do nosso dia a dia, por exemplo ao fechar ou abrir um registro do chuveiro: para essa tarefa, nós aplicamos um torque no registro. Repare que podemos utilizar a regra da mão direita, em que o sentido do polegar indica o sentido que moverá o registro e os demais dedos indicam o lado que devemos girar o registro. Por exemplo, para fechar um registro do chuveiro, queremos que este interrompa a água no tubo, dessa forma, o êmbolo do registro deve se deslocar no sentido da parede, dado a partir de um torque aplicado no sentido horário, sendo que o contrário vale para abrir o registro.

Nesta seção, continuaremos no contexto de aprendizagem desta unidade, em que uma montadora de automóveis lançará um novo modelo de carro com um motor mais potente. Para esse lançamento, será necessário revisar o sistema de transmissão do automóvel, lembrando que você faz parte da equipe que desenvolverá essa revisão.

Assim, na situação-problema desta seção, você calculará o ângulo de torção devido ao carregamento e analisará se atende às exigências de projeto.

O coordenador do projeto lhe apresentou o comprimento do eixo de transmissão. Esse eixo de transmissão liga um ponto B, que fica localizado no motor, a um ponto A, que transmite esse torque ao eixo das rodas traseiras do veículo, sendo a distância entre esses dois pontos de **2,50m**. Você já sabe que o novo motor tem um torque (T) de **2000N.m**, e que o eixo de transmissão do modelo anterior

é um tubo que possui um diâmetro externo de **65mm** e interno de **55mm**. Na etapa anterior do projeto, o eixo de transmissão foi redimensionado e sugerimos uma espessura para o tubo superior a **1,6mm**. Com essas informações, e sabendo que o ângulo de torção limite é de **0,10rad**, deve-se analisar uma situação na qual o ponto A fique fixo, devido a problemas nas engrenagens. Nesse caso, você terá de analisar esses dois eixos de transmissão, sabendo que o material utilizando possui **$G = 80GPa$** . Para esse trabalho, os tubos existentes e o proposto atendem ao limite do ângulo de torção? Quais dimensões seriam indicadas para o novo sistema de transmissão, analisando mais essa etapa do trabalho?

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender os conceitos de torção e deformação em eixos circulares, e analisar o ângulo de torção no regime elástico.

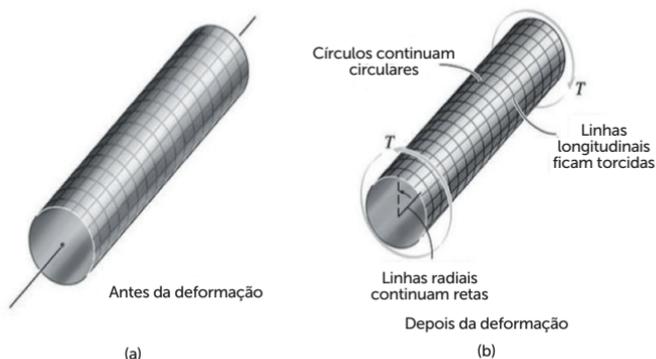
Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Definição de torção

O momento de torção em torno de um eixo longitudinal de um elemento estrutural é conhecido como torque. Esse esforço, como vimos, ocorre em mastros de barcos à vela, pilares de edifícios altos sujeitos à ação do vento, vigas que sustentam alguns tipos de varandas e, principalmente, em eixos de engrenagens ou eixos de transmissão de veículos automotores. A Figura 4.11 apresenta o que ocorre em um eixo quando este é submetido a um esforço de torção.

Figura 4.11 | Eixo circular antes e depois da aplicação de torque



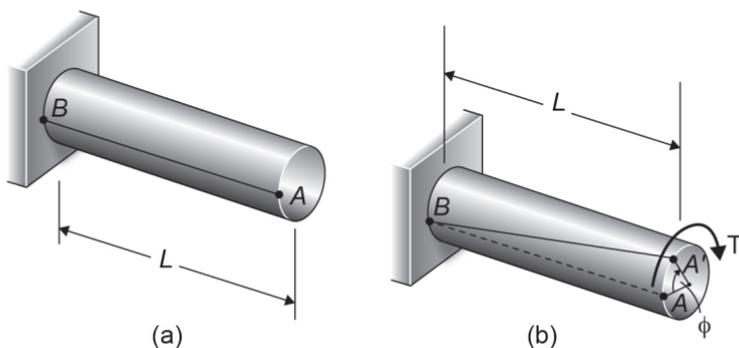
Fonte: Hibbeler (2010, p. 125).

A Figura 4.11a apresenta o eixo antes de aplicar o esforço e a Figura 4.11b apresenta o eixo após aplicação do esforço de torção. Repare nas linhas longitudinais nas duas imagens: após a deformação, percebe-se o efeito da torção, que destorce essas linhas longitudinais, fazendo-as perder a linearidade, deixando-as helicoidais. Apesar dessa deformação, as linhas transversais permanecem retas e todos os raios coplanares.

Deformação em eixos circulares

Para melhor entendimento das deformações em eixos circulares, vejamos um eixo com uma das extremidades fixa e a outra livre, na qual ocorrerá o esforço de torção, conforme mostra a Figura 4.12. Na Figura 4.12a, podemos observar uma linha reta entre os pontos A e B, sendo que essa figura apresenta o eixo sem o esforço e, conseqüentemente, sem deformação. A partir da Figura 4.12b, observa-se que o torque T proporciona uma rotação, com isso, descola-se o ponto A para o ponto A', formando, assim, na seção transversal, um ângulo ϕ denominado de ângulo de torção.

Figura 4.12 | Eixo com suporte fixo

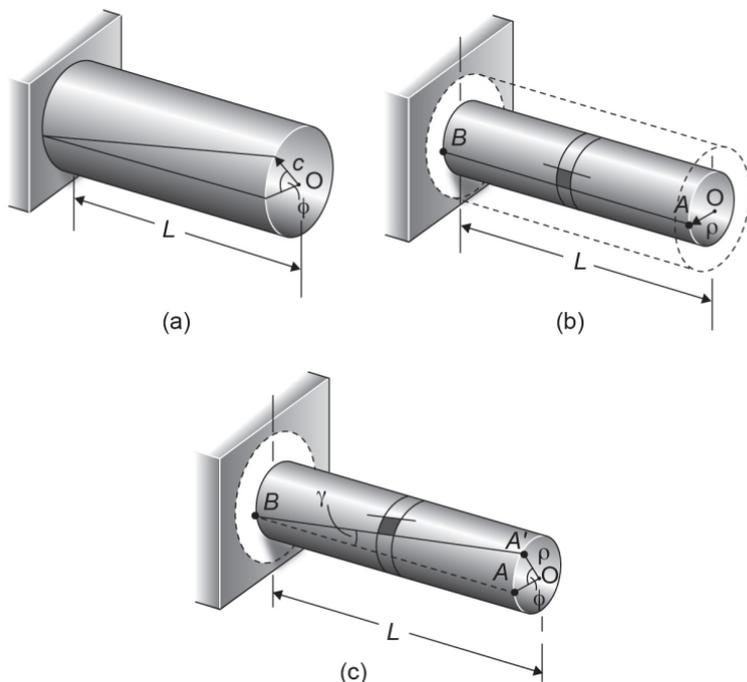


Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 140).

Analisando a Figura 4.12b, podemos perceber que há uma proporcionalidade entre o ângulo de torção e o comprimento da barra, conseqüentemente teremos uma relação entre o torque e essas duas grandezas. As relações entre o torque, o ângulo de torção e o comprimento da barra serão utilizadas na análise da deformação de cisalhamento, para isso, verificaremos a deformação

de cisalhamento para uma barra circular de comprimento L e raio C , submetida a um torque, proporcionando um ângulo de torção ϕ , conforme apresentado na Figura 4.13a.

