

The background features a dark blue field with glowing binary code (0s and 1s) in a lighter blue color. Overlaid on this are several overlapping, semi-transparent blue geometric shapes, including triangles and trapezoids, which create a sense of depth and movement. The overall aesthetic is modern and digital.

Métodos numéricos aplicados

Métodos numéricos aplicados

Mariana Ricken Barbosa
Fabio Santiago

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Alberto S. Santana
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Cristiane Lisandra Danna
Danielly Nunes Andrade Noé
Emanuel Santana
Grasiele Aparecida Lourenço
Lidiane Cristina Vivaldini Olo
Paulo Heraldo Costa do Valle
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Junior Francisco Dias

Editorial

Adilson Braga Fontes
André Augusto de Andrade Ramos
Cristiane Lisandra Danna
Diogo Ribeiro Garcia
Emanuel Santana
Erick Silva Griep
Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Barbosa, Mariana Ricken
B238m Métodos numéricos aplicados / Mariana Ricken Barbosa,
Fabio Santiago. – Londrina : Editora e Distribuidora
Educacional S.A. 2017.
224 p.

ISBN 978-85-522-0207-3

1. Análise numérica. 2. Matemática. I. Santiago, Fabio.
II. Título.

CDD 518.0285

Sumário

Unidade 1 Erros e zeros de funções	7
Seção 1.1 - Representação de números, noções básicas de erros e equações não lineares	9
Seção 1.2 - Conceituação de derivada	24
Seção 1.3 - Outros métodos iterativos para determinação de zeros de funções	39
Unidade 2 Resolução de sistemas lineares	57
Seção 2.1 - Eliminação de Gauss	59
Seção 2.2 - Fatoração LU	80
Seção 2.3 - Métodos iterativos para sistemas lineares	98
Unidade 3 Interpolação	117
Seção 3.1 - Interpolação polinomial	119
Seção 3.2 - Forma de Newton	135
Seção 3.3 - <i>Spline</i> interpolante	151
Unidade 4 Integração numérica	167
Seção 4.1 - Conceituação de integral	169
Seção 4.2 - Aproximação por soma de Riemann	186
Seção 4.3 - Método dos trapézios	205

Palavras do autor

Frequentemente, encontramos no nosso cotidiano modelos matemáticos que descrevem o comportamento de um determinado fenômeno. Por exemplo, podemos inferir a altura de uma ponte marcando o tempo que uma pedra lançada do alto dela leva para chegar até o chão pela aplicação de uma lei da mecânica. Com o avanço da tecnologia e a popularização de computadores, conseguimos, com o auxílio de métodos numéricos, encontrar soluções para um problema cuja resolução por técnicas analíticas é difícil ou até mesmo impossível. Ou seja, executamos, sequencialmente, um número finito de operações aritméticas básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) sobre equações descritivas da nossa realidade. Por meio do autoestudo, desenvolveremos raciocínio crítico e aprenderemos a implementar códigos computacionais relacionados à disciplina Métodos Numéricos Aplicados.

É importante atentar-se às orientações presentes nos tópicos Assimile e Reflita, entre outros deste material, para que sejam compreendidos possíveis questionamentos e você seja capaz de resolver qualquer problema que lhe for atribuído relacionado à análise do erro, aritmética em ponto flutuante, determinação de zeros de funções por meio dos métodos da Falsa Posição, Bissecção, Secante, sendo que para esses casos serão apresentados critérios que devem ser utilizados para decidirmos o quão perto estamos do zero procurado.

No contexto de álgebra linear, você será capaz de identificar quais características os sistemas lineares precisam ter, a fim de possuírem solução única e os métodos numéricos que poderão ser utilizados para obtê-la. Dentre as diferentes abordagens, você estará apto a decidir pelos métodos diretos, como o método de Gauss e Decomposição LU, ou poderá optar pelos métodos iterativos, como o de Jacobi e Gauss-Seidel.

As habilidades adquiridas ao longo desta disciplina também o tornarão capaz de trabalhar com o conceito de interpolação, cujas principais ferramentas para a resolução serão a forma de Newton para o polinômio interpolador, *spline* linear e cúbica.

Em seu leque de conhecimento, também estarão os recursos necessários para você calcular, de forma aproximada, integrais

incomuns, mas que são de fundamental importância em diversas áreas do conhecimento.

Caro estudante, faça uma rotina de estudos, leia este conteúdo e busque compreender a finalidade e as aplicações das metodologias apresentadas em situações reais. Preparado para os novos desafios de sua vida acadêmica? Vamos lá e bons estudos!

Erros e zeros de funções

Convite ao estudo

Nosso cotidiano é marcado pelo consumo de bens, como o arroz e feijão que nos alimentam, a roupa que vestimos, os veículos que nos transportam. Esses produtos necessitam de uma quantidade em massa de insumos para serem produzidos, registro de dados do fornecedor, cálculos de produção, transformação da matéria-prima, venda etc. Todas essas etapas de um sistema produtivo requerem confiança dos dados processados em computadores, que possuem limitações. Quer fazer um teste? Numa planilha eletrônica, solicite o valor π . Acredito que deva ter retornado 3,141592654, mas sabemos que temos infinitas casas decimais para esse número irracional. Assim, se necessitássemos conhecer o volume de um recipiente cilíndrico, nossa resposta seria dependente da capacidade de memória da máquina, dita bits. Mas o computador é uma ferramenta muito importante para nosso dia a dia, apresentando facilidades para gerarmos gráficos, inserirmos dados numéricos para uma análise e implementação de códigos, como é o caso apresentado pela indústria a seguir.

Considere que a YXZZKX, empresa produtora de silicone industrial e exportadora para vários países, acaba de te contratar como supervisor de produção. O gerente da indústria solicitou a você respostas a questões relacionadas à quantidade de silicone (em toneladas) produzida em função do lucro da empresa. Você entende que o lucro desta empresa está relacionado com a quantidade de silicone fabricada e, por isso, inseriu em uma planilha eletrônica dados destas duas variáveis em duas colunas distintas, nomeadas por QS e L , as quais representam a quantidade de silicone produzida e o lucro em milhões, respectivamente, conforme apresenta a Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Dados de quantidade de silicone produzida e lucro

QS (toneladas)	L (milhões de reais)
0	0,00
100	0,04
200	0,16
400	0,64
500	1,00
600	1,43
800	2,55

Fonte: elaborada pela autora.

Com essas informações e com o auxílio de um software capaz de gerar a relação matemática dessas duas variáveis, observou-se que a curva que descreve o comportamento é $L = \ln(QS + 1) \cdot 10^6 + 4QS^2 / 10^6 - QS / 10^5$. Então, o seu gerente solicita algumas informações: primeiramente (na Seção 1.1), ele necessita que você determine a quantidade de silicone que deve ser produzida para alcançar um lucro de R\$ 600.000,00. Depois (na Seção 1.2), ele deseja a sistematização conceitual dos procedimentos necessários para outras formas de determinação da quantidade de silicone produzida num valor fixado de lucro, considerando o modelo apresentado anteriormente, e se é possível determinar a quantidade de silicone que maximiza o lucro da empresa. Por fim (na Seção 1.3), ele requisita que sejam desenvolvidos algoritmos para a implementação computacional da função “quantidade de silicone e lucro”, considerando os conceitos apresentados a você na segunda etapa (na Seção 1.2).

Seção 1.1

Representação de números, noções básicas de erros e equações não lineares

Diálogo aberto

Os computadores possuem uma representação dos números diferente da nossa. Eles leem a mensagem fornecida por você, usuário, interpretam, transformam numa linguagem apropriada, realizam as operações necessárias e convertem em respostas de entendimento humano. Esse processo, denominado de conversão de números decimais para binários, pode resultar em erros, visto que, para nós, os números apresentam uma representação infinita, ao passo que, para as máquinas eletrônicas, ela é finita, mas extremamente útil para determinar uma equação a partir de uma série de pontos, por exemplo. Lembra-se da solicitação do gerente da YXZZKX em que a curva ajustada por um software foi $L = \ln(QS + 1) \cdot 10^6 + 4QS^2 / 10^6 - QS / 10^5$? Agora, necessita-se retomar ao objetivo; para isso, qual seria a faixa de valores que você possivelmente encontraria a quantidade de silicone produzida para obter um lucro de R\$ 600.000,00 e, assim, responder ao seu gerente? Quais são os passos dos métodos numéricos que se fazem necessários para a predição de zero de função, no caso, qual o valor de QS em que L é 0,6? Estructure todas as respostas desses questionamentos para que você, posteriormente, insira-as no relatório solicitado pelo seu gerente.

Não pode faltar

Representação de números

Ruggiero e Lopes (1996, p. 3) esclarecem que: “A representação de um número depende da base escolhida ou disponível na máquina em uso e do número de dígitos usados na sua representação”. A partir disso, definiremos duas bases: decimal e binária.

Número binário e decimal

Os números utilizados em cálculos computacionais são inteiros ou números em ponto flutuante, que são chamados números reais na matemática, por exemplo: 4,37 ou $0,437 \cdot 10^{-1}$. Computadores são binários ou de base 2, ou seja, apresentam um sistema de numeração em que todas as variáveis quantitativas, expressas por nós em sistema de numeração decimal – base 10 por utilizar 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, ..., 9 –, são representadas por dois números, ou seja, zero e um (0 e 1). Este par pode representar um estado ou sistema físico: sim ou não, ligado ou desligado, sempre ou nunca, verdadeiro ou falso. Assim, pode-se realizar a conversão de um número binário para decimal a partir da expansão binária:

$$N = \pm a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

$$\text{Com: } \begin{cases} a_n = 1 \\ a_i = 0 \end{cases} \text{ ou } 1, \quad 0 \leq i < n$$

Assim, se quiséssemos converter $(100000)_2$, número de base 2, para base 10, analisaremos que temos 6 dígitos, $n = 5$, e identificamos os termos a_i por: $a_5 = 1$, $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$. Em seguida, utilizamos a fórmula da expansão binária:

$$(100000)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32$$



Refleta

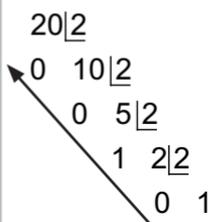
É possível termos o número binário $(10,1)_2$? Em caso afirmativo, qual número seria representado no sistema decimal?

Se quisermos realizar a operação oposta, ou seja, conversão de um sistema decimal para binário, necessitaremos do método das divisões sucessivas sobre a base 2 até que o último quociente seja menor que a base, no caso, 1.



Exemplificando

O número $(20)_{10}$ pode ser convertido em binário pelas operações a seguir:



Assim, tem-se que $(20)_{10} = (10100)_2$.

Você pode ler mais sobre conversão de números em diferentes bases no livro da biblioteca virtual:

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; MONKEN, L. H. **Cálculo numérico**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014. Disponível em: <<http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788543006536/pages/-12>>. Acesso em: 7 abr. 2017.

Caso o número não seja inteiro, utilizaremos o método da multiplicação sucessiva até quando não houver mais o termo fracionário.



Exemplificando

$$0,375 \cdot 2 = 0,750$$

$$0,750 \cdot 2 = 1,50$$

$$0,500 \cdot 2 = 1,00$$

Assim, tem-se que $(0,375)_{10} = (0,011)_2$.

Formato ponto flutuante

Ponto flutuante é a representação dos números reais empregada em máquinas. Basicamente, esse número é composto por três partes: sinal, mantissa e expoente, e é identificado por:

$$m = \pm d_1 d_2 d_3 \dots d_t \cdot \beta^e$$

Sendo: d_i : dígitos da parte fracionária, $d_1 \neq 0$; β : base (2 - binário; 10 - decimal); t : número de dígitos na mantissa; e : expoente inteiro. De forma simplificada: $F(\beta, t, e_{\min}, e_{\max})$.



Podemos representar o número 43,6, em base decimal, com 4 dígitos na mantissa por: $x = 43,6$; $\beta = 10$; $t = 4$, cuja representação será $x = 0\ 4360 \cdot 10^2$.

Erros na representação dos números

Os números reais formam um conjunto infinito de números, então imagine a quantidade de números que podemos ter num intervalo entre 0 e 1. Por outro lado, a representação deles no sistema de ponto flutuante é finita, pois a faixa dos expoentes é limitada, ou seja, $e_{\min} < e < e_{\max}$. Observe: dado que $F(10, 2, -5, 5)$ e que se deseja fazer a operação de divisão entre $w = 0,0064$ e $z = 7312$ resultando num número com $2t$ dígitos. Primeiramente, observamos que o sistema é decimal, com $t = 2$, $e_{\min} = -5$ e $e_{\max} = 5$. Assim, precisamos armazenar os números dados no sistema indicado: $w = 0,64 \cdot 10^{-2}$ e $z = 0,73 \cdot 10^4$ procedemos com a divisão que nos resulta em $w / z = 0,8767 \cdot 10^{-6}$. Como o expoente mínimo é $e_{\min} = -5$, o resultado da operação corresponde a um valor menor que o computador é capaz de armazenar, conhecido como *underflow*.



Pesquise mais

Algumas linguagens de programação admitem a declaração de variáveis em dupla precisão. Isso significa que a representação numérica no sistema de ponto flutuante constará com o dobro de dígitos disponíveis na mantissa. Essa vantagem apresenta um inconveniente em termos de tempo de execução operacional e memória do computador. Para compreender o sistema binário de computadores, acesse o artigo disponível em: <http://www.linhadecodigo.com.br/artigo/1648/sistema-binario-parte-i.aspx>. Acesso em: 1 mar. 2017.



Reflita

Será que seria possível obter um valor maior que e_{\max} ? Como chamaria esse efeito?

A aproximação de um número y é identificada por \tilde{y} e remete-se a uma diferença muito pequena entre eles. Essa simplificação nos

permite trabalhar com números irracionais, como é o caso de $\sqrt{3}$, que poderia ser escrito como 1,73. Essa aproximação nos acarreta em erros.

Erro Absoluto (EA)_y

Definido pela diferença entre o valor exato e a aproximação: $EA_y = |y - \tilde{y}|$. Mas podemos não saber qual é o valor exato, então, adotamos uma "cota", tal que $\sigma \approx 0$, e assim: $EA_y < \sigma \Leftrightarrow |y - \tilde{y}| < \sigma \Leftrightarrow \tilde{y} - \sigma < y < \tilde{y} + \sigma$.

Erro Relativo (ER)_y

Suponha a situação: $w = 50$; $\tilde{w} = 50,02$ e $z = 0,0004$; $\tilde{z} = 0,0002$. Teríamos que os erros absolutos de cada variável seriam: $EA_w = 0,2$ e $EA_z = 0,0002$. Assim $EA_z < EA_w$ e concluiríamos que a aproximação de z é melhor frente a de w . Mas observe que as grandezas dessas variáveis são muito diferentes, o que nos leva a definir o erro relativo: $ER_y = \left| \frac{y - \tilde{y}}{\tilde{y}} \right|$.

Para o caso citado, teríamos: $ER_y = \left| \frac{50 - 50,2}{50,2} \right| = 0,003984$ e $ER_z = \left| \frac{0,0004 - 0,0002}{0,0002} \right| = 1$, o que nos leva a crer que a aproximação de w é superior à de z .



Pesquise mais

Esses erros poderiam ser aplicados na nossa situação-problema, pois a balança que utilizamos para determinar a massa do silicone pode estar desajustada, ocasionando desvios referentes à imprecisão na aquisição da massa real. Existe uma série de erros que podem alterar na solução de nossos problemas, por isso, recomenda-se a leitura dos artigos indicados a seguir.

Disponível em: <<http://professor.ufabc.edu.br/~jose.azcue/EN2703/ErrosIncertezas.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2017.

Disponível em: <http://www.estgv.ipv.pt/paginaspessoais/nconceicao/20042005_2/Cap1_erro.pdf>. Acesso em: 3 mar. 2017.

Erros de arredondamento

Como discutido anteriormente, as máquinas, sejam elas uma calculadora convencional ou um computador robusto, fazem uso de um número finito de casas decimais na representação de um número real. Essa limitação pode ser feita por truncamento ou por arredondamento. No truncamento, ignoram-se os números acima da $(t + 1)$ -ésima casa decimal, sendo t o número de dígitos da mantissa. No arredondamento, caso o valor do número da $(t + 1)$ -ésima casa decimal seja inferior a 5, arredondamos o número desprezando os demais após a t -ésima casa decimal; caso seja maior ou igual a 5, soma-se 1 ao número da t -ésima casa decimal e ignoram-se os demais. Observe esses efeitos na Tabela 1.2.

Tabela 1.2 | Representação dos números por arredondamento e truncamento em $F(10,3,-4,4)$

Número	Arredondamento	Truncamento
2,32	$0,232 \cdot 10$	$0,232 \cdot 10$
11,054	$0,111 \cdot 10^2$	$0,110 \cdot 10^2$
-138,17	$-0,138 \cdot 10^3$	$-0,138 \cdot 10^3$

Fonte: elaborada pela autora.



Pesquise mais

Os erros influenciam nas soluções de problemas do cotidiano. Devido à limitação na representação numérica de computadores, um erro de 0,34 segundos no cálculo do tempo de lançamento de um míssil na Guerra do Golfo fez com que o míssil não fosse lançado corretamente. Leia o artigo para verificar mais detalhes. Disponível em: <<http://www.gao.gov/assets/220/215614.pdf>>. Acesso em: 6 mar. 2017.

Propagação de erros

Podemos ter operações matemáticas com mais de uma variável. Assim, temos, além dos erros de representação delas, a propagação de erros causada pelas relações entre variáveis. Para o caso de propagação dos erros absolutos, citam-se os seguintes casos:

a) Soma e subtração entre as variáveis: $EA_{w \pm z} = |EA_w \pm EA_z|$

b) Multiplicação entre as variáveis: $EA_{w \cdot z} = | \tilde{w}EA_z \pm \tilde{z}EA_w |$

c) Divisão entre as variáveis: $EA_{w/z} = \left| \frac{EA_w}{\tilde{z}} - \frac{\tilde{w}EA_z}{\tilde{z}^2} \right|$

Para a propagação dos erros relativos, temos:

a) Soma e subtração: $ER_{w \pm z} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} \pm \tilde{z}} ER_w \pm \frac{\tilde{z}}{\tilde{w} \pm \tilde{z}} ER_z$

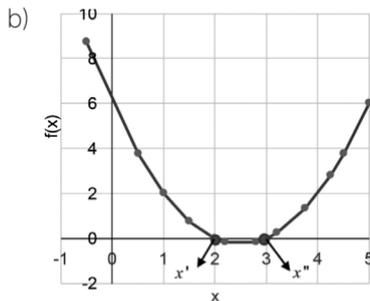
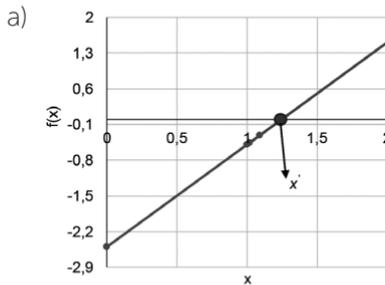
b) Multiplicação: $ER_{w \cdot z} = ER_z + ER_w$

c) Divisão: $ER_{w/z} = ER_w - ER_z$

Equações não lineares

Observe as figuras a seguir que identificam o comportamento de duas funções, $f(x)$, em relação à variável independente x .

Figura 1.1 | Relação entre $f(x)$ e x



Fonte: elaborada pela autora.

Na Figura 1.1(a), a função, $f(x)$, definida no intervalo $[1; 1,5]$ apresenta uma raiz, $x^* \in (1; 1,5)$, tal que $f(x^*) = 0$. Analogamente, na Figura 1.1(b), observa-se que a função apresenta duas raízes no intervalo $(1,4)$. Notamos que 1.1(a) e 1.1(b) apresentam, respectivamente, o comportamento de uma reta e parábola. Assim, encontrar as raízes dessas expressões é fácil, sendo que, para o primeiro caso, basta isolarmos a expressão de $f(x)$ e igualá-la a zero, e, para o segundo, aplicar a equação de Bhaskara. E se tivermos equações mais complicadas? Precisamos utilizar métodos numéricos para encontrar as raízes, ou zero de funções, tais que:

Caso uma função $f(x)$, contínua no intervalo $[a, b]$, possua valores de sinais contrários nos pontos extremos desse intervalo, $f(a) \cdot f(b) < 0$, o intervalo terá, no mínimo, um zero da equação $f(x) = 0$, ou seja, existirá, no mínimo, um número $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$. Verificada a existência de raiz nesse intervalo, precisamos calculá-la por métodos numéricos, que deverão fornecer uma sequência x_k de aproximações, sendo adotado um critério de parada, de modo a cessar o processo iterativo quando for atingido um número predeterminado de iterações, ou se x_k estiver suficientemente próximo do zero da função, ou seja:

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon \text{ ou } \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \leq \varepsilon$$

sendo ε a tolerância estipulada.

Método da Bissecção

Fundamenta-se na ideia de refinamento de um intervalo inicial, (a, b) , que contenha a raiz, de forma iterativa, ao meio. Assim, a cada novo intervalo é atualizado o valor de a ou b de acordo com a função de iteração:

$$x_k = \frac{a + b}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se $f(a) \cdot f(x_k) < 0$, então teremos $b = x_k$, senão $a = x_k$. A desigualdade $f(a) \cdot f(x_k) < 0$ é usada para certificar que haverá pelo menos uma raiz no intervalo (a, b) . Assim, a cada nova iteração estamos diminuindo pela metade a distância entre os extremos do intervalo até alcançar o zero de acordo com a precisão desejada.

Método da Falsa Posição

Analogamente ao método da bissecção, faremos sucessivas partições do intervalo inicial, sendo que a função de iteração será:

$$x_k = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}, k = 1, 2, \dots$$

A cada iteração os valores de **a** ou **b** são atualizados conforme o procedimento realizado no método da Bissecção.

Vejamos um exemplo de obtenção do zero com uso dos dois métodos, para ficar claro como isso é utilizado.

Dada $f(x) = 4\text{sen}(x) - \exp(x)$, observe como podemos encontrar uma raiz no intervalo $(1, 2)$ em que $f(x^*) < 1,02 \cdot 10^{-2}$. Utilize os métodos da Bissecção e da Falsa Posição. A cada cálculo, utilize arredondamento na quinta casa decimal.

Iniciaremos verificando se o intervalo dado de fato contempla uma raiz, ou seja, calculamos:

$$f(a) = f(1) = 4\text{sen}(1) - \exp(1) = 0,64760 \text{ e}$$

$f(b) = f(2) = 4\text{sen}(2) - \exp(2) = -3,75187$. Como $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe $x^* \in (1, 2)$ tal que $f(x^*) = 0$. Assim, procederemos com os cálculos, cujos resultados estão apresentados na Tabela 1.3, para o método da Bissecção, e Tabela 1.4, para o método da Falsa Posição.

Tabela 1.3 | Valores obtidos no método da Bissecção

a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
1	2	1,50000	0,64760	-3,75187	-0,49171
1	1,5	1,25000	0,64760	-0,49171	0,30560
1,25000	1,50000	1,37500	0,30560	-0,49171	-0,03150
1,25000	1,37500	1,31250	0,30560	-0,03150	0,15186
1,31250	1,37500	1,34375	0,15186	-0,03150	0,06395
1,34375	1,37500	1,35938	0,06395	-0,03150	0,01718
1,35938	1,37500	1,36719	0,01718	-0,03150	-0,00693

Fonte: elaborada pela autora.

Observe que, na segunda linha da Tabela 1.3, $f(a) \cdot f(x_k) < 0$. Logo, o novo intervalo será **(1, 1,5)**. Em seguida, $f(x_k) \cdot f(b) < 0$, como consequência o intervalo da segunda iteração é **(1,25, 1,5)** e assim sucessivamente.

Observe que o valor obtido para a raiz de $f(x) = 4\text{sen}(x) - \exp(x)$ utilizando o método da Bissecção com intervalo inicial **(1,2)** e respeitando o critério de parada fornecido, $f(x^*) < 1,02 \cdot 10^{-2}$, foi de 1,36719.

Tabela 1.4 | Valores obtidos no método da Falsa Posição

a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
1	2	1,14720	0,64760	-3,75187	0,49710
1,14720	2	1,24697	0,49710	-3,75187	0,31231
1,24697	2	1,30484	0,31231	-3,75187	0,17227
1,30484	2	1,33536	0,17227	-3,75187	0,08830
1,33536	2	1,35064	0,08830	-3,75187	0,04356
1,35064	2	1,35809	0,04356	-3,75187	0,02109
1,35809	2	1,36168	0,02109	-3,75187	0,01012

Fonte: elaborada pela autora.

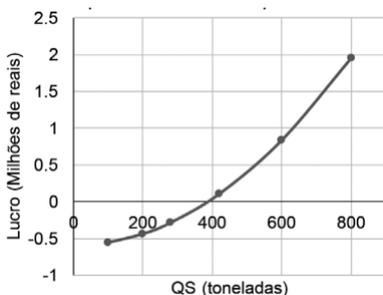
Para o método da Falsa Posição, os novos intervalos foram definidos analogamente ao método da Bissecção, sendo que, para esse caso, a raiz encontrada foi 1,36168, em conformidade com o critério de parada estipulado. Assim, os dois métodos apresentam uma solução que se difere na terceira casa decimal.

Sem medo de errar

Retomemos a nossa situação-problema, afinal, precisamos responder ao gerente qual a quantidade de silicone que reverterá num lucro de R\$ 600.000,00 e inserir os procedimentos adotados em relatório. Para isso, devemos igualar a função que relaciona o lucro com a quantidade de silicone ao valor do lucro requerido, ou seja, $\ln(QS + 1) \cdot 10^{-6} + 4QS^2 \cdot 10^{-6} - 10QS \cdot 10^{-6} = 0,6$ e transformá-la na forma utilizada para zero de funções: $\ln(QS + 1) \cdot 10^{-6} + 4QS^2 \cdot 10^{-6} - 10QS \cdot 10^{-6} - 0,6 = 0$. Como os

métodos iterativos vistos requerem um intervalo inicial, vamos plotar essa função com o auxílio de uma planilha eletrônica, com $QS > 0$, já que não existe massa negativa e a função de logaritmo natural requer números reais positivos.

Figura 1.2 | Gráfico de quantidade de silicone produzida em função do lucro



Fonte: elaborada pela autora.

Observe, pela Figura 1.2, que o zero da função é $QS^* \in (200, 400)$, uma vez que $f(200) \cdot f(400) < 0$. Assim, podemos prosseguir com os cálculos iterativos do método da Bissecção e da Falsa Posição.

Inseriremos numa tabela os valores dos extremos do intervalo, a e b , bem como os respectivos valores da função nesses pontos, $f(a)$ e $f(b)$. Em seguida, calcularemos o valor de x_k pela função de iteração e $f(x_k)$, lembrando que a variável x_k refere-se, neste problema, à quantidade de silicone QS . Analisaremos a troca de intervalo a ser realizada para cada iteração segundo observação do produto dos sinais das funções até o critério de parada: $|f(x_k)| \leq 1 \cdot 10^{-3}$. Os resultados para o método da Bissecção estão na Tabela 1.5, sendo que foi utilizada a regra do arredondamento e 3 casas decimais, devido à quantidade de silicone estar em toneladas, e uma sensibilidade adequada seria referente a essa variável expressa em quilos.

Tabela 1.5 | Resultados do método da Bissecção: quantidade de silicone e lucro

a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
200	400	300,000	-0,442	0,036	-0,243
300	400	350,000	-0,243	0,036	-0,113

350	400	375,000	-0,113	0,036	-0,041
375	400	387,500	-0,041	0,036	-0,003
387,500	400	393,750	-0,003	0,036	0,016
387,500	393,750	390,63	-0,003	0,016	0,006
387,500	390,63	389,063	-0,003	0,006	0,002
387,500	389,063	388,281	-0,003	0,002	-0,001

Fonte: elaborada pela autora.

Observe, pela Tabela 1.5, que a quantidade de silicone produzida que fornece um lucro de R\$ 600.000,00 corresponde a 388,281 toneladas, para as condições de cálculo utilizadas. Ao aplicarmos esse valor na equação $\ln(QS + 1) \cdot 10^{-6} + 4QS^2 \cdot 10^{-6} - 10QS \cdot 10^{-6} = L$, encontraremos um lucro de R\$ 599.172,00, a diferença para o valor desejado (R\$ 600.000,00) deve-se ao critério de convergência adotado.

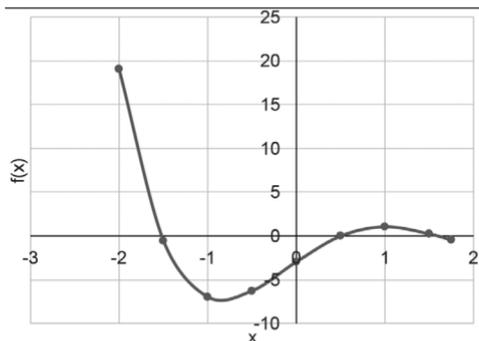
Avançando na prática

Funções com mais de uma raiz

Descrição da situação-problema

Suponha que você trabalhe com uma função como a identificada na Figura 1.3, sendo que $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 3$ admite valores negativos para $f(x)$.

Figura 1.3 | Gráfico de $f(x)$, para $-2 < x < 2$



Fonte: elaborada pela autora.

Como se pode ver, a $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 3$ apresenta três raízes para a faixa da variável independente analisada, sendo $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$ e $x_3^* \in (1, 2)$. Se escolhêssemos como intervalo $x_1^* \in (-2, 2)$ e utilizássemos o método da Bissecção, encontraríamos as 3 raízes da equação?

Resolução da situação-problema

Primeiramente, temos que verificar se de fato existe raiz em $(-2, 2)$, assim:

$$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 - (-2)^2 + 7(-2) - 3 = 19$$

$$f(2) = (2)^4 - 3(2)^3 - (2)^2 + 7(2) - 3 = -1$$

Assim, $f(-2) \cdot f(2) < 0$, e concluímos que existe ao menos uma raiz nesse intervalo.

Utilizaremos esses extremos para iniciarmos o procedimento da Bissecção. Os resultados estão na Tabela 1.6.

Tabela 1.6 | Resultados do método da Bissecção para $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 3$ e $x^* \in (-2, 2)$

a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
-2,000	2,000	0,000	19,000	-1,000	-3,000

Fonte: elaborada pela autora.

Observe que $|f(x)| > |f(b)|$, assim o método se encerra sem a determinação de nenhuma iteração, visto que não será possível fazer a troca dos limites no intervalo inicial estipulado. Para resolver esse problema, é necessário refinar os intervalos sobre cada raiz do problema – $x_1^* \in (-2, -1)$, $x_2^* \in (0, 1)$ e $x_3^* \in (1, 2)$ – e, posteriormente, prosseguir com os passos do método numérico da Bissecção para cada intervalo.

Faça valer a pena

1. Uma máquina eletrônica, tal como o computador, adota o sistema binário para identificar e tratar os dados numéricos através de operações básicas da matemática, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesse contexto, avalie as afirmações a seguir:

I. Os números que formam o conjunto de pontos flutuantes são contínuos.

II. Ao efetuarmos operações aritméticas e obtermos expoente superior ao expoente mínimo, temos o que denominamos por *underflow*.

III. Os resultados advindos de um processo de truncamento e arredondamento são iguais, pois as técnicas são análogas.

IV. Não existe um número em sistema binário que apresente casas decimais.

V. A mantissa representa uma quantidade finita de números.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas II e IV estão corretas.
- c) Apenas a afirmativa I está correta.
- d) Apenas a afirmativa III está correta.
- e) Apenas a afirmativa V está correta.

2. Erros podem acontecer devido ao truncamento, arredondamento, bem como características intrínsecas de computadores. Existem diversas equações para mensurarmos esses erros. Nesse contexto, avalie a seguinte asserção-razão.

I. Em qualquer máquina, apenas um subconjunto dos números reais é representado exatamente e, portanto, a apresentação de um número real será realizada através de truncamento ou de arredondamento.

PORQUE

II. Um computador ou uma calculadora representa um número real no sistema denominado aritmética de ponto flutuante. Nesse sistema, o número r é representado na forma: $\pm d_1d_2d_3\dots d_t \cdot \beta^e$, onde β é a base que a máquina opera, t o número de dígitos na mantissa e e é o expoente no intervalo $[1, u]$.

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- a) A asserção I é uma proposição verdadeira, e asserção II é uma proposição falsa.
- b) A asserção I é uma proposição falsa, e a asserção II é uma proposição verdadeira.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a asserção II é uma justificativa correta de I.

- d) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a asserção II não é uma justificativa de I.
- e) A asserções I e II são proposições falsas.

3. O método da Bissecção corresponde a um procedimento numérico para a determinação de zero de funções não lineares, em que são realizadas sucessivas iterações até que a condição definida pelo critério de parada seja alcançada.

Com relação ao método da Bissecção, assinale a alternativa correta.

- a) Apresenta como função de iteração $x_k = \frac{a+b}{2}$.
- b) Espera-se encontrar uma raiz desde que $f(a) \cdot f(b) > 0$.
- c) O critério de convergência é baseado apenas em quantas casas decimais se utiliza para a resolução da equação.
- d) Um novo valor do processo iterativo depende do valor das funções nos extremos do intervalo, de tal modo que $f(x_k) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.
- e) Para iniciarmos o método, necessitamos de uma estima inicial, ou seja, x_0 .

Seção 1.2

Conceituação de derivada

Diálogo aberto

Frequentemente, necessitamos de artifícios matemáticos para nos auxiliar na resolução de problemas ou melhorarmos a maneira de encontrar a resposta desejada, como foi o caso da seção anterior, em que o gerente solicitou a você que determinasse a quantidade de silicone (**QS**) que deve ser produzida para a empresa YXZZKX obter um lucro de R\$ 600.000,00, tal que a função que relaciona as duas variáveis foi fornecida como: $L = \ln(QS + 1) / 10^6 + 4QS^2 / 10^6 - QS / 10^5$; então, você obteve um valor de 388,281 toneladas a partir de 8 iterações com o método da Bissecção. Para isso, você precisou estipular um intervalo inicial e um critério de parada para o procedimento numérico. Vale lembrar que o método da Falsa Posição também poderia ser aplicado, pois ele requer os mesmos instrumentos utilizados pelo da Bissecção.

A partir desse resultado, você começou a elaborar um relatório para o seu superior, destacando que, para 388,281 toneladas de silicone, o lucro foi de R\$ 599.172,00, um pouco abaixo do desejado por ter arredondado os seus resultados nos cálculos de cada etapa.

Como um bom colaborador, você pensou se haveria outras formas de resolver o problema proposto, afinal, você precisou efetuar uma quantidade significativa de passos, o que lhe preocupa visto a dependência sequencial entre eles.

Assim, você necessita dar continuidade ao relatório, redigindo quais são as ferramentas matemáticas que auxiliarão em outras metodologias, a fim de alcançar a resposta desejada, que é fruto de um procedimento de zero de funções não lineares, numa quantidade de passos inferior à obtida pelo método da Bissecção. Além disso, o seu gerente questionou-lhe o valor de uma possível quantidade de silicone a ser produzida que maximize o lucro da YXZZKX, então você necessita conhecer qual o fundamento teórico que lhe permite determinar o máximo de uma função, se é que ele existe. Não se esqueça de registrar o conteúdo aprendido nesta seção, pois na

próxima etapa necessitaremos utilizá-lo como auxiliar para o algoritmo a ser implementado.

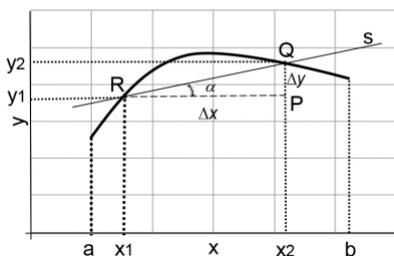
Não pode faltar

Nesta seção, vamos conceituar derivada de função. Para isso, é fundamental introduzir as definições de reta secante e tangente. Esses assuntos tiveram desenvolvimento ao longo de 2.500 anos por diversos matemáticos, em que o estudo relacionado à inclinação de uma reta tornou-se uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas (PIRES, 2015). Afinal, podemos nos questionar sobre quantidades que nos revertem a um máximo ou mínimo de uma variável, como o valor do diâmetro e comprimento de uma lata de refrigerante com capacidade de 350 mL que minimiza a quantidade de alumínio necessária para a produção, e os valores de velocidade e aceleração instantânea de um corpo em movimento, entre outros exemplos.

Reta secante e reta tangente

Seja uma função $y = f(x)$, podemos defini-la num intervalo (a, b) e conhecidos dois pontos R e Q pertencentes a essa $f(x)$, cujas coordenadas são $R(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, podemos traçar uma reta s entre esses dois pontos, como mostrado na Figura 1.4.

Figura 1.4 | Gráfico de uma função definida em (a, b)



Fonte: elaborada pela autora.

A partir da reta s traçada, podemos determinar o coeficiente angular considerando o triângulo retângulo PRQ formado:

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Assimile

Lembre-se de que delta significa uma variação, assim Δy (delta y) significa a diferença entre duas ordenadas ou incremento em "y", e Δx (delta x) a diferença entre duas abscissas "x".

Assim, temos que a variação de $f(x)$ entre os pontos R e Q é a inclinação da reta secante e representa a taxa média de variação de uma função em relação à sua variável independente entre dois pontos.

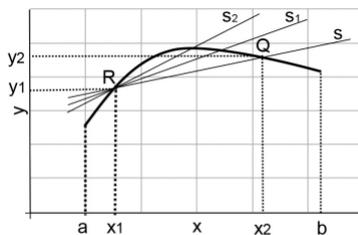


Reflita

Suponha que o deslocamento de um corpo $d(t)$, em quilômetros, possa ser descrito em função do tempo t , em horas, por $d(t) = 10t^3 + 9t$, quais seriam as velocidades médias nos instantes entre $[0,1]$ e $[1,2]$? Baseado nas suas respostas, o corpo está aumentando ou diminuindo a velocidade com o tempo?

Vamos, agora, diminuir a distância entre os pontos R e Q , mantendo o primeiro fixo. Faremos isso a partir de diversas retas secantes, como ilustra a Figura 1.5.

Figura 1.5 | Aproximação de Q em R por s_1 e s_2



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos observar que, conforme Q se aproxima de R , ou seja, Δx torna-se cada vez menor, ocorre uma variação da inclinação da nova secante (s_1 ou s_2), até que essa distância seja suficientemente pequena, tendendo a um valor limite constante, o qual denominamos por inclinação da reta tangente à função em R . Genericamente, escrevemos:

Seja uma função $f(x)$ e um ponto sobre ela $R(x_1, y_1)$, podemos determinar a inclinação da reta tangente ao ponto R , $m(x_1)$, por:

$$m(x_1) = \lim_{Q \rightarrow R} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, ou $\Delta x = x_2 - x_1$, temos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ quando o limite existir.}$$



Assimile

O limite de $f(x)$ para $x \rightarrow a$ existe caso os limites laterais à direita (+) e à esquerda (-) sejam os mesmos, isto é: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Por exemplo, suponha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ com $f(x) = \frac{1}{x}$, e suponha valores quaisquer à esquerda e à direita suficientemente próximos de zero, e determinamos os respectivos $f(x)$, conforme mostra a Tabela 1.7.

Tabela 1.7 | Valores para a função à direita e à esquerda do ponto zero

À esquerda		À direita	
x	f(x)	X	f(x)
-1	-1	1	1
-0,1	-10	0,1	10
-0,001	-1 · 10 ³	0,001	1 · 10 ³
-0,0001	-1 · 10 ⁴	0,0001	1 · 10 ⁴
...
0	−∞	0	∞

Fonte: elaborada pela autora.

Como se pode perceber, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

Assim, podemos determinar a equação da reta tangente a um ponto de abscissa x_1 desde que a função seja contínua nele, ou seja, é necessário que:

- $\exists f(x_1)$;
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$; e
- $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$.



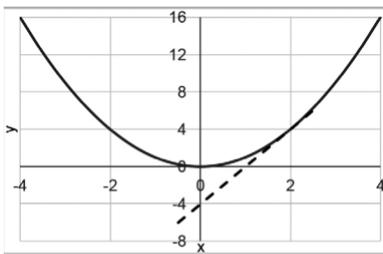
Exemplificando

Verificaremos que, para $f(x) = x^2$, o coeficiente angular da reta tangente t à função em $(2,4)$ é determinado por:

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4 + \Delta x = 4 \end{aligned}$$

Com o coeficiente angular, pode-se determinar a equação da reta t : $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$. Substituindo os valores conhecidos: $(x_0, y_0) = (2, 4)$ e $m = 4$, temos: $y - 4 = 4 \cdot (x - 2)$, ou $y = 4x - 4$. A Figura 1.6 apresenta o gráfico da função e a respectiva derivada em $(2, 4)$.

Figura 1.6 | Gráfico $f(x) = x^2$ e reta tangente em $(2, 4)$



Fonte: elaborada pela autora.

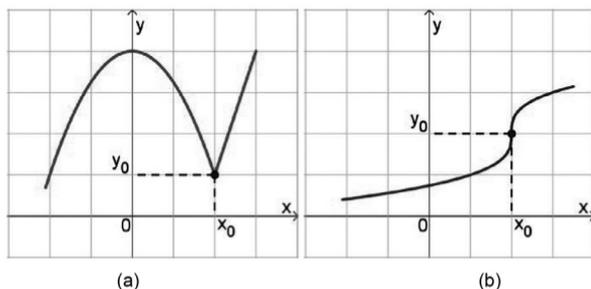
A equação da reta tangente apresenta uma taxa de variação instantânea de uma função num dado ponto, essa é a interpretação física da derivada de uma $f(x)$.

Derivada de uma função

Definições

Uma $f(x)$ é diferenciável num ponto se existe uma reta tangente à curva nesse ponto, ou seja, se a função possui comportamento suave e nenhum pico pontudo. A Figura 1.7(a) ilustra que a $f(x)$ não é derivável em (x_0, y_0) , pois a inclinação da reta tangente se modifica bruscamente nos pontos próximos à direita e à esquerda de x_0 , ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. A Figura 1.7(b) ilustra outro caso em que a função não é derivável, pois $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Figura 1.7 | Inexistência de derivada de $f(x)$ em (x_0, y_0)



Fonte: elaborada pela autora.

Como visto anteriormente, a derivada de uma função é obtida através da inclinação da reta tangente, cujo princípio baseia-se no cálculo de um limite. Entretanto, dependendo da função de trabalho, esse procedimento torna-se dificultoso. Contornaremos esse impasse utilizando propriedades de derivadas.

