



Fundamentos de Física

Fundamentos de física

Alessandro Luiz de Lara

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Alberto S. Santana

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Cristiane Lisandra Danna

Danielly Nunes Andrade Noé

Emanuel Santana

Grasiele Aparecida Lourenço

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Paulo Heraldo Costa do Valle

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

André Luis Delvas Fróes

Lucas Antoniassi Pereira

Editorial

Adilson Braga Fontes

André Augusto de Andrade Ramos

Cristiane Lisandra Danna

Diogo Ribeiro Garcia

Emanuel Santana

Erick Silva Griep

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L318f Lara, Alessandro Luiz de
Fundamentos de física / Alessandro Luiz de Lara.
– Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017.
248 p.

ISBN 978-85-522-0178-6

1. Física. I. Título.

CDD 530

Sumário

Unidade 1 Estudo do movimento dos corpos	7
Seção 1.1 - Grandezas escalares e vetoriais na cinemática	9
Seção 1.2 - Tipos de movimentos e suas equações	27
Seção 1.3 - Trajetórias	45
Unidade 2 Dinâmica: estudo da causa dos movimentos	65
Seção 2.1 - Leis de Newton	67
Seção 2.2 - Exemplos de forças na natureza	85
Seção 2.3 - Aplicações das leis de Newton	102
Unidade 3 Trabalho, energia e as leis de conservação	123
Seção 3.1 - Trabalho e energia	125
Seção 3.2 - Momento linear e a sua conservação	143
Seção 3.3 - Colisões	160
Unidade 4 Luz e óptica geométrica	179
Seção 4.1 - Trajetória de um raio de luz	181
Seção 4.2 - Espelhos e a reflexão	198
Seção 4.3 - Lentes e refração	219

Palavras do autor

A disciplina de Física é uma excelente oportunidade para entrar em contato com diversas áreas do conhecimento, como Química, Matemática e outras de tecnologia. Em muitos casos, essa variedade de aplicações pode ser utilizada em sala de aula. Assim, o professor deve possuir um excelente domínio do conteúdo, a fim de sanar as dúvidas, despertar a curiosidade e apresentar os conceitos de modo a motivar o aluno.

Este material foi elaborado com o intuito de apresentar e discutir os conteúdos mais comuns nos currículos de Física, além de oferecer caminhos para pesquisa em materiais mais tradicionais da área e o desenvolvimento de aulas mais atrativas. O objetivo é desenvolver atitudes essenciais para a prática docente, como a iniciativa, a criatividade, o raciocínio crítico e a solução de problemas.

A estrutura segue uma divisão em 4 unidades, cada uma com 3 seções. A primeira unidade descreve os conceitos da cinemática, que estuda o movimento de corpos em geral. Na Unidade 2 serão tratados os tópicos de dinâmica, com aplicações para o conceito de força. A terceira unidade explora a conservação da energia mecânica e da quantidade de movimento. Por fim, a Unidade 4 apresenta uma parte dos conceitos de óptica geométrica.

A cada seção haverá atividades de pré-aula e pós-aula, além de outras oportunidades para que você desenvolva o autoestudo. Trabalhe com seriedade, como forma de treinar os conteúdos apresentados e desenvolver novas habilidades. Nesse sentido, é importante que você dedique um tempo extra para estudar cada seção de forma mais aprofundada e busque complementos em materiais alternativos. Lembre-se de que dúvidas são importantes para o aprendizado. Por isso, procure por outras fontes de estudo e livros de referência.

Esperamos que este material ajude sua caminhada na formação docente. Além de apresentar os conceitos de Física, haverá diversos exemplos de práticas profissionais com que você se deparará em salas de aula, laboratórios, editoras, entre outros. Vamos juntos nesta caminhada e bons estudos!

Estudo do movimento dos corpos

Convite ao estudo

O primeiro contato com a disciplina de Física é muito importante para os alunos de ensino médio. Por questões históricas, os conteúdos programáticos desta disciplina se iniciam na mecânica, que estuda o movimento dos corpos. Nesta primeira unidade, vamos trabalhar com a cinemática, com o objetivo de descrever o movimento dos corpos sem nos preocuparmos com a causa deste.

A fim de descrever o movimento de corpos são necessárias algumas definições: referencial, deslocamento, velocidade e aceleração. Como iremos discutir, haverá grandezas de duas naturezas: as grandezas vetoriais e as grandezas escalares. Além disso, os valores numéricos obtidos apenas têm significado quando acompanhados de unidade física.

A primeira seção traz uma introdução à Física e ao assunto de grandezas escalares e vetoriais. A Seção 1.2 trabalha com os tipos de movimentos e as equações matemáticas envolvidas. Por fim, a Seção 1.3 apresenta diversas trajetórias e a forma como as grandezas da cinemática as descrevem.

O professor pode se utilizar da contextualização em sala de aula, com bom planejamento na apresentação desses conceitos introdutórios e de forma atrativa. Com esse pano de fundo, imagine que você é um professor de uma escola tradicional que pretende melhorar a introdução dos conceitos de cinemática para os alunos da 1ª série do ensino médio. Você pode aproveitar-se de diversas metodologias para isso, desde as aulas expositivas até práticas de laboratório. Também é importante que ao final das atividades haja um material para que os alunos possam ter registrado o que foi estudado.

Uma vez que você precisa preparar suas aulas, as seções seguintes vão oportunizar algumas reflexões importantes: como podemos discutir a necessidade de um sistema de unidades e medidas padrão? Desenvolvendo uma atividade lúdica com as escalas de unidades? Outra questão é tornar os conceitos de deslocamento ou de velocidade média mais táteis para os alunos. Uma atividade interessante seria produzir um mapa de uma escola para trabalhar as equações de movimento. Por fim, uma prática experimental simples pode ajudar a revisar uma série de conceitos. Nesta parte, trabalharemos com um experimento de queda livre.

Seção 1.1

Grandezas escalares e vetoriais na cinemática

Diálogo aberto

O estudo do movimento dos corpos foi o primeiro campo de trabalho para aquilo que era conhecido como Filosofia da Natureza, que hoje conhecemos como Física. Uma questão importante era tentar descobrir como os planetas se movimentam e se é possível prever suas posições em um momento futuro. Para estudar isso, foi necessário realizar longos períodos de observação do céu, além de uma série de experimentos, e convencionar unidades de medida, como vamos discutir durante a seção.

Em algum momento de nossas vidas já nos deparamos com a seguinte questão: “Será que vai dar tempo de chegar ao meu compromisso?”. Esta pergunta guarda diversos conceitos de cinemática escondidos, pois, para prever o horário de chegada em determinado local, precisamos pensar na distância percorrida, na trajetória escolhida, no tempo necessário e na velocidade do veículo que temos à disposição. Além disso, sabemos que há diversas maneiras de expressar comprimento, utilizando unidades com as quais estamos acostumados, como o metro ou quilômetro, mas também outras menos conhecidas, como a jarda ou até a unidade pés. A mesma coisa vale para unidades de tempo, como hora, minuto ou segundo.

Lembre-se de que nesta unidade você está no lugar de um professor de Física de uma turma de 1ª série do ensino médio e precisa desenvolver uma sequência inicial de aulas. Após uma autorreflexão, você sente a necessidade de propor atividades diferenciadas para os estudantes, envolvendo outros recursos didáticos. Para isso, você fez uma pesquisa em livros e revistas e encontrou uma atividade lúdica para trabalhar com seus alunos como forma de complementar as abordagens mais tradicionais, como as aulas expositivas. Depois de sua busca, você optou por uma atividade com a produção de um jogo de memória ou quebra-cabeças usando conversões de escala.

Para ajudar os estudantes, é elaborada uma apresentação de slides sobre como outras áreas do conhecimento se relacionam

com a Física por meio das unidades e seções de medida. Durante a seção, faça a seguinte reflexão: como você faria para deixar esta apresentação mais atraente, para estimular a participação dos alunos na construção do jogo?

Para ajudar nesta empreitada, vamos discutir as diferentes grandezas físicas que surgem em sistemas mecânicos, as grandezas ligadas à cinemática e a importância do sistema de unidades.

Não pode faltar

A Física é uma ciência que estuda a natureza em diversos níveis de escalas, desde átomos até o tamanho do Universo. Esta gama de possibilidades faz que tenhamos de trabalhar com diversas grandezas físicas, como massa, tempo, pressão, força, etc. A forma encontrada para expressar essa diversidade de significados dos valores numéricos foi adotar um sistema de unidades de medida.

A unidade grama (g) é convencionalizada para expressar a massa de um corpo. Assim, ao encontramos alguma informação como "50 g", devemos automaticamente entender que o valor deve referir-se à grandeza massa. Mas como são criadas as unidades de medida?

Em boa parte dos casos, as unidades são criadas por comparação com determinados objetos e tornam-se uma referência. O galão, por exemplo, é uma unidade de volume de líquidos, criado pela comunidade anglo-saxônica. Esta unidade foi convencionalizada em função do tamanho do galão de cerveja na Grã-Bretanha. Porém, a mesma unidade recebeu uma nova padronização nos Estados Unidos, que foi colônia britânica, como comparação com o galão de vinho. Assim, pode-se perceber que as unidades de medida também são fruto de uma cultura local.

O processo de globalização fez que as diferenças em formas de medir grandezas ficassem mais evidentes, gerando graves problemas de comunicação.

A fim de estabelecer uma padronização internacional para os sistemas de medidas, facilitando as relações comerciais e a troca de informação entre os povos, em 1960 foi criado um comitê que elaborou um documento oficial, chamado de Sistema Internacional de Unidades (SI). A principal resolução do SI é a determinação de sete unidades consideradas como básicas, as quais depois viriam a

servir de base para as demais grandezas. O Quadro 1.1 apresenta as grandezas base do SI e a sua representação.

Quadro 1.1 | Grandezas básicas do Sistema Internacional de unidades (SI)

Grandeza	Unidade	Símbolo
Tempo	segundo	s
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Temperatura	Kelvin	K
Corrente Elétrica	Ampère	A
Quantidade de Matéria	mol	mol
Intensidade Luminosa	candela	cd

Fonte: adaptado de Tipler e Mosca (2009, p. 5)

Agora vamos pensar: por que o padrão de massa é o quilograma (kg), mas em muitas aplicações cotidianas usamos outras unidades, como o grama (g), ou ainda o miligrama (mg)? A resposta para esta pergunta deve-se a um fator prático. Para muitas aplicações, a unidade padrão é exagerada ou muito pequena, exigindo um número excessivo de algarismos para sua representação. Por exemplo, o raio da Terra tem um valor médio de 6.400.000 m, mas pode ser expresso de maneira mais simples como 6.400 km. Ou ainda, o tamanho de uma célula é de aproximadamente 0,00005 m, o que pode ser representado como 50 μm (micrômetros).

Dessa forma, foi implementado um sistema de prefixos em potência de base 10, que representa as subunidades do SI. O Quadro 1.2 apresenta os prefixos mais comuns nas aplicações em Física.

Quadro 1.2 | Prefixos com potência de base 10 mais comuns na Física

Fator	Prefixo	Representação
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Quilo	k
10^{-2}	Centi	c
10^{-3}	Mili	m
10^{-6}	Micro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p

Fonte: adaptado de Tipler e Mosca (2009, p. 5)

Para trabalharmos com mais tranquilidade com os prefixos do Quadro 1.2, por causa do constante uso das subunidades nos problemas de Física, é necessário que tomemos alguns cuidados ao trabalhar com as equações. Vamos, então, lembrar rapidamente duas propriedades importantes de operações matemáticas envolvendo potências:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} ; \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$



Pesquise mais

Como sugestão, recomenda-se a leitura das páginas 4 até 6 do livro:

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: Mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

Nestas páginas há uma descrição dos métodos experimentais utilizados para definir as grandezas base do SI e as operações com as unidades de medida.

Por exemplo, gostaríamos de trabalhar com uma massa de 250 mg e devemos converter para g. Para isso, vamos usar as potências:

$$250 \text{ mg} = 250 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 2,5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 2,5 \cdot 10^{(2-3)} = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ g} ,$$

$$250 \text{ mg} = 0,25 \text{ g} .$$

Observe que neste caso foi aplicada a regra de multiplicação para potências.

Dimensões de grandezas físicas

Na mecânica, somos habituados a utilizar as unidades de massa, comprimento e tempo. Para realizar as operações, definimos as dimensões correspondentes. Quando desejamos expressar a dimensão de determinada grandeza, usamos o símbolo []. Por exemplo, ao lermos a expressão $[m] = M$, devemos entender que a dimensão de massa ($[m]$) equivale à letra maiúscula M. De maneira similar, para o comprimento temos que $[d] = L$ e para o tempo $[t] = T$. Como consequência, as outras grandezas da mecânica são fruto de potências que relacionam M, L e T, como expressa o Quadro 1.3.

Quadro 1.3 | Exemplo de algumas grandezas físicas derivadas das grandezas base (MLT)

Quantidade	Símbolo	Dimensão	Unidade
Volume	V	L^3	m^3
Velocidade	v	L/T	m/s
Aceleração	a	L/T^2	m/s^2
Força	F	ML/T^2	$N = kg \cdot m/s^2$
Energia	E	ML^2/T^2	$J = kg \cdot m^2/s^2$

Fonte: Tipler e Mosca (2009, p. 8)

Esse conhecimento nos permite relacionar de maneira mais direta diferentes sistemas de unidades. Afinal, velocidade sempre possuirá uma dimensão de comprimento por tempo, independentemente da escolha de unidades (metros ou pés; horas ou segundos).

Em alguns casos, uma certa configuração de unidades recebe um nome especial, como é o caso do joule (J), utilizado para a grandeza energia.



Um estudante de Física elaborou um trabalho sobre determinado sistema mecânico. Após o desenvolvimento dos experimentos, ele encontrou uma equação empírica (experimental) que descreve uma grandeza hipotética chamada de arrasto (A), que pode ser expressa pela equação:

$$A = \rho \frac{v^3}{a},$$

em que v é a velocidade do corpo, a é aceleração e ρ é a densidade. A densidade é definida como:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

onde m é a massa e V é o volume. Com base nessas informações, qual será a previsão da dimensão da grandeza A ? Qual será a unidade de medida de A no SI?

Resolução:

Pelo enunciado, a grandeza A é definida como:

$$A = \rho \frac{v^3}{a}.$$

Em termos de dimensões, temos que:

$$[A] = [\rho] \frac{[v]^3}{[a]}.$$

Além disso, podemos substituir a densidade por:

$$[A] = \frac{[m][v]^3}{[V][a]}.$$

Com base no Quadro 1.3, as dimensões correspondentes podem ser substituídas e algumas operações podem ser feitas:

$$[A] = \frac{M}{L^3} \frac{[L/T]^3}{L/T^2} \quad [A] = \frac{M}{L^3} \frac{L^3 T^2}{L} \quad [A] = \frac{M}{L \cdot T}.$$

Desse modo, a unidade da grandeza A no SI será $kg/m \cdot s$.

Grandezas escalares e grandezas vetoriais

As **grandezas físicas** são classificadas em dois grupos, dependendo da representação matemática adotada. A classificação é feita em grandezas escalares e grandezas vetoriais. É importante

conhecer a classificação de cada grandeza por causa da forma distinta como são realizadas as operações matemáticas.

As **grandezas escalares** são aquelas descritas completamente por apenas um valor numérico e uma unidade. São exemplos de grandezas escalares o tempo, a massa e a temperatura. Quanto às operações, as grandezas escalares seguem as mesmas regras da aritmética básica.

As **grandezas vetoriais** são aquelas que são descritas por um vetor. Além do valor numérico, o vetor guarda informação da orientação espacial. São exemplos de grandezas vetoriais a força, o deslocamento e a velocidade.

Podemos perceber a importância da orientação para grandezas vetoriais com a situação de alguém que gostaria de empurrar um caixa da direita para a esquerda. Não basta aplicar uma força de módulo suficiente, ela precisa ser aplicada sobre a caixa na direção correta e no sentido desejado do movimento (da direita para a esquerda). Caso contrário, o movimento da caixa não corresponderá ao desejado originalmente.

Outra informação importante é que operações matemáticas com grandezas vetoriais muda significativamente em comparação com as escalares.



Refleta

Quando vemos uma placa de trânsito com marcação de 40 km/h, ela está representando uma grandeza escalar ou vetorial? Nesse caso, ela indica todas as informações necessárias para representar essa grandeza?

Um **vetor** pode ser definido por três informações essenciais: módulo, direção e sentido.

O **módulo** é o valor numérico que quantifica a grandeza em conjunto com sua unidade.

A **direção** indica a linha sobre a qual o vetor está orientado (podemos pensar em termos de horizontal e vertical ou ainda norte-sul, leste-oeste por exemplo).

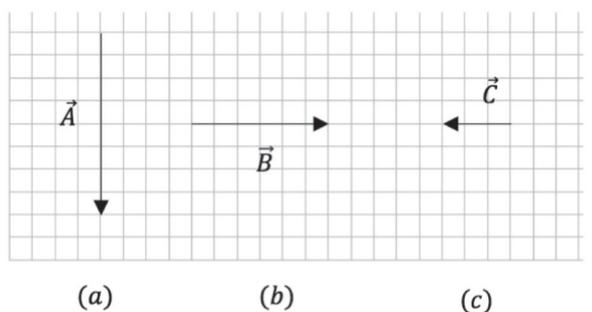
Já o **sentido** expressa a orientação do vetor sobre essa direção. No caso, pode ser representado por direita ou esquerda e para

cima ou para baixo, ou sentido leste, por exemplo.

Os vetores são representados por setas orientadas, como ilustra a Figura 1.1. Na parte (a) é ilustrado um vetor A , que tem direção vertical e sentido de cima para baixo. A grade quadriculada da figura nos permite estimar o módulo (ou intensidade) do vetor, dado que se conheça a escala em termos da unidade utilizada.

O vetor B , na parte (b), tem direção horizontal e sentido para direita, enquanto o vetor C , parte (c), tem direção horizontal e sentido para esquerda. Para evidenciar o caráter vetorial de uma grandeza, escrevemos a letra que representa a grandeza com uma seta acima desta.

Figura 1.1 | Representação de vetores com diferentes características



Fonte: elaborada pelo autor.

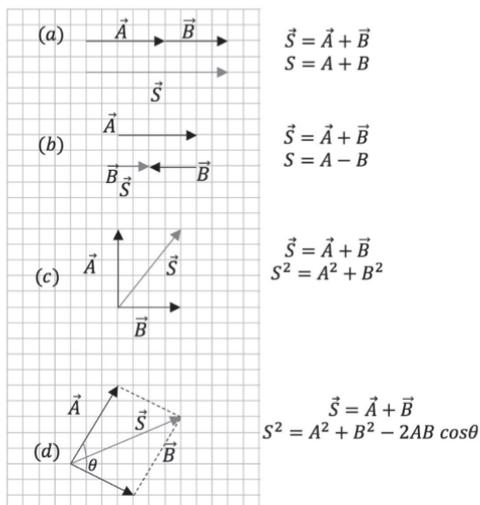


Assimile

As grandezas escalares são aquelas que são completamente descritas por apenas um valor numérico e uma unidade de medida associada. Já as grandezas escalares são representadas por vetores, que possuem módulo, direção e sentido. O módulo é composto pelo valor numérico e por uma unidade de medida correspondente. Direção e sentido indicam a sua orientação no espaço.

As operações vetoriais são sistematicamente descritas com as ferramentas da Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Algumas informações importantes estão compiladas na Figura 1.2.

Figura 1.2 | Resumo das operações vetoriais básicas



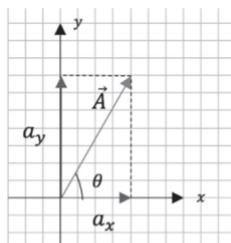
Fonte: elaborada pelo autor.

É comum realizarmos a decomposição de vetores em termos dos eixos coordenados. Quando trabalhamos em duas dimensões sobre um plano, temos os eixos x e y. Isso fica mais fácil quando trabalhamos com vetores de módulo 1 que apontam nas direções positivas de cada um dos eixos, os chamados **versores** \hat{i} e \hat{j} : $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$, sendo a_x e a_y números reais acompanhados da unidade associada ao módulo do vetor \vec{A} .

A Figura 1.3 apresenta o vetor \vec{A} e a sua respectiva decomposição, em termos do eixo x e y:

$$a_x = |\vec{A}| \cos\theta ; a_y = |\vec{A}| \sin\theta .$$

Figura 1.3 | Esquema de decomposição dos vetores em termos dos versores



Fonte: elaborada pelo autor.

O valor $|\vec{A}|$ corresponde ao módulo do vetor \vec{A} , que em termos de suas componentes é obtido pela equação de Pitágoras: $|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, e θ é o ângulo formado entre o vetor \vec{A} e o sentido positivo do eixo das abscissas.

Grandezas da cinemática

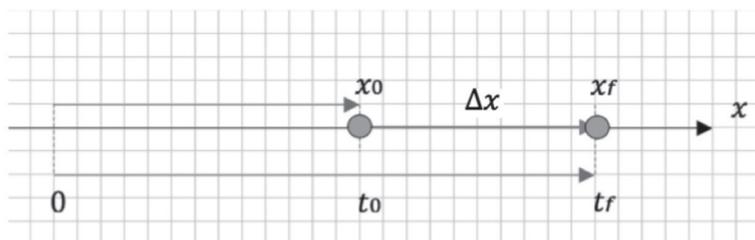
Ao estudarmos o movimento de corpos é necessário que algumas definições sejam estabelecidas. É preciso pensar em como vamos referenciar o movimento, ou seja, qual será o local no espaço para estabelecer uma origem do sistema de coordenadas e a orientação de seus eixos.

Somos sempre livres para escolher um referencial, sua origem e orientação dos eixos. Entretanto, estudaremos as condições ideais para a escolha de um bom referencial, que facilite a solução dos problemas cinemáticos.

Para simplificar a compreensão, vamos estudar um movimento unidimensional (que ocorre inteiramente sobre uma linha reta). Ele é bem descrito pelo eixo x do sistema cartesiano, que permite a posição de um objeto, com a condição de que sempre precisamos definir a localização do ponto de origem, o zero do eixo x .

No dia a dia, é sempre importante localizar de maneira precisa os objetos de interesse. Para isso, temos a grandeza **posição**, que é bem descrita por um vetor que parte da origem do sistema de coordenadas e chega até o ponto que desejamos localizar no espaço. Como exemplo, a Figura 1.4 mostra a evolução de um movimento unidimensional, em que x_0 representa a posição inicial do objeto e x_f é a posição final do objeto.

Figura 1.4 | Posições do corpo durante o movimento unidimensional



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa ilustração ajuda a definir o vetor deslocamento ($\overrightarrow{\Delta x}$) como: $\overrightarrow{\Delta x} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0$.

O símbolo Δ é a letra grega *delta* maiúscula e representa uma forma de variação na Física, o que permite afirmar que o deslocamento de um móvel $\overrightarrow{\Delta x}$ é a variação do vetor posição \overrightarrow{x} , a diferença entre o vetor posição final \mathbf{x}_f e o vetor posição inicial \mathbf{x}_0 .

No deslocamento do ponto inicial ao ponto final ocorre a passagem de um certo tempo. Podemos igualmente definir a variação de tempo Δt ao longo do movimento como $\Delta t = t_f - t_0$ (lembrando que o tempo é uma grandeza escalar). Os índices 0 e f referem-se ao instante inicial e final, respectivamente.

Outra grandeza importante da cinemática é a velocidade, que marca a distância percorrida pelo corpo a cada unidade de tempo. Podemos definir a velocidade média \mathbf{v}_m de um corpo pela variação da sua posição durante um determinado intervalo de tempo:

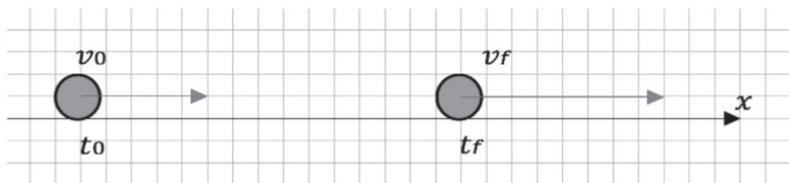
$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}.$$

A velocidade, é claro, também pode variar. A Figura 1.5 representa o caso em que ocorre a variação do vetor velocidade ($\overrightarrow{\Delta v}$): $\overrightarrow{\Delta v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0$.

Para dar significado à variação da velocidade, definimos a grandeza aceleração, que representa quanto a velocidade varia a cada unidade de tempo. A aceleração média (\mathbf{a}_m) é a variação da velocidade de um corpo dividida pelo intervalo de tempo em que ele ocorreu:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Figura 1.5 | Variação da velocidade



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Durante uma viagem de ônibus, uma estudante deseja descobrir a velocidade aproximada do veículo. Para isso, ela aciona um cronômetro quando passa pela placa do km 23 de uma estrada, e então para a contagem ao passar pelo km 29. O visor indica um intervalo de tempo de 5 minutos. Com essas informações, qual será a velocidade média do ônibus, em km/h?

Resolução:

Para calcular a velocidade média do ônibus, precisamos da informação do deslocamento do veículo e do intervalo de tempo. Quanto ao deslocamento, o enunciado nos informa que a posição inicial é de 23 km e a final é de 29 km. Assim, utilizando a notação vetorial:

$$\overline{\Delta x} = \overline{x_f} - \overline{x_0} = (29 \text{ km})\hat{i} - (23 \text{ km})\hat{i} = (6 \text{ km})\hat{i} \quad t$$

$$|\overline{\Delta x}| = 6 \text{ km} \cdot |\hat{i}| = 6 \text{ km} \cdot 1 = 6 \text{ km}.$$

O intervalo de tempo medido pela estudante é de 5 minutos. Como a velocidade deve ser expressa em km/h, é necessário converter o valor de 5 min para horas. Para isso, relembramos que 1 h contém 60 min.

$$\text{Assim: } \Delta t = 5 \text{ min} = 5 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{5}{60} \text{ h}.$$

Por fim, a velocidade do móvel será:

$$\overline{v_m} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{(6 \text{ km})\hat{i}}{\frac{5}{60} \text{ h}} = \left(\frac{6 \cdot 60}{5} \text{ km/h} \right)\hat{i} = (72 \text{ km/h})\hat{i}$$

$$|\overline{v_m}| = 72 \text{ km/h}.$$

Sem medo de errar

No começo da unidade foi apresentada a situação em que você é um professor de uma escola tradicional e precisa pensar em uma maneira de apresentar os conceitos básicos do sistema de unidade para os alunos da 1ª série de ensino médio. Surgiu a ideia de construir uma apresentação especial e um jogo com as escalas de subunidades utilizadas na Física.

No momento do planejamento da apresentação, você procurou uma forma de destacar a importância de trabalhar com as

subunidades e as possíveis conversões em sua apresentação. Você buscou aplicações da Física em outras áreas de conhecimento, como mecânica, astronomia, biofísica, engenharia e afins, e como as subunidades aparecem frequentemente.

Por exemplo, você poderia inserir na apresentação que a distância entre a Terra e a Lua é de aproximadamente 384.400 km, valor que pode ser representado como de 384,4 Mm, pois $1\text{Mm} = 10^3 \text{ km} = 10^6 \text{ m}$. Pesquise por conta própria ao menos mais três exemplos interessantes para inserir na apresentação, realizando as conversões apropriadas.

Um exemplo de conversão importante para discutir é a da velocidade em m/s para km/h, unidade essa muito frequente em nosso dia a dia. Nesse caso, você pode inserir na apresentação que:

$$1\text{km/h} = \frac{1\text{km}}{1\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{60 \cdot 60\text{s}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}, \text{ deixando claro}$$

que o processo de descoberta da conversão correta de unidades é simples e não há necessidade de “decorar” nada.

Quais outros exemplos de conversões importantes você usaria para construir esta apresentação? Quais conversões de unidades você julga mais importantes?

Com relação à atividade lúdica, você pediu aos estudantes que trouxessem jornais e revistas velhos para a próxima aula, a fim de encontrar e recortar figuras que possam representar as diferentes subunidades apresentadas no Quadro 1.2. É importante que as fontes de imagens sejam as mais variáveis possíveis para evitar concentrar-se em apenas uma faixa de subunidades.

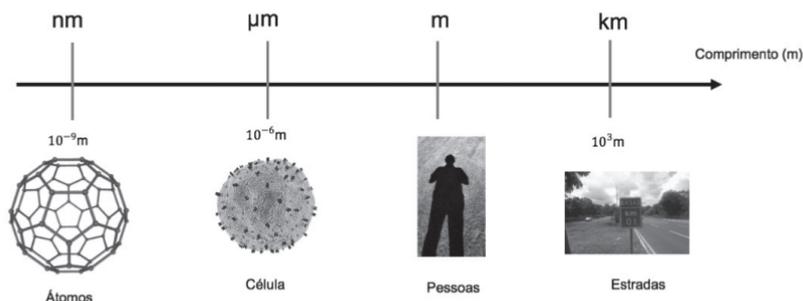
O professor escolhe trabalhar com os alunos as escalas de comprimento; assim, durante a aula os alunos são orientados a recortar imagens que sejam representativas de tamanhos, como planetas, galáxias, células, pessoas, etc. Para cada figura, deve-se procurar a informação do seu tamanho, por exemplo, uma pessoa tem altura na ordem do metro, então, podemos associar a unidade metro com uma pessoa.

Alguns estudantes encontraram desenhos de átomos, que têm o tamanho da ordem de 10^{-10} m : $10^{-10} \text{ m} = 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$. Dessa forma, podemos colocar o átomo na ordem de nanômetro.

Um outro estudante gostaria de colocar uma figura da tela de uma televisão, cuja diagonal tem o comprimento representado por polegada. Com uma pesquisa, os alunos descobriram que uma polegada tem o valor de 2,45 cm. Assim, a TV de 20 polegadas pode ser representada por: $20 \text{ polegadas} = 20 \cdot (2,45 \text{ cm}) = 49 \text{ cm}$.

Em nossa escala, podemos colocar uma TV na subunidade de centímetros. Depois de coletar várias outras imagens, podemos construir algo como a Figura 1.6, que indica a subunidade, a potência relativa a ela, e a imagem que a representa.

Figura 1.6 | Escala de unidades de comprimento



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/WzysYL>>; <<https://goo.gl/NX52n7>>; <<https://goo.gl/uUI1UF>>; <<https://goo.gl/hc1DVi>>. Acesso em: 12 abr. 2017.

Depois de construir esta escala, você convidou os alunos a realizarem um jogo da memória com três correspondências ou um jogo de quebra-cabeça. A proposta foi criar uma forma lúdica de os alunos relacionarem essas unidades e, por consequência, assimilarem o conteúdo.

Avançando na prática

Convertendo unidades

Descrição da situação-problema

A conversão de unidades é uma dificuldade presente no cotidiano na sala de aula. Além do problema associado às subunidades, existem outras conversões, como a conversão de hora para minuto, ou de grau para radiano, que geram dificuldades aos alunos. Na resolução dos problemas é importante carregar a

informação da unidade para que o valor numérico obtido no final tenha um significado físico condizente.

Neste contexto, imagine que você é um técnico de laboratório escolar e pensa em desenvolver uma atividade prática para trabalhar com a conversão de unidades. A atividade consiste em criar uma unidade de comprimento arbitrária, utilizando algum objeto de referência para realizar medições. Você escolhe uma caneta e decide medir com ela o comprimento da lousa da sala de aula.

Você acredita que essa atividade será enriquecedora para os estudantes, mas, antes de apresentar a ideia aos professores de Matemática e de Física, decide realizar o teste e obter os valores. Como você faria isso?

Resolução da situação-problema

Esta atividade consiste em criar um método de medição de comprimento arbitrário, utilizando-se de uma caneta, no lugar da qual, no entanto, também poderia ser utilizado um estojo ou um palito de sorvete. Em resumo, algo que esteja disponível no ambiente escolar.

Depois, você deve medir diversos objetos com o padrão escolhido. Por exemplo, na nossa escala “caneta”, quanto mede a lousa da classe?

Para começar, você precisa utilizar uma régua ou outro instrumento de medida para converter este padrão “caneta” para alguma subunidade do metro, no caso, centímetros.

A escolha do objeto para ser o padrão de medida é arbitrário, porém algumas tomadas de decisão são importantes. Por exemplo, alguns objetos são menores do que uma “caneta” inteira, gerando a necessidade de uma subunidade. Assim, será necessário criar os conceitos de “meia-caneta” ou ainda “um quarto de caneta”, por exemplo.

Vamos finalmente medir um quadro usando uma caneta. Vamos supor um resultado, por exemplo, de 8,5 caneta. Para obter esse valor, enfileiremos canetas idênticas do início até o final do quadro. Podemos também usar uma única caneta, partindo do início, marcando a extremidade desta, e depois colocando-a a partir da marcação realizada.

De todo modo, obtivemos nesse caso particular:

$$1 \text{ quadro} = 8,5 \text{ caneta}$$

Note que, ao inserir a caneta pela nona vez, metade dela fica pendendo no ar, pois a lousa não comporta nove canetas inteiras em seu comprimento.

Agora podemos converter canetas para a unidade padrão de centímetros. Com uma régua, descobrimos que uma caneta mede:

$$1 \text{ caneta} = 16,4 \text{ cm.}$$

Dessa forma, um quadro irá medir:

$$1 \text{ quadro} = 8,5 \text{ canetas}$$

$$1 \text{ quadro} = 8,5 \text{ caneta} \left(16,4 \frac{\text{cm}}{\text{caneta}} \right)$$

$$1 \text{ quadro} = 139,4 \text{ cm}$$

Também é possível transformar o comprimento do quadro para outras subunidades do metro, que sejam mais convenientes. Por exemplo:

$$1 \text{ quadro} = 1,394 \text{ m}$$

A atividade está pronta para ser utilizada. Agora você pode escrever suas anotações e entregar para os professores de Física e de Matemática, que com certeza ficarão muito agradecidos.

Faça valer a pena

1. Em 1999, a NASA (Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço), lançou a sonda MOC (*Mars Climate Orbiter*) com o objetivo de estudar o clima do planeta Marte. A sonda possuía dois módulos que teriam a missão de coletar dados da atmosfera e do solo para tentar entender como foi o passado climático do planeta vermelho e projetar o futuro da região. Considerado um projeto audacioso, em função do pioneirismo e do custo aproximado de 125 milhões de dólares, a sonda teve um futuro trágico: por um erro de cálculo de trajetória ela foi destruída pelo atrito com a atmosfera de Marte. Após estudos sobre o acidente, a causa foi aferida a um problema de unidade de medida: a equipe em terra estava utilizando o sistema britânico enquanto a nave operava com o sistema métrico (SI). Enunciado: Exemplos como da Nave MOC servem para exemplificar a necessidade de ater-se ao sistema de unidades que está sendo aplicado

naquela situação. Em muitos casos, os fatores de conversão são elevados, fazendo que pequenos desvios causem grandes erros. Para evitar este problema, foi convencionado o Sistema Internacional de Unidades (SI), composto por 7 unidades básicas, entre elas:

- a) Grama, metro e segundo.
- b) Candela, hora e quilograma.
- c) Mol, segundo e quilômetro.
- d) Hora, lúmen e celsius.
- e) Mol, segundo e kelvin.

2. Na Física as grandezas são divididas em dois grupos: escalares e vetoriais. As grandezas escalares são definidas apenas pelo valor numérico. As grandezas vetoriais precisam apresentar módulo, direção e sentido e são representadas por vetores. Com essa classificação, um grupo de alunos resolveu elaborar um quadro com algumas grandezas:

Grupo	Grandezas escalares	Grandezas vetoriais
I	Tempo, massa e força	Energia, velocidade e aceleração
II	Massa, energia e pressão	Força, velocidade e deslocamento
III	Tempo, potência elétrica e posição	Temperatura, deslocamento e velocidade

Com base no quadro elaborado pelos alunos, pode-se avaliar como correta a classificação:

- a) De grandezas escalares do grupo I.
- b) De grandezas vetoriais do grupo I.
- c) De grandezas escalares do grupo III.
- d) De grandezas vetoriais do grupo II.
- e) De grandezas vetoriais do grupo III.