Figura 4.13 | Deformação de cisalhamento em uma barra submetida ao torque



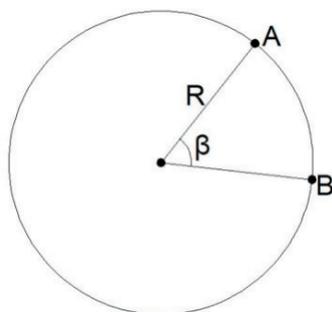
Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 142).

Para esta análise, vejamos uma camada interna da barra com raio ρ , a Figura 4.13b apresenta a barra antes do esforço de torção e a Figura 4.13c após o esforço torcional. Para facilitar a análise, repare na linha AB e um quadrado azul com um dos lados nessa linha AB , mostrados na Figura 4.13b. Após o esforço de torção, ocorre uma distorção no quadrado, tornando-o um losango. Temos, com isso, uma deformação de cisalhamento, conforme já estudamos em unidades anteriores. Analisando a Figura 4.13c, podemos notar a deformação de cisalhamento (γ) que, para ângulos gama muito pequenos, pode ser expressa conforme a Equação 4.11.

$$\gamma L = AA' \quad (4.11)$$

A Equação 4.11 trata-se de uma relação trigonométrica onde o comprimento de um arco (AA') é dado pelo produto de sua medida em radianos (γ) pelo seu raio (L), veja o exemplo da Figura 4.14, onde tem-se um arco AB , raio R com relação igual: $AB = R \cdot \beta$.

Figura 4.14 | Relação trigonométrica – arco de circunferência



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 140).

A relação do arco de circunferência ocorre em relação à AA' (comprimento do arco), que, também para ângulos muito pequenos, é igual ao produto do raio ρ pelo ângulo ϕ , conforme expresso pela Equação 4.12.

$$AA' = \rho\phi \quad (4.12)$$

Juntando as equações 4.11 e 4.12, podemos expressar a equação da deformação de cisalhamento em função do ângulo de torção, raio e comprimento da barra, conforme mostra a Equação 4.13, em que a deformação de cisalhamento e o ângulo de torção são expressos em radianos.

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (4.13)$$

Tem-se que a Equação 4.13 apresenta de forma algébrica a relação proporcional linear entre a deformação por cisalhamento com a distância ao eixo da barra.



Assimile

"A deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância do eixo da barra" (BEER et al., 2015, p. 142). Temos que a variação é inversamente proporcional.

Para se obter a deformação máxima, basta utilizar a Equação 4.13 com o raio até a superfície da barra (c), conforme Equação 4.14.

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c\phi}{L} \quad (4.14)$$

Também podemos correlacionar a deformação de cisalhamento com a deformação de cisalhamento máxima, conforme a Equação 4.15.

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{m\acute{a}x} \quad (4.15)$$



Pesquise mais

Veja outros casos de deformação para eixos maciços não circulares no capítulo 5 do livro:

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. p. 155-157.

Ângulo de torção no regime elástico

Vejamos agora a relação do ângulo de torção e o momento de torção aplicado em um eixo. Consideraremos que a barra da Figura 4.13c se encontra dentro do regime elástico, ou seja, nenhum ponto da barra excede a tensão de escoamento. Com isso, podemos utilizar a Lei de Hooke ($\tau_{m\acute{a}x} = \gamma_{m\acute{a}x}G$). Juntando a equação da Lei de Hooke com a equação da tensão de cisalhamento máxima ($\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J}$), teremos a Equação 4.16.

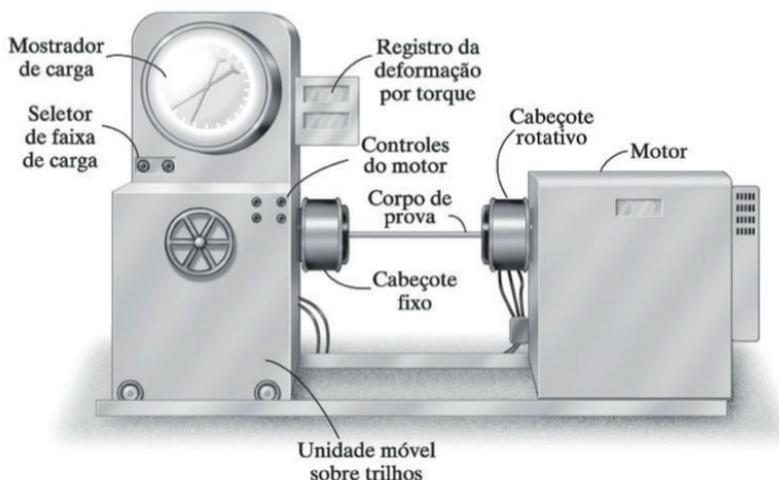
$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (4.16)$$

Agora, igualando a deformação de cisalhamento máxima apresentada nas Equações 4.14 e 4.16, teremos a Equação 4.17, lembrando que o ângulo de torção é expresso em radianos:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

Essa equação mostra que, para o regime elástico, o ângulo de torção é proporcional ao torque aplicado na barra. Podemos utilizar a Equação 4.17 para obter o módulo de elasticidade transversal (G) de um material para um ensaio de torção. Para isso, devemos definir as demais grandezas da equação para poder iniciar o ensaio. Dessa forma, podemos colocar um corpo de prova de comprimento (L) e raio (c), estabelecidos por norma, em uma máquina de ensaio de torção, conforme mostra a Figura 4.15.

Figura 4.15 | Desenho esquemático do ensaio de torção em uma barra



Fonte: Hibbeler (2010, p. 140).

O torque (τ) e o ângulo de torção (ϕ) são medidos para um comprimento (L) de referência, durante o ensaio. Caso o corpo de prova seja submetido a vários torques de diferentes intensidades, aplicados em vários pontos, ou se o módulo de cisalhamento ou a área da seção transversal alterar-se subitamente de uma região do corpo de prova a outra, a Equação 4.16 deve ser utilizada para cada segmento onde as quantidades sejam constantes. Dessa forma, o ângulo de torção pode ser obtido pela Equação 4.18, sendo que devemos obter a soma vetorial dos ângulos de torção para cada segmento.

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG} \quad (4.18)$$



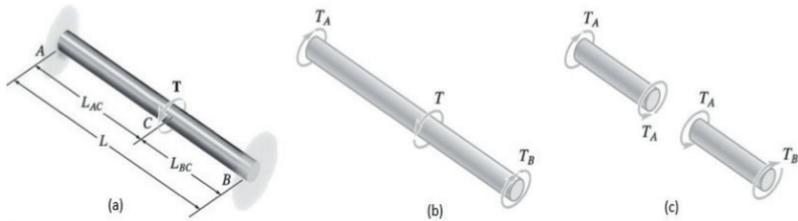
Refleta

Como devemos proceder em um sistema de engrenagem no qual não é possível determinar a torção interna utilizando os conceitos de estática?

Eixos estaticamente indeterminados

Existem casos em que não é possível determinar o torque em um eixo apenas com as equações de condição de equilíbrio estático. Esses casos são conhecidos por eixos estaticamente indeterminados. Na Figura 4.16, vemos um exemplo desse caso.

Figura 4.16 | Eixo estaticamente indeterminado



Fonte: adaptado de Hibbeler (2010, p. 151).

A Figura 4.16a apresenta uma barra fixa a dois pontos A e B na qual é aplicado um torque em C. Para essa barra, podemos desenhar o diagrama de corpo livre (DCL), conforme mostra a Figura 4.16b. No entanto, neste DCL conhecemos apenas o torque T aplicado à barra. Dessa forma, utilizando a equação de condição de equilíbrio $\Sigma M_x = 0$, temos a Equação 4.19:

$$T - T_A - T_B = 0 \quad (4.19)$$

Temos então, apenas uma Equação de condição de equilíbrio para duas incógnitas. Para resolver esse problema, temos de aplicar uma condição de compatibilidade ou condição cinemática. Portanto, deve-se determinar que o ângulo de torção de uma das extremidades da barra seja igual a zero em relação à outra, uma vez que os apoios são fixos, assim: $\phi_{A/B} = 0$. Além disso, deve-se considerar que a barra se comporta de forma elástica linear, para assim podermos utilizar a Equação 4.17. Para o torque interno no segmento AC igual a T_A e o torque interno no segmento CB igual a $-T_B$, teremos a Equação 4.20, como equação de compatibilidade.