Note que podemos usar diferentes notações para expressarmos a derivada de uma função $y = f(x)$ em relação à variável x :

$$f'(x); y'; \frac{dy}{dx}; \frac{df}{dx}.$$

Tabela de derivadas

Algumas derivadas apresentam regras para serem seguidas, por exemplo:

a. Se f é uma função constante e igual a "c", ou seja, $f(x) = c$, tem-se $f'(x) = 0$; ou ainda, a derivada de uma constante é uma função nula.

b. Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{R}$, ou seja, um número pertencente aos reais menos o zero, tem-se: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

c. Se f e g são deriváveis em x , tem-se que a derivada da soma (ou subtração) dessas funções é igual à soma (ou subtração) das derivadas: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

d. Se f e g são deriváveis em x , tem-se a regra do produto, em que: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

e. Se f e g são deriváveis em x e $g(x) \neq 0$, tem-se a regra do quociente: $(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

f. Se $f(x) = \text{sen}(x)$, tem-se $f'(x) = \text{cos}(x)$.

g. Se $f(x) = \text{cos}(x)$, tem-se $f'(x) = -\text{sen}(x)$.

h. Se $f(x) = a^x$, tem-se $f'(x) = a^x \ln a$.

i. Se $f(x) = \exp(x)$, tem-se $f'(x) = \exp(x)$.

j. Se $f(x) = \ln(x)$, tem-se $f'(x) = 1/x$.

Vejamos um exemplo de aplicação das regras "a", "b", "c" e "d" no cálculo da derivada de $f(x) = x^5 + 4x^3 + 2x$. Assim, pela regra "c", temos: $f'(x) = (x^5)' + (4x^3)' + (2x)'$. Aplicando a regra "b" na primeira parcela: $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$. Pela regra "d", a segunda parcela fica: $(4x^3)' = 4 \cdot x^3 + 4 \cdot (x^3)'$, e a terceira parcela: $(2x)' = 2' \cdot x + 2 \cdot x'$, as quais, submetidas às regras "a" e "b", recaem a: $4 \cdot x^3 + 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^{3-1} = 12x^2$ e $2' \cdot x + 2 \cdot x' = 2 \cdot x^{1-1} = 2$. Portanto, agrupando todas as parcelas, obtemos a derivada da função como $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 2$.



Pesquise mais

Em todo livro de cálculo, podemos encontrar tabelas de derivadas em seus apêndices. Visto que esse conceito é fundamental para os cálculos matemáticos, recomenda-se ler as derivadas para outras funções e exercitar a aplicação delas.

TOMAS, George B; WEIR, Maurice D; HASS, Joel. **Cálculo**. v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. Disponível em: <<http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788581430867/pages/-14>>. Acesso em: 4 abr. 2017.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Você pode treinar a derivada de uma função à sua escolha e verificar se o cálculo que você realizou está correto utilizando o site do Symbolab (disponível em: <<https://es.symbolab.com/>>. Acesso em: 8 abr. 2017).

Caso tenhamos uma função composta $y = f(g(x))$, sendo f e g diferenciáveis, devemos utilizar a Regra da Cadeia, expressa por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g) \cdot g'(x)$$

Ou seja, necessitamos, basicamente, realizar dois passos. O primeiro consiste na identificação de quantas funções existem na composição e, por último, na derivação segundo a regra “de fora para dentro”.



Pesquise mais

Podemos recordar os conceitos de função composta no link indicado, sendo apresentados exemplos, operações e noções envolvendo esse assunto. SILVA, Marcelo. **Composição de funções**. 2013. Disponível em: <<http://docente.ifrn.edu.br/marcelosilva/disciplinas/matematica-i/funcoes/funcao-composta/view>>. Acesso em: 23 mar. 2017.



Exemplificando

A função $y = \text{sen}(x^3 + 4)$ é composta por $g(x) = x^3 + 4$ e $f(x) = \text{sen}(g(x))$. Aplicando-se a Regra da Cadeia: $\frac{dy}{dx} = [\text{sen}(g(x))]' \cdot (x^3 + 4)'$. A primeira derivada corresponde à letra “f” da lista de tabelas, assim $[\text{sen}(g(x))]' = \text{cos}(g(x))$. Para obtermos $(x^3 + 4)'$; precisaremos considerar a regra “c”, tal que: $(x^3 + 4)' = (x^3)'+(4)'$, em seguida, faremos uso da regra “b”: $(x^3)' = 3x^2$ e, por último, da “a”: $(4)' = 0$. Agrupando todos esses resultados, temos que: $\frac{dy}{dx} = \text{cos}(g(x)) \cdot 3x^2 = \text{cos}(x^3 + 4) \cdot 3x^2$.

Usos de derivadas

Como vimos, a derivada pode ser definida como a taxa de variação instantânea de uma função. A partir dessa poderosa ferramenta matemática, podemos resolver inúmeros problemas no cotidiano de: microbiologistas, por exemplo, na determinação da taxa de crescimento microbiano num meio; engenheiros eletricitas, para inferir a variação da corrente elétrica em um circuito; estatísticos, na taxa de crescimento de uma população ou redução de mortalidade de empresas; engenheiros químicos, para inferir a taxa de variação de temperaturas num corpo metálico; engenheiros mecânicos, na variação de velocidade de corpos submersos, entre outros.

Além disso, corriqueiramente, fazemos uso de derivadas em problemas que desejamos encontrar os valores máximos ou mínimos de uma função com apenas uma variável independente, ditos problemas de otimização. Nesse contexto, devemos calcular a derivada da função, igualarmos a zero e, assim, obtemos o valor de máximo ou mínimo.



Exemplificando

Suponhamos que desejamos construir uma trave para um campo de futebol. Dispomos de um tronco de árvore com 20 m, assim podemos determinar o comprimento e a altura para que a área do gol seja a maior possível efetuando:

Material máximo de tronco disponível é igual a 20.

Precisamos de duas traves com altura x e uma com comprimento y . Assim, temos: $2x + y = 20$, ou $y = 20 - 2x$.

A função de maximização é a área delimitada pela trave, sendo que ela forma um retângulo, assim $A = xy$.

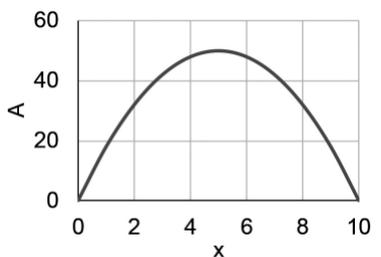
Substituindo o valor de y na expressão da área, temos: $A = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$.

Como desejamos maximizar a área, derivamos a expressão da área em função de x e igualamos a zero, assim:

$$A'(x) = (20x)' - (2x^2)' = 20 - 4x = 0, \quad \text{logo} \quad x = 5m \quad \text{e} \\ y = 20 - 2 \cdot 5 = 10m.$$

Logo, devemos cortar o tronco em duas partes de 5 m para ser nossa altura e uma de 10 m para ser o comprimento. Podemos verificar graficamente que o valor encontrado para x , que apresenta o máximo da função "área", é 5.

Figura 1.8 | Gráfico de $A(x)$ em função de x



Fonte: elaborada pela autora.

Sem medo de errar

Chegamos ao momento em que precisamos redigir no relatório para o gerente da YXZZKX as ferramentas matemáticas estudadas, visando à implementação de novos métodos de determinação de zeros mais eficientes que o da Bisseção e o da Falsa Posição. Adiantadamente, os dois métodos anteriores não são os únicos e nem os mais velozes para essa tarefa, além disso, foi bastante oportuno o estudo de derivadas feito por você nesta seção, pois em diversos papers sobre o assunto – por exemplo, o disponível em <http://www.sbmac.org.br/cmacc/cmacc-ne/2012/trabalhos/PDF/336.pdf> (acesso em: 26 abr. 2017) – são citados outros métodos tidos como mais velozes nessa tarefa, a exemplo do conhecido método de Newton-Raphson e o método da Secante.

Apesar de, possivelmente, esses métodos serem pouco conhecidos por você, seria interessante incluir em seu relatório que o estudo de derivadas realizado será uma ferramenta importante para implementação desses métodos em uma próxima etapa. Sugerimos a leitura do artigo indicado e a inclusão de conclusões sobre ele em seu relatório. Isso tende a deixar claro para o seu gestor os seus próximos passos.

Relativamente a outra questão levantada por ele, isto é, se haveria uma quantidade de silicone que otimizasse o lucro, você deverá empregar seu estudo de derivadas para realizar essa análise. Lembre-se de que no último exemplo do "Não pode faltar" maximizamos a área do gol calculando a derivada da função área e igualando-a a zero. Que tal você adotar um procedimento semelhante para a função lucro?

Para isso, recorde-se de que a função lucro é a seguinte: $L(QS) = \ln(QS + 1) \cdot 10^{-6} + 4QS^2 \cdot 10^{-6} - 10QS \cdot 10^{-6}$. Primeiramente, você deve determinar sua derivada, isto é, $L'(QS)$. Efetuando isso, parcela por parcela, temos:

- Primeira parcela:

$$[\ln(QS + 1) \cdot 10^{-6}]' = \frac{1}{(QS + 1)} (QS + 1)' \cdot 10^{-6} = \frac{1}{(QS + 1)} \cdot 10^{-6};$$

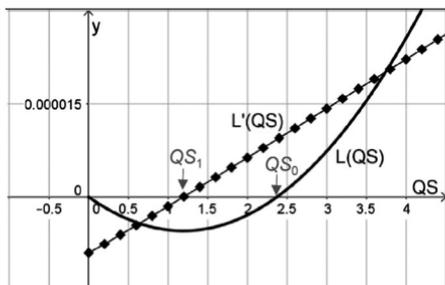
- Segunda parcela: $[4QS^2 \cdot 10^{-6}]' = 4 \cdot 2 \cdot QS^{2-1} \cdot 10^{-6} = 8QS \cdot 10^{-6}$;
- Terceira parcela: $[-10QS \cdot 10^{-6}]' = -10 \cdot 1 \cdot QS^{1-1} \cdot 10^{-6} = -10^{-5}$.

Portanto, a derivada da função lucro será:

$$L'(QS) = \frac{1}{(QS + 1)} \cdot 10^{-6} + 8QS \cdot 10^{-6} - 10^{-5}.$$

Igualar essa função a zero resulta em um problema de determinar o zero de uma função, algo que você já fez na primeira etapa do seu relatório. Um modo interessante de começar é construir o gráfico dessa função junto ao da função $L(QS)$, pois os métodos estudados por você exigem que se determine um intervalo (a, b) que contenha o zero e, além disso, é necessário que $L(a) \cdot L(b) < 0$. Veja, então, na Figura 1.9, os gráficos de $L'(QS)$ e $L(QS)$.

Figura 1.9 | Gráficos de $L'(QS)$ e $L(QS)$



Fonte: elaborada pela autora.

Esses gráficos nos fornecem informações preciosas. Veja:

1) O valor de $L(QS)$ é negativo entre 0 e QS_0 , positivo para valores maiores que QS_0 e igual a zero em 0 e em QS_0 .

2) O valor de $L'(QS)$ é negativo entre 0 e QS_1 , positivo para valores maiores que QS_1 e igual a zero em QS_1 .

3) $L(QS)$ alcança seu menor valor em QS_1 .

Seria interessante você incluir essas percepções em seu relatório, mas, para isso, é necessário determinar numericamente QS_0 e QS_1 . Por meio do método da Bissecção, considerando que ambas as funções, $L(QS)$ e $L'(QS)$, possuem zeros entre 0,5 e 3 e adotando os critérios de parada $|L(QS)| \leq 10^{-7}$ e $|L'(QS)| \leq 10^{-7}$, segue que:

- com duas iterações, $QS_0 \approx 2,375$ é um zero de $L(QS)$;
- com cinco iterações, $QS_1 \approx 1,203$ é um zero de $L'(QS)$.

Dadas essas análises, você pode, então, incluir em seu relatório que:

1) se $QS = 0$, ou seja, se nada for produzido, não há lucro e não há prejuízo;

2) se $0 < QS < 2,375$, isto é, se a produção estiver entre 0 tonelada e 2,375 toneladas, haverá prejuízo, sendo que o pior cenário é para a produção de 1,203 toneladas (quando $L(QS)$ atinge seu menor valor);

3) se $QS = 2,375$ toneladas, a conclusão é a mesma que a do primeiro caso;

4) se $QS > 2,375$, ou seja, se a produção for superior a 2,375 toneladas, teremos lucro, tanto mais quanto maior for a produção.

Agora, é só incluir essas análises e outras que achar pertinentes em seu relatório.

Avançando na prática

Dimensão de um tanque de água

Descrição da situação-problema

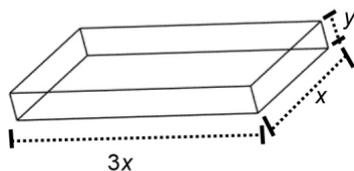
Você se informou num jornal televisivo de que a crise hídrica deixará a cidade onde vive vulnerável no fornecimento de água limpa, então você pensou em construir um tanque no formato de um paralelepípedo retangular para armazenar uma quantidade de água suficiente para o consumo de cinco semanas de sua família,

o que equivale a 60 m^3 . Em síntese, você necessita dispor das dimensões do reservatório que possibilitem a minimização de custos de aquisição de tijolos, sendo que, por uma questão de escolha, você adotou que o comprimento deve ter o triplo da dimensão da profundidade.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, esboçaremos a imagem do reservatório desejado:

Figura 1.10 | Imagem do tanque de armazenamento



Fonte: elaborada pela autora.

Por definição, o volume (V) do paralelepípedo retangular é: $V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 \cdot y$. Como necessitamos de um volume de 60 m^3 , temos: $V = 3x^2 \cdot y = 60$, que podemos reescrever na forma:

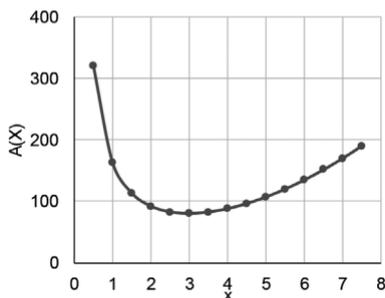
$$y = \frac{60}{3x^2} = \frac{20}{x^2}.$$

A área total do reservatório (A), considerando que ele não possui tampa, é calculada por: $A = 3x \cdot x + 3x \cdot y \cdot 2 + x \cdot y \cdot 2 = 3x^2 + 8xy$, que pode ser reescrita em função apenas de x a partir da relação obtida pelo volume, o que resulta em: $A(x) = 3x^2 + 8x \cdot \frac{20}{x^2} = 3x^2 + \frac{160}{x}$. Assim, derivaremos essa expressão da área para encontrarmos a dimensão

x que maximiza ou minimiza a função $A(x)$. Temos $A'(x) = 6x - \frac{160}{x^2}$. Em seguida, igualamos a função a zero: $6x - \frac{160}{x^2} = 0$, que também pode ser reescrita por: $\frac{6x^3 - 160}{x^2} = 0$ ou $6x^3 - 160 = 0$. Assim, temos

que $x = \sqrt[3]{\frac{160}{6}} \cong 3$ e $y = \frac{60}{3x^2} = \frac{20}{3^2} = 2,22$. Para verificarmos se esses valores correspondem às dimensões para uma área mínima e, conseqüentemente, com menores custos, analisaremos o resultado da área para valores aleatórios de x em torno da solução encontrada, conforme mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Área do tanque em função da profundidade

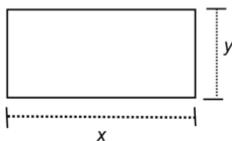


Fonte: elaborada pela autora.

Faça valer a pena

1. Otávio possui uma criação de carneiros e necessita cercar o local onde eles ficam para não permitir a entrada de outros animais. Suponha que a área corresponde a um espaço retangular, como mostra a Figura 1.12 a seguir, e que ele dispõe apenas de **1000 m** de tela. Nesse contexto, avalie as afirmações a seguir:

Figura 1.12 | Representação do espaço a ser cercado



Fonte: elaborada pela autora.

I- As dimensões $x = 250$ e $y = 250$ são os valores que maximizam a área delimitada.

II- A função de maximização é $2x + 2y = 1000$.

III- A derivada da função de maximização é $A'(x) = 500 - 2x$.

Assinale a alternativa correta. É (são) verdadeira(s):

- a) Somente a afirmação I.
- b) Somente a afirmação II.
- c) Somente as afirmações I e III.
- d) Somente as afirmações II e III.
- e) As afirmações I, II e III.

2. Considerando a definição de derivada, assim como as regras de derivação, analise cada uma das afirmações a seguir:

I- A derivada da função $f(x) = x - 1$ é $f'(x) = 1$.

II- A derivada de $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$.

III- A derivada de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ é $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Agora, assinale a alternativa que contém a afirmação correta.

- a) O item I é falso, mas o II é verdadeiro.
- b) O item I é verdadeiro, mas o II é falso.
- c) Os itens I e II são verdadeiros e são válidos para determinar III.
- d) Os itens I e II são verdadeiros, e o III é falso.
- e) Os itens I e III são falsos.

3. A inclinação da reta tangente a uma curva representa a derivada da função em um ponto. Se $f(x) = \sqrt{x}$, a equação da reta tangente que passa pelo ponto $(4, 2)$ é dada por: _____.

Assinale a alternativa que contém a equação que preenche corretamente a lacuna.

a) $y = \frac{1}{4} \cdot x + 1$

b) $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$

c) $y = \frac{1}{4} \cdot x - 1$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot x - 2$

e) $y = 2 \cdot x + 4$

Seção 1.3

Outros métodos iterativos para determinação de zeros de funções

Diálogo aberto

Na Seção 1.1, estudamos duas metodologias para determinação de zero de função: Bissecção e Falsa Posição. A partir da teoria discutida no método da Bissecção, você pode iniciar um relatório, qual será entregue ao fim desta unidade, que objetiva, resumidamente, responder à solicitação do gerente da YXZZKX, que é a determinação da quantidade de silicone (QS) que deve ser produzida para atingir o lucro desejado (L) dada a relação ter sido expressa por $L = \ln(QS + 1) / 10^6 + 4QS^2 / 10^6 - QS / 10^5$.

Na Seção 1.2, definimos reta tangente, reta secante e derivada, os quais são conceitos importantes para a determinação de variações instantânea e média de funções. A partir dessas ferramentas, você ponderou no relatório que, para a curva ajustada, era impossível determinar a massa de silicone necessária para a obtenção de um lucro máximo. Além disso, foi determinado que, para até 2,375 toneladas de silicone, a empresa só terá prejuízos, principalmente se a produção for de 1,203 toneladas.

Diante dessas observações, o gerente da YXZZKX ficará satisfeito com o seu trabalho até então executado. Mas, diante do cenário econômico conturbado, você se preocupa com possíveis alterações na produção, fazendo com que a curva ajustada da quantidade de silicone em função do lucro se altere e, conseqüentemente, seja exigido um número considerável de iterações sobre os métodos da Bissecção ou Falsa Posição aplicados a essa nova equação.

Assim, aproveitando-se dos conceitos aprendidos de derivada e reta secante, na seção anterior, você propôs estudar outros procedimentos de solução para zero de funções. Com isso, seu atual desafio requer o desenvolvimento de uma sequência ordenada e estruturada de passos, a fim de elaborar algoritmos dos métodos de Newton-Raphson e Secante. Você necessita saber quais são os procedimentos relevantes para a implementação computacional, de

modo que você terá que definir as entradas, a lógica de programação e as saídas desejadas dos programas computacionais.

Escreva no relatório que você já iniciou anteriormente quais são as especificações requeridas para o funcionamento dos códigos que você está propondo nesta seção. Seja cauteloso e objetivo no momento da implementação, especificando corretamente as estimativas iniciais e o critério de convergência utilizado.

Não pode faltar

Estudamos anteriormente dois procedimentos numéricos para a determinação de zero de funções: método da Bissecção e método da Falsa Posição. Dependendo da função e do intervalo inicial, teríamos que calcular exaustivas iterações até que o critério de convergência fosse satisfeito. Na tentativa de superarmos esse impasse, apresentaremos o método de Newton-Raphson, o qual é dependente dos conceitos aprendidos na Seção 1.2, relacionados à reta tangente a uma curva e, assim, derivada de uma função.



Assimile

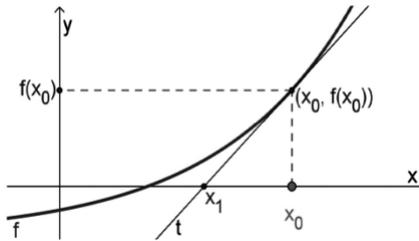
Em métodos numéricos, frequentemente, nos deparamos com procedimentos de solução que requerem processos iterativos. Por isso, convém fixar os seguintes conceitos:

- Estimativa inicial: os cálculos requerem passos sequenciais, sendo que o resultado da iteração anterior é utilizado para o passo seguinte, assim, necessita-se inicializar a metodologia por uma estimativa inicial, também denominada por "chute" inicial.
- Convergência: em cada passo, é necessário que o resultado esteja o mais próximo possível do esperado, ou seja, requer-se que o valor obtido convirja para o resultado real. Então, é importante verificar se essa convergência é garantida num processo numérico antes de resolver o problema.
- Critério de parada: é claro que não podemos realizar um processo numérico infinitamente, ou seja, precisamos interrompê-lo num determinado passo a partir da definição de um critério, o qual dependerá do problema e da precisão desejada.

Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson

Consideraremos uma função em que x_0 é a estimativa inicial do zero de $f(x)$. Podemos melhorar essa estimativa a partir do traçado da reta tangente t no ponto $(x_0, f(x_0))$, conforme pode-se observar na Figura 1.13.

Figura 1.13 | Gráfico de $f(x)$ para método de Newton-Raphson com tangente em x_0



Fonte: adaptado de <<https://www.geogebra.org/m/DpvKcPRR>>. Acesso em: 26 abr. 2017.

Observe que $(x_0, f(x_0))$ é um ponto aleatório, assim podemos posicioná-lo em qualquer outro local. Como sugestão, manipule o objeto disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/DpvKcPRR>>. Acesso em: 26 abr. 2017.

A inclinação da reta tangente t que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, definida previamente por $f'(x)$, pode ser calculada por:

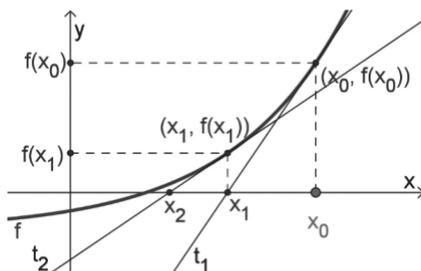
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Na equação apresentada, podemos isolar o ponto x_1 obtido pela intersecção da reta t com o eixo x , de forma que representa um “zero melhorado” da função e possui o seguinte valor:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Com esse novo zero, repetimos o procedimento, ou seja, traçamos outra reta tangente no ponto $(x_1, f(x_1))$, conforme pode ser visto na Figura 1.14.

Figura 1.14 | Gráfico de $f(x)$ para método de Newton-Raphson com tangente em x_1



Fonte: adaptado de <<https://www.geogebra.org/m/DpvKcPRR>>. Acesso em: 26 abr. 2017.

Assim, obtemos x_2 como uma nova intersecção da reta tangente t_2 com o eixo x , cujo valor pode ser determinado pelo mesmo procedimento realizado anteriormente, resultando em:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Podemos repetir esse procedimento para x_3, x_4, \dots, x_k até nos aproximarmos suficientemente do zero da função. Esse processo é denominado de método de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson

Para uma função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$, que possui apenas uma raiz, e $f'(x)$, bem como $f''(x)$ (derivada segunda da função, obtida a partir da derivada de $f'(x)$), não nulas e que preservam o sinal, podemos definir a função de iteração do método de Newton-Raphson a partir dos passos realizados no item 1, ou seja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Pesquise mais

O método de Newton-Raphson foi desenvolvido por Isaac Newton em 1736 para encontrar o zero do polinômio cúbico $x^3 - 2x - 5$, apesar de Joseph Raphson, em 1697, tê-lo apresentado em seu livro *Analysis*

aequationum universalis. A título de curiosidade, verifique essa publicação no link sugerido. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_4nlbAAAAQAAJ>. Acesso em: 8 abr. 2017.

Assim, esse método consiste em aplicar, sucessivamente, a função de iteração a partir de um valor inicial até que o critério de parada seja alcançado. Fixada uma precisão ξ , podemos finalizar o referido processo iterativo quando $|x_{k+1} - x_k| \leq \xi$, ou $|f(x_{k+1})| \leq \xi$, ou se o número máximo de iterações for alcançado.



Refleta

O que acontece com o procedimento iterativo se $f'(x_k)$ for um valor elevado, aproximadamente 10^{10} ? E se $f'(x_k)$ for próximo de zero, por exemplo 10^{-10} ?



Assimile

Uma função pode ter mais de um zero. Por exemplo, lembremos de um polinômio de grau 2 que pode ter duas raízes reais iguais, distintas ou complexas, mas sempre duas raízes. Assim, de acordo com a estimativa inicial utilizada, o método de Newton-Raphson convergirá para um determinado zero. Em virtude disso, em um intervalo (a, b) , podemos observar as seguintes situações, conforme pondera Lobão (s.d.):

- Se $f(a) \cdot f(b) > 0$, existe um número par de raízes reais ou não há raízes reais em (a, b) .
- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe um número ímpar de raízes reais em (a, b) .
- Se $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, o comportamento da função em (a, b) é apenas decrescente ou crescente, logo não se altera.
- Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, a função terá ora um comportamento crescente, ora decrescente.
- Se $f''(a) \cdot f''(b) > 0$, a concavidade não se altera em (a, b) .
- Se $f''(a) \cdot f''(b) < 0$, a concavidade se modifica em (a, b) .

Com isso, podemos afirmar que o método de Newton-Raphson possui convergência a um zero em (a,b) caso tenhamos:

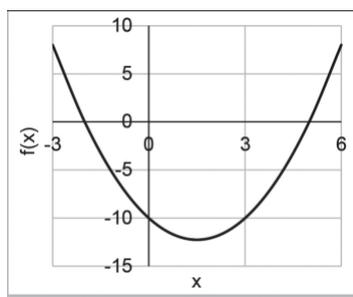
$$f(a) \cdot f(b) < 0, f'(a) \cdot f'(b) > 0 \text{ e } f''(a) \cdot f''(b) > 0.$$



Exemplificando

Vamos verificar como podemos obter o zero de $f(x) = x^2 - 3x - 10$ pelo método de Newton-Raphson. Utilizaremos 4 casas decimais com a técnica do arredondamento e admitiremos como critério de parada um erro inferior a 0,002, isto é, $|x_{k+1} - x_k| < 0,002$. Para facilitar a explanação, esboçamos o gráfico da função em análise:

Figura 1.15 | Gráfico de $f(x) = x^2 - 3x - 10$



Fonte: elaborada pela autora.

Pela Figura 1.15, podemos observar que no intervalo $[3,6]$ temos apenas uma raiz. Assim, analisaremos se o método de Newton-Raphson convergirá para uma estimativa inicial contida nesse intervalo analisando os critérios: i) $f(a) \cdot f(b) < 0$, ii) $f'(a) \cdot f'(b) > 0$ e iii) $f''(a) \cdot f''(b) > 0$. Sendo que: $f(x) = x^2 - 3x - 10$, $f'(x) = 2x - 3$ e $f''(x) = 2$.

Para o extremo inferior do intervalo, $a = 3$, temos:

$$\text{i) } f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 - 10 = -10; \text{ ii) } f'(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3; \text{ iii) } f''(3) = 2.$$

Para o extremo superior do intervalo, $b = 6$, temos:

$$\text{i) } f(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 - 10 = 8; \text{ ii) } f'(6) = 2 \cdot 6 - 3 = 9; \text{ iii) } f''(6) = 2.$$

Assim, $f(3) \cdot f(6) < 0$; $f'(3) \cdot f'(6) > 0$ e $f''(3) \cdot f''(6) > 0$. Logo, as três

condições necessárias para a convergência do método são satisfeitas. Iniciaremos o procedimento iterativo com $x_0 = 6$, as demais etapas seguem os passos:

$$1^{\text{a}}) \text{ Cálculo de } x_1: x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) = 6 - 8 / 9 = 5,1111, \\ |x_1 - x_0| = |6 - 5,1111| = 0,8889$$

2ª) Cálculo de x_2 :

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1) = 5,1111 - 0,7901 / 7,2222 = 5,0017, \\ |x_2 - x_1| = |5,1111 - 5,0017| = 0,1094$$

3ª) Cálculo de x_3 :

$$x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2) = 5,0017 - 0,0000 / 7,0000 = 5,0000, \\ |x_3 - x_2| = |5,0017 - 5,0000| = 0,0017. \text{ Como o critério de parada estipulado foi } |x_{k+1} - x_k| < 0,002, \text{ e } |x_3 - x_2| < 0,002, \text{ então temos que um zero de } f(x) \text{ é } 5,0000. \text{ Caso seja desejado obter o outro zero da função, é necessário estipular outro chute inicial, por exemplo } -6.$$

Resumidamente, temos os resultados organizados na Tabela 1.8.

Tabela 1.8 | Resultados do método Newton-Raphson

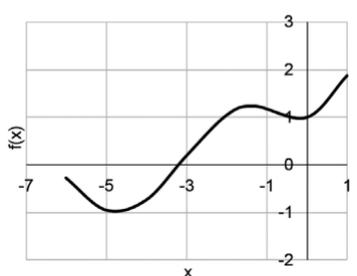
Passo	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
1	6	8	9
2	5,1111	0,7901	7,2222
3	5,0017	0,0120	7,0034
4	5,0000	-	-

Fonte: elaborada pela autora.

É importante mencionar que o método de Newton-Raphson não é capaz de determinar o zero desejado de uma função se, para um dado, x_n , $f'(x_n) \cong 0$, pois, na função de iteração, a derivada da função é o denominador, e a divisão de um número por outro muito próximo a zero resulta em um número muito grande, o que inviabiliza a convergência na região de interesse. Vamos verificar isso no caso de $f(x) = \exp(x) - \text{sen}(x)$ com $x_0 = -1,3$. Na Figura

1.16, temos que o zero mais próximo a essa estimativa inicial está contido no intervalo $[-5, -3]$. Contudo, se aplicássemos o referido procedimento numérico, encontraríamos como zero $-251,327$, efetuando-se os cálculos com três casas decimais e adotando como critério de convergência $|x_{k+1} - x_k| < 0,1$.

Figura 1.16 | Gráfico de $f(x) = \exp(x) - \text{sen}(x)$



Fonte: elaborada pela autora.



Pesquise mais

Shodor é uma organização educacional sem fins lucrativos que disponibiliza diversas ferramentas matemáticas, dentre elas há uma aplicação para o método de Newton-Raphson.

Disponível em: <http://www.shodor.org/UNChem/math/newton/nmethod.html>. Acesso em: 11 abr. 2017.

Verifique também como podemos fazer os cálculos numa calculadora científica.

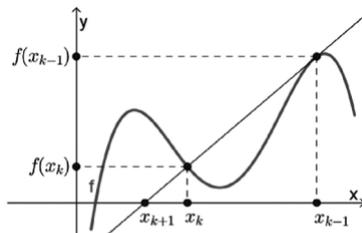
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jwLD22naUEM>. Acesso em: 11 abr. 2017.

Interpretação geométrica do método da Secante

Uma desvantagem do uso do método de Newton-Raphson é a necessidade de determinar a derivada de uma função, que pode ser uma tarefa difícil ou inconveniente de se avaliar em um determinado ponto. Podemos driblar esse impasse com a seguinte

estratégia: traçar uma reta secante em dois pontos de coordenadas: $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$. O prolongamento dessa reta cruza com o eixo x, originando o ponto x_{k+1} , como ilustra a Figura 1.17.

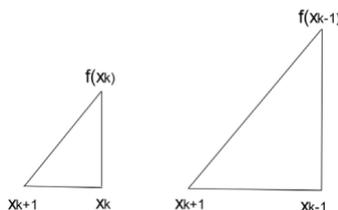
Figura 1.17 | Interpretação geométrica do método da Secante



Fonte: elaborada pela autora.

A partir da Figura 1.17, observamos que se obtiveram dois triângulos:

Figura 1.18 | Triângulos oriundos da reta secante



Fonte: elaborada pela autora.

A partir da técnica de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{f(x_{k-1})}{f(x_k)} = \frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$$

Rearranjando a equação, obtemos a função de iteração do método da Secante, cujas estimativas iniciais são x_{k-1} e x_k , sendo que o procedimento é repetido até que um critério de parada, semelhante ao apresentado no método de Newton-Raphson, seja alcançado:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \text{ para } k=1,2,3,\dots$$



Exemplificando

Vamos analisar a seqüência de cálculo para determinar o zero de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ pelo método da Secante. Necessitaremos de dois chutes iniciais – estipularemos os valores 2 e 2,5 –, e utilizaremos três casas decimais com a técnica do arredondamento e critério de parada um erro relativo menor ou igual a 0,003, isto é, $\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right| \leq 0,003$, o qual se apresenta como uma alternativa para a definição da convergência do método, além do erro absoluto utilizado no exemplo anterior.

$$\begin{aligned} \text{A primeira iteração é calculada por: } x_2 &= \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \\ &= \frac{2 \cdot (2,5^3 - 2 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 - 5) - 2,5 \cdot (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5)}{(2,5^3 - 2 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 - 5) - (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5)} = 2,121, \end{aligned}$$

sendo $\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = 0,179 > 0,003$, logo, devemos prosseguir com as iterações.

$$\begin{aligned} \text{A segunda iteração é expressa por: } x_3 &= \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \\ &= \frac{2,5 \cdot (2,121^3 - 2 \cdot 2,121^2 + 2 \cdot 2,121 - 5) - 2,121 \cdot (2,5^3 - 2 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 - 5)}{(2,5^3 - 2 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 - 5) - (2,121^3 - 2 \cdot 2,121^2 + 2 \cdot 2,121 - 5)} \\ &= 2,143, \text{ sendo } \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = 0,01 > 0,003. \end{aligned}$$

Na terceira iteração, encontraremos $x_4 = 2,151$ e $\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = 0,003$, sendo que esse erro relativo é o critério de parada imposto no enunciado deste exemplo. Assim, um zero de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ determinado pelo método da Secante é 2,151.

Sem medo de errar

De posse da teoria dos métodos de Newton-Raphson e da Secante, precisamos elaborar os algoritmos para através deles determinar a quantidade de silicone que deve ser produzida para a YXZZKX atingir o lucro de R\$ 600.000,00. Iniciaremos com o método de Newton-Raphson, que requer uma aproximação inicial (QS_0), tolerância e número de máximo de iterações (N). Para simplificar a notação, faremos que a quantidade de silicone é identificada por x e que o lucro é fx . Assim, temos os seguintes passos:

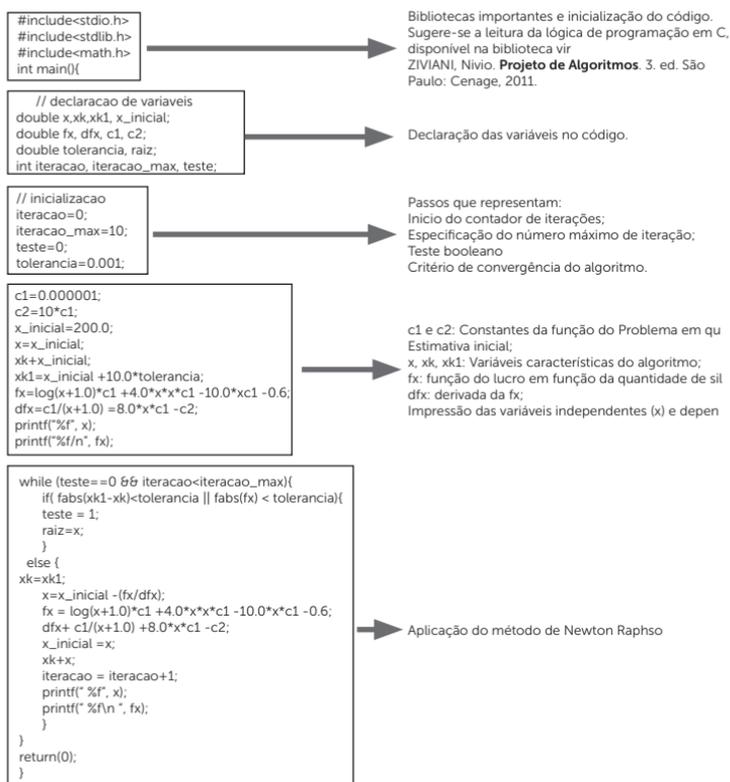
Passo 1: Faça $k = 1$ (início das iterações); Passo 2: Enquanto $k \leq N$, faça os passos 3 a 6; Passo 3: Faça $x \leftarrow x_0 - \frac{fx_0}{f'x_0}$; Passo 4: Se $|x - x_0| < \text{tolerância}$ ou $|fx| < \text{tolerância}$ então retorne x como solução e interrompa o programa; Passo 5: Faça $x_0 \leftarrow x$; Passo 6: Faça $k \leftarrow k + 1$.

Necessitamos do conhecimento em linguagem C para escrevermos o código, assim recomendamos a leitura do seguinte livro, disponível em sua biblioteca virtual:

ZIVIANI, Nívio. **Projeto de algoritmos com implementações em JAVA e C ++**. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

Assim, o algoritmo para a função em estudo é:

Figura 1.19 | Algoritmo do método de Newton-Raphson



Fonte: elaborada pela autora.

Obtenha esse código em <<https://goo.gl/klq4Ef>>. Acesso em: 5 maio 2017.

Ao executá-lo, temos como resposta para cada passo o exibido na Tabela 1.9:

Tabela 1.9 | Resultados do método de Newton-Raphson

x	f(x)
200	-0,442
477,983	0,309
396,937	0,026
388,637	0,000

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, a quantidade de silicone produzida que reverte num lucro de R\$ 600.000,00 é 388,637 toneladas. O método da Secante é similar ao de Newton-Raphson, mas a função de iteração é diferente, e requer a estimativa inicial de dois valores, x_0 e x_1 . Logo, modificaremos o Passo 3 descrito anteriormente por:

$$x \leftarrow x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

questão, obtemos 388,376 toneladas. O código computacional pode ser acessado no link <<https://goo.gl/ea07Vd>>. Acesso em: 5 maio 2017.

Avançando na prática

Curva de oferta e demanda: Ponto de Equilíbrio

Descrição da situação-problema

A determinação do Ponto de Equilíbrio é extremamente importante para os tomadores de decisão de empresas, uma vez que a partir dessa análise define-se a quantidade mínima para ser comercializada, a fim de não se ter prejuízos. Para determiná-lo, precisamos igualar uma relação matemática que nos traduza a quantidade de um bem que os compradores estejam dispostos a adquirir, ou seja, curva de demanda, a outra equação refletindo o quanto os vendedores estariam

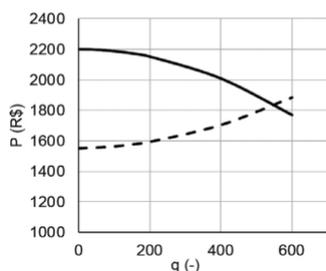
dispostos a vender a um determinado preço, dita curva de oferta. Seguindo esses conceitos, um estudo foi realizado pela equipe financeira da Notemania, fabricante de notebooks, obtendo como curva de oferta $p = o(q) = -0,0012q^2 + 2200$ e de demanda $p = d(q) = 0,00087q^2 + 0,035q + 1550$, sendo que, para ambas as equações, p identifica o preço unitário em reais, e q a quantidade de notebooks que a empresa disponibilizará no mercado. Assim, qual deverá ser o preço de equilíbrio da Notemania?

Resolução da situação-problema

Para encontrarmos a solução, precisamos compreender que, primeiramente, é necessário determinar a quantidade de equilíbrio, isto é, a quantidade de notebooks em que as curvas se cruzam, ou seja, obter o valor de q quando $o(q) = d(q)$. Assim, igualando-se as duas funções, obtemos $-0,0012q^2 + 2200 = 0,00087q^2 + 0,035q + 1550$ ou $0,00207q^2 + 0,035q - 650 = 0$. Esse problema recai no método de determinação de zero de funções e, para isso, utilizaremos o método de Newton-Raphson, estimativa inicial 600 unidades, 5 casas decimais e critério de convergência $|f(x)| < 10^{-6}$.

A Figura 1.19 apresenta um esboço da situação-problema em análise, em que a curva tracejada identifica a curva de demanda, $d(q)$, e a curva cheia o perfil de oferta, $o(q)$.

Figura 1.20 | Esboço das cruvas de demanda e oferta em função da quantidade de notebook.



Fonte: elaborada pela autora.

A derivada da função que será submetida ao procedimento iterativo é $f'(q) = 0,00414q + 0,035$. Os passos de iteração são apresentados na Tabela 1.10.

Tabela 1.10 | Passos de iteração do método de Newton-Raphson

k	q	$f(q)$	$f'(q)$
1	600	116,200	2,51900
2	553,87058	4,40480	2,32802
3	551,97851	0,00741	2,32019
4	551,97531	0,00000	2,32018

Fonte: elaborada pela autora.

Como resultado, encontramos que, para 4 iterações e uso de 5 casas decimais, a quantidade de notebooks que acarreta num ponto de equilíbrio entre a demanda e oferta é 551,97531, que, na verdade, para fazer sentido, uma vez que a produção refere-se a um número inteiro, temos 552 unidades. Assim, o preço de venda será $p = o(552) = -0,0012(552)^2 + 2200 = \text{R\$ } 1834,36$.

Faça valer a pena

1. De acordo com a teoria do método de Newton-Raphson, verifique se os itens a seguir são verdadeiros (V) ou falsos (F).

I. A função de iteração é $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_k)}$.

II. A definição do método é obtida a partir da reta secante à função.

III. O método terá convergência se, para um intervalo inicial (a, b) : $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(a) \cdot f'(b) > 0$ e $f''(a) \cdot f''(b) > 0$.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta de valores lógicos V e F.

- F-F-V.
- V- F- V.
- V- F- F.
- F- F- F.
- V- V- F.

2. Analise as afirmações e as relações entre elas:

I. Dada uma equação $\sqrt{x} - 5 \cdot \exp(-x) = 0$, temos que a raiz é 1,430,

DADO QUE

II. Para isso, utilizamos 3 casas decimais com a técnica de arredondamento, critério de convergência "erro relativo menor ou igual a 0,001" e estimativas iniciais 1,4 e 1,5.

Assinale a alternativa que apresenta a afirmação correta.

- a) A afirmativa I é falsa, mas a II é verdadeira.
- b) A afirmativa I é verdadeira, mas a II é falsa.
- c) A afirmativa I é verdadeira, e a II é um argumento válido para a I.
- d) A afirmativa I é verdadeira, mas a II não é um argumento válido para a I.
- e) As afirmativas I e II são falsas.

3. O modelo Count é uma equação utilizada por pediatras para estimar a altura, $h(x)$, de uma criança em função da idade, x , sendo expressa por $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222 \cdot \ln(x)$.

Assinale a alternativa que apresenta a idade de uma criança com 89 cm de altura, utilizando o método de Newton-Raphson, 3 casas decimais, estimativa inicial 6 anos e $f'(x) = -0,001$.

- a) 2,229 anos.
- b) 2,179 anos.
- c) 2,539 anos.
- d) 3,121 anos.
- e) 2,947 anos.