3. Os semáforos de pedestres apresentam três estados de operação: o sinal verde contínuo, quando é permitido o trânsito de pedestres; o sinal vermelho contínuo, quando é proibida a passagem de pedestres; e o sinal vermelho piscando, quando o pedestre pode passar, mas em pouco tempo o sinal para os carros será aberto. Assim, o tempo do sinal vermelho piscando, mais o tempo do sinal verde deve ser o suficiente para que todas as pessoas que estão aguardando atravessem a rua. Em determinado cruzamento de uma cidade, há uma faixa de pedestres com

comprimento de 18 m. Considere que a velocidade média de uma pessoa com mobilidade reduzida é de 1,6 m/s.

Qual deverá ser o tempo mínimo que o semáforo permanecerá disponível para que as pessoas atravessem em segurança?

- a) 10,0 s.
- b) 12,0 s.
- c) 14,0 s.
- d) 18,0 s.
- e) 21,0 s.

Seção 1.2

Tipos de movimentos e suas equações

Diálogo aberto

O principal interesse no estudo do movimento é a possibilidade de prever a posição dos corpos em um momento no futuro, ou ainda no passado. Para isso, é necessário conhecer algumas grandezas, como a posição inicial ou ainda velocidade inicial. Quando nos deslocamos, podemos ter contratempos no meio do caminho, o que pode nos obrigar a recalcular todo o movimento e nossas estimativas de chegada. Para isso, é necessário que se estabeleçam as equações de movimento. Compreender esses conceitos nos ajuda a entender como os aplicativos de celular calculam as rotas até o destino desejado, ou ainda o significado da marcação do odômetro e do velocímetro dos carros.

No começo da unidade foi apresentada a situação em que você é um professor de Física de uma escola tradicional, que está trabalhando com turmas da 1ª série do ensino médio. Então, você propôs uma série de atividades para apresentar os conceitos básicos da cinemática.

Nesta seção, você propôs uma atividade interativa com o espaço escolar, a fim obter valores de distância e construir um mapa da instituição. Para isso, os alunos devem obter um valor de velocidade para uma pessoa e o tempo necessário para se deslocar por esses espaços. Com esses valores, pode-se estimar o tamanho de corredores ou ainda obter a área da quadra de esportes ou da sua sala de aula. Você consegue disponibilizar para os estudantes, em quantidades suficientes, trenas e cronômetros.

Na construção deste mapa será preciso utilizar os conceitos da seção anterior, tais como referencial e deslocamento. Além disso, este material será utilizado para construir as equações de movimento a fim de prever o tempo para chegar a determinados locais.

Nesta seção, trabalharemos os dois tipos de movimento retilíneo mais comuns: o uniforme e o uniformemente variado, em termos das equações e gráficos do movimento. Depois, iremos trabalhar a interpretação da velocidade e da aceleração instantânea e o caso simples de movimento relativo.

Não pode faltar

No estudo dos movimentos, nosso principal interesse é a possibilidade de descrever a posição e a velocidade de um objeto em um determinado instante de tempo t . Para isso, é necessário conhecer as equações de movimento do corpo, que preveem como será o comportamento desta grandeza como função do tempo.

Na parte final da seção anterior foi apresentada a definição do vetor velocidade média (\vec{v}) e aceleração média (\vec{a}) na forma:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

em que $\Delta \vec{x}$ é o vetor deslocamento do móvel, $\Delta \vec{v}$ é a variação do vetor velocidade e Δt é o tempo de observação deste movimento. Com a análise dessas duas grandezas é possível classificar o movimento de um corpo em pelo menos dois tipos: o tipo uniforme e o uniformemente variado.

O **movimento uniforme** é aquele em que o vetor velocidade do corpo é mantido constante durante toda a trajetória, razão pela qual o vetor aceleração tem módulo zero. Já o **movimento uniformemente variado** tem como característica básica um vetor velocidade com módulo variando com o tempo, e vetor aceleração com módulo constante e diferente de zero.

A **trajetória** de um corpo é a representação do percurso de um corpo, de acordo com o sistema de coordenadas escolhido. Por exemplo, um carro movimentando-se em uma estrada que não faz curvas percorre uma trajetória retilínea. A soma de todos os pontos por onde o carro passa compõe uma linha reta. Por outro lado, ao amarrarmos uma bolinha em uma corda e começarmos a girá-la, teremos uma trajetória circular. A soma de todos os pontos por onde a bolinha passa compõe um círculo.

Nesta seção, vamos trabalhar com a caracterização dos movimentos com trajetória retilínea, com possibilidade de ser um movimento uniforme ou ainda uniformemente variado. Futuramente iremos trabalhar com o caso de trajetórias do tipo circular, que envolvem a presença de outras grandezas físicas.

Movimento retilíneo uniforme (MRU)

Nos livros didáticos é comum a utilização da sigla MRU para referir-se ao movimento retilíneo uniforme. O MRU é o caso em que o corpo, além de descrever uma trajetória retilínea, mantém a velocidade constante \vec{v} . A aceleração nesse caso é nula ($\vec{a} = \mathbf{0}$).

Utilizando nossos conhecimentos da seção anterior, podemos representar um corpo descrevendo um movimento retilíneo uniforme na Figura 1.7, em que \vec{x}_0 representa a posição inicial do móvel e \vec{x} a posição deste em um instante qualquer t . Por comodidade, admitimos que o tempo inicial (t_0) é nulo, simulando a possibilidade de zerar o cronômetro assim que observamos a medição. Chamaremos t_f o instante final da observação.

Figura 1.7 | Representação esquemática das grandezas importantes no MRU



Fonte: elaborada pelo autor.

Com estas considerações, podemos reescrever a equação da velocidade como:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t - t_0} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t - 0}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t} \rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v} \cdot t,$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot t \text{ (equação horária do MRU)}$$

Em termos matemáticos, afirmamos que a posição final do corpo é uma função que depende do tempo, isto é, $\vec{x}(t)$. Para $t = 0$, a posição será $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot 0 = \vec{x}_0$. Assim, no instante de tempo t , o corpo terá se deslocado em um vetor $\vec{v}t$ a partir de \vec{x}_0 , de modo que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot t$.

Se conhecermos a posição inicial e a velocidade de um corpo em movimento retilíneo e uniforme, podemos prever as posições dele em qualquer instante de tempo.



Exemplificando

Uma pessoa descreve um movimento retilíneo uniforme partindo da posição marcada 4 m sobre um eixo x , de acordo com um referencial arbitrário, e desloca-se até a posição 16 m. Para percorrer este espaço, ela demora 2,4 s. Com estas informações, responda:

- Qual é a velocidade desta pessoa?
- Qual é a equação horária deste movimento?
- Qual será a posição desta pessoa no instante de tempo 10,0 s?

Resolução:

a) No enunciado, podemos identificar que a posição inicial é 4 m, enquanto a posição final é de 16 m. O tempo necessário para percorrer esta trajetória é de 2,4 s.

Como a pessoa descreve um MRU, aplicamos a seguinte equação para calcular o módulo da velocidade:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t - t_0} = \frac{x\hat{i} - x_0\hat{i}}{t - t_0}$$
$$\vec{v} = \frac{16\hat{i} - 4\hat{i}}{2,4 \text{ s}} = \frac{12\hat{i}}{2,4} = 5\hat{i} \text{ m/s}$$

Note que a velocidade é uma grandeza vetorial e deve ser representada conforme apresentado anteriormente. O versor denota movimento no sentido positivo do eixo x .

b) Pelo enunciado, podemos identificar que posição inicial tem módulo 4 m e a velocidade foi obtida no item anterior, assim:

$$\vec{x}_0 = 4\hat{i} \text{ m e } \vec{v} = 5\hat{i} \text{ m/s}$$

Então, a equação horária do movimento, em termos dos módulos será:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t \rightarrow \vec{x} = 4\hat{i} + 5\hat{i} \cdot t$$

Por se tratar de um movimento unidimensional, costuma-se escrever a equação horária escalar, onde x pode assumir valores negativos para posições à esquerda do zero definido sobre o eixo, e v também, caso o movimento seja no sentido negativo do eixo. Assim:

$$x = x_0 + vt \rightarrow x = 4 + 5 \cdot t$$

Mesmo que, na posição de professor, você decida trabalhar com um tratamento simplificado, seja rigoroso com a notação vetorial e assegure-se de que seus estudantes compreendem o fato de posição e velocidade serem sempre grandezas vetoriais.

c) Com a equação horária do movimento, podemos obter a posição de um corpo em qualquer instante de tempo. No enunciado, este instante é 10,0 s. Então:

$$x(t) = 4 + 5t \rightarrow x(10) = 4 + 5(10) = 54 \text{ m.}$$

Movimento retilíneo uniformemente variado

O movimento retilíneo uniformemente variado é representado pela sigla MUV ou MRUV, em alguns livros didáticos, e descreve o caso em que a aceleração do corpo é constante, não nula. A aceleração do corpo será obtida pela expressão:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Com a Figura 1.8, vamos admitir que \vec{v}_0 é a velocidade inicial ($t_0 = 0$), enquanto \vec{v} é a velocidade em certo instante de tempo t . Então, a equação da aceleração pode ser reescrita como:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Dessa forma, podemos encontrar a velocidade de um corpo para qualquer instante de tempo, com as informações da sua velocidade inicial e da aceleração. Assim, como a aceleração é a variação da velocidade com o tempo, após um tempo t a velocidade inicial do corpo \vec{v}_0 será acrescida do vetor $\vec{a}t$, resultando em $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$.

A equação de posição do movimento retilíneo é obtida por argumentos gráficos, que serão discutidos posteriormente. A princípio, podemos obter a posição de um móvel como função do tempo pela equação:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2} \bar{a} t^2 \text{ (equação do MRUV),}$$

em que \bar{x}_0 e \bar{v}_0 correspondem ao vetor posição inicial e ao vetor velocidade inicial, respectivamente. As equações de posição e de velocidade são funções exclusivas do tempo. Porém, em alguns casos, é conveniente utilizar uma equação que relacione a velocidade com a posição, conhecida como a equação de Torricelli. No caso unidimensional, podemos simplificar a notação utilizando equações escalares. Podemos isolar o tempo na equação $v = v_0 + at$:

$$t = \frac{v - v_0}{a},$$

e posteriormente substituir na equação $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$:

$$x(t) = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$x(t) - x_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2a} (v - v_0)^2$$

Depois, multiplicando os dois lados por $2a$, e definindo o deslocamento como $\Delta x = x - x_0$:

$$2a\Delta x = 2v(v - v_0) + (v - v_0)^2 \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \text{ (equação de Torricelli)}$$

Este conjunto de equações, além de definir aceleração, é essencial para descrever o movimento retilíneo uniformemente variado.



Pesquise mais

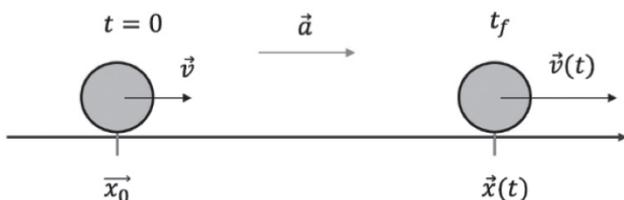
Existe uma maneira extremamente eficiente de analisar o movimento dos corpos, que se baseia no Cálculo Diferencial e Integral. A partir de um vetor de aceleração qualquer, podemos obter a posição de um móvel com base no operador integral e informações sobre a posição e velocidade em um determinado instante. Por outro lado, é possível obter a expressão para a velocidade e para a aceleração utilizando o operador derivada sobre o vetor posição de um móvel. Este tratamento nos permite encontrar a velocidade instantânea de um móvel qualquer. Saiba mais no livro:

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. São Paulo: Ltc, 2009, v. 1, p. 64; 67-69.



No movimento retilíneo uniforme (MRU), o vetor velocidade mantém suas características (módulo, direção e sentido) constantes e o vetor aceleração é nulo. No movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), o vetor aceleração mantém suas características em todo o movimento, com um módulo não nulo, e o vetor velocidade varia com o tempo.

Figura 1.8 | Representação das grandezas importantes do MRUV



Fonte: elaborada pelo autor.



Um carro parte do repouso e consegue acelerar de tal forma que chega à velocidade de 18 km/h, em um intervalo de tempo de 2,5 s. Admitindo que a aceleração será constante, calcule as seguintes grandezas:

- Qual será o valor do módulo da aceleração deste carro em unidades do SI?
- Qual é o módulo da velocidade final, após 5 s de movimento?

Resolução:

a) No enunciado, podemos identificar que a velocidade inicial do carro é zero, pois parte do repouso, e que a velocidade final será de 18 km/h. Como a informação de tempo está disponível, podemos utilizar a definição de aceleração, com a devida conversão de unidades, para obter o módulo:

$$v = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow v = 18 \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 5 \text{ m/s}$$

Como o carro descreve um MRUV, a aceleração será:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{5 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{2,5 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}.$$

b) Com o item a), temos as informações dos módulos da aceleração e da velocidade inicial: $v_0 = 5 \text{ m/s}$ e $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Então, a equação da velocidade será: $v = 5 + 2t$.

Na questão, o interesse é no módulo do vetor velocidade em 10 s, assim:

$$v(5) = 5 + 2(5) = 15 \text{ m/s}.$$

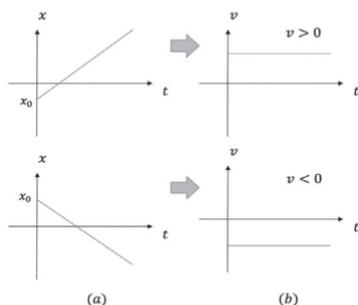
Um cuidado importante ao encontrar as equações de movimento é com relação às unidades que podem ser utilizadas. Lembre-se de que na seção anterior discutimos a coerência das equações com as grandezas físicas utilizadas.

Representações gráficas para MRU e MRUV

As equações de movimento são funções matemáticas que podem ser representadas por gráficos, que em muitos casos podem auxiliar na resolução de problemas. Além disso, podemos classificar o movimento de acordo com informações coletadas na representação gráfica.

No **movimento retilíneo uniforme**, a equação de posição é uma função linear, cujos coeficientes são a velocidade e a posição inicial. A velocidade faz o papel do coeficiente angular e está relacionada à inclinação da reta (afinal, velocidade é a taxa de variação da posição com o tempo), enquanto a posição inicial é o coeficiente linear. O gráfico de posição em função do tempo para o MRU é apresentado na Figura 1.9, assim como o gráfico de velocidade em função do tempo. A velocidade é uma função linear constante, que pode ser positiva ou negativa, de acordo com a orientação do movimento.

Figura 1.9 | Relação entre os gráficos de (a) posição e (b) velocidade para o MRU



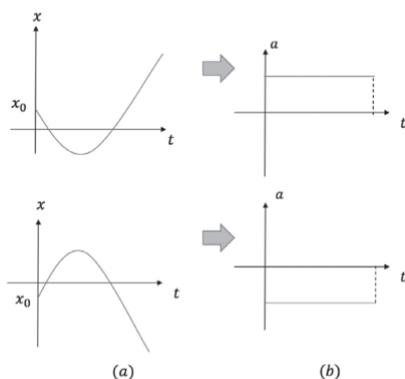
Fonte: elaborada pelo autor.

O MRU pode ser classificado quanto à orientação do movimento. Denomina-se progressivo quando a velocidade tem a mesma orientação do sentido positivo da posição. No caso retrógrado, a velocidade está orientada ao contrário do sentido positivo da posição.

No **movimento retilíneo uniformemente variado**, a equação de posição é uma função de segundo grau, cuja representação gráfica é uma parábola. A orientação da concavidade da parábola é definida pelo sinal da aceleração do movimento.

Para acelerações positivas, a concavidade é voltada para cima, o que é natural, uma vez que ela gera uma tendência de movimento no sentido positivo com o passar do tempo, mesmo para velocidades iniciais negativas. Da mesma forma, é natural que a concavidade voltada para baixo seja representativa de acelerações negativas. Na Figura 1.10 (a) e (b) é apresentado o gráfico de posição para os dois casos de aceleração, além da marcação da posição inicial. Em ambos os casos representados há uma reversão no sentido do movimento (sinal da velocidade).

Figura 1.10 | Gráfico da função (a) posição e (b) aceleração para um corpo que descreve um MRUV

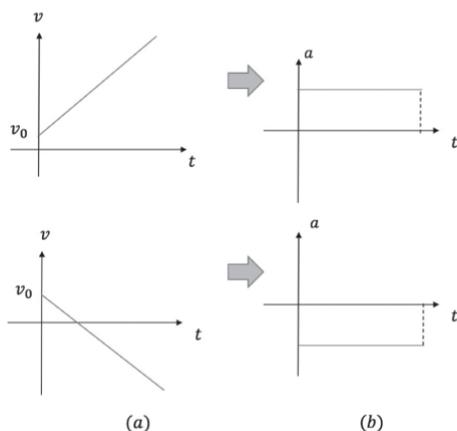


Fonte: elaborada pelo autor.

No MRUV, a velocidade é uma função linear, em que o coeficiente angular é a aceleração do movimento e o coeficiente angular é a velocidade inicial, como ilustra a Figura 1.11, onde (a) representa a velocidade e (b) representa a aceleração.

A classificação do MRUV depende da orientação dos vetores velocidade e aceleração. Caso os vetores velocidade e aceleração tenham a mesma orientação, o movimento é classificado como **acelerado** (uma vez que o móvel se desloca cada vez mais rápido). Se os vetores aceleração e velocidade estiverem em orientações opostas, o movimento é classificado como **retardado** (uma vez que a aceleração se opõe à velocidade, reduzindo continuamente o seu módulo).

Figura 1.11 | Velocidade e aceleração para um corpo que descreve um MRUV

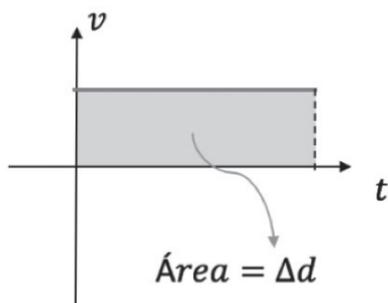


Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, a grandeza aceleração não se altera durante o movimento, e a representação gráfica é a de uma função constante. Se a aceleração for positiva, estará posicionada na porção acima do gráfico. Para o caso de aceleração negativa, o gráfico estará concentrado na parte inferior.

Ao analisarmos um gráfico de velocidade em função do tempo, podemos obter uma informação importante. Para tal gráfico, a área entre a função representada graficamente e o eixo das abscissas é numericamente igual ao deslocamento do corpo, como ilustra a Figura 1.12.

Figura 1.12 | Relação entre a área abaixo da curva e o deslocamento do móvel



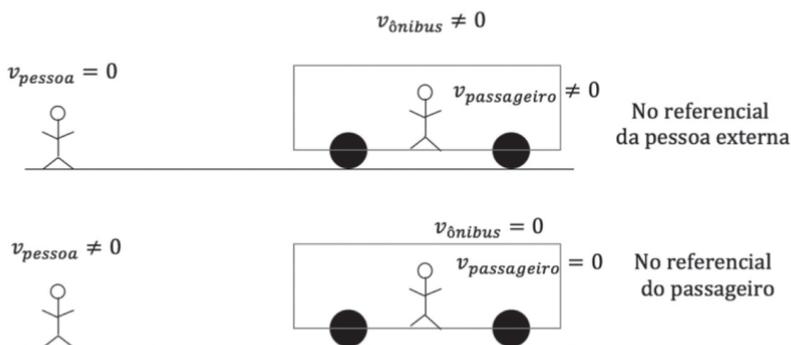
Fonte: elaborada pelo autor.

Movimento relativo

Nos movimentos estudados até agora, sempre definimos como referencial algum ponto especial na trajetória que permanecesse em repouso. Esta escolha era interessante, pois dessa forma as marcações de espaço adotadas não seriam alteradas durante o movimento. Porém, também foi apresentada a noção de que a escolha do referencial é arbitrária, o que significa que, independentemente da escolha realizada, a física do problema não pode ser alterada.

Um exemplo da escolha de referencial é o caso de um passageiro no interior de um ônibus e uma pessoa na calçada, observando o ônibus, como ilustra a Figura 1.13. Do ponto de vista referencial da pessoa que está na calçada, o ônibus e o passageiro estão em movimento. Agora, no referencial do passageiro, o ônibus encontra-se parado e a pessoa do exterior está se movimentando. Quem está certo?

Figura 1.13 | Representativo de dois referenciais diferentes, observe que a noção de repouso e movimento é relativa



Fonte: elaborada pelo autor.

Na prática, ambos estão corretos, pois em cada referencial haverá diferentes descrições físicas de um movimento. A noção de movimento é obtida como uma abstração da definição de velocidade: se algo está se afastando ou se aproximando de nós com o passar do tempo, dizemos que está em movimento. Caso a posição de um objeto seja constante em relação a nós, durante um intervalo de tempo, dizemos que este objeto está em repouso.



A questão sobre o estado de movimento ou repouso do planeta Terra foi motivo de intenso debate na Idade Média. Então, sobre quais condições a Terra está em repouso relativo? E no estado de movimento relativo?

Ao aplicarmos as equações de movimento, devemos ter o cuidado de corrigir o termo velocidade, utilizando-se a noção de velocidade relativa (v_r), que é calculada como a soma vetorial entre as velocidade dos corpos: $\vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$.

Observe que esta soma é vetorial, razão pela qual, devemos nos atentar à orientação espacial dos vetores velocidade. Via de regra, dizemos que se for nula a velocidade relativa, os corpos estão em repouso entre si.

Sem medo de errar

No início da seção foi apresentada a situação em que você propõe o desenvolvimento de um mapa da escola por meio de um passeio pelo ambiente. Nesta etapa, você, como professor, irá elaborar a sequência didática para esta atividade e, para isso, precisa elaborar um *checklist* da atividade. Algo como:

1. Organizar os equipamentos para os estudantes, no caso a trena e o cronômetro.
2. Desafiar os estudantes para obter o valor de velocidade média para uma pessoa andando calmamente.
3. Escolher uma origem para o sistema de coordenadas.
4. Efetuar medidas de tempo para pontos estratégicos da escola, como a quadra de esportes.
5. Propor a medida do comprimento do corredor de entrada da escola, da área da quadra de esportes ou da sala de aula.

Evidentemente, os valores de distância para esses locais não podem ser medidos diretamente, pois isso exigiria muito tempo. Uma boa ideia seria aplicar a equação do MRU:

$$x(t) = x_0 + v_m t.$$

Com base na velocidade v_m de uma pessoa andando calmamente. Para isso, podemos levar os alunos até um espaço aberto e fazer marcações de distância no chão, e com uma trena medir a distância. Depois, um estudante por grupo percorrerá esse espaço e o tempo necessário será cronometrado e anotado por outros componentes da equipe. Com a equação da velocidade média, podemos estimar um valor para a velocidade de cada estudante que fará a medida caminhando pela escola. Para conferir o resultado obtido no cálculo, os alunos podem procurar em livros ou na internet um valor médio para esta velocidade.

Em um segundo momento, os alunos devem criar um desenho do mapa com esses locais, escolhendo um referencial interessante, que será o ponto zero do sistema de coordenadas. A escolha desse ponto é arbitrária, mas incentive os alunos a terem um critério de escolha, como algo especial ou marcante da escola. É interessante também que os alunos escolham diferentes referenciais.

Você está preparando sua aula, então resolveu realizar a atividade antecipadamente para verificar se ela está bem planejada. Você escolheu a caixa d'água da escola, como indica a Figura 1.14.

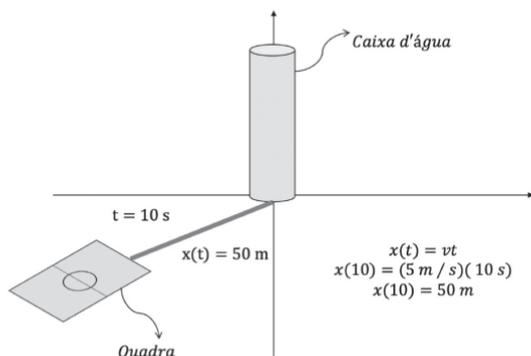
Após marcar uma distância de 20 m no chão, você caminhou por ela, tentando manter a velocidade constante, e marcou no cronômetro 4 s. Assim, sua velocidade média é aproximadamente:

$$v_m = \frac{20}{4} = 5 \text{ m/s} .$$

Depois, você saiu caminhando pela escola. Da caixa d'água até a quadra você levou 10 s. Assim, a posição da quadra no mapa será de:

$$x(t) = x_0 + v_m t \rightarrow x(t) = (5 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 50 \text{ m} .$$

Figura 1.14 | Representação do mapa da escola



Fonte: elaborada pelo autor.

Da mesma maneira, podemos estimar o comprimento de um corredor extenso, a área da quadra de esportes ou ainda da sala de aula.

As dimensões do terreno da escola são a largura (y) e comprimento (x), que podem ser obtidos levando em consideração que você levou 10 s para atravessar a frente da escola e 16 s para chegar da frente até o fundo. Assim:

Comprimento $\rightarrow x(t) = v_m t_x \rightarrow x(t) = (5 \text{ m/s})(16 \text{ s}) = 80 \text{ m}$

Largura $\rightarrow y(t) = v_m t_y \rightarrow y(t) = (5 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 50 \text{ m}$

Então, a área é calculada como o produto do comprimento pela largura:

$$\text{Área} = x \cdot y \rightarrow \text{Área} = (80 \text{ m})(50 \text{ m}) = 4000 \text{ m}^2.$$

Que outras atividades você proporia? Como solicitaria que os estudantes reportassem seus cálculos? Uma atividade de sucesso deve ser muito bem preparada!

Avançando na prática

Usando simuladores para estudar o movimento dos corpos

Descrição da situação-problema

Os avanços da tecnologia têm chegado a diferentes espaços da sociedade moderna, inclusive na escola. Devemos trazer para a sala

de aula as chamadas tecnologias de informação e comunicação (TIC) como forma de auxiliar na aprendizagem dos alunos. As TIC compreendem ambientes virtuais, uso de aplicativos educativos, chamados de simuladores, entre outros recursos tecnológicos.

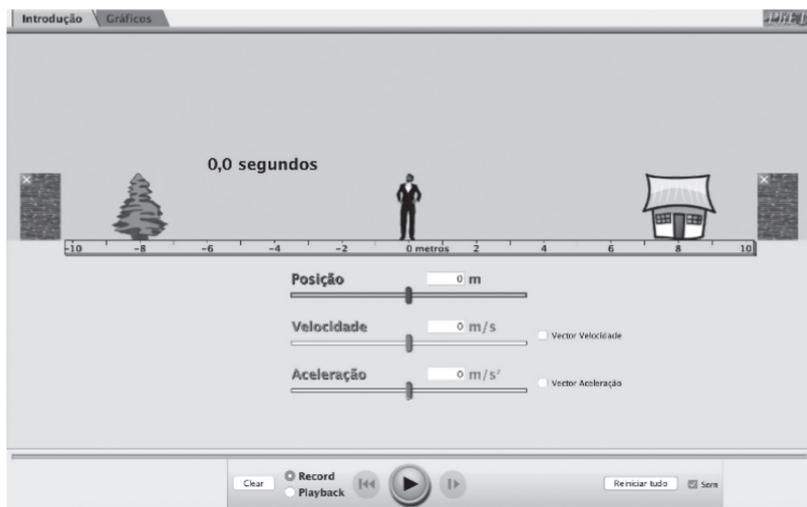
Nesta situação, você procura na internet por atividades e aplicativos que possam melhorar a visualização e a compreensão dos alunos sobre os movimentos estudados. Quais seriam as alternativas e técnicas que você usaria para elaborar uma aula sobre o tema?

Resolução da situação-problema

Após uma busca em plataformas, você encontrou o simulador: o "Homem em movimento", desenvolvido pelo Projeto Phet, que está disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/moving-man> (acesso em: 26 mar. 2017.).

Após baixar o simulador, você verá uma imagem como esta:

Figura 1.15 | Tela de entrada do Aplet: Homem em movimento



Fonte: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/moving-man>. Acesso em: 26 mar. 2017.

Na guia *Introdução* é possível escolher posição, velocidade e aceleração do homem e simular como seria o seu movimento no eixo x. Para isso, após acertar as configurações, aperte o botão *play*.

Na guia *Gráficos* é possível construir os gráficos de movimento da pessoa à medida que você o arrasta no eixo x. Além dos gráficos do movimento uniforme e uniformemente variado, é possível combinar os dois movimentos.

A interatividade com o programa possibilitou que você pudesse implementar a resolução de problemas por meio da inserção das condições iniciais do movimento e a aceleração. A imagem na tela permite acompanhar o movimento do homem com a evolução do tempo e as alterações nas grandezas. Por exemplo, com os parâmetros iniciais:

$$x_0 = -6 \text{ m}, v = 2 \text{ m/s}, a = 0 \text{ m/s}^2,$$

podemos obter em qual instante de tempo o homem chegará à posição 6 m:

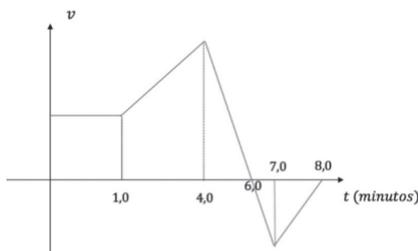
$$6 = -6 + 2t \rightarrow t = 6 \text{ s}.$$

Depois da resolução, podemos conferir este resultado com animação do simulador, o que será muito estimulante para os estudantes.

Faça valer a pena

1. Durante o treinamento de um atleta de corrida foram coletados dados da sua velocidade em diferentes intervalos de tempo. De posse desses dados, o treinador desenhou um gráfico de velocidade como função do tempo, com o seguinte formato apresentado na figura a seguir.

Figura 1.16 | Gráfico de velocidade de um atleta de corrida de rua.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base no gráfico, o treinador fez as seguintes afirmações:

- I. Entre 1,0 minuto até 4,0 minutos o movimento é do tipo uniforme.
- II. Até 1,0 minuto o movimento é progressivo.
- III. Em dois momentos do treino ocorre a condição de repouso.
- IV. Entre 4,0 minutos até 6,0 minutos o movimento é do tipo retardado.

É correto o que se afirma em:

- a) I, II e III apenas.
- b) II e III e IV apenas.
- c) II e IV apenas.
- d) I e IV apenas.
- e) II apenas.

2. Dois amigos moram em cidades distantes entre si pela distância de 240 km. Em um determinado dia, resolvem se encontrar em um ponto da estrada entre as duas cidades, de tal forma que, se ambos estivessem na mesma velocidade, este ponto seria um posto no km 120. Porém um dos carros teve alguns imprevistos na viagem e conseguiu deslocar-se a uma velocidade de apenas 60 km/h, enquanto seu amigo conseguiu desenvolver até 90 km/h.

Com base nessas informações, qual será a diferença entre o ponto de encontro previsto e o obtido?

- a) 0 km.
- b) 12 km.
- c) 20 km.
- d) 24 km.
- e) 30 km.

3. Uma das boas práticas da direção defensiva é manter uma distância considerável do carro à frente, chamada de distância de segmento ou segurança. Esta distância deve ser suficiente para parar o veículo ou tomar alguma decisão a tempo, a fim de evitar uma colisão com o carro à frente. Considere que um veículo trafega com velocidade de 76 km/h, quando o condutor pisa no freio, imprimindo uma desaceleração de 5 m/s^2 .

Nessas condições, a distância mínima a fim de parar o veículo em segurança será de:

- a) 20 m.
- b) 30 m.
- c) 40 m.
- d) 45 m.
- e) 50 m.

Seção 1.3

Trajетórias

Diálogo aberto

Nas seções anteriores discutimos conceitos fundamentais, tais como unidades de medida e as equações gerais da cinemática, em especial o movimento uniforme e o movimento uniformemente variado.

Com este conjunto de conhecimentos, podemos analisar movimentos interessantes; por exemplo, as trajetórias dos projéteis lançados sob o efeito da gravidade e também o movimento circular. Nosso objetivo é prever a evolução das grandezas físicas do sistema, por meio dos conhecimentos das condições iniciais. Ou seja, a partir da posição atual de um móvel, descobrir sua posição futura ou passada, contanto que algumas condições se mantenham inalteradas.

A história da ciência nos mostra que estes conceitos foram desenvolvidos por meio de práticas experimentais e discussão de situações hipotéticas. A Física é uma ciência baseada na observação da natureza, reproduzindo fenômenos físicos em condições controladas como forma de comprovar e avaliar as hipóteses científicas elaboradas.

Para motivar nossa unidade, lembre-se de que você se colocou no papel de um professor de Física em uma escola tradicional. Nesse momento, você se depara com um novo desafio: a escola não possui um laboratório de ciências adequado para as aulas. Nesta situação, fica difícil realizar atividades práticas, porém você conhece a importância da inserção dessas atividades para que os estudantes compreendam o caráter experimental da Física, assimilem os conceitos mais facilmente e sintam uma motivação adicional de uma atividade participativa e dinâmica.

Neste caso, você propõe uma atividade com os equipamentos que encontrou em bom estado no laboratório: algumas trenas, cronômetros e bolinhas de metal. Assim, você pode analisar, por exemplo, o movimento de queda livre de objetos.

Sabendo que este movimento guarda características do movimento uniformemente variado, como você pensaria em elaborar essa atividade? Qual poderia ser um resultado importante a ser obtido com o experimento de queda livre? Quais dados devem ser coletados?

Para ajudar nesta situação, esta seção trabalhará com o conceito de aceleração da gravidade e com casos de movimentos no campo gravitacional. O princípio de independência dos eixos nos permite trabalhar com movimentos compostos, como o lançamento de projéteis. Ao final da seção serão apresentados os conceitos da trajetória circular e as grandezas físicas relevantes.

Não pode faltar

Nesta seção, vamos trabalhar com um caso especial de aceleração que está presente em todos os lugares: a aceleração do campo gravitacional. A ação dessa grandeza física faz que o estudo dos movimentos de queda livre (objeto solto no ar a partir do repouso) e o lançamento de projéteis (objeto lançado com velocidade constante) tenham particularidades importantes.

Queda Livre

A **aceleração do campo gravitacional**, ou ainda aceleração da gravidade, é representada pela letra g e designa a aceleração a que todos os corpos são submetidos ao serem liberados na proximidade da superfície da Terra. Ela explica o fato de soltarmos um objeto livre no ar e ele “cair”.



Pesquise mais

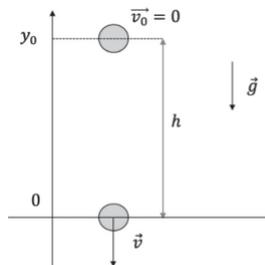
Os estudos da queda livre têm diversas consequências para a história da ciência e possibilitou uma evolução nas ideias da Física. Sugerimos a leitura das páginas 64 a 67 e 78 a 81 do livro a seguir:

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

O valor de g depende de vários fatores, como altitude, composição do solo e posição geográfica. Como uma simplificação, adotamos que, em média, o valor da aceleração da gravidade ao nível do mar tem módulo $\mathbf{g} = 9,8 \text{ m/s}^2$. No ensino básico, o valor de g costuma ser arredondado para $\mathbf{g} = 10 \text{ m/s}^2$, a fim de simplificar os cálculos.

A aceleração da gravidade é uma grandeza vetorial, portanto possui uma orientação no espaço. Por argumentos físicos, o vetor \vec{g} é vertical e orientado para o centro da Terra. Além disso, se a posição final for o chão, o deslocamento corresponde à altura de queda. A Figura 1.17 apresenta as grandezas físicas relevantes e a orientação do vetor aceleração da gravidade.