$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0 \quad (4.20)$$

Para essa equação, consideramos que o momento polar de inércia (J) e o módulo de elasticidade transversal (G) são constantes, pois a barra é a mesma. Resolvendo as equações 4.19 e 4.20 para as reações de apoio, sabendo que $L = L_{AC} + L_{BC}$, temos as Equações 4.21 e 4.22.

$$T_A = T \left(\frac{L_{BC}}{L} \right) \quad (4.21)$$

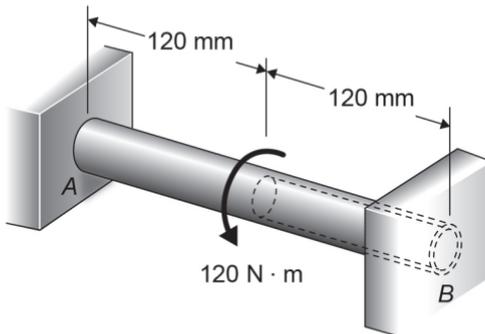
$$T_B = T \left(\frac{L_{AC}}{L} \right) \quad (4.22)$$

Repare que tanto o torque T_A quanto o torque T_B variam linearmente com a localização da aplicação do torque T .



A Figura 4.17 apresenta um eixo circular fixo nas duas extremidades. Sabe-se que o comprimento do eixo é de **240mm**, sendo que o eixo é maciço com diâmetro de **20mm** do ponto A até o meio, e do meio para o ponto B o eixo é vazado, com diâmetro interno de **16mm**. Determine o torque em cada apoio devido ao esforço de torção no meio do eixo, conforme Figura 4.17.

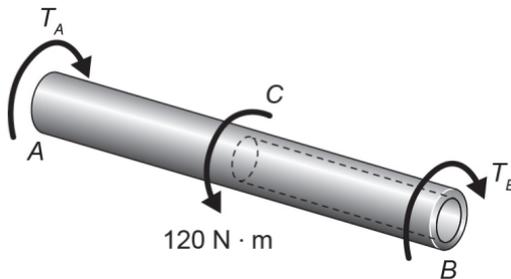
Figura 4.17 | Eixo submetido ao esforço de torção



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 160).

Para resolver esse problema, devemos desenhar o diagrama de corpo livre do eixo, conforme Figura 4.18, e utilizar a equação de condição de equilíbrio estático $\Sigma M_x = 0$.

Figura 4.18 | Diagrama de corpo livre do eixo



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 160).

Utilizando a equação de condição de equilíbrio $\Sigma M_x = 0$, temos:
 $T_A + T_B = 120N.m$.

Por apresentar duas incógnitas, temos uma condição estaticamente indeterminada. Dessa forma, devemos admitir uma condição de compatibilidade, onde temos:

$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0 \Rightarrow T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Em que $L_1 = L_2 = 120\text{mm} = 0,12\text{m}$. Portanto, $J_1 = \frac{1}{2}\pi(0,010\text{m})^4 = 1,57 \times 10^{-8}\text{m}^4$

$$J_2 = \frac{1}{2}\pi[(0,010\text{m})^4 - (0,008\text{m})^4] = 9,27 \times 10^{-9}\text{m}^4$$

Com isso, temos:

$$T_B = \frac{(0,12\text{m})(9,27 \times 10^{-9}\text{m}^4)}{(0,12\text{m})(1,57 \times 10^{-8}\text{m}^4)} T_A \Rightarrow T_B = 0,59 T_A$$

Substituindo essa última expressão na primeira equação, temos:

$$T_A + T_B = 120\text{N.m} \Rightarrow 1,59 T_A = 120\text{N.m}$$

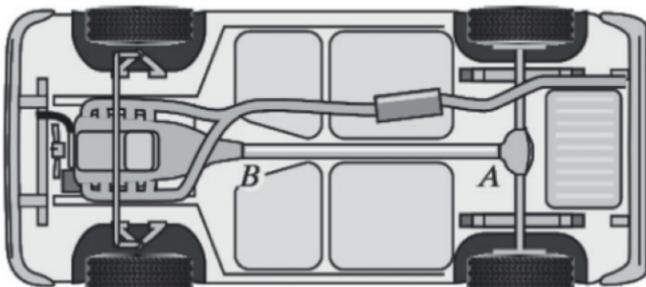
Portanto, $T_A = 75,47\text{N.m}$ e $T_B = 44,53\text{N.m}$.

Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido os casos de eixos ou tubos sujeitos a carregamento de torção para poder determinar as deformações e os ângulos de torção para os casos estaticamente determinados e indeterminados.

Sem medo de errar

Retomando o contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de transmissão de um automóvel. O coordenador do projeto lhe apresentou o desenho esquemático do sistema de transmissão do veículo, conforme mostra a Figura 4.1. O ponto B fica localizado no motor e o ponto A transmite esse torque ao eixo das rodas traseiras do veículo, a distância entre esses dois pontos é de **2,50m**.

Figura 4.1 | Desenho esquemático do sistema de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

Na situação-problema desta seção, temos de analisar o ângulo de torção para os dois tubos: para o tubo existente e para o tubo proposto na seção anterior. Assim, temos as seguintes informações para cada tubo:

Tubo existente:

$$T = 2000Nm$$

$$L = 2,50m$$

$$G = 80 \times 10^9 Pa$$

$$c_2 = \frac{65mm}{2} = 32,5mm = 0,0325m$$

$$\text{e } c_1 = \frac{55mm}{2} = 27,5mm = 0,0275m$$

Com esses raios, podemos determinar o momento polar de inércia para esse eixo vazado: $J = \frac{\pi}{2} [(0,0325m)^4 - (0,0275m)^4] = 8,54 \times 10^{-7} m^4$.

Para o novo tubo, são praticamente os mesmos dados, exceto o raio interno e, conseqüentemente, o momento polar de inércia:

$$c_1 = 30,9mm$$

$$J = \frac{\pi}{2} [(0,0325m)^4 - (0,0309m)^4] = 3,2 \times 10^{-7} m^4$$

Com isso, podemos calcular o ângulo de torção para os dois eixos, na condição do ponto A ficar fixo devido a um problema no travamento das engrenagens.

Para o tubo existente:

$$\phi = \frac{TL}{JG} = \frac{(2000Nm)(2,50m)}{(8,54 \times 10^{-7} m^4)(80 \times 10^9 Pa)} = 0,0732rad$$

Portanto, o tubo existente apresenta um ângulo de torção menor que o limite imposto para o projeto ($0,0732rad < 0,10rad$). Assim, podemos utilizar esse tubo.

Vamos agora calcular o ângulo de torção para o tubo proposto na seção anterior:

$$\phi = \frac{TL}{JG} = \frac{(2000Nm)(2,50m)}{(3,2 \times 10^{-7} m^4)(80 \times 10^9 Pa)} = 0,195rad$$

Portanto, o novo tubo proposto apresenta um ângulo de torção maior que o limite imposto para o projeto ($0,195rad > 0,10rad$). Assim, não podemos utilizar esse tubo. Vamos, então, dimensionar um tubo para o ângulo de torção limite. Para isso, devemos utilizar todos os dados conhecidos, a fim de determinar o raio interno.

$$\phi = \frac{TL}{JG} \Rightarrow J = \frac{TL}{\phi G} \Rightarrow \frac{\pi}{2}[(c_2)^4 - (c_1)^4] = \frac{TL}{\phi G} \Rightarrow c_1 = \sqrt[4]{(c_2)^4 - \frac{2}{\pi} \left[\frac{TL}{\phi G} \right]}$$

$$c_1 = \sqrt[4]{(0,0325)^4 - \frac{2}{\pi} \left[\frac{(2000Nm)(2,50m)}{(0,10rad)(80 \times 10^9 Pa)} \right]} = 0,0291m$$

Podemos calcular a espessura do tubo:

$$e = 32,5mm - 29,1mm = 3,4mm$$

Finalmente, o tubo necessário para atender à condição de projeto deve ter um raio interno de **29,1mm**, dessa forma, o tubo deve ter espessura superior a **3,4mm**.