Referências

- CABRAL, Paulo. **Erros e Incertezas nas Medições**. 2004. Disponível em: <<http://professor.ufabc.edu.br/~jose.azcue/EN2703/ErrosIncertezas.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2017.
- CÁLCULO Numérico na Casio fx-82ms (Newton-Raphson). 20 set. 2012. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jwLD22naUEM>>. Acesso em: 11 abr. 2017.
- DALL'ANESE, Claudio. **Conceito de derivada**: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. 2000. 140 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.
- ERROS em cálculo numérico. [s.d.]. Disponível em: <http://www.estgv.ipv.pt/paginaspeessoais/nconceicao/20042005_2/Cap1_erro.pdf>. Acesso em: 3 mar. 2017.
- FERREIRA, Sílvio. Sistema binário – Parte I. **Linha de código**. [s.d.]. Disponível em: <<http://www.linhadecodigo.com.br/artigo/1648/sistema-binario-parte-i.aspx>>. Acesso em: 1º mar. 2017.
- GEOGEBRA. 2017. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 28 abr. 2017.
- IMTEC. **Software Problem Led to System Failure at Dhahran**. 1992. Disponível em: <<http://www.gao.gov/assets/220/215614.pdf>>. Acesso em: 6 mar. 2017.
- LOBÃO, Diomar Cesar. **Introdução aos métodos numéricos**. [s.d.]. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/diomar_cesar_lobao/material/Metodos_Numericos/UFF_Metodos_Numericos.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2017.
- NEWTON'S Method Equation Solver. Shodor, 2008. Disponível em: <<http://www.shodor.org/UNChem/math/newton/nmethod.html>>. Acesso em 11 abr. 2017.
- PIRES, Augusto de Abreu. **Cálculo numérico**: prática com algoritmos e planilhas. São Paulo: Atlas, 2015.
- PIRES, Júlia Maria Marques. **A Importância da Matemática e da Modelação Matemática no Mestrado Integrado em Ciências Farmacêuticas**. 2014. 79 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Farmacêuticas)–Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa, 2014. Disponível em: <http://recil.grupolusofona.pt/bitstream/handle/10437/4707/dissertacao_Julia_Pires_20060375.pdf?sequence=1>. Acesso em: 8 abr. 2017.
- RAMOS, Marcelo Sávio. **Métodos numéricos com R**: algumas notas sobre zeros de funções. 2015. 95 f. Tese (Doutorado em Matemática)–Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.
- RAPHSON, Joseph. **Analysis aequationum universallis**. 1697. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_4nlbAAAAQAAJ>. Acesso em: 8 abr. 2017.
- RIBEIRO, Rosane R. J.; MENEZES, Matheus S.; MEZZOMO, Ivan. Métodos numéricos para aproximação de raízes de funções. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL – CMAC NORDESTE 2012, 2012, Natal. **Anais...** São Carlos: SBMAC, 2012.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico**. Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Pearson, 1996.

SILVA, Marcelo. **Composição de funções**. 2013. Disponível em: <<http://docente.ifrn.edu.br/marcelosilva/disciplinas/matematica-i/funcoes/funcao-composta/view>>. Acesso em: 23 mar. 2017.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; MONKEN, Luiz Henry. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SYMBOLAB. 2017. Disponível em: <<https://es.symbolab.com/>>. Acesso em: 8 abr. 2017.

TOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 1. Disponível em: <<http://anhanguera.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788581430867/pages/-14>>. Acesso em: 4 abr. 2017.

ZIVIANI, Nívio. **Projeto de algoritmos com implementações em JAVA e C ++**. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

Resolução de sistemas lineares

Convite ao estudo

Já vimos o quão importante são os métodos computacionais para a determinação de zeros de funções; além disso, estudamos que esse tipo de problema é frequentemente encontrado na área de otimização, ou seja, estamos interessados em determinar os pontos de máximo ou mínimo de uma função. Na presente seção, iremos estudar métodos computacionais capazes de determinar a solução de um sistema linear. O problema de obter a solução de um sistema linear aparece em diversas áreas do conhecimento, inclusive na de transferência de calor.

Em nosso cotidiano, estamos cercados de equipamentos eletrônicos, desde um simples telefone celular, no qual consultamos e-mails e redes sociais, a desktops e notebooks que, usualmente, utilizamos para trabalhar e estudar, ou grandes computadores denominados Clusters, responsáveis por computar imensas quantidades de dados por segundo. Uma das grandes limitações no desenvolvimento de novos processadores e na miniaturização deles é a temperatura máxima de operação, pois esta não deve ser elevada a ponto de prejudicar seu desempenho. Diante da complexidade no desenvolvimento desses componentes, você já se perguntou como os métodos numéricos podem auxiliar na criação de novas tecnologias?

Nesse contexto, considere que você trabalha na TTGTech, empresa de tecnologia que desenvolve de softwares a hardwares, sendo o novo projeto idealizado pela corporação o desenvolvimento de um processador que opere a temperaturas inferiores a **40 °C**. Nos estudos preliminares realizados pela divisão de modelos matemáticos da empresa, a ZYTZYTech,

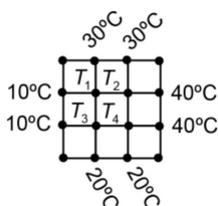
concluiu-se que uma das melhores ferramentas matemáticas para a resolução do problema de transferência de calor ao longo do processador é a utilização de um sistema linear. Você faz parte da SoftTech, divisão da empresa responsável pelo desenvolvimento de softwares, sendo o seu papel o de implementar um código computacional capaz de resolver o sistema linear para determinar a distribuição de temperatura ao longo do processador. Sendo o projeto de grande envergadura, seu gerente recomendou que você o dividisse em três estágios. No primeiro deles, Seção 2.1, ele deseja que você realize um estudo teórico acerca dos sistemas lineares, quando eles admitem solução, a forma matricial associada a eles e, por fim, apresente seu primeiro código computacional capaz de resolvê-los. Na segunda fase do projeto, Seção 2.2, seu gerente encomenda a você um software que seja capaz de particionar a matriz dos coeficientes em matrizes triangulares, a fim de diminuir o custo computacional da resolução do sistema linear. Na última fase do projeto, Seção 2.3, você tem como objetivo o desenvolvimento de estratégias iterativas para a resolução do sistema linear. O projeto se encerra com a confecção de um relatório em que você compara cada uma das estratégias desenvolvidas, o custo computacional associado a cada uma delas e, por fim, mostra a distribuição de temperatura ao longo do processador.

Seção 2.1

Eliminação de Gauss

Diálogo aberto

Figura 2.1 | Processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Os sistemas lineares possuem diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, desde um simples problema de modelar um circuito elétrico até problemas complexos de computação científica, nas quais estão presentes sistemas lineares, cujas matrizes possuem milhares de linhas e colunas. O ponto de partida na resolução de um sistema linear é a garantia da existência de solução; feito isso, deve-se, então, mostrar que ela é única. No entanto, de nada adiantam as garantias anteriores se a obtenção da solução não for possível, visto que os métodos tradicionais de resolução de sistemas lineares são impraticáveis para problemas com diversas variáveis e equações. Assim, estratégias mais robustas, como o método de Gauss, se fazem necessárias. Nesse contexto, lembre-se de que você trabalha na TTGTTech, empresa de tecnologia, cujo projeto atual é a construção de um processador que opera em baixa temperatura. A Figura 2.1 ilustra a geometria de um processador e as respectivas temperaturas do seu contorno. Como pode ser observado, o bordo do processador possui diferentes faixas de temperatura, isso se deve ao fato de ele estar em contato com outros equipamentos; além disso, diferentes taxas de transferência de calor são obtidas pelo sistema de refrigeração para o processador.

Como mencionado anteriormente, a divisão de modelos matemáticos da empresa, a ZYTZYTech, sugeriu que um bom modelo para cálculo da temperatura ao logo do processador seria dado por

um sistema linear, obtido a partir da seguinte lei: “a temperatura em determinado ponto é aproximadamente igual à média aritmética dos quatro pontos vizinhos a ele”. A partir dessa lei, podemos obter as seguintes equações e, também, o sistema linear originado a partir delas:

$$\text{Equação 1: } T_1 = (T_2 + 30 + 10 + T_3)/4;$$

$$\text{Equação 2: } T_2 = (40 + 30 + T_1 + T_4)/4;$$

$$\text{Equação 3: } T_3 = (T_4 + T_1 + 10 + 20)/4;$$

$$\text{Equação 4: } T_4 = (40 + T_2 + T_3 + 20)/4;$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Sendo você o responsável pelo desenvolvimento do algoritmo de resolução do sistema linear, é seu papel implementar o método de eliminação de Gauss para obter a solução e com isso determinar as temperaturas T_i , $1 \leq i \leq 4$, mostradas na Figura 2.1. No entanto, fique atento às recomendações de seu gerente, que lhe pediu a confecção de um relatório contendo, além da resolução, um estudo teórico sobre sistemas lineares.

Não pode faltar

Sistemas lineares

A modelagem matemática de diversos fenômenos físicos, biológicos ou químicos resulta no problema de resolver simultaneamente diversas equações lineares. Em linguagem matemática, esses fenômenos são descritos por um conjunto de m equações, no qual se deseja determinar a solução de n variáveis denominadas incógnitas. A esse conjunto de equações damos o nome de sistema linear. Cada uma das equações que compõem esse sistema é definida por:

Definição 1: dados os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n, b (n \geq 1)$, a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ com $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$ recebe o nome de equação linear em \mathbb{R} nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n .



Observando o modelo de equação linear, como seria o formato de uma equação **não linear**? Procure por exemplos.

Resolver essa equação linear consiste em determinar $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que a igualdade seja mantida, ou seja, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$.



Exemplificando

Considere a equação linear $6x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$. O vetor $\bar{x} = (1, 1, -1)$ é a solução dessa equação, uma vez que a substituição deste na equação linear torna a igualdade consistente: $6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 3$.

O sistema composto pelo conjunto das m equações nas n incógnitas é formalmente definido como a seguir:

Definição 2: um sistema de m equações lineares com n incógnitas ($m, n \geq 1$) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas avaliadas simultaneamente. Matematicamente, é escrito como:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em S os coeficientes são reais, $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, e resolver esse sistema linear equivale a encontrar $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ tal que todas as equações do sistema sejam satisfeitas simultaneamente.

Uma representação bastante útil de S é sua forma matricial dada por $A_{m \times n} x_n = b_m$, onde $A_{m \times n}$ é a matriz dos coeficientes, x_n o vetor de incógnitas e b_m o vetor dos termos independentes, respectivamente denotados por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$



Exemplificando

Considere o sistema linear $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 1 \end{cases}$. A forma matricial associada a ele é dada por:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Outra representação matricial importante dos sistemas lineares é conhecida como matriz aumentada. Nesta representação, os elementos $a_{i,j}$ e b_j estão reunidos em uma única matriz de dimensão $m \times (n + 1)$, conforme segue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Essa forma de representar o sistema linear é bastante útil nas iterações de diversos métodos numéricos. Por fim, é importante observar que sempre que nos referirmos, nesta Unidade 2, a um sistema linear na forma $A_{m \times n} x = b_m$, estaremos considerando um sistema linear quadrado, ou seja, aquele em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, portanto, $m = n$.



Pesquise mais

Definidos os sistemas lineares, eles, então, são classificados em função do determinante da matriz dos coeficientes. Essencialmente, três são os tipos: **sistema possível e determinado**, **sistema possível e indeterminado** e **sistema impossível**. Uma boa leitura sobre o tema pode ser encontrada no link: <http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/CalculoNumerico/Sistemas.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2017.

Álgebra matricial

Neste ponto, é fácil perceber que os sistemas lineares e as matrizes estão intrinsecamente relacionados, assim, faremos aqui

uma pequena revisão dos principais conceitos envolvendo a álgebra matricial. Esse estudo é de fundamental importância, pois, ao longo de toda a Unidade 2, as definições e propriedades aqui enunciadas estarão presentes. Assim, temos:

Definição: sejam A e B matrizes de dimensão $m \times n$, então a soma dessas duas matrizes é uma matriz C de dimensão $m \times n$, cujas entradas são $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.



Exemplificando

Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e

determine $C = A + B$. Uma vez que as entradas da matriz C são dadas por $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, então tem-se:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definição (produto entre uma matriz e um escalar): seja A uma matriz de dimensão $m \times n$ e λ um número real, então a multiplicação de λ e A , denotada por $\lambda \cdot A$, é uma matriz $m \times n$, cujas entradas são $\lambda a_{i,j}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Propriedades: sejam A , B e C matrizes de dimensão $m \times n$, e λ e μ números reais, então as seguintes propriedades de adição e multiplicação por escalar são válidas:

- 1) $A + B = B + A$.
- 2) $A + 0 = 0 + A = A$.
- 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- 4) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- 5) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- 6) $A + (-A) = -A + A = 0$.

$$7) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

$$8) 1 \cdot A = A.$$



Exemplificando

Calculando o produto $\lambda \cdot A$ sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 2$, temos:

$$\lambda \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 4 & 14 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Definição (produto entre matriz e vetor): seja A uma matriz de dimensão $m \times n$ e x um vetor de dimensão n . O produto entre a matriz A e o vetor x é denotado por $A \cdot x$ e matematicamente calculado como a seguir:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j} \cdot x_j \end{bmatrix}.$$



Exemplificando

O produto entre a matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e o vetor $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem como

resultado a matriz apresentada a seguir:

$$A \cdot b = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 17 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Definição (produto entre matrizes): seja A uma matriz de dimensão $m \times n$ e B uma matriz de dimensão $n \times p$. O produto da matriz A por B é denotado por $A \cdot B$ e é uma matriz C de dimensão $m \times p$, cujas entradas são $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$, para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$.



Exemplificando

O produto entre a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ é:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Definição (matriz identidade): uma matriz identidade de ordem n , denotada por I_n , é uma matriz cuja diagonal principal, ou seja, os elementos $a_{i,i} = 1$ para $i = 1, \dots, n$ e todos os demais são zeros.

Definição (matriz transposta): a transposta de uma matriz $A = [a_{i,j}]$ de dimensão $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{j,i}]$ de dimensão $n \times m$, em que os elementos de cada linha i de A^T são ordenadamente iguais aos elementos da coluna i de A .

Propriedades da matriz transposta: as seguintes operações envolvendo matriz transposta se verificam sempre que estão definidas.

- 1) $(A^t)^t = A$
- 2) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- 3) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Sistemas equivalentes e operações básicas

Neste tópico, iremos estudar uma das principais ferramentas matemáticas utilizadas na resolução dos sistemas lineares, o escalonamento. Sua importância se deve ao fato de ela nos permitir substituir o sistema linear original, muitas vezes de difícil resolução, por outro mais simples e de mais fácil resolução. Essa ferramenta é apresentada pelo seguinte teorema:

Teorema: seja $A_{m \times n} x_n = b_m$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações desse sistema uma sequência finita de operações elementares escolhidas entre:

- I. Permutar duas equações.
- II. Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
- III. Adicionar o múltiplo de uma equação a outra equação.

Obtém-se um novo sistema $Ax = b$, e os sistemas $Ax = b$ e $Ax = b$ são equivalentes, isto é, possuem a mesma solução.

Veja, na sequência, uma aplicação desse teorema.



Exemplificando

Considerando as operações elementares, veja o passo a passo para a resolução do sistema linear S_1 seguinte:

$$S_1 : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{I} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{II}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{III} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - z = 1 \\ -2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{IV} z = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \text{ e } x = 2.$$

O último sistema obtido é incompatível e, pelo teorema anterior, o mesmo acontece com o sistema linear dado inicialmente. Neste estudo, as operações realizadas em cada uma das etapas foram:

Em \xrightarrow{I} Divisão da primeira linha por 2 e da segunda por 3.

Em \xrightarrow{II} Soma da segunda linha com a primeira multiplicada por -1, e a soma da terceira linha com a primeira multiplicada por -2.

Em \xrightarrow{III} Permuta da segunda com a terceira linha.

Em \xrightarrow{IV} Resolução das três equações, da terceira para a primeira.



Você pode utilizar o site <<https://es.symbolab.com/solver/system-of-equations-calculator>> (acesso em: 12 jun. 2017) para resolver o sistema anterior e checar o passo a passo.

Método de Gauss

Neste ponto, temos todo o ferramental teórico matemático necessário para a implementação do método de eliminação de Gauss. Como apresenta Ruggiero (2005), o método de Gauss consiste em transformar o sistema linear original $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em um sistema linear equivalente $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, denominado triangular superior.



Denomina-se sistema triangular superior todo sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em que $a_{i,j} = 0$ para qualquer $i > j$, ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A solução de um sistema triangular superior é facilmente obtida por um processo de retrossubstituição, que algoritmicamente é descrito por:

01	$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$
02	para $i = (n - 1), \dots, 1$ faça
03	soma = 0.0 ;
04	para $j = (i + 1), \dots, n$ faça
05	soma = soma + $a_{i,j} x_j$;
06	fim_para
07	$x_i = (b_i - \mathbf{soma}) / a_{ii}$;
08	fim_para

De posse do algoritmo de retrossubstituição, daremos início ao desenvolvimento do método de eliminação Gauss. Para isso, considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de dimensão $n \times n$, com $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Nesse método, a eliminação é efetuada por colunas e, assim, chamaremos de etapa k do processo a fase em que a variável x_k é eliminada das equações. Como usualmente feito na literatura, $a_{i,j}^{(k)}$ denota o coeficiente da linha i e coluna j ao final da k -ésima etapa; de modo análogo, b_i^k será o i -ésimo elemento do vetor independente ao final da etapa k . Considerando a notação anterior, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é, inicialmente, escrito como:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{(0)} | \mathbf{b}^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} & \cdots & a_{2,n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(0)} & a_{n,2}^{(0)} & \cdots & a_{n,n}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right)$$

Etapa 1) Nesta etapa, eliminamos a variável x_1 das equações de $i = 2$ até n ; para isso, consideramos os seguintes entes: o pivô $a_{1,1}^{(0)}$ desta etapa, os multiplicadores $m_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} \quad i = 2, \dots, n$ e as operações elementares, $a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - m_{i,1} \cdot a_{1,j}^{(0)}$ para $i = 2, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, e $b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i,1} \cdot b_1^{(0)}$ para $i = 2, \dots, n$. Como a primeira linha permanece inalterada, então apenas a reproduzimos, $a_{1,j}^{(1)} = a_{1,j}^{(0)}$ para $j = 1, \dots, n$ e $b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$. Assim, ao final desta etapa, a seguinte matriz é obtida:

$$\mathbf{A}^{(1)} | \mathbf{b}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(0)} - m_{2,1} \cdot a_{1,2}^{(0)} & \cdots & a_{2,n}^{(0)} - m_{2,1} \cdot a_{1,n}^{(0)} & b_2^{(0)} - m_{2,1} \cdot b_1^{(0)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(0)} - m_{n,1} \cdot a_{1,2}^{(0)} & \cdots & a_{n,n}^{(0)} - m_{n,1} \cdot a_{1,n}^{(0)} & b_n^{(0)} - m_{n,1} \cdot b_1^{(0)} \end{array} \right)$$

Etapa 2) Nesta etapa, eliminamos a variável x_2 das equações de $i = 3$ até n ; para isso, consideramos os seguintes entes: o pivô $a_{2,2}^{(1)}$ desta etapa, os multiplicadores $m_{i,2} = \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} \quad i = 3, \dots, n$ e as operações elementares, $a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - m_{i,2} \cdot a_{2,j}^{(1)}$ para $i = 3, \dots, n$ e

$j = 2, \dots, n$, e $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i,2} \cdot b_2^{(1)}$ para $i = 3, \dots, n$. Como as duas primeiras linhas permanecem inalteradas, então apenas reproduzimos cada uma delas, $a_{1,j}^{(2)} = a_{1,j}^{(1)}$ e $a_{2,j}^{(2)} = a_{2,j}^{(1)}$ para $j = 1, \dots, n$ e $b_1^{(2)} = b_1^{(1)}$ e $b_2^{(2)} = b_2^{(1)}$. Assim, ao final dessa etapa, a seguinte matriz é obtida:

$$A^{(2)} | b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & \dots & a_{1,n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}^{(1)} - m_{n,2} \cdot a_{2,n}^{(1)} & b_n^{(1)} - m_{n,2} \cdot b_2^{(1)} \end{array} \right)$$

Procedendo de modo análogo até a etapa $(n-1)$, a matriz obtida ao final desta etapa é dada por:

$$A^{(n-1)} | b^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(n-1)} & a_{1,2}^{(n-1)} & \dots & a_{1,n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(n-1)} & \dots & a_{2,n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right), \text{ sendo o sistema}$$

linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ triangular superior e equivalente ao sistema linear original.



Exemplificando

Utilize o método de Gauss para a resolução do sistema linear a seguir.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(0)} | b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & a_{1,3}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} & a_{2,3}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{3,1}^{(0)} & a_{3,2}^{(0)} & a_{3,3}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Resolução:

Etapa 1) Nesta etapa, o pivô é $a_{1,1}^{(0)} = 5$ e os multiplicadores são

$$m_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ e } m_{3,1} = \frac{a_{3,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} = \frac{2}{5} = 0,4. \text{ Considerando as}$$

operações elementares, $a_{2,1}^{(0)}$ é eliminado por $L_2 = L_2 - m_{2,1}L_1$, e $a_{3,1}^{(0)}$ por $L_3 = L_3 - m_{3,1}L_1$; assim, tem-se:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -0,4 & -0,2 & -1,2 \\ 0 & -0,2 & 0,4 & -0,6 \end{array} \right)$$

Etapa 2) Nesta etapa, o pivô é $a_{2,2}^{(1)} = -0,4$ e o multiplicador é igual

a $m_{3,2} = \frac{a_{3,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} = \frac{-0,2}{-0,4} = 0,5$. Considerando as operações elementares,

tem-se: $L_3 \leftarrow L_3 - m_{3,2}L_2$, assim:

$$A^{(2)} | b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & a_{1,3}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{3,2}^{(2)} & a_{3,3}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -0,4 & -0,2 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{array} \right)$$

Portanto, resolver o sistema linear $Ax = b$ é equivalente a resolver o sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$ dado por:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 0x_1 - 0,4x_2 - 0,2x_3 = -1,2 \\ 0x_1 - 0x_2 + 0,5x_3 = 0 \end{cases}$$

O sistema linear anterior é triangular superior, logo pode ser resolvido por retrossubstituição.

$$x_3 = \frac{0}{0,5} = 0, \quad x_2 = \frac{-1,2 + 0,2 \cdot x_3}{-0,4} = 3, \quad x_1 = \frac{4 - 3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3}{5} = -1.$$

Sendo a solução do sistema linear igual a 4, $\bar{x} = (-1 \ 3 \ 0)^T$.

Algoritmo do Método de Gauss

Neste ponto, reunimos todo o ferramental teórico matemático necessário ao método de Gauss; assim, daremos início à sua implementação computacional. Essencialmente, o algoritmo se divide em três blocos, o primeiro deles destinado à declaração de variáveis, o segundo responsável por escalonar a matriz e o terceiro e último responsável por resolver por retrossubstituição o sistema triangular superior obtido ao final da fase de escalonamento. Assim, temos (considere // como indicador de comentários no código):

```
01 //===== BLOCO 1 ==
=====//
```

02 // Entre as linhas 6 e 13 ocorrem as declarações das variáveis do tipo inteira responsáveis

03 // pelas operações de contagem, bem como ocorre a declaração das variáveis reais que irão

04 // suportar as operações em aritmética em ponto flutuante.

05 // Início

06 INTEIRO NL, NC; // NL = número de linhas; NC = número de colunas

07 INTEIRO k, i, j; // i = contador de linhas; j = contador de colunas; k = contador de passos

08 REAL SOMA, M // SOMA = variável auxiliar; M = multiplicador de linhas

09 REAL MAT = MATRIZ[NL, NC]; // MAT = matriz dos coeficientes

10 REAL VET = VETOR[NL, 1]; // VET = vetor dos termos independentes

11 VET_SOLUCAO = VETOR[NL, 1]; // VET_SOLUCAO = vetor solução do sistema

12 LEIA(MAT); // Leitura da matriz dos coeficientes

13 LEIA(VET); // Leitura do vetor dos termos independentes

14 //===== BLOCO 2
=====//

15 // Entre as linhas 18 e 26 ocorre o escalonamento da matriz estendida, ou seja, $A | b$,

16 // ou ainda, $MAT | VET$. Este trecho do algoritmo é a parte fundamental do método.

17 // Fase de eliminação

18 PARA k = 1, ..., (NL-1) FAÇA

19 PARA i = (k+1), ..., NL FAÇA

20 M = MAT[i, k] / MAT[k, k];

21 MAT[i, k] = 0;

```

22          PARA j = (k+1), ..., NC FAÇA
23              MAT[i, j] = MAT[i, j] - M * MAT[k, j];
24              VET[i, 1] = VET[i, 1] - M * VET[k, 1];
25          FIM PARA
26 FIM PARA
27 FIM PARA

```

```

28 //===== BLOCO 3
=====//

```

29 // Por fim, entre as linhas 32 e 39, ocorre o processo de retrossubstituição.

30 // Ao final deste trecho de código, a solução do sistema linear é obtida.

```

31 // Retrossubstituição
32 VET_SOLUCAO[NL, 1] = VET[NL, 1] / MAT[NL, NL];
33 PARA k = (NL-1), ..., 1 FAÇA
34     SOMA = 0;
35     PARA j = (k+1), ..., NC FAÇA
36         SOMA = SOMA + MAT[k, j] * VET_SOLUCAO[j, 1];
37     FIM PARA
38     VET_SOLUCAO[k, 1] = ( VET[k, 1] - SOMA ) / MAT[k, k];
39 FIM PARA
40 IMPRIMA(VET_SOLUCAO);

```

Sem medo de errar

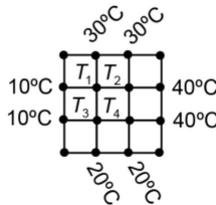
Neste ponto, estamos prontos para retomarmos a primeira etapa do desenvolvimento do processador e o estudo da transferência de calor por condução ao longo dele. Nesta fase do projeto, seu gerente lhe solicitou a implementação do algoritmo do método de Gauss, a fim de resolver o sistema linear proposto pela ZYTZYTech. A seguir, temos a geometria do processador (ver Figura 2.2) e, na sequência, o sistema linear que devemos resolver.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, daremos início a esta etapa com a aplicação do algoritmo do método de Gauss, com o objetivo de escalonarmos a matriz A dos coeficientes e, assim, obtermos um sistema triangular superior que pode ser facilmente resolvido por retrossubstituição.

$$A^{(0)} | b^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & b_3^{(0)} \\ a_{41}^{(0)} & a_{42}^{(0)} & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} & b_4^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 30 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{array} \right)$$

Figura 2.2 | Processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Etapa 1) Considere o pivô $a_{11}^{(0)}$, assim os respectivos multiplicadores

são $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{21} = -0,25$, $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{31} = -0,25$,

$m_{41} = \frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{41} = 0$; considerando as operações elementares,

vêm: $L_1^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)}$, $L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - m_{21} \cdot L_1^{(0)}$, $L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} - m_{31} \cdot L_1^{(0)}$,

$L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(0)} - m_{41} \cdot L_1^{(0)}$, obtemos, assim, a seguinte matriz:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & b_4^{(1)} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{24}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{14}^{(0)} & b_2^{(0)} - m_{21} \cdot b_1^{(0)} \\
0 & a_{32}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{34}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{14}^{(0)} & b_3^{(0)} - m_{31} \cdot b_1^{(0)} \\
0 & a_{42}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{43}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{44}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{14}^{(0)} & b_4^{(0)} - m_{41} \cdot b_1^{(0)}
\end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|c}
4 & -1 & -1 & 0 & 40 \\
0 & 3,750 & -0,250 & -1 & 80 \\
0 & -0,250 & 3,750 & -1 & 40 \\
0 & -1 & -1 & 4 & 60
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

Etapa 2) Considere o pivô $a_{22}^{(1)}$ e os respectivos multiplicadores

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \Rightarrow m_{32} = -0,067, \quad m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \Rightarrow m_{42} = -0,267. \quad \text{Aplicando}$$

as operações elementares sobre a matriz $A^{(1)}$, temos $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$, $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)}$, $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32}L_2^{(1)}$, $L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - m_{42}L_2^{(1)}$, resultando, assim, em:

$$\begin{aligned}
A^{(2)}|b^{(2)} &= \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} & b_1^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & b_4^{(2)}
\end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} & b_1^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{23}^{(1)} & a_{34}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{24}^{(1)} & b_3^{(1)} - m_{32} \cdot b_2^{(1)} \\
0 & 0 & a_{43}^{(1)} - m_{42} \cdot a_{23}^{(1)} & a_{44}^{(1)} - m_{42} \cdot a_{24}^{(1)} & b_4^{(1)} - m_{42} \cdot b_2^{(1)}
\end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|c}
4 & -1 & -1 & 0 & 40,000 \\
0 & 3,750 & -0,250 & -1 & 80,000 \\
0 & 0 & 3,733 & -1,067 & 45,333 \\
0 & 0 & -1,067 & 3,733 & 81,333
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

Etapa 3) Considere o pivô $a_{33}^{(2)}$ e o respectivo multiplicador (m_{43}). Aplicando as operações elementares sobre a matriz $A^{(2)}$, temos $A^{(3)}$, $L_1^{(3)} \leftarrow L_1^{(2)}$, $L_2^{(3)} \leftarrow L_2^{(2)}$, $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)}$, $L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} - m_{43}L_3^{(2)}$, resultado, assim, em:

$$\begin{aligned}
A^{(3)}|b^{(3)} &= \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & b_1^{(3)} \\
0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} & b_2^{(3)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)}
\end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & b_1^{(3)} \\
0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} & b_2^{(3)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
0 & 0 & 0 & a_{44}^{(2)} - m_{43} \cdot a_{34}^{(2)} & b_4^{(2)} - m_{43} \cdot b_3^{(2)}
\end{array} \right) \\
A^{(3)}|b^{(3)} &= \left(\begin{array}{cccc|c}
4 & -1 & -1 & 0 & 40,000 \\
0 & 3,750 & -0,250 & -1 & 80,000 \\
0 & 0 & 3,733 & -1,067 & 45,333 \\
0 & 0 & 0 & 3,428 & 94,286
\end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
4 & -1 & -1 & 0 & T_1 \\
0 & 3,750 & -0,250 & -1 & T_2 \\
0 & 0 & 3,733 & -1,067 & T_3 \\
0 & 0 & 0 & 3,428 & T_4
\end{array} \right) = \left(\begin{array}{c}
40,000 \\
80,000 \\
45,333 \\
94,286
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

Ao final da terceira etapa, obtemos o sistema linear equivalente na forma escalonada, o qual pode ser facilmente resolvido por retrossubstituição; dessa maneira, temos:

$$T_4 = \frac{94,286}{3,428} = 27,505 \quad , T_3 = \frac{45,333 + 1,067 \cdot T_4}{3,733} = 20,005 ,$$

$$T_2 = \frac{80,000 + 0,250 \cdot T_3 + T_4}{3,733} = 30,138$$

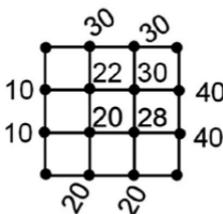
$$T_1 = \frac{40,000 + T_2 + T_3}{4} = 22,535 .$$

Escrevendo a solução na forma vetorial, temos $T = (22,535 \quad 30,138 \quad 20,005 \quad 27,505)$.

A fim de representar graficamente a distribuição de temperatura ao longo do processador, vamos utilizar apenas a parte inteira da solução, visto que é muito difícil medir temperaturas com mais de uma casa decimal.

Como pode ser observado, a distribuição de temperatura no processador é inferior a 40 °C, com exceção do contorno, o que garantirá o desejado. Agora, faça as anotações necessárias para compor seu relatório ao longo desta Unidade 2.

Figura 2.3 | Processador



Fonte: elaborada pelo autor.

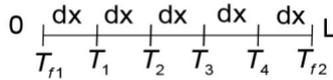
Avançando na prática

Condução de calor em uma barra

Descrição da situação-problema

Os problemas de condução térmica, frequentemente, podem ser analisados em uma única dimensão. A Figura 2.4 ilustra uma barra de metal de comprimento L , difusividade α e geração interna de calor q . Além disso, as fronteiras dessa barra são mantidas a temperaturas constantes e iguais a T_{f1} e T_{f2} .

Figura 2.4 | Barra de metal



Fonte: elaborada pelo autor.

O sistema linear a seguir é capaz de determinar as temperaturas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 que estão igualmente espaçadas à distância dx .

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \alpha}{(dx)^2} & \frac{-\alpha}{(dx)^2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha}{(dx)^2} & \frac{2 \cdot \alpha}{(dx)^2} & \frac{-\alpha}{(dx)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha}{(dx)^2} & \frac{2 \cdot \alpha}{(dx)^2} & \frac{-\alpha}{(dx)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha}{(dx)^2} & \frac{2 \cdot \alpha}{(dx)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + \frac{\alpha T_{f1}}{(dx)^2} \\ q \\ q \\ q + \frac{\alpha T_{f2}}{(dx)^2} \end{bmatrix}$$

Considere $\alpha = 1$, $dx = 1$, $T_{f1} = T_{f2} = 0$ e $q = 1$ e, em seguida, aplique o método de Gauss na resolução do sistema linear.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, voltando com os dados no sistema linear anterior, tem-se:

$$A^{(0)} | b^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & a_{1,3}^{(0)} & a_{1,4}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} & a_{2,3}^{(0)} & a_{2,4}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{3,1}^{(0)} & a_{3,2}^{(0)} & a_{3,3}^{(0)} & a_{3,4}^{(0)} & b_3^{(0)} \\ a_{4,1}^{(0)} & a_{4,2}^{(0)} & a_{4,3}^{(0)} & a_{4,4}^{(0)} & b_4^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Etapa 1) Considere o pivô $a_{11}^{(0)} = 2$ e os multiplicadores iguais a

$$m_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{1}{2}, \quad m_{3,1} = \frac{a_{3,1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{0}{2} = 0, \quad m_{4,1} = \frac{a_{4,1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{0}{2} = 0. \text{ Efetuar}$$

as operações elementares $L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - m_{2,1}L_1^{(0)}$, $L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} - m_{3,1}L_1^{(0)}$
 $L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(0)} - m_{4,1}L_1^{(0)}$ resulta:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & -1 & 0 & 1,5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & a_{3,4}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} & a_{4,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(1)} & a_{4,4}^{(1)} & b_4^{(1)} \end{array} \right)$$

Etapa 2) Considere o pivô $a_{2,2}^{(1)} = 1,5$ e os multiplicadores iguais

$$a \quad m_{3,2} = \frac{a_{3,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} = -\frac{2}{3}, \quad m_{4,2} = \frac{a_{4,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} = 0. \text{ Efetuando as operações}$$

elementares $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{3,2}L_2^{(1)}$ e $L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - m_{4,2}L_2^{(1)}$, vem:

$$A^{(2)} | b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & -1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,33 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & a_{1,3}^{(2)} & a_{1,4}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_{2,1}^{(2)} & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & a_{2,4}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ a_{3,1}^{(2)} & a_{3,2}^{(2)} & a_{3,3}^{(2)} & a_{3,4}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ a_{4,1}^{(2)} & a_{4,2}^{(2)} & a_{4,3}^{(2)} & a_{4,4}^{(2)} & b_4^{(2)} \end{array} \right)$$

Etapa 3) Considere o pivô $a_{3,3}^{(2)} = \frac{4}{3}$ e o multiplicador

$$m_{4,3} = \frac{a_{4,3}^{(2)}}{a_{3,3}^{(2)}} = -\frac{3}{4}. \text{ Efetuando a operação elementar } L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} - m_{4,3}L_3^{(2)}$$

resulta em:

$$A^{(3)} | b^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & -1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,33 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 & 2,5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(3)} & a_{1,2}^{(3)} & a_{1,3}^{(3)} & a_{1,4}^{(3)} & b_1^{(3)} \\ a_{2,1}^{(3)} & a_{2,2}^{(3)} & a_{2,3}^{(3)} & a_{2,4}^{(3)} & b_2^{(3)} \\ a_{3,1}^{(3)} & a_{3,2}^{(3)} & a_{3,3}^{(3)} & a_{3,4}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ a_{4,1}^{(3)} & a_{4,2}^{(3)} & a_{4,3}^{(3)} & a_{4,4}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array} \right)$$

Ao final da etapa 3, encerra-se o processo de eliminação e o sistema linear equivalente obtido é triangular superior, cuja solução é obtida por um processo de retossustituição.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & T_1 \\ 0 & 1,5 & -1 & 0 & T_2 \\ 0 & 0 & 1,33 & -1 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 & T_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} T_1 = (1 + T_2)/2 = 2 \\ T_2 = (1,5 + T_3)/1,5 = 3 \\ T_3 = (2 + T_4)/1,33 = 3 \\ T_4 = 2,5/1,25 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do sistema é $\bar{T} = (2 \ 3 \ 3 \ 2)^T$.



Pesquise mais

Soluções de problemas como esse são baseados no método de diferenças finitas. Veja mais sobre esse assunto no seguinte link: <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/lefraso/disc/dia03.pdf>>. Acesso em: 29 abr. 2017.

Faça valer a pena

1. Considere as matrizes A e B como parâmetro de entrada para o trecho de código a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 Início

2 alpha = 2;

3 beta = 3;

4 C = matriz[3][3] \ \ definindo C como uma matriz quadrada de ordem 3

4 Para i = 1, ..., 3 faça

5 Para j = 1, ..., 3 faça

6 C[i, j] = alpha * A[i, j] + beta * B[i, j];

7 Fim para

8 Fim para

Nesse contexto, avalie as afirmações que seguem:

I- Ao final do algoritmo, as matrizes A e B foram alteradas.

II- Na linha 6, para cada i e j temos duas multiplicações entre números reais e um comando de atribuição.

III- A linha 6 poderia ser substituída por $C[i, j] = (\text{alpha} + \text{beta}) * (A[i, j] + B[i, j])$ sem que o resultado original se altere.

Agora, assinale a alternativa CORRETA.

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

2. O método de Gauss consiste em um robusto procedimento computacional para a resolução de sistemas lineares na forma $A_{n \times n} \cdot X = b_n$. Sobre esse método, analise as afirmações que seguem:

I- No método de Gauss, os elementos da diagonal principal não são alterados.

II- Ao final da fase de escalonamento é obtido um sistema triangular superior.

III- Os multiplicadores são definidos em função dos pivôs da presente iteração.

IV- Os elementos do vetor independente não são alterados no método de Gauss.

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- a) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
- c) Apenas as afirmações III e IV estão corretas.
- d) Apenas as afirmações I, II e III estão corretas.
- e) As afirmações I, II, III e IV estão corretas.

3. O método de Gauss foi utilizado na resolução do sistema linear a seguir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesse contexto, avalie as afirmações que seguem:

- I- Os multiplicadores, na primeira etapa da resolução, são $m_{2,1} = m_{3,1} = 0,4$.
- II- Os multiplicadores, na segunda etapa de resolução, são $m_{2,2} = m_{3,2} = 0,2$.
- III- A soma dos elementos do vetor solução está entre 2,5 e 3,5.
- IV- A soma dos elementos do vetor solução está entre 5,0 e 8,0.
- V- Ao final do processo de eliminação é obtida uma matriz triangular superior.

Agora, assinale a alternativa que contém a solução CORRETA:

- a) Apenas as afirmações I, IV e V estão corretas.
- b) Apenas as afirmações I, II e IV estão corretas.
- c) Apenas as afirmações I, III e V estão corretas.
- d) Apenas as afirmações I, II e III estão corretas.
- e) Apenas as afirmações II, III e V estão corretas.

Seção 2.2

Fatoração LU

Diálogo aberto

Uma das principais preocupações no desenvolvimento de um algoritmo é a sua robustez computacional, ou seja, elevada velocidade de processamento de dados. Consideremos por um instante o método de Gauss estudado na seção anterior; neste algoritmo, o trecho de escalonamento da matriz exige três laços **FOR** em seu escalonamento, portanto temos, no mínimo, ordem cúbica de operações, isto é, $o(n^3)$ sendo realizadas nesse processo. De posse dessa informação, voltemos ao seu papel no projeto, de desenvolvimento de um novo processador na TTGTech. Durante a primeira fase do projeto você utilizou o método de Gauss na determinação da distribuição de temperatura ao longo do processador. Seu gerente está satisfeito com os resultados obtidos até agora, por isso ele dará início à segunda fase do projeto, a qual consiste no desenvolvimento de um algoritmo capaz de decompor a matriz \mathbf{A} dos coeficientes do sistema linear proposto pela MathTetch, no produto de duas outras matrizes, ou seja, $\mathbf{A} = (\mathbf{LU})$, e com o uso desta técnica computacional resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a fim de determinar a distribuição de temperatura ao longo do processador. Essa estratégia tem como principal ganho a redução em uma ordem de operações, visto que a resolução dos sistemas L e U, que são triangulares, exige apenas $o(n^2)$. Definida a segunda fase do projeto, reúna-se com sua equipe e inicie os estudos no desenvolvimento.

Não pode faltar

Introdução

Na seção anterior, estudamos o método de eliminação de Gauss para a resolução de sistemas lineares na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Não há dúvidas quanto à robustez do método na resolução desse tipo de sistema. No entanto, esse método se torna ineficiente quando temos que resolver diversos sistemas lineares na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que a matriz do coeficiente \mathbf{A} permanece inalterada e o vetor \mathbf{b} muda para cada um dos sistemas a serem resolvidos.

A ineficiência do método de Gauss diante desse tipo de situação se deve ao fato de que em seu algoritmo temos duas etapas, a primeira de escalonamento da matriz, que envolve uma série de operações matemáticas com maior custo computacional, e a segunda, de retrossubstituição, que envolve um esforço computacional menor.

A fim de contornar essa limitação do método de Gauss, empregamos os métodos de decomposição, os quais consistem em decompor a matriz dos coeficientes em um produto de duas ou mais matrizes e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares de menor custo computacional que conduzirá à solução do sistema original.

Dentre as diversas estratégias de decomposição, iremos estudar aqui a fatoraçoão LU , que consiste em decompor a matriz A no produto de duas matrizes, uma triangular inferior L com diagonal principal composta por elementos de valores iguais a um (diagonal unitária) e uma matriz U triangular superior. A vantagem desse tipo de fatoraçoão é que ela permite a resolução de qualquer sistema linear que tenha A como matriz dos coeficientes e, se o vetor b for alterado, a resolução do novo sistema é obtida com menor esforço computacional, sem a necessidade de uma nova decomposição.

Decomposição LU

Considere, inicialmente, o sistema linear $Ax = b$. Nosso objetivo aqui é transformar a matriz A no produto de duas outras matrizes, ou seja, $A = (LU)$ sendo L uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e U uma matriz triangular superior. No entanto, antes de iniciarmos o processo de fatoraçoão da matriz A , enunciaremos um teorema que nos fornece as condições e garantias para que esta decomposição possa ser feita.

Teorema: fatoraçoão LU

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , seja A_k a matriz constituída das k linhas e colunas de A . Suponha que $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. Então, existe uma única matriz triangular inferior e $L = (m_{i,j})$ com $m_{i,i} = 1, 1 \leq i \leq n$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tais que $LU = A$.