Figura 1.17 | Queda livre



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 1.17 nos ajuda a elaborar as equações de movimento para a queda livre. Temos um movimento uniformemente acelerado partindo do repouso ($v_{y_0} = 0$) para o sentido negativo do eixo y . Portanto:

$$y(t) = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Definindo o zero do eixo y na posição final do objeto, com uma altura inicial h :

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2.$$

A expressão para a velocidade em função do tempo será $\mathbf{v}(t) = -\mathbf{g}t$ e a relação entre a velocidade e a altura (pela equação de Torricelli) será:

$$v^2 = v_{y_0}^2 + 2a\Delta y \rightarrow v^2 = 0^2 + 2 \cdot (-g) \cdot (0 - h) \rightarrow v^2 = 2gh.$$



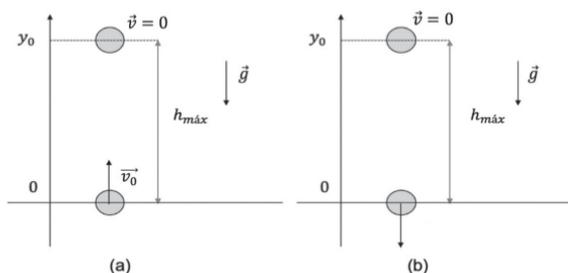
Observe que as equações de movimento não apresentam nenhuma dependência com a massa do objeto. Assim, se soltarmos uma pedra e uma folha de papel de uma mesma altura, esperamos que ambos cheguem juntos ao solo. Em quais condições isto é válido? Que outros fatores do ambiente podem interferir nesta conclusão?

Lançamento vertical

Além da queda livre, há o caso do **lançamento vertical** em que há duas fases de movimento: o de subida o de descida. Na subida, a bola é lançada com uma velocidade inicial \overline{v}_0 . Como este movimento é retardado (velocidade e aceleração possuem sentidos opostos), a velocidade diminui à medida que o corpo sobe, até chegar ao valor nulo.

Neste ponto, o corpo chega à posição de altura máxima. Apesar de o módulo da velocidade ser nula, a aceleração da gravidade continua a agir, invertendo o sentido do movimento, que passa a ser acelerado. Ao voltar à altura de lançamento, a velocidade do corpo terá o mesmo módulo da inicial, porém com sentido contrário. Observe que na fase de descida o comportamento do corpo é igual ao da queda livre. Na Figura 1.18 a porção (a) ilustra a fase de subida do lançamento vertical e a porção (b) a fase de descida. A transição entre as fases ocorre quando a velocidade do corpo é nula, atingindo a altura máxima.

Figura 1.18 | Lançamento vertical



Fonte: elaborada pelo autor.

É preciso ter muito cuidado com a orientação dos vetores envolvidos no problema para que utilizemos de maneira correta as equações. Uma dica interessante é sempre produzir uma representação em desenho da situação descrita no problema para facilitar a escolha de sinais.



Exemplificando

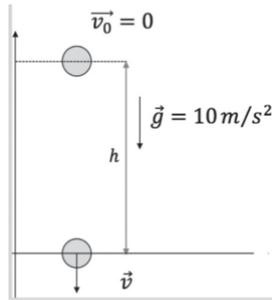
Um vizinho desatento derrubou do décimo quinto andar de um prédio, com altura de 61,25 m, um vaso de flor. Por sorte, ninguém estava abaixo do ponto de queda, porém o vaso ficou totalmente destruído. Considerando a aceleração da gravidade como $\mathbf{g} = 10 \text{ m/s}^2$, podemos admitir este movimento como uma queda livre.

- Qual será a posição do vaso de flor após 1,5 s de queda?
- Qual será o tempo de queda do vaso?
- Qual será o módulo do vetor velocidade do vaso de flor ao chegar no solo?

Resolução:

- Para esta questão, podemos criar a seguinte representação:

Figura 1.19 | Lançamento vertical



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a informação da altura de queda, podemos escrever a equação de posição $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

Substituindo os valores numéricos:

$$y(t) = 61,25 - \frac{1}{2}(10)t^2 \rightarrow y(t) = 61,25 - 5t^2.$$

Assim, em 1,5 s a posição do vaso será:

$$y(1,5) = 61,25 - 5(1,5)^2 = 50,00 \text{ m}.$$

b) O tempo de queda é obtido considerando a posição final como o chão, ou seja, zero. Assim, a equação resulta em:

$$y(t_q) = 61,25 - 5t_q^2 = 0.$$

Isolando o termo de tempo, temos que:

$$0 = 61,25 - 5t_q^2 \rightarrow 5t_q^2 = 61,25$$

$$t_q^2 = 12,25 \rightarrow t_q = 3,5 \text{ s}.$$

c) A equação de velocidade permite obter este valor se utilizarmos t igual a 3,5 s.

$$v(t) = -gt \rightarrow v(t) = -10t.$$

Assim:

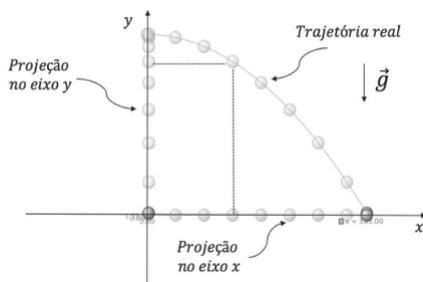
$$v(3,5) = -10(3,5) = -35 \text{ m/s}.$$

Já estudamos a queda livre e o lançamento vertical. Entretanto, na natureza, temos a liberdade de lançar um corpo no ar com uma velocidade em qualquer direção espacial. Como vimos, todo movimento que acontece na direção vertical está sujeito a ação da aceleração da gravidade, configurando-se como um movimento variado. Mas o que ocorre, nesse caso, quando existe uma componente horizontal para a velocidade?

Independência dos movimentos

Nos movimentos bidimensionais deverá existir uma composição das equações de $x(t)$ e $y(t)$, como ilustra a Figura 1.20, que mostra a trajetória de uma bola lançada sob ação do campo gravitacional, com uma velocidade horizontal inicial.

Figura 1.20 | Ilustração do lançamento horizontal de um corpo



Fonte: elaborada pelo autor utilizando o software Modellus.

Observando a projeção no eixo x, percebemos que esta percorre espaços iguais em tempos iguais. Assim, o movimento na horizontal corresponde ao movimento uniforme. Então, é possível discutir o lançamento horizontal do corpo como uma composição do movimento uniforme com o movimento uniformemente variado da queda na vertical, sob a ação da gravidade.

Além disso, a conclusão mais importante é que esses movimentos são independentes entre si, como previsto no princípio de independência dos eixos de Galileu Galilei. Na prática, isto significa que podemos escrever e trabalhar com as equações para o eixo x e y separadamente, apenas tendo a variável tempo interligando os resultados.

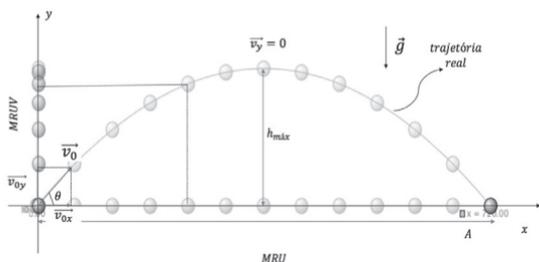
Uma aplicação importante do princípio de independência dos movimentos é o estudo do lançamento oblíquo, também conhecido como lançamento de projétil. Dizer que um objeto é lançado obliquamente significa dizer que este foi lançado com uma velocidade \vec{v}_0 em uma determinada direção e sentido, formando um determinado ângulo θ com relação à direção horizontal, conforme Figura 1.21, que representa um lançamento oblíquo.

Para analisarmos os movimentos vertical e horizontal separadamente, podemos decompor a velocidade nas direções x e y da seguinte maneira: $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$,

onde: $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$.

Note que, do mesmo modo, a posição da partícula pode ser descrita pelo vetor posição, composto pelas posições $x(t)$ e $y(t)$, de modo que $\vec{x} = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$.

Figura 1.21 | Movimento oblíquo



Fonte: elaborada pelo autor com o software Modellus.

Note que a trajetória descrita pelo corpo tem a forma de uma **parábola**.

Em função da independência dos movimentos, temos o seguinte grupo de equações:

eixo x (movimento retilíneo e uniforme, velocidade constante)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t,$$

eixo y (movimento retilíneo uniformemente variado, aceleração da gravidade)

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v_y(t) = v_{0y} - gt; \quad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y.$$

Ao analisarmos a trajetória do projétil, é frequente a curiosidade a respeito de duas medidas em específico: a altura máxima e o alcance.

Na direção y , sabemos que a velocidade diminuirá até chegar a zero ($v_y = 0$). A altura do projétil nesse instante é chamada de altura máxima ($h_{m\acute{a}x}$). Uma expressão matemática para a altura máxima pode ser obtida pela equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y \rightarrow 0 = v_{0y}^2 - 2gh_{m\acute{a}x} \rightarrow h_{m\acute{a}x} = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$



Assimile

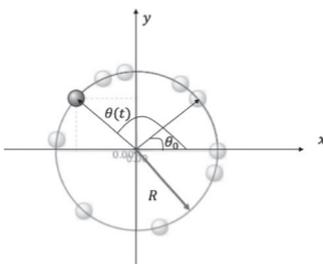
No movimento oblíquo, as projeções dos movimentos horizontais e verticais podem ser estudadas separadamente pelo princípio de independência dos eixos. Na vertical, temos a ação do campo gravitacional, razão pela qual, este movimento é do tipo variado, enquanto no eixo horizontal o movimento é do tipo uniforme.

Algo que é muito útil e pode ser verificado por simetria na Figura 1.21 é que o tempo total de voo do corpo deve ser o dobro do tempo de subida.

Movimento circular uniforme

Quando um objeto percorre uma trajetória cujo formato é uma circunferência, ou parte de uma circunferência, trata-se de um movimento circular. No caso em que o módulo da velocidade deste objeto é constante, chamamos este movimento de **Movimento circular uniforme** (MCU). A Figura 1.22 ilustra um MCU e as grandezas importantes para este movimento, cuja principal característica é que o módulo do vetor velocidade é constante.

Figura 1.22 | Movimento circular uniforme (MCU)



Fonte: elaborada pelo autor com o software Modellus.

Note que, apesar de o módulo da velocidade ser constante, o vetor velocidade muda continuamente, pois a direção e o sentido do movimento se alteram, assim como suas componentes x e y .

No movimento circular, é conveniente trabalhar em coordenadas polares. O raio é constante (R), e podemos falar em uma posição angular $\theta(t)$ e em uma posição angular inicial θ_0 .

As medidas de tempo no movimento circular podem ser adaptadas às características do movimento, pois a cada determinado intervalo de tempo o corpo volta ao ponto inicial da trajetória, fechando um ciclo. O tempo necessário para o corpo completar uma volta é chamado de período, representado pela letra T . Além disso, podemos ainda contar quantas voltas completas o corpo executa em unidade de tempo, o que define a grandeza frequência, representada pela letra f . Podemos calcular a frequência utilizando a seguinte equação, que relaciona o intervalo de tempo (Δt) com o número de voltas (n) completas nesse intervalo:

$$f = \frac{n}{\Delta t}.$$

A unidade de frequência no Sistema Internacional é hertz (Hz), nome dado para unidade s^{-1} . As grandezas período e frequência são inversamente proporcionais, como indica a equação:

$$T = \frac{1}{f}.$$

Uma grandeza importante é o deslocamento angular: $\Delta\theta = \theta - \theta_0$.

Podemos calcular a variação angular com o tempo, definindo a velocidade angular, representada pela unidade rad/s no SI, isto porque a unidade de ângulo no SI é o radiano. Portanto: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.

A velocidade angular pode ser encontrada pelas relações com frequência e período, escolhendo uma variação angular conveniente. Por exemplo, para uma volta completa, o valor de $\Delta\theta$ corresponde a 2π , então é possível obter as equações:

$$\omega = 2\pi f, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Nos casos em que é necessário realizar a conversão da unidade de ângulo grau para a unidade radiano, precisamos nos lembrar que: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

A velocidade linear \vec{v} está relacionada com a velocidade angular pela relação:

$$v = \omega R,$$

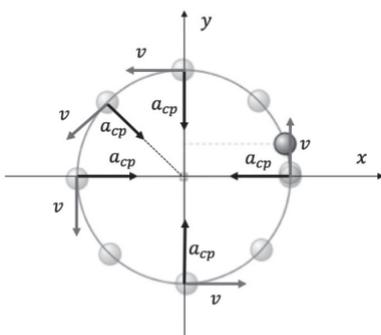
sendo R o raio da circunferência descrita pelo corpo. A direção desta velocidade será sempre tangencial à trajetória circular, isto é, perpendicular ao raio da circunferência. Por esta razão, passamos a nos referir à velocidade v pelo nome de velocidade tangencial. Mas o que explica o fato de os corpos descreverem trajetória circular ao invés de retilínea?

Se há uma alteração constante na direção e sentido da velocidade, ela deve ser causada por uma aceleração. A esta aceleração damos o nome de aceleração centrípeta (a_{cp}), pois aponta para o centro da circunferência e pode ser calculada por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}, \quad a_{cp} = \omega^2 R.$$

A Figura 1.23 apresenta a trajetória de um corpo circular, com a representação do vetor velocidade tangencial e vetor aceleração centrípeta.

Figura 1.23 | Aceleração centrípeta no MCU



Fonte: elaborada pelo autor com o software Modellus.



Confira no livro a seguir, nas páginas 90 a 93, uma discussão aprofundada sobre as equações e o caso em que o movimento circular não é uniforme.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: Mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

Sem medo de errar

Você, no papel de um professor de uma escola com poucos recursos de laboratório, optou por fazer com os alunos um experimento de queda livre, que necessita apenas de uma trena, um cronômetro e uma bolinha.

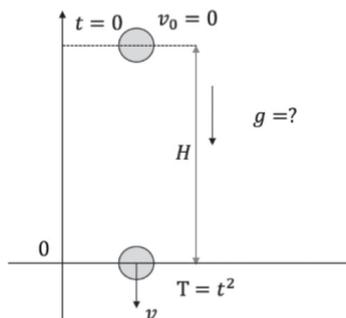
Agora você precisa organizar os alunos para que eles estejam prontos para a atividade. Seria uma boa ideia lembrar rapidamente alguns conceitos gerais de queda livre e a equação que descreve a altura da bolinha: $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, deixando claro que o sinal negativo na aceleração ocorre porque definimos o eixo y positivo para o alto, de modo que a influência da gravidade ocorre no sentido oposto.

Na queda livre, o corpo é liberado de determinada altura H com velocidade inicial nula. A posição final será nula, com o zero do eixo y definido no chão. Assim, a equação resulta em:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = H + (0)t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow H(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

Os estudantes precisam medir o tempo de queda t . A proposta é obter um valor aproximado para a aceleração da gravidade g , a título de comparação. Você deve pedir também que eles desenhem a situação experimental e descrevam o movimento por meio de um gráfico. A Figura 1.24 apresenta um esquema da prática experimental realizada, semelhante ao que os estudantes devem entregar.

Figura 1.24 | Prática experimental: queda livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Em relação ao gráfico de posição por tempo, lembre-se de que o resultado será uma parábola. Obter o valor da aceleração por meio da parábola desenhada seria um desafiador exercício de geometria analítica, que poderia ser combinado com o professor de Matemática. Entretanto, caso você não disponha de todo esse tempo e deseje focar na física do problema, podemos auxiliar os estudantes mostrando-lhes que podemos transformar esta equação na forma linear, adotando que: $T = t^2$.

Então, a equação da posição tem a forma: $y(T) = \left(\frac{1}{2}g\right)T$, uma reta, cujo coeficiente angular está relacionado com a aceleração da gravidade, informação que pode ser obtida a partir do gráfico por qualquer estudante usando somente uma régua.

Comparando as equações, vemos que o termo $g/2$ é o coeficiente angular da reta ajustada aos pontos experimentais. Então, o trabalho será medir diferentes tempos de queda e altura e gerar um gráfico H por T . Para isso, vamos observar a Tabela 1.1 elaborada com os dados coletados por um dos grupos, que lançou as bolinhas do alto de uma sacada:

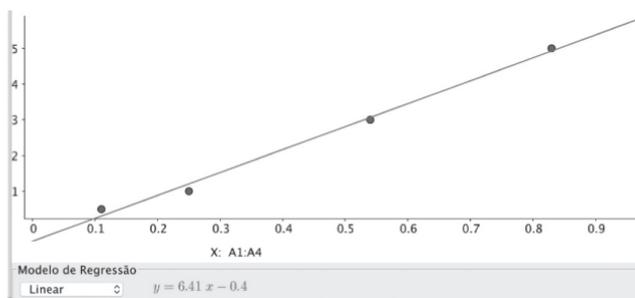
Tabela 1.1 | Dados coletados pelos estudantes para o experimento de queda livre

Altura (H) metros	Tempo (t) segundos	$T = t^2$
5	0.91	0,83
3	0.73	0.54
1	0.39	0.25
0,5 m	0.33	0.11

Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos plotar esses dados em um gráfico de H em função de T, como mostra a Figura 1.25.

Figura 1.25 | Retta ajustada aos pontos experimentais



Fonte: elaborada pelo autor no software GeoGebra.

Os estudantes realizaram o gráfico em um papel milimetrado e, posteriormente, utilizando softwares. O coeficiente angular obtido foi $a = 6,41$. Pela relação deduzida, isto corresponde à metade da aceleração da gravidade. O valor da aceleração da gravidade obtido pelos estudantes foi de:

$$a = \frac{g}{2} \rightarrow g = 2a = 2(6,41) = 12,82 \text{ m/s}^2.$$

O valor obtido foi diferente do valor teórico, não é mesmo? Esta é uma grande oportunidade para discutir as limitações do experimento realizado, que não levou em conta a resistência do ar, utilizou poucas medidas, além das questões relativas ao tempo de reação dos estudantes ao operar o cronômetro. Deixe claro que eles aprenderam bastante com o experimento, apesar do valor obtido.

E, você, como complementaria essa atividade, além das sugestões dadas aqui? Não se esqueça de escrever um plano de aula detalhado, pois a preparação é o segredo para o sucesso.

Dessa maneira, encerrou-se o ciclo de aulas que abordou a cinemática, e você, como professor, conseguiu trazer uma aprendizagem significativa para seus alunos, apesar de todas as limitações. Eles adquiriram interesse pela ciência e desenvolveram habilidades matemáticas essenciais!

Avançando na prática

Criando uma questão sobre MCU

Descrição da situação-problema

Uma das atividades comuns da docência é o desenvolvimento de questões e atividades para os estudantes, tanto em forma de avaliações convencionais quanto em forma de avaliações não convencionais. Como consequência dos processos seletivos atuais para o ensino superior, as questões tendem a ter uma carga de contextualização com algum assunto do cotidiano ou aplicação tecnológica. Dessa forma, dificilmente questões como “calcule a velocidade angular...” ou outra aplicação direta de fórmula serão sugeridas pelas equipes pedagógicas nas escolas.

Com este plano de fundo, suponha que você foi contratado por uma escola para elaborar questões de um simulado como preparação para um vestibular extremamente concorrido. A escola pede que as questões tenham um nível médio de dificuldade, mas que apresentem uma contextualização atual. A proposta da questão é avaliar a capacidade de interpretação dos alunos e de relacionar aplicações reais com conceitos do movimento circular uniforme (MCU).

Então, quais poderiam ser os temas para as questões e as fontes a serem consultadas? Em qual aspecto teórico sua questão irá focar? Não se esqueça de oferecer uma resolução para sua questão, apresentando cálculos e eventuais justificativas.

Resolução da situação-problema

Uma fonte de inspiração para a questão pode ser a leitura de

jornais e revistas, em especial para garantir o caráter de atualidade para sua questão. Por exemplo, um tema que pode ser aproveitado por você para desenvolver a questão é o lançamento de dois novos satélites brasileiros, em 2017, para atender à demanda por televisão digital. Esses satélites são chamados de geoestacionários, por estarem sempre situados sobre o mesmo ponto da Terra. Eles realizam sua órbita acompanhando o movimento da Terra e, para isso, seu período corresponde ao período de rotação da Terra, ou seja, 24 h. Com esta informação é possível calcular a velocidade angular ω do satélite, por exemplo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{24 (60 \text{ min})(60 \text{ s})} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s.}$$

Com uma pesquisa em um buscador da internet, podemos obter o raio da trajetória desses satélites geoestacionários em fontes confiáveis e usar a informação para descobrir sua aceleração centrípeta ou ainda a velocidade tangencial. Fica como um desafio para você! Não se esqueça de escrever o enunciado do exercício e sua resolução completa.

Faça valer a pena

1. Em diversos vídeos na internet é possível encontrar gatos que gostam de derrubar objetos de mesas, armários e escadas. Em um deles, o bichano derrubou um brinquedo do alto de uma escada e depois de 1,2 s seu dono, que estava próximo da escada, escutou o barulho da colisão. Considere que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que o brinquedo é solto do degrau.

A alternativa que contém a altura do degrau, em metros, é:

- a) 7,2 m.
- b) 8,9 m.
- c) 10,0 m.
- d) 12,0 m.
- e) 13,2 m.

2. No basquete, a contagem de pontos pode ser feita mesmo após o fim do tempo regular, desde que a bola seja lançada um pouco antes do momento em que o cronômetro é zerado. Este recurso dito no “estouro do cronômetro” já decidiu medalhas olímpicas e campeonatos americanos de basquete (NBA).

Considere que um jogador lançou para cesta uma bola no “estouro do cronômetro”, com um ângulo de 60° com relação ao solo e velocidade de 25 m/s. Admitindo que a bola viajou por 1,6 s, qual é a distância do jogador até a cesta? Adote o módulo da aceleração da gravidade como $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 15 m.
- b) 18 m.
- c) 20 m.
- d) 22 m.
- e) 28 m.

3. Uma criança pretende lançar um avião de madeira depois de rodopiá-lo preso a uma corda com comprimento de 20 cm. Após algumas voltas, o avião adquire uma velocidade tangencial de 9 km/h.

Neste instante, o módulo da aceleração centrípeta do avião é de:

- a) $10,00 \text{ m/s}^2$.
- b) $12,25 \text{ m/s}^2$.
- c) $25,50 \text{ m/s}^2$.
- d) $31,25 \text{ m/s}^2$.
- e) $35,00 \text{ m/s}^2$.

Referências

GEOGEBRA. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 2 jun. 2017.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1997. v. 1.

MODELLUS. Disponível em: <<http://modellus.co/index.php?lang=pt>>. Acesso em: 2 jun. 2017.

PHET. **O homem em movimento**. 2011. Disponível em: <http://https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/moving-man>. Acesso em: 26 mar. 2017.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. São Paulo: Ltc, 2009. v. 1.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: Mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

Dinâmica: estudo da causa dos movimentos

Convite ao estudo

Na unidade anterior, estudamos a cinemática e aprendemos a descrever os movimentos dos corpos, em termos de sua posição, velocidade e aceleração. Na presente unidade, estudaremos a **dinâmica**, que investiga o movimento dos corpos tendo como preocupação a sua causa. Abordaremos as leis de Newton e suas aplicações, verificando que sempre existe uma força na origem de uma aceleração.

O futuro educador deve estar ciente da importância de relacionar o conteúdo escolar com outras áreas de conhecimento e assuntos do cotidiano, atraindo a atenção dos alunos e melhorando o processo de ensino-aprendizagem. Esta é a ideia principal da interdisciplinaridade, que preza pelas conexões entre as áreas de conhecimento e entre temas do cotidiano. Provavelmente você irá se deparar com esta preocupação em projetos pedagógicos, propostas de materiais didáticos e na elaboração de questões.

Assim, nesta unidade, você se colocará no lugar de um docente que deseja contextualizar o ensino de dinâmica com seus alunos e precisa encontrar um tema problematizador para as aulas. Após algum tempo de pesquisa e reflexão, você percebeu que pode trabalhar com assuntos relacionados à segurança no trânsito, para o condutor e o pedestre. Assim, é possível atribuir um significado social para os conceitos de dinâmica que serão apresentados. Além disso, você poderá falar sobre o funcionamento de um carro, tema que por si só já atrai a atenção de muitos alunos.

Em cada seção serão apresentados argumentos e ferramentas para responder às seguintes perguntas: é possível integrar os conhecimentos adquiridos sobre as leis de Newton com questões do trânsito na forma de um material escrito? Para isso, será proposta a produção de um banner sobre a segurança no trânsito, com princípios físicos envolvidos. Como podemos justificar, utilizando argumentos físicos, parâmetros e configurações do carro destinados à segurança dos passageiros? Para isso, serão calculados elementos como a velocidade máxima em uma curva, coeficientes de atrito, distâncias de frenagem etc. Como trabalhar e desenvolver questões com caráter contextualizado? Vamos discutir também a elaboração de avaliações.

Os princípios da dinâmica são baseados nas três leis de Newton que serão apresentadas na primeira seção. Depois, na Seção 2, temos algumas aplicações de forças em diferentes sistemas mecânicos com algumas particularidades, como a força normal, peso, centrípeta e o atrito. Por fim, a Seção 3 trabalha com a condição de equilíbrio de sistema, no qual a soma das forças é nula e com o conceito de torque para corpos extensos. Lembre-se de estudar os assuntos apresentados com afinco e dedicação, para que possamos resolver este novo desafio.

Seção 2.1

Leis de Newton

Diálogo aberto

O conceito de força está presente em diferentes contextos do nosso cotidiano, por exemplo, quando precisamos realizar uma atividade muito intensa e necessitamos de ajuda, dizemos que precisamos de “uma força”. Ou ainda, em propagandas de determinados alimentos, que indicam que sua ingestão “dá mais força”. Em boa parte dos casos, o conceito de força está relacionado com algo que poderia ser obtido, como uma capacidade. Na Física, o conceito de força está relacionado com a ação de alterar o estado de movimento de um corpo, seja a partir do repouso ou ainda de um movimento qualquer.

Nesta seção, você deve se imaginar no lugar de um professor de Física que preza por contextualizar suas aulas, cujo tema central das atividades, no momento, será a dinâmica aplicada em questões relacionadas ao trânsito.

Uma excelente ideia seria não somente conscientizar os jovens a respeito da segurança no trânsito, mas também suas famílias. A proposta é elaborar um pequeno cartaz com algumas orientações de cuidados de segurança no trânsito, aplicando as leis de Newton para demonstrar sua importância. Os alunos serão responsáveis por elaborar os pequenos textos e apresentar valores numéricos para um problema proposto por você: qual será a força de impacto sofrida por um motorista de 75 kg, no interior de um carro popular de 1t, durante uma colisão a 90 km/h? Considere que a colisão dura 1 ms e tanto o motorista quanto o carro terminam no repouso após este intervalo de tempo.

Durante a seção serão apresentados elementos para ajudar na seguinte reflexão: como podemos relacionar os conceitos da dinâmica com situações ligadas ao trânsito? Por exemplo, é possível discutir o uso do cinto de segurança, ou ainda os parâmetros para uma distância de frenagem segura?

Para ajudar nestas questões, vamos trabalhar com as três leis de Newton, fundamentais para o estudo da força e sua consequência.

Este estudo é a base do que chamamos de **dinâmica**, que se preocupa com as causas das alterações do estado de movimento. Esse trabalho tem essencial importância para a evolução dos conceitos da Física. Ao final da seção, há uma breve discussão sobre um caso especial de força denominada gravitacional, que permite estudar o movimento dos planetas e a queda dos corpos.

Não pode faltar

Uma das bases daquilo que chamamos de **mecânica clássica** são as três leis de Newton, apresentadas como princípios no livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, comumente conhecido por *Principia*, escrito pelo físico e matemático Isaac Newton (1643-1727). Estes escritos estabelecem uma estrutura básica para se estudar o movimento dos corpos, especialmente no que diz respeito à causa de um movimento. O ramo da mecânica que engloba estes conhecimentos denomina-se **dinâmica**. Além disso, o estabelecimento desses princípios permitiu a caracterização de uma interação fundamental entre corpos que apresentam massa: a **força gravitacional**.

A **primeira lei de Newton** (Lei da Inércia) indica que:

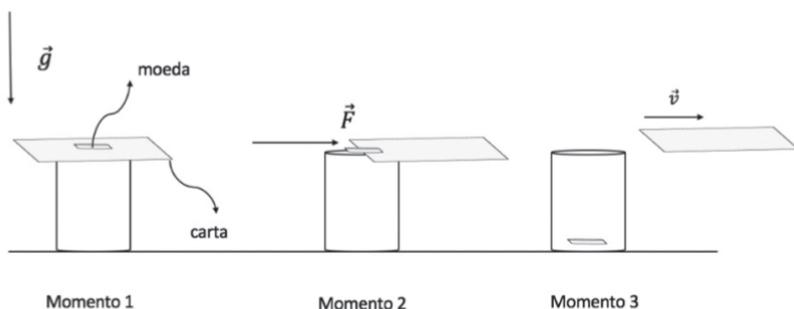
“Todo corpo permanece em estado de repouso, ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja compelido a mudar esse estado de movimento em virtude de forças exercidas sobre ele” (KELLER; GETTYS; SKOVE, 1997, p. 99).

Muitas vezes, as interpretações desses princípios podem gerar erros conceituais. Para ilustrar a primeira lei, vamos recorrer a um truque simples que pode ser realizado em sala de aula, com o uso de um copo, uma carta de baralho e uma moeda. Posicione a carta sobre o copo de modo a cobri-lo a boca completamente e coloque a moeda acima, observe.

Caso não ocorra nenhuma intervenção, a moeda e a carta continuarão nas mesmas posições por todo o tempo. Isto é previsto na 1ª lei, já que o estado de movimento do sistema *carta + moeda* é o repouso, que continuará até que algo interfira neste estado. Agora, você dará um “tapa” na carta apenas para deslocá-la. O que acontece com a moeda?

A carta será jogada para algum dos lados e a moeda cairá no fundo do copo. O segredo do truque está em dar um “tapa” na carta o mais rapidamente, para que a interação entre a carta e a moeda seja a menor possível. Porém, ao se retirar a carta de apoio, a moeda perde o apoio e pela ação do campo gravitacional da Terra cairá no fundo do copo, conforme ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Experimento demonstrativo da 1ª lei de Newton



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, a única forma de alterar o estado de movimento de um objeto é se alguma grandeza física provocar isso. A esta grandeza física vetorial damos o nome de **força** (\vec{F}). A força pode ser traduzida na prática como o empurrão ou puxão que damos nos objetos, que tem sempre uma direção e um sentido, além de uma intensidade. mas precisamos ter um cuidado: nem sempre é necessário o contato direto entre dois corpos para que atue uma força, como estudaremos posteriormente.

A primeira lei de Newton também é chamada de **Lei da Inércia** em alguns livros, pois a propriedade da inércia está relacionada com a dificuldade ou facilidade de um corpo em ter seu vetor velocidade alterado. A medida numérica relacionada ao conceito da inércia é o que chamamos de **massa** (m). Assim, um objeto de maior massa oferece mais resistência ao entrar em movimento ou voltar para o estado de repouso.

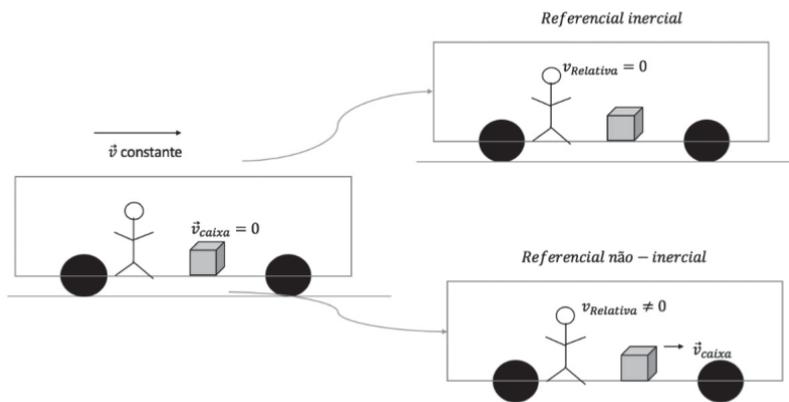
Entretanto, só podemos dizer que um objeto está em um estado de inércia se podemos especificar o referencial para o qual sua velocidade é constante. Vamos imaginar uma situação em que a pessoa 1 está dentro de um ônibus que viaja com velocidade

(\vec{v}) constante, observando a pessoa 2 na calçada. No referencial da pessoa 1, o ônibus está em repouso e a pessoa 2 está em movimento, enquanto no referencial da pessoa 2, o ônibus e a pessoa 1 estão em movimento. Note que ambas estão corretas, no que diz respeito a seu próprio referencial.

As leis de Newton são válidas para referenciais inerciais, o que quer dizer referenciais que não estão sofrendo uma aceleração.

Por exemplo, vamos imaginar que a pessoa dentro do ônibus deixa um objeto parado na sua frente, como ilustra a Figura 2.2. O candidato a referencial inercial é o ônibus, mas a pessoa ainda não tem certeza disso. A priori não há forças atuando sobre o objeto, assim, a primeira lei prevê que ele deverá permanecer em repouso relativo à pessoa. Se isso realmente ocorrer, dizemos que este é um referencial inercial. Caso contrário, ao colocarmos o objeto em repouso e ele passar a se mover, mesmo na ausência de uma força aparente, este referencial é classificado como não inercial.

Figura 2.2 | Experimento para identificarmos um referencial do tipo inercial e não inercial



Fonte: elaborada pelo autor.



Assimile

A primeira lei de Newton prevê que os corpos em movimento retilíneo uniforme ou em repouso tendem a manter este estado até que uma força atue sobre o sistema. Ela é válida para referenciais inerciais.

Voltando ao caso do ônibus que viaja com velocidade constante, podemos classificá-lo como um referencial inercial, pois ao executarmos este teste a caixa permanecerá em repouso relativo. Em qual situação isto deixa de ser válido? Durante uma freada brusca, aceleração ou ainda durante uma curva mais intensa. Nestes casos, o objeto que está em repouso irá adquirir um estado de movimento originado pela aceleração do ônibus. Então, um referencial inercial é aquele cuja aceleração é nula, isto é, que está em estado de repouso ou ainda de movimento retilíneo uniforme.

Segunda lei de Newton: força e aceleração

Ao final da discussão da Lei da Inércia, temos como resultado imediato que a força \vec{F} agindo no objeto irá alterar seu estado de movimento, com o surgimento de uma aceleração \vec{a} . A segunda lei oferece uma forma de relacionar essas duas grandezas: "Quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele se acelera. A aceleração possui a mesma direção e sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo" (YOUNG, FREEDMAN, 2016, p. 119).

Em linguagem matemática, a segunda lei de Newton pode ser escrita como: $\vec{F}_r = m\vec{a}$.

Em que m representa a massa do corpo, e o vetor \vec{F}_r é a força resultante atuante no sistema. A força resultante é a soma vetorial de todas as forças atuando no corpo em um determinado instante:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_n \vec{F}_n.$$

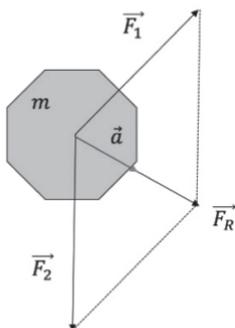
Nos casos em que é necessário somar forças em diferentes direções, podemos utilizar o princípio de independência de Galileu para obter as componentes do vetor aceleração separadamente:

$$\vec{F}_x = m\vec{a}_x, \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \vec{F}_z = m\vec{a}_z.$$

A Figura 2.3 ilustra a segunda lei em um caso geral, com a representação do vetor força resultante e aceleração. A unidade de força pode ser obtida pela análise dimensional da equação apresentada, lembrando que a unidade padrão de massa é o quilograma (kg) e de aceleração é metro por segundo ao quadrado (m/s^2): $[\vec{F}] = [m][\vec{a}] \rightarrow [\vec{F}] = kg\ m/s^2$.

Esta combinação de unidades fundamentais do SI foi chamada de Newton (N).

Figura 2.3 | Segunda lei de Newton: duas forças atuantes em um corpo de massa m



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

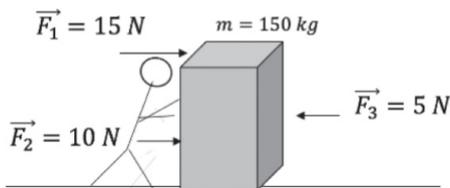
Para empurrar uma caixa muito pesada de 150 kg, duas pessoas aplicam forças de valor $\vec{F}_1 = 15\text{ N}$ e $\vec{F}_2 = 10\text{ N}$ no mesmo sentido. Como resistência de contato entre o solo e a caixa, há uma força contrária de módulo 5 N.