Repare que na seção anterior a espessura calculada foi de **1,6mm**, entretanto, nesta seção, avaliamos mais uma condição de projeto, a partir da qual devemos utilizar uma espessura de **3,4mm**, ou seja, no desenvolvimento de um mesmo projeto devemos analisar várias restrições.

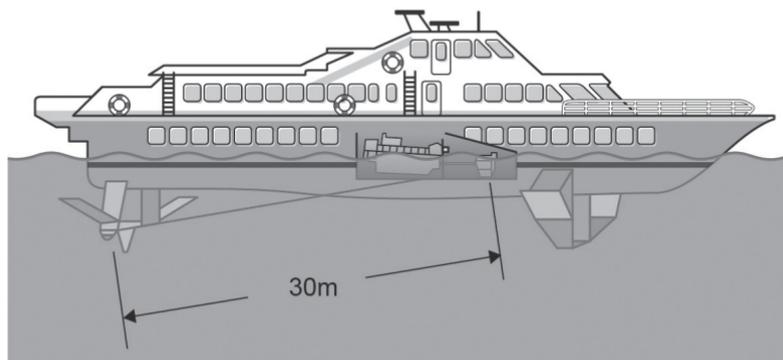
Avançando na prática

Ângulo de torção em eixo de hélice de um navio

Descrição da situação-problema

O eixo da hélice de um navio tem comprimento de **30m**, conforme ilustrado na Figura 4.19. Esse eixo é acoplado a um motor que possui um torque máximo de **12kNm**. Sabendo que o eixo possui um módulo de elasticidade transversal de **80GPa** e diâmetro externo de **250mm** com espessura de **10mm**, qual deve ser o ângulo de torção no eixo para torque máximo?

Figura 4.19 | Desenho esquemático do eixo da hélice do navio



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

Resolução da situação-problema

Para calcular o ângulo de torção, podemos utilizar a seguinte equação: $\phi = \frac{TL}{JG}$.

Para isso, o comprimento é $L = 30m$, o módulo de elasticidade transversal é $G = 80GPa$ e o torque máximo do motor é $T = 12 \times 10^3 Nm$. Precisamos determinar o momento polar de inércia, sabendo que o diâmetro externo é igual a $250mm$ e a espessura do tubo é de $10mm$. Assim, o raio externo é $c_2 = \frac{250}{2} = 125mm$ e o raio interno é $c_1 = 125mm - 10mm = 115mm$. Com isso, podemos calcular o momento polar de inércia:

$$J_2 = \frac{1}{2} \pi [(c_2)^4 - (c_1)^4] = \frac{1}{2} \pi [(0,125m)^4 - (0,115m)^4] = 1,09 \times 10^{-4} m^4$$

Agora, com todos os dados, podemos determinar o ângulo de torção:

$$\phi = \frac{TL}{JG} = \frac{(12 \times 10^3 Nm)(30m)}{(1,09 \times 10^{-4} m^4)(80 \times 10^9 Pa)} = 0,0413 rad$$

Finalmente, para as condições apresentadas no enunciado, o ângulo de torção no eixo da hélice do navio será de $0,0413 rad$.

Faça valer a pena

1. "Às vezes, o projeto de um eixo depende de restrições à quantidade de rotação ou torção que pode ocorrer quando o eixo é submetido a um torque. Além do mais, saber calcular o ângulo de torção para um eixo pode acarretar variação no torque interno ao longo da linha central do eixo". (HIBBELER, 2010, p. 139-140)

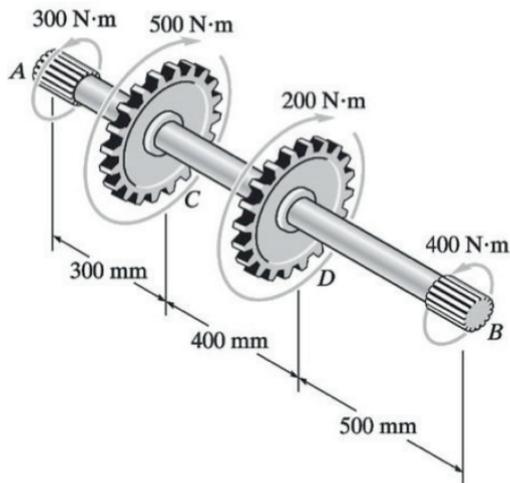
Para um navio com hélices acopladas a um eixo vazado com diâmetros externo de $350mm$ e interno de $280mm$ e comprimento de $50m$, determine o ângulo de torção do eixo, sabendo que o material possui uma $\tau_{adm} = 45MPa$ e $G = 80GPa$.

- a) $0,08rad$.
- b) $0,10rad$.
- c) $0,16rad$.
- d) $0,22rad$.
- e) $0,26rad$.

2. "Se a barra de seção circular está submetida a torques em localizações que não as suas extremidades, ou é formada por várias partes com várias seções transversais e possivelmente de diferentes materiais, o ângulo de torção do eixo deve ser expresso como a soma algébrica dos ângulos de torção de suas partes componentes". (BEER et al., 2015, p. 211)

O sistema de engrenagem é submetido a diferentes torques, conforme apresentado na figura. Determine o ângulo de torção da engrenagem C em relação à engrenagem D, sabendo que o eixo tem diâmetro de 50mm e módulo de elasticidade transversal $G = 75\text{GPa}$.

Sistema de engrenagens



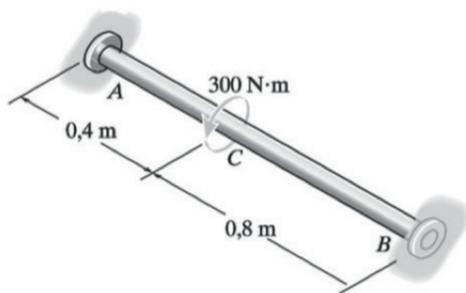
Fonte: Hibbeler (2010, p. 147).

- a) $1,74 \times 10^{-3} \text{ rad}$.
- b) $2,35 \times 10^{-3} \text{ rad}$.
- c) $3,56 \times 10^{-3} \text{ rad}$.
- d) $4,67 \times 10^{-3} \text{ rad}$.
- e) $5,88 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

3. "Se as reações nos suportes de uma barra ou os torques internos não puderem ser determinados somente pela estática, dizemos que o eixo é estaticamente indeterminado. As equações de equilíbrio obtidas dos diagramas de corpo livre devem ser então complementadas por relações que envolvem as deformações da barra e obtidas por meio da geometria do problema". (BEER et al., 2015, p. 211)

A figura apresenta um eixo circular fixo nas duas extremidades, que é submetido a um esforço de torção. Sabe-se que diâmetro do eixo é de 40mm e $G = 70\text{GPa}$. Determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo.

Eixo submetido ao esforço de torção



Fonte: Hibbeler (2010, p. 153).

- a) 7,9MPa.
- b) 10,5MPa.
- c) 15,9MPa.
- d) 17,5MPa.
- e) 23,9MPa.