Assimile

Denomina-se sistema triangular superior todo sistema linear $Ax = b$ em que $a_{ij} = 0$ para todo $j < i$, ou seja, um sistema na forma seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$



Assimile

Denomina-se sistema triangular inferior todo sistema linear $Ax = b$ em que $a_{ij} = 0$ para todo $j > i$, ou seja, um sistema na forma seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + \dots + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + \dots = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + \dots = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De posse do teorema anterior, que nos garante a decomposição da matriz A , iremos, a partir de agora, focar na resolução do sistema linear $Ax = b$, ou seja, $(LU)x = b$. Fazendo a mudança de variável $y = Ux$, a solução do sistema linear original pode ser obtida com a resolução de dois sistemas triangulares, a saber: $Ly = b$ e $Ux = y$. Neste ponto, desenhamos toda a estratégia a ser utilizada na resolução do sistema linear $Ax = b$, no entanto ainda não sabemos como obter as matrizes L e U . Essas matrizes serão obtidas aqui por meio do método de eliminação de Gauss, e tal escolha se justifica pelo fato de já termos aprendido essa estratégia na seção anterior.



Pesquise mais

As estratégias de pivoteamento são amplamente usadas quando a matriz A dos coeficientes tem pivôs nulos ou muito próximos de zero, uma boa referência a esse assunto é encontrada em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JVfGLbiZl8w>>. Acesso em: 25 maio 2017.

Obtenção das matrizes L e U

A fim de exemplificar a obtenção das matrizes L e U, utilizaremos o caso particular de um sistema de dimensão três, ou seja, $\mathbf{A}_{3 \times 3} \mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3$. A generalização desse caso pode ser feita a partir das ideias aqui desenvolvidas, cabe observar que os passos aqui percorridos são os mesmo de Ruggiero (2005, p. 132). Assim, considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Considerando a estratégia de Gauss, para a triangularização da matriz \mathbf{A} temos:

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Etapa 1) Considere o pivô $a_{11}^{(0)}$, assim os respectivos multiplicadores

são $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$. Considerando as operações elementares,

segue que: $L_1^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)}$, $L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - m_{21} \cdot L_1^{(0)}$, $L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} - m_{31} \cdot L_1^{(0)}$. Obtemos, assim, a seguinte matriz:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{32}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{13}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Etapa 2) Considere o pivô $a_{22}^{(1)}$ e o respectivo multiplicador

$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Aplicando as operações elementares sobre a matriz

$\mathbf{A}^{(1)}$, temos $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$, $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)}$, $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32} L_2^{(1)}$, resultando, assim, em:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{23}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Ao final da segunda etapa, a matriz $A^{(2)}$ será triangular superior e, nesse ponto, encerramos o processo de triangularização, pois já obtemos a decomposição LU de A , a qual é dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$



Faça você mesmo

De posse das matrizes L e U , faça o produto $L \cdot U$ e verifique que ele é igual à matriz A .

Como pode ser observado, a matriz L é composta pelos multiplicadores do método de Gauss, ao passo que a matriz U é a matriz triangular superior resultante do processo de escalonamento. Realizada a decomposição, devemos, então, resolver os seguintes sistemas triangulares.

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix};$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$



Refleta

Ao resolvermos o sistema linear $Ly = b$, o que podemos concluir sobre o vetor y ? Há alguma semelhança entre ele e o vetor independente obtido ao final do processo de escalonamento de Gauss?



Exemplificando

Utilizando o processo de fatoração LU, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o processo de Gauss para encontrar as matrizes L e U.

Etapla 1) Cálculo dos multiplicadores

Pivô $a_{11}^{(0)} = 5$, multiplicadores $m_{2,1} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{2,1} = \frac{2}{5}$ e

$$m_{3,1} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{3,1} = \frac{3}{5}.$$

Considerando as operações elementares sobre a matriz A , temos: $I_1^{(1)} \leftarrow I_1^{(0)}$, $I_2^{(1)} \leftarrow I_2^{(0)} - m_{2,1} \cdot I_1^{(0)}$, $I_3^{(1)} \leftarrow I_3^{(0)} - m_{3,1} \cdot I_1^{(0)}$, ao final desse processo obtemos $A^{(1)}$; uma vez que os elementos $a_{21}^{(1)}$ e $a_{31}^{(1)}$ são nulos, assim temos:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -0,60 & -3,20 \\ 0 & -0,40 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Etapla 2) Pivô $a_{22}^{(1)} = -0.60$, multiplicador $m_{3,2} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \Rightarrow m_{3,2} = \frac{2}{3}$,

realizando as operações $I_1^{(2)} \leftarrow I_1^{(1)}$, $I_2^{(2)} \leftarrow I_2^{(1)}$ e $I_3^{(2)} \leftarrow I_3^{(1)} - m_{3,2} \cdot I_2^{(1)}$, obtêm-se:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -0,60 & -3,20 \\ 0 & 0 & 2,34 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz $A^{(2)}$, no método de faturação LU, representa a matriz "U". A matriz "L", triangular inferior com diagonal unitária e demais elementos sendo os multiplicadores " m_{21} , m_{31} , e m_{32} ". Diante desses resultados, solucionaremos o sistema $Ly = b$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,40 & 1 & 0 \\ 0,60 & 0,67 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -0,60 & -3,20 \\ 0 & 0 & 2,34 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo os sistemas lineares $Ly = b$ e $Ux = b$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,40 & 1 & 0 \\ 0,60 & 0,67 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 10 - 0,40y_1 \Rightarrow y_2 = 8,4,$$

$y_3 = 1 - 0,6y_1 - 0,67y_2 \Rightarrow y_3 = -7,03$. Voltando com o vetor y em $Ux = y$, temos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -0,60 & -3,20 \\ 0 & 0 & 2,34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8,40 \\ -7,03 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema triangular superior resultante, vêm:

$$x_3 = \frac{-7,03}{2,34} = -3,00, \quad x_2 = \frac{8,40 + 3,20x_3}{-0,60} = 2,00,$$

$$x_1 = \frac{4 - 4x_2 - 3x_3}{5} = 1,00$$

Portanto, a solução para o sistema linear inicialmente dado é:

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = (1,00 \quad 2,00 \quad -3,00)^t$$

Implementação algorítmica

Na seção anterior, nós nos dedicamos ao estudo teórico do método de decomposição LU. De posse dos conceitos matemáticos envolvendo o método, estamos prontos para sua implementação algorítmica. A grande vantagem desse método se deve ao fato de que a decomposição da matriz A precisa ser realizada apenas uma vez, quando se deseja resolver um sistema linear $Ax = b$ em que apenas o vetor $Ax = b$ é alterado, ou seja, pagamos um custo computacional de apenas $O(2n^2)$. A tabela a seguir compara o número mínimo de operações realizadas pelo método de Gauss para resolver um sistema linear de tamanho n , com o número mínimo de operações realizadas pelo método LU, para resolver o mesmo sistema por meio da resolução de dois sistemas triangulares.

Figura 2.5 | Comparação do número de operações

n	$\frac{n^3}{3}$	$2n^2$	%
10	$3,3 \times 10^2$	2×10^2	40
100	$3,3 \times 10^5$	2×10^4	94
1000	$3,3 \times 10^8$	2×10^6	99,4

Fonte: Burden (2015, p. 132).

Encerramos esse tópico com a implementação do código LU, em que, essencialmente, dividimos o código em quatro blocos, cada um deles com um pequeno comentário sobre seu papel no algoritmo.

Algoritmo de decomposição LU

```
//*****BLOCO 1*****
*****///
```

No primeiro bloco, linhas 2 a 7, temos as declarações de variáveis e, leitura dos dados. É importante observar que todo contador é declarado como inteiro, pois se dedica apenas às operações de contagem, ao passo que as matrizes e as variáveis auxiliares no processo de decomposição são declaradas como reais, uma vez que estamos interessados na aritmética em ponto flutuante.

```
01 INICIO
02 INTEIRO i, j, k, NC, NL ;
03 REAL matriz(NL, NC), L(NL, NC), U(NL, NC) ;
04 REAL y(NL, 1), x(NL, 1), b(NL, 1)
05 REAL soma
06 LEIA(matriz) ;
07 LEIA(b)
```

```
//*****FIM BLOCO 1*****
*****///
```

```
//***** BLOCO 2*****
*****//
```

O segundo bloco, entre as linhas 9 e 17, consiste na etapa de escalonamento da matriz. Essa parte é a que demanda maior esforço computacional, visto que o número mínimo de operações a serem realizadas tem ordem $O(n^3/3)$, onde n é a dimensão da matriz.

```
08 /* Triangularização da matriz*/
09 para  $j = 1, \dots, (NL - 1)$  faça
10     para  $k = (j + 1), \dots, NL$  faça
11          $m = \text{matriz}(k, j) / \text{matriz}(j, j)$  ;
12         para  $i = j + 1, \dots, NC$  faça
13              $\text{matriz}(k, i) = \text{matriz}(k, i) - m \cdot \text{matriz}(j, i)$ ;
14         fim_para
15     fim_para
16 fim_para
17 fim_para
//*****FIM BLOCO
2 *****//
```

```
//*****BLOCO 3
*****//
```

Neste terceiro bloco, entre as linhas 18 e 24, as matrizes L e U são alocadas.

```
/* Montagem das matrizes  $L$  e  $U$ 
18 para  $j = 1, \dots, NL$  faça
19     para  $i = j + 1, \dots, NC$  faça
20          $L(j, i) = \text{matriz}(j, i)$ ;
21          $U(i, j) = \text{matriz}(i, j)$ ;
22     fim_para
23      $L(j, j) = 1$  ;
24 fim_para
//*****FIM BLOCO 3****
*****//
```

```

//***** BLOCO 4*****
*****//

```

Realizada a decomposição, devemos, então, resolver os sistemas triangulares lineares obtidos. Essas operações são realizadas, respectivamente, entre as linhas 26 e 42 e entre 36 e 42, cada um desses blocos tem esforço computacional de ordem $\mathcal{O}(n^2)$.

```

25 /*Resolução do sistema Lower (L)*/
26  $y(1,1) = b(1,1)/L(1,1)$  ;
27 para  $i = 1, \dots, NL$  faça
28      $soma = 0.0$  ;
29     para  $j = 1, \dots, (i - 1)$ 
30          $soma = soma + L(i, j) \cdot y(j, 1)$ ;
31     fim_para
32      $y(i, 1) = (b(i, 1) - soma)/L(i, i)$ ;
33 fim_para
34 /* Resolucao do sistema Upper */
35  $x(NL, 1) = y(NL, 1)/U(n, n)$  ;
36 para  $i = (NL - 1), \dots, 1$  faça
37      $soma = 0.0$  ;
38     para  $j = (i + 1), \dots, NC$  faça
39          $soma = soma + x(j, 1) \cdot U(i, j)$ ;
40     fim_para
41      $x(i, 1) = (y(i, 1) - soma)/U(i, i)$ ;
42 fim_para

```

```

/*****FIM BLOCO 4*****
*****//

```

```

43 IMPRIMA(X)
44 FIM_ALGORITMO

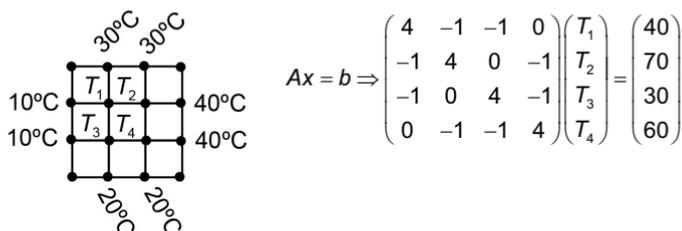
```

Ao final da resolução dos sistemas lineares triangulares, o algoritmo obtém a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ele termina sua execução com a impressão da solução em tela.

Sem medo de errar

Neste ponto, estamos prontos para retomar a segunda etapa do desenvolvimento do processador e o estudo da transferência de calor por condução ao longo dele. Nesta fase do projeto, seu gerente solicitou a você o desenvolvimento de um algoritmo que se utiliza da decomposição da matriz dos coeficientes, a fim de resolver o sistema linear proposto pela ZYTZYTech. A seguir, temos a imagem do processador (Figura 2.6) e o sistema linear que devemos resolver.

Figura 2.6 | Distribuição de temperatura no bordo do processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Daremos início a esta segunda etapa com a aplicação do algoritmo de decomposição LU. A fim de triangularizarmos a matriz A dos coeficientes e obter as matrizes L e U , iremos utilizar, inicialmente, o escalonamento de Gauss; assim, temos:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} \\ a_{41}^{(0)} & a_{42}^{(0)} & a_{42}^{(0)} & a_{43}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Etapa 1) Considere o pivô $a_{11}^{(0)}$, dessa forma os respectivos multiplicadores são $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{21} = -0,25$,

$m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{31} = -0,25$, $m_{41} = \frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow m_{41} = 0$, considerando

as operações elementares, vêm:

$$L_1^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)}, \quad L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - m_{21} \cdot L_1^{(0)}, \quad L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} - m_{31} \cdot L_1^{(0)},$$

$L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(0)} - m_{41} \cdot L_1^{(0)}$; obtemos, assim, a seguinte matriz:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{24}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{14}^{(0)} \\ 0 & a_{32}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{34}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{14}^{(0)} \\ 0 & a_{42}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{12}^{(0)} & a_{43}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{13}^{(0)} & a_{44}^{(0)} - m_{41} \cdot a_{14}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3,750 & -0,250 & -1 \\ 0 & -0,250 & 3,750 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Etapa 2) Considere o pivô $a_{22}^{(1)}$ e os respectivos multiplicadores

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \Rightarrow m_{32} = -0,067, \quad m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \Rightarrow m_{42} = -0,267. \text{ Aplicando}$$

as operações elementares sobre a matriz $A^{(1)}$, temos $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$, $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)}$, $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32}L_2^{(1)}$, $L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - m_{42}L_2^{(1)}$, resultando, assim, em:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{23}^{(1)} & a_{34}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(1)} - m_{42} \cdot a_{23}^{(1)} & a_{44}^{(1)} - m_{42} \cdot a_{24}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3,750 & -0,250 & -1 \\ 0 & 0 & 3,733 & -1,067 \\ 0 & 0 & -1,067 & 3,733 \end{pmatrix}$$

Etapa 3) Considere o pivô $a_{33}^{(2)}$ e o respectivo multiplicador

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \Rightarrow m_{43} = -0,286. \text{ Aplicando as operações elementares}$$

sobre a matriz $L_1^{(3)} \leftarrow L_1^{(2)}$, temos $L_1^{(3)} \leftarrow L_1^{(2)}$, $L_2^{(3)} \leftarrow L_2^{(2)}$, $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)}$, $L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} - m_{43}L_3^{(2)}$ resultando, assim, em:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(2)} - m_{43} \cdot a_{34}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3,750 & -0,250 & -1 \\ 0 & 0 & 3,733 & -1,067 \\ 0 & 0 & 0 & 3,428 \end{pmatrix}$$

Antes de encerrarmos esta etapa, convém comentar um pouco sobre a operação $a_{43}^{(2)} - m_{42} \cdot a_{23}^{(2)}$. Ao substituírmos os valores nessa expressão, é obtido $-1,067 - (-0,866) \cdot 3,733 = 0,000638$, arredondando na terceira casa decimal é obtido 0,001, o que não é zero, portanto não eliminamos $a_{43}^{(2)}$. No entanto, ao truncarmos o número **0,000638** na terceira casa decimal, voltamos a obter 0,000, eliminando assim, o elemento $a_{43}^{(2)}$. Ao final da terceira etapa, a matriz $A^{(3)}$ é triangular superior. Nesse ponto, encerramos o processo de triangularização, pois já obtemos a decomposição LU de A , a qual é dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,250 & 1 & 0 & 0 \\ -0,250 & -0,067 & 1 & 0 \\ 0 & -0,267 & -0,286 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3,750 & -0,250 & -1 \\ 0 & 0 & 3,733 & -1,067 \\ 0 & 0 & 0 & 3,428 \end{pmatrix}$$

Realizada a decomposição, devemos, então, resolver os seguintes sistemas triangulares $Ly = b$ e $Ux = y$:

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,250 & 1 & 0 & 0 \\ -0,250 & -0,067 & 1 & 0 \\ 0 & -0,267 & -0,286 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 40, \quad y_2 = b_2 - m_{21} \cdot y_1 \Rightarrow y_2 = 80,$$

$$y_3 = b_3 - m_{31}y_1 - m_{32}y_2 \Rightarrow y_3 = 45,333$$

$$y_4 = b_4 - m_{41}y_1 - m_{42}y_2 - m_{43}y_3 \Rightarrow y_4 = 94,286. \quad \text{Determinado}$$

o vetor y , podemos dar início à resolução do sistema triangular superior.

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3,750 & -0,250 & -1 \\ 0 & 0 & 3,733 & -1,067 \\ 0 & 0 & 0 & 3,429 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 45,333 \\ 94,286 \end{pmatrix}$$

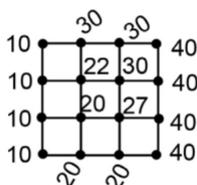
$$x_4 = 27,497, \quad x_3 = \frac{y_3 - a_{34}^{(3)}x_4}{a_{33}^{(3)}} \Rightarrow x_3 = 20,002,$$

$$x_2 = \frac{y_2 - a_{23}^{(3)}x_3 - a_{24}^{(3)}x_4}{a_{22}^{(3)}} \Rightarrow x_2 = 29,999,$$

$$x_1 = \frac{y_1 - a_{12}^{(3)}x_2 - a_{13}^{(3)}x_3 - a_{14}^{(3)}x_4}{a_{11}^{(3)}} \Rightarrow x_1 = 22,502.$$

Assim, determinamos a distribuição ao longo do processador.

Figura 2.7 | Distribuição de temperatura no processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao final da resolução dos sistemas lineares triangulares, obtemos a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que consiste na distribuição de temperatura ao longo do processador.

Lembre-se de acrescentar o aprendizado com esse método em seu relatório para o seu gerente.

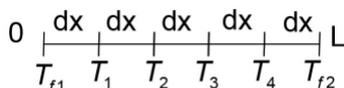
Avançando na prática

Condução de calor em regime transitório

Descrição da situação-problema

Nos problemas de condução térmica em regime transitório, a temperatura não muda apenas com a posição do corpo mas também muda com o tempo em uma mesma posição. A Figura 2.8 mostra uma barra de metal de comprimento L , cuja temperatura em $x=0$ é T_{f1} e em $x=L$ é T_{f2} . Nessa situação-problema, queremos determinar as temperaturas T_1, \dots, T_4 igualmente espaçadas com uma distância dx no instante de tempo $t = 1s$.

Figura 2.8 | Barra de metal



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma ferramenta bastante útil neste estudo é o método de diferenças finitas, que permite a obtenção do perfil de temperatura ao longo da barra através da resolução do sistema linear a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{t+1} \\ T_2^{t+1} \\ T_3^{t+1} \\ T_4^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \\ T_4^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q+2\lambda T_{f1} \\ q \\ q \\ q+2\lambda T_{f2} \end{pmatrix}.$$

No sistema linear anterior, as matrizes à esquerda estão relacionadas com a distribuição de temperatura no instante de tempo posterior, ou seja, $t + 1$, ao passo que as matrizes à direita se relacionam com o perfil de temperatura no instante de tempo anterior, ou seja, t . A fim de aplicar o método da composição LU na resolução do sistema linear, faça as seguintes considerações:

Parâmetros físicos:

- Difusividade $\alpha = 2$.
- Fonte de calor $q = 1$.
- Temperatura na fronteira $T_{f1} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{f2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Tempo inicial $t = 0$.
- Temperatura inicial $\bar{T}^0 = (5 \ 5 \ 5 \ 5)^T$.

Parâmetros de discretização:

- Passo no tempo $\Delta t = 1$.
- Malha $dx = 1$.
- Adimensional $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{2(dx)^2}$.

Resolução da situação-problema

Voltando com os dados anteriores no sistema linear dado, a seguinte igualdade é obtida.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{t+1} \\ T_2^{t+1} \\ T_3^{t+1} \\ T_4^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o produto e a soma matricial anterior, vem que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{t+1} \\ T_2^{t+1} \\ T_3^{t+1} \\ T_4^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 6 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Neste ponto, temos um sistema linear na forma $Ax = b$; aplicando a fatoração LU na matriz A, resulta: $(LU)x = b$, considerando $y = Ux$, a solução do sistema linear pode ser obtida por meio da resolução dos seguintes sistemas lineares triangulares $Ly = b$ e $Ux = y$. Considerando, inicialmente, o processo de decomposição da matriz A, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,33 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,38 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,38 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,67 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,62 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,62 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear $Ly = b$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,33 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,38 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,38 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 6 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

$y_1 = 21$, $y_2 = 0,33 \cdot y_1 + 6 \Rightarrow y_2 = 12,93$, $y_3 = 0,38 \cdot y_2 + 6 \Rightarrow y_3 = 10,91$, $y_4 = 0,38 \cdot y_3 + 41 \Rightarrow y_4 = 45,14$. Determinado o vetor y , podemos, agora, resolver o sistema triangular superior $Ux = y$, assim temos:

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,67 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,62 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12,93 \\ 10,91 \\ 45,14 \end{pmatrix}.$$

$$x_4 = 17,23, \quad x_3 = \frac{10,91 + x_4}{2,62} \Rightarrow x_3 = 10,74,$$

$$x_2 = \frac{12,93 + x_3}{2,67} \Rightarrow x_2 = 8,86, \quad x_1 = \frac{21 + x_2}{3} \Rightarrow x_1 = 9,95.$$

Portanto, a distribuição de temperatura ao longo da barra no instante de tempo igual a um segundo é $T^1 = (9,95 \quad 8,86 \quad 10,74 \quad 17,23)^t$.

Faça valer a pena

1. Considere o sistema linear na forma $Ax = b$, onde A tem dimensão $n \times n$ e b tem dimensão n . Além disso, considere que a matriz A seja decomposta através do processo LU. Nesse contexto, avalie as afirmações que seguem:

- I- A matriz A tem determinante nulo.
- II- A matriz L é triangular inferior, com diagonal principal unitária.
- III- A matriz U é triangular superior, com diagonal principal não nula.
- IV- O determinante da matriz L é nulo.

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- a) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
- c) Apenas as afirmações III e IV estão corretas.
- d) Apenas as afirmações II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

2. Dado o sistema linear $Ax = b$, a fatoração LU decompõe a matriz A em outras duas matrizes, tal que L e U são matrizes triangulares, assim:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b$$

Fazendo $y = Ux$, a solução do sistema linear é obtida através da resolução dos sistemas triangulares resultantes, ou seja, $Ly = b$ e $Ux = y$. Utilizando a decomposição LU, resolva o seguinte sistema linear.

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 5 & 23 \\ -2 & -10 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

A seguir, avalie as afirmações.

- I- A soma dos elementos $L_{2,1}$, $L_{3,1}$, $L_{3,2}$ está entre -0,50 e 0.

- II- A soma dos elementos do vetor \mathbf{y} é maior do que 0.
- III- A soma dos elementos da diagonal principal de U é -1 .
- IV- A soma dos elementos do vetor \mathbf{x} é menor que -9 .

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas I e IV estão corretas.
- d) Apenas as afirmativas II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

3. Resolva o sistema linear a seguir pelo método da decomposição LU.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 55 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- a) A soma dos componentes do vetor solução está entre 50 e 70.
- b) A soma dos componentes do vetor solução está entre 71 e 90.
- c) A soma dos componentes do vetor solução está entre 91 e 110.
- d) A soma dos componentes do vetor solução está entre 111 e 132.
- e) A soma dos componentes do vetor solução está entre 133 e 150.

Seção 2.3

Métodos iterativos para sistemas lineares

Diálogo aberto

O projeto de desenvolvimento do novo processador proposto pela TTGTech está chegando ao final, mas antes de colocar em marcha esta última fase, você e sua equipe decidiram fazer uma retrospectiva de tudo o que foi desenvolvido até então. Na primeira fase, o método de Gauss foi empregado para a resolução do sistema linear proposto pela ZYTZYTech; como você observou em seu relatório, esse método tem complexidade algorítmica de ordem $o(n^3)$. Na segunda fase, a fim de diminuir o esforço computacional, foi proposto o método de decomposição LU, que particiona a matriz dos coeficientes em dois sistemas lineares triangulares, reduzido o custo computacional para a ordem de $o(n^2)$. De posse de todos os conceitos desenvolvidos até agora, você e sua equipe decidem dar início à última fase do projeto. Nela, seu gerente encomendou o desenvolvimento de algoritmos iterativos que se aproveitem das propriedades de esparsidade da matriz \mathbf{A} , a fim de obterem a solução do sistema linear proposto pela ZYTZYTech. Reúna-se com sua equipe, apoie-se em toda experiência adquirida até agora e finalize seu projeto. Ao final, confeccione um relatório destinado ao seu gerente com todos os resultados obtidos por você e sua equipe.

Não pode faltar

Ao longo desta unidade, temos estudado os métodos diretos para a resolução dos sistemas lineares na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Nesse tipo de estratégia, a solução é obtida ao final de uma série de operações matriciais. Não há dúvida quanto à robustez desses métodos, no entanto, em muitas aplicações, a matriz \mathbf{A} dos coeficientes é esparsa; como um exemplo desse tipo de matriz, podemos citar a matriz obtida na Seção 2.2, no item Avançando na prática, que possui apenas três diagonais não nulas, sendo todos os outros elementos iguais a zero. Como aprendemos ao longo desta unidade, tanto o método de Gauss quanto o método de decomposição LU “modificam” toda a estrutura da matriz dos coeficientes, que deixa de ser esparsa, com a finalidade

de obter a solução do sistema linear. O custo que se "paga" por essa modificação na matriz A são os erros de arredondamento cometidos para a obtenção dos coeficientes dos respectivos métodos. Dessa forma, os métodos iterativos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel estudados nesta seção se aproveitam da estrutura esparsa de A para a obtenção da solução. Essencialmente, esses métodos generalizam a ideia do método do ponto fixo utilizado na obtenção de raízes de funções, ou seja, o sistema linear $Ax = b$ é convertido em um sistema na forma $x = Cx + g$, onde C tem dimensão $n \times n$ e b dimensão $n \times 1$, sendo $\varphi(x) = Cx + g$ a função de iteração da forma matricial. Assim, temos um processo iterativo $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ onde o contador k varia de $k = 0, \dots, n$, que sob certas condições gera uma sequência de aproximações x^1, x^2, \dots, x^k , tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \alpha$, então $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é solução do sistema linear $Ax = b$.

Método de Jacobi

O método de Jacobi obtém a forma iterativa $x^{k+1} = Cx^k + g$ através da partição da matriz A dos coeficientes em outras três, uma matriz L estritamente triangular inferior, uma matriz U estritamente triangular superior e uma matriz D diagonal, cujas entradas são os elementos da diagonal principal de A . A seguir, identificamos cada uma das matrizes provenientes da decomposição da matriz A ; como pode ser observado, essa decomposição permite escrever A da seguinte forma: $A = (D - L - U)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}}_L - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

Sendo $A = (D - L - U)$, o sistema linear $Ax = b$ pode ser escrito como $(D - L - U)x = b$, o que implica $Dx = (L + U)x + b$. Assumindo que todos os elementos da matriz D sejam diferentes de zero, podemos determinar a sua inversa D^{-1} , o que nos permite reescrever a igualdade $Dx = (L + U)x + b$ na forma $x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$.

A fim de escrever a última igualdade de forma mais compacta, introduzimos as notações $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ e $\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, que nos levam à equação $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{g}$. Neste ponto, é fácil perceber que transformamos o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em uma forma equivalente dada por $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x})$, sendo $\varphi(\mathbf{x})$ a função de iteração. Reunimos, assim, todos os elementos necessários ao método de Jacobi. Essencialmente, esse método consiste em: dada uma aproximação inicial \mathbf{x}^0 , que consiste em um vetor de n entradas, em seguida, gerar iterativamente uma sequência convergente $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \boldsymbol{\alpha}$. Simplificadamente, o procedimento iterativo de Jacobi se resume à resolução de:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \varphi(\mathbf{x}^k) \Rightarrow \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}^k + \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

para $k = 1, 2, \dots$



Assimile

A forma $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}^k + \mathbf{g}$ é mais adequada a propósitos teóricos; para uma implementação computacional mais eficiente, desenvolvemos os produtos matriciais envolvidos na igualdade $\mathbf{x}^k = \mathbf{C}\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{g}$, obtendo, assim, uma regra de somatórios.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\mathbf{x}_2^k - a_{13}\mathbf{x}_3^k - \dots - a_{1n}\mathbf{x}_n^k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n \left(-\frac{a_{1j}\mathbf{x}_j^k}{a_{11}} \right) + \frac{b_1}{a_{11}} \\ \mathbf{x}_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}\mathbf{x}_1^k - a_{23}\mathbf{x}_3^k - \dots - a_{2n}\mathbf{x}_n^k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \left(-\frac{a_{2j}\mathbf{x}_j^k}{a_{22}} \right) + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}\mathbf{x}_1^k - a_{n2}\mathbf{x}_2^k - \dots - a_{n,n-1}\mathbf{x}_{n-1}^k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \left(-\frac{a_{nj}\mathbf{x}_j^k}{a_{nn}} \right) + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{array} \right.$$

Até este momento sabemos que o método de Jacobi gera uma sequência $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ que converge para a solução do sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, no entanto ainda não sabemos responder a algumas perguntas, como: o método Jacobi converge para todo sistema linear? A convergência depende da aproximação inicial? Essas dúvidas são esclarecidas pelo critério das linhas.



Assimile

Crítério das Linhas. Considere o sistema linear $Ax = b$, além disso

defina $\alpha_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| / |a_{kk}|$. Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método

de Gauss-Jacobi gera uma seqüência $\{x^k\}$ convergente para a solução do sistema linear dado, independentemente da escolha da aproximação inicial x^0 .

Neste ponto, temos a função de iteração, a qual nos permite gerar uma seqüência de vetores x^1, x^2, \dots, x^k de aproximações da solução; também sabemos sob quais condições essa seqüência converge, mas ainda não somos capazes de dizer o quão próximos estamos da solução. Esta resposta é dada pelo teste de parada.



Assimile

Teste de Parada: Seja ε a precisão que desejamos para a solução do sistema linear $Ax = b$. Duas são as maneiras de medir o quão próximo estamos da solução que desejamos, uma delas é em termos absolutos, ou seja, dadas duas aproximações consecutivas $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$, medimos a distância entre elas $d^k = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k+1}|$. A outra maneira é em

termos relativos, $d_r^k = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{k+1} - x_i^k|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{k+1}|}$. Assim, dada a precisão ε , o vetor x^k será a solução aproximada se $d^{k+1} < \varepsilon$ ou $d_r^{k+1} < \varepsilon$.



Exemplificando

Utilizando o método de Jacobi, determine a solução do sistema linear $Ax = b$ dado a seguir. Considere como estimativa inicial $x_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$ e, em seus cálculos, utilize duas casas decimais e técnica de arredondamento.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 32 \\ 2x_1 - 15x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -59 \\ x_1 - 3x_2 + 20x_3 + 2x_4 = -38 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 30x_4 = 160 \end{cases} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -15 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 20 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -59 \\ -38 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Inicialmente aplicando o critério das linhas, a fim de demonstrar que o

problema é factível, temos: $\alpha_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^4 \frac{|a_{1,j}|}{|a_{1,1}|} = \frac{7}{10} < 1$, $\alpha_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \frac{|a_{2,j}|}{|a_{2,2}|} = \frac{7}{15} < 1$,

$$\alpha_3 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \frac{|a_{3,j}|}{|a_{3,3}|} = \frac{6}{20} < 1, \quad \alpha_4 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^4 \frac{|a_{4,j}|}{|a_{4,4}|} = \frac{5}{30} < 1.$$

Como temos os $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 < 1$, garantimos que o método de Jacobi converge para a solução do sistema, assim podemos dar início ao processo iterativo.

Para k=0, a substituição dos valores conhecidos e, estimativa inicial resultam em:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - a_{14}x_4^0) \\ x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - a_{24}x_4^0) \\ x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0 - a_{34}x_4^0) \\ x_4^1 = \frac{1}{a_{44}}(b_4 - a_{41}x_1^0 - a_{42}x_2^0 - a_{43}x_3^0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \frac{1}{10}[32 - 2(0) - (-3)(0) - 2(0)] \\ x_2^1 = \frac{1}{-15}[-59 - 2(0) - 3(0) - (-2)(0)] \\ x_3^1 = \frac{1}{20}[-38 - 1(0) - (-3)(0) - 2(0)] \\ x_4^1 = \frac{1}{30}[160 - 2(0) - 2(0) - (-1)(0)] \end{array} \right.$$

$$\text{Assim, } \left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = 3,2 \\ x_2^1 = 3,93 \\ x_3^1 = -1,9 \\ x_4^1 = 5,33 \end{array} \right.$$

Para k=1, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = \frac{1}{10}[32 - 2(3,93) - (-3)(-1,9) - 2(5,33)] \\ x_2^2 = \frac{1}{-15}[-59 - 2(3,2) - 3(-1,9) - (-2)(5,33)] \\ x_3^2 = \frac{1}{20}[-38 - 1(3,2) - (-3)(3,93) - 2(5,33)] \\ x_4^2 = \frac{1}{30}[160 - 2(3,2) - 2(3,93) - (-1)(-1,9)] \end{array} \right.$$

$$\text{Assim, } \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = 0,78 \\ x_2^2 = 3,47 \\ x_3^2 = -2,00 \\ x_4^2 = 4,79 \end{array} \right.$$

Resolvemos o mesmo procedimento para os demais passos, de tal modo que o resultado para cada iteração e variável está especificado no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 | Resultados do método Jacobi

	EI*	Passo					
k	0	1	2	3	4	5	6
x1	0	3,20	0,78	0,99	1,02	1,00	1,00
x2	0	3,93	3,27	3,00	3,01	3,00	3,00
x3	0	-1,90	-2,00	-1,93	-2,00	-2,00	-2,00
x4	0	5,33	4,79	5,00	5,00	5,00	5,00

*Estimativa inicial (EI)

Fonte: elaborada pelo autor.

Neste ponto, observamos que a solução é obtida no passo cinco, ou seja, $\bar{x} = (1,00 \quad 3,00 \quad -2,00 \quad 5,00)$.

Implementação algorítmica Gauss-Jacobi

No item anterior, nos dedicamos ao estudo teórico matemático do método de Jacobi. De posse dos conceitos matemáticos envolvendo esse método, estamos prontos para sua implementação algorítmica. Essencialmente, a implementação computacional se divide em dois grandes blocos: o primeiro deles, entre as linhas 1 e 14, se dedica à declaração das variáveis, leitura das matrizes e precisão do método. Note que incluímos, na linha 13, um número máximo de iterações – essa prática é comum para evitar que o algoritmo entre em “loop infinito” causado pela tolerância imposta na determinação da solução.

O segundo bloco, entre as linhas 15 e 31, é de fato onde ocorrem as iterações do método, destaque maior deve ser dado aos trechos entre as linhas 16 e 24, nos quais ocorre o desenvolvimento dos somatórios. Além disso, o algoritmo se encerra se uma das duas condições da estrutura **SE** for satisfeita, ou seja, se temos uma aproximação que satisfaz o critério da tolerância, ou seja, se o número máximo de iterações foi atingido. Nesses dois casos, a solução é a aproximação calculada na presente iteração.

<pre> 1 INICIO 2 INTEIRO <i>i, j, k, NC, NL</i> ;ITERACAO; 3 INTEIRO N_MAX 4 REAL <i>matriz(NL,NC)</i> , b(NL,1); 5 REAL <i>x0(NL,1)</i> ; <i>xk(NL,1)</i> 6 REAL <i>soma</i> ; 6 LEIA(<i>matriz</i>) ; 8 LEIA(<i>b</i>) ; 9 /**INICIALIZAÇÃO*****/ 10 teste==0; 11 TOL =0.005; 12 x0=zeros(NL,1); 13 k=0; 14 N_MAX =20; </pre>	<pre> 15 Enquanto <i>k</i> " <i>N_MAX</i>. && <i>teste</i> == 0 faça 16 para <i>i</i> = 1,...<i>NL</i> faça 17 soma =0.0; 18 para <i>j</i> = 1,...<i>NC</i> faça 19 se (<i>i</i> ~=<i>j</i>)então 20 soma = soma - <i>matriz(i, j)</i> ; - <i>matriz(i,i)</i> 21 fim_se 22 fim_para 23 <i>xk(i,1)</i> = <i>soma</i> + <i>b_i/a_{ii}</i> ; 24 fim_para; 25 se $\frac{\max x_k - x_0 }{\max x_k } < TOL$ <i>k</i> == <i>N_MAX</i> então 26 teste ==1; 27 solução =<i>xk</i>; 28 fim_se; 29 <i>X₀</i> = <i>X_k</i> ; 30 <i>k</i> = <i>k</i> + 1 31 fim_enquanto. 32 FIM </pre>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Método de Gauss-Seidel

De modo análogo ao método de Jacobi, o método de Gauss-Seidel também transforma o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para a forma $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{b}$ por separação da diagonal. No entanto, esse método, no momento de calcular \mathbf{x}_j^{k+1} , se aproveita de todos os valores de $\mathbf{x}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n^{k+1}$ já calculados e os $\mathbf{x}_{j+1}^k, \dots, \mathbf{x}_n^k$ restantes.



Assimile

O processo iterativo do método de Jacobi consiste em: dada uma aproximação inicial \mathbf{x}^0 , calcular os demais vetores de aproximações $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ através da relação a seguir.

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n \left(-\frac{a_{1j}x_j^k}{a_{11}} \right) + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k) = -\frac{a_{21}x_1^{k+1}}{a_{22}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \left(-\frac{a_{2j}x_j^k}{a_{22}} \right) + \frac{b_2}{a_{22}} \\ x_l^{k+1} &= \frac{1}{a_{ll}}(b_l - a_{l1}x_1^{k+1} - a_{l3}x_3^{k+1} - \dots - a_{ln}x_n^k) = \sum_{j=1}^{l-1} \left(-\frac{a_{lj}x_j^{k+1}}{a_{ll}} \right) + \sum_{j=l+1}^n \left(-\frac{a_{lj}x_j^k}{a_{ll}} \right) + \frac{b_l}{a_{ll}} \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \left(-\frac{a_{nj}x_j^{k+1}}{a_{nn}} \right) - \frac{a_{nn}x_n^{k+1}}{a_{nn}} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right.$$



Pesquise mais

Ao estudarmos o método de Jacobi, utilizamos o **Critério das Linhas**, a fim de garantir a sua convergência. Devemos, então, fazer o mesmo para o método de Gauss-Seidel; se quisermos garantir apenas a convergência, o critério das linhas é suficiente, mas se quisermos informações sobre a velocidade com que ela ocorre, devemos utilizar o **Critério de Sassenfeld**. Um importante estudo sobre esse critério é feito em:

RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2005. 405 p.



Exemplificando

Utilizando o método de Gauss-Seidel, determine a solução do sistema linear $Ax = b$, considerando a estimativa inicial de $x_0 = (0, 0, 0)$. Em seus cálculos, utilize 4 casas decimais, arredondamento e norma $\|x^{k+1} - x^k\| < 0,0004$. Sendo a definição de norma

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \sqrt{(x_1^{k+1} - x_1^k)^2 + (x_2^{k+1} - x_2^k)^2 + \dots + (x_n^{k+1} - x_n^k)^2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aplicando o critério das linhas para mostrar que o método converge, temos $\alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{3}{4}, \alpha_3 = \frac{2}{5}$; sendo todos $\alpha_i < 1$, podemos iniciar o processo iterativo.

Para $k=0$,

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0) \\ x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0) \\ x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{3}(7 - 1x_2^0 - 1x_3^0) \\ x_2^1 = \frac{1}{4}(4 - 1x_1^1 - 2x_3^0) \\ x_3^1 = \frac{1}{5}(5 - 0x_1^1 - 2x_2^1) \end{cases}$$

Considerando as estimativas iniciais.

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{3}[7 - 1(0) - 1(0)] \\ x_2^1 = \frac{1}{4}[4 - 1(2,3333) - 2(0)] \\ x_3^1 = \frac{1}{5}[5 - 0(0) - 2(0,4167)] \end{cases}, \text{ que resulta em } \begin{cases} x_1^1 = 2,3333 \\ x_2^1 = 0,4167 \\ x_3^1 = 0,8333 \end{cases}$$

Para $k=1$,

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{3}[7 - 1(0,4167) - 1(0,8333)] \\ x_2^1 = \frac{1}{4}[4 - 1(1,9167) - 2(0,8333)] \\ x_3^1 = \frac{1}{5}[5 - 0(1,9167) - 2(0,1042)] \end{cases}, \text{ e assim obtemos: } \begin{cases} x_1^1 = 1,9167 \\ x_2^1 = 0,1042 \\ x_3^1 = 0,9583 \end{cases}$$

Analogamente, calcularemos para os demais passos até que o critério de parada seja alcançado ($\|x^{k+1} - x^k\| < 0,0004$). Os resultados encontram-se no Quadro 2.2.

Quadro 2.2 | Resultados do método Gauss-Seidel

	EI*	Passo						
K	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0	2,3333	1,9167	1,9792	1,9948	1,9987	1,9997	1,9999
x_2	0	0,4167	0,1042	0,0260	0,0065	0,0016	0,0004	0,0001
x_3	0	0,8333	0,9583	0,9896	0,9974	0,9993	0,9998	1,0000

Fonte: elaborada pelo autor.

*Estimativa inicial (EI)

Note que: $|x_1^6 - x_1^5| = 0,001$, $|x_2^6 - x_2^5| = 0,0012$ e $|x_3^6 - x_3^5| = 0,0005$. Logo, $\|x_2^6 - x_2^5\| = 0,0012$. Finalmente, $|x_1^7 - x_1^6| = 0,0002$, $|x_2^7 - x_2^6| = 0,0003$ e $|x_3^7 - x_3^6| = 0,0002$. Então, $\|x_2^7 - x_2^6\| = 0,0003$, que é inferior à tolerância 0,0004 e, por isso, as iterações se encerraram no sétimo passo.

Algoritmo Gauss-Seidel

O algoritmo do método de Gauss-Seidel se estrutura em dois grandes blocos, um deles referente à declaração e à inicialização das variáveis, e outro referente ao processo iterativo do método. Devida atenção deve ser dada aos comandos entre as linhas 16 e 25, nos quais é feita a composição dos somatórios, e na linha 26, que contém o critério de parada: neste, ou a solução satisfaz o critério da tolerância, ou o número máximo de iterações é atingido pelo algoritmo.