Com essas informações, responda:

(a) Qual será o módulo e a orientação do vetor força resultante? (b) E do vetor aceleração?

Resolução: Podemos representar a situação conforme a Figura 2.4:

Figura 2.4 | Forças sobre a caixa



Fonte: elaborada pelo autor.

(a) As forças representadas no sistema podem ser posicionadas na direção horizontal, de forma que a soma vetorial resulte em:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \rightarrow |\vec{F}_r| = 15\text{ N} + 10\text{ N} - 5\text{ N} = 20\text{ N} .$$

A força resultante está orientada na direção horizontal, da esquerda para a direita.

(b) Com o valor do módulo força resultante obtido no item (a), podemos aplicar a 2ª lei de Newton para obter o valor do módulo da aceleração:

$$|\vec{F}_r| = m|\vec{a}|.$$

Substituindo os valores numéricos, temos que:

$$|\vec{a}| = \frac{20N}{150kg} \rightarrow |\vec{a}| = 0,16m/s^2.$$

De acordo com a Lei de Newton, a orientação do vetor aceleração é a mesma do vetor força resultante. Então, o vetor aceleração está orientado na direção horizontal da esquerda para direita.

Força gravitacional: um caso especial da segunda Lei de Newton

As contribuições de Isaac Newton foram além do estabelecimento das bases da mecânica clássica, com os princípios que estamos estudando e que se estenderam para outras áreas do conhecimento, como a Matemática, a Óptica e a Astronomia. Newton analisou e realizou grandes avanços a partir dos trabalhos observacionais de Johannes Kepler (1571-1630) e Tycho Brahe (1546-1601) sobre as órbitas dos corpos celestes.



Pesquise mais

A revolução provocada pelos trabalhos de Isaac Newton é descrita no texto do professor da Universidade de São Paulo, João Zanetic:

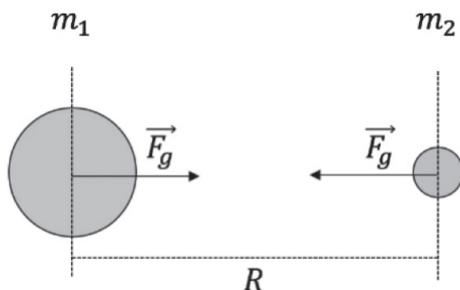
ZANETIC, João. Dos "Principia" da mecânica aos "Principia" de Newton. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, n. 5, p. 23-25, jun. 1998. Disponível em: <[HTTPS://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/10072/9297](https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/10072/9297)>. Acesso em: 25 abr. 2017.

Uma contribuição muito importante de Newton foi associar a queda de um objeto na superfície da Terra com a força que mantém os corpos celestes em suas órbitas. A lei encontrada por

Newton para descrever essa força é denominada **Lei da Gravitação Universal**, dada pela seguinte expressão: $\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \hat{r}$, em que m_1 e m_2 são as massas dos corpos, R é a distância entre eles, G é constante de gravitação universal, com o valor $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ e \hat{r} é um versor sobre o eixo que liga os dois corpos, de modo que o sinal negativo da expressão indica a ação atrativa dessa força, em que $-\hat{r}$ aponta no sentido do corpo que atrai.

A Figura 2.5 apresenta um sistema de atração gravitacional de dois corpos. Algo importante é que essa força atua à distância, ou seja, não há necessidade de contato direto entre os corpos. A força gravitacional que atua em cada um dos corpos tem mesmo módulo e sentidos opostos.

Figura 2.5 | Atração gravitacional entre dois corpos

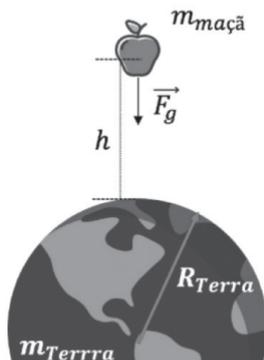


Fonte: elaborada pelo autor.

Então, a força responsável pela queda de um corpo nas proximidades da superfície da terra será a força atrativa entre a massa da terra e a massa do corpo, como ilustra a Figura 2.6. Aplicando a 2ª lei de Newton neste sistema, temos que:

$$|\vec{F}_r| = |\vec{F}_g| \rightarrow m_{\text{maçã}} |\vec{a}| = G \frac{m_{\text{maçã}} M_{\text{Terra}}}{|R_{\text{Terra}} + h|^2} \rightarrow |\vec{a}| = G \frac{M_{\text{Terra}}}{|R_{\text{Terra}} + h|^2}.$$

Figura 2.6 | Queda livre de uma maçã nas proximidades da superfície da Terra (fora de escala)



Fonte: elaborada pelo autor.

A distância da maçã do centro da Terra pode ser escrita como $R = R_{Terra} + h$, porém o raio da Terra é muito maior que altura de queda, assim, pode-se adotar que $R \cong R_{Terra}$, então: $|\vec{a}| = G \frac{M_{Terra}}{(R_{Terra})^2}$.

Consultando uma tabela de constantes da natureza, encontramos os seguintes valores para raio médio e massa da Terra:

$$M_{Terra} = 6,00 \cdot 10^{24} \text{ kg} \text{ e } R_{Terra} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Substituindo os valores numéricos na expressão, temos que o valor da aceleração será:

$$|\vec{a}| = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6,00 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ kg})^2} \approx 9,86 \text{ m/s}^2$$

Perceba que este é o valor aproximado da aceleração da gravidade. Então, o módulo de \vec{g} da aceleração da gravidade depende da massa e do raio médio da Terra. Dessa maneira, podemos também calcular a aceleração da gravidade na superfície de qualquer planeta ou estrela.

Esta é a razão de utilizarmos, nas proximidades da superfície da Terra, o campo gravitacional aproximadamente constante, com módulo $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. A força gravitacional que a Terra impõe aos corpos próximos à superfície é chamada de peso (\vec{P}), sendo calculado pela conhecida expressão: $\vec{P} = m\vec{g}$.

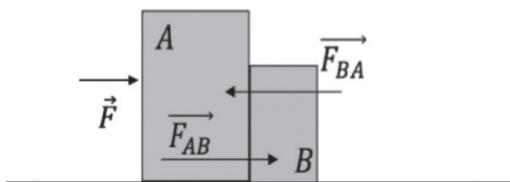
Terceira lei de Newton: ação e reação

Esta Lei de Newton nos auxilia no tratamento das forças que atuam entre dois corpos:

“Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B (uma “ação”), o corpo B exerce uma força sobre o corpo A (uma “reação”). Essas duas forças têm o mesmo módulo e mesma direção, mas possuem sentidos opostos. Essas duas forças atuam em corpos diferentes” (YOUNG, FREEDMAN, 2016, p. 128).

A Figura 2.7 ilustra o princípio da terceira lei, quando temos o contato dos corpos A e B. Ao empurrarmos um contra o outro, surgirá uma força \vec{F}_{AB} que expressa a força que o bloco A aplica em B. Simultaneamente, o corpo B aplica uma força \vec{F}_{BA} no corpo A como resposta. Então, essas forças configuram-se como um **par ação-reação**. Para este par de forças, portanto, a terceira Lei de Newton prevê que ambas as forças tenham o mesmo módulo, porém, que sejam orientadas em sentidos contrários, ou seja: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

Figura 2.7 | Terceira lei de Newton na interação entre dois corpos



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

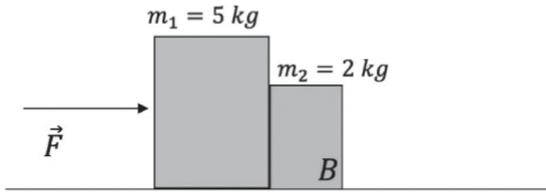
Você conseguiria se elevar do solo puxando seus próprios cabelos com uma grande força? Qual é o erro conceitual desta situação imaginária?



Exemplificando

No sistema ilustrado na Figura 2.8, dois corpos de massa 5 kg e 2 kg são empurrados por uma força de módulo $|\vec{F}| = 20\text{N}$, aplicada no corpo de maior massa. Considere que as caixas podem se mover sem resistência do solo.

Figura 2.8 | Dois corpos em contato sob o efeito de uma força



Fonte: elaborada pelo autor.

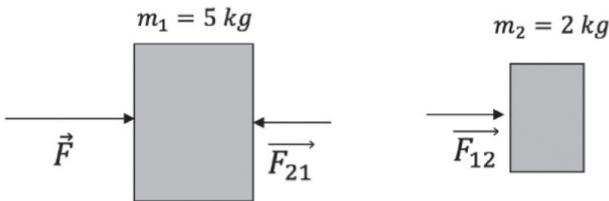
De acordo com as leis de Newton, responda:

- Qual será o módulo da aceleração do sistema?
- Qual será a intensidade da força de contato entre os corpos?

Resolução:

a) Um método possível de resolução dos problemas de leis de Newton é fazer o seguinte passo a passo. Primeiro, identificamos as forças que atuam na direção do movimento em cada corpo individualmente.

Figura 2.9 | Diagrama de forças sobre cada corpo na direção do movimento



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que a força atua apenas no primeiro corpo na Figura 2.9, empurrando o corpo 1 contra o corpo 2. O corpo 2 se desloca pela ação do corpo 1 em \vec{F}_{12} , em contrapartida o corpo 1 recebe a reação \vec{F}_{21} .

A segunda etapa consiste em escrever a segunda lei de Newton para cada corpo, na forma: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Respeitando a orientação do problema, como positivo da esquerda para a direita, teremos as duas equações:

$$\begin{cases} |\vec{F}| - |\vec{F}_{21}| = m_1 |\vec{a}| \\ |\vec{F}_{12}| = m_2 |\vec{a}| \end{cases}$$

Em que se forma um sistema de equações, pois o valor de aceleração deve ser solução para ambas as equações. A resolução deste sistema depende da aplicação da 3ª lei, pois há presença de um par ação-reação, o que nos leva a $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$.

A terceira etapa consiste em obter uma expressão para a aceleração do sistema. Assim, se somarmos as duas equações, estes termos serão cancelados, dando origem a:

$$|\vec{F}| = m_1 |\vec{a}| + m_2 |\vec{a}| \rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m_1 + m_2}.$$

Substituindo os valores numéricos, a aceleração do sistema será de:

$$|\vec{a}| = \frac{21N}{5kg + 2kg} = 3m/s^2.$$

b) Para obter o módulo da força de contato entre os corpos, determinamos o valor do módulo da força \vec{F}_{12} ou \vec{F}_{21} , com o valor da aceleração do item a). Substituindo este valor na segunda equação do sistema, temos que:

$$|\vec{F}_{21}| = m_2 |\vec{a}| = (2kg)(3m/s^2) = 6N.$$

Então, a força de contato entre os corpos tem intensidade de 6 N.



Pesquise mais

As aplicações das leis de Newton em sistemas mecânicos são as mais variadas possíveis, como relata o trecho das páginas 128 até 134, no capítulo 4 – Leis de Newton do movimento, do livro:

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

No começo da unidade você foi colocado no lugar de um professor de Física que deseja tornar a aprendizagem de seus estudantes mais significativa, contextualizando o ensino de dinâmica com o tema trânsito e seus parâmetros de segurança.

Na preparação de seu plano de aula, você precisa responder à seguinte pergunta: qual será a força de impacto sofrida por um motorista de 75 kg, no interior de um carro popular de 1 t, durante uma colisão a 90 km/h? Considere que a colisão dura 1 ms e tanto o motorista quanto o carro terminam no repouso após este intervalo de tempo.

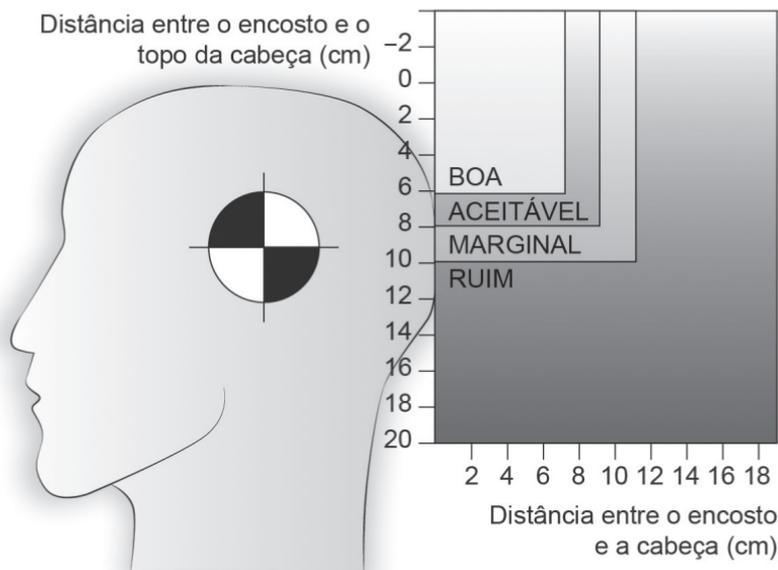
Além disso, você deve abrir espaço para as importantes discussões sobre dirigir sempre na velocidade recomendada para cada local. Falar sobre a importância do cinto de segurança e de realizar revisões regulares no veículo, em especial o sistema de freios.

Como você estruturaria seu plano de aula? Não se esqueça de que um banner deve ser produzido com as informações selecionadas pelos estudantes.

Um importante conceito que podemos utilizar é o da inércia, presente na primeira lei de Newton e que pode ser relacionado ao uso do cinto de segurança. O uso do cinto de segurança é um consenso, pois é necessário para evitar a projeção do corpo para fora do assento durante uma freada mais brusca ou ainda em uma colisão. Afinal, o carro é impedido de manter seu estado de movimento, mas o corpo só será impedido de seguir em frente se for submetido a outra força: neste caso, a do cinto de segurança. Assim, são evitados regularmente impactos fatais com o para-brisa, volante ou com o banco da frente.

Porém, em suas pesquisas, os alunos encontraram outra informação importante: o efeito chicote. Este efeito ocorre com a projeção do pescoço para frente, seguida por uma freada brusca pela ação do cinto de segurança que passa no tronco. Este choque que se assemelha ao movimento de um chicote pode provocar pequenas fissuras na região cervical, mesmo em velocidades mais baixas. A forma de prevenção é o uso de encosto de cabeça de forma correta e do cinto de três pontas, em especial no banco traseiro. A figura a seguir ilustra a forma de ajustar o encosto de cabeça e a distância que deve ser mantida deste.

Figura 2.10 | Ilustração da distância da cabeça até o encosto de cabeça com relação à altura, para evitar o efeito chicote



Fonte: <<https://goo.gl/JzhP8E>>. Acesso em: 25 abr. 2017.

Outro aspecto que pode ser considerado pelos alunos é um valor aproximado para a força de impacto, originado por uma colisão. Por exemplo, um carro que viaja a 90 km/h colide com um objeto fixo e o deforma até chegar à velocidade nula, com um tempo de contato da ordem de milissegundos. Assim, o contato com o objeto promove uma desaceleração com o valor:

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \rightarrow |\vec{a}| = \frac{25 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2 .$$

Dessa forma, a grande desaceleração promovida pelo carro irá gerar uma força de impacto sobre diferentes pontos do corpo do condutor. Para um condutor de 75 kg, a força de contato necessária para desacelerá-lo dessa maneira é:

$$|\vec{F}_{\text{contato}}| = m_{\text{motorista}} |\vec{a}| = 75 \text{ kg} (2,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2) = 1,875 \cdot 10^6 \text{ N} .$$

Como uma forma de obter um significado para este valor, podemos realizar um comparativo entre esta força e a força peso de um objeto qualquer sob a aceleração da gravidade ($|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$):

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{contato}} \rightarrow |\vec{P}| = |\vec{F}_{\text{contato}}| = m|\vec{g}|$$

Dessa forma, a força de impacto corresponde à força peso aplicada a um objeto de massa:

$$m = \frac{1,875 \cdot 10^6 \text{ N}}{10 \text{ m/s}^2} = 1,875 \cdot 10^5 \text{ kg} .$$

Nesse momento, é como se o corpo, por 1 ms, sustentasse toda essa massa distribuída em sua superfície. É por isso que hoje os carros são projetados para amassarem tanto nas colisões, de modo a absorver mais o impacto e aumentar o tempo da colisão.

Qual seria o valor da força necessária para parar o carro? A massa de um carro popular é de aproximadamente 1000 kg, assim, o valor da força de contato será de:

$$|\vec{F}_{\text{carro}}| = m_{\text{carro}} |\vec{a}| = 1000 \text{ kg} (2,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2) = 2,5 \cdot 10^7 \text{ N} .$$

Apesar de ignorarmos outros fatores que serão discutidos nas próximas seções, este valor representa o perigo de se transitar em alta velocidade em condições adversas, como chuva e curvas sinuosas. Ainda devemos considerar que mesmo a baixas velocidades o efeito do álcool é muito perigoso, por prejudicar seriamente as reações do motorista. E você, que outros tópicos incluiria?

Avançando na prática

Leis de Newton e experimentos demonstrativos

Descrição da situação-problema

As leis de Newton são uma base importante da Física e possuem muitas aplicações e exemplos no cotidiano. Em especial as leis da inércia e da ação-reação são mais conceituais e servem como suporte para a resolução dos problemas, enquanto que a segunda lei relaciona matematicamente as grandezas físicas de um sistema dinâmico. Dessa forma, os alunos acabam por se apegar mais aos argumentos matemáticos e perder o significado profundo dessas leis.

Agora, você deve se colocar no lugar de autor de materiais didáticos para o ensino médio e precisa elaborar um pequeno material sobre uma das leis de Newton, a sua escolha. O principal ponto deste material é encontrar um experimento demonstrativo que ilustre este princípio e que possa ser de fácil acesso ou elaboração.

Os experimentos demonstrativos são aqueles em que o foco é ilustrar um conceito da Física, sem a necessidade formal de tomar dados.

Então, sua atividade será encontrar um experimento demonstrativo para ilustrar alguma das leis de Newton, com as seguintes informações: como construir ou obter este experimento? Qual das leis de Newton é exemplificada? Qual poderia ser o texto explicativo para esta situação?

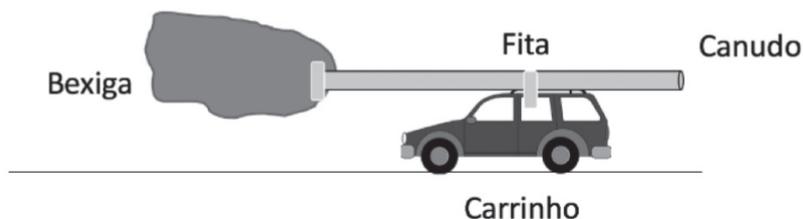
Resolução da situação-problema

Nesta resolução foi escolhido um experimento demonstrativo para o princípio de ação e reação, abordado na 3ª lei de Newton. Para elaborar o experimento você precisará de:

- 1 carrinho.
- Fita adesiva.
- 1 bexiga.
- 1 canudo plástico.

Dê preferência para carrinhos de menor massa e de fácil rolamento, para facilitar seu deslocamento. A montagem segue a Figura 2.11. Depois de montado, você deve encher o balão com uma certa quantidade de ar e prender a saída, pressionando o canudo plástico.

Figura 2.11 | Montagem do experimento demonstrativo da 3ª lei de Newton



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, você deve posicionar seu carrinho no chão. Se o carrinho for leve o suficiente, ao liberar o ar ele passará a andar até o balão se esvaziar. Como podemos explicar isto? O ar preso no balão será jogado para atrás do carrinho, fazendo que o sistema seja jogado

para frente. Este comportamento é previsto pela 3ª lei de Newton, configurando-se como ação à força do balão, empurrando o ar para trás, o que faz que o balão e, conseqüentemente, o carrinho sejam empurrados para frente. Podemos realizar alguns cálculos com este experimento, como forma de completá-lo. Por exemplo, com as práticas de movimento da Unidade 1, podemos obter um valor médio para a aceleração com a equação:

$$|\vec{a}| = \frac{2|\Delta s|}{t^2}.$$

Depois, com a massa do sistema, podemos calcular uma intensidade média para força aplicada no carrinho, com a equação:

$$|\vec{F}_{\text{média}}| = m|\vec{a}|.$$

Faça valer a pena

1. Um veículo com 2000 kg trafega com aceleração constante sob a ação de três forças. A força \vec{F}_1 é a responsável por movimentar o carro para frente, a força \vec{F}_2 é a ação frontal do ar que está na frente do carro, enquanto \vec{F}_3 é a força causada pelo vento lateral ao veículo. As componentes de cada força são expressas por:

$$\vec{F}_1 = (5\hat{i} - 10\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ kN}, \quad \vec{F}_2 = (-6\hat{i} + 12\hat{j} + 5\hat{k}) \text{ kN}, \quad \vec{F}_3 = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 9\hat{k}) \text{ kN}.$$

Ignorando outras forças do sistema, o vetor aceleração do veículo é expresso pelo item:

- $\vec{a} = (1\hat{i} + 2\hat{j} - 1\hat{k}) \text{ m/s}^2$.
- $\vec{a} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) \text{ m/s}^2$.
- $\vec{a} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ m/s}^2$.
- $\vec{a} = (-1\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) \text{ m/s}^2$;
- $\vec{a} = (10\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}) \text{ m/s}^2$.

2. A aceleração gravitacional depende de características do planeta que geram o campo, como a massa e o raio médio. Nas proximidades da superfície de um planeta denominado X, este valor é praticamente constante, assumindo um valor $|\vec{g}_x|$. Nele, foi realizada uma série de experimentos e obteve-se um valor para a aceleração do campo gravitacional de intensidade $|\vec{g}_x| = 2,5 \text{ m/s}^2$.

Com estas informações, um objeto com 3 kg terá qual valor de massa e intensidade da força peso aplicado ao corpo, respectivamente?

- a) 3 kg e 3 kg.
- b) 30 kg e 7,5 N.
- c) 3 kg e 7,5 N.
- d) 30 N e 7,5 N.
- e) 3 kg e 30 N.

3. A 1ª lei de Newton prevê que o estado de movimento de um corpo somente é alterado pela ação de uma força \vec{F} . Considere que um corpo de massa 2 kg tem uma velocidade de 10 m/s. Durante um período de 2 s, uma força de intensidade F atua no corpo, de forma a alterar sua velocidade para 15 m/s.

Admitindo que a força \vec{F} é a única atuante na direção do movimento, o módulo da força \vec{F} tem valor:

- a) 2,5 N.
- b) 3,5 N.
- c) 4,0 N.
- d) 4,5 N.
- e) 5,0 N.

Seção 2.2

Exemplos de forças na natureza

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos as leis de Newton, que nos permitem investigar diferentes tipos de sistemas mecânicos. Na presente seção, veremos que há casos especiais de forças que merecem destaque, pois são característicos de alguns sistemas, como a força elástica de molas ou ainda a interferência da força de atrito entre objetos em contato.

Dessa maneira, conseguiremos compreender o funcionamento de diferentes mecanismos, como o de um elevador. A força gravitacional da estrutura do elevador e também dos passageiros é vencida pela força de tração dos cabos. Assim, surge uma força resultante para cima, e a estrutura acelera naquele momento em que você se sente pressionado enquanto ele sobe. Por outro lado, quando ele está subindo e precisa desacelerar, a força de tração é reduzida, a estrutura perde velocidade e você se sente “mais leve” por alguns instantes.

Estudaremos casos em que há presença da força normal, força de tração, força de atrito, força elástica e força centrípeta, que serão estudadas nesta seção.

Relembrando a situação-problema, você assumiu o papel de um professor de Física que preza por atividades com natureza contextualizada. O tema geral das atividades são de questões de trânsito e como os conceitos da Física estão relacionados aos aspectos das leis de trânsito, questões de segurança e direção defensiva.

Então, você decide propor aos estudantes uma investigação sobre acidentes de trânsito, semelhante ao que realiza um perito criminal: com a fase da coleta de provas, estimar grandezas importantes e supor algumas causas para o acidente. Ao iniciar a construção de seu plano de aula, você encontra a imagem indicada na Figura 2.12, e precisa coletar alguns dados importantes sobre regras e parâmetros da estrada.

Figura 2.12 | Foto das marcas de derrapagem de um carro em uma estrada



Fonte: <<https://goo.gl/res9kj>>. Acesso em: 6 maio 2017.

Depois de procurar alguns dados na internet, você admite que a curva tem um raio de 80 m e coeficiente de atrito de 0,5 entre o pneu e asfalto. A marca da derrapagem se estende por aproximadamente 50 m. O motorista desse caso relatou para a polícia que se deslocava a 70 km/h em uma curva. Os alunos precisam descobrir se o motorista estava de fato falando a verdade. Antes, você precisa preparar seu plano de aula resolvendo detalhadamente a situação proposta.

Para fazer isso, você precisa avançar em sua compreensão de dinâmica. Vamos lá?

Não pode faltar

Na seção anterior foi apresentado um caso especial de força, ocasionada pela ação do campo gravitacional da Terra em pequenas altitudes, chamada de peso (\vec{P}), cuja expressão é: $\vec{P} = m\vec{g}$.

Além desta, há outros casos especiais de forças que iremos nos deparar em sistemas mecânicos, como a força normal (\vec{N}), a força de tração (\vec{T}), a força de atrito (\vec{f}) e a força elástica (\vec{F}_{el}). Muito mais relevante do que ter as expressões para cada uma, é importante identificar em quais casos elas aparecem e contribuem com a dinâmica do sistema.

Força normal

Para conceituarmos a força normal, podemos analisar a situação de uma pessoa que utiliza uma balança para medir sua massa. Ao subir, aplicará sobre ela uma força de mesma intensidade que a força peso. Em contrapartida, a balança devolverá essa ação com uma força de reação. Esta força de reação da balança pela interação é chamada de **Força normal** (\vec{N}).

Então, a força normal é resultado de uma característica intrínseca da matéria, a impenetrabilidade, uma vez que é impossível dois corpos ocuparem o mesmo espaço ao mesmo tempo.

A pessoa, ao exercer força sobre a balança, será por ela empurrada para cima, e esta força de reação é a força que chamamos de normal. Assim, as forças normais aparecem na situação em que há o contato entre os corpos, como indica a Figura 2.13.

Figura 2.13 | A força normal surge do contato entre os corpos

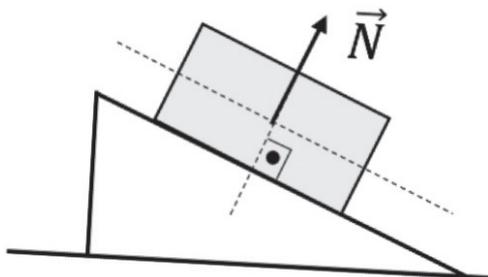


Fonte: adaptada de <<https://pixabay.com/pt/menino-homem-adolescentejovem-161793/>>. Acesso em: 25 maio 2017.

A força normal recebe este nome por causa de sua orientação vetorial sempre perpendicular à superfície de contato. Por exemplo, se apoiarmos um objeto contra um plano inclinado, como mostra a Figura 2.14, a força normal estará disposta com ângulo de 90° em relação à superfície inclinada.

Podemos concluir que no caso particular em que um objeto estiver apoiado sobre uma superfície horizontal, e não houver aceleração na direção vertical e nem outras forças envolvidas, a força normal será igual à força peso em módulo, com sentido oposto.

Figura 2.14 | A força normal sempre é perpendicular à superfície de apoio



Fonte: elaborada pelo autor.

Força de tração

Outra forma comum de interação indireta entre os corpos é a conexão através de fios, cordas e cabos. Neste caso, surge uma força chamada de **força de tração** (\vec{T}), que permite puxar um corpo amarrado a ela, pois a corda tensionada transmite a força aplicada de uma extremidade à outra. De forma geral, consideraremos o caso idealizado em que a massa da corda e sua elasticidade são desprezíveis para o problema, de modo que todos os pontos apresentam uma tração orientada na direção da corda tensionada.

As polias fixas podem ser utilizadas em conjunto com uma corda ideal para transmitir a força aplicada para uma direção diferente, sem que o seu módulo seja alterado.



Refleta

Um par ação-reação sempre atua em corpos distintos. Podemos afirmar que a força peso e força normal caracterizam um par ação-reação? Em que corpo atua o par ação-reação da força peso, e em que corpo atua o par da força normal?

Força de atrito

A força de atrito também é fruto do contato entre os corpos e está ligada à tendência de escorregamento entre as superfícies. Sua origem está no fato de que, mesmo que os objetos aparentem ter uma superfície lisa, se pudéssemos observar estas superfícies com um poderoso microscópico, veríamos que apresentam diversas rugosidades e irregularidades em cada uma. Então, ao tentarmos mover uma superfície contra a outra, estas rugosidades podem se encaixar impedindo ou ao menos dificultando o deslizamento. Esta dificuldade é expressa pela intensidade da força de atrito, que sempre age no sentido de impedir o movimento.

A ação do atrito pode ocorrer de duas maneiras: por meio do atrito estático e do atrito cinético. O atrito estático (\vec{f}_e) ocorre quando não há o deslizamento entre as superfícies, evitando que haja o movimento. A força de atrito estático cancela totalmente a força aplicada sobre o corpo, até um determinado limite. Esta fase está relacionada com a junção das rugosidades até o momento em que se inicia o movimento. O módulo da força de atrito estático é calculado pela expressão:

$$|\vec{f}_e| \leq \mu_e |\vec{N}|,$$

Em que μ_e é o coeficiente de atrito estático, que depende das características de cada superfície de contato, tais como rugosidade, temperatura e composição. Estes valores não apresentam unidade, ou seja, são adimensionais. Além disso, os coeficientes de atrito sempre assumem valores entre 0 e 1. Esta expressão é uma desigualdade, pois a intensidade do atrito estático é variável até um valor limite:

$$|\vec{f}_{e \text{ máx}}| = \mu_e |\vec{N}|.$$

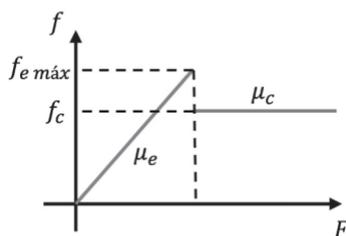
Isto significa que se a força de atrito estático máximo para um par de superfícies for 50N, não haverá movimento até que a força externa seja superior a esse valor. Se aplicarmos uma força externa de 30 N, a força de atrito estático será de 30 N (abaixo do valor máximo), em um cancelamento que mantém o estado de repouso.

Na fase de movimento, a força de atrito passa a ser denominada como força de atrito cinético (\vec{f}_c), cuja expressão matemática para seu módulo é:

$$|\vec{f}_c| = \mu_c |\vec{N}|.$$

Observe que μ_c é o coeficiente de atrito cinético. Esta força tem intensidade constante durante o movimento. Podemos representar a evolução da força de atrito agindo em um corpo em um gráfico como o apresentado na Figura 2.15, quando submetido a uma força externa de intensidade crescente. Há uma descontinuidade no gráfico, pois o valor máximo do coeficiente de atrito estático é superior ao de atrito cinético. O Quadro 2.1 apresenta alguns valores de coeficiente de atrito cinético e estático para alguns materiais.

Figura 2.15 | Representação da evolução da força de atrito quando um corpo é submetido a uma força externa de intensidade crescente, em que μ_e e μ_c indicam as regiões do gráfico em que o atrito atuante é estático e cinético, respectivamente



Fonte: elaborada pelo autor.

Quadro 2.1 | Valores aproximados de coeficientes de atrito

Materiais	μ_c	μ_e
Aço sobre aço	0,6	0,7
Teflon sobre aço	0,04	0,04
Borracha sobre concreto seco	0,8	1,0
Madeira sobre madeira	0,34	0,54

Fonte: adaptado de: Tipler e Mosca (2009, p. 128).



Assimile

A força de atrito é presente nos sistemas mecânicos na forma de atrito estático, quando não há movimento, e na forma de atrito cinético durante o movimento. Em ambos os casos há dependência com o coeficiente de atrito, um número adimensional e com valor compreendido entre 0 e 1.



Como sugestão, recomenda-se a leitura das páginas 157 até 160 do livro:

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

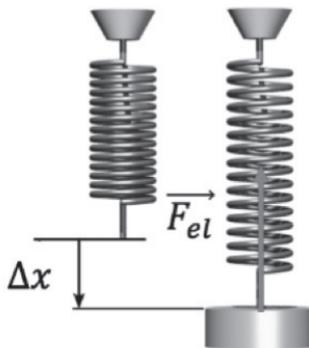
Neste texto há uma discussão mais aprofundada sobre a força de atrito.

Força elástica

Outra modalidade de força em sistemas mecânicos é a **força elástica** (\vec{F}_{el}), que aparece em molas e corpos que apresentam certa elasticidade. A capacidade que um corpo apresenta de deformar-se quando submetido a uma força é expresso pela constante elástica k , cuja unidade do SI é $[k]=N/m$. Então, dizer que um material tem constante elástica de 5 N/m significa que para deformar este objeto em 1 m é necessário aplicar uma força de 5 N.

Uma forma de visualizarmos a ação da força elástica é verificar o que acontece com a mola quando a deformamos com a ação de uma força. Por exemplo, se você comprimir uma mola o que acontece depois de liberá-la? Ela deve voltar ao tamanho inicial. Caso você estique, após soltá-la ela também tende a voltar ao tamanho original.

Figura 2.16 | Relação da deformação da mola com a força aplicada



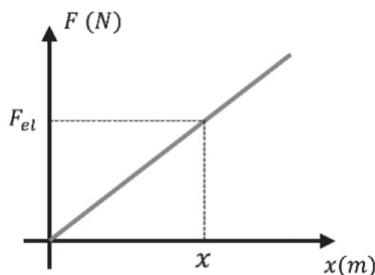
Fonte: adaptada de <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fc/Hookes-law-springs.png>>. Acesso em: 5 maio 2017.

Assim, a tendência da mola é reconstituir as condições iniciais, lutando contra a força externa. Além disso, sabemos que se aumentar a distensão/compressão, a força aplicada pela mola será maior ainda. Este comportamento está resumido na Lei de Hooke, dada por:

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{\Delta x}$$

A grandeza x é a medida da distensão ou compressão da mola, como ilustra a Figura 2.16, em que consideramos uma mola ideal, cujo valor da constante elástica não muda para diferentes forças aplicadas. Outra representação possível para a Lei de Hooke é uma função linear que passa pela origem, como a representada na Figura 2.17.

Figura 2.17 | Representação da função linear da equação de Hooke quando o valor de k é constante



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Um dinamômetro é um equipamento de laboratório destinado a medir a força aplicada nos sistemas físicos. Seu princípio de funcionamento é uma mola, cuja constante de elasticidade é bem definida para um intervalo de força. Dessa forma, para cada corpo, a mola sofrerá uma distensão, que está associada a uma força elástica. Na escala aparece o que corresponde à força aplicada sobre o dinamômetro.

Figura 2.18 | Ilustração de dinamômetro



Fonte: <<https://goo.gl/bpVLCE>>. Acesso em: 5 maio 2017.

Considere que um objeto pendurado neste equipamento provocou uma deformação de 10 cm e a constante elástica do dinamômetro é de 30 N/m. Qual será a marcação de intensidade de força que será apresentada no visor?

Resolução: A força aplicada pelo corpo é traduzida no dinamômetro como a força elástica. Pela lei de Hooke, a força elástica é calculada como: $\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{x}$.