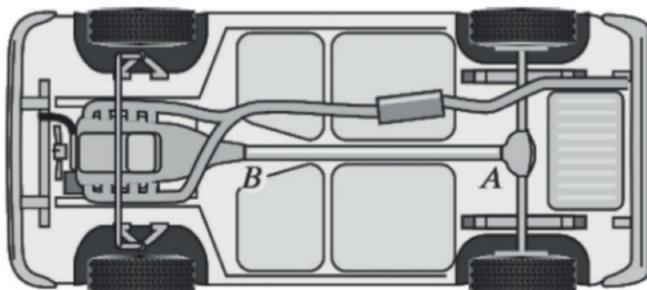
Seção 4.3

Eixo de transmissão

Diálogo aberto

Caro aluno, no encerramento do nosso estudo sobre torção no regime elástico, ressaltamos a importância do entendimento progressivo de cada seção. Para esta última seção, reforçaremos conceitos vistos anteriormente, como a tensão de cisalhamento, o ângulo de torção e a deformação por cisalhamento, a fim de contribuir como fundamentação teórica para o desenvolvimento do projeto de um eixo de transmissão. Para o desenvolvimento desse projeto, apresentaremos um tipo de software que pode ser utilizado como uma ferramenta, entretanto, é de suma importância conhecer os conceitos antes de se fazer uso de qualquer ferramenta. Para contextualizar esse assunto, continuaremos utilizando como situação da realidade profissional o contexto de aprendizagem focado na empresa que está desenvolvendo um novo carro com um motor mais potente, em que você faz parte da equipe de desenvolvimento do sistema de transmissão. Assim, na situação-problema desta seção, você deverá modelar o eixo de transmissão no software de análise, a fim de simular situações para diferentes motores para o eixo apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1 | Desenho esquemático do sistema de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

As informações do sistema de transmissão, já obtidas, são apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 | Informações do novo sistema de transmissão

T (Nm)	L (m)	G (GPa)	ϕ (rad)	c_2 (mm)	c_1 (mm)	$\tau_{m\acute{a}x}$ (MPa)
2000	2,5	80	0,1	32,5	>29,1	200

Fonte: elaborada pelo autor.

Para finalizar o trabalho, você deve determinar qual a potência do motor para uma frequência de **1500rpm**, sabendo que carros esportivos têm potência a partir de **180cv**, aproximadamente. Com isso, será que o novo modelo tem a potência de um carro esportivo? Você também deve preparar os dados de projeto para análise, para poder utilizar um software.

Para resolver essa situação-problema, devemos conhecer e compreender como desenvolver um projeto de eixo de transmissão utilizando um software, calculando a tensão de cisalhamento e o ângulo de torção do sistema.

Vamos lá? Bons estudos!

Não pode faltar

Projeto de eixo de transmissão utilizando um software

Para o projeto de eixo de transmissão são necessárias especificações da velocidade de rotação do eixo e a potência a ser transmitida. O projetista deve determinar um material com geometrias adequadas para resistir às tensões de cisalhamento máximas quando o eixo de transmissão estiver em uso.

A potência consiste no trabalho desenvolvido durante um determinado tempo. O eixo rotativo transmite um trabalho que é igual ao produto do ângulo de rotação pelo torque aplicado no eixo. Com isso, para um instante dt e um torque T proporcionar uma rotação $d\theta$ no eixo, define-se a potência instantânea conforme Equação 4.23.

$$P = \frac{T \cdot d\theta}{dt} \quad (4.23)$$

Sabendo que a velocidade angular (ω) do eixo pode ser determinada pela Equação 4.24, podemos expressar a potência conforme a Equação 4.25.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.24)$$

$$P = T\omega \quad (4.25)$$

A unidade da potência no sistema internacional é expressa em watts (**W**) quando o torque for medido em newtons-metro (**N.m**) e a velocidade angular em radianos por segundo (**rad/s**).

Para máquinas rotativas, é comum a informação de frequência de rotação (**f**) de um eixo. Essa frequência trata-se do número de ciclos ou revoluções que o eixo faz por segundo e é expressa em hertz (**Hz**), sendo que um hertz equivale a um ciclo por segundo. Sabendo que um ciclo é igual a $2\pi rad$, então a velocidade angular pode ser expressa conforme Equação 4.26 e a potência conforme Equação 4.27.

$$\omega = 2\pi f \quad (4.26)$$

$$P = 2\pi f T \quad (4.27)$$

Para um projeto de eixo de transmissão, quando a frequência de rotação e a potência a ser transmitida são previamente determinadas, podemos obter o torque **T** aplicado da Equação 4.27, isolando o torque, e utilizar a Equação 4.28.

$$T = \frac{P}{2\pi f} \quad (4.28)$$

Conhecendo assim o torque e a tensão de cisalhamento máxima do material a ser utilizado no projeto, podemos determinar as dimensões do eixo, utilizando a fórmula de torção (Equação 4.6), lembrando que o material deve comportar-se de forma linear elástica. Assim, podemos determinar o parâmetro geométrico (**J/c**) do projeto, conforme Equação 4.29.

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}} \quad (4.29)$$

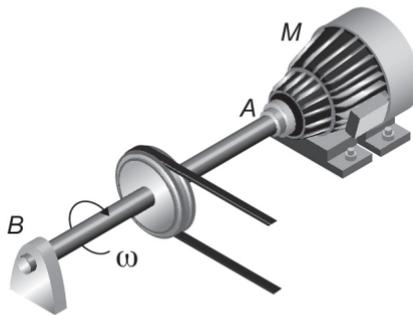
Quando o projeto for de um eixo maciço, a Equação 4.29 pode ser reduzida a um único valor do raio **c** do eixo, uma vez que $\frac{J}{c} = \frac{\pi c^4}{2c} = \frac{\pi c^3}{2}$. No entanto, se o eixo do projeto for vazado, isso permitirá uma ampla possibilidade de valores para a solução.



Exemplificando

Para um eixo de transmissão apresentado na Figura 4.20, será utilizado um motor (**M**) com potência de **3500W**. Se a velocidade angular for de **200rpm** e o material utilizado para o eixo possuir uma tensão de cisalhamento admissível de **80MPa**, qual deve ser o diâmetro do eixo para atender às exigências do projeto?

Figura 4.20 | Eixo de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 132).

Para resolver esse problema, devemos identificar o torque aplicado ao eixo. Assim, podemos utilizar a Equação 4.27, sabendo que

$$P = 3500\text{W} = 3500\text{N.m/s} \text{ e } \omega = \frac{200\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} \right) \left(\frac{1\text{min}}{60\text{s}} \right) = 20,9\text{rad/s}, \text{ temos:}$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{3500\text{N.m/s}}{20,9\text{rad/s}} = 167,5\text{N.m}$$

Utilizando a Equação 4.29, temos:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}} \quad \frac{\pi c^4}{2c} = \frac{T}{\tau_{adm}} \quad \frac{\pi c^4}{2c} = \frac{T}{\tau_{adm}} \Rightarrow \frac{\pi c^3}{2} = \frac{T}{\tau_{adm}} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \cdot \tau_{adm}}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{2(167,5\text{N.m})}{\pi(80 \times 10^6\text{Pa})}} = 0,011\text{m} = 11\text{mm}$$

Portanto, o diâmetro necessário para atender às exigências do projeto deve ser: $2 \times 11\text{mm} = 22\text{mm}$.

Finalizando, temos que os parâmetros apresentados nesta unidade para análise e verificação de eixos de transmissão podem ser modelados em software, a fim de fazermos simulações de diferentes geometrias e materiais de elementos estruturais para diferentes esforços, a fim de idealizarmos um projeto seguro e econômico.



Pesquise mais

Para aprender a modelar um eixo de transmissão no software Inventor, acesse o vídeo disponibilizado a seguir:

SEVERINO, D. **Inventor 2013 – Design Accelerator** - Eixos: Aula 24. Daniel Severino, 2013. Disponível em: <https://youtu.be/MkQqkGQrpck?list=PL_KIMlujpodnTbd3B3QlygmHx-GEkkytw>. Acesso em: 23 ago. 2017.