<pre> 1 INICIO 2 INTEIRO 3 <i>i, j, k, NC, NL</i>; ITERACAO; 4 REAL <i>matriz(NL, NC)</i>; 5 REAL; <i>xk(NL, 1)</i>, <i>b(NL, 1)</i>, 6 <i>x0(NL, 1)</i>; 7 REAL <i>soma</i>; 8 LEIA(<i>matriz</i>); 9 LEIA(<i>b</i>); 10 LEIA(<i>x0</i>); 11 //**INICIALIZAÇÃO*****// 12 teste = 0; 13 TOL = 0.005; 14 k = 0; 15 N_MAX = 200; 16 $x_k = x_0$; 17 Enquanto <i>k</i> " <i>N_MAX</i> e 18 <i>teste</i> == 0 faça 19 para <i>i</i> = 1, ... <i>NL</i> faça 20 soma = 0.0; 21 para <i>j</i> = 1, ..., (<i>i</i> - 1) 22 faça..... 23 $soma = soma - \frac{matriz(i, j)}{matriz(i, i)} \cdot x_k(j, 1)$; 24 fim_para </pre>	<pre> 21 para <i>j</i> = (<i>i</i> + 1), ..., <i>NC</i> 22 $soma = soma - \frac{matriz(i, j)}{matriz(i, i)} \cdot x_k(j, 1)$; 23 fim_para 24 $xk(i, 1) = soma + b_i / matriz(i, i)$ 25 fim_para; 26 se $\frac{\max xk - x0 }{\max xk } < TOL$ ou <i>k</i> == 27 N_MAX então 28 teste = 1; 29 solução = <i>xk</i>; 30 fim_se; 31 $X_0 = X_k$; 32 <i>k</i> = <i>k</i> + 1 33 fim_enquanto. 34 FIM </pre>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

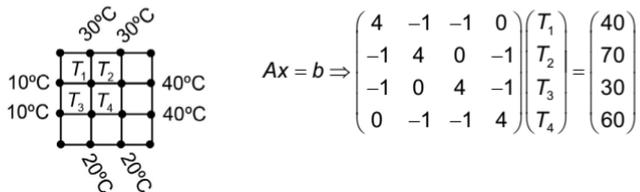


O tempo computacional de um algoritmo também tem relação com o número de variáveis que o computador tem que guardar na memória durante a execução, pois quanto menos variáveis, melhor. Comparando o método de Jacobi com o de Gauss-Seidel, qual se sairia melhor nesse quesito?

Sem medo de errar

Neste ponto, estamos prontos para retomarmos a última etapa do estudo da transferência de calor por condução ao longo do processador desenvolvido pela TTGTech. Nesta fase do projeto, seu gerente lhe solicitou o desenvolvimento de um algoritmo iterativo para a resolução do sistema linear proposto pela ZYTZYTech. A seguir, temos a imagem da distribuição de temperatura no processador (Figura 2.9) e, ao lado, o sistema linear que devemos resolver.

Figura 2.9 | Processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta fase do projeto, podemos escolher o método de Jacobi ou o método de Gauss-Seidel; por simplicidade, escolhemos aqui o primeiro. Definida a técnica computacional, devemos estimar um valor inicial para o início das iterações. Uma boa estratégia nesse caso é utilizar as temperaturas do contorno para essa estimativa. Essencialmente, vamos assumir que a temperatura no interior do processador é uniforme e igual à média aritmética das temperaturas do contorno, assim temos:

$$\bar{T}^0 = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 20}{8} \Rightarrow \bar{T}^0 = 25$$

Iniciando o processo iterativo, temos $k = 0$.

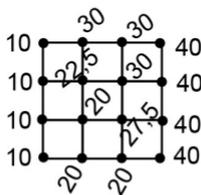
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - a_{14}x_4^0) \\ x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - a_{24}x_4^0) \\ x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0 - a_{34}x_4^0) \\ x_4^1 = \frac{1}{a_{44}}(b_4 - a_{41}x_1^0 - a_{42}x_2^0 - a_{43}x_3^0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \frac{1}{4}[40 + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 25 + 0 \cdot 25] \Rightarrow x_1^1 = 22,5 \\ x_2^1 = \frac{1}{4}[70 + 1 \cdot 25 + 0 \cdot (25) + 1 \cdot 25] \Rightarrow x_2^1 = 30 \\ x_3^1 = \frac{1}{4}[30 + 1 \cdot 25 + 0 \cdot (25) + 1 \cdot 25] \Rightarrow x_3^1 = 20 \\ x_4^1 = \frac{1}{4}[60 + 0 \cdot (25) + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 25] \Rightarrow x_4^1 = 27,5 \end{array} \right.$$

Considerando $k=1$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1 - a_{14}x_4^1) \\ x_2^2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^1 - a_{24}x_4^1) \\ x_3^2 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1 - a_{34}x_4^1) \\ x_4^2 = \frac{1}{a_{44}}(b_4 - a_{41}x_1^1 - a_{42}x_2^1 - a_{43}x_3^1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = \frac{1}{4}[40 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot 27,5] \Rightarrow x_1^2 = 22,5 \\ x_2^2 = \frac{1}{4}[70 + 1 \cdot 22,5 + 0 \cdot (30) + 1 \cdot 27,5] \Rightarrow x_2^2 = 30 \\ x_3^2 = \frac{1}{4}[30 + 1 \cdot 22,5 + 0 \cdot (30) + 1 \cdot 27,5] \Rightarrow x_3^2 = 20 \\ x_4^2 = \frac{1}{4}[60 + 0 \cdot (22,5) + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 20] \Rightarrow x_4^2 = 27,5 \end{array} \right.$$

Observamos que entre a primeira e segunda iteração não temos mais variação, ou seja, $|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k| = \mathbf{0}$, portanto obtemos solução para o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e, conseqüentemente, a distribuição de temperatura ao longo do processador. Essa rápida convergência que tivemos para o método se deve, principalmente, a dois fatores: o primeiro deles é a boa escolha para a aproximação inicial, e o segundo se deve ao critério de Sassenfeld, o qual além de nos garantir a convergência do problema, nos diz, a velocidade com que ela ocorre. Essencialmente, esse critério nos diz que, quanto mais diagonalmente dominante for a matriz, mais rápida é a convergência. Nesse caso, a diagonal principal é quatro vezes maior que os elementos da sua respectiva linha, portanto temos uma taxa de convergência alta, o que nos permitiu determinar facilmente a distribuição de temperatura no processador, a qual é dada por:

Figura 2.10 | Distribuição de temperatura no processador



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora que você tem tudo descrito, elabore o relatório requerido por seu gerente. Nele, inclua todas as ideias desenvolvidas nesta unidade acerca desse problema, sugira um método a ser utilizado e a resposta para os dados que foram fornecidos.

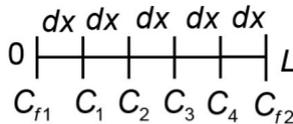
Avançando na prática

Problema difusivo-advectivo

Descrição da situação-problema

Os modelos difusivos-advectivos são de grande importância em diversas áreas do conhecimento, em especial na modelagem de problemas de dispersão de poluentes.

Figura 2.11 | Domínio da dispersão de poluentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma ferramenta bastante interessante nesse estudo é o método de diferenças finitas, que permite a obtenção do perfil de concentração ao longo de todo o domínio por meio da resolução do sistema linear a seguir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -(1-Pe/2) & 0 & 0 \\ -(1-Pe/2) & 2 & -(1-Pe/2) & 0 \\ 0 & -(1-Pe/2) & 2 & -(1-Pe/2) \\ 0 & 0 & -(1-Pe/2) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \cdot (dx)^2 + C_{f1} \cdot \left(1 - \frac{Pe}{2}\right) \\ q \\ q \\ q \cdot (dx)^2 + C_{f2} \cdot \left(1 - \frac{Pe}{2}\right) \end{pmatrix}$$

A fim de aplicar o método de Gauss-Seidel com 4 casas decimais e arredondamento na resolução do sistema linear, faça as seguintes considerações:

Parâmetros físicos:

- Difusividade: $\alpha = 1$
- Fonte de calor: $q = 1$
- Concentração na fronteira: $C_{f1} = 0, C_{f2} = 0$

- Concentração inicial: $\bar{C}^0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

Parâmetros de discretização:

- Velocidade: $v = 1$
- Malha: $dx = 1$
- $Pe = \frac{v \cdot dx}{\alpha}$

Suponha que você tenha sido contratado para uma consultoria na área de computação em que lhe incumbiram de implementar computacionalmente esse problema. Qual o passo a passo a ser seguido?

Resolução da situação-problema

Voltando com os dados anteriores no sistema linear dado, a seguinte igualdade é obtida:

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 2 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iniciando o processo iterativo, temos $k = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}C_2^0 - a_{13}C_3^0 - a_{14}C_4^0) \\ C_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}C_1^0 - a_{23}C_3^0 - a_{24}C_4^0) \\ C_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}C_1^0 - a_{32}C_2^0 - a_{34}C_4^0) \\ C_4^1 = \frac{1}{a_{44}}(b_4 - a_{41}C_1^0 - a_{42}C_2^0 - a_{43}C_3^0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1^1 = \frac{1}{2}[1 + 0,5 \cdot 0] \Rightarrow C_1^1 = 0,5000 \\ C_2^1 = \frac{1}{2}[1 + 0,500/2] \Rightarrow C_2^1 = 0,625 \\ C_3^1 = \frac{1}{2}[1 + 0,625/2] \Rightarrow C_3^1 = 0,6563 \\ C_4^1 = \frac{1}{2}[1 + 0,6563/2] \Rightarrow C_4^1 = 0,6641 \end{array} \right.$$

Procedendo iterativamente com o método de Gauss-Seidel, os seguintes resultados apresentados no Quadro 2.3 são obtidos. Nesse estudo, utilizamos como métrica a distância relativa entre duas aproximações consecutivas, sendo ela dada por:

$$d_r^{k+1} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |C_i^{k+1} - C_i^k|}{\max_{1 \leq i \leq n} |C_i^{k+1}|}$$

Quadro 2.3 | Resultados do método Gauss-Seidel de difusão-advecção

	El*	Passo					
k	0	1	2	3	4	5	6
C_1	0	0,5000	0,6563	0,7070	0,7238	0,7267	0,7272
C_2	0	0,6250	0,8281	0,8950	0,9068	0,9087	0,9090
C_3	0	0,6563	0,8730	0,9033	0,9081	0,9089	0,9091
C_4	0	0,6641	0,7183	0,7258	0,7270	0,7272	0,7273
d_r^k		1	0,2483	0,0741	0,0184	0,0032	0,0005

Fonte: elaborada pelo autor.

*Estimativa inicial (El)

A tabela anterior mostra cada uma das iterações realizadas pelo método de Gauss-Seidel e, também, a convergência do método, como pode ser observado na linha d_r^k , que mostra a distância diminuindo a cada iteração.

Faça valer a pena

1. O método de Gauss-Jacobi é um importante método iterativo para a resolução de sistemas lineares na forma $Ax = b$. Essencialmente, essa técnica converte o sistema linear original em um sistema do tipo $x^{k+1} = Cx^k + g$, sendo C e g dados a seguir. Pretende-se com isso generalizar a ideia do método do ponto fixo para a determinação de raízes. Nesse contexto, considere o sistema linear a seguir como parâmetro de entrada para o algoritmo seguinte.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

```

1 para  $i = 1, \dots, N$  faça
2     para  $j = 1, \dots, N$  faça
3         se  $i \neq j$  então
4              $A(i, j) = -A(i, j)/a_{i,i}$ ;
5         senão
6              $A(i, j) = 0$ ;
7         fim_se
8     fim_para
9      $b(i, 1) = b(i, 1)/a_{i,i}$ ;
10 Fim_para.
```

Avalie as afirmações que seguem.

I- Ao final da execução do algoritmo é obtida a matriz C para qualquer matriz A .

II- O algoritmo falha se $a_{i,i} = 0$ para algum $i = 1, \dots, N$.

III- Se $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$, o algoritmo zera a diagonal principal da matriz A .

IV- Se $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$, o vetor g é obtido ao final da execução.

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

- Apenas a afirmação I está correta.
- Apenas as afirmações I e II estão corretas.
- Apenas as afirmações II e III estão corretas.
- Apenas as afirmações I, II e IV estão corretas.
- Apenas as afirmações II, III e IV estão corretas.

2. Faça cinco iterações do método de Jacobi para o sistema linear $Ax = b$ dado a seguir. Em suas aproximações, utilize 4 casas decimais. Além disso, faça as seguintes considerações:

• Aproximação inicial $x^0 = (-0,3 \ 0,1 \ 0,4)$.

$$d^k = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k|}$$

• soma = $x_1^k + x_2^k + x_3^k$, sendo k o número da iteração.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Agora, assinale a alternativa correta.

a) Ao final da iteração 1: $0,1500 \leq \text{soma} \leq 0,200$ e $0,1 \leq d^1 \leq 0,2$

b) Ao final da iteração 2: $0,1500 \leq \text{soma} \leq 0,1700$ e $0,05 \leq d^2 \leq 0,08$

c) Ao final da iteração 3: $0,2000 \leq \text{soma} \leq 0,3000$ e $0,03 \leq d^3 \leq 0,05$

d) Ao final da iteração 4: $0,1000 \leq \text{soma} \leq 0,2000$ e $0,1500 \leq d^4 \leq 0,2000$

e) Ao final da iteração 5: $0,1000 \leq \text{soma} \leq 0,1500$ e $0,01 \leq d^5 \leq 0,03$

3. Faça cinco iterações do método de Gauss-Seidel para o sistema linear $Ax = b$ dado a seguir. Em suas aproximações, utilize 4 casas decimais. Além disso, faça as seguintes considerações:

• Aproximação inicial $x^0 = (0 \ 0 \ 0)$.

$$\bullet d^k = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k|}.$$

$$\bullet \text{soma} = x_1^k + x_2^k + x_3^k.$$

Sendo k o número da iteração.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora, assinale a alternativa CORRETA:

a) Ao final da iteração 1: $0,3000 \leq \text{soma} \leq 0,3500$ e $0,1300 \leq d^1 \leq 0,1900$

b) Ao final da iteração 2: $0,3500 \leq \text{soma} \leq 0,3800$ e $0,1500 \leq d^1 \leq 0,1800$

c) Ao final da iteração 3: $0,3600 \leq \text{soma} \leq 0,4200$ e $0,0000 \leq d^3 \leq 0,1000$

d) Ao final da iteração 3: $0,4200 \leq \text{soma} \leq 0,4700$ e $0,1000 \leq d^4 \leq 0,1500$

e) Ao final da iteração 3: $0,4700 \leq \text{soma} \leq 0,5200$ e $0,0001 \leq d^5 \leq 0,0010$

Referências

- ARENALES, Selma Helena de Vasconcelos; DAREZZO, Artur. **Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software**. São Paulo: Thomson Learning, 2008. 364 p.
- BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 721 p.
- CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. f. **Álgebra Linear e Aplicações**. 4. ed. São Paulo: Editora Atual, 1983.
- CHAPRA, Stven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2008.
- CALCULADORA de sistemas de ecuaciones. **Symbolab**, 2017. Disponível em: <<https://es.symbolab.com/solver/system-of-equations-calculator>>. Acesso em: 12 jun. 2017.
- FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 505 p.
- MÉTODO de eliminação de Gauss com pivotagem parcial: pequeno exemplo. 19 nov. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JVfGLbiZl8w>>. Acesso em: 25 maio 2017.
- RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2005. 405 p.
- SOUZA, Leandro Franco de. **Métodos das Diferenças Finitas**. São Carlos, [s.d.]. Disponível em: <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/lefraso/disc/dia03.pdf>>. Acesso em: 29 abr. 2017.
- SOUZA, Marcone Jamilson Freitas. **Sistemas Lineares**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011. Notas de aula (Métodos Numéricos).

Interpolação

Convite ao estudo

Na Unidade 1, supusemos que você era funcionário da YXZZKX, empresa produtora de silicone industrial. Naquela ocasião, foi utilizado um software capaz de gerar modelos matemáticos que relacionavam a quantidade de silicone produzida (QS) e o lucro (L) obtido com a venda do material. Você teve como base para isso uma tabela de valores em que, numa coluna, estavam dispostas as quantidades produzidas, em toneladas, e noutra coluna, o lucro obtido, em milhões de reais. A função obtida para aquela tabela foi $L = \ln(QS + 1) / 10^6 + 4QS^2 / 10^6 - QS / 10^5$, modelo esse que funcionou bem por determinado período.

Vamos novamente supor que você trabalha para a YXZZKX e que seu gerente recentemente lhe comunicou que o modelo criado não está mais prevendo corretamente o lucro com base na quantidade produzida. Ele encaminhou para você a Tabela 3.1, contendo os valores constatados recentemente na linha de produção, e encomendou que seja modelada outra função que faça a relação entre as duas variáveis.

Tabela 3.1 | Dados de quantidade de silicone e respectivo lucro

QS (toneladas)	L (milhões de reais)
600	1,43
800	2,55
1000	2,71
1300	2,61

Fonte: elaborada pela autora.

Infelizmente, expirou a licença do software que você utilizava para realizar o ajuste de curvas. Agora, você terá que propor metodologias para obter uma equação que faz a relação

adequada entre as variáveis quantidade produzida e lucro. Considere que, em uma breve pesquisa, você descobriu o conceito de Interpolação Polinomial, que parece ser adequado para determinar a função desejada a partir dos dados tabelados.

Tendo em vista esse novo desafio, você precisa atender a demanda seguindo os passos na sequência desta unidade de estudos. Na Seção 1, identificar os procedimentos necessários para obter um polinômio de grau adequado para modelar o lucro em função da quantidade de silicone produzida e determinar o lucro obtido com a produção e venda de 1200 toneladas. Para não se prender a uma única metodologia, na Seção 2, propor a determinação do polinômio pelo método de Newton utilizando diferenças divididas, o qual também fora detectado por você em suas pesquisas iniciais. Na Seção 3, para deixar o leque de possibilidades ainda mais aberto, utilizar *spline* cúbica interpolante sobre os pontos da Tabela 3.1. Conseqüentemente, você deve elaborar os algoritmos computacionais para cada caso, possibilitando à empresa escolher um entre os vários métodos sugeridos.

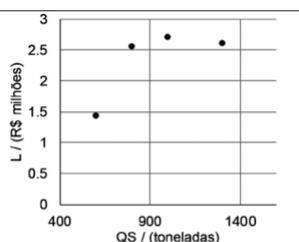
Seção 3.1

Interpolação polinomial

Diálogo aberto

A partir de uma determinada produção, o gerente da YXZZKX notou que o mercado é incapaz de absorver o excedente de silicone produzido, e com isso o lucro (L) decresceu, diferentemente da situação que tínhamos anteriormente na Unidade 1, na qual a curva do lucro era predominantemente crescente conforme a produção de silicone aumentava. Assim, o coordenador de produção lhe forneceu quatro pares de dados, dispostos na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Dados de quantidade de silicone em função do lucro



Fonte: elaborada pela autora.

Você terá que realizar a interpolação polinomial sobre os pontos contidos na Figura 3.1 e, aproveitando da equação obtida, responder ao questionamento do gerente com relação ao lucro obtido quando forem produzidas 1200 toneladas de silicone. Como seria possível obter o polinômio interpolador a partir das informações que lhe foram fornecidas? À primeira vista, os pares (QS, L) não têm comportamento linear, tampouco aspectos de uma função de segundo grau. Contudo, um polinômio de grau 3 parece ser adequado ao questionamento que lhe foi feito. Por isso, determine os passos requeridos na interpolação polinomial pelo método de Lagrange e o sistema linear para determinar os coeficientes de $L = a_0 + a_1QS + a_2QS^2 + a_3QS^3$. Além disso, verifique se de fato os polinômios obtidos representam fidedignamente os nós utilizados e quais modificações teriam que ser realizadas para utilizar os algoritmos já vistos para a resolução de sistemas lineares aplicados à interpolação.

Não pode faltar

Conceito de interpolação

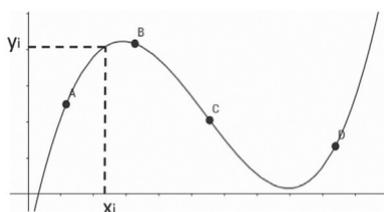
Nos cálculos das mais variadas áreas do conhecimento, nós nos deparamos com as seguintes situações:

- Conhecemos o valor numérico em determinados pontos (x_0, x_1, x_2, \dots) com os respectivos (y_0, y_1, y_2, \dots) , mas desconhecemos a função que os relaciona.
- $f(x)$ é difícil de ser manipulada, seja para cálculo de derivada, zero de função ou integral.

Para solucionarmos essas três possibilidades, podemos utilizar métodos de interpolação trigonométrica, exponencial, logarítmica e polinomial. Devido à facilidade de trabalharmos matematicamente com polinômios, nosso foco de estudo será sobre a interpolação polinomial.

A Figura 3.2 ilustra um exemplo em que são conhecidas as coordenadas dos pontos A, B, C e D sobre os quais se aplicou um método para a obtenção do polinômio interpolador, que está representado pela curva cheia, e a partir desse seremos capazes de determinar o valor da variável y_i conhecendo-se x_i .

Figura 3.2 | Ilustração de polinômio interpolador sobre pontos conhecidos



Fonte: adaptada de GeoGebra (2017).

Assim, necessitamos definir terminologias comumente empregadas quando se trabalha com polinômios, as quais estão enunciadas a seguir.



Assimile

- Polinômio de uma variável é uma série de termos escrita por: $a_n x^n$, sendo: "a" coeficiente; "x" variável independente; "n" expoente natural, isto é:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

- Grau: expoente "n" mais alto entre as variáveis de seus termos não nulos.
- Valor numérico: valor resultante da equação ao se estipular um valor para a variável.

Assim, para o caso em que $p(x) = 2x^4 + 3x - 1$, estamos diante de um polinômio de 4º, grau cujo valor numérico para $x=1$ é calculado por $p(1) = 2(1)^4 + 3(1) - 1$, que resulta em 4.

Neste momento, podemos nos questionar se toda função pode ser escrita na forma de um polinômio. Segundo o teorema de Weierstrass, "Toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio" (FRANCO, 2007, p. 287). É claro que, com aplicação da técnica de interpolação, podemos perder precisão dos valores da função original. A seguir, definiremos algumas metodologias para a determinação do polinômio interpolador.

Sistema linear gerado pela interpolação

A interpolação polinomial é a determinação de um polinômio a partir de valores conhecidos em certos pontos, denominados nós de interpolação, ou seja, desejamos obter um polinômio de grau no máximo n , P_n , para os $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ com os respectivos $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Resumidamente, teremos: $P_n(x_0) = y_0$, $P_n(x_1) = y_1$, ..., $P_n(x_n) = y_n$.

Tabela 3.2 | Pares ordenados (x, f(x))

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$

Fonte: elaborada pela autora.

a_i , $0 \leq i \leq n$, tal que as igualdades seguintes sejam satisfeitas:

$$a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = f(x_0) = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = f(x_1) = y_1$$

\vdots

$$a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = f(x_n) = y_n$$

Se observamos, estamos diante da resolução de um sistema linear de ordem n , cujas incógnitas são a_i . Escrevendo no formato $Ax = b$, como definido na Unidade 2:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = f(x_0) = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = f(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = f(x_n) = y_n \end{cases} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad x = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_0)^T \text{ e}$$

$b = (y_0 \ y_1 \ \dots \ y_n)^T$, cuja solução pode ser obtida pelos métodos de resolução de sistema linear, como a eliminação de Gauss, para o qual, inclusive, já definimos um algoritmo.

A matriz A é denominada por matriz de Vandermonde, cujo determinante, $\det(A)$, é expresso por: $\det(A) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$
 $= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_{n-1} - x_n)$, como x_i são distintos,

$\det(A) \neq 0$, ou seja, o sistema linear possui uma única solução e, portanto, os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n do polinômio são únicos, o que significa que se obtém apenas um polinômio de grau n para os $n + 1$ pontos conhecidos.



Em um experimento, foram coletados os seguintes pares ordenados: $(-1,4)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$. Como procederíamos realizar uma interpolação polinomial utilizando esses três pontos? Qual seria o grau do polinômio a ser obtido? Verifique se o polinômio interpolador obtido reproduz os pontos conhecidos.

Para respondermos a esses questionamentos, verificamos que são conhecidos três pontos distintos: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, com as respectivas ordenadas: $y_0 = 4$, $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$.

Diante disso, podemos escrever um polinômio de grau, no máximo, 2, ou seja, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Aplicando o método de sistema linear para determinarmos a_2 , a_1 e a_0 ,

$$\text{temos: } \begin{cases} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

A matriz de Vandermonde para três pontos é: $A = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$, que

para o exemplo recai em: $A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x = (a_2 \ a_1 \ a_0)^T$ e $b = (4 \ 1 \ -1)^T$.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} (-1)^2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \text{O sistema linear}$$

gerado pode ser resolvido facilmente, pois a partir da segunda linha da matriz já determinamos o valor de a_0 efetuando o cálculo: $0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 1$, logo $a_0 = 1$. Para a primeira linha, temos que: $1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 4$, substituindo o valor encontrado para a_0 : $a_2 - a_1 + 1 \cdot 1 = 4$, ou seja, $a_2 = 3 + a_1$. Por último, a terceira linha corresponde a: $4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -1$, substituindo o valor de a_0 e a expressão de a_2 : $4 \cdot (3 + a_1) + 2 \cdot a_1 + 1 \cdot 1 = -1$, assim $a_1 = -2,333$ e $a_2 = 0,667$. Se resolvéssemos pelo método de eliminação de Gauss descrito na Unidade 2, teríamos uma inconsistência

– verifique que seria obtido o multiplicador $m_{32} = 6/0$, que não é definido.

Dessa forma, o polinômio obtido é: $p(x) = 0,667x^2 - 2,333x + 1$.

Sobre os pontos dados, verificaremos se de fato o polinômio interpolador é capaz de reproduzi-los com exatidão:

$$p(-1) = 0,667(-1)^2 - 2,333(-1) + 1 = 4.$$

$$p(0) = 0,667(0)^2 - 2,333(0) + 1 = 1 \text{ e}$$

$p(2) = 0,667(2)^2 - 2,333(2) + 1 = -0,992$. Observamos que $p(2)$, igual a -0,992, difere de y_2 , igual a -1, pois tivemos que usar o arredondamento. Assim, se tivéssemos obtido apenas valores exatos, os pontos conhecidos seriam exatamente iguais aos encontrados pelo polinômio.

Como vimos, para $n + 1$ pontos obteremos por interpolação polinomial um polinômio de grau n . Mas um ajuste feito com um polinômio de grau elevado pode ocasionar imprecisão na determinação de pontos que não foram utilizados nos cálculos para a determinação dos coeficientes da equação, produzindo, assim, uma curva não condizente com a realidade. Desse modo, comumente, trabalharemos com um grau pequeno do polinômio, por isso os métodos iterativos para a resolução de sistema linear não são recomendados para os cálculos de interpolação. Mais ainda, ocorre que, em diversas situações, poderemos ter problemas com convergência dos métodos iterativos, mesmo para poucos dados, como é o caso em que temos os pontos (1,0), (2,1), (3,4), cujo sistema é:

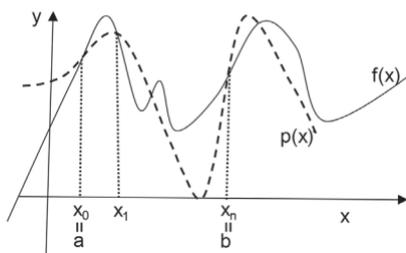
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = (a_2 \ a_1 \ a_0)^T \text{ e } b = (0 \ 1 \ 4)^T.$$

Ao aplicarmos o método de Gauss-Jacobi para uma estimativa inicial (0,0,0) ou (1,1,1) e iteração máxima de 100, o método divergirá, ao passo que, se aplicarmos o método de eliminação de Gauss, garantiremos como solução $a_2 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_0 = 1$.

Erro na interpolação

Conforme discutido no primeiro item desta seção, podemos ter uma situação em que desejamos substituir uma função $f(x)$ por um polinômio, como exemplificado na Figura 3.3, em que $p(x)$ é o polinômio representado pela curva pontilhada para facilitar diversos cálculos.

Figura 3.3 | Representação genérica de $f(x)$ por $p(x)$



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, caso seja necessário determinar o valor da função em um ponto não utilizado para descrever o polinômio entre x_0 e x_n , estaríamos cometendo erro, cujo limitante é definido por:

$$|f(x) - p_n(f; x)| \leq \frac{|x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n + 1)!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

que reflete a precisão do polinômio gerado, e as nomenclaturas são definidas por:

- $(n + 1)!$ é o fatorial de $(n + 1)$.
- $f^{(n+1)}(x)$ corresponde à derivada de ordem $n+1$.
- $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ é o valor máximo da derivada da função de ordem $n+1$ definida em $[a, b]$.



Exemplificando

Suponha que desejamos obter $f(3,75)$ para a função $\ln(x)$ que passa pelos pontos: (1; 0), (2; 0,6931), (3; 1,0986), (4; 1,3863) através de um polinômio de primeiro grau. Qual será o limite superior para o erro cometido? Utilizaremos 4 casas decimais e regra de arredondamento.

Primeiramente, devemos observar que se deseja obter um polinômio de grau 1. Utilizaremos os pares ordenados (3; 1,0986) e (4; 1,3863) pelo

fato de que se deseja avaliar o valor da função em $x=3,7$ e, para isso, precisamos de dois pontos que contenham o valor de x mais próximos do desejado, no caso [3; 4]. Como $n=1$, determinaremos a derivada segunda da função para estimar $\max_{3 \leq x \leq 4} |f^{(2)}(x)|$, assim $f'(x) = 1/x$ e $f''(x) = -1/x^2$, como a derivada segunda é inversamente proporcional ao valor de x , temos que o valor máximo que essa função admite para o intervalo analisado, $\max_{3 \leq x \leq 4} |-1/x^2|$, é no ponto $x=3$, ou seja, $\max_{3 \leq x \leq 4} |-1/x^2| = 1/9 = 0,1111$.

Podemos, agora, estimar o limite superior para o erro:

$$f(x) - p_1(f; x) \leq \frac{|x - x_0||x - x_1|}{(1+1)!} \max_{3 \leq x \leq 4} |f^{(2)}(x)|$$

aplicado sobre o ponto desejado, $x=3,75$, temos:

$$f(3,75) - p_1(f; 3,75) \leq \frac{|3,75 - 3||3,75 - 4|}{(1+1)!} \cdot 0,1111 = 0,0104.$$

De fato, se calcularmos $f(3,75)$, teremos 1,3218, e $p(3,75)$ corresponde a 1,3144. Então,

$$f(3,75) - p_1(f; 3,75) = 1,3218 - 1,3144 = 0,0074.$$

Fórmula de Lagrange

Outro modo de determinarmos o polinômio interpolador de grau n é a partir da fórmula de Lagrange, que requer $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, isto é, $n + 1$ pontos distintos e a determinação de funções L_k , com $k = 0, 1, \dots, n$, o que resulta em $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$. Os L_k são funções polinomiais, tais que:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

$$\text{com } L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}.$$



Exemplificando

Sobre os pares ordenados $(-1,4)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$, propomos determinar o polinômio interpolador pelo método de Lagrange.

Como estamos diante de 3 pontos, podemos obter um polinômio de grau 2 e, para isso, necessitamos das funções L_0 , L_1 e L_2 por:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2} = \frac{-x^2 + x + 2}{2}$$

$$\text{e } L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}. \quad \text{Assim,}$$

substituiremos em: $p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$ com as respectivas ordenadas, de tal sorte que:

$$p_2(x) = 4 \frac{x^2 - 2x}{3} + 1 \frac{-x^2 + x + 2}{2} + (-1) \frac{x^2 + x}{6}, \text{ agrupando os}$$

termos: $p_2(x) = 2/3x^2 - 7/3x + 1$.

Podemos checar se de fato o polinômio obtido passa pelos pontos utilizados em nossos cálculos: $p_2(-1) = 2/3(-1)^2 - 7/3(-1) + 1$, $p_2(-1) = 4$, que é o próprio y_0 .



Refleta

Suponha que, a partir da fórmula de Lagrange, determinamos um polinômio a partir de 3 pontos. Caso fosse inserido um par ordenado, poderíamos reaproveitar as funções polinomiais L_k ou teríamos que recalculá-las?

O algoritmo para determinação de $p_n(\bar{x})$ pelo método de Lagrange pode ser escrito por:

01 // Linhas 04 a 07: declaração das variáveis

02 // Linhas 08 a 10: leitura dos dados fornecidos pelo usuário

03 // Entre as linhas 11 e 20 serão calculadas as funções polinomiais de Lagrange para na linha 21 ter a saída do código, que é o polinômio de Lagrange

```

04 // INTEIRO i, j, n
05 // REAL p, q, x
06 // REAL VET = VETOR[n+1, 1] // VET= vetor dos termos
independentes
07 // REAL DEP = VETOR1[n+1,1] // DEP= vetor dos termos
dependentes
08 // LEIA (VET)
09 // LEIA (DEP)
10 // LEIA n // n é o número de pontos menos 1
11 // q=0
12 // para i de 0 a n faça
13 //   p=1
14 //     para j de 0 a n faça
15 //       se  $j \neq i$  então
16 //          $p = p(x - VET[j,1]) / (VET[i,1] - VET[j,1])$ 
17 //       fim-se
18 //     fim-para
19 //    $q = q + p \cdot DEP[i,1]$ 
20 // fim-para
21 // IMPRIMA q // A saída é o polinômio interpolador
de Lagrange

```



Pesquise mais

Diante de dados coletados, por exemplo, distribuição de contaminantes numa praia em função da maré, podemos correlacionar essas grandezas (concentração de contaminante e direção da maré) a partir de um polinômio que passa em todos os pontos listados através da interpolação polinomial, ou obter uma equação que representa a maioria dessas informações por técnica de regressão. Assim, é importante conhecermos a distinção dessas duas ferramentas matemáticas. Confira-as no link indicado.

Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/nepomuceno/mn/13MN_AC1.pdf>. Acesso em: 4 jun. 2017.

No Excel, podemos gerar linha de tendências do tipo exponencial, linear, logarítmica, polinomial, potência e média móvel. Consulte o link indicado para maiores detalhamentos.

Disponível em: <<https://support.office.com/pt-br/article/Adicionar-uma-tend%C3%Aancia-ou-linha-m%C3%A9dia-a-um-gr%C3%A1fico-3c4323b1-e377-43b9-b54b-fae160d97965>>. Acesso em: 4 jul. 2017.

Sem medo de errar

Vamos relembrar a nossa situação-problema, pois necessitamos determinar um polinômio interpolador que relacione o lucro com a quantidade de silicone produzida e estimar a quantidade de silicone e o valor para $L(1200)$, sendo fornecidas as informações da Tabela 3.3. Para facilitar, denotaremos a quantidade de silicone por x e o lucro por y .

Tabela 3.3 | Dados de quantidade de silicone e respectivo lucro

i	x_i	y_i
0	600	1,43
1	800	2,55
2	1000	2,71
3	1300	2,61

Fonte: elaborada pela autora.

Sobre os dados fornecidos para essas variáveis, podemos determinar as funções polinomiais de Lagrange, cujo resultado é:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 800)(x - 1000)(x - 1300)}{(600 - 800)(600 - 1000)(600 - 1300)};$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 600)(x - 1000)(x - 1300)}{(800 - 600)(800 - 1000)(800 - 1300)};$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 600)(x - 800)(x - 1300)}{(1000 - 600)(1000 - 800)(1000 - 1300)};$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 600)(x - 800)(x - 1000)}{(1300 - 600)(1300 - 800)(1300 - 1000)}.$$

Assim, o polinômio obtido é:

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= 1,43 \frac{(x-800)(x-1000)(x-1300)}{(600-800)(600-1000)(600-1300)} \\
 &+ 2,55 \frac{(x-600)(x-1000)(x-1300)}{(800-600)(800-1000)(800-1300)} \\
 &+ 2,71 \frac{(x-600)(x-800)(x-1300)}{(1000-600)(1000-800)(1000-1300)} \\
 &+ 2,61 \frac{(x-600)(x-800)(x-1000)}{(1300-600)(1300-800)(1300-1000)}.
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos de mesma potência, temos:

$$p_3(x) = -14,3642857143 + 0,0485409524x - 0,0000453714x^2 - 0,0000000139x^3.$$

Como se deseja determinar o lucro para uma demanda de 1200 toneladas, basta fazermos $x=1200$ na expressão encontrada:

$p_3(1200) = -14,3642857143 + 0,0485409524(1200) - 0,0000453714(1200)^2 - 0,0000000139(1200)^3$, que resulta em R\$ 2,5774285714 milhões. Adotamos 10 casas decimais para obtermos exatamente os 4 pares de valores utilizados na interpolação.

A seguir, são apresentados os passos se tivéssemos empregado o método de sistema linear com matriz de Vandermonde e eliminação de Gauss para obter o polinômio interpolador.

Matriz de Vandermonde:

$$\begin{pmatrix}
 600^3 & 600^2 & 600 & 1 & 1,43 \\
 800^3 & 800^2 & 800 & 1 & 2,55 \\
 1000^3 & 1000^2 & 1000 & 1 & 2,71 \\
 1300^3 & 1300^2 & 1300 & 1 & 2,61
 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
 600^3 & 600^2 & 600 & 1 & 1,43 \\
 0 & -213333,33333333330 & -622,2222222222 & -1,3703703704 & -0,8396296296 \\
 0 & -666666,66666666670 & -1777,7777777778 & -3,6296296296 & -3,9103703704 \\
 0 & -1971666,66666666700 & -4802,7777777778 & -9,1712962963 & -11,9349537037
 \end{array} \right)$$

Passo 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
 600^3 & 600^2 & 600 & 1 & 1,43 \\
 0 & -213333,33333333330 & -622,2222222222 & -1,3703703704 & -0,8396296296 \\
 0 & 0 & 166,6666666667 & 0,6527777778 & -1,2865277778 \\
 0 & 0 & 947,9166666667 & 3,4939236111 & -4,1749392361
 \end{array} \right)$$

Passo 3:

$$\begin{pmatrix} 600^3 & 600^2 & 600 & 1 & 1,43 \\ 0 & -213333,33333333330 & -622,2222222222 & -1,3703703704 & -0,8396296296 \\ 0 & 0 & 166,6666666667 & 0,6527777778 & -1,2865277778 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2187500000 & 3,1421875000 \end{pmatrix}$$

Os multiplicadores para cada etapa encontram-se na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 | Multiplicadores do sistema linear da YXZZKX

Passo 1	Passo 2	Passo 3
$m_{21} = 2,3703703704$	$m_{32} = 3,1250000000$	$m_{43} = 5,6875000000$
$m_{31} = 4,6296296296$	$m_{42} = 9,2421875000$	
$m_{41} = 10,1712962963$		

Fonte: elaborada pela autora.

Os coeficientes do polinômio interpolador \mathbf{a}_i , $i=0, 1, 2$ e 3 , são encontrados resolvendo o passo 3 de baixo para cima, tendo como resultado o mesmo polinômio obtido por Lagrange. Assim, as duas metodologias resultaram na mesma equação e obtenção de $L(1200)$. Se fosse utilizado o algoritmo de resolução de sistema linear por eliminação de Gauss proposto na Unidade 2, teríamos que entrar como matriz dos coeficientes os valores das quantidades de silicone e como termo independente os valores dos lucros. Visto que o primeiro desafio foi cumprido, registre esses resultados para compor o relatório que será entregue ao seu gerente.

Avançando na prática

Estimativa de demanda energética

Descrição da situação-problema

A distribuição de demanda energética em MegaWatts (MW) de um país em função do horário local foi obtida pela companhia Eletrecix para 4 períodos distintos, conforme mostra a Tabela 3.5:

Tabela 3.5 | Demanda energética por Eletrecix

Horário / [h]	2	3	4	5
Demanda / [MW]	17,7	16,4	13,6	18,3

Fonte: elaborada pela autora.

Com essas informações, deseja-se saber a quantidade de energia que está sendo consumida quando a hora local é 3,5.

Resolução da situação-problema

A estimativa da quantidade de energia consumida às 3,5 horas requer, essencialmente, a definição de uma função de interpolação que descreve a demanda energética em função do tempo. Como um polinômio é facilmente manipulado, escolheremos esse tipo de equação para responder ao questionamento, cuja determinação será pelo método de Lagrange, de tal modo que, com os 4 pontos e dados, obteremos um polinômio de grau 3. As funções L_0 , L_1 , L_2 e L_3 são obtidas fazendo os seguintes cálculos:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(2 - 3)(2 - 4)(2 - 5)} =$$

$$\frac{(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{-6} = L_0 = \frac{x^3 - 12x^2 + 47x - 60}{-6},$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 5)}{(3 - 2)(3 - 4)(3 - 5)} =$$

$$\frac{(x - 2)(x - 4)(x - 5)}{2} = L_1 = \frac{x^3 - 11x^2 + 38x - 40}{2},$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{(4 - 2)(4 - 3)(4 - 5)} =$$

$$\frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{-2} = L_2 = \frac{-x^3 + 10x^2 - 31x + 30}{2},$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4)} =$$

$$\frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{6} = L_3 = \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{6}.$$

Assim, substituiremos em:

$$p_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x), \text{ o que resulta}$$

em:

$$p_3(x) = 17,7 \left(\frac{x^3 - 12x^2 + 47x - 60}{-6} \right) + 16,4 \left(\frac{x^3 - 11x^2 + 38x - 40}{2} \right) +$$

$$13,6 \left(\frac{-x^3 + 10x^2 - 31x + 30}{2} \right) + 18,3 \left(\frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{6} \right).$$

Podemos agrupar os termos na expressão final para o polinômio: $p_3(x) = 1,5x^3 - 14,25x^2 + 41,45x - 20,20$. Agora, podemos determinar a demanda energética para 3,5 horas, fazendo: $p_3(3,5) = 1,5(3,5)^3 - 14,25(3,5)^2 + 41,45(3,5) - 20,20$, que corresponde a 14,63 MW.

Faça valer a pena

1. A partir dos pontos (-1,15), (0,8), (3,-1) podemos determinar um polinômio pelo método de resolução de sistemas lineares. Baseado nisso, julgue os itens:

I. O polinômio determinado é uma equação de segundo grau na forma $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

II. O valor para a soma dos coeficientes do polinômio $a_0 + a_1$ corresponde a 2.

III. O valor para o quadrado do coeficiente a_1 corresponde a 36.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas o item I está correto.
- b) Apenas os itens I e II estão corretos.
- c) Apenas os itens I e III estão corretos.
- d) Apenas os itens II e III estão corretos.
- e) Os itens I, II e III estão corretos.

2. Utilizando os pontos (0,2; 1,8221), (0,3; 2,4596) e (0,4; 3,3201) e determinação do polinômio interpolador por Lagrange, com regra de arredondamento e 4 casas decimais, marque os itens a seguir com V, caso sejam verdadeiros, ou F, se falsos.

() O valor para $f(0,25)$ corresponde a 0,5143.

() O valor para o polinômio L_0 é $\frac{x^2 - 0,7x + 0,12}{0,02}$.

() O valor para o produto de todos os coeficientes do polinômio é -4,8615.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) F, V, V.
- b) F, F, V.
- c) V, V, F.
- d) F, V, F.
- e) V, F, F.

3. Dados de tamanho de uma população microbiana (N), milímetros, em função da concentração de substrato (C), partes por milhão, foram obtidos em um experimento e apresentados na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 | População microbiana em função da concentração de substrato

N / (mm)	1	1,2	1,4	1,6
C / (ppm)	2,718	3,32	4,055	4,953

Fonte: elaborada pela autora.