Então, com os valores numéricos do problema com as devidas conversões, a intensidade da força mostrada na escala será de:

$$|\vec{F}_{el}| = m|\Delta\vec{x}| \rightarrow |\vec{F}_{el}| = (30\text{ N/m})(0,1\text{ m}) = 3,0\text{ N}.$$

Força centrípeta

De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento de um corpo é gerado pela ação de uma força resultante que produzirá aceleração, com ambos os vetores na mesma direção. No caso do movimento circular, esta força é a força centrípeta, dada por:

$$|\vec{F}_{cp}| = m|\vec{a}_{cp}| \rightarrow |\vec{F}_{cp}| = m\frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

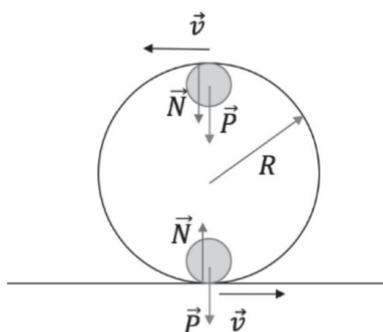
Um ponto importante é que a força centrípeta é sempre o resultado da ação de outras forças, como a tração ou a força peso, entre outras, que agem em determinado momento mantendo a trajetória circular do corpo.

Podem ser consideradas como trajetórias circulares o movimento de carros em lombadas, depressões na pista, entre outros. Um exemplo é o globo da morte, em que uma pessoa com uma moto anda pelas paredes de um globo de metal e por várias vezes passa pelo ponto mais alto. Em condições normais, ao

passar por este ponto, o corpo estaria suspenso e deveria cair pela ação do campo gravitacional, porém a resultante centrípeta nos ajuda a entender como é possível completar o loop sem a queda.

Na Figura 2.19 é ilustrado um esquema representativo do globo da morte em dois pontos importantes: o primeiro no ponto mais baixo da trajetória e o segundo na posição oposta, com os vetores peso e normal em cada momento.

Figura 2.19 | Representação dos vetores de força peso e normal em diferentes posições do corpo no globo da morte



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, na posição mais baixa, a força normal e peso compõem a força resultante centrípeta. Como esta deve ser direcionada para o centro da trajetória, teremos a seguinte equação:

$$|\vec{N}| - |\vec{P}| = m|\vec{a}_{cp}|.$$

No ponto mais alto da trajetória, a força resultante centrípeta tem como equação:

$$|\vec{P}| + |\vec{N}| = m|\vec{a}_{cp}|.$$

Dessa forma, este corpo está em condições de despencar a qualquer momento, porém o vetor velocidade tem papel importante para manter a trajetória do corpo. Para completar o loop, o motociclista precisa manter uma velocidade alta, para que o movimento composto da queda com a velocidade da moto faça com que ele siga a trajetória circular.

Então haverá uma velocidade mínima para que seja possível completar o loop. Nesta condição, dizemos que o corpo está na eminência de perder o contato com a superfície, ou seja, a força

normal entre o globo e a moto é quase nula. Inserida esta suposição, na segunda lei de Newton, podemos encontrar a seguinte relação:

$$|\vec{P}| + |\vec{N}| = m|\vec{a}_{cp}| \rightarrow m|\vec{g}| + 0 = m \frac{|\vec{v}|^2}{R} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{gR}.$$

Perceba que a velocidade mínima para completar a volta depende do raio da trajetória e é independente da massa do corpo.



Pesquise mais

Há diversas aplicações de sistemas com trajetórias circulares, nas quais a resultante centrípeta é a composição das forças que atuam nos corpos. Nas páginas 138 até 143 do livro a seguir há uma discussão aprofundada sobre o tema e com alguns exemplos resolvidos.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. São Paulo: Ltc, 2009. v. 1.

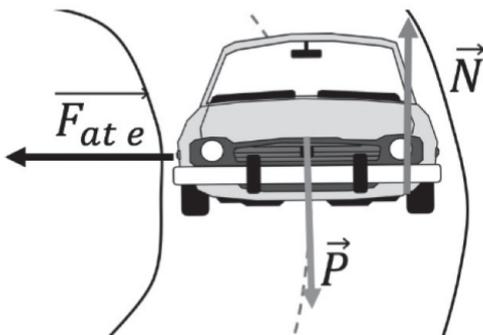
Sem medo de errar

No início da unidade você foi colocado no papel de um professor de Física que preza por trabalhar os conteúdos programáticos com temas interdisciplinares. O tema segurança no trânsito foi escolhido e então você está na fase de planejamento das atividades.

Você decidiu trabalhar no contexto de uma investigação de um acidente de trânsito por meio da coleta de dados e aplicações dos conceitos apresentados. Para elaborar esta atividade, você precisa buscar em livros e artigos quais são os procedimentos básicos para realizar este tipo de atividade. Por exemplo, as marcas de pneu na pista são evidência de qual era a velocidade inicial do carro.

Você elaborou uma situação em que um condutor envolvido em um acidente relatou à polícia que estava trafegando em uma curva plana com velocidade de 70 km/h. Apesar da baixa velocidade e do tempo bom, ele acabou derrapando na pista e parou no canteiro. Para investigar a situação, primeiro vamos encontrar a velocidade máxima em que este carro poderia entrar com segurança na curva. A Figura 2.20 apresenta o esquema de forças presentes no carro, sendo que a força de atrito é responsável por “prender” o carro na trajetória curva (agindo como força centrípeta).

Figura 2.20 | Representação das forças presentes no carro durante a curva



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos escrever o sistema de forças no problema como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}).$$

Considerando a direção vertical e perpendicular ao chão como o eixo y , atuam a força normal e a força peso. Como o carro não acelera na vertical, elas se cancelam perfeitamente:

$$F_y\hat{j} = 0 \rightarrow N\hat{j} - P\hat{j} = 0 \rightarrow N = P.$$

No eixo horizontal, há apenas a força de atrito estático, que atua na direção do raio da curvatura da pista:

$$F_x\hat{i} = ma_x\hat{i} \rightarrow |\vec{F}| = m|\vec{a}|$$

A força de atrito faz o papel da força centrípeta, então podemos substituir as expressões:

$$\begin{aligned} \mu_e N &= m \frac{|\vec{v}|^2}{R} \rightarrow \mu_e P = m \frac{|\vec{v}|^2}{R} \\ \mu_e mg &= m \frac{|\vec{v}|^2}{R} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\mu_e Rg}. \end{aligned}$$

Esta velocidade é a máxima possível para o carro completar a curva, caso contrário a força de atrito não será suficiente para ajudar o carro a terminar a curva, causando a derrapagem.

Lembre-se, após uma busca na internet, você encontra os seguintes valores plausíveis para uma curva plana: $R = 80 \text{ m}$; $\mu_e = 0,5$; $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

Substituindo os valores numéricos, a velocidade do carro, em km/h será de:

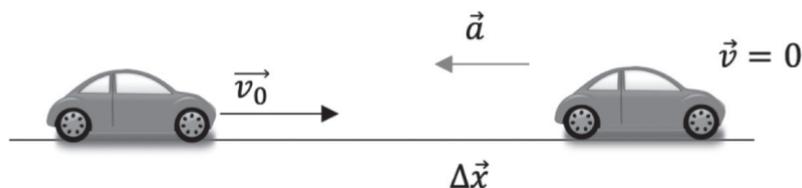
$$|\overline{v}_{\text{máx}}| = \sqrt{0,5(80 \text{ m})(10 \text{ m/s}^2)} = 20 \text{ m/s} \rightarrow |\overline{v}_{\text{máx}}| = 72 \text{ km/h}$$

Então, a velocidade relatada pelo condutor é inferior ao máximo da pista, o que não deveria provocar a derrapagem do carro. As equações anteriores mostram o caso ideal em que o carro realiza a curva.

O próximo passo é obter a velocidade real do carro, considerando que ele começou a derrapar com as rodas travadas. Assim, a força de atrito passa a atuar contra o movimento, freando o carro na distância de 50 m, como pode ser verificado a partir da marca deixada na pista.

Neste caso, podemos simplificar imaginando um movimento retilíneo, o que nos permite utilizar as equações de movimento retilíneo uniformemente variado, em que a única força que contribui no movimento é o atrito, conforme Figura 2.21.

Figura 2.21 | Vetores velocidade e aceleração no movimento de derrapagem do carro



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, a segunda lei de Newton resulta em:

$$\overline{F}_r = m\overline{a} \rightarrow \overline{f}_c = m\overline{a} \rightarrow \mu_e |\overline{N}| = m|\overline{a}|$$

Como a curva é plana, o módulo da força normal é igual ao módulo da força peso. Então, o módulo da aceleração será:

$$m|\overline{a}| = \mu_e |\overline{P}| = \mu_e m|\overline{g}| \rightarrow |\overline{a}| = \mu_e |\overline{g}|.$$

Com a equação de Torricelli, podemos obter uma expressão para a velocidade do carro. A velocidade final do carro é nula. Então:

$$|\overline{v}_0|^2 = 2\mu_e |\overline{g}| \Delta x \rightarrow |\overline{v}_0| = \sqrt{2\mu_e |\overline{g}| \Delta x}.$$

Lembrando que $|\Delta x| = 50 \text{ m}$, então, a velocidade inicial do carro será de:

$$|\overline{v}_0| = \sqrt{2(0,5)(10 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m})} = 22,36 \text{ m/s} = 80,5 \text{ km/h}.$$

Assim, a velocidade inicial do carro é superior à que a curva permite, o que ocasionou a derrapagem do carro. Com esta sequência de cálculos, podemos reproduzir de maneira simplificada o processo de perícia de acidente. Com essa aula preparada será mais fácil motivar os alunos, não é mesmo?

O que mais você incluiria em sua aula? Não se esqueça de estruturar um plano de aula completo.

Avançando na prática

A física do elevador

Descrição da situação-problema

O elevador é uma das máquinas mais utilizadas em locais com vários níveis, por facilitar o transporte de pessoas e materiais de grande massa. Com a evolução nas alturas dos prédios, cada vez mais a tecnologia por trás dos elevadores precisa ser aprimorada, em especial no que diz respeito à segurança.

Durante uma das suas aulas, um aluno relatou que algumas vezes nas quais o elevador sobe direto do térreo para o seu andar, ele sente um leve desconforto, como se algo estivesse pressionando-o. Nestes casos, o elevador opera com uma velocidade maior e no final desacelera para parar no andar desejado.

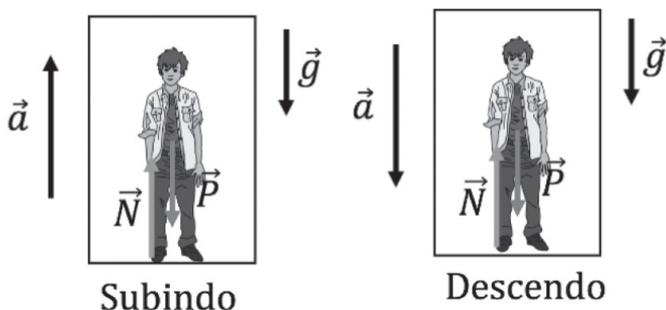
Então, você aproveita esse relato do aluno para elaborar uma sequência didática para explicar as alterações no módulo da força normal. Assim, a pergunta a ser respondida é: como a alteração no módulo da força normal pode explicar este desconforto?

Resolução da situação-problema

O primeiro ponto a ser abordado é que nossa sensação de “peso” está relacionada com força normal aplicada em nós pelo solo. No caso plano, as forças normal e peso estão em equilíbrio, assim, a sensação é de que está tudo bem. Caso a força normal sofra alterações, teremos esta sensação de desconforto como se algo estivesse nos pressionando ou ainda como se estivéssemos mais leves.

Para justificar isso, você pode supor a seguinte situação para os alunos: uma pessoa de 80 kg está em um elevador que sobe e desce com a aceleração de 2 m/s^2 . A Figura 2.22 apresenta esta situação com as representações dos vetores peso e normal.

Figura 2.22 | Representação dos vetores peso, normal e aceleração quando o elevador está subindo e descendo



Fonte: elaborada pelo autor.

Os movimentos estão apenas na direção vertical, então podemos escrever a segunda lei de Newton para cada caso como:

$$\text{Subida } \vec{F}_r = m\vec{a} \rightarrow |\vec{N}| - |\vec{P}| = m|\vec{a}|.$$

$$\text{Descida } \vec{F}_r = m\vec{a} \rightarrow |\vec{N}| - |\vec{P}| = -m|\vec{a}|.$$

Substituindo os valores numéricos, teremos que o módulo da força normal em cada caso será de:

$$\text{Subida } |\vec{N}| = |\vec{P}| + m|\vec{a}| \rightarrow |\vec{N}| = (80\text{ kg})(10\text{ m/s}^2) + (80\text{ kg})(2\text{ m/s}^2) = 960\text{ N},$$

$$\text{Descida } |\vec{N}| = |\vec{P}| - m|\vec{a}| \rightarrow |\vec{N}| = (80\text{ kg})(10\text{ m/s}^2) - (80\text{ kg})(2\text{ m/s}^2) = 640\text{ N}.$$

Então, podemos atribuir o desconforto às alterações de intensidade da força normal. Mesmo que a aceleração de subida ou a de descida não seja tão evidente os trancos de subida e descida já provocam um certo desconforto. Com estes argumentos, podemos explicar a questão do desconforto no elevador levantado pelo estudante.

Faça valer a pena

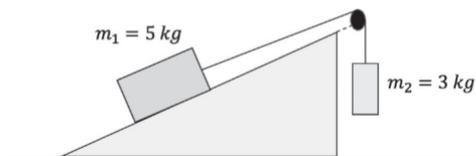
1. Em uma mola de constante k desconhecida é pendurado um corpo de massa 2 kg . Após o sistema entrar em equilíbrio, a distensão da mola é medida como sendo de 8 cm .

Considerando a mola como ideal, qual será o valor da constante elástica?

Adote $|\vec{g}| = 10\text{ m/s}^2$.

- a) 100 N/m .
- b) 200 N/m .
- c) 250 N/m .
- d) 320 N/m .
- e) 400 N/m .

2. Um sistema mecânico foi elaborado em um aula experimental composto por dois blocos de massa $m_1 = 5\text{ kg}$ e $m_2 = 3\text{ kg}$, como ilustra a figura. O bloco 1 está posicionado em superfície inclinada com um ângulo de 30° , com direção horizontal, enquanto o bloco 2 está suspenso por uma corda ideal, ligando-o ao bloco 1.



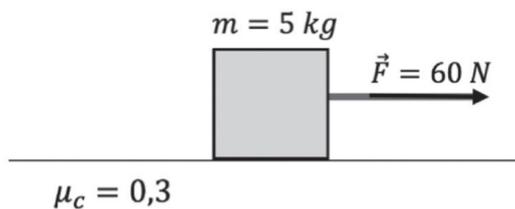
Fonte: elaborada pelo autor.

Após liberarmos os corpos, o módulo da aceleração será de:

Adote: $|\vec{g}| = 10\text{ m/s}^2$.

- a) $0,350\text{ m/s}^2$.
- b) $0,400\text{ m/s}^2$.
- c) $0,560\text{ m/s}^2$.
- d) $0,625\text{ m/s}^2$.
- e) $0,756\text{ m/s}^2$.

3. Um corpo de massa 5 kg é puxado por uma corda tracionada com uma força de 60 N. O corpo tem um coeficiente de atrito cinético com o solo de 0,3. Todas essas informações são apresentadas na figura a seguir:



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nessas informações, qual será a intensidade da aceleração submetida ao corpo?

Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 5 m/s^2 .
- b) 8 m/s^2 .
- c) 9 m/s^2 .
- d) 10 m/s^2 .
- e) 12 m/s^2 .

Seção 2.3

Aplicações das leis de Newton

Diálogo aberto

O desenvolvimento da tecnologia deve-se ao estudo de conceitos físicos, como a força ou ainda a energia, com especial foco na sua aplicação prática. Por exemplo, em algum momento alguém percebeu que para movimentar objetos de grande massa, poderíamos colocar pequenos objetos cilíndricos abaixo deste, fazendo o corpo deslizar. Com isso, estava inventada a roda, que hoje está presente em diferentes meios de transportes e na indústria.

Nas últimas seções, estudamos o movimento dos corpos e quais poderiam ser os motivos deste. A lei de Newton permite obter o valor da aceleração a partir de informações sobre força e massa, contribuindo na construção das equações de movimento, a fim de estudar qual será o valor da posição ou velocidade depois de um intervalo de tempo.

Agora, para manter um prédio em pé ou ainda a estrutura de uma grande ponte, o movimento não é desejável. Então, devem existir condições para que os sistemas físicos fiquem em repouso. O estudo destas condições de equilíbrio é denominado de **estática**.

Nesta seção, vamos estudar as condições de equilíbrio para pontos materiais e para corpos extensos. As condições para ponto material são derivadas da 1ª lei de Newton, enquanto que para corpos extensos é necessário definir uma nova grandeza física vetorial: o **torque** ou **momento de uma força**.

Lembre-se de que você é um professor que tem preferência por trabalhar com temas contextualizados, que escolheu tratar de questões relacionadas ao trânsito. Então, você precisa encontrar um tema para sua aula que relacione algum conceito físico presente nesta seção com o trânsito: equilíbrio de partícula, equilíbrio de corpo extenso ou torque.

Depois de fazer algumas pesquisas, você encontrou algumas reportagens sobre a manutenção automotiva e como isso é importante para segurança do condutor. Uma das questões

destacadas é a escolha de carros com alto torque ou alta potência de motor. Então, como poderemos aproveitar a característica de um motor para exemplificar o conceito de torque? Como seria um plano de aula sobre este tema? Que atividade avaliativa poderia ser desenvolvida com este tema?

Você escolhe comparar o torque gerado em motores de carros populares e dos *PushBacks*, os carros utilizados para realizar o tráfego de aviões em aeroportos. Nos carros populares, com motores 1.0, o torque é de 9,6 kgfm, enquanto nos *PushBack* este valor é de 100 kgfm. Por que há esta diferença e valores? Qual será o valor de força aplicada no pistão, considerando o virabrequim com 40 cm?

Para ajudar com essas questões, esta seção vai apresentar as condições de equilíbrio para partículas e corpos extensos e explicar como o conceito de torque surge.

Não pode faltar

Equilíbrio de um ponto material

Um corpo pode ser considerado como um ponto material ou ainda como partícula quando suas dimensões físicas podem ser desprezadas. Como exemplo, podemos analisar as forças aplicadas em uma bolinha de tênis. Quando consideramos que as dimensões da bolinha são pequenas comparadas com trajetória, dizemos que esta comporta-se como um ponto material. Neste caso, a condição de equilíbrio pode ser obtida diretamente das leis de Newton, em especial da 1ª e da 2ª lei.

A 2ª lei de Newton prevê que a força resultante sobre uma partícula é diretamente proporcional à aceleração adquirida por esta, ou seja, $\vec{F}_r = m \vec{a}$. Caso um corpo em repouso seja submetido a uma força resultante, então, ele adquirirá uma velocidade. Desta forma, a força resultante nula é necessária para a manutenção do estado de repouso.

Assim, a condição de equilíbrio para uma partícula é que a força resultante atuante sobre esta seja nula, ou ainda:

$$\vec{F}_r = \sum \vec{F} = \vec{0} \text{ N} .$$

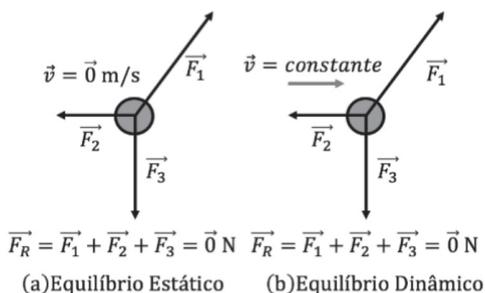
No caso da aplicação de diversas forças, devemos considerar

o princípio de superposição em que estas devem se cancelar em cada direção independentemente. Assim, se $\vec{F}_r = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$, então, no equilíbrio $F_x = 0$; $F_y = 0$; $F_z = 0$.

Na 1ª lei, a ausência de força resultante sobre a partícula pode representar uma condição de repouso, chamada de **equilíbrio estático**, bem como condição de movimento retilíneo uniforme, chamada de **equilíbrio dinâmico**.

A Figura 2.23 na porção (a) representa o caso de uma partícula sob ação de três forças na condição de equilíbrio estático, ou seja, a partícula encontra-se em repouso. Na porção (b) da figura a partícula apresenta força resultante nula, porém desloca-se com velocidade constante. Um exemplo desta situação é a fase de voo de cruzeiro em aviões. Nesta situação, as forças que atuam sobre o avião: peso, sustentação, propulsão e resistência do ar se cancelam (o avião viaja com aceleração nula e velocidade constante).

Figura 2.23 | Estados de movimento para uma partícula que está em equilíbrio, na porção (a) na condição de repouso e na porção (b), movendo-se com velocidade constante



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Em uma partícula de massa m são aplicadas as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , com as seguintes componentes vetoriais:

$$\vec{F}_1 = (4\hat{i} - 5\hat{j} + 1\hat{k}) \text{ N}, \quad \vec{F}_2 = (7\hat{j} - 5\hat{k}) \text{ N} \quad \text{e} \quad \vec{F}_3 = (8\hat{i} + 1\hat{j}) \text{ N}.$$

Então, uma quarta força \vec{F}_4 é aplicada ao sistema, de forma a estabelecer o equilíbrio dinâmico da partícula. Calcule a componente

do vetor \vec{F}_4 , de forma que a condição de equilíbrio de uma partícula seja respeitada.

Resolução: Para que uma partícula se encontre na condição de equilíbrio, a somatória de forças atuantes sobre ela deve ser nula. Assim:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}.$$

Por tratar-se de uma soma vetorial, é necessário que a soma de cada componente seja nula. De forma que:

$$\vec{F}_r = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \vec{0} \rightarrow F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$$

Somando as componentes de cada força sobre o eixo x, temos:

$$F_x \hat{i} = F_{1x} \hat{i} + F_{2x} \hat{i} + F_{3x} \hat{i} + F_{4x} \hat{i} = \vec{0}$$
$$(4\hat{i} + 0\hat{i} + 8\hat{i} + F_{4x} \hat{i})\text{N} = \vec{0} \rightarrow F_4 \hat{i} = (-12\hat{i})\text{N}.$$

Analogamente, para os eixos y e z, temos:

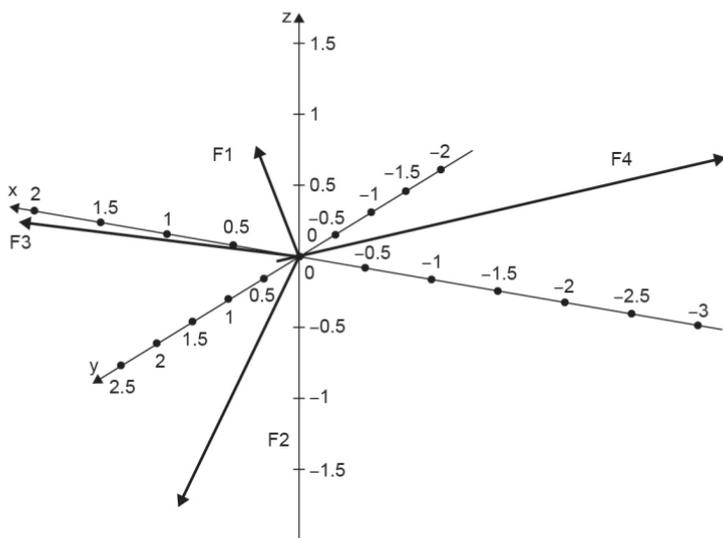
$$(-5\hat{j} + 7\hat{j} + 1\hat{j} + F_{4y} \hat{j})\text{N} = \vec{0} \rightarrow F_{4y} \hat{j} = (-3\hat{j})\text{N},$$
$$(1\hat{k} - 5\hat{k} + 0\hat{k} + F_{4z} \hat{k})\text{N} = \vec{0} \rightarrow F_{4z} \hat{k} = (4\hat{k})\text{N}.$$

Então, o vetor \vec{F}_4 que mantém o sistema em equilíbrio é escrito como:

$$\vec{F}_4 = (-12\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})\text{N}.$$

Apesar de difícil desenho no papel, você pode representar estes vetores em um programa de construção gráfica, com o software *Geogebra*. A Figura 2.24 mostra a representação dos quatro vetores, que nos ajudam a entender a configuração de equilíbrio desta partícula.

Figura 2.24 | Ilustração dos quatro vetores do problema



Fonte: elaborada pelo autor.

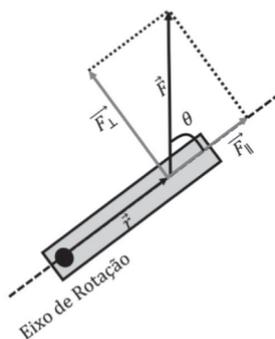
Torque ou momento de uma força

Para um corpo extenso, a aplicação de uma força pode promover diferentes movimentos. Por exemplo, vamos considerar uma régua sobre uma mesa que pode se movimentar sem atrito. Imagine que aplicamos uma força exatamente no centro da régua, paralelamente à superfície da mesa. O que acontecerá? A régua irá se deslocar para frente, em um movimento que chamamos de **translação**.

Agora, vamos aplicar uma força deslocada do centro da régua. O que acontecerá? Você perceberá que a régua tende a girar ao redor do centro, em um movimento que chamamos de rotação. O centro da régua serve como um ponto fixo que definirá o eixo de **rotação**. Tanto a força aplicada quanto a distância do eixo de rotação onde esta força é aplicada têm relação com a aceleração com que a régua irá rotacionar. Assim, não podemos analisar rotações apenas pelas forças que as causam, mas precisamos definir uma nova grandeza denominada torque ou momento de uma força ($\vec{\tau}$).

O torque é uma grandeza vetorial obtida pelo produto da força com a distância do ponto fixo até o ponto de aplicação desta força. Esta distância é comumente chamada de braço (\vec{r}). A Figura 2.25 apresenta um exemplo da ação do torque sobre uma barra. A força em questão pode ser decomposta em duas componentes, uma que segue a linha e leva ao eixo de rotação (\vec{F}_{\parallel}) e outra perpendicular a esta linha (\vec{F}_{\perp}). A força que segue a linha do eixo de rotação não promove torque no sistema, como você pode observar na figura.

Figura 2.25 | Representação da ação do torque sobre uma barra



Fonte: elaborada pelo autor.

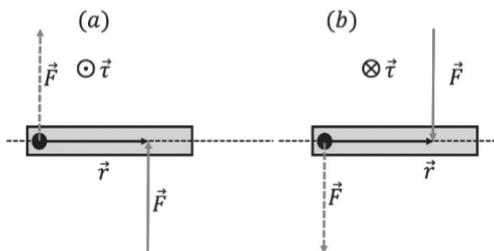
A definição rigorosa de torque é obtida com argumentos da álgebra linear, por meio do produto vetorial:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Esta representação é importante para conseguirmos orientar o vetor torque. Como resultado da álgebra linear, o produto vetorial gera um vetor que é perpendicular ao vetor força e braço, simultaneamente. A Figura 2.26 apresenta os vetores força, braço e torque em duas situações possíveis. Então, a única componente útil é a perpendicular, a expressão em módulo será:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}_{\perp}| \text{sen } \theta.$$

Figura 2.26 | Indicação do vetor torque obtido pela regra da mão direita



Fonte: elaborada pelo autor.

O sentido do torque é dado pela regra da mão direita com o polegar levantado. Os quatro dedos devem ser posicionados no vetor \vec{r} e a mão deve fazer um movimento de forma a levar este vetor até o vetor força. O sentido do polegar indicará o vetor torque. Como a representação é tridimensional, usamos a seguinte notação para representar o terceiro eixo: \otimes como um vetor entrando na folha e \odot como um vetor saindo da folha (ou tela).



Pesquise mais

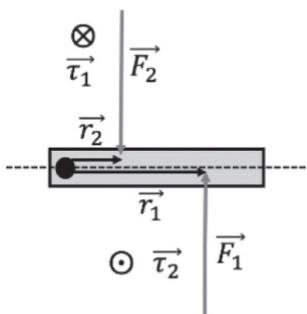
A aplicação de uma força promove alterações no estado de translação do corpo, enquanto o torque provoca alterações em seu estado de rotação. Dessa forma, há uma espécie de segunda lei de Newton para a rotação, como pode ser encontrado nas páginas 268 a 270 do capítulo 10, *Rotações*, do livro:

HALLIDAY, David. RESNICK, Robert. **Fundamentos da física**: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen- LTC, 2011. v. 1.

Equilíbrio de corpo extenso

Retornando ao exemplo da barra, podemos ter uma situação como a ilustrada na Figura 2.27, em que a força resultante é nula, porém os pontos de aplicação devem levar o corpo a rotacionar, indicando que este não está em equilíbrio.

Figura 2.27 | A somatória de força será nula, porém a ação do torque resultante poderá rotacionar o corpo



Fonte: elaborada pelo autor.

Além de da força resultante nula, devemos considerar a ação do torque originado pela ação de cada força. Assim, as duas condições de equilíbrio para um corpo extensão serão:

I. Considerando somente as forças externas, a força resultante sobre o corpo deve ser nula: $\vec{F}_r = \sum \vec{F} = \vec{0}$.

II. A soma de torques das forças externas aplicadas no corpo deve ser nula, em relação a qualquer ponto do sistema: $\vec{\tau}_r = \sum \vec{\tau} = \vec{0}$.

Para garantir a condição de equilíbrio, as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente.

Ao estudarmos o equilíbrio de corpos, é importante considerar a ação da força peso, já que esta também pode promover torque. A força peso pode ser considerada atuando em apenas um ponto, chamado de centro de gravidade. O ponto do centro gravitacional pode ser calculado para formas geométricas simples, ou descoberto por meio de um experimento de equilíbrio. Para o caso em que a aceleração da gravidade é constante, o centro de gravidade corresponde ao centro de massa de um objeto.



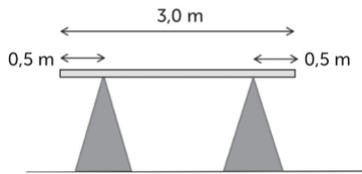
Assimile

As condições de equilíbrio para uma partícula e um corpo extenso são que a somatória de forças (força resultante) é nula e a somatória dos torques (torque resultante) também é nula.



A fim de improvisar uma mesa para o almoço de fim de semana, um estudante utiliza dois cavaletes e uma tábua de madeira para montar uma estrutura parecida com a Figura 2.28. Considerando o peso da tábua como 50 N, com massa distribuída uniformemente, e o sistema em equilíbrio, qual será a intensidade da força normal aplicada por cada cavelete?

Figura 2.28 | Mesa composta por dois cavaletes e um tábua de madeira

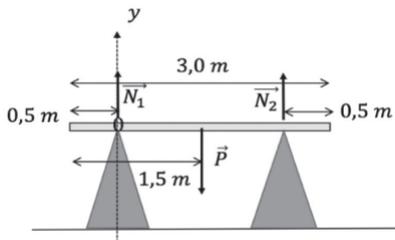


Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução:

A primeira etapa é representar as forças presentes no sistema: o vetor peso \vec{P} , a força normal \vec{N}_1 aplicada pelo primeiro cavelete e \vec{N}_2 aplicada pelo segundo cavelete, como ilustra a Figura 2.29. A distribuição de massa uniforme nos permite considerar a força peso aplicada no centro da tábua.

Figura 2.29 | Representação das forças do sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos aplicar as condições de equilíbrio do problema: a somatória de forças deve ser nula e o torque resultante também deve ser zero. As três forças estão na direção vertical, assim a equação de força resulta em:

$$\sum \vec{F}_r = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0} \rightarrow -P\hat{j} + N_1\hat{j} + N_2\hat{j} = 0\hat{j}.$$

Que nos permite obter a seguinte equação em módulo:

$$N_1 + N_2 = P \rightarrow N_1 + N_2 = 50N.$$

Aplicando a segunda condição sobre o torque, vamos escolher convenientemente um dos cavaletes como origem, neste caso, o cavalete 1. Esta escolha nos permite remover uma das variáveis do problema, já que o torque aplicado por esta força será nulo. Também iremos adotar a convenção de que forças que promovem uma rotação no sentido horário apresentam torque negativo e forças que promovem torque na direção anti-horária são positivas. Além disso, podemos concluir que as forças são perpendiculares aos vetores posição. Assim, obtemos a seguinte equação:

$$\sum \vec{\tau}_r = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = 0 \rightarrow -P r_p + N_1 r_1 + N_2 r_2 = 0.$$

Com a escolha de origem no ponto de aplicação da força \vec{N}_1 , podemos obter o módulo de N_2 :

$$-50N \cdot 1m + N_1 \cdot 0m + N_2 \cdot 2m = 0$$

$$N_2 \cdot 2m = 50N \cdot m \rightarrow N_2 = 25N.$$

Então, pela equação de forças podemos encontrar a intensidade de \vec{N}_1 :

$$N_1 + 25N = 50N \rightarrow N_1 = 25N.$$

Máquina mecânicas

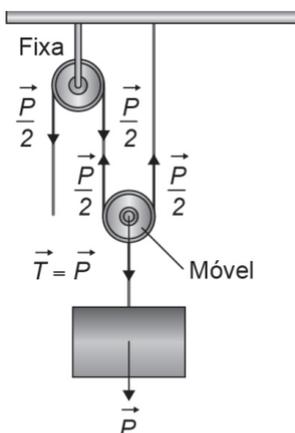
Apesar de serem consideradas como rústicas para nossa sociedade atual, as máquinas mecânicas foram importantes para a criação de processos industriais. A proposta das máquinas é realizar um trabalho em menor tempo e aplicando a menor força possível, com o caso do uso das polias e alavancas.

As **polias** são dispositivos circulares livres para girar em torno de um eixo. Sua função é alterar o sentido e a direção de uma força aplicada em uma corda, sem alterar o módulo da força. Porém, com a associação de polias é possível aumentar ou diminuir a intensidade da força aplicada, obtendo um mesmo resultado.

Há duas configurações de polias possíveis: as polias fixas têm como função transmitir a força de um lado para o outro, enquanto

a **polia móvel** divide a força aplicada em duas partes, em função da sua liberdade para se mover. A Figura 2.30 apresenta um exemplo de aplicação das polias fixa e móvel. Observe que as duas polias fazem a força necessária para se levantar uma massa, cuja força seja de intensidade P , seja apenas a metade.

Figura 2.30 | Exemplo de aplicação de polias para levantar um corpo

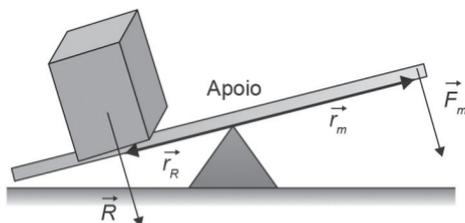


Fonte: elaborada pelo autor.

Então, para n polias móveis, a força necessária para erguer um objeto de peso P será: $F = \frac{P}{2^n}$.

A alavanca, por sua vez, é composta por uma barra rígida apoiada em um ponto fixo, chamado de apoio ou fulcro, que tem como função multiplicar a força mecânica aplicada. Quando uma força é aplicada em um dos lados, chamada de força motriz \vec{F}_m , promoverá um torque que compensará a ação de uma força resistente \vec{R} . A Figura 2.31 tem um exemplo de uma alavanca tradicional.

Figura 2.31 | Exemplo de uma alavanca



Fonte: elaborada pelo autor.

A relação matemática depende do equilíbrio da barra expresso por:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \rightarrow \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_m = \vec{0} \rightarrow \vec{\tau}_R = -\vec{\tau}_m.$$

Com a convenção de sinais, temos a seguinte relação, em termos dos módulos:

$$F_m \cdot r_m = R \cdot r_R.$$

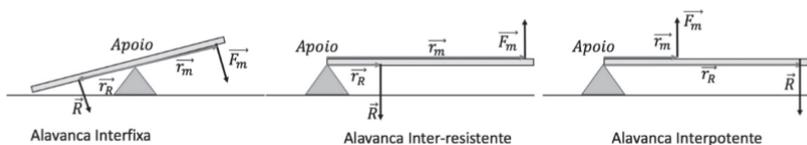
As alavancas são classificadas de acordo com posição relativa entre as forças e o ponto de apoio, como mostra a Figura 2.32. São elas:

I. Alavanca interfixa: o apoio está entre a força resistente e a força motriz. Este é o caso do alicate, da tesoura e da gangorra.

II. Alavanca inter-resistente: a força resistente está entre o apoio e a força motriz. Este é o caso do quebra-nozes, carrinhos de mão e abridores de garrafa.