Outra opção de software simples para cálculo de torção em eixo de transmissão é o MD Solids. Acesse o link com a versão demonstrativa do software, no próprio programa há um tutorial de utilização dele.

MD SOLIDS. **Página com link para versão demonstrativa.** Disponível em: <<http://web.mst.edu/~mdsolids/download.htm>>. Acesso em: 23 ago. 2017.

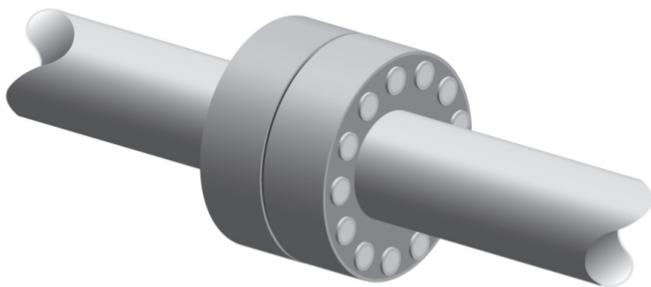
Cálculo de tensão de cisalhamento no eixo de transmissão

Para o cálculo de tensões de cisalhamento em um eixo de transmissão, podemos utilizar a Equação 4.7 apresentada anteriormente.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \quad (4.7)$$

Para o uso dessa equação, o eixo circular deve ter seção transversal uniforme, na qual os torques são aplicados ao longo do eixo. Na prática, os torques normalmente são aplicados aos eixos por acoplamento de engrenagens ao longo deles, conforme Figura 4.21. Até agora, não levamos em consideração a concentração de tensão que pode ocorrer próxima dessas ligações.

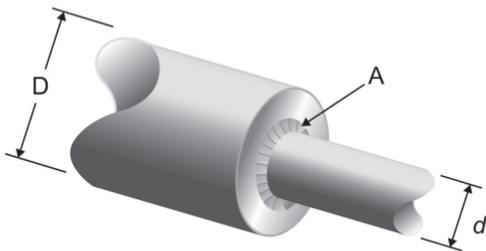
Figura 4.21 | Acoplamento de um eixo



Fonte: Beer et al. (2015, p. 176).

Para determinação das tensões localizadas nesses acoplamentos, como ocorre uma mudança de seção transversal de forma brusca, a concentração de tensão deve ocorrer nessa descontinuidade de seção, no ponto A apresentado na Figura 4.22.

Figura 4.22 | Eixo com mudança de seção transversal



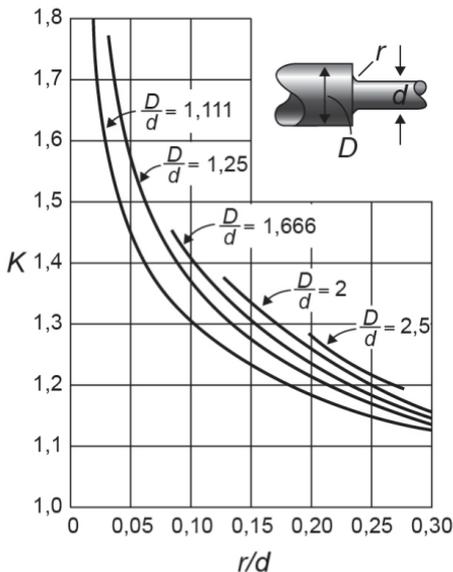
Fonte: Beer et al. (2015, p. 177).

As tensões localizadas no ponto A da Figura 4.22, podem ser obtidas utilizando a Equação 4.30.

$$\tau_{\text{máx}} = K \frac{Tc}{J} \quad (4.30)$$

Onde as propriedades geométricas utilizadas na Equação 4.30 são para o menor diâmetro e a letra K é o coeficiente de concentração de tensão. Esse coeficiente depende da relação entre os diâmetros das seções e da relação entre o raio do adocamento e o menor diâmetro, assim, esse coeficiente pode ser obtido analisando o gráfico da Figura 4.23.

Figura 4.23 | Gráfico de coeficiente de concentração de tensão



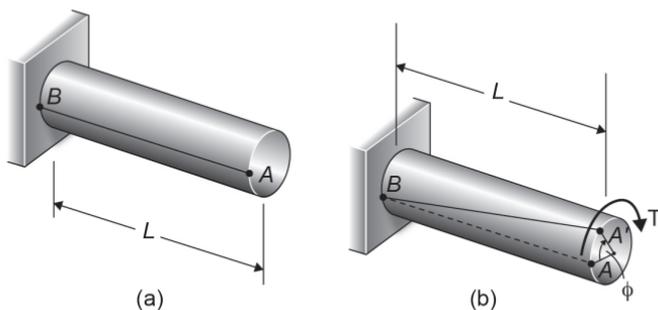
Fonte: Beer et al. (2015, p. 177).

Esse procedimento apenas é válido para calcular as tensões de cisalhamento máximas para o material com comportamento elástico, ou seja, não deve exceder o limite de proporcionalidade do material.

Cálculo do ângulo de torção

O cálculo do ângulo de torção para um eixo de transmissão será diferente do caso visto na seção anterior, conforme apresentado na Figura 4.12.

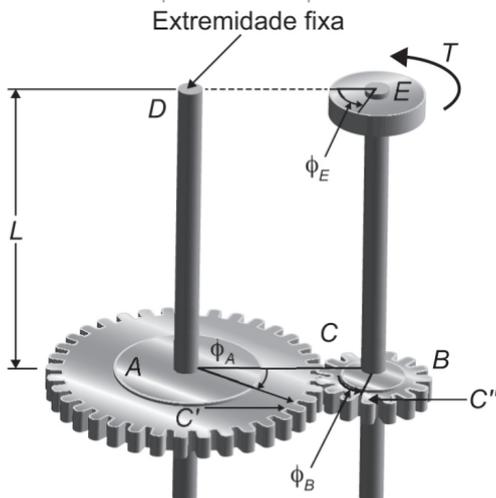
Figura 4.12 | Eixo com suporte fixo



Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 140).

Para os eixos de transmissão, estudaremos a transmissão do torque de um eixo para o outro conforme Figura 4.24.

Figura 4.24 | Transmissão do torque do Ponto E para o D

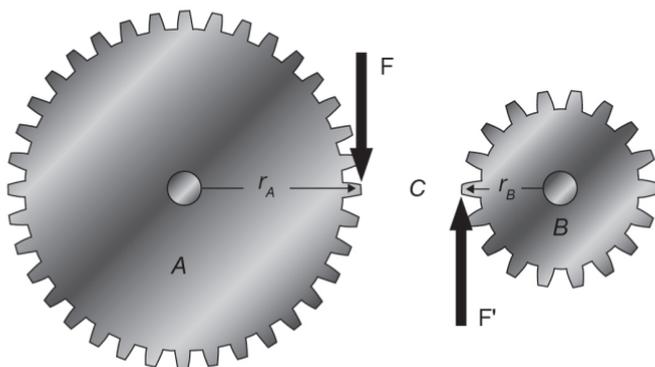


Fonte: adaptada de Beer et al. (2015, p. 158).

No caso da Figura 4.24, devemos calcular também o ângulo de torção. Para esse caso, vamos considerar o ponto D fixo, e que os eixos AD e BE possuem o mesmo comprimento (L), raio (c) e módulo de elasticidade transversal (G), ligados entre si pelo acoplamento das engrenagens no ponto C. Para um torque T aplicado no ponto E, ambos eixos torcerão. O ângulo de torção do eixo AD, como a extremidade D está fixa, será o ângulo de torção da extremidade A (ϕ_A). Por outro lado, no eixo BE, por ter as duas extremidades livres, o ângulo de torção do eixo BE ($\phi_{B/E}$) será a diferença dos ângulos de torção entre os pontos E e B ($\phi_E - \phi_B$). Assim, para determinar o ângulo de torção no ponto E para o sistema de engrenagem da Figura 4.24, consideraremos que o raio da engrenagem A (r_A) é " x " vezes maior que o raio da engrenagem B (r_B), ou seja $r_A = x r_B$.