A partir das informações fornecidas, assinale a alternativa que apresenta a concentração de substrato quando a população é 1,45 mm. Utilize um polinômio de grau 3 obtido por Lagrange e 3 casas decimais.

- a) 4,263 ppm.
- b) 4,152 ppm.
- c) 4,651 ppm.
- d) 4,294 ppm.
- e) 4,317 ppm.

Seção 3.2

Forma de Newton

Diálogo aberto

O seu gerente achou interessante as duas metodologias apresentadas para a determinação de um polinômio interpolador de grau 3 sobre as quatro informações fornecidas a você referentes à quantidade de silicone produzida (QS) com o respectivo lucro (L), ou seja, (600; 1,43), (800; 2,55), (1000; 2,71), (1300; 2,61). Afinal, um polinômio é uma equação facilmente diferenciável, o que facilitou a determinação da quantidade de silicone que maximiza o lucro da YXZZKX.

Entretanto, o gerente analisou com certa parcimônia o método de resolução de sistemas lineares da matriz de Vandermonde e ponderou que foi requerida uma quantidade considerável de operações aritméticas. Ele continuou refletindo a respeito do efeito ao inserir um dado (QS, L) sobre a interpolação de Lagrange, apontando que essa adição promove a reconstrução de todos os interpoladores de Lagrange, o que é inviável para a YXZZKX, pois a produção depende do mercado e, assim, a quantidade de silicone oscila consideravelmente.

Assim, você precisa se esforçar para mostrar ao gerente quais os passos que consistem na obtenção do polinômio interpolador na forma de Newton e que, se fosse necessário acrescentar dados a mais na tabela de quantidade de silicone e lucro, isso não prejudicaria os cálculos já realizados. Diante dessas vantagens para a nova metodologia, você necessita responder aos seguintes questionamentos: qual seria o valor para os coeficientes do polinômio de grau 3 utilizando o conjunto de pontos já conhecidos? O valor de $L(1200)$ será análogo ao já obtido pelo método de Lagrange?

Não pode faltar

Na Seção 3.1, vimos um caso particular de problemas relacionados à interpolação, denominado interpolação polinomial. Em resumo, foram apresentadas ferramentas matemáticas para obter um polinômio interpolador $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ a partir de $n+1$

valores $(x_i, f(x_i))$, com $i = 0, 1, 2, \dots, n$, seja para aproximar uma função complexa e, assim, facilitar o cálculo de derivada e integral, por exemplo, seja para calcular o valor da função num ponto não tabelado. Para isso, os coeficientes a_i foram determinados por duas metodologias: resolução de sistemas lineares obtidos pela matriz de Vandermonde e fórmula de Lagrange, as quais apresentam inconvenientes, pois erros devido ao arredondamento nas etapas de resolução do sistema podem comprometer a determinação de pontos intermediários ou até mesmo dos valores nodais, e como os polinômios de Lagrange estão associados a um conjunto de nós, uma mudança de posição, ou do número deles, modifica esses polinômios. A partir disso, apresentaremos a fórmula de Newton, que é uma alternativa para determinar o polinômio interpolador a partir de diferenças divididas.

Fórmula de Newton para o polinômio interpolador

Partiremos nossos estudos pela equação geral de Newton para polinômio interpolador de grau n .



Assimile

A equação geral de Newton para o polinômio interpolador de grau n é definida por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + \dots + a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

em que $c_j, j = 1, 2, \dots, n$ são denominados centros do polinômio.

Como a intenção é utilizar dados de $(x_i, f(x_i))$ para obter o polinômio interpolador, assumiremos os nós x_0, x_1, \dots, x_n como os centros do polinômio, o que resulta em:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Observamos que, para conhecer $p_n(x)$, polinômio interpolador nos nós x_0, x_1, \dots, x_n dos valores nodais y_0, y_1, \dots, y_n , se requer a determinação dos coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, de tal modo que seja satisfeito: $p_n(x_0) = y_0, p_n(x_1) = y_1, \dots, p_n(x_n) = y_n$, ou $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. Para isso, faremos os procedimentos descritos na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 | Passos para determinação dos coeficientes do polinômio interpolador de Newton

$x = x_0$	$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0)$
$x = x_1$	$p_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$ ou $a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0}$ ou $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
$x = x_2$	$p_n(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ ou $a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$
\vdots	\vdots
$x = x_n$	$a_n = \frac{f(x_n) - a_0 - a_1(x_n - x_0) - a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots - a_{n-1}(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$

Fonte: adaptada de Franco (2007, p. 308).

Assim, observamos que os coeficientes a_i são dependentes somente dos nós (x_0, x_1, \dots, x_n) e dos valores nodais y_0, y_1, \dots, y_n , ou seja, $a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, em que $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é a diferença dividida de ordem n na função $f(x)$ sobre os pontos x_0, x_1, \dots, x_n . A partir dessa explanação, definimos:

- $f[x_0] = f[x_0]$.
- Diferença dividida de ordem 1: $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$.

- Diferença dividida de ordem 2:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- Diferença dividida de ordem 3:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}, \quad \text{e assim}$$

sucessivamente, até que a única n -ésima diferença dividida

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{seja}$$

calculada.

Observe que os colchetes indicam os valores das funções calculados através das diferenças divididas. Assim, o coeficiente a_2 , na Tabela 3.7, é análogo à diferença dividida

$$f[x_0, x_1, x_2], \quad \text{ou seja:} \quad a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0};$$

demais coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Um artifício empregado para facilitar o cálculo das diferenças divididas é a esquematização em tabela, conforme é mostrado no subitem que se segue.

Tabela de diferenças divididas

Para elaborarmos a tabela de diferenças divididas, precisamos localizar todos os valores que dispomos de x_i na primeira coluna e $f(x_i)$ na segunda coluna. Na terceira coluna, apresentaremos as diferenças divididas de ordem 1, $f[x_i, x_j]$; na quarta coluna, escreveremos os resultados das diferenças divididas de ordem 2, $f[x_i, x_j, x_k]$. Inseriremos um número de colunas até que, para $n + 1$ pontos, a diferença dividida seja de ordem n , sendo que, conforme observa Franco (2007, p. 306):



[...] cada uma destas diferenças é uma fração cujo numerador é sempre a diferença entre duas diferenças divididas consecutivas e de ordem imediatamente inferior, e cujo denominador é a diferença entre os dois extremos dos pontos envolvidos.

A Tabela 3.8 apresenta o formato final de uma “tabela de diferenças divididas” sobre n pontos.

Tabela 3.8 | Tabela de diferenças divididas

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$...	

x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		\ddots
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$		\vdots	\ddots
x_4	$f[x_4]$		\vdots	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
		\vdots	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		\dots
\vdots	\vdots	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Fonte: Ruggiero (1996, p. 221).



Exemplificando

Para os valores de (0,9; 3,21), (1,1; 2,81), (2; 1,61), determine as diferenças divididas de ordem até 2 utilizando-se 2 casas decimais e regra de arredondamento.

Primeiramente, devemos preencher a primeira e segunda colunas com os valores de x_j e $f[x_j]$, respectivamente. Em seguida, devemos utilizar as fórmulas dispostas na Tabela 3.8 para a obtenção das diferenças divididas, cujos resultados encontram-se na Tabela 3.9.

Tabela 3.9 | Tabela de diferenças divididas de ordem 2

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_j]$	$f[x_j, x_j, x_k]$
0,9	3,21		

		$f[x_0, x_1] = \frac{2,81 - 3,21}{1,1 - 0,9}$ $= -2$	
1,1	2,81		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1,33 - (-2)}{2 - 0,9}$ $= 0,61$
		$f[x_1, x_2] = \frac{1,61 - 2,81}{2 - 1,1}$ $= -1,33$	
2,0	1,61		

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, as diferenças divididas de ordem 1 obtidas foram: $f[x_0, x_1] = -2$ e $f[x_1, x_2] = -1,33$, e a de ordem 2 corresponde a $f[x_0, x_1, x_2] = 0,61$.

As diferenças divididas podem ser determinadas por um algoritmo relativamente simples, sendo necessário especificar como parâmetro de entrada apenas os valores de $f(x)$ e x , de índice 0 até o n -ésimo ponto. Ademais, os passos são:

- 01 $f_0 \leftarrow f(x_0)$
- 02 para i de 1 até n faça
- 03 $f_i \leftarrow f(x_i)$
- 04 para j de $(i-1)$ até 0 faça
- 05 $f_{j,i} \leftarrow (f_{j,i-1} - f_{j+1,i}) / (x_j - x_i)$
- 06 fim_para
- 07 fim_para

Polinômio de interpolação – Newton

Retomando a expressão do polinômio interpolador na forma de Newton apresentada no início desta seção e alinhando-se ao

conhecimento da metodologia de cálculo de diferenças divididas, obtemos a equação final da fórmula de Newton para interpolação:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

sendo que os resultados das diferenças divididas a serem empregados na determinação do polinômio interpolador são os primeiros valores em cada coluna de diferenças. Mas precisamos construir toda a tabela, pois os cálculos das diferenças divididas são dependentes entre si.



Exemplificando

Para os valores de (0,1), (1,-1), (3,1), (4,2), determine pelo polinômio interpolador de Newton o valor de $p_3(2)$, ou seja, o valor obtido por um polinômio de grau 3 quando $x = 2$.

Como sabemos, o polinômio interpolador de Newton é dependente das diferenças divididas. Assim, necessitamos construir uma tabela similar à mostrada no primeiro “Exemplificando” desta seção. Os resultados encontram-se na Tabela 3.10.

Tabela 3.10 | Tabela de diferenças divididas de ordem 3

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	1			
		$f[x_0, x_1] = \frac{-1-1}{1-0} = -2$		
1	-1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1-(-2)}{3-0} = 1$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{1-(-1)}{3-1} = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{0-1}{4-0} = -0,25$

3	1		$f[x_i]$ $\frac{1-1}{4-1} = 0$	
		$f[x_2, x_3] =$ $\frac{2-1}{4-3} = 1$		
4	2			

Fonte: elaborada pela autora.

Agora, utilizamos a expressão do polinômio interpolador de Newton para 4 pontos:

$$p_3(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Substituindo os resultados das diferenças divididas e dos x_i , $i = 0, 1, 2, 3$, obtemos:

$p_3(x) = 1 + (x - 0) \cdot (-2) + (x - 0)(x - 1) \cdot 1 + (x - 0)(x - 1)(x - 3) \cdot (-0,25)$, que também pode ser escrito por:

$p_3(x) = -0,25x^3 + 2x^2 - 3,75x + 1$. Finalmente, $p_3(2)$ é determinado fazendo: $p_3(2) = -0,25(2)^3 + 2(2)^2 - 3,75(2) + 1 = -0,5$.

Observe que o agrupamento dos termos de igual expoente de "x" no "Exemplificando" anterior foi relativamente simples. Mas nem sempre será assim, pois podemos ter polinômios de grau elevado, por exemplo. Assim, para facilitar a determinação do polinômio num ponto desejado, podemos colocar os termos comuns, que aparecem de uma determinada parcela em diante, em evidência. Para exemplificar esse "esquema prático", utilizaremos cálculos envolvidos para a determinação de um polinômio interpolador de Newton de grau 3:

- $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \lambda_0$.
- $f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)\lambda_0 = \lambda_1$.
- $f[x_0, x_1] + (x - x_1)\lambda_1 = \lambda_2$.
- $f[x_0] + (x - x_0)\lambda_2 = \lambda_3 = p_3(x)$.

Organizando essas informações na Tabela 3.11, temos:

Tabela 3.11 | Esquema prático para determinar $p_3(x)$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0]$
↓ + ↗	↓ + ↗	↓ + ↗	↓
λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
↘ ×	↘ ×	↘ ×	
	$x - x_2$	$x - x_1$	$x - x_0$

Fonte: adaptada de Franco (2007, p. 310).

Podemos exemplificar o esquema prático para o caso apresentado no segundo “Exemplificando”, no qual foram determinados $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0,25$, $f[x_0, x_1, x_2] = 1$, $f[x_0, x_1] = -2$ e $f[x_0] = 1$, para $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Dispondo no esquema prático, temos os resultados na Tabela 3.12:

Tabela 3.12 | Aplicação do esquema prático

-0,25	1	-2	1
↓ + ↗	↓ + ↗	↓ + ↗	↓
-0,25	1,25	-0,75	-0,5
↘ ×	↘ ×	↘ ×	
	2-3	2-1	2-0

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, obtemos que $p_3(2)$ é -0,5, o que é exatamente o valor obtido quando se trabalhou com manipulações matemáticas sobre o polinômio interpolador de Newton.



Refleta

Suponha que dispomos dos seguintes dados:

Tabela 3.13 | Conjunto de dados

x	1	3,5	4	5	6,5	7
$f(x)$	0,23	0,18	0,25	0,39	0,54	0,66

Fonte: elaborada pela autora.

Se utilizássemos um polinômio de grau 2 e quiséssemos obter $p_2(4,7)$, quais seriam os valores para as diferenças divididas e o polinômio obtido pela forma de Newton?



Pesquise mais

Algumas observações sobre o método de interpolação polinomial com a forma de Newton são importantes:

1. A ordem pela qual os nós são escritos na tabela de diferenças divididas é arbitrária, ou seja, válida para qualquer permutação das variáveis.
2. Caso seja necessário acrescentar mais nós aos já conhecidos, coloque esses outros no final da tabela das diferenças divididas e realize as operações necessárias. Esse procedimento não interfere nas diferenças divididas previamente determinadas.

Verifique na leitura recomendada o porquê disso: SCHEMMER, Rosângela Carline. **Métodos de interpolação polinomial**. 2013. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3558/1/CM_ESPMAT_III_2013_10.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2017.

Sem medo de errar

Depois de realizar pesquisas sobre o polinômio interpolador de Newton, você verificou que sobre os quatro pontos conhecidos de quantidade de silicone com o respectivo lucro da YXZZKX é possível determinar um polinômio de grau 3 a partir de diferenças divididas. Assim, organizou os dados conhecidos nas duas primeiras colunas e calculou para as demais os operadores de ordem 1, 2 e 3, conforme mostra a Tabela 3.14. Vale lembrar que o número de casas decimais aqui utilizado foi análogo ao método de sistemas lineares e Lagrange, isto é, 10. Como simplificação, consideraremos que x corresponde à quantidade de silicone, e $f(x)$, ao lucro.

Tabela 3.14 | Diferenças divididas para quantidade de silicone e lucro

		Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	600	1,43			
			0,0056		
1	800	2,55		-0,000012	
			0,0008		0,0000000139
2	1000	2,71		-0,0000022667	
			-0,0003333333		
3	1300	2,61			

Fonte: elaborada pela autora.

Cada valor apresentado na tabela está identificado na nota que se segue.

Figura 3.4 | Nota para as diferenças divididas

$$f[x_0, x_1] = \frac{2,55 - 1,43}{800 - 600} = 0,0056$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{2,71 - 2,55}{1000 - 800} = 0,0008$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{2,61 - 2,71}{1000 - 1300} = -0,0003333333$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0,0008 - 0,0056}{1000 - 600} = -0,000012$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-0,0003333333 - 0,0008}{1300 - 800} = -0,0000022667$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-0,0000022667 - (-0,000012)}{1300 - 600} = 0,0000000139$$

Fonte: elaborada pela autora.

Esses resultados inseridos na forma de Newton fornecem: $p_3(x) = 1,43 + 0,0056(x - 600) - 0,000012(x - 600)(x - 800) + 0,0000000139(x - 600)(x - 800)(x - 1000)$. Agrupando os termos, obtemos:

$p_3(x) = 0,0000000139x^3 - 0,0000453714x^2 + 0,048540954x - 14,364285714$, que é o mesmo polinômio que obtivemos com o método de sistema linear e Lagrange. Logo, pode-se determinar o lucro para a quantidade de silicone 1200 toneladas a partir da substituição desse valor no polinômio obtido, que resulta em R\$ 2,5774285714 milhões.

Além disso, você observou que, se fosse introduzido um novo dado na tabela de diferenças divididas, todos os resultados até então obtidos não se modificariam. Ao ser acrescentado o ponto (1400; 2,51), a nova tabela de diferenças divididas será:

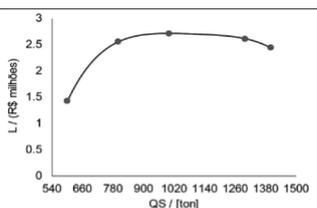
Tabela 3.15 | Nova tabela de diferenças divididas devido à inserção de um número

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
x_j	$f[x_j]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$
600	1,43				
		0,0056			
800	2,55		-0,000012		
		0,0008		0,0000000139	
1000	2,71		-0,0000022667		0,0000000000
		-0,0003333333		0,0000000010	
1300	2,61		-0,0000016667		
		-0,001			
1400	2,51				

Fonte: elaborada pela autora.

Observe, pela Tabela 3.15, que mesmo com a inserção de um novo termo, o grau máximo do polinômio obtido é 3, já que $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ é nulo, isso porque foram adotadas 10 casas decimais. Caso queiramos determinar um polinômio de grau 4, é necessário trabalhar com, no mínimo, 11 casas decimais, sendo identificado pela figura a seguir.

Figura 3.5 | Polinômio interpolador de grau 4



Fonte: elaborada pela autora.

A partir das análises realizadas, registre todos os resultados obtidos no relatório para que você possa dar prosseguimento às solicitações do seu gerente.

Avançando na prática

Contaminação por bactérias

Descrição da situação-problema

Suponha que um laboratório de análises clínicas tenha lhe contatado para estimar o número de bactérias em um meio de cultura em um determinado tempo. Como subsídio, eles forneceram quatro pares de dados, todos coletados experimentalmente. No envio deles, constava que o número de bactérias, $f(x)$, presente num meio de cultura em função do tempo de observação em horas (x) num laboratório é identificado na Tabela 3.16.

Tabela 3.16 | Número de bactérias em função do tempo

x	0	1	3	5
$f(x)$	23	51	89	142

Fonte: elaborada pela autora.

Deseja-se determinar, através de um polinômio de grau 3, o número de bactérias após 4 horas de análise através do polinômio interpolador de Newton. Utilize 3 casas decimais e regra de arredondamento.

Resolução da situação-problema

Como se deseja obter $f(4)$ pela forma de Newton, calcularemos, então, os operadores de diferenças divididas e, em seguida, aplicaremos o método prático. A Tabela 3.17 apresenta os resultados para as diferenças divididas de ordem 3.

Tabela 3.17 | Diferenças divididas para número de bactérias em função do tempo

		Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	0	23			
			28,000		

1	1	51		-3,000	
			19,000		0,975
2	3	89		1,875	
			26,500		
3	5	142			

Fonte: elaborada pela autora.

De posse dessas informações, podemos elaborar o esquema prático, cujo resultado encontra-se na Tabela 3.18.

Tabela 3.18 | Esquema prático para $x = 4$

0,975	-3,000	28,000	23
0,975	-2,025	21,925	110,7
--	1	3	4

Fonte: elaborada pela autora.

Assim, o número de bactérias em 4 horas de análise, determinado a partir de um polinômio de terceiro grau, é 110,7.

De posse desses resultados, remeta-os ao laboratório, incluindo o detalhamento exigido.

Faça valer a pena

1. Em uma série de pontos conhecidos, construiu-se a seguinte tabela de diferenças divididas:

Tabela 3.19 | Tabela de diferenças divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
-1	a		
		-3	
0	1		0,667
		c	
2	b		

Fonte: elaborada pela autora.

- I. O valor de $a+b$ é -3.
- II. O valor do produto entre a e c está entre -2 e -4.
- III. O valor de $b-c$ é inferior a 0,01.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas os itens II e III estão corretos.
- b) Apenas os itens I e III estão corretos.
- c) Apenas o item II está correto.
- d) Apenas o item III está correto.
- e) Apenas o item I está correto.

2. A partir dos seguintes pontos coletados: (1,0), (3,6), (4,24), (5,60), marque com V (verdadeiro) ou F (falso) os itens que se seguem:

() O resultado para $f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2] + f[x_2, x_3]$ é 57.

() O resultado para $f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]$ é 4.

() O valor de $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ é 1.

() O polinômio obtido aplicando o método de Newton nos pontos dados é: $x^3 - 3x^2 + 2x$.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V, V, F, V.
- b) F, V, V, F.
- c) V, F, V, V.
- d) V, F, V, F.
- e) F, F, V, V.

3. A Tabela 3.20 identifica a quantidade de calorias ($f(x_i)$) recomendada para uma mulher de 30 anos e 170 cm, que realiza atividade física duas vezes por semana, em função do peso (x_i , $i = 0, \dots, 3$).

Tabela 3.20 | Peso de uma mulher e respectivas calorias

Peso (kg)	Calorias (kcal)
50	1840
60	1970
70	2110
80	2250

Fonte: Yazio ([s.d.]).

Baseado nas informações apresentadas e utilizando-se da fórmula de Newton para o polinômio interpolador com 3 casas decimais e arredondamento, julgue os itens:

I. Os valores de $f[x_1, x_2]$ e $f[x_2, x_3]$ são iguais a 14.

II. O valor de $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ é -0,002.

III. O valor de $f[x_0, x_1, x_2] \cdot f[x_1, x_2, x_3]$ é nulo.

IV. O polinômio resultante do método, aplicando o método de Newton em todos os pontos fornecidos, é de grau 3.

Agora, assinale a alternativa CORRETA.

a) Apenas os itens I, II e IV estão corretos.

b) Apenas os itens I e IV estão corretos.

c) Apenas os itens II e III estão corretos.

d) Apenas os itens I e II estão corretos.

e) Todos os itens estão corretos.

Seção 3.3

Spline interpolante

Diálogo aberto

Diante do conhecimento acerca dos dados de quantidade de silicone em função do lucro da empresa YXZZKX, você realizou cálculos a partir de técnicas numéricas para gerar um polinômio interpolador ($L = a_0 + a_1QS + a_2QS^2 + a_3QS^3$), a fim de definir a relação matemática entre essas variáveis, determinar o lucro máximo, bem como o valor do lucro, para uma quantidade de silicone equivalente a 1200 toneladas. Foi verificado que, independentemente do procedimento adotado, seja resolução por sistema linear, Lagrange ou interpolação na forma de Newton, o polinômio obtido foi exatamente o mesmo.

Diante disso, o seu gerente agora necessita de um algoritmo para a definição de um polinômio que consiga caracterizar de forma suave – ou seja, uma função contínua e diferenciável – e robusta a série de dados: quantidade de silicone e lucro, sabendo que até então são conhecidos quatro pontos, mas que num futuro breve haverá mais de 20 pontos para serem ajustados. Pesquisando em livros de análise numérica, você verificou que a realização de interpolação por *spline* cúbica parece ser adequada e requer o conhecimento de solução de sistemas lineares, assunto já dominado por você.

Assim, proponha um algoritmo capaz de gerar *splines* cúbicas a partir da inserção de um número n de dados. Para testar o seu programa computacional, insira os dados já tratados e aqui apresentados, novamente, na Tabela 3.21.

Tabela 3.21 | Dados de quantidade de silicone (QS) e respectivo lucro (L)

QS (toneladas)	L (milhões de reais)
600	1,43
800	2,55
1000	2,71
1300	2,61

Fonte: elaborada pela autora.

Lembre-se de que, nesta seção, você deve concluir as suas análises e apresentar os resultados ao gerente da área. Que tal fazer isso na forma de um relatório detalhado, fazendo a comparação entre os diferentes métodos testados e dando um parecer sobre qual deles é o mais recomendado para o desafio que lhe foi proposto no início desta unidade?

Não pode faltar

Nas seções 3.1 e 3.2, aprendemos técnicas de interpolação em que aproximávamos uma função qualquer ou a partir de um conjunto de $n + 1$ pontos construímos um polinômio interpolador de grau máximo igual a n . Até então, utilizamos polinômios de grau relativamente baixo, pois trabalhamos com uma pequena quantidade de pontos. Agora, suponha que queremos substituir a função $f(x) = 1/(1 + 24x^2)$ por um polinômio, tal que os pontos contidos na Tabela 3.22 sejam os dados de entrada para qualquer método numérico de interpolação polinomial já apresentado.

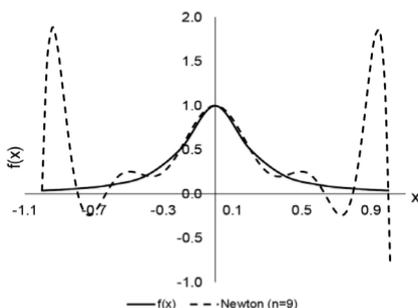
Tabela 3.22 | Dados para determinação do polinômio interpolador

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	0,04	0,06	0,10	0,21	0,51	1	0,51	0,21	0,10	0,06	0,04

Fonte: elaborada pela autora.

Observe que, na Tabela 3.22, temos 11 pontos, logo um polinômio de grau 10 pode ser estimado utilizando a técnica de interpolação polinomial na forma de Newton, por exemplo. A Figura 3.6 mostra o gráfico da função original, $f(x) = 1/(1 + 24x^2)$, e o polinômio obtido.

Figura 3.6 | Gráfico de $f(x)$ e $p_{10}(x)$



Fonte: elaborada pela autora.

A partir da visualização da Figura 3.6, observamos que o polinômio interpolador aproxima equivocadamente diversos valores de x , como é o caso de $f(-0,94) = 0,045$ e $p_{10}(-0,94) = 1,8876$. Essas oscilações extremas são conhecidas como *overshoots*. Para solucionar esse impasse, podemos utilizar *splines* interpolantes denotadas por $S_p(x)$, que a partir da divisão do intervalo de interesse $[a,b]$ são obtidos polinômios interpoladores de grau p com coeficientes distintos se se seguir as condições descritas por Ruggiero e Lopes (1996, p. 245):

a) Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, (n-1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p : $s_p(x)$.

b) $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p-1)$ em $[a,b]$.

c) $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$.

Spline linear

Conhecidos n pontos, conseqüentemente, $n-1$ intervalos, a aproximação de $f(x)$ por uma função *spline* linear interpolante nos nós x_0, x_1, \dots, x_n é representada por $S_1(x)$ e definida em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, n$, por:

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \text{ para qualquer}$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Assim, a $s_i(x)$ é uma reta que une dois pontos a cada término de intervalo. Podemos simplificar a equação por:

$$s_i(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x - x_{i-1}), \text{ com } a_{i-1} = f(x_{i-1}) \text{ e}$$

$$b_{i-1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$



Refleta

Por definição, $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) . Baseado nos conceitos vistos na Unidade 1 envolvendo derivada de uma função, podemos afirmar que $S_1(x)$ é derivável em todo o intervalo?

A seguir, incluímos o auxílio necessário para que você seja capaz de responder a esse questionamento, sendo que $s_1(x)$, $s_2(x)$ e $s_3(x)$ são obtidas por:

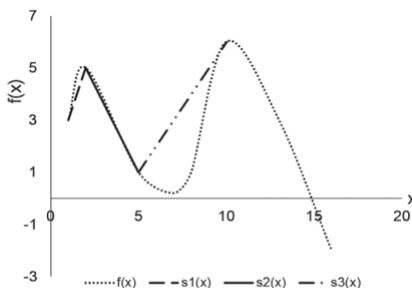
$$s_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = 3 + \frac{5 - 3}{2 - 1}(x - 1) = 2x + 1$$

$$s_2(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = 5 + \frac{1 - 5}{5 - 2}(x - 2) = \frac{23 - 4x}{3}$$

$$s_3(x) = f(x_2) + \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x - x_2) = 1 + \frac{6 - 1}{10 - 5}(x - 5) = x - 4$$

Observando a Figura 3.7, a qual ilustra a função $f(x)$ e *splines*, qual seria a sua resposta para a reflexão proposta?

Figura 3.7 | *Splines* lineares sobre uma função



Fonte: elaborada pela autora.

Nos pontos em que as *splines* lineares se encontram, a inclinação/curvatura se altera abruptamente, fazendo com que a $S_1(x)$ apresente picos. Esse inconveniente pode ser resolvido por *splines* de ordem superior, por exemplo, *spline* cúbica.



Assimile

Em alguns problemas, podemos ter funções dependentes de duas variáveis, como é o caso dos problemas vistos anteriormente, em que a temperatura de um corpo era função de duas coordenadas especiais, $T(x, y)$. Supondo que conhecemos as temperaturas $T(2, 1) = 60^\circ\text{C}$, $T(2, 6) = 55^\circ\text{C}$, $T(9, 1) = 57,5^\circ\text{C}$, $T(9, 6) = 70^\circ\text{C}$ e desejamos determinar a temperatura em $x=4$ e $y=3$, ou seja, $T(4, 3)$. Isso pode ser realizado através de uma extensão da *spline* linear, ou seja, realizamos o procedimento de *spline* linear em uma direção e, depois, na outra; resumidamente, teremos que utilizar a seguinte equação:

$$f(x, y) = \frac{f(Q_{11})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(x_2 - x)(y_2 - y) + \frac{f(Q_{21})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(x - x_1)(y_2 - y) +$$

$$\frac{f(Q_{12})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(x_2 - x)(y - y_1) + \frac{f(Q_{22})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(x - x_1)(y - y_1)$$

Sendo $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ e $Q_{22} = (x_2, y_2)$.

Para o caso desejado, tem-se:

$$T(4, 3) = \frac{60}{(9-2)(6-1)}(9-4)(6-3) + \frac{57,5}{(9-2)(6-1)}(4-2)(6-3) +$$

$$\frac{55}{(9-2)(6-1)}(9-4)(3-1) + \frac{70}{(9-2)(6-1)}(4-2)(3-1), \quad \text{que}$$

resulta em 59,29 °C.

Spline cúbica

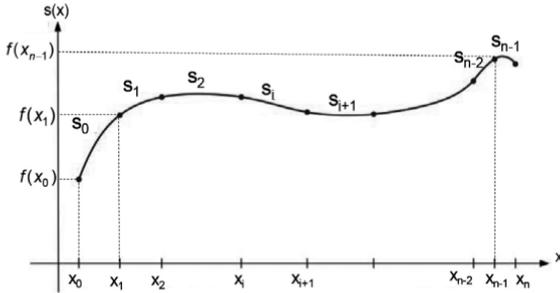
A *spline* cúbica, identificada por $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, que cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de terceiro grau em $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Precisamos mencionar as condições necessárias para a existência de $s_k(x)$ e, assim, defini-la algebricamente. Para isso, em um conjunto de pontos tabelados $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, temos uma *spline* cúbica interpolante da função $f(x)$ nos nós x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ se forem observados os itens:

- i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \dots, n$.
- ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$.
- iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k=1, 2, \dots, n-1$.
- iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k=1, 2, \dots, n-1$.
- v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k=1, 2, \dots, n-1$.

Com o auxílio da Figura 3.8, observamos que a condição: i) é satisfeita, pois x_0 e x_1 estão contidos em $s_1(x)$, x_2 e x_1 em $s_2(x)$, e assim sucessivamente; ii) de fato está sendo cumprida, pois $S_3(x_i)$ corresponde ao valor da função no nó x_i , $f(x_i)$; iii) constatamos que as *splines* cúbicas se interseccionam nos nós.

Figura 3.8 | Representação de *spline* cúbica



Fonte: elaborada pela autora.

Como já sabemos as necessidades para termos uma *spline* cúbica, vamos equacionar $s_k(x)$ por uma equação que nos lembra um polinômio de grau 3, ou seja:

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$$

Observe que a determinação de $S_3(x)$ requer o cálculo de 4 coeficientes para cada k (a_3 , b_3 , c_3 e d_3), e então $4n$ coeficientes para um conjunto de n dados. Aplicando as condições *i*, *ii*, *iii* e *v* descritas anteriormente, podemos generalizar as expressões para cálculo dos coeficientes do polinômio, de modo que obtemos:

$$a_k = \frac{s_k''(x_k) - s_{k-1}''(x_{k-1})}{6(x_k - x_{k-1})}; \quad b_k = \frac{s_k''(x_k)}{2};$$

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} + \frac{2(x_k - x_{k-1})s_k''(x_k) + (x_k - x_{k-1})s_{k-1}''(x_{k-1})}{6};$$

$$d_k = f(x_k)$$

Com a condição *iv*, podemos agrupar os coeficientes e obter:

$$(x_k - x_{k-1})s_{k-1}'' + 2[(x_k - x_{k-1}) + (x_{k+1} - x_k)]s_k'' + (x_{k+1} - x_k)s_{k+1}'' = 6 \left(\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right).$$

Essa equação representa um sistema linear com $n - 1$ equações, $k = 1, 2, \dots, n-1$ e $n + 1$ incógnitas: $s_0'', s_1'', \dots, s_n''$, sendo necessário especificar duas equações para que o sistema seja determinado. No nosso estudo, utilizaremos as expressões $S_3^''(x_0) = s_0'' = 0$ e $S_3^''(x_n) = s_n'' = 0$, que definem uma *spline* natural e indicam uma

suposição de que os polinômios de terceiro grau nos intervalos extremos são muito próximos a funções lineares. Com essa simplificação, obteremos os coeficientes do polinômio de terceiro grau para cada *spline* a partir da resolução de um sistema linear tridiagonal na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sendo que cada matriz corresponde a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{g}_0 \ \mathbf{g}_1 \ \dots \ \mathbf{g}_n)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

sendo $\mathbf{g}_k = \mathbf{s}_k''(\mathbf{x}_k)$, $y_k = f(\mathbf{x}_k)$ e $h_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$.



Pesquise mais

A dedução dos coeficientes de cada *spline* cúbica pode ser vista em detalhes no livro de Ruggiero e Lopes (1996, p. 248-251). Vale a pena conferir esse conteúdo, pois a aplicação de *splines* cúbicas é diversa, tal como pode ser visto no artigo:

CIRILO, E. R.; BORTOLI, A. L. Geração da Malha da Traqueia e dos Tubos Bronquiais por Splines Cúbicos. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v. 27, n. 2, p. 147-155, jul./dez. 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/proppg/portal/pages/arquivos/pesquisa/semina/pdf/semina_27_2_22_22.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2017.



Desejamos conhecer as *splines* cúbicas naturais que passam pelos dados indicados na Tabela 3.23 e, depois, obter o valor de $f(1,5)$.

Tabela 3.23 | Distribuição de pontos

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	0,5	0,3333	0,25

Fonte: elaborada pela autora.

Como temos 4 pontos, teremos que determinar g_1 e g_2 , uma vez que, ao adotar *spline* linear, temos $g_0 = 0$ e $g_3 = 0$, e temos, assim, 3 subintervalos.

O conjunto de equações resultante será:

$$k=1: h_1 g_0 + 2(h_1 + h_2)g_1 + h_2 g_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right);$$

$$k=2: h_2 g_1 + 2(h_2 + h_3)g_2 + h_3 g_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right).$$

Assim, $A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \end{pmatrix}$, sendo que os pontos em x estão igualmente espaçados na unidade, assim $h_i = 1$,

$i=1, \dots, 4$. Logo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (0 \ g_1 \ g_2 \ 0)^T$. A matriz dos

termos independentes é expressa por: $b = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \end{pmatrix}$;

substituindo os valores de y_i , temos: $b = \begin{pmatrix} 1,9998 \\ 0,5004 \end{pmatrix}$.

A resolução do sistema linear, adotando 4 casas decimais, resulta em: $g_1 = 0,5004$ e $g_2 = 0$. Os cálculos para os coeficientes dos três polinômios do 3º grau são apresentados a seguir.

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6(x_1 - x_0)} = \frac{0,5004 - 0}{6(2 - 1)} = 0,0834; \quad a_2 = \frac{g_2 - g_1}{6(x_2 - x_1)} =$$

$$\frac{0 - 0,5004}{6(3 - 2)} = -0,0834;$$

$$a_3 = \frac{g_3 - g_2}{6(x_3 - x_2)} = \frac{0 - 0}{6(4 - 3)} = 0; \quad b_1 = \frac{g_1}{2} = \frac{0,5004}{2} = 0,2502;$$

$$b_2 = \frac{g_2}{2} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$b_3 = \frac{g_3}{2} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} + \frac{2(x_1 - x_0)g_1 + (x_1 - x_0)g_0}{6} =$$

$$\frac{0,5 - 1}{2 - 1} + \frac{2(2 - 1)0,5004 + (2 - 1)0}{6} = -0,3332;$$

$$c_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} + \frac{2(x_2 - x_1)g_2 + (x_2 - x_1)g_1}{6} =$$

$$\frac{0,3333 - 0,5}{3 - 2} + \frac{2(3 - 2)0 + (3 - 2)0,5004}{6} = -0,0833;$$

$$c_3 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)} + \frac{2(x_3 - x_2)g_3 + (x_3 - x_2)g_2}{6} =$$

$$\frac{0,25 - 0,3333}{4 - 3} + x \in [-1, 0];$$

$$d_1 = y_1 = 0,5; \quad d_2 = y_2 = 0,3333; \quad d_3 = y_3 = 0,25$$

As splines cúbicas obtidas foram:

$$s_1(x) = 0,0834(x - 2)^3 + 0,2502(x - 2)^2 - 0,3332(x - 2) + 0,5, \quad \text{para } x \in [1, 2];$$

$$s_2(x) = -0,0834(x - 3)^3 - 0,0833(x - 3) + 0,3333, \quad \text{para } x \in [2, 3];$$

$$s_3(x) = -0,0833(x - 4) + 0,25, \quad \text{para } x \in [3, 4].$$

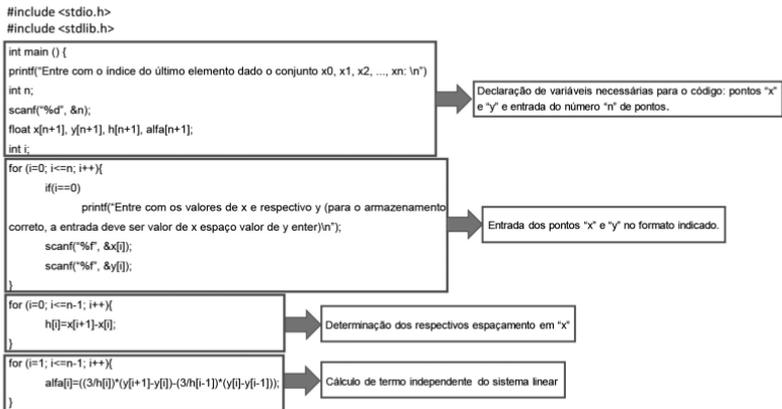
Desejamos também obter o valor de $f(1,5)$, como $1,5 \in [1,2]$, então $s_1(1,5) = 0,0834(1,5 - 2)^3 + 0,2502(1,5 - 2)^2 - 0,3332(1,5 - 2) + 0,5$, que resulta em 0,7185. Se utilizássemos um polinômio interpolador de Newton, teríamos o polinômio $p_3(x) = -0,042x^3 + 0,419x^2 - 1,463x + 2,086$ e $p_3(1,5) = 0,6925$.

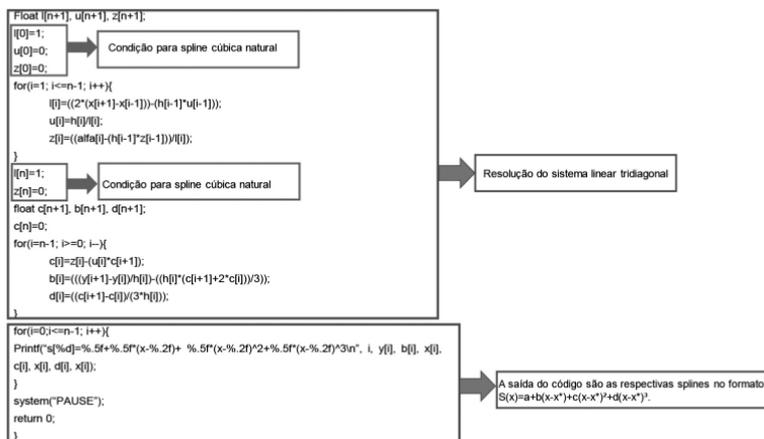
Diante do exposto, as *splines* representam uma boa alternativa para curvas interpoladoras, pois são suaves, requerem a solução de sistemas lineares relativamente pequenos e evitam oscilações indesejadas.

Sem medo de errar

Por meio de estudos, você verificou que a técnica *spline* cúbica natural para a interpolação de dados baseia-se, simplificada, na obtenção de coeficientes de polinômios de grau 3. Para auxiliar nos passos do algoritmo relacionados com a determinação da referida *spline*, recomenda-se a leitura do livro de Burden e Faires (2011). Em síntese, a chave do algoritmo é a resolução de um sistema linear tridiagonal (em específico, confira os algoritmos 3.4, página 149, e 6.7, página 422) a partir da entrada do número de pontos, valores das variáveis independente x e dependente y , no caso da YXZZKX, quantidade de silicone e lucro, respectivamente. O algoritmo em questão é:

Figura 3.9 | Algoritmo para a *spline*





Fonte: elaborada pela autora.

Ao implementarmos o referido código para os dados conhecidos de (QS, L), obteremos como resposta os parâmetros contidos na Tabela 3.24.

Tabela 3.24 | Coeficientes de *spline* cúbica natural da YXZZKX

Spline 1		Spline 2		Spline 3	
d_1	-0,0000000301	d_2	0,0000000304	d_3	-0,0000000002
c_1	-0,0000180526	c_2	0,0000002105	c_3	0,0000000000
b_1	0,0031929825	b_2	-0,0003754386	b_3	-0,0003122807
a_1	2,55	a_2	2,71	a_3	2,61

Fonte: elaborada pela autora.

A determinação de L(1200) pode ser feita a partir da aplicação da *spline* 3, já que abrange o intervalo $1000 < QS < 1300$. Assim, $L = -0,000000002(1200 - 1300)^3 - 0,0003122807(1200 - 1300) + 2,61$, que resulta em R\$ 2,64 milhões.

Agora que você já tem todo o embasamento necessário, não perca tempo e finalize o desafio que seu gerente lhe propôs: prepare o relatório e dê o seu parecer sobre qual método seria o mais adequado para o caso da YXZZKX.

Avançando na prática

Spline cúbica em problema de aviação

Descrição da situação-problema

O coeficiente de arrasto é uma função do número de Reynolds, adimensional importantíssimo na análise de escoamento interno e externo de fluidos, como é o caso do movimento de um avião. Vamos supor que o coeficiente de arrasto no deslocamento do avião seja representado por x e o número de Reynolds seja dado por $f(x)$, cujos valores estão dispostos na Tabela 3.25.

Tabela 3.25 | Identificação dos valores dos pontos indicados

x	0,64	1,82	4,3	7,04	8,22
$f(x)$	3,4	4,72	4,88	4,16	5,12

Fonte: elaborada pela autora.

Aplicando a metodologia de interpolação polinomial por *spline* cúbica natural, obtenha o valor de $f(1)$. Utilize 2 casas decimais e regra de arredondamento.