III. Alavanca interpotente: a força motriz está entre o apoio e a força resistente. São exemplos o cortador de unhas e a pinça.

Figura 2.32 | Tipos de alavancas



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Quando fazemos uma flexão de braço contra ombro, a força resistente está localizada em nosso pulso. Onde está localizado o ponto de apoio? E a força potente?

Sem medo de errar

No início da seção, você foi colocado na situação de um professor que busca trazer uma aprendizagem significativa a seus estudantes, por meio da contextualização. Para esta aula, o tema escolhido foi o funcionamento de um motor, em especial o

significado do torque. Para chamar a atenção dos estudantes, você apresenta o exemplo do *Pushback*, aquele carrinho que puxa os aviões no aeroporto, como mostra a Figura 2.33.

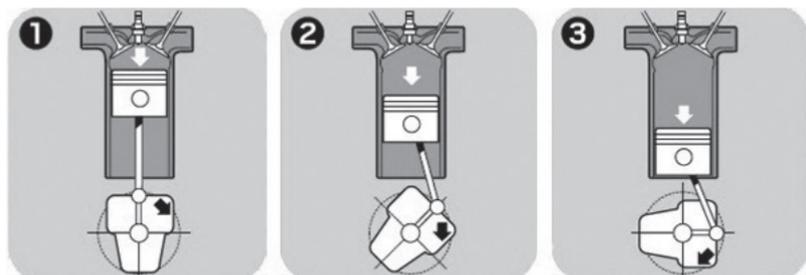
Figura 2.33 | O *pushback*, responsável por conduzir os aviões em deslocamentos no aeroporto



Fonte: <<https://goo.gl/fiQMVa>>. Acesso em: 17 maio 2017.

A pergunta motivadora poderia ser: como um carro de pequeno porte poderia puxar um avião com massa muito maior do que ele? Realizando uma pesquisa, você descobriu que esses carros têm um torque de motor muito alto, algo como 100 kgfm de torque – um carro popular 1.0 tem apenas 9,5 kgfm. O torque do motor é gerado pelo movimento de rotação do virabrequim, quando o pistão é empurrado para baixo com a explosão do combustível. A Figura 2.34 apresenta um esquema em três fases do movimento no motor, perceba que o eixo de rotação está na parte inferior.

Figura 2.34 | Fases do movimento do motor de um carro



Fonte: <<https://goo.gl/gFDLKL>>. Acesso em: 17 maio 2017.

Na porção 1 da figura, a força aplicada está na mesma linha que o ponto de apoio, assim, o torque é nulo. Na porção 2, o movimento do pistão faz que a aplicação da força esteja com um certo ângulo, gerando o torque. Na posição 3, o torque é quase máximo, pois a força é aplicada em um ângulo um pouco maior que 90° .

O torque gerado pelo motor é responsável pelo início do movimento das rodas do carro, ou seja, retirá-lo do estado de repouso. Então, todo trabalho de força do carro é função do torque do motor, como dar a partida ou ainda realizar ultrapassagens e curvas. Assim, um carro mais seguro e confortável de conduzir tem um motor em bom funcionamento, para que as manobras que exigem rapidez, como as ultrapassagens, sejam realizadas com segurança.

Ao final da aula você pode propor uma questão para os estudantes, como calcular a força aplicada pelo motor de um *pushback* com torque de 100 kgfm ? A unidade kgf é representativa de força, porém fora do SI. O valor de 1 kgf é a força que um corpo de massa de 1 kg sofre pela aceleração da gravidade. A relação entre o kgf e o Newton é $1 \text{ kgf} = 10 \text{ N}$. Vamos considerar que o virabrequim tem comprimento de 40 cm . Então, podemos calcular a força aplicada pelo pistão, em kgf , pela equação de torque, na situação de torque máximo:

$$\tau = F \cdot r = F \cdot 0,4 \text{ m} = 100 \text{ kgfm} \rightarrow F = 2500 \text{ kgf}$$

Fazendo a conversão para a unidade Newton, a força aplicada pelo pistão será de:

$$|F| = 2500(10 \text{ N}) = 25000 \text{ N} .$$

Realizando o mesmo cálculo para um carro 1.0, com torque de 9,5 kgfm, teremos que a força será de:

$$\tau = F \cdot r = F \cdot 0,4 \text{ m} = 9,5 \text{ kgf m} \rightarrow F = 23,75 \text{ kgf m} = 237,5 \text{ N}.$$

Perceba que a força gerada pelo motor do *pushback* é muito maior que no carro 1.0. Isso pode ser percebido no movimento de cada um: no caso do *pushback* é necessário um maior poder de arranque, enquanto que no carro 1.0 isso não é necessário.

O que mais você incluiria em sua aula? Que tal escrever um plano de aula detalhado?

Com essa linha de argumentação será possível realizar uma ótima aula, não é mesmo? Assim, você atingiu seu objetivo, apresentando os conceitos da Física de maneira contextualizada, atraindo o interesse de seus estudantes, falando sobre carros e sobre as leis de trânsito.

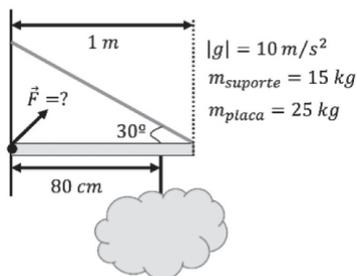
Avançando na prática

Equilíbrio de uma placa no shopping

Descrição da situação-problema

Imagine que você é um professor que está elaborando problemas para uma atividade extra para seus estudantes, envolvendo o conceito de torque e equilíbrio de corpo rígido. Ao passear por um shopping, você observa uma placa de determinada loja, que poderia resultar em uma boa situação problema. A ilustração da placa é apresentada na Figura 2.35, com alguns valores que o professor achou condizente com a situação.

Figura 2.35 | Esquema de uma placa pendurada por uma corda e apoiada com uma barra na horizontal



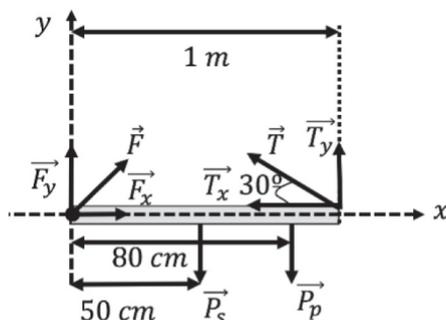
Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nesta figura, qual é a ação da força F aplicada pelo ponto de apoio? Qual é a representação do vetor força neste caso? Prepare a resolução para seu plano de aula.

Resolução da situação-problema

Primeiro vamos representar as forças atuantes no sistema e posicioná-las em relação à origem escolhida no ponto de apoio. A Figura 2.36 mostra os vetores de tração e força decompostos em relação à direção x e y . Vamos admitir, por simplicidade, que a barra e a parede formam um ângulo de 90° .

Figura 2.36 | Representação das forças que atuam no sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

A primeira condição de equilíbrio prevê que a somatória de forças em cada direção deve ser nula. Assim, no eixo y , temos:

$$\vec{F}_r = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_y + \vec{T}_y - \vec{P}_s + \vec{P}_p = \vec{0},$$

$$\vec{F}_y + \vec{T}_y = (m_s + m_p)|g| \rightarrow |\vec{F}_y| + |\vec{T}_y| = 400 \text{ N}.$$

No eixo x , teremos:

$$\vec{F}_r = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_x - \vec{T}_x = \vec{0} \rightarrow |\vec{F}_x| = |\vec{T}_x|.$$

Ainda temos um excesso de variáveis, já que não conhecemos os valores da força de tração nem da força F . Então, a saída é obter uma nova equação, aplicando a segunda condição de equilíbrio: a somatória de torques deve ser nula. Escolhendo o ponto de apoio como origem, teremos a seguinte equação para a somatório de torque:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0} \rightarrow |\vec{F}| |\vec{r}_F| \text{sen} \theta_F - |\vec{P}_s| |\vec{r}_s| \text{sen} \theta_s - |\vec{P}_p| |\vec{r}_p| \text{sen} \theta_p + |\vec{T}| |\vec{r}| \text{sen} \theta_T = 0.$$

Agora, podemos obter o módulo da força de tração:

$$|\vec{F}|0\text{sen}90^\circ - (150\text{ N})(0,5\text{ m})\text{sen}90^\circ - (250\text{ N})(0,8\text{ m})\text{sen}90^\circ + |\vec{T}|(1\text{ m})\text{sen}60^\circ = 0,$$

$$|\vec{T}|(1\text{ m})\text{sen}60^\circ = -75\text{ N}\cdot\text{m} - 200\text{ N}\cdot\text{m} \rightarrow |\vec{T}| = 317,5\text{ N}$$

Por fim, podemos retornar às equações de força e substituir as componentes da força de tração, a fim de encontrar o vetor F .

$$|\vec{F}_x| = |\vec{T}_x| \rightarrow |\vec{F}_x| = |\vec{T}|\cos 60^\circ = (317,5\text{ N})(0,5) = 158,8\text{ N}$$

$$|\vec{F}_y| + |\vec{T}_y| = 400\text{ N} \rightarrow |\vec{F}_y| = 400\text{ N} - |\vec{T}|\text{sen}60^\circ = 400\text{ N} - (317,5)\text{sen}60^\circ = 127,6\text{ N}$$

Então, o vetor F é escrito como:

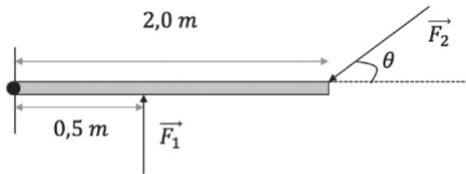
$$\vec{F} = |\vec{F}_x|\hat{i} + |\vec{F}_y|\hat{j} \therefore \vec{F} = (158,8\hat{i} + 127,6\hat{j})\text{ N}$$

Assim, você conseguiu transformar uma cena do cotidiano em um ilustrativo problema de Física.

Faça valer a pena

1. Uma barra metálica de 2 m é submetida à ação de duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , com módulo de 50 N e 30 N, respectivamente. A força \vec{F}_2 forma um ângulo de 30° com a direção horizontal. A figura a seguir mostra os pontos de aplicação das forças e o ponto de pivô, localizado na extremidade da barra.

Figura | Pontos de aplicação das forças na questão 1



Fonte: elaborada pelo autor.

Sob ação de apenas estas duas forças, qual será o módulo do torque resultante e o sentido de rotação da barra metálica?

- 10 N·m, no sentido anti-horário.
- 5 N·m, no sentido horário.
- 5 N·m, no sentido anti-horário.
- 10 N·m, no sentido horário.
- A barra está em equilíbrio.

2. Uma pinça é um exemplo de uma alavanca em que em que a força motriz é aplicada entre o ponto de apoio e a força resistente. Considere uma pinça de 10 cm em que o ponto de apoio está na extremidade oposta ao ponto da força resistente e que o ponto de aplicação da força motriz está a 3 cm do apoio.

Aplicando uma força de 8 N, qual será o módulo da força resistente obtida?

- a) 1,0 N.
- b) 3,0 N.
- c) 3,2 N.
- d) 20,0 N.
- e) 30,0 N.

3. Duas crianças brincam em uma gangorra de comprimento de 1 m, com módulo da força peso de 60 N. A criança 1 tem peso de 340 N e a criança 2 tem força peso de 500 N e estão posicionadas em lados opostos da barra.

Em relação à criança 1, qual será a posição aproximada do ponto de apoio, de modo a manter o sistema em equilíbrio?

- a) 1,00 m.
- b) 0,35 m.
- c) 0,45 m.
- d) 0,59 m.
- e) 0,73 m.

Referências

HALLIDAY, D. RESNICK, R. **Fundamentos da física**: mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2011. v. 1.

KELLER, F. J.; GETTYS, W.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1997.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. São Paulo: Ltc, 2009. v. 1.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I**: mecânica. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

ZANETIC, J. Dos "Principia" da mecânica aos "Principia" de Newton. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, n. 5, p. 23-25, jan. 1998. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/10072/9297>>. Acesso em: 25 abr. 2017.

Trabalho, energia e as leis de conservação

Convite ao estudo

Nos parques de diversões é comum ter um brinquedo chamado de “carrinho de bate-bate”, que é um carro alimentado por energia elétrica com uma proteção de borracha ao seu redor, que permite realizar colisões entre os carrinhos sem grandes perigos para o piloto. Neste tipo de situação, podemos encontrar exemplos de energia e suas transformações, como a elétrica que serve de alimentação para o carro e que será convertida em energia cinética, associada à velocidade adquirida pelo carro. Em uma colisão, a maneira como se comporta a energia do sistema é fundamental para a compreensão de seus efeitos.

O conceito de energia é um dos mais importantes da Física, em especial por englobar quase todas as ideias apresentadas nas Unidades 1 e 2, em que vimos as equações de movimento e a ação da força em sistemas mecânicos. Assim como é possível descrever um sistema de mecânica clássica considerando-se as forças envolvidas, podemos também descrever este mesmo sistema apenas utilizando o conceito de energia. Esta abordagem é muito útil quando não é possível obter as forças do sistema ou ainda quando estas não são constantes, por exemplo.

Em uma colisão, é de grande importância a grandeza chamada momento linear, também conhecida como quantidade de movimento, que estudaremos na presente unidade. Trata-se de uma grandeza vetorial dependente da massa do objeto e de sua velocidade.

A fim de trabalhar com estes conceitos, nesta unidade você será colocado no lugar de um professor de Física em

uma escola com bons recursos tecnológicos e abertura para trabalhar com atividades diferenciadas. Durante a unidade, você será desafiado a adaptar algumas atividades práticas, com o uso de computadores e câmeras de vídeo.

O uso de tecnologias tem crescido nas escolas, em especial pela sua popularização, com a redução dos custos e surgimento de diferentes interfaces e ferramentas amigáveis que estes equipamentos oferecem. Você, então, percebe a possibilidade de mediar as aulas dos temas energia e momento linear com o uso de softwares de análise de vídeos e simuladores, como forma de tornar mais atrativa a aula e melhorar a aprendizagem dos estudantes.

Uma pergunta que norteará essas atividades é: como podemos dar significado e dinamismo a problemas que envolvem a conservação da energia e a grandeza momento linear, ou ainda ao estudo das colisões? Com isso, você precisa planejar três atividades que envolvam resoluções de questões com o uso de simuladores, ou ainda vídeos de experimentos. Ao final, deve possuir três planos de aula, um para cada atividade.

Para ajudar nestas questões, a Seção 3.1 trabalhará com os conceitos de energia, trabalho e conservação da energia mecânica. Depois, na Seção 3.2, temos uma discussão da grandeza momento linear, impulso e conservação do momento linear. Por fim, a Seção 3.3 traz uma aplicação interessante das leis de conservação, com o estudo das colisões. Vamos juntos trabalhar estes importantes conceitos da Física de forma tecnológica e significativa?

Seção 3.1

Trabalho e energia

Diálogo aberto

O princípio de conservação da energia é algo que podemos observar em diferentes situações do nosso cotidiano. Por exemplo, para que você possa estudar e trabalhar, é necessário consumir alimentos, que serão transformados em energia para realizarmos as diferentes atividades.

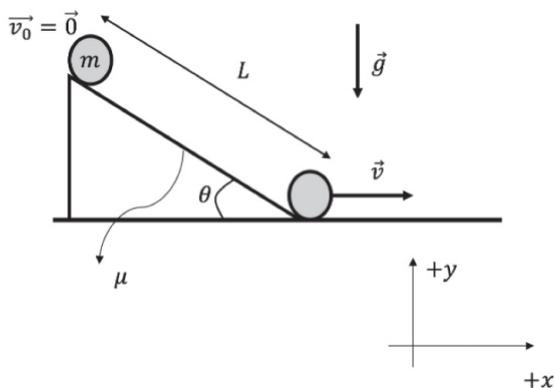
Na mecânica, o conceito de energia está ligado ao do **trabalho mecânico**. Por exemplo, ao analisarmos a trajetória que um corpo percorre sob a ação de uma força externa, vemos que a ação desta força altera sua velocidade e, portanto, a energia associada à velocidade: a **energia cinética**. Esta energia pode estar sendo armazenada no sistema, e a esta porção damos o nome de **energia potencial**. A soma destas duas energias é chamada de **energia mecânica**, e em alguns casos pode ser conservada.

Os problemas envolvendo a conservação da energia mecânica são os mais variados e possuem diversas configurações e formas de resolução. Por isso, você foi colocado nessa unidade no lugar de um professor de Física em uma escola que dispõe de recursos tecnológicos, e propõe resolver um problema de conservação da energia mecânica com o uso de um simulador chamado A Rampa (Disponível em <<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/the-ramp>>. Acesso em: 16 jun. 2017.). O problema literal, ou seja, composto apenas por incógnitas, geralmente oferece dificuldades aos alunos pelo nível de abstração que é exigido. Além disso, você já percebeu que eles têm dificuldade em identificar as manifestações da energia mecânica nos problemas e compreender como ocorrem as transformações para o caso em que há forças dissipativas. Porém, com o programa citado, podemos alterar os valores numéricos e estudar as consequências destas escolhas.

O problema proposto é o movimento de um corpo de massa m posicionado em um plano inclinado, que possui um coeficiente de atrito. O plano tem um comprimento L e tem inclinação. A questão proposta será: qual é a diferença na velocidade do corpo no final

da rampa, na situação de ausência do atrito, em comparação com a situação em que o atrito é presente? A Figura 3.1 apresenta uma representação da situação, com as grandezas físicas importantes.

Figura 3.1 | Representação do problema apresentado no item *Diálogo Aberto*



Fonte: elaborada pelo autor.

Para encontrar uma expressão para a velocidade do corpo no final do plano inclinado, vamos estudar os conceitos de trabalho, energia cinética e potencial gravitacional. Na questão da conservação da energia mecânica, vamos discutir a ação de forças dissipativas nestes sistemas.

Não pode faltar

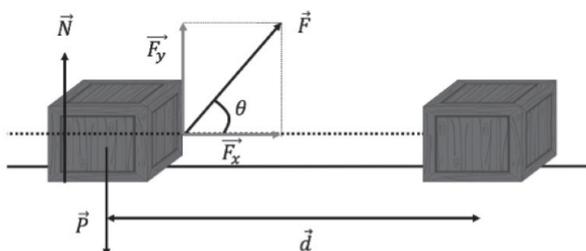
Trabalho e potência mecânica

Um objeto em movimento carrega energia, e podemos imaginar que quanto maior o módulo dessa velocidade, maior a energia. Ao aplicarmos uma força sobre um objeto, podemos alterar seu estado de movimento, por exemplo, modificando o módulo do vetor velocidade. Assim, a força aplicada pode doar ou retirar energia do sistema, aumentando ou diminuindo o módulo de sua velocidade. Essa transferência de energia é o que chamamos de trabalho.

Para definir a grandeza física trabalho, podemos analisar a situação em que uma força F oblíqua é aplicada em um objeto de massa m , provocando um deslocamento d na direção horizontal. Ao observarmos a Figura 3.2, a decomposição das forças permite concluir

que apenas a componente paralela à superfície transfere energia para o movimento, pois a componente perpendicular é cancelada.

Figura 3.2 | Força sobre o objeto, apenas a componente paralela à superfície contribui para o trabalho



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/Dqktw6>>. Acesso em: 16 jun. 2017.

Então, o conceito de trabalho está atrelado à força aplicada por um agente externo em um corpo, a fim provocar uma alteração no movimento. De forma rigorosa, o trabalho (W) é calculado como o produto escalar do vetor força (\vec{F}) com o vetor deslocamento (\vec{d}), como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \rightarrow W = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta .$$

Em que o ângulo θ refere-se ao ângulo entre os vetores força e deslocamento. Note que trabalho é uma grandeza **escalar**, ou seja, apenas o valor numérico e a unidade são suficientes para representá-la. O trabalho escalar é construído a partir de dois vetores (força e deslocamento), com base na operação produto escalar, estudada em álgebra vetorial.

Realizando a análise dimensional, o trabalho tem unidade no SI de Joule (J), obtida como produto de Newton por metro. Este nome é uma homenagem ao físico britânico James Joule (1818-1899), pelos seus trabalhos com o conceito de energia e calor. Outro bom motivo para esta representação é evitar a confusão com a grandeza torque, que também tem unidade $\mathbf{N \cdot m}$.

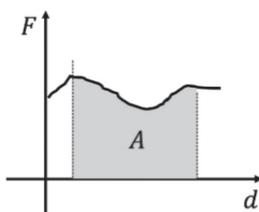
$$[W] = [\vec{F}] [\vec{d}] \rightarrow [W] = \mathbf{N \cdot m = J}$$

O ângulo entre os vetores força e deslocamento definirá o sinal no cálculo do valor do trabalho. Este sinal tem um significado físico: quando este ângulo é de 90° , o trabalho é nulo, pois o cosseno é nulo; quando o ângulo está entre $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$, o valor do cosseno será positivo, e nesse caso o trabalho é dito motor, o que significa que a

força está, em parte ou totalmente, impulsionando o deslocamento; já no caso em que o ângulo tem valor $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, o cosseno tem valor negativo e o trabalho é dito resistente, pois a força causa resistência no deslocamento do corpo.

A expressão para o trabalho, apresentada anteriormente, é útil quando a força aplicada é constante, algo que não ocorre em grande parte dos casos. Nos casos em que a força não é constante, a área do gráfico de força em função do deslocamento permite obter o trabalho, como indica a Figura 3.3. Nesse caso, é importante utilizar os conhecimentos do cálculo diferencial e integral.

Figura 3.3 | A área do gráfico de força em função do deslocamento é numericamente igual ao trabalho realizado pela força



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso da aplicação de várias forças em um corpo, pode-se adotar dois caminhos distintos para calcular o trabalho total aplicado: calcular separadamente o trabalho individual de cada força e realizar a soma escalar:

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$$

Ou ainda obter os vetores força resultante e deslocamento, e usar a definição de trabalho. Neste caso, deve-se conhecer bem o ângulo entre estes vetores.

Observe que a definição de trabalho leva em conta apenas o vetor força e deslocamento, mas não contempla a grandeza tempo. Para completar esta descrição, definimos **potência mecânica** (P_M), que pode ser entendida como sendo a "rapidez" com que um trabalho é realizado sobre um corpo. De maneira mais precisa, podemos descrever a potência como sendo a taxa de variação de trabalho realizado em um certo tempo. Dessa forma, diversas ações que apresentam o mesmo valor de trabalho podem apresentar diferentes potências, em função da diferença de tempo de execução de cada uma:

$$P_M = \frac{W}{\Delta t}$$

A potência também é uma grandeza escalar e possui como unidade no SI o Watts (**W**), em homenagem ao engenheiro James Watts, pelos seus trabalhos com máquinas térmicas. Temos:

$$[P_M] = \frac{[W]}{[\Delta t]} = \text{J/s} = \text{W}.$$



Exemplificando

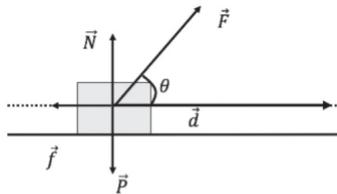
Na situação descrita na Figura 3.2, o bloco de madeira tem massa de 10 kg e é movimentado ao longo de uma superfície plana, com coeficiente de atrito estático de 0,4 pela ação da força \vec{F} de intensidade de 100 N. O ângulo entre a força \vec{F} e o deslocamento é de 60° .

Considere $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$; $\text{sen } 60^\circ = 0,87$; $\text{cos } 60^\circ = 0,5$.

Qual será o trabalho total realizado pelo corpo ao deslocar-se 4 m na direção horizontal, sob ação das forças?

Resolução: Na Figura 3.4 são representadas as forças aplicadas sobre o corpo e o vetor deslocamento em questão. Devemos sempre começar identificando todas as forças que atuam em um sistema.

Figura 3.4 | Representação esquemática das forças que atuam no corpo



Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro resultado que podemos obter é que a força peso e a força normal são perpendiculares ao vetor deslocamento. Dessa forma, o termo cosseno da definição de trabalho será nulo, tornando o trabalho realizado por estas forças nulo:

$$W_P = |\vec{P}||\vec{d}|\cos 270^\circ = 0 \quad , \quad W_N = |\vec{N}||\vec{d}|\cos 90^\circ = 0.$$

Para a força \vec{F} , o ângulo é de 60° com o vetor deslocamento, assim, o trabalho será igual a:

$$W_F = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos 60^\circ = (100 \text{ N})(4 \text{ m})(0,5) = 200 \text{ J}.$$

A força de atrito (\vec{f}) está orientada no sentido contrário ao deslocamento, com ângulo de 180° . Aplicando as expressões da força de atrito e lembrando que esta superfície é plana, assim $|\vec{P}| = |\vec{N}|$, temos que:

$$W_f = |\vec{f}| |\vec{d}| \cos 180^\circ = -\mu m |\vec{g}| |\vec{d}|$$

$$W_f = -(0,4)(10 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(4 \text{ m}) = -160 \text{ J}.$$

Então, o trabalho total será a soma dos trabalhos individuais de cada força:

$$W_T = W_F + W_f + W_P + W_N$$

$$W_T = 200 \text{ J} - 160 \text{ J} + 0 \text{ J} + 0 \text{ J} = 40 \text{ J}.$$

Trabalho e energia cinética

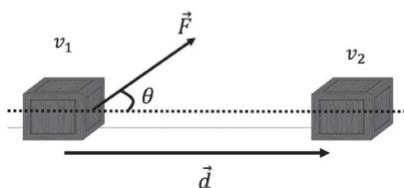
Quando um corpo tem certa velocidade v , podemos dizer que ele tem certa energia associada a este movimento. A esta energia de movimento, damos o nome de energia cinética (K). A quantidade de energia cinética que um corpo possui pode ser calculada pela expressão matemática:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Em que v é o módulo da **velocidade instantânea** do corpo naquele instante de tempo de estudo. Assim, podemos analisar a situação de uma força \vec{F} aplicada sobre um corpo submetido um deslocamento \vec{d} , como representa a Figura 3.5. Antes da ação da força, o corpo movia-se com velocidade v_1 e, ao final do deslocamento, na distância d , adquiriu uma velocidade v_2 . Dessa forma, a variação da energia cinética do corpo é exatamente o valor do trabalho total realizado pela força F , segundo a expressão:

$$W_T = \Delta K \rightarrow W_T = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Figura 3.5 | O trabalho efetuado pela força \vec{F} promoverá a alteração da velocidade escalar do corpo



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/ufNevD>>. Acesso em: 16 jun. 2017.

A expressão $W_T = \Delta K$ é chamada de teorema trabalho-energia cinética, que nos permite obter variações da velocidade escalar em função da força aplicada.

O teorema trabalho-energia cinética é útil para a análise de problemas em que não temos informação sobre o tempo ou ainda sobre a aceleração.

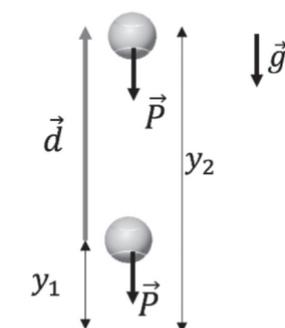
Energia potencial e energia mecânica

Além da energia cinética, associada à velocidade escalar do corpo, há nos sistemas mecânicos a energia potencial, que depende da posição do corpo. O nome potencial refere-se à forma de energia que está armazenada e que pode em qualquer momento transformar-se em outra forma. Iremos analisar os casos da energia potencial gravitacional (U_g) e da energia potencial elástica (U_{el}), utilizando o conceito de trabalho mecânico apresentado anteriormente.

A água no topo de uma represa está sob a ação da gravidade e tem a tendência de descer, se houver uma tubulação aberta ou uma fissura por onde possa atravessar a barragem. Podemos descrever essa situação indicando que a água possui uma energia armazenada, potencial, que se transformará em energia cinética (movimento) a qualquer instante. Chamamos essa energia, que pode ser utilizada para mover as turbinas de uma usina hidrelétrica, de energia potencial gravitacional.

Vamos considerar um corpo de massa m que irá se deslocar em uma trajetória vertical após ser lançado para cima, de acordo com a Figura 3.6. Neste caso, a força peso realizará trabalho resistente, por estar orientada a 180° do vetor deslocamento.

Figura 3.6 | Ao lançarmos uma bola para cima, o trabalho realizado pela força peso será resistente



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/XbjPeM>>. Acesso em: 16 jun. 2017.

Então, a expressão do trabalho da força peso é escrita como:

$$W_{\vec{P}} = |\vec{P}| |\vec{d}| \cos 180^\circ \rightarrow W_{\vec{P}} = -m|\vec{g}|(y_2 - y_1) = -m|\vec{g}|y_2 + m|\vec{g}|y_1.$$

Utilizando nossa liberdade de definição de um referencial, podemos tomar $y_1 = 0$ e $y_2 = y$, o que reduz a expressão para $W_{\vec{P}} = -m|\vec{g}|y$. Com a atuação da força peso, a energia é armazenada gradativamente na forma de energia potencial gravitacional (U_g), que pode ser definida como:

$$U_g = m|\vec{g}|y.$$

Então, o trabalho da força gravitacional é igual ao oposto da variação da energia potencial gravitacional $W_{\vec{P}} = -\Delta U_g$. Note que essa definição mostra que somos livres para definir o zero para a energia potencial, pois para os sistemas físicos somente as variações nessa grandeza são relevantes.

No caso da descida, a força peso tem trabalho motor, mas a energia potencial está diminuindo, então o corpo está perdendo energia potencial.



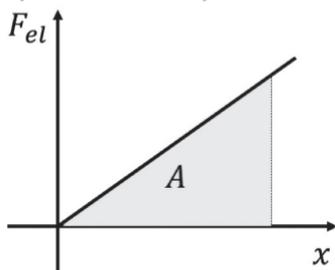
Refleta

Na Seção 2.3 discutimos que há duas formas de equilíbrio: o estático (repouso) e o dinâmico (MRU). Em cada caso há alguma forma de energia? Como a ação de uma força externa altera estas energias?

Outro caso de energia potencial é a elástica (U_{el}), que aparece em sistemas que possuem molas ou elásticos. Ao comprimir ou distender uma mola, estamos acumulando energia no sistema, que pode ser convertida em movimento ou em outras formas de energia.

Como a força elástica não é constante, o trabalho da força elástica é calculado pela área do gráfico da força em função da distensão da mola, em relação ao comprimento inicial, como mostra a Figura 3.7.

Figura 3.7 | Gráfico da força elástica em relação à distância percorrida



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso, temos que:

$$|W_{el}| = \frac{(|F_{el}|)(\Delta x)}{2} = \frac{(kx)(x - x_0)}{2}.$$

Considerando a origem do eixo x no ponto de equilíbrio da mola ($x_0 = 0$), então:

$$|W_{el}| = \frac{kx^2}{2}.$$

Como $W_{el} = -\Delta U_{el}$, o zero da energia potencial elástica está no ponto de equilíbrio da mola e o sinal do trabalho deve ser negativo. Considerando que a força elástica se opõe ao deslocamento, temos a expressão:

$$U_{el} = \frac{kx^2}{2}.$$

Você deve ter reparado que é comum que sistemas mecânicos apresentem energia cinética e potencial simultaneamente, e que a energia potencial tende a se transformar em energia cinética. Então, podemos associar estas energias, definindo a **energia mecânica** (E_M), cuja expressão matemática é:

$$E_M = K + U.$$

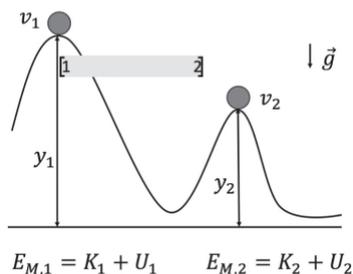
Em que U representa a energia potencial genérica, seja elástica ou gravitacional.

Conservação da energia mecânica

Você já deve ter visto uma montanha russa em funcionamento, talvez até andado em uma. É um exemplo interessante para analisarmos a energia mecânica do corpo em diferentes situações. Na Figura 3.8 está representado um trecho de uma montanha russa, e podemos analisar a energia do carrinho ao passar por dois pontos deste trecho. Com relação ao solo, em ambos os pontos o carrinho terá uma energia potencial gravitacional e energia cinética, de modo que podemos obter uma expressão para a variação da energia mecânica para estes dois pontos:

$$\Delta E_M = E_{M,2} - E_{M,1} \rightarrow \Delta E_M = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) .$$

Figura 3.8 | Representação de dois pontos da montanha russa, em que há energia cinética e energia potencial gravitacional



Fonte: elaborada pelo autor.

Na posição 1, o sistema possui uma determinada energia mecânica. Caso não ocorra perdas de energia no sistema, a variação da energia mecânica do sistema será nula. Estes sistemas são denominados conservativos:

$$\text{Sistemas conservativos} \quad \Delta E_M = 0 \rightarrow E_{M,1} = E_{M,2} .$$

A expressão anterior é o que pode ser denominada como a **conservação da energia mecânica**, pois esta se mantém constante.

Forças como a força peso e a força elástica são forças **conservativas**, pois quando atuam a energia cinética meramente se transforma em energia potencial, mantendo o valor da energia

mecânica constante. O trabalho realizado por estas forças independe da trajetória escolhida.

Em um sistema conservativo não atuam **forças dissipativas**, que são aquelas que promovem perdas de energia mecânica do sistema, como é o caso da força de atrito e da força de arrasto.

E na presença de forças dissipativas? Nos sistemas dissipativos, elas irão alterar a energia mecânica total do sistema, retirando energia do sistema na forma de outros tipos de energia (som, calor, etc.) e, portanto, causam uma diminuição na energia mecânica do sistema. A quantidade de energia dissipada é exatamente o trabalho realizado pelas forças dissipativas.

Do mesmo modo, em um sistema não isolado, que interage com outros sistemas em seu redor, uma força externa pode aumentar a energia mecânica do sistema pelo efeito do trabalho de uma força qualquer. Portanto:

$$\text{Sistema não conservativo } \Delta E_M \neq 0 \rightarrow \Delta E_M = W_f .$$

A energia do sistema é conservada mesmo nos casos em que existem forças dissipativas, pois a energia mecânica perdida é transformada em energia térmica, sonora, ou outros tipos de energia. O enunciado da conservação da energia decorre desta definição, mas com o acréscimo do termo ΔU_{int} , que representa a variação da energia interna do sistema. Este conceito será mais bem trabalhado na termodinâmica, mas a alteração de temperatura da superfície pela ação do atrito está compreendida na energia interna. Para o sistema geral vale a expressão:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0.$$

Assim, durante a evolução do sistema, a energia muda de forma, a energia cinética pode transformar-se em energia potencial ou em energia interna, mas de forma que se somarmos todas as componentes estas variações serão nulas. Por isso, é comum encontrarmos os dizeres de que a energia não pode ser criada nem destruída, mas apenas alterar sua manifestação.



Assimile

Em um sistema conservativo, a variação da energia mecânica é nula, pois não há ação de forças dissipativas ou de forças externas. Na presença dessas forças, a variação da energia mecânica é igual ao trabalho realizado por elas.



Pesquise mais

O conceito de força conservativa e dissipativa é muito importante para estudar o comportamento de sistemas mecânicos e de outras grandezas, como a energia potencial. Você pode encontrar uma descrição mais aprofundada sobre o tema no capítulo 7 - *Energia Potencial e conservação da energia*, do livro:

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: Mecânica**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

Você também encontrará uma linguagem matemática mais sofisticada para calcular a grandeza trabalho.