Devemos primeiro identificar o Torque no eixo AD (T_{AD}), esse torque será o torque transmitido entre as engrenagens no ponto C do torque T aplicado no ponto E. Para o contato das engrenagens, apresentado na Figura 4.25, ocorre uma interação das forças F F' de mesma intensidade e de sentido contrário.

Figura 4.25 | Forças atuantes nas engrenagens



Fonte: Beer et al. (2015, p. 159).

Para obter o torque T_{AD} deve-se utilizar as equações de condição de equilíbrio $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$, com isso, temos as Equações 4.31 e 4.32.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -T_{AD} - Fr_A = 0 \quad (4.31)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow T_{AD} - F'r_B = 0 \quad (4.32)$$

Sabendo que as forças F' e $r_A = xr_B$ são iguais e têm sentidos opostos, podemos isolar as forças e igualar as equações, lembrando que $r_A = xr_B$, assim determinar o torque $T_{AD} = xT$. Conhecendo o torque do eixo AD temos que o ângulo de torção será conforme Equação 4.33.

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{xTL}{JG} \quad (4.33)$$

Observando na Figura 4.24, apresentada anteriormente, os arcos CC' e CC'' devem ser iguais, assim temos que $r_A\phi_A = r_B\phi_B$, com isso, temos que o ângulo de torção em B pode ser expresso conforme Equação 4.34.

$$\phi_B = \frac{r_A}{r_B}\phi_A = x\phi_A = \frac{x^2TL}{JG} \quad (4.34)$$

O ângulo de torção do eixo BE ($\phi_{E/B}$) pode ser expresso pela Equação 4.35.

$$\phi_{E/B} = \frac{TL}{JG} \quad (4.35)$$

Por fim, o ângulo de torção na extremidade E é expresso na Equação 4.36.

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B} = \frac{x^2TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{TL}{JG}(x^2 + 1) \quad (4.36)$$



Assimile

A fórmula do ângulo de torção é desenvolvida a partir da Lei de Hooke, portanto, o torque aplicado nos eixos de transmissão não pode proporcionar o escoamento do material, pois o comportamento do material deve ser linear elástico.

Verificação da deformação do eixo de transmissão

Os eixos de transmissão utilizados nos projetos normalmente possuem seção transversal circular e são submetidos a esforços de torção, por esse motivo, a seção transversal permanece plana, porém as linhas radiais giram. Esse fato proporciona uma deformação por cisalhamento no eixo de transmissão que pode ser determinado utilizando a Equação 4.14, apresentada na seção anterior:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c\phi}{L} \quad (4.14)$$

Normalmente as exigências de projetos, orientadas por normas técnicas, admitem deformações limites para que não comprometam a segurança do sistema estrutural do projeto. Portanto, é necessário

realizar as devidas verificações das deformações nos projetos de eixo de transmissão.



Refleta

Ao término da disciplina de resistência dos materiais, você sente-se apto a desenvolver projetos de novos equipamentos e estruturas?

Ao término desta seção, esperamos que você tenha compreendido os casos de eixos ou tubos sujeitos a carregamento de torção para desenvolvimento de um projeto de eixo de transmissão.

Sem medo de errar

Retomando o contexto de aprendizagem, estamos trabalhando no desenvolvimento do sistema de transmissão de um automóvel. As informações do sistema de transmissão, já obtidas, são apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 | Informações do novo sistema de transmissão

$T(Nm)$	$L(m)$	$G(GPa)$	$\phi(rad)$	$c_2(mm)$	$c_1(mm)$	$\tau_{m\acute{a}x}(MPa)$
2000	2,5	80	0,1	32,5	>29,1	200

Fonte: elaborada pelo autor.

Na situação-problema desta seção, verificaremos os cálculos do eixo de transmissão no software de análise, a fim de simular situações para diferentes motores para o eixo apresentado na Figura 4.1. Antes, devemos calcular a potência do novo carro. Para os dados apresentados na Tabela 4.1, podemos determinar a potência do motor utilizando a Equação 4.27, apresentada nesta seção: $P = 2\pi fT$. Para máquinas rotativas, é comum a informação de frequência de rotação (f) de um eixo. Essa frequência trata-se do número de ciclos ou revoluções que o eixo faz por segundo e é expresso em hertz (Hz), sendo que um hertz equivale a um ciclo por segundo. Como conhecemos a frequência em rotações por minutos, basta dividir por 60s e obter a frequência em Hz , conforme apresentado a seguir: $f = \frac{1500rpm}{60s} = 25Hz$. Com isso, podemos determinar a potência do motor:

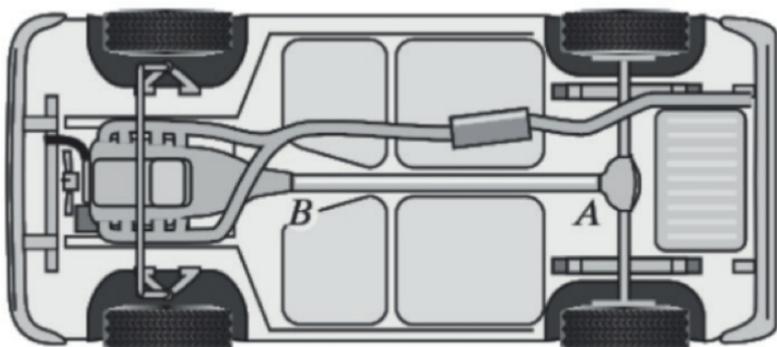
$$P = 2\pi fT = 2\pi(25Hz)(2000Nm) = 314,16 \times 10^3 W = 314,16 kW$$

Para podermos comparar com a informação de potência de 180cv, devemos converter as unidades. Sabendo que: 1hp = 746W e

$1hp = 1,0139cv$, temos que o nosso motor tem uma potência de **421,12hp** que é igual a **426,97cv**. Portanto, **426,97cv > 180cv**, temos, então, um modelo de automóvel na linha esportiva, *cv* com motores bem potentes.

Para modelar o eixo de transmissão no software de análise, a fim de simular situações para diferentes motores e otimização do eixo apresentado na Figura 4.1, devemos preparar as informações que inseriremos no software.

Figura 4.1 | Desenho esquemático do sistema de transmissão



Fonte: Hibbeler (2010, p. 138).

A princípio, podemos atualizar a Tabela 4.1 acrescentando uma coluna com a informação da potência, conforme apresentado na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 | Informações do novo sistema de transmissão

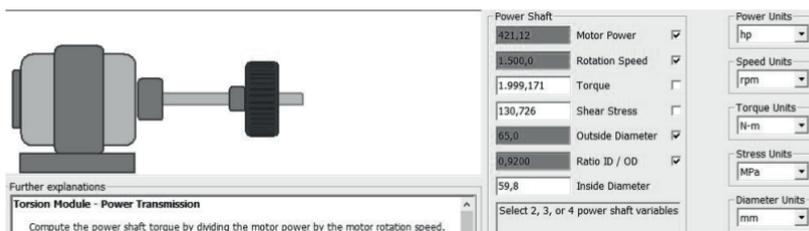
$T(Nm)$	$L(m)$	$G(GPa)$	$c_1(mm)$	$c_2(mm)$	$c_1(mm)$	$\tau_{m\acute{a}x}(MPa)$	$P(cv)$
2000	2,5	80	0,1	32,5	>29,1	200	426,97

Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, devemos escolher um software, vamos utilizar nesta SP o MDSolids. Algumas informações não serão alteradas: o comprimento do eixo de transmissão (L), ou seja, a distância entre o ponto A e B apresentado na Figura 4.1, e o raio externo do tubo C_2 , uma vez que não queremos alterar o espaço onde o eixo será instalado. Portanto, podemos analisar as propriedades referentes ao tipo de material, verificando, por exemplo, o módulo de elasticidade transversal (G) e a tensão de cisalhamento máxima ($\tau_{m\acute{a}x}$) devido

ao esforço de torção. Ou podemos atribuir diferentes torques aplicados ao eixo para podermos verificar a tensão de cisalhamento máxima. Por exemplo, na Figura 4.26 foram inseridos os seguintes dados nas células amarelas do software MDSolids: a potência do motor (*Motor Power*), a velocidade de rotação (*Rotation Speed*), o diâmetro externo (*Outside Diameter*) e a razão do diâmetro interno pelo externo (*Ratio ID/OD*).