Resolução da situação-problema

Como temos 5 pontos e 4 subintervalos, teremos que determinar g_0, g_1, g_2, g_3 e g_4 , uma vez que estamos utilizando *spline* natural, então $g_0 = 0$ e $g_4 = 0$, e procedemos com os cálculos:

$$k=1: h_1 g_0 + 2(h_1 + h_2)g_1 + h_2 g_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right);$$

$$k=2: h_2 g_1 + 2(h_2 + h_3)g_2 + h_3 g_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right);$$

$$k=3: h_3 g_2 + 2(h_3 + h_4)g_3 + h_4 g_4 = 6 \left(\frac{y_4 - y_3}{h_4} - \frac{y_3 - y_2}{h_3} \right);$$

com $h_1 = x_1 - x_0 = 1,82 - 0,64 = 1,18$, $h_2 = x_2 - x_1 = 4,3 - 1,82 = 2,48$, $h_3 = x_3 - x_2 = 7,04 - 4,3 = 2,74$ e $h_4 = x_4 - x_3 = 8,22 - 7,04 = 1,18$.

Substituindo os valores conhecidos nas equações anteriores, teremos:

$$2(3,66)g_1 + 2,48g_2 = -6,32;$$

$$12,48g_1 + 2(5,22)g_2 + 2,74g_3 = -1,96 \text{ e}$$

$$2,74g_2 + 2(3,92)g_3 = 6,46.$$

Assim, o sistema linear gerado é:

$$\begin{pmatrix} 7,32 & 2,48 & 0 \\ 2,48 & 10,44 & 2,74 \\ 0 & 2,74 & 7,84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,32 \\ -1,96 \\ 6,46 \end{pmatrix}, \text{ que pode ser resolvido}$$

por eliminação de Gauss, resultando em $g_1 = -0,78$, $g_2 = -0,24$ e $g_3 = 0,91$.

Como desejamos saber o valor de $f(1)$, $1 \in [0,64;1,82]$, logo precisamos estimar apenas $s_1(x)$:

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h_1} = \frac{-0,78 - 0}{6 \cdot 1,18} = -0,11, \quad b_1 = \frac{g_1}{2} = \frac{-0,78}{2} = -0,39,$$

$$c_1 = \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} + \frac{2h_1g_1 + g_0h_1}{6} \right) =$$

$$\left(\frac{4,72 - 3,4}{1,18} + \frac{2 \cdot 1,18 \cdot (-0,78) + 0}{6} \right) = 0,81, \quad d_1 = y_1 = 4,72.$$

Então, a *spline* cúbica interpolante em $x \in [0,64;1,82]$ corresponde a:

$$s_1(x) = -0,11(x - 1,82)^3 - 0,39(x - 1,82)^2 + 0,81(x - 1,82) + 4,72$$

e $s_1(1) = f(1) = 3,85$.

Faça valer a pena

1. Considere a distribuição de pontos organizados na tabela a seguir.

Tabela 3.26 | Distribuição de pontos

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	5

Fonte: elaborada pela autora.

A partir da aplicação de *spline* cúbica natural, em que cada *spline* é representada por um polinômio na forma: $s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$, com $k=1$ e 2 , analise os itens a seguir:

I. $a_1 + a_2 = 0$.

II. $b_1 \cdot b_2 = 0$.

III. $c_1 + c_2 = 4,5$.

IV. $d_1 \cdot d_2 = 15$.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas os itens III e IV estão corretos.
- b) Apenas os itens I e II estão corretos.
- c) Apenas os itens II, III e IV estão corretos.
- d) Apenas o item I está correto.
- e) Todos os itens estão corretos.

2. A partir dos dados apresentados na tabela a seguir e da aplicação de *spline* linear s_1 para $x \in [-1,0]$ e s_2 para $x \in [0,1]$, analise os itens que se seguem.

Tabela 3.27 | Distribuição de pontos

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	3

Fonte: elaborada pela autora.

I. O valor de $s_1(-0,5) + s_2(0,5)$ é 2.

II. O resultado de $\frac{s_1(-0,4)}{s_2(0,6)}$ é $0,2 < \frac{s_1(-0,4)}{s_2(0,6)} < 0,31$.

III. O produto das inclinações de s_1 e s_2 resulta em 2.

Agora, assinale a alternativa que apresenta o(s) item(ns) correto(s).

- a) Apenas II e III.
- b) Apenas II.
- c) Apenas I.
- d) Apenas I e III.
- e) Todos os itens estão corretos.

3. Uma propriedade importante para o projeto de trocadores de calor é a entalpia (h), que é dependente da temperatura (T) e pressão (p) do fluido. A tabela apresenta os dados para entalpia em duas pressões e temperaturas conhecidas. Deseja-se estimar o valor de $h(54, 820)$.

Tabela 3.28 | Dados de entalpia em função da pressão e temperatura

$T \setminus p$	800	820	900
50	281,907	-	280,497
54		h	
60	289,553	-	288,276

Fonte: elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto de $h(54, 820)$.

- a) 287,543.
- b) 284,694.
- c) 286,542.
- d) 283,679.
- e) 285,493.

Referências

ADICIONAR uma tendência ou linha média a um gráfico. **Microsoft**, 2017. Disponível em: <<https://support.office.com/pt-br/article/Adicionar-uma-tend%C3%Aancia-ou-linha-m%C3%A9dia-a-um-gr%C3%A1fico-3c4323b1-e377-43b9-b54b-fae160d97965>>. Acesso em: 4 jul. 2017.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2011. 895 p.

CALCULAR calorias diárias. **Yazio**, [s.d.]. Disponível em: <<https://www.yazio.com/pt/calculadora-calorias-diarias>>. Acesso em: 7 ago. 2017.

CIRILO, E. R.; BORTOLI, A. L. Geração da Malha da Traqueia e dos Tubos Bronquiais por Splines Cúbicos. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v. 27, n. 2, p. 147-155, jul./dez. 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/proppg/portal/pages/arquivos/pesquisa/semina/pdf/semina_27_2_22_22.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2017.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson, 2007.

GEOGEBRA. 2017. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 4 ago. 2017.

NEPOMUCENO, Erivelton Geraldo. **Métodos numéricos: ajustes de funções**. 2016. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/nepomuceno/mn/13MN_AC1.pdf>. Acesso em: 4 jun. 2017.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Pearson, 1996.

SCHEMMER, Rosângela Carline. **Métodos de interpolação polinomial**. 2013. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3558/1/CM_ESPMAT_III_2013_10.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2017.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; MONKEN, Luiz Henry. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Pearson, 2003.

Integração numérica

Convite ao estudo

Na unidade anterior, foram estudados os métodos de interpolação por *splines* lineares e *splines* cúbicas. Tais estratégias computacionais têm como principal vantagem a eliminação das possíveis oscilações, conhecidas como fenômeno de Runge, apresentadas pelos métodos de Lagrange e Newton. Na presente unidade, iremos estudar métodos computacionais capazes de calcular a integral de uma função em um intervalo de interesse. Esse tipo problema é de grande importância em diversas áreas do conhecimento; no entanto, nem sempre é possível a obtenção de uma solução analítica para o cálculo da integral, assim, estratégias numéricas devem ser utilizadas, a fim de se obter os resultados que desejamos.

Por um instante, você já pensou o quanto a comunicação entre as pessoas depende de satélites? De uma simples conversa em uma rede social a reuniões virtuais entre líderes de empresas e governos, boa parte dos dados são processados em satélites, contudo, para que estes fossem colocados em órbitas, robustos foguetes foram empregados.

Uma das principais dificuldades no lançamento de um foguete é o cálculo da quantidade de combustível que deve ser utilizado, pois essa variável está estreitamente relacionada com a distância percorrida, assim como com a velocidade máxima que deve ser atingida, a fim de colocar o satélite em sua órbita adequada.

Nesse contexto, considere que você trabalha na TTGTech, empresa de tecnologia que está atuando no mercado aeroespacial. Atualmente, você trabalha no grupo de propulsão e

é sua função determinar a distância total percorrida pelo foguete até que ele atinja sua velocidade máxima. Devido à dimensão do projeto, seu gerente recomendou que ele fosse dividido em três etapas. Na primeira delas (Seção 4.1), deve ser realizado um estudo teórico acerca da integral de uma função, do teorema fundamental do cálculo e do limite da soma de Riemann. Na segunda parte do projeto (Seção 4.2), a devida atenção deve ser dada à soma de Riemann, em especial à soma dos termos superiores, inferiores e centrados. Por fim, na última fase do projeto, deve ser desenvolvido um método computacional que calcule a integral de uma função $f(x)$ utilizando trapézios em suas aproximações; feito isso, esse algoritmo deve ser utilizado no cálculo da distância percorrida pelo foguete.

Seção 4.1

Conceituação de integral

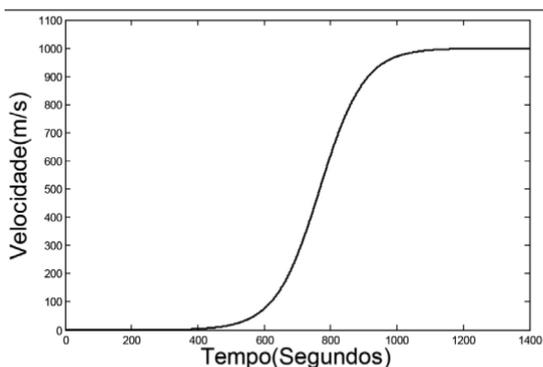
Diálogo aberto

O setor aeroespacial consiste em um dos mais difíceis em que uma empresa pode atuar, isso se deve aos elevados custos e, principalmente, ao grande domínio científico e tecnológico que a empresa deve ter. Sendo a TTGTech, empresa em que você trabalha, uma companhia versátil e de robusto conhecimento científico nas mais diversas áreas, ela decidiu entrar nessa fatia de mercado. A empresa está atuando na construção de um foguete lançador de satélites, e você está alocado na equipe de propulsão. Sua função é desenvolver um algoritmo capaz de calcular a distância percorrida pelo foguete até que ele atinja sua velocidade de cruzeiro. As informações de que você dispõe são a função que descreve o perfil de velocidade de subida em função do tempo, além disso, a disposição do gráfico gerado por essa função (Figura 4.1). Como mostra a Figura 4.1, partindo do repouso, o foguete acelera rapidamente entre os instantes de 600 e 1.000 segundos, atingido sua velocidade de cruzeiro após 1.000 segundos.

A seguir, temos a equação do perfil de velocidade de subida do foguete:

$$v(t) = \frac{a \times P_0}{b \times P_0 + (a - b \times P_0) \times e^{-at}}$$

Figura 4.1 | Perfil de velocidade



Fonte: elaborada pelo autor.

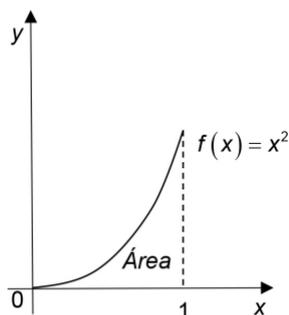
De posse de seu conhecimento de física, você sabe que a distância percorrida pelo foguete corresponde numericamente à área abaixo da curva do perfil de velocidade; no entanto, você não dispõe ainda de ferramentas matemáticas capazes de determinar essa área. Assim, você decide iniciar os estudos sobre integral e soma de Riemann, a fim de construir seu primeiro algoritmo para o cálculo da distância percorrida pelo foguete.

Não pode faltar

Soma de Riemann

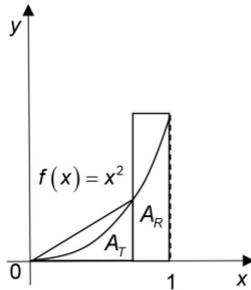
Por um instante, pense em todas as ferramentas de que você dispõe para o cálculo da área de uma figura geométrica. Com certeza, você deve se recordar de expressões matemáticas que são capazes de determinar a área de um triângulo, um trapézio, um círculo, entre outros. No entanto, todas essas ferramentas começam a ser insuficientes diante de uma situação ligeiramente mais complexa, por exemplo, o caso da determinação da área limitada pela função $f(x) = x^2$ para x variando entre 0 e 1, como mostra a Figura 4.2. Uma estratégia para esse tipo de situação seria preencher a área delimitada pela curva com figuras geométricas, as quais sabemos calcular a área, para, ao final, somar cada uma delas; neste caso, um retângulo e um triângulo, como visto na Figura 4.3. No entanto, esse processo, além de ser trabalhoso, introduz erros no cálculo das áreas.

Figura 4.2 | Função parabólica



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.3 | Aproximação da área da parábola



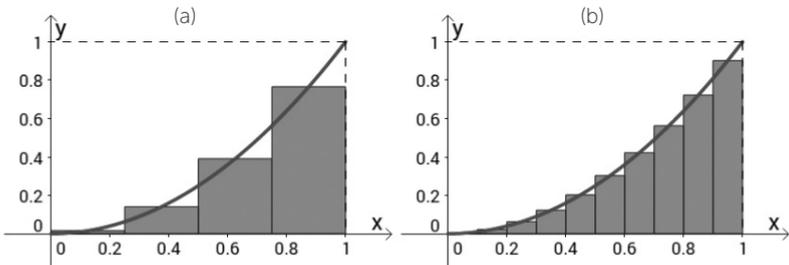
Fonte: elaborada pelo autor.

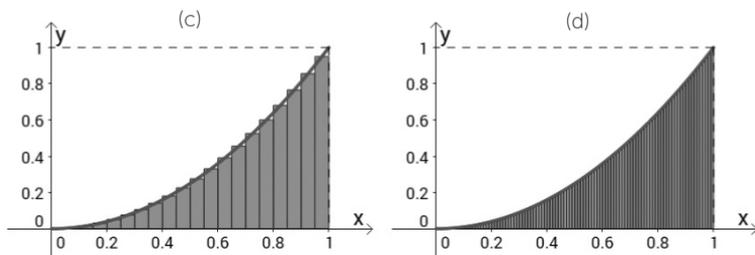
Nesse ponto, torna-se evidente que devemos lançar mão de um novo tipo de estratégia, a fim de superarmos esse tipo de problema. Essencialmente, vamos criar sucessivas aproximações para o cálculo da área e, em seguida, analisar o que ocorre quando aproximamos por infinitas partições.

Voltemos por um instante ao problema de tentarmos calcular a área abaixo da curva $f(x) = x^2$ com x variando entre 0 e 1. Inicialmente, aproximamos essa região por quatro retângulos, como pode ser visto na Figura 4.4, cada um desses retângulos tem comprimento da base de $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$ e altura $f(x_i^*)$, onde $x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$, logo sua área é obtida pelo produto da base com a altura, $f(x_i^*)\Delta x$. Somando cada uma das parcelas, obtemos uma aproximação para a área que desejamos determinar, assim:

$$\sum_{i=1}^4 f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + \dots + f(x_4^*)\Delta x = 0,25 \cdot 0,015625 + 0,25 \cdot 0,140625 + 0,25 \cdot 0,390625 + 0,25 \cdot 0,765625 = 0,328125$$

Figura 4.4 | Aproximação inicial: (a) 4 retângulos; (b) 10 retângulos; (c) 20 retângulos; (d) 100 retângulos





Fonte: elaborada pelo autor.

Experimente diferentes quantidades de retângulos para essa aproximação utilizando este objeto dinâmico: <<https://www.geogebra.org/m/dTXSrgw5>> (acesso em: 17 ago. 2017).

De maneira análoga, vamos particionar a região abaixo desta mesma curva com 10 e 100 retângulos, como mostra, Figura 4.4, e de modo análogo vamos calcular a área dos retângulos, assim:

$$\sum_{i=1}^{10} f(x_i^*) \Delta x = f(x_1^*) \Delta x + \dots + f(x_4^*) \Delta x = 0,3325$$

$$\sum_{i=1}^{100} f(x_i^*) \Delta x = f(x_1^*) \Delta x + \dots + f(x_4^*) \Delta x = 0,333325$$

Podemos observar que, à medida que aumentamos o número de retângulos, as aproximações obtidas foram melhorando, e elas

tendem a convergir para o valor $\frac{1}{3} \cong 0,33333\dots$. De posse desse

conceito geométrico, vamos definir agora a soma de Riemann para a integral de uma função.



Assimile

Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $a \leq x \leq b$; se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos

iguais a $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, tomarmos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ como os

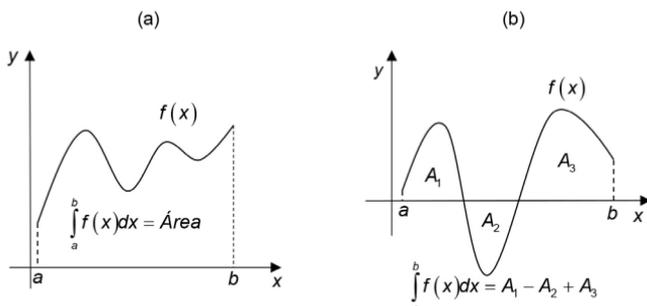
extremos desses subintervalos e escolhermos pontos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ no interior desses subintervalos de forma que x_i^* está no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$; então, a integral de $f(x)$ de a até b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Como observa Stewart (2013), o símbolo \int foi introduzido pelo matemático Gottfried Leibniz e consiste em um S alongado, foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamado de integrando, a e b são os limites de integração, sendo a o limite inferior e b o superior, sendo o símbolo dx uma variável de integração essencial que deve aparecer na integral.

No início da seção, utilizamos como problema motivacional o cálculo da área definida por uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ a fim de introduzirmos o conceito e a definição de uma integral. No entanto, essa interpretação geométrica apenas pode ser dada quando $f(x) > 0$ ao longo do intervalo $[a, b]$. No caso em que $f(x)$ assume valores positivos e negativos, a integral dessa função no intervalo dado consiste na área líquida definida pela curva. Cada uma dessas situações é ilustrada na Figura 4.5.

Figura 4.5 | Interpretação geométrica da integral: (a) $f(x) > 0$; (b) $f(x)$ troca de sinal em $[a, b]$



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso das áreas abaixo do eixo x serem maiores que as áreas acima, o resultado da integral será um número negativo.



Pesquise mais

A integral definida de uma função consiste no limite da soma de Riemann desta; assim, é de se esperar que as integrais “herdem” as propriedades dos limites. Veja nesse link <<http://www.mat.ufba.br/mat042/aula10/aula10.htm>> (acesso em: 5 set. 2017) algumas das propriedades mais importantes das integrais.

Propriedades da integral

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções cuja derivada exista em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

$$1- \int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a);$$

2- $f(x) + g(x)$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx;$$

3- $c \cdot f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$;

4- $f(x) - g(x)$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx;$$

5- Se $c \in (a, b)$ e $f(x)$ é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O primeiro surgiu com o problema da definição da reta tangente ao longo de uma curva, enquanto o segundo surgiu da necessidade do cálculo de áreas. Esse teorema se divide em duas partes e estabelece a precisa relação inversa entre integral e derivada.



Assimile

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1): se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então a função $g(x)$ definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.



Exemplificando

Utilizando a primeira parte do teorema fundamental do cálculo, encontre as derivadas para as seguintes funções:

$$\text{a) } g(x) = \int_0^x \sqrt{2+3t^2} dt \quad \text{b) } f(x) = \int_0^x t^2 \cdot \cos(t^2) dt$$

Solução:

$$\text{a) } \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sqrt{2+3t^2} dt \right) \Rightarrow g'(x) = \sqrt{2+3x^2}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x t^2 \cdot \cos(t^2) dt \right) \Rightarrow g'(x) = x^2 \cdot \cos(x^2)$$



Assimile

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2): se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.

A segunda parte do teorema fundamental do cálculo estabelece que, se conhecemos uma antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, então podemos calcular $\int_a^b f(x) dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nos extremos do intervalo $[a, b]$. A Tabela 4.1 reúne a antiderivada de algumas funções.

Tabela 4.1 | Algumas primitivas imediatas

$\int 1 dx = x + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$

$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + c$	$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$
$\int \text{tg}(x) dx = \ln \sec(x) + c$	$\int \sec(x) dx = \ln \sec(x) + \text{tg}(x) + c$
$\int \frac{du}{x^2 + a^2} = \text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c, a \in \mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{x-a}{x+a}\right + c, x^2 > a^2, a \in \mathbb{R}$

*A letra **C** indica uma constante de integração.

Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Utilizando a segunda parte do teorema fundamental do cálculo, determine as seguintes integrais.

a) $\int_{-2}^3 x^3 dx$, b) $\int_{-2}^3 5 dx$, c) $\int_0^3 (x^3 + 3x - 1) dx$, d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x) dx$

Solução: Com o auxílio da tabela de primitivas dada anteriormente, temos:

$$\text{a) } \int_0^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \left(\frac{4^4}{4} \right) - \left(\frac{0^4}{4} \right) = \frac{256}{4} = 64$$

$$\text{b) } \int_{-2}^3 5 dx = [5x]_{-2}^3 = 5 \cdot [3 - (-2)] = 25$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_0^2 = \\ &= \left(\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} - 0 \right) = 8 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x) dx = -[\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0) \right] = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

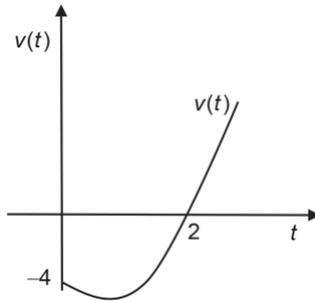


Uma partícula se move em linha reta e sua velocidade em função do tempo assume a forma $v(t) = 2t^2 - 2t - 4$. Nesse contexto, determine:

- O deslocamento da partícula entre os instantes de tempo $0 \leq t \leq 4$.
- A distância percorrida pela partícula entre os instantes de tempo $0 \leq t \leq 4$.

Solução: Antes de iniciarmos a resolução do exercício, vamos construir o gráfico da função de velocidade no intervalo de tempo dado. Como pode ser observado, a função assume valores negativos para $0 \leq t \leq 2$ e valores positivos para $2 \leq t \leq 4$, como mostra a Figura 4.6.

Figura 4.6 | Perfil de velocidade



Fonte: elaborada pelo autor.

O deslocamento da função é obtido através da integral $\int_0^4 (2t^2 - 2t - 4) dt$, ou seja, consiste na área líquida definida pela função; assim, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2t^2 - 2t - 4) dt &= \left[2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} - 4t \right]_0^4 \\ &= \left[2 \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{2 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right] - \left[2 \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^2}{2} - 4 \cdot 0 \right] = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Ao passo que a distância total percorrida consiste na área total, assim:

$$\int_0^4 |2t^2 - 2t - 4| dt = \int_0^2 -(2t^2 - 2t - 4) dt + \int_2^4 (2t^2 - 2t - 4) dt =$$
$$-\left[2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^2 + \left[2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} - 4t\right]_2^4 = 24$$



Refleta

Considere o cálculo da seguinte integral, observe com cuidado todas as etapas do desenvolvimento. Por ora, podemos adiantar que há um erro. Você seria capaz de identificá-lo?

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Um pequeno algoritmo

Neste ponto, reunimos alguns dos principais conceitos que nos permitem calcular a integral definida de uma função $f(x)$. No entanto, nosso interesse está voltado para o desenvolvimento de uma estratégia computacional capaz de determinar a integral de uma função para os casos em que não há uma forma analítica para ela. Um bom ponto de partida para a construção desse algoritmo é dado pela soma de Riemann. No entanto, como não podemos fazer $n \rightarrow \infty$ em um computador, estamos obtendo uma aproximação para a integral. O algoritmo a seguir usa-se dessa estratégia para calcular de forma aproximada a integral de uma função. Essencialmente, o algoritmo recebe o intervalo de integração, a função $f(x)$ (a qual é calculada no ponto médio de cada subintervalo) e o número de subintervalos, e ao final ele devolve a soma aproximada de Riemann.

01 INÍCIO

// Declaração das variáveis em aritmética flutuante e inteira. //

02 INTEIRO N, L;

03 REAL soma, DX, X0, X1, X_MEDIA;

```

// Leitura do intervalo e integração e número de subdivisões //
04 LEIA (a);
05 LEIA (b);
06 LEIA (N);
07  $L = b - a$ ;
08  $DX = (b - a)/N$ ;
/// As linhas de 9 a 15 se dedicam a realizar a soma aproximada de
Riemann //
09 para  $i = 1, \dots, N$  faça
10    $X1 = i \cdot DX$ ;
11    $X0 = (i - 1) \cdot DX$ ;
12    $X\_MEDIA = (X1 + X0) \cdot 0.5$ ;
13    $f(x)$  = expressão aritmética da função a ser integrada
14    $soma = soma + f(X\_MEDIA) \cdot DX$ ;
15 fim para
16 imprima(soma)
17 FIM_ALGORITMO

```

Sem medo de errar

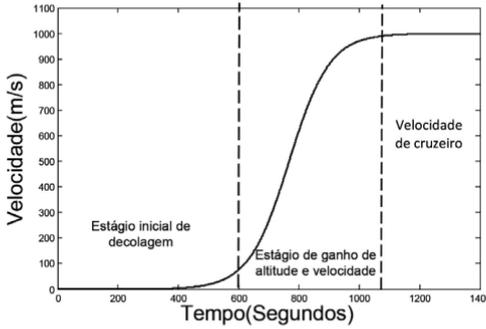
Neste ponto, reunimos todo o ferramental teórico matemático e computacional necessário para iniciarmos a primeira etapa do projeto aeroespacial empreendido pela TTGTech. Nesta fase, é sua função determinar a distância percorrida pelo foguete até que ele atinja a velocidade de cruzeiro. Os dados de que você dispõe foram fornecidos pela equipe de propulsão e consistem na função que descreve o perfil de velocidade, dado no Quadro 4.1, e a identificação de cada um dos estágios de voo, como mostra a Figura 4.7.

Quadro 4.1 | Perfil de velocidade

$v(t) = \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at}}$	<p>Parâmetros da Equação</p> <p>$r = 0,01$ arrasto aerodinâmico.</p> <p>$a = 0,015$, taxa de aceleração.</p> <p>$N_0 = 1000$, combustível necessário para atingir a velocidade de cruzeiro.</p>
----------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.7 | Perfil de velocidade do foguete

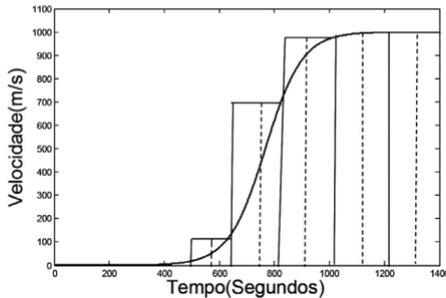


Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo a função que descreve o perfil de velocidade de difícil integração através de um método analítico, é interessante utilizar a estratégia da soma de Riemann, a fim de obter a distância percorrida pelo foguete até que ele atinja o estágio de voo de cruzeiro. No entanto, essa soma exige um número infinito de termos, o que não é possível em um computador, visto que ele trabalha com dados discretos. Assim, é preciso decidir pelo número de termos que irá compor a aproximação da soma de Riemann. Como uma aproximação inicial, poderia ser decidido $n = 10$. Assim, temos:

$$\sum_{i=1}^{10} v(t_i^*) \Delta t = [v(t_1^*) + v(t_2^*) + \dots + v(t_{10}^*)] \Delta t$$

Figura 4.8 | Perfil de velocidade foguete



Fonte: elaborada pelo autor.

Após a análise da Figura 4.8, vemos que a velocidade de cruzeiro se estende até 1.400 segundos; dessa forma, os parâmetros

para a soma de Riemann e, conseqüentemente, para o código computacional tornam-se:

$N = 10$, número de termos da soma de Riemann

$T_{\max} = 1400$, tempo máximo

$\Delta t = \frac{T_{\max}}{N}$, passo no tempo

$t_0 = 0$, tempo inicial

$t_i = i \cdot \Delta t$, tempo no instante i

$t_i^* = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$, tempo em que a função é avaliada

A inserção desses dados no somatório anterior nos leva aos seguintes resultados:

Tabela 4.2 | Soma de Riemann ($n = 10$)

Iteração	Tempo	t_i^*	$v(t_i^*)$
$i = 0$	0	-	-
$i = 1$	140	70	0,0286
$i = 2$	280	210	0,2333
$i = 3$	420	350	1,9021
$i = 4$	560	490	15,3237
$i = 5$	700	630	112,7538
$i = 6$	840	770	509,2701
$i = 7$	980	910	894,4557
$i = 8$	1120	1050	985,7562
$i = 9$	1260	1190	998,2337
$i = 10$	1400	1330	999,7834

Fonte: elaborada pelo autor.

Somando cada uma das parcelas contidas na última coluna da tabela, vem que:

$$\sum_{i=1}^{10} v(t_i^*) \Delta t = 6,3248 \cdot 10^5 \text{ m} = 632,48 \text{ km}$$

Assim, obtemos de forma aproximada a distância total percorrida pelo foguete até a velocidade de cruzeiro.

Avançando na prática

Cálculo de distância

Descrição da situação-problema

Uma aeronave, ao se aproximar da pista de pouso de um aeroporto, inicia os procedimentos de descida. Por questões de segurança, a redução de velocidade durante esse procedimento deve ser feita (hipoteticamente) seguindo a lei $v(t) = v_0 e^{-kt}$, onde v_0 é a velocidade que a aeronave se encontra ao receber a autorização para o pouso e k é a taxa de redução de velocidade determinada pela torre de controle. De posse dessas informações, determine a distância que a aeronave se encontrava do aeroporto ao receber a autorização para o pouso. Em seus cálculos, utilize tanto a estratégia computacional aprendida anteriormente (faça $n = 10$) quanto a forma analítica. Ao final, compare os resultados.

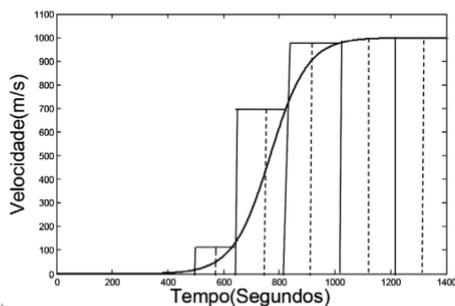
Dados:

Velocidade inicial: $v_0 = 200 \text{ m/s}$

Taxa de desaceleração: $k = 0,005 \text{ m/s}^2$

Tempo total de descida: $t = 1000\text{s}$

Figura 4.9 | Perfil de velocidade de descida



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Aplicando o algoritmo descrito na presente seção, os seguintes resultados são obtidos:

Tabela 4.3 | Soma de Riemann ($n = 10$)

Iteração	Tempo	t_i^*	$v(t_i^*)$	$v(t_i^*)\Delta t$
$i = 0$	0	-	-	-
$i = 1$	100	50	155,7602	15576,0157
$i = 2$	200	150	94,4733	9447,3311
$i = 3$	300	250	57,3010	5730,0959
$i = 4$	400	350	34,7548	3475,4789
$i = 5$	500	450	21,0798	2107,9845
$i = 6$	600	550	12,7856	1278,5572
$i = 7$	700	650	7,7548	775,4842
$i = 8$	800	750	4,7035	470,3549
$i = 9$	900	850	2,8528	285,2847
$i = 10$	1000	950	1,7303	173,0339

Fonte: elaborada pelo autor.

Somando cada uma das parcelas que compõem a soma de Riemann, temos:

$$\sum_{i=1}^{10} v(t_i^*)\Delta t = v(t_1^*)\Delta t + \dots + v(t_{10}^*)\Delta t = 39,320 \text{ km}.$$

Resolvendo analiticamente através da segunda parte do teorema fundamental do cálculo, vem:

$$\int_0^{1000} 200e^{-0,005t} dt = 200 \left[-\frac{e^{-0,005t}}{0,005} \right]_0^{1000} \cong 39,730 \text{ km}$$

Considerando a fórmula do erro relativo, temos:

$$\left| \frac{S_{\text{analítico}} - S_{\text{numérico}}}{S_{\text{analítico}}} \right| = \left| \frac{39,730 - 39,320}{39,730} \right| = 0,0103. \text{ Esse resultado}$$

nos mostra que, ao utilizarmos a soma de Riemann com 10 termos para resolver esse problema, cometemos um erro de apenas 1%.

Faça valer a pena

1. Considere a função $f(x) = 2 \cdot e^{-4x^2}$ e os pontos $a = 0$ e $b = 2$ como parâmetros de entrada do seguinte trecho de código.

01 INTEIRO N, L;

02 REAL SOMA, DX, X0, X1, X_MEDIA;

03 LEIA (a);

04 LEIA (b);

05 $L = b - a$;

06 $N = 4$;

07 $DX = (b - a)/N$;

08 $soma = 0,0$;

09 para $i = 2, \dots, N$ faça

10 $x1 = i \cdot DX$;

11 $x0 = (i - 1) \cdot DX$

12 $X_MEDIA = (X1 + X0) \cdot 0,5$;

13 $fx = 2 \cdot \exp(-4 \cdot X_MEDIA \cdot X_MEDIA)$

14 $soma = soma + fx \cdot DX$;

15 fim para

16 imprima(soma)

Nesse contexto, julgue as afirmações que se seguem:

I – Para $i = 1$, a variável fx tem valor entre 1,5000 e 1,6000.

II – Para $i = 2$, a variável dx tem valor igual a 0,500.

III – Para $i = 2$, a variável $fx \cdot DX$ tem valor entre 0,1000 e 0,1100.

IV – Para $i = 3$, a variável X_MEDIA tem valor igual a 1,2500.

V – A função imprima mostra um valor entre 0,8500 e 0,8900.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmações II e IV estão corretas.
- c) Apenas as afirmações III e V estão corretas.
- d) Apenas as afirmações II, IV e V estão corretas.
- e) As afirmações I, II, III, IV e V estão corretas.

2. Considere a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo. Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, então a função $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, $a < x < b$, é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Nesse contexto, a alternativa que apresenta a derivada da função

$$g(y) = \int_2^y t^2 \cos(t) dt \text{ é:}$$

- a) $g'(y) = \frac{y^3}{3} \text{sen}(y)$
- b) $g'(y) = 2y \text{sen}(y)$
- c) $g'(y) = y^2 \cos(y)$
- d) $g'(y) = 2y \cos(y) + 2 \cdot 2 \cdot \cos(2)$
- e) $g'(y) = 2y \text{sen}(y) - 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}(2)$

3. Considerando a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, então

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$. Nesse contexto, calcule a integral

$$\int_1^2 x(x + x^5) dx, \text{ e, em seguida, julgue as afirmações que se seguem:}$$

I – A antiderivada $F(x)$ é igual a $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7}$.

II – A antiderivada $F(x)$ é igual a $2x + 6x^5$.

III – O valor de $F(b)$ é igual a $\frac{440}{21}$.

IV – O valor de $F(a)$ é igual a $\frac{10}{21}$.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas a afirmação I está correta.
- b) Apenas a afirmação II está correta.
- c) Apenas as afirmações I e IV estão corretas.
- d) Apenas as afirmações II e III estão corretas.
- e) Apenas as afirmações I, III e IV estão corretas.

Seção 4.2

Aproximação por soma de Riemann

Diálogo aberto

A indústria aeroespacial tem como uma de suas primordiais preocupações a precisão de seus modelos e cálculos, uma vez que eventuais erros podem levar a perdas irreparáveis. Assim, a fim de garantir a exatidão dos resultados obtidos em cálculos e modelos, é utilizada a estratégia da verificação dos resultados, uma técnica que tem como objetivo empregar métodos diferentes para a resolução de um mesmo problema – se ambos estiverem certos, os resultados devem se aproximar para um mesmo valor. Nesse contexto, voltemos ao seu papel no projeto da TTGTech de desenvolvimento de um foguete lançador de satélites. Ao final da primeira parte do projeto, você desenvolveu um algoritmo capaz de calcular o espaço percorrido pelo foguete do lançamento até o estágio do voo de cruzeiro. Nesta segunda fase, será realizada a verificação dos resultados anteriores, assim, inicialmente, será proposto o estudo teórico das somas de Riemann superior, inferior e centrada. Posteriormente, será feita a implementação de um código computacional em que cada uma delas é calculada, tem desenvolvido o algoritmo, que será, então, aplicado à situação-problema desta unidade. Assim, teremos três métodos distintos aplicados a um mesmo problema e esperamos, dessa forma, que os resultados aqui obtidos se aproximem dos obtidos na seção anterior, validando-os.

Não pode faltar

Introdução

Na seção anterior, estudamos as definições de integral e de soma de Riemann e vimos como esses dois conceitos estão fortemente ligados. Consideremos novamente, por um momento, a definição de integral.



Assimile

Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $a \leq x \leq b$; se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais

$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, tomarmos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ os extremos

desses subintervalos e escolhermos pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a integral de $f(x)$ de a para b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

A definição nos diz que, dada uma partição do intervalo $[a, b]$, se tomarmos cada x_i^* pertencentes, ao intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ e calcularmos o limite da soma de Riemann dessa aproximação, obtemos a integral da função $f(x)$. A definição apenas nos impõe que x_i^* deve estar contido no intervalo; assim, faremos, ao longo desta seção, alguns experimentos. Inicialmente, iremos considerar $x_i^* = \max[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, x_i assume o valor máximo do intervalo, em seguida, iremos considerar $x_i^* = \min[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, x_i assume o valor mínimo do intervalo; e, por fim, consideraremos x_i^* assumindo o valor médio, ou seja, $x_i^* = \text{med} \left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right]$. Ao final desta seção, mostraremos que cada uma das somas converge para um mesmo resultado.

Soma de Riemann inferior



Assimile

Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $a \leq x \leq b$; se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais

$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, tomarmos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ os extremos

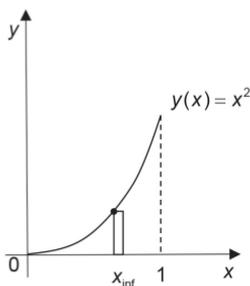
desses subintervalos e escolhermos pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo

$[x_{i-1}, x_i]$, tal que $x_i^* = \min[x_{i-1} - x_i]$, então a integral de $f(x)$ de a para b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

A definição anterior nos diz que estamos aproximando a área definida pela curva $y = f(x)$ por retângulos que, têm a dimensão da base $|x_{i-1} - x_i|$ e altura $f(x_i^*)$ com $x_i^* = \min[x_{i-1} - x_i]$. Consideremos o caso particular em que $y(x) = x^2$, as Figuras 4.10 e 4.11 ilustram a aproximação feita pela soma de Riemann considerando a definição dada, sendo que na Figura 4.10, destacamos o valor mínimo assumido por $f(x_i^*)$ e, na Figura 4.11, a aproximação com dez faixas retangulares.

Figura 4.10 | Aproximação inferior



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.11 | Aproximação com dez faixas inferiores



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Considere a função $y(x) = x^2$, definida no intervalo $[0, 1]$. Determine a soma de Riemann inferior com $n = 10$. Em seguida, calcule o erro relativo, comparando com a solução analítica.

Solução: Considerando os dados, temos:

$$L = b - a = 1 - 0 = 1 \Rightarrow L = 1, \quad \Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1}{10} \Rightarrow \Delta x = 0,1$$

Como estamos interessados nos limites inferiores de cada subintervalo, definiremos $x_{\text{inf}} = (i - 1) \cdot \Delta x$, onde Δx é o comprimento da base do retângulo, i indica o retângulo em que estamos realizando o cálculo e x_{inf} o limite inferior da base. Assim, temos:

Tabela 4.4 | Soma de Riemann inferior

i	1	2	3	4	5
x	0,0 \mapsto 0,1	0,1 \mapsto 0,2	0,2 \mapsto 0,3	0,3 \mapsto 0,4	0,4 \mapsto 0,5
y	0,00	0,01	0,04	0,09	0,16

i	6	7	8	9	10
x	0,5 \mapsto 0,6	0,6 \mapsto 0,7	0,7 \mapsto 0,8	0,8 \mapsto 0,9	0,9 \mapsto 0,1
y	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{inf}_i}) \Delta x = \Delta x [y(x_{\text{inf}_1}) + \dots + y(x_{\text{inf}_{10}})] =$$

$$\Rightarrow 0,1 \cdot [0,00 + 0,01 + 0,04 + \dots + 0,81]$$

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{inf}_i}) \Delta x = 0,1 \cdot 2,85 = 0,285$$

Determinada a soma de Riemann, vamos compará-la com o resultado analítico que o cálculo nos fornece.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \left(\frac{0}{3} \right)^3 = \frac{1}{3}$$

Calculando, agora, o erro relativo, temos:

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{inf}_i}) \Delta x - \int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \right| = \left| \frac{0,285 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \right| = 0,145$$

Portanto, cometemos um erro de 14,5% ao utilizarmos a soma de Riemann inferior com $n = 10$ para aproximarmos a área abaixo da curva $y(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$.

Soma de Riemann superior

Diferentemente da aproximação anterior, faremos aqui uma aproximação "por cima", ou seja, vamos considerar os valores máximos assumidos por x_i^* em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e, em seguida, tomaremos a soma de Riemann. Formalmente, temos:



Assimile

Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $a \leq x \leq b$; se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais

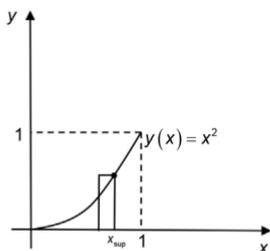
$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, tomamos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ os extremos

desses subintervalos e escolhermos pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal que $x_i^* = \max[x_{i-1}, x_i]$, então a integral de $f(x)$ de a para b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

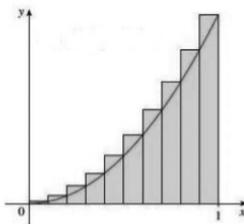
A definição anterior nos diz que estamos aproximando a área definida pela curva $y = f(x)$ por retângulos que têm a dimensão da base $|x_{i-1} - x_i|$ e altura $f(x_i^*)$ com $x_i^* = \max[x_{i-1}, x_i]$. Como no caso anterior, consideremos $y(x) = x^2$. As Figuras 4.12 e 4.13 ilustram aproximação obtida através da soma de Riemann considerando a definição anterior. Na Figura 4.12, destacamos o valor máximo assumido por $f(x_i^*)$, e na Figura 4.13, a aproximação com dez faixas retangulares.

Figura 4.12 | Aproximação inferior



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.13 | Aproximação com dez faixas inferiores



Fonte: elaborada pelo autor.

Veja como funciona a aproximação superior de modo dinâmico neste objeto interativo: <<https://www.geogebra.org/m/hPYSBvAz>> (acesso em: 11 ago. 2017).



Exemplificando

Considere a função $y(x) = x^2$, definida no intervalo $[0,1]$. Determine a soma de Riemann superior com $n = 10$. Em seguida, calcule o erro relativo, comparando com a solução analítica.