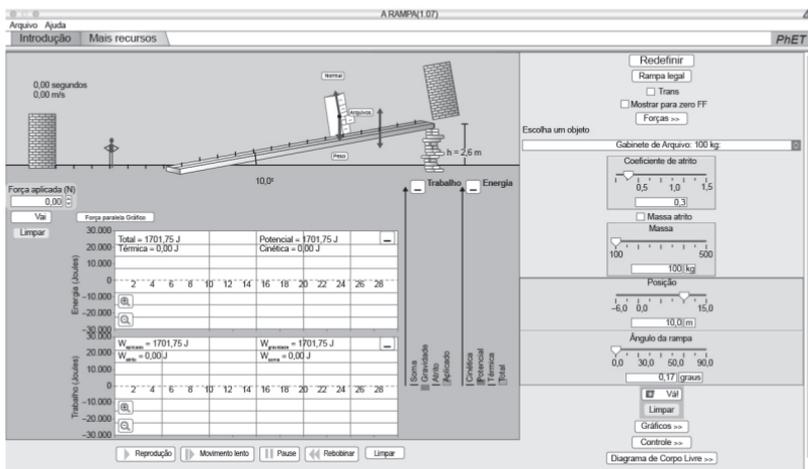
Sem medo de errar

No começo da seção você foi colocado no lugar de um professor de Física em uma escola que possui recursos tecnológicos. Então, você deve preparar seu plano de aula com cuidado, para que os estudantes possam aproveitar e aprender o máximo possível.

Para trabalhar com os alunos, você realizou uma busca na internet e encontrou o simulador A Rampa, que funciona como um jogo de movimentos que ocorrem em planos inclinados, que permite a alteração dos valores das grandezas físicas envolvidas.

A Figura 3.9 apresenta a tela de entrada do simulador, no qual vamos usar a opção avançado, que inclui trabalho e energia.

Figura 3.9 | Tela de entrada do simulador A Rampa no modo avançado



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/QSQWUe>>. Acesso em: 16 jun. 2017.

O problema escolhido para resolução foi a descida de um corpo em plano inclinado com atrito. Então, durante o planejamento da aula você decidiu discutir com os estudantes o fato de que no sistema há presença de forças dissipativas, no caso, o atrito com a superfície.

Você planejou deixar que eles discutam até concluírem que a variação da energia mecânica é igual ao trabalho realizado por esta força:

$$\Delta E_M = W_f \rightarrow (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = W_f.$$

Depois, precisamos pensar que no ponto inicial do movimento o corpo está em repouso, ou seja, com velocidade nula. No ponto mais baixo, ele atinge o referencial de altura zero. Assim, a expressão de energia pode ser simplificada para:

$$K_2 + 0 - 0 - U_1 = W_f.$$

Substituindo as expressões das energias e da força de atrito, que devem ser lembradas e sugeridas pelos estudantes, chegamos à equação:

$$\frac{mv^2}{2} - m|g|y_1 = -|f_{at}||d| \rightarrow \frac{mv^2}{2} - m|g|y_1 = -\mu|\vec{N}||d| \rightarrow \frac{mv^2}{2} - m|g|y_1 = -\mu|\vec{P}_y||d|.$$

Vamos considerar que a força normal é igual à componente vertical do peso $|\vec{N}| = |\vec{P}_y| = |\vec{P}|\cos\theta$, seguindo a decomposição. Assim:

$$\frac{mv^2}{2} - m|\vec{g}|y_1 = -\mu m|\vec{g}||\vec{d}|\cos\theta \rightarrow \frac{v^2}{2} = |\vec{g}|y_1 - \mu|\vec{g}||\vec{d}|\cos\theta .$$

Agora, nosso problema é obter a altura inicial e o deslocamento d do corpo.

Depois de analisar as relações do triângulo retângulo, de forma que L é a hipotenusa e y_1 a altura que corresponde ao oposto, podemos utilizar o valor de seno:

$$\text{sen}\theta = \frac{y_1}{L} \rightarrow y_1 = L \text{sen}\theta .$$

Assim, a distância de deslocamento será o comprimento da rampa L . Com estas duas expressões, a velocidade do corpo é escrita em termos de:

$$\frac{v^2}{2} = |\vec{g}|L \text{sen}\theta - \mu|\vec{g}|L \cos\theta \rightarrow v^2 = 2|\vec{g}|L(\text{sen}\theta - \mu \cos\theta) .$$

No caso de possuímos os parâmetros numéricos, esta equação seria o suficiente para resolver este problema.

Agora, podemos realizar algumas interpretações sobre esta equação:

Por exemplo, se não existir atrito com a superfície, a velocidade do corpo será maior, pois o termo negativo será cancelado. Se o ângulo da rampa também for zero, não haverá movimento do corpo. Outra suposição que fizemos é que ao liberarmos o corpo ele entrará em movimento, com a interferência do atrito cinético.

Agora, podemos atribuir valores ao tamanho da rampa, ao coeficiente de atrito e ao ângulo, e observar o que acontece com a velocidade do corpo.

Por exemplo: qual será a velocidade do corpo no final da rampa quando:

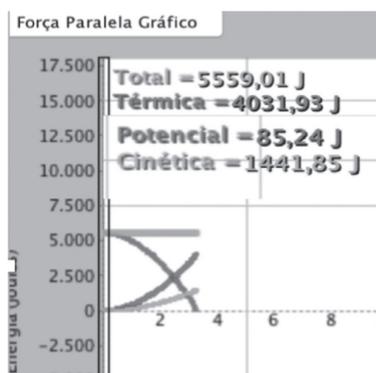
$$L = 15 \text{ m}, \theta = 22^\circ \text{ e } \mu = 0,3 ?$$

Substituindo estes valores na equação para velocidade encontrada:

$$v^2 = 2(10 \text{ m/s}^2)(15 \text{ m})(\text{sen}22^\circ - (0,3)\cos22^\circ) \rightarrow v = \sqrt{28,93 \text{ m}^2/\text{s}^2} \rightarrow v = 5,38 \text{ m/s} .$$

Colocando estes valores no programa, vemos que este valor está correto, a diferença é que a orientação positiva do programa é contrária da adotada em nossa resolução. A parte mais importante é o gráfico de energia produzido pelo programa, como mostra Figura 3.10.

Figura 3.10 | Gráfico da variação da energia durante a descida de um corpo por um plano inclinado, gerado pelo programa A Rampa



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a energia do sistema é a soma da energia cinética, potencial e térmica (atrito) em cada ponto, e que em todos os momentos esta soma é mantida constante, apesar da alternância dos valores entre as componentes.

Dessa forma, após essa grande discussão em grupo envolvendo seus estudantes, você pode aproveitar e deixar que eles resolvam alguns problemas simples sozinhos. Além disso, você pode refletir: que outras atividades poderia propor para tornar a aula mais interessante e ilustrar os conceitos de trabalho e energia mecânica?

Avançando na prática

Experimentos para conservação da energia mecânica

Descrição da situação-problema

Ao trabalharmos o assunto de conservação da energia mecânica, é possível realizar alguns experimentos com os estudantes, a fim de demonstrar a validade deste princípio, ou ainda em diferentes casos de transformação da energia cinética para energia potencial. Agora, você toma o lugar de um professor de Física em escola com poucos recursos de laboratório, mas que percebe que valeria a pena realizar uma prática relacionada com este princípio, de forma a tornar o aprendizado dos alunos mais significativo.

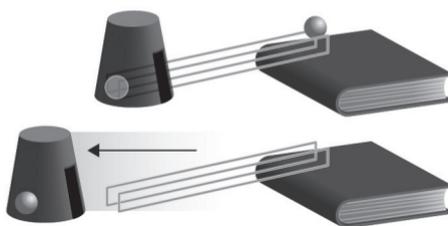
Então, você buscou em livros ou na internet por exemplos de experimentos de baixo custo, que poderiam ser realizados com

os estudantes, de forma a ilustrar a transformação da energia mecânica e, se possível, realizar alguns cálculos. Você encontra um experimento que seria fácil de reproduzir em sala e que permite ilustrar a transformação da energia potencial gravitacional em cinética e depois a dissipação pela ação do atrito.

Nele, uma bolinha é lançada do alto de uma régua, apoiada sobre um livro, e ao fim do trajeto colide com um copinho plástico, transferindo sua energia cinética para ele. Uma descrição mais completa dos materiais está disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/experimentosdefisica/mec28.htm>>. Acesso em: 16 jun. 2017.

No site há uma imagem ilustrativa do experimento, que está apresentado na Figura 3.11. Ao soltarmos a bolinha do alto de um livro, a energia potencial será transformada em energia cinética até chegar à base, momento em que este valor será máximo.

Figura 3.11 | Ilustração do experimento de conservação da energia mecânica



Fonte: <http://www2.fc.unesp.br/experimentosdefisica/mec28_01.jpg>. Acesso em: 16 jun. 2017.

Por exemplo, você elaborou este sistema e propôs a seguinte questão: qual seria a força de freamento constante oferecida pelo copo quando este é empurrado por 10 cm sobre a mesa, depois da colisão com a bolinha de massa 150 g que foi liberada do alto de uma rampa com altura de 20 cm?

Resolução da situação-problema

A força de freamento do copo pode ser encarada como uma força dissipativa. Como o copo para ao final do movimento, a energia cinética final será nula. Então, o teorema trabalho - energia cinética resulta em:

$$\Delta K = W_F \rightarrow K - K_0 = -|\overline{F}_{\text{atx}}| |\overline{d}| \rightarrow K_0 = |\overline{F}_{\text{atx}}| |\overline{d}| .$$

A energia cinética depende da velocidade do corpo ao pé da rampa. Para obter este valor, podemos utilizar a conservação da energia mecânica na rampa. No ponto mais alto há apenas energia potencial gravitacional e no ponto mais baixo apenas energia cinética. Assim:

$$\Delta E_M = 0 \rightarrow U_1 = K_2$$

$$m|\vec{g}|h = m\frac{v^2}{2} \rightarrow v^2 = 2|\vec{g}|h.$$

Substituindo esta expressão na equação da energia cinética, teremos uma expressão para obter a força aplicada pelo copo sobre o corpo:

$$\frac{mv^2}{2} = |\vec{F}_{ext}||\vec{d}| \rightarrow \frac{m(2|\vec{g}|h)}{2} = |\vec{F}_{ext}||\vec{d}| \rightarrow |\vec{F}_{ext}| = \frac{m|\vec{g}|h}{|\vec{d}|}.$$

Então, com os valores numéricos propostos:

$$|\vec{F}_{ext}| = \frac{(0,15 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(0,2 \text{ m})}{0,1 \text{ m}} = 3 \text{ N}.$$

Com esta atividade, você pensa que seria possível revisar todos os conceitos apresentados nas aulas e ainda oferecer uma atividade prática para os estudantes.

Faça valer a pena

1. No sistema presente em uma fábrica, uma pessoa pretende subir um bloco de massa 50 kg, com velocidade constante, através do uso de uma polia fixa presa no teto. O bloco será levantado para uma altura de 2,5 m para ser posicionado no estoque. Porém, o tempo de execução desse trabalho não deve exceder 3 minutos e 20 s.

Qual será a potência mecânica associada à força de tração aplicada pela pessoa? Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 3,00 W.
- b) 4,52 W.
- c) 5,30 W
- d) 6,25 W.
- e) 8,65 W.

2. Para estudar os efeitos da força centrípeta em um corpo, um grupo de alunos elaborou um sistema como o apresentado na figura a seguir, composto por uma mola com constante elástica igual a 50 N/m , que oferecerá propulsão para um corpo de massa 20 g . O corpo irá deslocar-se livremente pela superfície plana até iniciar um movimento circular, em um *loop* de raio de 50 cm .

Figura | Experimento elaborado para estudar o movimento circular de um corpo



Fonte: elaborada pelo autor.

Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e considere que não há presença de forças dissipativas. Qual será a distensão da mola suficiente para que o corpo chegue ao topo do *loop* com velocidade mínima?

- a) 5 cm.
- b) 7 cm.
- c) 10 cm.
- d) 12 cm.
- e) 14 cm.

3. Uma bola é lançada sobre uma superfície plana e áspera, com velocidade de 2 m/s , de forma que após percorrer uma distância de 80 cm ela para. A massa da bola é de 2 kg e a aceleração da gravidade é de 10 m/s^2 .

Pela ação exclusiva da força de atrito, qual será o valor do coeficiente de atrito entre a superfície e a bola?

- a) 0,20.
- b) 0,25.
- c) 0,28.
- d) 0,32.
- e) 0,60.

Seção 3.2

Momento linear e a sua conservação

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos o conceito de energia mecânica e como o princípio de conservação auxilia na resolução de problemas. Outro princípio de conservação importante relaciona as grandezas momento linear e impulso. Estes são conceitos que você aplicava intuitivamente em diferentes brincadeiras de criança, como pular corda ou ainda em jogos de bola, pois eles estão relacionados com a dificuldade de alterar o estado de movimento do corpo.

O momento linear está presente em diferentes situações do cotidiano e tem uma lei de conservação muito importante na Física. Sabe-se que as leis de Newton originalmente foram escritas como dependentes do momento linear.

Lembre-se de que você é professor de Física em uma escola que possui muitos recursos tecnológicos disponíveis, então, você pensou em elaborar um experimento simples para medir a variação da quantidade de movimento. Nesta situação, você está preparando o plano de aula, realizando todos os cálculos relevantes para a atividade proposta, que envolve soltar uma bolinha de massa $0,2$ kg de uma altura H determinada. Após chegar ao chão, ela voltará a uma altura h , diferente da altura inicial, pois a energia mecânica não é conservada.

Nesta situação, você propôs duas abordagens para o problema: uma teórica, usando as equações de movimento, considerando a altura inicial H e a altura final h . Como quantificar a variação do momento linear nesse caso teórico, desprezando efeitos da resistência do ar?

Na segunda abordagem, você resolve realizar um experimento de queda livre, que após ser filmado poderá ser analisado com o software Tracker. Seguindo os procedimentos apresentados em: <http://physlets.org/tracker/tracker_help_pt_BR.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2017, podemos obter a velocidade do corpo pouco antes da colisão e logo depois, através de uma métrica estabelecida. A

proposta é comparar os dois valores obtidos e discutir como a variação da quantidade de movimento surge nesta situação.

Para ajudar nesta discussão, esta seção apresentará os conceitos de momento linear e impulso, para que possamos obter o teorema impulso-momento linear e, em condições especiais, um princípio de conservação do momento linear. No final da seção é elaborada uma discussão sobre a formulação da 2ª e 3ª leis de Newton, com o conceito do momento linear.

Não pode faltar

Momento linear

Em seu livro *Principia*, Newton definiu uma grandeza chamada momento linear, também conhecida como quantidade de movimento, que é definida pelo produto da massa de um corpo com sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

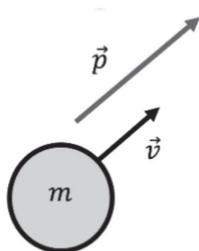
Podemos pensar no momento linear como sendo uma medida de quão difícil é alterar o estado de movimento de um certo objeto. Podemos comparar, por exemplo, o momento de um caminhão, de maior massa, com o momento linear de um carro popular, de menor massa. Supondo que os dois veículos tenham a mesma velocidade, é evidente que é mais difícil parar o caminhão do que o carro, por causa da diferença de massa entre os dois.

O momento é uma grandeza vetorial, sua orientação é a mesma que a da velocidade, como ilustra a Figura 3.12. Ao analisarmos o movimento de uma partícula, é comum termos interesse na variação do momento linear, de forma que para uma massa constante comparamos a velocidade no instante final e inicial.

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \rightarrow \Delta\vec{p} = m(\vec{v} - \vec{v}_0).$$

Observe ainda, que há possibilidade de alterarmos a quantidade de movimento pela alteração da massa, como no caso de uma caixa em movimento dentro da qual é lançada um objeto com massa.

Figura 3.12 | O vetor quantidade de movimento é obtido pelo produto da massa pelo vetor velocidade



Fonte: elaborada pelo autor.

No SI, a unidade de momento linear é : $[\vec{p}] = [m][\vec{v}] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$.

A formulação da mecânica baseada no momento linear tem muita utilidade quando o sistema físico a se analisar é composto por diversos objetos, mas pode ser complicado compreender todas as forças que atuam no sistema.

A principal diferença entre esta seção e a anterior é a escolha das grandezas físicas de interesse: se forem escalares, a formulação em energia é mais favorável. Caso sejam grandezas vetoriais, a formulação com o momento linear é mais adequada.

Para um sistema composto por diversas partículas, podemos aplicar o princípio de superposição para calcular o momento linear do sistema. O momento linear resultante (\vec{p}_r) é igual à soma do momento linear de cada uma das partículas que compõem o sistema, de forma que:

$$\vec{p}_r = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \rightarrow \vec{p}_r = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots$$

Porém, em um sistema com muitas partículas (por exemplo, um recipiente com um determinado gás), é praticamente impossível determinarmos o momento linear de cada partícula separadamente. Então, podemos aproveitar uma propriedade importante do estudo de múltiplos corpos: podemos escolher um ponto que representa todo o sistema, chamado de **centro de massa**.

Conhecendo a posição e a massa de cada partícula, obtemos a posição do centro de massa realizando o seguinte cálculo:

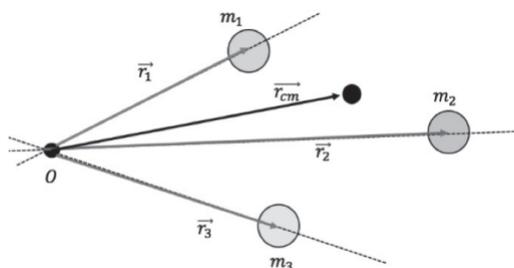
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

O conceito de centro de massa é importante na discussão de equilíbrio de corpos extensos, coincidindo com o centro de gravidade de um corpo, desde que a aceleração do campo gravitacional seja constante.

Para ilustrar o conceito de centro de massa, vamos considerar um sistema de três corpos pontuais, como o apresentado na Figura 3.13, na qual as distâncias entre os corpos são consideradas a partir de um ponto O arbitrário. O vetor \vec{r}_{cm} que representa a posição do centro de massa é obtido por meio da equação:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m} \rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

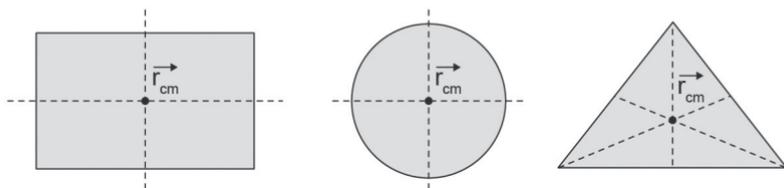
Figura 3.13 | O centro de massa de um sistema de partículas é obtido pela média ponderada das massas com as posições



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, podemos encarar o centro de massas como uma média ponderada da distribuição das massas. Para corpos extensos e com massa distribuída de forma homogênea no espaço, o centro de massa estará localizado no centro geométrico do sistema, como ilustra a Figura 3.14. Para sistemas contínuos, em casos mais gerais, a obtenção do centro de massa depende de integrais dependentes da função densidade.

Figura 3.14 | Centro de massa de corpos homogêneos obtidos por meio de simetria



Fonte: elaborada pelo autor.

Também é possível encontrar uma expressão para a velocidade do centro de massa (\vec{v}_{cm}):

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

Observe que o numerador da expressão de velocidade do centro de massa corresponde ao momento linear. Dessa forma, podemos generalizar este conceito pela equação:

$$\vec{p}_i = \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{cm}.$$

A partir desta definição, podemos concluir que analisar o comportamento somente do centro de massa de um sistema com muitas partículas é equivalente a analisar todo o sistema separadamente. Em outras palavras, é como se pudéssemos substituir todas as partículas do sistema por uma única partícula contendo toda a massa do sistema, posicionada exatamente na posição do centro de massa.



Pesquise mais

Para determinar a posição de centro de massa de objetos que não apresentam distribuição de massa uniforme ou sem simetria, é necessário utilizar o formalismo matemático de integrais. As páginas 209 a 212 do livro a seguir apresenta alguns exemplos simples sobre o tema.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos da física**: mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2011. v. 1.

Impulso de uma força

A variação da quantidade de movimento depende da alteração da massa do sistema, ou ainda da alteração da velocidade deste. Como sabemos, a variação da velocidade está diretamente associada à aplicação de uma força externa \vec{F} resultante.

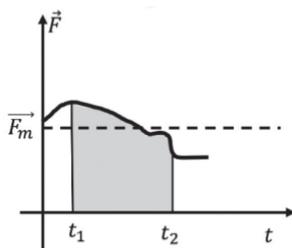
A grandeza impulso (\vec{I}) é então calculada como produto da força externa ao sistema pelo tempo de aplicação, como na expressão:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t.$$

Esta grandeza vetorial tem como unidade o produto: $[I] = [F][\Delta t] \rightarrow [I] = \text{N} \cdot \text{s}$.

Em boa parte dos casos, a força aplicada não é constante. Como no caso do cálculo do trabalho de uma força variável (ver Seção 3.1), se olharmos para o gráfico da força aplicada em função do tempo, podemos calcular o impulso como sendo numericamente igual à área sob a curva, como ilustra a Figura 3.15.

Figura 3.15 | No gráfico da força em função do tempo, a área sombreada é numericamente igual ao impulso, além disso, podemos obter um valor para a força média



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta condição, podemos obter um valor de força média \vec{F}_m através da divisão:

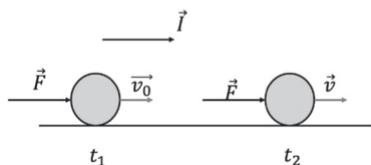
$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\Delta t}.$$

Um resultado importante da grandeza impulso é que este é igual à variação do momento linear do corpo, chamado de teorema impulso-momento linear:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} \rightarrow \vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}.$$

Perceba que as unidades de medida em ambos os lados da equação são iguais. A Figura 3.16 ilustra a aplicação de uma força constante em um corpo de massa m , com a variação de sua velocidade.

Figura 3.16 | A variação do momento linear de um sistema é igual ao impulso aplicado pela força externa



Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Em um sistema físico, um corpo de massa 5 kg incide sobre uma superfície horizontal, com o vetor velocidade:

$$\vec{v}_1 = (2\hat{i} - 5\hat{j}) \text{ m/s}.$$

Depois da colisão com a parede, o vetor velocidade tem configuração:

$$\vec{v}_2 = (5\hat{i} + 7\hat{j}) \text{ m/s}.$$

Se o tempo de contato entre a parede e o corpo é de **1 ms**, encontre as componentes do vetor força média.

Resolução:

Esse tipo de problema é padrão para resolução com o teorema impulso-momento linear:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} \rightarrow \vec{F} \Delta t = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Substituindo os vetores velocidade e os valores de massa e tempo, temos a seguinte relação para a força média:

$$\begin{aligned} \vec{F}(1 \cdot 10^{-3} \text{ s}) &= (5 \text{ kg})[(5\hat{i} + 7\hat{j}) \text{ m/s} - (2\hat{i} - 5\hat{j}) \text{ m/s}], \\ \vec{F} &= (5 \cdot 10^3 \text{ kg/s})[(5\hat{i} + 7\hat{j}) \text{ m/s} - (2\hat{i} - 5\hat{j}) \text{ m/s}], \\ \vec{F} &= (15\hat{i} + 60\hat{j}) \text{ kN}. \end{aligned}$$



Refleta

Dois corpos com massa m e $2m$ têm o mesmo módulo de momento linear. A fim de conseguir pará-los, uma pessoa aplica uma mesma força em módulo em cada um. O que podemos dizer sobre o tempo de parada de cada um?

Conservação do momento linear

Olhando para o conceito de impulso, podemos nos perguntar o seguinte: “e se a força externa aplicada no sistema for nula?” Neste caso, o impulso será nulo e, portanto, o momento linear não sofre alteração:

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p} = 0 .$$

Então, o momento linear inicial do sistema será igual ao final, de forma que esta grandeza é conservada. O princípio de conservação do momento linear prediz que se não há forças externas que agem no sistema, o momento linear não pode variar. Estes sistemas são chamados de isolados, em que vale a expressão:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} .$$

Um cuidado que devemos ter com este princípio de conservação é a natureza vetorial desta grandeza. Em um sistema isolado tridimensional, o momento linear é conservado nas três direções do espaço, o que nos leva a três equações de conservação. Por exemplo, durante a queda livre de um objeto há apenas a ação da força peso na direção y , enquanto na x e z não há forças atuantes. Então, apenas nas direções x e y é válida a conservação do momento linear.



Assimile

Em sistemas isolados, ou seja, sem a ação de forças externas, o momento linear do sistema é conservado. Dessa forma: $\vec{p}_0 = \vec{p}$



Pesquise mais

Uma pessoa em repouso está posicionada em cima de um carrinho que pode deslocar-se livremente sobre uma superfície plana. Em determinado momento, a pessoa (30 kg) lança uma bola de tênis (200 g) na direção horizontal, de forma que o impulso gerado pela pessoa move o carrinho na direção contrária a da bolinha, com velocidade de 0,05 m/s na direção horizontal. Desprezando a massa do carrinho e a ação do atrito ou de forças externas na direção horizontal, qual será a velocidade da bolinha?

Resolução

Para melhor visualizar o problema, podemos representar a situação descrita no enunciado pela Figura 3.17.

Figura 3.17 | Representação do problema apresentado no item Exemplificando



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/fp58KR>>; <<https://goo.gl/xyBZdY>>. Acesso em: 25 jun. 2017.

Como não há forças externas ao sistema, o momento linear é conservado de forma que:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0.$$

No início do movimento, a velocidade do sistema é nula, o que torna o momento linear inicial nulo. Depois do lançamento, podemos trabalhar com a equação:

$$\vec{p} = 0 \rightarrow m_B \vec{v}_B + m_p \vec{v}_p = 0.$$

A orientação positiva foi escolhida no sentido da velocidade da bolinha. Com os valores numéricos, temos que:

$$(0,2 \text{ kg}) v_B \hat{i} + (30 \text{ kg})(-0,05 \hat{i}) \text{ m/s} = 0 \rightarrow \vec{v}_B = (7,5 \hat{i}) \text{ m/s}.$$

Formulação das leis de Newton com o conceito de momento linear

Você já conhece as leis da dinâmica com base no livro *Principia*, escrito por Issac Newton. A descrição da primeira lei segue o texto de Newton, porém, a segunda e a terceira lei são interpretações possíveis deste trabalho, com algumas simplificações.

No texto do *Principia*, a força resultante que atua sobre um corpo é igual à variação temporal do momento linear. Isso nos permite escrever:

$$\vec{F}_r = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Substituindo o momento linear pela definição e adotando que a massa é constante, temos que:

$$\vec{F}_r = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} \rightarrow \vec{F}_r = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

A variação temporal da velocidade corresponde à aceleração, dessa forma, encontramos a expressão habitual da segunda lei:

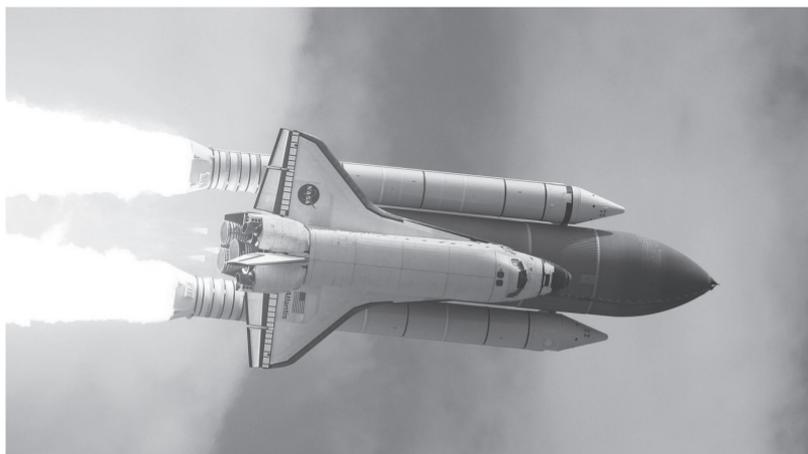
$$\vec{F}_r = m\vec{a}.$$

Com o conceito de momento linear, podemos estender as aplicações das leis de Newton para os casos em que a massa é variável. Como exemplo, podemos citar o lançamento de um foguete espacial, composto pela nave, em que são levados os tripulantes, o motor e o tanque de combustível de cada estágio do lançamento. À medida que os tanques são esvaziados, eles são ejetados da estrutura, como forma de não tornar-se carga desnecessária.

Note que nesse complexo sistema a aceleração é possível por causa da existência de *forças internas*, como as forças de contato entre os diferentes corpos que compõem o sistema. Como a força resultante compreende forças internas e externas, a cada força de contato há uma força de resposta no sentido oposto, configurando-se um par ação-reação.

Voltando ao exemplo do foguete espacial, os motores de propulsão utilizam o combustível de maneira explosiva, ejetando o gás em alta velocidade. Essas partículas de gás colidem contra a estrutura metálica do foguete, gerando forças internas e permitindo a aceleração do conjunto. De todo modo, podemos realizar a análise de maneira muito mais simples, considerando somente a conservação do momento linear do sistema gás + *foguete*.

Figura 3.18 | Os foguetes espaciais são bons exemplos para explicar as leis de Newton pela formulação com o conceito de momento linear

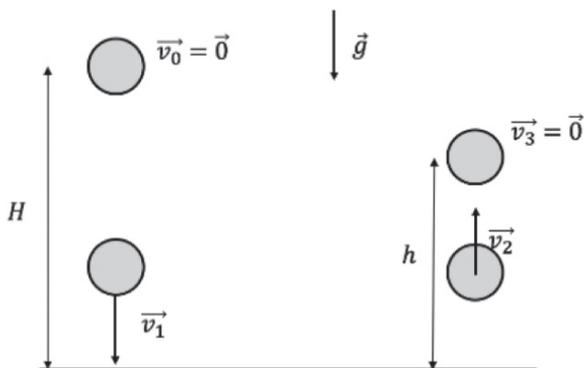


Fonte: <<https://goo.gl/15XP6r>>. Acesso em: 25 jun. 2016.

Sem medo de errar

No começo da seção, você foi colocado no lugar de um professor de Física em uma escola que possui recursos tecnológicos e que está pensando em uma atividade para calcular a variação do momento linear de um corpo. Então, nesta etapa, você está preparando a sequência de atividades e realizando os cálculos previamente. Para isso, você escolheu uma situação de queda livre de uma bolinha a partir de uma altura H , e depois da primeira batida no solo, a bolinha sobe até uma altura h . Precisamos encontrar a variação do momento linear da bolinha. A Figura 3.19 ilustra uma possível representação da situação.

Figura 3.19 | Representação gráfica da situação apresentada no item Sem medo de errar



Fonte: elaborada pelo autor.

Na descida, podemos utilizar a equação de Torricelli para obter a velocidade do corpo na iminência de chegar ao chão:

$$|\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_0|^2 - 2|\vec{g}|\Delta y \rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{2|\vec{g}|H}.$$

Na subida, podemos encontrar de forma análoga:

$$|\vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{g}|\Delta y \rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{2|\vec{g}|h}.$$

Observe que a orientação positiva foi escolhida na direção vertical para cima. A variação da quantidade de movimento da bolinha pode ser escrita como:

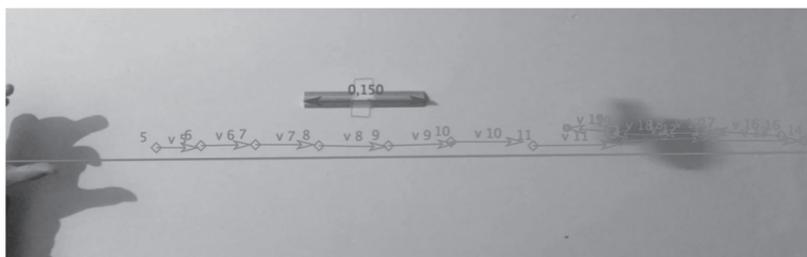
$$\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Com as expressões para velocidade, o módulo do momento linear será:

$$\Delta \vec{p} = m\sqrt{2|\vec{g}|H} \hat{j} - m\sqrt{2|\vec{g}|h} (-\hat{j}) \rightarrow |\Delta \vec{p}| = m\sqrt{2|\vec{g}|}(\sqrt{h} + \sqrt{H}).$$

Para ajudar na preparação da aula, você resolveu realizar a filmagem da queda livre de uma bolinha de determinada altura. Com o software Tracker, você pode obter os dados necessários, desde que haja um comprimento de referência no vídeo. Na Figura 3.20 há um exemplo de filmagem para a queda da bolinha, com os pontos da trajetória, além da indicação do vetor velocidade.

Figura 3.20 | Exemplo de vídeo de queda de uma bolinha, com as marcações da trajetória e velocidade do corpo produzida pelo software Tracker



Fonte: elaborada pelo autor.

No programa é possível marcar as posições do corpo, à medida que o vídeo segue. Com a referência de métrica da régua, marcada em azul, podemos obter o valor numérico da posição. Neste vídeo de exemplo, temos como valores para altura:

$$H = 0,974 \text{ m}; h = 0,458 \text{ m}.$$

Conhecendo estes valores, podemos calcular a variação do momento linear da bolinha, considerando que a massa é de 57 g:

$$|\Delta \vec{p}| = (57 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \sqrt{2(10 \text{ m/s}^2)(\sqrt{0,458 \text{ m}} + \sqrt{0,974 \text{ m}})} \rightarrow |\Delta \vec{p}| = 0,42 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Além de fornecer os valores de comprimento, podemos obter tabelas com as velocidades e o momento linear em cada ponto de trajetória. Escolhendo um instante antes da chegada ao chão e um pouco depois de começar a subir, temos os seguintes valores calculados pelo o programa:

$$\vec{p}_2 = 0,188 \hat{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad \vec{p}_1 = -0,196 \hat{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Então, a variação do momento linear é calculada por:

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}_2| - |\vec{p}_1|$$

Com os valores numéricos, teremos:

$$|\Delta \vec{p}| = (0,188 + 0,196) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \rightarrow |\Delta \vec{p}| = 0,38 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

A diferença entre os valores pode ser causada pela perda de energia no sistema, ou ainda pelo tipo de colisão que ocorre neste caso. Estes detalhes serão trabalhados na próxima seção. Neste tipo de atividade é possível interligar procedimentos teóricos e de construção matemática com uma sequência prática, que vai motivar os estudantes.

Com essas informações, você pode construir um plano de aula detalhado. Que outra prática ou conceito você incluiria no plano de aula, para tornar a atividade ainda mais interessante?

Avançando na prática

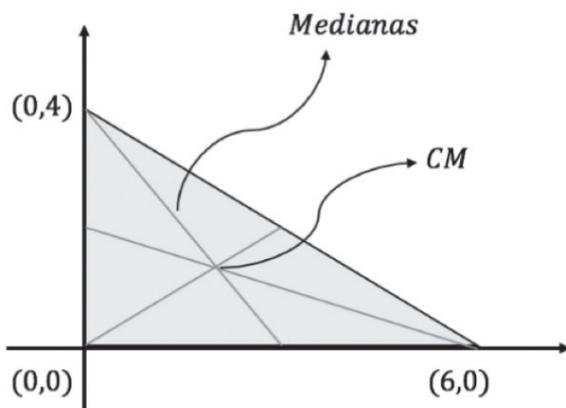
Determinar o centro de massa de um triângulo

Descrição da situação-problema

Em alguns casos simples, o centro de massa pode ser obtido por argumentos geométricos. Por exemplo, o centro de massa de um triângulo construído com material homogêneo é o ponto de encontro das três medianas. Da geometria analítica, a mediana é o segmento de reta que une o ponto médio de um lado com vértice oposto.

Nesta atividade, você propôs aos seus alunos um desafio: encontrar a posição de centro de massa de um triângulo retângulo e depois testar esta solução na prática. Na Figura 3.21 é apresentado um triângulo retângulo com valores numéricos, para calcularmos o centro de massa. Então, você recortou um triângulo retângulo em um papelão e conseguiu desenhar as medidas com o uso de uma régua, mas você desafiou os estudantes a obterem este ponto por argumentos matemáticos. Como você esquematizaria este cálculo? Quais passos são necessários?