Figura 4.26 | Entrada de dados no MDSolids



Fonte: elaborada pelo autor.

Executando o cálculo, podemos obter o torque, a tensão de cisalhamento e o diâmetro interno. Esse foi apenas um exemplo, podemos testar outros valores e obter os resultados de forma rápida e eficiente, o software agiliza os cálculos para o projetista, entretanto, de nada adianta se ele não tiver o conhecimento teórico do assunto para utilizar a ferramenta corretamente. Em suma, devemos ter um sólido conhecimento da resistência dos materiais para poder fazer bom uso de um software para o dimensionamento de um eixo de transmissão.

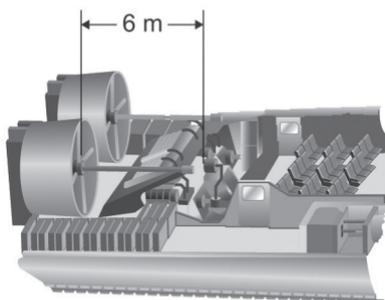
Avançando na prática

Dimensionamento de eixo de transmissão

Descrição da situação-problema

Um aerodeslizador, apresentado na Figura 4.27, possui um eixo de transmissão tubular de **6m** de comprimento e **300mm** de diâmetro externo. Determine o diâmetro interno do eixo de transmissão, sabendo que o motor transmite uma potência de **5MW** ao eixo, com velocidade angular de **25rad/s**. Sabe-se que $\tau_{adm} = 90MPa$ e $G = 80GPa$.

Figura 4.27 | Aerodeslizador



Fonte: Hibbeler (2010, p. 146).

Resolução da situação-problema

Para calcular o diâmetro interno do eixo, podemos utilizar a seguinte equação: $\tau_{adm} = \frac{Tc}{J}$.

Para isso, devemos determinar o torque do motor utilizando a equação a seguir:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{5 \times 10^6 \text{ W}}{25 \text{ rad/s}} = 200 \times 10^3 \text{ Nm} = 200 \text{ kNm}.$$

Com isso, podemos determinar o raio interno do eixo de transmissão utilizando a primeira equação apresentada, uma vez que acabamos de determinar o torque e conhecemos o raio externo ($c_2 = 0,15\text{m}$).

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc_2}{\pi \left[(c_2)^4 - (c_1)^4 \right]} = \frac{2Tc_2}{\pi \left[(c_2)^4 - (c_1)^4 \right]} \Rightarrow c_1 = \sqrt[4]{(c_2)^4 - \frac{2Tc_2}{\pi \tau_{adm}}}$$

$$c_1 = \sqrt[4]{(c_2)^4 - \frac{2Tc_2}{\pi \tau_{adm}}} = \sqrt[4]{(0,15\text{m})^4 - \frac{2(200 \times 10^3)(0,15\text{m})}{\pi (90 \times 10^6 \text{ Pa})}} = 0,131\text{m} = 131\text{mm}$$

Portanto, para as condições apresentadas no enunciado, o diâmetro interno deve ser: $d_1 = 2c_1 = 2 \times 131\text{mm} = 262\text{mm}$.

Faça valer a pena

1. Os eixos de transmissão utilizados nos projetos normalmente possuem seção transversal circular e são submetidos a esforços de torção. Por esse motivo, a seção transversal permanece plana, porém as linhas radiais giram. Esse fato proporciona uma deformação por cisalhamento no eixo de transmissão.

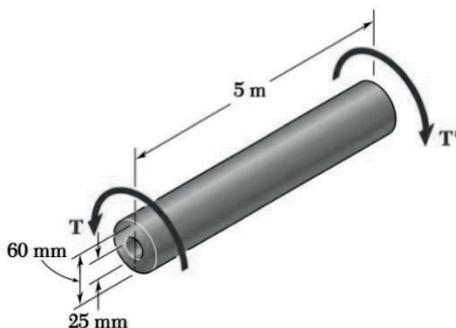
Para um eixo maciço com diâmetro de 40mm , determine a tensão de cisalhamento máxima para transmitir 50kW a uma rotação de 600rpm .

- a) $34,1\text{MPa}$.
- b) $48,2\text{MPa}$.
- c) $55,6\text{MPa}$.
- d) $63,3\text{MPa}$.
- e) $71,2\text{MPa}$.

2. "Eixos e tubos de seções transversais circulares são frequentemente usados para transmitir potência desenvolvida por uma máquina. Quando usados para essa finalidade, estão sujeitos a torques que dependem da potência gerada pela máquina e da velocidade angular do eixo". (HIBBELER, 2010, p. 132)

Para um eixo de seção vazada, apresentado na figura, determine o ângulo de torção do eixo para uma rotação de 240rpm , sabendo que $G = 80\text{GPa}$ e $\tau_{\text{máx}} = 50\text{MPa}$.

Eixo de seção vazada



Fonte: Beer et al. (2015, p. 180).

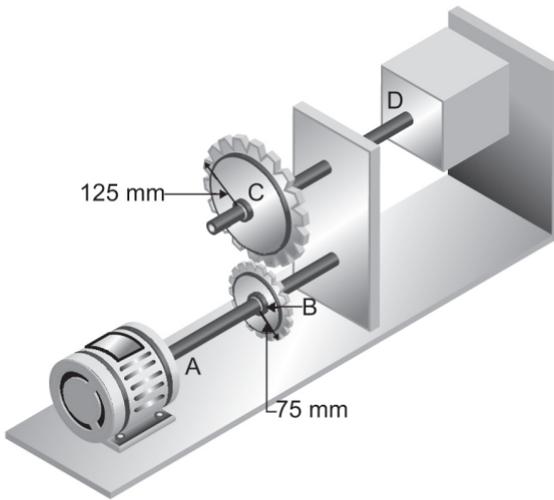
- a) $0,1\text{rad}$.
- b) $0,2\text{rad}$.
- c) $0,3\text{rad}$.
- d) $0,4\text{rad}$.
- e) $0,5\text{rad}$.

3. "O papel do projetista é selecionar o material e as dimensões da seção transversal do eixo, de modo que as tensões de cisalhamento máximas admissíveis do material não sejam ultrapassadas quando o eixo estiver transmitindo a potência necessária com a velocidade especificada". (BEER et al., 2015, p. 174)

Para os dois eixos maciços apresentados na figura a seguir, determine o diâmetro do eixo CD necessário para que o motor A transmita uma

potência de $100kW$, operando com uma rotação de $1200rpm$. Sabe-se também que $\tau_{máx} = 60MPa$.

Eixo de engrenagem



Fonte: Beer et al. (2015, p. 181).

- a) 21,4mm.
- b) 29,4mm.
- c) 35,6mm.
- d) 48,2mm.
- e) 51,7mm.

Referências

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MD SOLIDS. **Página com link para versão demonstrativa**. 2013. Disponível em: <<http://web.mst.edu/~mdsolids/download.htm>>. Acesso em: 23 ago. 2017.

SEVERINO, D. **Inventor 2013 – Design Accelerator - Eixos**: Aula 24. Daniel Severino, 2013. Disponível em: <https://youtu.be/MkQqkGQrpck?list=PL_KIMlujpodnTbd3B3QlygmHx-GEkkYtw>. Acesso em: 23 ago. 2017.

ISBN 978-85-522-0279-0



9 788552 202790 >