Solução: Considerando os dados, temos:

$$L = b - a = 1 - 0 = 1 \Rightarrow L = 1, \Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1}{10} \Rightarrow \Delta x = 0,1$$

Como estamos interessados nos limites superiores de cada subintervalo, definiremos $x_{\text{sup}} = i \cdot \Delta x$, onde Δx é o comprimento da base do retângulo, i indica o retângulo em que estamos realizando o cálculo e x_{sup} o limite inferior da base. Assim, temos:

Tabela 4.5 | Soma de Riemann superior

i	1	2	3	4	5
x	0,0 \mapsto 0,1	0,1 \mapsto 0,2	0,2 \mapsto 0,3	0,3 \mapsto 0,4	0,5 \mapsto 0,6
y	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25

i	6	7	8	9	10
x	0,5 \mapsto 0,6	0,6 \mapsto 0,7	0,7 \mapsto 0,8	0,8 \mapsto 0,9	0,9 \mapsto 1,0
y	0,36	0,49	0,64	0,81	1,0

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{sup}_i}) \Delta x = \Delta x [y(x_{\text{sup}_1}) + \dots + y(x_{\text{sup}_{10}})] \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{sup}_i}) \Delta x = 0,1 \times [0,01 + 0,04 + 0,09 + \dots + 1,0]$$

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{sup}_i}) \Delta x = 0,1 \cdot 3,85 = 0,385$$

Determinada a soma de Riemann, vamos compará-la com o resultado analítico que o cálculo nos fornece.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \left(\frac{0}{3} \right)^3 = \frac{1}{3}$$

Calculando, agora, o erro relativo, temos:

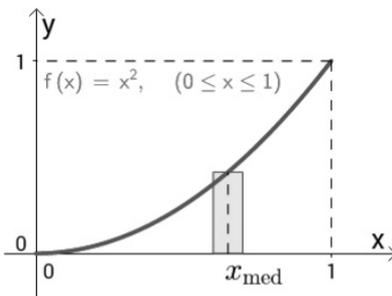
$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} y(x_{\text{sup}_i}) \Delta x - \int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \right| = \left| \frac{0,385 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \right| = 0,155$$

Portanto, cometemos um erro de 15,5% ao utilizarmos a soma de Riemann superior com $n = 10$ para aproximarmos a área abaixo da curva $y(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$.

Soma de Riemann centrada

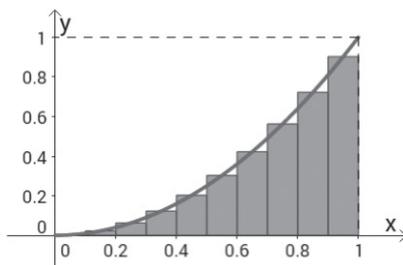
Até o momento, utilizamos os valores extremos contidos em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, assim iremos considerar agora o valor médio entre esses dois pontos, ou seja, $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$; portanto, cada retângulo tem altura $f(x_i^*)$ com $x_i^* = \text{med}[x_{i-1} - x_i]$ e dimensão da base $|x_{i-1} - x_i|$. A definição da soma de Riemann é feita de modo totalmente análogo às anteriores, bastando considerar os parâmetros aqui enunciados. Não faremos, neste momento, para não tornar o texto cansativo. As imagens a seguir ilustram a aproximação obtida considerando o ponto intermediário; na Figura 4.14, destacamos o valor central assumido $f(x_i^*)$, e na Figura 4.15, a aproximação com dez retângulos.

Figura 4.14 | Aproximação média (detalhe)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4.15 | Aproximação média



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Considere a função $y(x) = x^2$, definida no intervalo $[0, 1]$. Determine a soma de Riemann centrada com $n = 10$. Em seguida, calcule o erro relativo, comparando com a solução analítica.

Solução: Considerando os dados, temos:

$$L = b - a = 1 - 0 = 1 \Rightarrow L = 1, \Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1}{10} \Rightarrow \Delta x = 0,1$$

Como estamos interessados nos limites inferiores de cada subintervalo, definiremos $x_{med} = (i \cdot \Delta x + (i - 1) \cdot \Delta x) \cdot 0,5$, sendo Δx a espessura da base do retângulo, i o retângulo em que os cálculos estão sendo feitos e x_{med} o valor médio de x . Assim, temos:

Tabela 4.6 | Soma de Riemann centrada

i	1	2	3	4	5
x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45
y	0,0025	0,0225	0,0625	0,1225	0,2025

i	6	7	8	9	10
x	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
y	0,3025	0,4225	0,5625	0,7225	0,9025

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{med_i}) \Delta x = \Delta x [y(x_{med_1}) + \dots + y(x_{med_10})] = 0,1 \cdot [0,0025 + \dots + 0,9025]$$

$$\sum_{i=1}^{10} y(x_{med_i}) \Delta x = 0,1 \cdot 3,325 = 0,3325$$

Determinada a soma de Riemann, vamos compará-la com o resultado analítico que o cálculo nos fornece.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{0}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Calculando, agora, o erro relativo, temos:

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} y(x_{med_i}) \Delta x - \int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \right| = \left| \frac{0,3325 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \right| = 0,0025$$

Portanto, cometemos um erro de 0,25% ao utilizarmos a soma de Riemann centrada com $n = 10$ para aproximarmos a área abaixo da curva $y(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$.



Pesquise mais

Acesse o link <http://wp.ufpel.edu.br/nucleomateceng/files/2012/07/Somas-de-Riemann-e-integra%C3%A7%C3%A3o-num%C3%A9rica_.pdf> (acesso em: 5 set. 2017) e veja outra abordagem da integração numérica e das somas de Riemann.

Análise das aproximações de Riemann

Ao longo desta seção, estudamos o comportamento das somas de Riemann superior e inferior separadamente; aqui, iremos apresentar o comportamento das duas somas simultaneamente. Queremos com isso mostrar como ocorre a convergência para a área abaixo da curva $y(x) = x^2$. A Tabela 4.7 reúne os resultados de seis experimentos numéricos, para cada um deles foram registrados os valores de ambas as aproximações de Riemann. É fácil observar que, à medida que o número de elementos retangulares aumenta, a soma superior e a inferior se aproximam; no entanto, não conseguimos visualizar como essa aproximação ocorre.

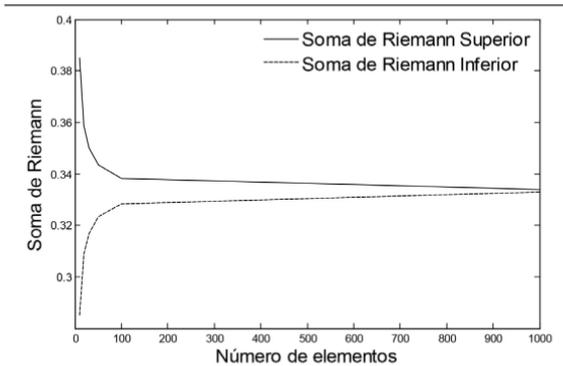
Tabela 4.7 | Comparações das somas de Riemann

Elementos	Soma inferior	Soma superior
10	0,85	0,385
20	0,30875	0,35875
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234	0,3434
100	0,32835	0,33835
1000	0,3328335	0,3338335

Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4.16 mostra os dados da Tabela 4.7, em que fica evidente a aproximação “por cima” feita pela soma de Riemann superior e a aproximação por baixo feita pela soma de Riemann inferior. Além disso, também podemos observar como os resultados se aproximam à medida que o número de elementos aumenta.

Figura 4.16 | Aproximações da soma de Riemann



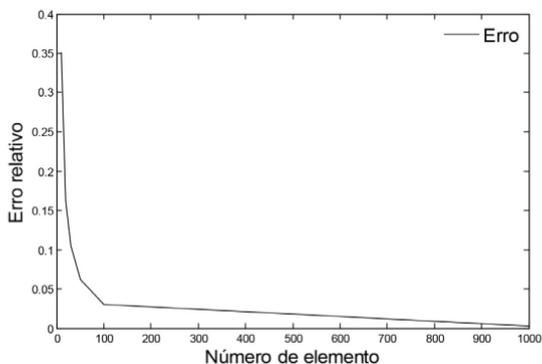
Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4.17 mostra o comportamento do erro relativo entre as aproximações da soma superior e inferior; ela foi obtida fazendo

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^N v(t_{\text{inf}})\Delta t - \sum_{i=1}^N v(t_{\text{sup}})\Delta t}{\sum_{i=1}^N v(t_{\text{inf}})\Delta t} \right|, \text{ nela fica evidente que ambas as somas}$$

convergem para um mesmo resultado, visto que, para $n = 1000$, o erro relativo é menor que 0,05.

Figura 4.17 | Erro em função do número de elementos



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Qual seria o perfil da curva do erro relativo se utilizássemos uma escala logarítmica nos eixos horizontal e vertical?

Algoritmo

Neste ponto, reunimos os conceitos necessários para implementarmos o algoritmo que seja capaz de determinar de forma aproximada a integral de uma função através das somas de Riemann inferior, superior e no ponto médio. Como não podemos fazer $n \rightarrow \infty$ na soma de Riemann ao utilizar um computador, devemos, então, estipular uma aproximação para esse somatório. Essencialmente, o algoritmo recebe a função a ser integrada e o número de subintervalos a serem utilizados; ao final, devolve as aproximações da soma de Riemann nos pontos inferiores, superiores e ponto central.

01 INÍCIO

//Declaração das variáveis em aritmética inteira e em ponto flutuante.

02 INTEIRO n, i, k;

03 REAL soma_inf, soma_media, soma_sup;

```

04 REAL fx_inf, fx_sup, fx_media;
05 REAL a, b, DX;
06 LEIA(N);
07 LEIA(a);
08 LEIA(b);
09 DX = (b-a)/N;

    /// As linhas de 13 a 23 se dedicam a realiza a soma aproximada
de Riemann //
10 somainf = 0
11 somasup = 0
12 somamed = 0
13 para  $i = 1, \dots, N$  faça
14      $x_{inf} = (i - 1) \cdot DX;$ 
15      $x_{sup} = i \cdot DX$ 
16      $x_{media} = (x_{inf} + x_{sup}) \cdot 0.5;$ 
17      $fx_{inf} = f(x_{inf})$ 
18      $fx_{media} = f(x_{media})$ 
19      $fx_{sup} = f(x_{sup})$ 
20      $soma_{inf} = soma_{inf} + fx_{inf}$ 
21      $soma_{media} = soma_{media} + fx_{media}$ 
22      $soma_{sup} = soma_{sup} + fx_{sup}$ 
23 fim para
24 imprima(somainf)
25 imprima(somamed)
26 imprima(somasup)
27 FIM ALGORITIMO

```

Sem medo de errar

Neste ponto, reunimos todo o ferramental teórico matemático e computacional necessário para iniciarmos a segunda etapa do projeto aeroespacial empreendido pela TTGTech. Nesta fase, os

esforços estão voltados para a verificação dos resultados obtidos na determinação da distância percorrida pelo foguete até que ele atinja a velocidade de cruzeiro. Essencialmente, iremos aplicar, nesta parte do projeto, o algoritmo desenvolvido em aula, a fim de obter as aproximações inferior, superior e no ponto médio da soma de Riemann. As informações de que dispomos são a equação do perfil de velocidades e os parâmetros a ela associados, os quais estão reunidos no quadro a seguir:

Quadro 4.2 | Perfil de velocidade

$v(t) = \frac{N_0 \times r}{r + (N_0 - r) \times e^{-at}}$	<p style="text-align: center;">Parâmetros da Equação</p> <p>$r = 0,01$, arrasto aerodinâmico. $a = 0,015$, taxa de aceleração. $N_0 = 1000$, combustível necessário para atingir a velocidade de cruzeiro.</p>
------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: elaborado pelo autor.

Em um primeiro momento, foram utilizados 10 retângulos; os pontos de mínimo foram tomados à esquerda de cada retângulo, e os de máximo, à direita, e o ponto médio resultante da média aritmética dos pontos superior e inferior.

Tabela 4.8 | Aprox. pontos inferiores

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
0,0000	0,001
140	0,0817
280	0,6664
420	5,4163
560	42,5776
700	266,4097
840	747,8323
980	960,3453
1120	994,9690
1260	999,3812
Espaço	
$\sum_{i=1}^{10} v(t_{\text{inf}}) \Delta t = 562,48 \text{ km}$	

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 4.9 | Aprox. ponto médio

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
70	0,0286
210	0,2333
350	1,9021
490	15,3237
630	112,7538
770	509,2701
910	894,4557
1050	985,7562
1190	998,2337
1330	999,7834
Espaço	
$\sum_{i=1}^{10} v(t_{\text{medio}}) \Delta t = 632,48 \text{ km}$	

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 4.10 | Aprox. pontos superiores

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
140	0,0817
280	0,6664
420	5,4163
560	42,5776
700	266,4097
840	747,8323
980	960,3453
1120	994,9690
1260	999,3812
1400	999,9242
Espaço	
$\sum_{i=1}^{10} v(t_{\text{sup}}) \Delta t = 702,46 \text{ km}$	

Fonte: elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos após a execução do algoritmo estão organizados nas Tabelas 4.8 a 4.10. Como pode ser observado, a diferença relativa entre as aproximações inferior e as aproximações superiores estão em torno de 25%. No entanto, à medida que adicionamos retângulos nas aproximações, a diferença entre a soma superior e inferior diminui, como mostra a Tabela 4.11, que reúne cinco experimentos numéricos, em que cada um deles foram utilizadas as aproximações inferiores, superiores e média.

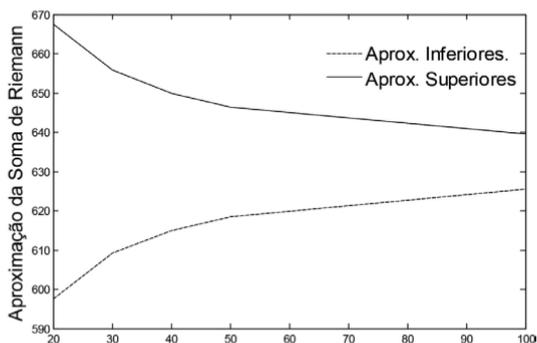
Tabela 4.11 | Aproximações de Riemann

Número de termos	Soma Inferior $\sum_{i=1}^N v(t_{inf}) \Delta t$	Soma Média $\sum_{i=1}^N v(t_{medio}) \Delta t$	Soma Superior $\sum_{i=1}^N v(t_{sup}) \Delta t$
20	$\sum_{i=1}^N v(t_{inf}) \Delta t$	632,48	667,47
30	609,15	632,48	655,81
40	614,98	632,48	649,98
50	618,48	632,48	646,48
100	625,48	632,48	639,48

Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4.18 ilustra os dados obtidos na Tabela 4.11. Como pode ser observado, a soma superior e a soma inferior se aproximam à medida que o número de elementos retangulares utilizados aumenta.

Figura 4.18 | Perfil das aproximações em função do número de elementos



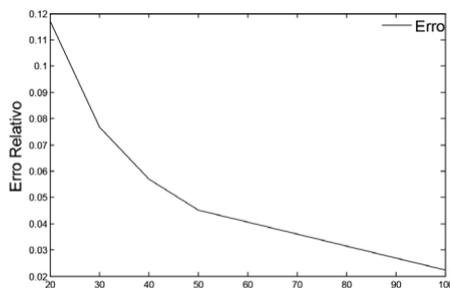
Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4.19 mostra o decaimento do erro relativo em função do número de elementos; a obtenção dessa curva foi feita calculando, para cada uma das amostras do experimento da Tabela 4.11, o quociente

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^N v(t_{\text{inf}})\Delta t - \sum_{i=1}^N v(t_{\text{sup}})\Delta t}{\sum_{i=1}^N v(t_{\text{inf}})\Delta t} \right|.$$

A análise da Figura 4.19 nos permite concluir que ambos os métodos se aproximam do mesmo resultado à medida que o número de elementos utilizados na aproximação da soma de Riemann aumenta. Esse resultado nos garante a correta implementação dos algoritmos.

Figura 4.19 | Decaimento do erro relativo



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Derramamento de óleo

Descrição da situação-problema

O derramamento de um poluente foi monitorado por uma equipe ao longo de 10 horas. Os dados coletados, ou seja, a taxa de derramamento e a hora de medição são apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 | Derramamento de óleo

Horas h	0	2	4	6	8	10
$v\left(\frac{L}{h}\right)$	8,0	7,5	7,0	6,5	6,0	5,3

Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando a soma de Riemann inferior e superior, estime o volume de óleo derramando.

Resolução da situação-problema

A fim de determinarmos as somas de Riemann inferior e superior, vamos considerar, inicialmente, a tabela com os dados coletados; assim, temos:

Tabela 4.13 | Derramamento de óleo (Resolução)

Horas h	0	2	4	6	8	10
$v\left(\frac{L}{h}\right)$	8,0	7,5	7,0	6,5	6,0	5,3

Fonte: elaborada pelo autor.

Como pode ser observado, as medições foram realizadas a cada duas horas, portanto temos $\Delta t = 2$. Para cada um desses subintervalos iremos considerar, respectivamente, o menor e o maior valor assumido por $v\left(\frac{L}{h}\right)$, obtendo, assim, a soma de Riemann inferior e superior, respectivamente.

$$\sum_{i=1}^3 v(t_{\text{inf}}) \Delta t = 8,0 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 42$$

Agora, considerando a soma superior de Riemann, vem:

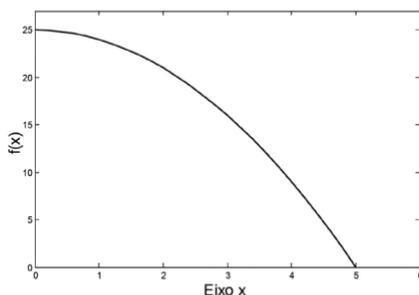
$$\sum_{i=1}^3 v(t_{\text{sup}}) \Delta t = 7,5 \cdot 2 + 6,5 \cdot 2 + 5,3 \cdot 2 = 38,6$$

Portanto, esperamos que durante o derramamento de óleo tenham vazado entre 42 e 38,6 litros aproximadamente, uma melhor estimativa poderia ser obtida se os intervalos de medição fossem menores e houvesse um maior número de medições.

Faça valer a pena

1. Seja A a área da região definida pela função $f(x) = 25 - x^2$ no intervalo $[0,5]$, cujo gráfico é mostrado na Figura 4.20.

Figura 4.20 | Gráfico de $f(x) = 25 - x^2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, assuma as aproximações da soma de Riemann com $n = 5$ utilizando os pontos inferiores e superiores de cada subintervalo. Nesse contexto, julgue as afirmações que se seguem:

- I – A soma de Riemann utilizando os limites inferiores está entre 75 e 85.
- II – A soma de Riemann utilizando os limites superiores está entre 65 e 75.
- III – O erro relativo da soma de Riemann inferior em relação à solução analítica é de 14%.
- IV – O erro relativo da soma de Riemann superior em relação à solução analítica é de 16%.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- b) Apenas as afirmativas III e IV estão corretas.
- c) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- d) Apenas as afirmativas II e IV estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas II, III e IV estão corretas.

2. Um cavalo de competição tem sua velocidade registrada ao longo dos 3,5 segundos iniciais. Esses dados são, então, armazenados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 | Velocidades em função do tempo

$t(s)$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$v\left(\frac{m}{s}\right)$	0	6,0	10	14	18	19	20	22,0

Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando as somas inferior, superior e no ponto médio, determine as aproximações para a distância percorrida pelo cavalo. Em seus cálculos, utilize $\Delta t = 0,5$; em seguida, julgue as afirmações que se seguem.

I – A soma de Riemann inferior fornece uma aproximação de 43,5 m.

II – A soma de Riemann superior fornece uma aproximação de 49 m.

III – A soma de Riemann no ponto médio fornece a aproximação de 54,5 m.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- e) As afirmativas I, II e III estão corretas.

3. Um experimento de laboratório registra a evolução da velocidade de uma partícula ao longo do tempo e armazena os dados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 | Evolução da velocidade de uma partícula

Tempo (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Velocidade $\left(\frac{m}{s}\right)$	0	6,2	10,8	14,9	18,1	19,4	20,2

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de determinar o espaço percorrido pela partícula, os cientistas empregam a soma de Riemann inferior e a superior. Nesse contexto, julgue as afirmativas a seguir e marque V para verdadeiro e F para falso.

() A estimativa da distância percorrida calculada pela soma inferior de Riemann vale 34,7.

() A estimativa da distância percorrida calculada pela soma superior de Riemann vale 44,8.

() O módulo da diferença entre as somas superior e inferior vale 10,1.

Agora, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V-V-V.
- b) V-V-F.
- c) V-F-V.
- d) F-V-V.
- e) F-F-V.

Seção 4.3

Método dos trapézios

Diálogo aberto

Neste momento, iremos retomar seu papel no projeto da TTGTTech, que consiste em desenvolver métodos computacionais capazes de determinar a distância percorrida pelo foguete lançador de satélites. Ao longo desse projeto, três fases foram definidas para o desenvolvimento dos algoritmos. Na primeira delas, você estudou o conceito de integral, soma de Riemann, os teoremas fundamentais do cálculo e aprendeu as principais regras de integração. Ao final dessa primeira fase, você foi capaz de implementar seu primeiro código computacional, fazendo uso da soma de Riemann com um número finito de termos, a fim de aproximar a integral do perfil de velocidades do foguete, obtendo, assim, a distância percorrida por ele. Na segunda etapa do projeto, os estudos sobre soma de Riemann foram expandidos para as somas de Riemann superior, inferior e centrada; isso permitiu a você validar os resultados obtidos até então, uma vez que foi possível mostrar que, à medida que o número de retângulos utilizados nos métodos de aproximação aumentava, eles convergiam para o mesmo resultado.

Realizada a validação dos resultados, você está pronto para iniciar a terceira fase do projeto. Nesta etapa, você realizará o estudo teórico matemático do método dos trapézios e, posteriormente, sua implementação computacional. Diferentemente da aproximação realizada pela soma de Riemann que utiliza retângulos, o método dos trapézios, como o nome diz, utiliza trapézios para o cálculo da integral da função; além disso, como estudaremos, este método e suas propriedades estão estritamente relacionados com os métodos de interpolação polinomial. Neste ponto, estamos prontos para iniciarmos a terceira e última fase do projeto. Sendo assim, reúna-se com sua equipe e bom estudos.

Não pode faltar

Introdução

Ao longo desta unidade, temos estudado técnicas matemáticas e estratégias computacionais que nos permitem calcular de forma aproximada a integral de uma função $f(x)$. Essencialmente, o que temos feito até aqui é utilizar a definição de soma de Riemann com um número finito de retângulos, a fim de aproximar a área abaixo curva da função $f(x)$ e dessa forma determinar a integral da função. Como estudamos nas seções anteriores, quando o número de retângulos n é suficientemente grande, a aproximação fornecida por essa estratégia é relativamente precisa quando comparada com a solução analítica. No entanto, uma pergunta intuitiva é: seria a aproximação por regiões retangulares a única estratégia capaz de obter numericamente a integral de uma função? A resposta é não.

As estratégias mais sofisticadas para a integração numérica de uma função consistem em substituir a função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime de forma razoável no intervalo $[a, b]$ e, assim, transformar o problema em uma integração polinomial, o que é fácil de se fazer, visto que métodos analíticos podem ser utilizados na sua resolução.

Fórmulas de Newton-Cotes

Ao longo desta seção, vamos estudar o método dos trapézios, que consiste em uma das fórmulas fechadas de Newton-Cotes. Esse tipo de estratégia consiste em utilizar um polinômio que interpola $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ a partir de pontos igualmente espaçados; assim, dado um intervalo $[a, b]$, consideramos uma partição deste em n subintervalos, de modo que $h = \frac{b-a}{n}$, e para $i = 0, 1, \dots, n-1$ temos $x_{i+1} - x_i = h$, o que nos permite escrever a integral de $f(x_i)$ da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b]$$

Onde os coeficientes A_i são determinados em função do grau do polinômio interpolador.

Regra dos trapézios

A regra dos trapézios consiste em aproximar a função $f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ por um polinômio de grau um. Assim, considerando a fórmula do polinômio interpolador de Lagrange, temos:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^1 L_i f(x_i) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1)$$

Integrando a última igualdade ao longo do intervalo $[a, b]$, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_1(x) dx = \int_a^b [f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x)] dx \\ &= f(x_0) \cdot \int_a^b L_0(x) dx + f(x_1) \cdot \int_a^b L_1(x) dx = A_0 \cdot f(x_0) + A_1 \cdot f(x_1) \end{aligned}$$

Considerando $h = x_1 - x_0$, temos:

$$A_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \int_{a=x_0}^{b=x_1} (x - x_0) dx = \frac{1}{h} \cdot \int_{a=x_0}^{b=x_1} (x - x_0) dx$$

Realizando a mudança de variável $u(x) = x - x_0$, a integral anterior torna-se:

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{a=x_0}^{b=x_1} (x - x_0) dx = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u du = \frac{1}{h} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{h} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{0}{2} \right] = \frac{h}{2}$$

Portanto,

$$A_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{h}{2}$$

De modo análogo, podemos obter o coeficiente A_2 ; assim, temos:

$$A_2 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{1}{h} \int_0^h u du = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{h^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{h}{2}$$

$$A_2 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{h}{2}$$

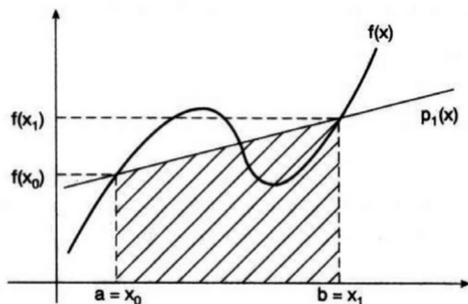


Assim, obtemos a regra do trapézio, que consiste em aproximar a integral de $f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_0) \right) \cdot h, \text{ sendo } h = x_2 - x_1$$

Geometricamente, a regra do trapézio, pode ser interpretada como sendo a área definida pelo trapézio cuja base maior mede $f(x_1)$, a base menor mede $f(x_0)$ e possui altura $h = x_1 - x_0$. A Figura 4.21 ilustra essa interpretação geométrica.

Figura 4.21 | Interpretação geométrica do método dos trapézios



Fonte: Ruggiero (1996, p. 297).



Calcule a integral da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$ através do método do trapézio.

Solução: O método do trapézio nos fornece

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_0) \right) \cdot h, \text{ sendo } h = x_2 - x_1. \text{ Voltando}$$

com os dados do problema, temos:

$$\int_1^2 x^2 dx \approx \left(\frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} \right) \cdot 1 = 2,5$$

Erro do método dos trapézios

Como pode ser observado na Figura 4.21, assim como no exemplo anterior, o método dos trapézios pode apresentar erros ao se calcular a integral da função $f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$. Sabemos da interpolação polinomial que, ao utilizarmos um polinômio de grau um para interpolar uma função $f(x)$, temos que:

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{f''(\varepsilon(x))}{2!}, \varepsilon(x) \in (x_0, x_1)$$

Integrando a expressão anterior ao longo do intervalo $[x_0 = a, x_1 = b]$, vem:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{f''(\varepsilon(x))}{2!} dx$$

Dessa forma, obtemos o erro cometido pelo método dos trapézios ao integrarmos a aproximação realizada pela interpolação de Lagrange com polinômio linear; portanto, temos:

$$E_{TRAP} = \int_a^b \frac{f''(\varepsilon(x))}{2!} (x - x_0) \cdot (x - x_1) dx$$

Pelo teorema do valor médio, existe $a \leq \eta \leq b$, tal que:

$$E_{TRAP} = \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b (x - x_0) \cdot (x - x_1) dx$$

Com algumas manipulações algébricas, podemos calcular a integral anterior e mostrar que o erro associado à regra dos trapézios é dado por:

$$E_{TRAP} = \frac{f''(\eta)}{12} (x_1 - x_2)^3 = -\frac{f''(\eta)}{12} h^3 \text{ sendo}$$

$$|E_{TRAP}| = \left| -\frac{f''(\eta)}{12} h^3 \right|$$



Exemplificando

Calcule o módulo do erro cometido ao integrar $f(x) = x^2$ ao longo do intervalo $[0, 1]$.

Solução: Inicialmente, considerando a fórmula do erro, vem:

$|E_{TRAP}| = \left| -\frac{f''(\eta)}{12} h^3 \right|$, agora, calculando as derivadas de $f(x) = x^2$, resulta:

$f'(x) = 2 \cdot x, f''(x) = 2$, sendo $h = x_2 - x_1 = 1 - 0$, portanto:

$$|E_{TRAP}| = \left| -\frac{2}{12} 1^3 \right| = \frac{1}{6} \approx 0,1667.$$



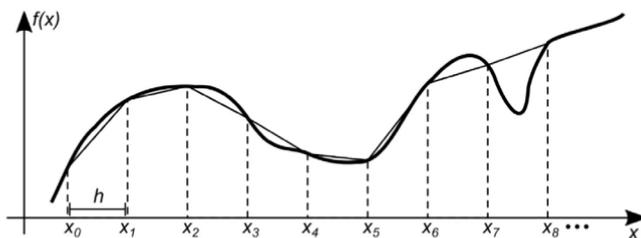
Refleta

Considerando a função $f(x) = x$, utilize o método dos trapézios para determinar sua integral ao longo do intervalo $[0,1]$. O que podemos afirmar sobre o erro? Por que ocorre esse comportamento?

Regra dos trapézios generalizada

Ao aproximarmos a integral de uma função $f(x)$ pelo método dos trapézios, duas características dessa estratégia merecem nossa atenção, a saber: se a função $f(x)$ apresentar um comportamento não linear e se $h = x_2 - x_1$ for muito maior do que 1, o método fornece resultados muito ruins, o que inviabiliza o seu uso prático. Dessa forma, uma ideia intuitiva seria utilizar não apenas um trapézio, mas vários deles a fim de conseguirmos uma melhor aproximação no cálculo da integral de $f(x)$. A Figura 4.22 ilustra a aproximação realizada por oito trapézios para a área abaixo da curva definida pela função $f(x)$.

Figura 4.22 | Interpretação geométrica da regra dos trapézios generalizada



Fonte: Ruggiero (1996, p. 297).



Pesquise mais

Uma interpretação geométrica de como o método dos trapézios funciona pode ser encontrada em: <<https://www.youtube.com/watch?v=iTCJqtVbzAk>> (acesso em: 10 ago. 2017).

Outra maneira de visualizar as aproximações realizadas por esse método pode ser encontrada em:

<<https://www.geogebra.org/m/syvJk5C7>> (acesso em: 22 ago. 2017).



Assimile

Assim, podemos resumir o método dos trapézios generalizado da seguinte forma:

Seja $f(x)$ uma dada função, a integral de $f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ obtida com n trapézios é dada por:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot \{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\} - n \cdot h^3 \frac{f''(\varepsilon)}{12}$$

Onde $h = \frac{b-a}{n}$

$$I_{TR} = \frac{h}{2} \cdot \{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$$

(Integral Numérica)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$E_{TR} = n \cdot h^3 \frac{f''(\varepsilon)}{12} \text{ (Erro cometido na aproximação)}$$

Assim como ocorre na interpolação polinomial, não conseguimos determinar ε , a fim de calcularmos $f''(\varepsilon)$ e, conseqüentemente, determinarmos o erro. Desse modo, nossos esforços se concentram na obtenção de um limitante superior para o erro.



O limitante superior para o erro cometido ao se utilizar o método dos trapézios generalizado para integral a função $f(x)$ ao longo de $[a, b]$ com n trapézios é dada por:

$$|E_{TR}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \text{e} \quad h = \frac{b-a}{n}$$



Utilizando a regra dos trapézios generalizada, calcule o valor da integral $\int_0^1 e^{2x} dx$, utilizando cinco subintervalos; em seguida, estime o erro cometido na aproximação.

Solução:

Inicialmente, considerando o intervalo de integração, temos que $a = 0$ e $b = 1$. Além disso, iremos utilizar dez subintervalos, portanto

$$h = \frac{L}{n} = \frac{b-a}{n} = 0,2.$$

Sabemos que

$$\int_0^1 e^{2x} dx \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2 \cdot [f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$$

Tabela 4.16 | Cálculos para a função $f(x) = e^{2x}$

i	x_i	$f(x_i)$
$i = 0$	0,000000	1,000000
$i = 1$	0,200000	1,491825
$i = 2$	0,400000	2,225541
$i = 3$	0,600000	3,320117
$i = 4$	0,800000	4,953032
$i = 5$	1,000000	7,389056

Fonte: elaborada pelo autor.

$$I_{TR} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})] = 3,237009, \text{ portanto a integral}$$

$$\int_0^1 e^x dx \approx 3,237009$$

A fim de determinarmos um limitante superior para o erro, vamos

utilizar a expressão $|E_{TR}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$. $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ e

$h = \frac{b-a}{n}$. Assim, calculando inicialmente as derivadas de $f(x)$,

temos: $f'(x) = 2e^{2x}$ e $f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$, sendo $f''(x)$ uma função

crecente, então, para $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, portanto o

maior valor de $f''(x)$ está em $x = 1$. Assim, a expressão do erro torna-se:

$$|E_{TR}| \leq \frac{1-0}{12} (0,2)^2 \cdot (4 \cdot e^{2 \cdot 1}) = 0,0985207 \Rightarrow |E_{TR}| \leq 0,0985207$$



Pesquise mais

As fórmulas de Newton-Cotes são obtidas por integração dos polinômios interpoladores, dessa forma o termo do erro em uma interpolação de grau n envolve a derivada de ordem $(n+1)$ da função que está sendo aproximada. Desse modo, as fórmulas de Newton-Cotes são exatas para polinômios de grau menor ou igual a n ; além disso, essas fórmulas avaliam as funções em pontos igualmente espaçados, o que pode diminuir significativamente a precisão do método. Diferentemente das fórmulas de Newton-Cotes, na quadratura gaussiana, escolhemos os pontos x_1, x_2, \dots, x_n ao longo do intervalo de integração $[a, b]$ e

os coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n de modo a minimizar o erro obtido na aproximação $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$, permitindo, com n pontos,

integrar de forma exata polinômios de grau menor ou igual a $2n+1$.

Uma boa referência ao Método da Quadratura Gaussiana é encontrada em Burden e Faires (2011, p. 228).

Algoritmo

Neste ponto, reunimos os principais conceitos teóricos necessários para a implementação computacional do método dos trapézios. Essencialmente, o algoritmo recebe a função a ser integrada e o número de trapézios a serem utilizados na aproximação para, ao final, devolver uma aproximação para a integral da função.

```
01 INÍCIO
//Declaração das variáveis em aritmética inteira e em ponto
flutuante. //
02 INTEIRO N, i, NNI;
03 REAL fx, soma;
04 REAL a, b, x, DX;
// Leitura do número de trapézios a ser utilizadas na aproximação
(N) e leitura do intervalo de integração [a,b] //
05 LEIA(N);
06 LEIA(a);
07 LEIA(b);
// Cálculo do incremento diferencial e do primeiro termo do
método dos trapézios.
08 DX = (b-a)/N;
09 x = a;
10 soma = f(x) // função estudada avaliada no ponto.
// Cálculo dos termos intermediários do método dos trapézios. //
11 para  $i = 1, \dots, NNI$  faça
12      $x = a + i \cdot DX$  ;
13      $fx = f(x)$  ;
14      $soma = soma + 2 \cdot fx$  ;
15 fim para
// Cálculo do último termo do somatório do método dos trapézios
16  $x = (NNI + 1) \cdot DX$  ;
17  $fx = f(x)$  ;
18  $soma = soma + fx$  ;
19  $soma = soma \cdot \frac{h}{2}$  ;
```

// Impressão do resultado obtido pelo método.

20 imprima(soma)

21 FIM ALGORITIMO

Sem medo de errar

Neste ponto, reunimos todo o ferramental teórico matemático e computacional necessário para iniciarmos a última fase do projeto aeroespacial empreendido pela TTGTech. Nesta fase, os esforços estão voltados à implementação do método dos trapézios generalizados, a fim de determinar a distância percorrida pelo foguete até que ele atinja a velocidade de cruzeiro. Essencialmente, iremos aplicar, nesta etapa do projeto, o algoritmo desenvolvido em aula, com o objetivo de obter uma aproximação para a integral do perfil de velocidade do foguete. As informações de que dispomos são a equação do perfil de velocidades e os parâmetros a ela associados, os quais estão reunidos no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 | Perfil de velocidade

$v(t) = \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at}}$	Parâmetros da Equação $r = 0,01$, arrasto aerodinâmico. $a = 0,015$, taxa de aceleração. $N_0 = 1000$, combustível necessário para atingir a velocidade de cruzeiro.
Tempo de voo = 1400 s	

Fonte: elaborado pelo autor.

Utilizando uma aproximação de 10 divisões, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \Rightarrow \int_0^1 \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at}} dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left[\frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at_i}} + \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at_{i+1}}} \right] \end{aligned}$$

Substituindo os valores e efetuando os cálculos, temos:

Tabela 4.17 | Cálculos para a função $f(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2}$

$i = 0$	$t_0 = 0,0$	0,010000
$i = 1$	$t_1 = 0,1$	0,081656
$i = 2$	$t_2 = 0,2$	0,666426
$i = 3$	$t_3 = 0,3$	5,416278
$i = 4$	$t_4 = 0,4$	42,577637
$i = 5$	$t_5 = 0,5$	266,409677
$i = 6$	$t_6 = 0,6$	747,832323
$i = 7$	$t_7 = 0,7$	960,345342
$i = 8$	$t_8 = 0,8$	994,968959
$i = 9$	$t_9 = 0,9$	999,381185
$i = 10$	$t_{10} = 1,0$	999,924181

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left[\frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at_i}} + \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at_{i+1}}} \right] = 632470,520168 \text{ m} \approx 632,47 \text{ km}$$

Portanto, o método dos trapézios nos fornece como resultado a distância de 632,47 km percorrida pelo foguete até que ele entre em velocidade de cruzeiro.

Para encerrar, sintetize toda a discussão acerca desse problema e de sua solução em um relatório de finalização do projeto.

Avançando na prática

Desvalorização de um automóvel

Descrição da situação-problema

O valor de um automóvel tende a se alterar ao longo de cada ano, devido à depreciação que sofre por causa do uso, além da desvalorização frente aos novos modelos. Suponha que a taxa de desvalorização de um determinado modelo de automóvel seja dada por

$f(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2}$, onde t é o número de anos após a compra do automóvel e $P_0 = 1000$ é o preço de compra do automóvel. Nesse contexto, utilize a regra dos trapézios generalizada com $n = 10$, a fim de determinar o preço final de venda após um ano da compra. Além disso, estime o erro cometido nessa aproximação.

Resolução da situação-problema

A desvalorização total sofrida pelo automóvel é determinada pela integral da função $f(t)$ ao longo do intervalo $0 \leq t \leq 1$. Considerando a regra dos trapézios generalizada com $n = 10$, temos:

$$a = 0, b = 1, L = b - a, n = 10 \text{ e } h = \frac{L}{n} = \frac{1}{10} = 0,1. \text{ Portanto:}$$

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(t_i) + f(t_{i+1})] \Rightarrow 0,15 \cdot P_0 \cdot \int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 0,15 \cdot P_0 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [e^{-t_i^2} + e^{-t_{i+1}^2}]$$

Voltando com os dados e fazendo cálculos, temos:

Tabela 4.18 | Cálculos para a função $f(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2}$

$i = 0$	$t_0 = 0,0$	150,00
$i = 1$	$t_1 = 0,1$	151,50
$i = 2$	$t_2 = 0,2$	156,12
$i = 3$	$t_3 = 0,3$	164,12
$i = 4$	$t_4 = 0,4$	176,03
$i = 5$	$t_5 = 0,5$	192,60
$i = 6$	$t_6 = 0,6$	214,00
$i = 7$	$t_7 = 0,7$	244,85
$i = 8$	$t_8 = 0,8$	284,47
$i = 9$	$t_9 = 0,9$	337,18
$i = 10$	$t_{10} = 1,0$	407,74

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, temos:

$$0,15 \cdot P_0 \cdot \int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 0,15 \cdot P_0 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [e^{-t_i^2} + e^{-t_{i+1}^2}] = 219,97$$

Logo, o preço de venda do automóvel ao final de um ano é:

$$Pv = P_0 - \text{Desvalorização} = P_0 - P_0 \cdot 0,15 \int_0^1 e^{-t^2} dt = 1000 - 219,97 = 780,03$$

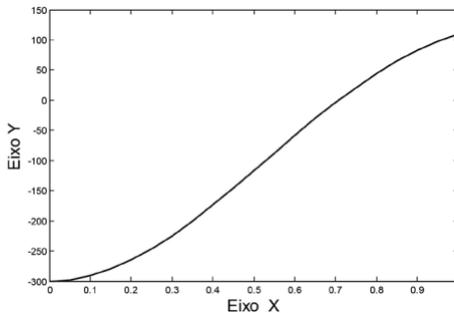
O erro cometido nessa aproximação pode ser calculado através da seguinte relação:

$$|E_{TR}| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h \cdot \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$$

A fim de calcularmos o erro, devemos conhecer a derivada de segunda ordem da função $f(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2}$. Inicialmente, calculando a derivada de primeira ordem, temos $f'(t) = -2 \cdot 0,15 \cdot P_0 \cdot t \cdot e^{-t^2}$, derivando mais uma vez, vem $f''(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2} (4t^2 - 2)$.

O gráfico a seguir mostra o comportamento da derivada de segunda ordem ao longo do intervalo $[0,1]$; como podemos observar, o maior valor, em módulo, atingido por essa derivada ocorre quando $t = 0$.

Figura 4.23 | Perfil da derivada de segunda ordem da função $f(t) = 0,15 \cdot P_0 \cdot e^{-t^2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Voltando com essas informações na expressão do erro, temos:

$$|E_{TR}| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h \cdot \max_{t \in [a,b]} |f''(t)| = \frac{1-0}{12} \cdot 0,1 \cdot 300 \approx 2,5$$

Faça valer a pena

1. Utilizando a regra dos trapézios com $n = 10$, calcule a integral

$$I_{TR} = \int_0^1 -x \cdot (x - 2) dx;$$
 em seguida, calcule a solução analítica e

determine o erro relativo entre a solução numérica e a analítica.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) $I_{TR} = 0,45$ e $E_R = 2,5\%$.
- b) $I_{TR} = 0,55$ e $E_R = 1,5\%$.
- c) $I_{TR} = 0,55$ e $E_R = 0,15\%$.
- d) $I_{TR} = 0,6650$ e $E_R = 0,25\%$.
- e) $I_{TR} = 6,650$ e $E_R = 2,5\%$.

2. Estime o erro cometido ao se integrar a função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ utilizando a regra dos trapézios com $n = 5$.

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) $|E_{TR}| \leq 0,00567$.
- b) $|E_{TR}| \leq 0,00667$.
- c) $|E_{TR}| \leq 0,00767$.
- d) $|E_{TR}| \leq 0,00867$.
- e) $|E_{TR}| \leq 0,00967$.

3. Seja $I = \int_0^1 3e^x dx$, determine o número mínimo de subdivisões (n)

que devem ser utilizadas no método do trapézio, a fim de que o erro seja inferior a 10^{-3} .

Agora, assinale a alternativa correta.

- a) $n = 10$.
- b) $n = 15$.
- c) $n = 20$.
- d) $n = 25$.
- e) $n = 27$.

Referências

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.

DIAS, Junior. Regra dos trapézios. **Geogebra**, 11 ago. 2017. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/syvJk5C7>>. Acesso em: 22 ago. 2017.

INTEGRAÇÃO Numérica - Vídeo 01 - Método dos Trapézios. 16 jul. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=iTCJqtVbzAk>>. Acesso em: 10 ago. 2017.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Pearson, 1996.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ISBN 978-85-522-0207-3



9 788552 202073 >