Figura 3.21 | Triângulo retângulo utilizado nesta atividade para calcular o centro de massa



Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

O centro de massa é obtido pelo encontro das medianas. Então, vamos obter pelo menos duas equações das retas medianas e encontrar a intersecção entre elas. A equação de uma reta é obtida pela forma geral:

$$y = ax + b.$$

Em que a é o coeficiente angular da reta, calculado pela variação da ordenada sobre a variação da abscissa, e b é o coeficiente linear, ponto que cruza o eixo das ordenadas. Primeiro, vamos considerar o lado do triângulo paralelo ao eixo vertical. A reta mediana deve passar pelos pontos $(0,2)$ e $(6,0)$. Então, o coeficiente angular será:

$$a_1 = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}.$$

E pelo gráfico, $b_1 = 2$. Logo, a equação dessa reta será:

$$y_1 = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Para a reta paralela ao eixo horizontal, os pontos da mediana devem ser: $(3,0)$ e $(0,4)$. Então, o coeficiente linear dessa reta será:

$$a_2 = \frac{4-0}{0-3} \rightarrow a_2 = -\frac{4}{3}.$$

E pelo gráfico, $b_2 = 4$. A equação dessa reta será:

$$y_2 = -\frac{4}{3}x + 4.$$

A intersecção dessas retas permite obter o valor da abscissa do centro de massa:

$$y_1 = y_2 \rightarrow -\frac{1}{3}x + 2 = -\frac{4}{3}x + 4 \rightarrow x = 2.$$

A ordenada é obtida pela substituição deste valor de x em alguma das equações:

$$y_{cm} = -\frac{1}{3}(2) + 2 \rightarrow y_{cm} = \frac{4}{3}.$$

Então, encontramos que as coordenadas do centro de massa serão:

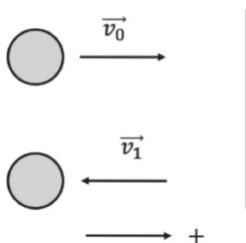
$$r_{cm} = \left(2, \frac{4}{3}\right).$$

Para testar, basta pedir que os estudantes localizem este ponto sobre o triângulo e, depois, tentem equilibrá-lo com os dedos, dando suporte exatamente sobre o ponto. Assim, você elaborou uma aula interessante, com componente prática, além de multidisciplinar, envolvendo conceitos de Matemática.

Faça valer a pena

1. Uma bola de massa 2 kg é lançada contra a parede, com velocidade de 20 m/s e direção horizontal, retornando no sentido contrário, com velocidade de 20 m/s. A situação descrita é apresentada na figura a seguir, com as indicações dos vetores.

Figura | Representação do antes e depois da colisão de uma bola contra a parede



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nestas informações, o vetor que representa a variação do momento linear da partícula será:

- a) $\Delta \vec{p} = (0\hat{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- b) $\Delta \vec{p} = (40\hat{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- c) $\Delta \vec{p} = (-20\hat{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- d) $\Delta \vec{p} = (-80\hat{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- e) $\Delta \vec{p} = (100\hat{i}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

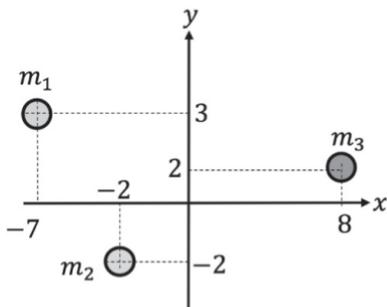
2. Uma pessoa de massa 60 kg pula sobre uma cama elástica de uma academia durante uma atividade física. A velocidade inicial da pessoa é nula e ela cai livremente pela altura de 45 cm e o tempo de contato da pessoa com a cama elástica é 3 ms. Depois do contato com cama elástica, ela sobe até 80 cm.

Qual será o módulo da força média efetuada pela cama elástica?

Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 100 kN.
- b) 120 kN.
- c) 130 kN.
- d) 140 kN.
- e) 180 kN.

3. Na figura a seguir, corpos de massa $m_1 = 2,0 \text{ kg}$, $m_2 = 3,0 \text{ kg}$ e $m_3 = 5,0 \text{ kg}$ estão dispostos em um plano orientado.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nessas informações, quais serão as coordenadas do centro de massa do sistema, em unidades do SI?

- a) (3,1).
- b) (1,2).
- c) (2,1).
- d) (2,2).
- e) (-1,2).

Seção 3.3

Colisões

Diálogo aberto

Você já deve ter participado de um jogo de sinuca ou assistido a um, também conhecido como bilhar. Neste jogo, uma bola branca deve colidir com as outras bolas, de forma a derrubá-las em algum dos seis buracos, chamados de caçapas, dispostos na mesa. Nos jogos mais simples, quem derrubar a maior quantidade de bolas vence, mas em casos mais elaborados são escolhidas sequências de bolas que devem ser encaçapadas.

Este é um excelente exemplo de situação prática que pode ser levado para sala de aula, para ilustrar os conceitos de conservação da energia mecânica e do momento linear. Assim, vamos usar este tema para nortear nossas atividades.

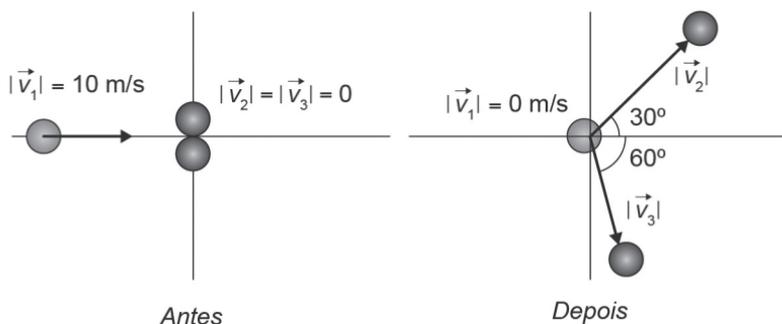
Lembre-se de que você está na situação de um professor de Física de uma escola com recursos tecnológicos disponíveis, e procura utilizar diferentes materiais e programas para melhorar as atividades pedagógicas. Aproveitando o exemplo do jogo de bilhar, vamos procurar uma aplicação para o simulador chamado de Laboratório de Colisões, desenvolvido pelo *Phet*, disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/collisionlab>. Acesso em: 20 jun. 2017. Nele é possível simular colisões em uma dimensão, quando não há alteração na direção do movimento, e colisões bidimensionais, em que os corpos passam a movimentar-se em direções diferentes após o choque.

Nesta seção, vamos trabalhar com as características de uma colisão, analisando a conservação do momento linear e da energia em cada caso. Ao fim, teremos argumentos matemáticos para trabalhar com a direção da velocidade dos objetos envolvidos em uma colisão, antes e depois desta ocorrer.

Após uma discussão em sala de aula, os alunos propõem que seja analisada a seguinte situação: uma bola contra outras duas que estão paradas, de modo que a bola que incide mantenha-se em repouso. Na Figura 3.22 há uma representação da situação, com as informações quanto à direção do vetor velocidade após

a colisão. A princípio, iremos supor que as massas das bolas são idênticas. Essa situação é possível?

Figura 3.22 | Representação da colisão bidimensional de três bolinhas de bilhar de mesma massa



Fonte: elaborada pelo autor.

Durante os trabalhos da seção, realize a seguinte reflexão: como podemos montar uma sequência didática para resolver este problema? Como a interação com o simulador Laboratório de Colisões pode ajudar a entender a situação física apresentada e avaliar os resultados numéricos obtidos na resolução?

Não pode faltar

Colisões

A definição de colisão mecânica é bem abrangente e envolve desde acidentes automobilísticos até uma “raquetada” contra uma bola. Na maioria dos casos em que analisamos uma colisão, veremos que as forças de impacto (internas ao sistema) são significativamente maiores do que as forças externas. Desta forma, em um pequeno intervalo de tempo, este sistema pode ser considerado como sendo um sistema isolado, ou seja, podemos aplicar o princípio de conservação do momento linear para calcular as velocidades dos corpos após a colisão.

Algo que devemos nos atentar é que a colisão não exige o contato macroscópico entre os corpos, como no caso das bolinhas de bilhar, ou ainda entre os carros, mas sim uma força de interação de alta intensidade em curto período de tempo.

As colisões podem ser divididas em três etapas: a **aproximação**, a **interação** e o **afastamento**. Na primeira fase, os corpos se aproximam espacialmente, enquanto na fase de afastamento eles se afastam do ponto de contato entre eles. Nestas fases é importante conhecer as velocidades de cada corpo, a fim de permitir classificar a colisão.

Na fase de interação, em que ocorre efetivamente o choque, os corpos trocam forças, promovendo a transformação da energia mecânica em energia potencial elástica, o que provoca uma **deformação** do corpo. Depois, na parte de **restituição**, a energia potencial é novamente convertida em energia cinética. Porém, em muitos casos, essa transformação de energia não é completamente efetuada, já que uma parte é dissipada (principalmente na forma de calor e som).

Na Figura 3.23 são apresentadas as fases de aproximação e afastamento de dois corpos que sofrerão uma colisão. Com os valores do vetor velocidade antes do choque, podemos definir a **velocidade relativa de aproximação** (\vec{v}_{ap}) pela expressão:

$$\vec{v}_{ap} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Em que \vec{v}_1 e \vec{v}_2 representam as velocidades de aproximação dos corpos 1 e 2. Depois do choque, a **velocidade relativa de afastamento** (\vec{v}_{af}), pela expressão:

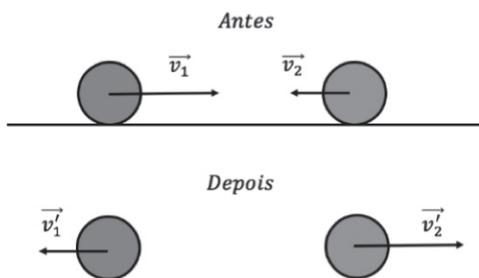
$$\vec{v}_{af} = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1.$$

Em que \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 representam as velocidades de afastamento de cada corpo.

Com estes valores, podemos calcular o chamado **coeficiente de restituição (e)**, dado pela razão entre os módulos da velocidade de afastamento e aproximação:

$$e = \frac{|\vec{v}_{af}|}{|\vec{v}_{ap}|} \rightarrow e = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}.$$

Figura 3.23 | Ilustração da fase de aproximação e afastamento de dois corpos que sofreram colisão unidimensional



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que o coeficiente de restituição é um valor adimensional. Este valor depende de características dos corpos, como sua dimensão e de que materiais são constituídos.

Analisando a expressão de e , podemos apresentar três situações possíveis:

I. A velocidade de afastamento e aproximação são iguais, ou seja, $|\vec{v}_{af}| = |\vec{v}_{ap}|$ e, então, o coeficiente de restituição $\mathbf{e = 1}$. Esse tipo de colisão é classificada como **elástica**.

II. A velocidade de afastamento é menor do que a de aproximação, o que torna a relação de velocidade $|\vec{v}_{af}| < |\vec{v}_{ap}|$ e, então, o coeficiente de restituição terá valor $0 < \mathbf{e} < 1$. Este tipo de colisão é classificada como parcialmente **elástica**.

III. A velocidade relativa de afastamento é nula $|\vec{v}_{af}| = 0$, de forma que o coeficiente de restituição será $\mathbf{e = 0}$. Neste caso extremo, a colisão é classificada como **inelástica**.

Estas relações com as velocidades serão importantes para discutir as transformações de energia nestes sistemas.

Colisões elásticas

Nas colisões elásticas, o sistema em estudo apresenta apenas a ação de forças conservativas. Relembrando o teorema trabalho-energia cinética, a ausência de trabalho realizado pela força externa faz com que a variação da energia cinética seja nula. Esta é a principal característica de colisões elásticas: a conservação da energia cinética do sistema:

$$K_{\text{antes}} = K_{\text{depois}}.$$

Ainda utilizando a Figura 3.23 como base para este caso de colisão unidimensional, podemos trabalhar esta expressão massas m_1 e m_2 :

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v'_2)^2}{2} \rightarrow m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_2 (v'_2)^2 + m_1 (v'_1)^2,$$

$$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v'^2_2 - v_2^2) \rightarrow m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2).$$

Durante a colisão, admitimos que este sistema é isolado, ou seja, a conservação de momento linear é válida, ou seja: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$. Arrumando esta expressão de forma útil, encontramos:

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2).$$

Ao dividirmos a expressão da energia cinética pela obtida anteriormente, teremos:

$$\frac{m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1)}{m_1 (v_1 - v'_1)} = \frac{m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2)}{m_2 (v'_2 - v_2)} \rightarrow (v_1 + v'_1) = (v'_2 + v_2).$$

Separando os termos de antes e depois da colisão, temos:

$$v'_1 - v'_2 = v_2 - v_1 \rightarrow \frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} = 1.$$

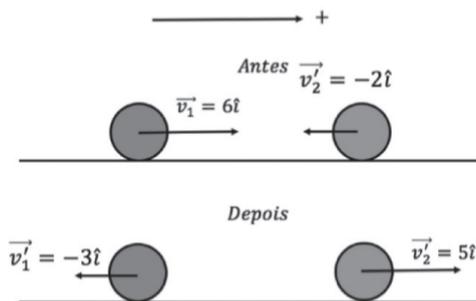
Alguns detalhes desta demonstração são importantes: este movimento é do tipo unidimensional. Note também que a fração obtida nesta dedução é igual ao coeficiente de restituição (e) já apresentado. Então, o valor 1 para as colisões elásticas pode ser obtido por uma explicação fenomenológica da colisão, ou ainda como um resultado da junção das equações da conservação do momento linear e da energia cinética.

Na prática, colisões elásticas são pouco prováveis de acontecer em sistemas macroscópicos, pois é muito difícil eliminar completamente a ação de forças dissipativas. Um possível exemplo é o jogo de bilhar, em que as bolas são feitas de plástico ou resina, que se comportam muito bem nas fases de deformação e restituição, diminuindo a ação de forças resistivas.

Na Figura 3.24 há um exemplo de colisão em que as velocidades indicadas levam a classificá-lo como elástica. Com os valores da figura, podemos calcular a velocidade de aproximação e afastamento:

$$e = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{|-3\hat{i} - 5\hat{j}|}{|-2\hat{i} - 6\hat{j}|} = \frac{|-8\hat{j}|}{|-8\hat{j}|} = 1.$$

Figura 3.24 | Exemplo de valores numéricos para uma colisão elástica



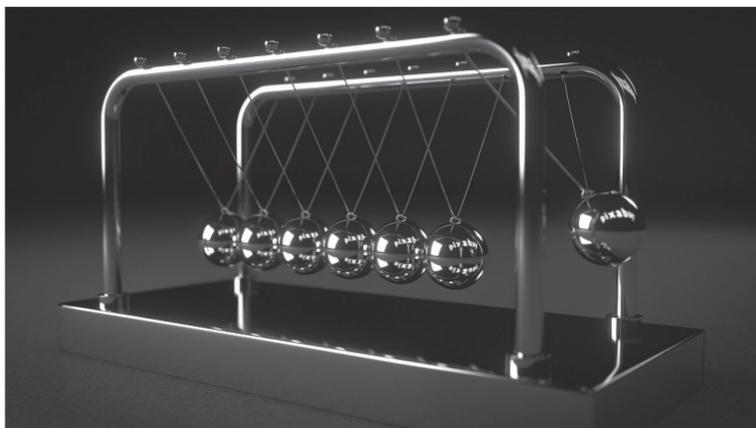
Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

Nos livros tradicionais de Física é comum ser apresentado o chamado Pêndulo de Newton (Figura 3.25), composto por várias bolinhas metálicas amarradas em um fio, formando uma fila. Ao soltarmos uma das bolinhas de determinada altura nas extremidades, o movimento será propagado por todas até chegar na extremidade oposta, fazendo com que a última se erga e recomece o movimento. Como você explicaria este experimento com a conservação da energia e do momento linear? Em alguma condição este movimento será perpétuo?

Figura 3.25 | Foto do pêndulo de Newton, muito utilizado para ilustrar a conservação da energia mecânica e do momento linear



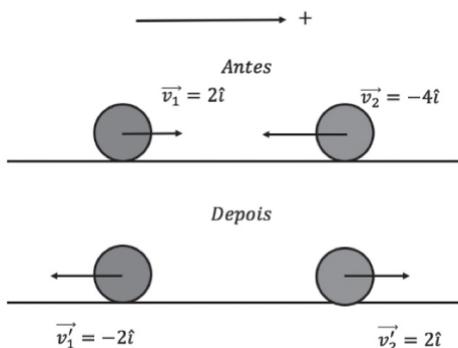
Fonte: <<https://goo.gl/Ro5s2a>>. Acesso em: 24 jun. 2017.

Colisões parcialmente elásticas

Nas colisões parcialmente elásticas ocorrem perdas de energia no sistema durante as fases de deformação e restituição. Dessa forma, a energia cinética do sistema não é conservada, o que implica em um coeficiente de restituição com um valor entre 0 e 1. Apesar disso, podemos aplicar a conservação do momento, a fim de encontrar a velocidade dos corpos após a colisão.

Na Figura 3.26 há um exemplo de uma colisão em que as velocidades indicadas nos permitem classificá-lo como parcialmente elástico.

Figura 3.26 | Exemplo de uma colisão em que as velocidades indicadas nos permitem classificá-lo como parcialmente elástico



Fonte: elaborada pelo autor.

Com os valores na figura, teremos:

$$e = \frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{|2\hat{i} - (-2\hat{i})|}{|2\hat{i} - (-4\hat{i})|} = \frac{|4\hat{i}|}{|6\hat{i}|} \rightarrow e \cong 0,67.$$



Exemplificando

Em um jogo de discos é efetuada uma colisão entre um disco de massa 2 kg e outro de 3 kg, classificada com parcialmente elástica com coeficiente de restituição no valor de 0,8. No início do jogo, a velocidade do corpo de menor massa é de 5 m/s para a direita, enquanto o outro tem velocidade de 3 m/s para esquerda. Desprezando a ação de outras forças, qual será a velocidade dos corpos após a colisão?

Resolução: Primeiro, vamos escrever a equação da conservação do momento linear para este sistema, considerando como positivo os vetores para a direita. Com as informações da massa e da velocidade teremos:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2,$$

$$(2 \text{ kg})(5 \text{ m/s}) - (3 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) = (2 \text{ kg})v'_1 + (3 \text{ kg})v'_2$$

$$2v'_1 + 3v'_2 = 1.$$

Em que as unidades foram suprimidas para facilitar os cálculos. Observe que não é possível resolver essa equação por termos duas incógnitas. Então, vamos usar a informação do coeficiente de restituição para obter uma segunda equação:

$$e = \frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_1 - v_2|} \rightarrow 0,8 = \frac{v'_2 - v'_1}{8} \rightarrow v'_2 - v'_1 = 6,4.$$

Uma possível solução para o sistema seria isolar a velocidade final do corpo 2 na segunda equação e substituir na primeira, de forma que:

$$v'_2 = 6,4 + v'_1 \rightarrow 2v'_1 + 3(6,4 + v'_1) = 1.$$

Aplicando as propriedades distributivas, encontramos que a velocidade final do corpo 1 será:

$$5v'_1 + 19,2 = 1 \rightarrow v'_1 = \frac{-18,2}{5} = -3,64 \text{ m/s}.$$

Em que o sinal de menos implica o corpo estar movendo-se para a esquerda, no referencial adotado. A velocidade do corpo 2 será:

$$v'_2 = 6,4 + v'_1 \rightarrow v'_2 = 6,4 - 3,64 = 2,76 \text{ m/s}.$$

Em que o sinal positivo indica que este se move para a direita.

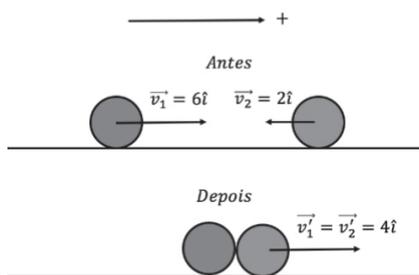
Colisões inelásticas

Nas colisões inelásticas o coeficiente de restituição é nulo. Aplicando esta condição à expressão de e :

$$e = \frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_1 - v_2|} = 0 \rightarrow |v'_2 - v'_1| = 0.$$

Dessa forma, a velocidade relativa entre os corpos após a colisão deve ser nula. Duas formas de obter esta condição são: se os corpos entrarem em repouso após a colisão ou se eles permanecerem colados, com a mesma velocidade final. A Figura 3.27 ilustra uma situação em que o choque é inelástico.

Figura 3.27 | Representação de um choque inelástico



Fonte: elaborada pelo autor.

$$e = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{|4\hat{i} - 4\hat{i}|}{|-2\hat{i} - 6\hat{i}|} = \frac{|0\hat{i}|}{|-8\hat{i}|} = 0.$$

Nestas colisões, a perda de energia é máxima no sistema. Um exemplo de colisão inelástica é a que ocorre com carros. Eles foram projetados para absorver a maior parte da energia da colisão na deformação da carroceria, que é permanente.



Assimile

O estudo das colisões pode ser sistematizado no seguinte quadro:

Quadro 3.1 | Classificação dos choques

Classificação	Coefficiente de restituição (e)	Conservação do momento Linear ($\Delta \vec{p} = 0$)	Conservação da energia cinética $\Delta K = 0$
Elástica	1	Conservação	Conservação
Parcialmente elástica	$0 < e < 1$	Conservação	Perdas parciais
Inelástica	0	Conservação	Perda máxima

Fonte: elaborado pelo autor.

Colisões Bidimensionais

Na discussão apresentada até agora, trabalhamos com sistemas unidimensionais, em que não há mudança na direção dos objetos após a colisão. Porém, a classificação das colisões em elástica,

parcialmente elástica e inelástica pode ser estendida para sistemas bidimensionais e tridimensionais.

Primeiro vamos recuperar a discussão sobre a independência dos eixos proposta por Galileu Galilei. Com este princípio, podemos trabalhar com as direções do movimento de forma independente, elaborando equações de movimento separadas.

Na seção anterior foi apresentada a conservação do momento linear, na forma vetorial:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p} = \vec{p}' .$$

Nesta seção, iremos decompor os vetores momento linear na direção vertical e horizontal, de forma que:

$$p_x \hat{i} + p_y \hat{j} = p'_x \hat{i} + p'_y \hat{j} .$$

Pela igualdade das grandezas vetoriais, as componentes do momento linear devem ser iguais:

$$p_x = p'_x, \quad p_y = p'_y .$$

Então, em cada questão iremos decompor os vetores velocidade nestas direções para que a conservação do momento linear seja aplicada independentemente.



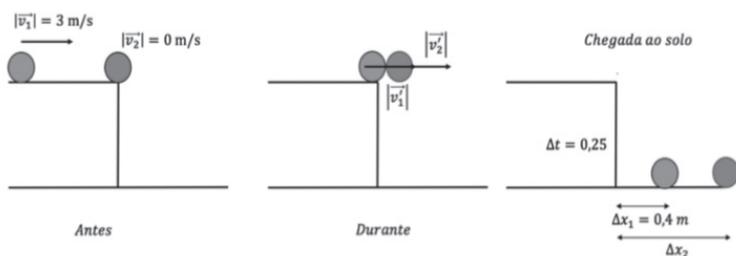
Exemplificando

Durante uma aula de laboratório, um grupo de alunos elaborou a montagem com duas bolas de massa $m_1 = 8 \text{ kg}$ e $m_2 = 2 \text{ kg}$, de maneira que a bola de maior massa colida com a de menor massa, que está em repouso na ponta da mesa. Após a colisão, a bola 1 passa a descrever um movimento parabólico caindo a 40 cm do pé da mesa, depois de 0,25 s de movimento, enquanto a bola 2 descreve outra parábola, caindo a uma distância maior que a primeira. Com base nessas informações, podemos afirmar que o ponto de queda da bola 2 será:

Resolução

Com a descrição apresentada no enunciado, podemos gerar a representação presente na Figura 3.28.

Figura 3.28 | Representação da colisão de duas bolas que após abandonarem a mesa efetuam movimentos parabólicos



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso colabora na identificação das grandezas conhecidas e permite obter algumas relações úteis. No momento da colisão, podemos admitir que este movimento é unidimensional, então, a equação de conservação de movimento na direção horizontal será:

$$\overline{p}_{antes} = \overline{p}_{depois} \rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} .$$

Observe que a partícula 2 está em repouso no início do movimento, assim, $v_{2x} = 0$. A velocidade final na direção horizontal da bola 1 pode ser encontrada com as informações do enunciado. Lembre-se de que nesta direção o movimento é do tipo uniforme, ou seja, com velocidade constante. Assim, podemos escrever:

$$v'_{1x} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{0,4 \text{ m}}{0,25 \text{ s}} = 1,6 \text{ m/s} .$$

Retornando à equação da conservação do momento linear, temos:

$$(8 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) = (8 \text{ kg})(1,6 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})v'_{2x}$$

$$v'_{2x} = \frac{11,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2 \text{ kg}} = 5,6 \text{ m/s} .$$

Então, para encontrar o alcance da segunda bola, lembramos que o tempo de queda para os corpos deve ser o mesmo. Considerando o movimento horizontal desta como uniforme:

$$v'_{2x} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \rightarrow \Delta x_2 = v'_{2x} \cdot \Delta t = (5,6 \text{ m/s}) \cdot (0,25 \text{ s}) = 1,4 \text{ m} .$$



Em alguns estudos sobre colisões é comum escolher como referencial o centro de massa do sistema, pois esse ponto também apresenta momento linear nulo. Dessa forma, as velocidades dos objetos são mais facilmente escritas, tornando a descrição de problemas com vários corpos mais simples. Há uma discussão sobre o tema no capítulo 8, *Colisões*, do livro a seguir, com a construção das equações de conservação e um exemplo resolvido.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 1.

Esta referência está disponível na sua biblioteca virtual com acesso gratuito: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-2618-3/cfi/264!/4/2@100:0.00>>. Acesso em: 14 jul. 2017.

Sem medo de errar

Lembre-se de que você é professor de Física em uma escola que possui recursos tecnológicos para incrementar suas atividades pedagógicas. Você propôs aos estudantes que trabalhassem na resolução de um problema de colisão bidimensional, apresentada na Figura 3.22, com uso da linguagem matemática e depois com simulador Laboratório de Colisões.

Primeiro vamos adotar uma sequência de resolução na forma tradicional, que permite aos estudantes aplicarem os conceitos de colisão de forma prática. Aqui, você pode dar espaço para que os alunos trabalhem, circulando entre eles e dando suporte para as dúvidas que surgirem.

Utilizando o princípio de independência de Galileu, podemos trabalhar com equações para a direção vertical e horizontal, separadamente. Para a direção horizontal no começo do movimento, temos apenas o momento linear da bola 1, porém, depois da colisão, as bolas 2 e 3 terão componentes projetadas nesta direção. Escolhendo a orientação do eixo horizontal como sendo positiva para a direita, temos:

$$\overline{p_{antes}} = \overline{p_{depois}} \rightarrow m \overline{v_1} = m \overline{v_2} \cos 30^\circ + m \overline{v_3} \cos 60^\circ.$$

Lembre-se de que as massas das bolas são iguais. Portanto:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \cos 30^\circ + |\vec{v}_3| \cos 60^\circ .$$

Na direção vertical, não há momento linear inicial, e no final da colisão os corpos 2 e 3 terão projeções do momento linear nesta direção. Adotando como positivo o eixo vertical para cima, teremos a seguinte equação:

$$|\vec{p}_{antes}| = |\vec{p}_{depois}| \rightarrow 0 = m|\vec{v}_2| \text{sen}30^\circ - m|\vec{v}_3| \text{sen}60^\circ .$$

Dessa forma, podemos montar um sistema de equações:

$$\begin{cases} |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \cos 30^\circ + |\vec{v}_3| \cos 60^\circ \\ |\vec{v}_2| \text{sen}30^\circ = |\vec{v}_3| \text{sen}60^\circ \end{cases} .$$

Com os valores numéricos:

$$\text{sen}30^\circ = \cos 60^\circ = 0,50 \quad , \quad \text{sen}60^\circ = \cos 30^\circ = 0,87 \quad .$$

Então, temos que:

$$\begin{cases} 10 = |\vec{v}_2| 0,87 + |\vec{v}_3| 0,50 \\ |\vec{v}_2| 0,50 = |\vec{v}_3| 0,87 \end{cases}$$

Substituindo este valor na primeira equação, teremos:

$$10 = 0,87 \left(\frac{0,87}{0,50} \right) |\vec{v}_3| + 0,50 |\vec{v}_3| \rightarrow 10 \cong 2,00 |\vec{v}_3| \rightarrow |\vec{v}_3| = 5,00 \text{ m/s} .$$

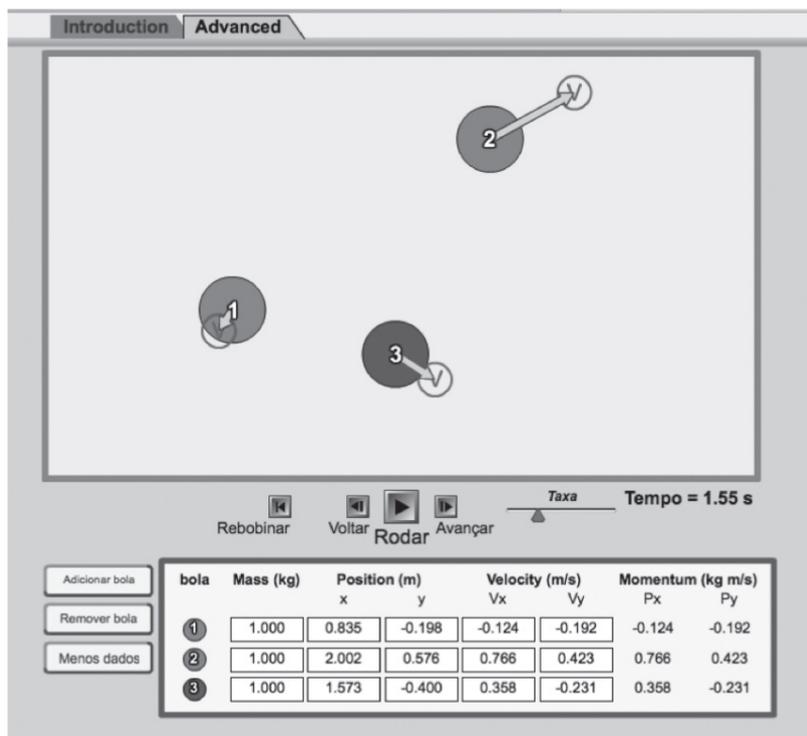
Com este valor, a velocidade do corpo 2 será:

$$|\vec{v}_2| = \frac{0,87}{0,50} 5,00 = 8,70 \text{ m/s} .$$

Depois deste trabalho algébrico, podemos utilizar o aplicativo para simular algumas situações com o aplicativo Laboratório de Colisões. Na guia *Advanced* é possível recriar o sistema apresentado neste problema. A Figura 3.29 apresenta uma tentativa, com os valores simulados para uma colisão entre as três bolinhas.

Em primeiro momento, percebemos que é não é possível criar uma colisão desse tipo se no momento do choque os centros dos corpos estiverem alinhados. Este desalinhamento entre os centros faz que haja momento linear nas direções vertical e horizontal.

Figura 3.29 | Simulação do problema apresentado produzido no aplicativo Laboratório de Colisões



Fonte: elaborada pelo autor.

Outra questão é a situação em que a bolinha 1 estará em repouso depois da colisão. Nas condições propostas pelos estudantes não é possível. A condição final teria uma energia cinética maior do que a condição inicial do sistema. Em uma condição um pouco mais real, teremos uma baixa velocidade para a esfera incidente e uma velocidade um pouco menor do que a obtida para as outras duas esferas, como indica o simulador. Verifique você mesmo este fato.

Este tipo de atividade permite que os alunos interajam com a tecnologia, mas sempre mediada por uma questão ou ainda por uma situação a ser resolvida. Isso evita que se perca o objetivo do uso da tecnologia educacional ou ainda provoque erros conceituais. Além disso, a facilidade do uso faz que os estudantes procurem por situações diferentes daquela proposta, oportunizando novas atividades.

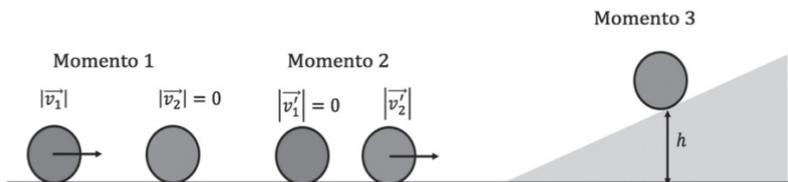
Revisando as conservações

Descrição da situação-problema

Nesta unidade foram apresentados dois importantes princípios de conservação: da energia mecânica e do momento linear. Além disso, o estudo de colisões é uma aplicação destes princípios, que podem ser aproveitados em diferentes questões. Então, agora, você é um professor que precisa encontrar uma atividade de revisão para os estudantes, com a condição que eles trabalhem em grupo. Então, procure em diferentes materiais por atividades que possam interligar esses conceitos, além de oferecer um desafio para os estudantes.

Então, você cria uma imagem como a apresentada na Figura 3.30, que contempla os temas desejados. Uma bolinha é lançada contra outra que se encontrava em repouso. Após a colisão, que pode ser elástica ou parcialmente elástica, a segunda bolinha irá deslocar-se até subir uma altura h de um plano inclinado.

Figura 3.30 | Exemplo de situação que pode ser utilizada para análise da conservação da energia mecânica com o momento linear



Fonte: elaborada pelo autor.

Para simular a resolução, podemos considerar os seguintes valores:

$$h = 20 \text{ cm}, m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg} \text{ e } |\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2.$$

Como podemos estimar a velocidade inicial da bolinha 1? Como você esquematizaria esta resolução?

Resolução da situação-problema

O objetivo é calcular a velocidade inicial do corpo 1. Considerando a ausência de forças dissipativas, a conservação da energia mecânica

permite obter a velocidade do corpo 2 no pé da rampa.

$$E_{m_i} = E_{m_f} \rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f.$$

No início do movimento há apenas energia cinética e no final apenas a energia potencial. Dessa forma:

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} = m_2 |\vec{g}| h \rightarrow v_2^2 = \sqrt{2|\vec{g}|h} \rightarrow v_2 = \sqrt{2(10\text{ m/s}^2)(0,2\text{ m})} = 2\text{ m/s}.$$

Então, para obter a velocidade do corpo 1 antes da colisão, aplicamos a conservação do momento linear:

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.$$

Com os valores numéricos, encontramos a velocidade do corpo 1 como:

$$(2\text{ kg})v_1 = (2\text{ kg})(2\text{ m/s}) \rightarrow v_1 = \frac{4}{2}\text{ m/s} = 2\text{ m/s}.$$

Esse tipo de questão exige diversas passagens e discussões, que podem ser realizadas nos grupos. Dessa forma, essa seria uma boa atividade para trabalhar com os alunos.

Faça valer a pena

1. Uma brincadeira tradicional das crianças é o jogo de bolinha de gude (também conhecida por bulica). Neste jogo, bolinhas de vidro são lançadas pelos jogadores e colidem entre si, com o objetivo de tirar outras bolinhas da área do jogo. O vidro é um material que fornece um bom coeficiente de restituição, de valor 0,9. A bolinha 1 tem massa de 50 g, e é lançada com velocidade de 2 m/s contra uma bolinha 2, de massa 75 g, que está em repouso. Depois da colisão unidimensional, as duas bolinhas movem-se em sentidos contrários.

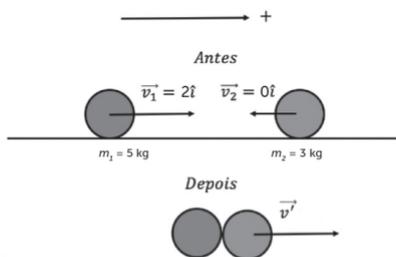
Nesta situação, podemos ter as seguintes afirmações:

- I. Esta colisão é classificada como elástica.
- II. A velocidade do corpo 1 tem módulo 0,28 m/s.
- III. A velocidade do corpo 2 tem módulo 1,20 m/s
- IV. A variação de energia cinética é de 11,4 mJ.

São corretas apenas as afirmativas:

- a) II e IV.
- b) I, II e III.
- c) II, III e IV.
- d) I e IV.
- e) III e IV.

2. No sistema apresentado na figura a seguir, temos a colisão de uma bolinha de massa 5 kg com velocidade de 2 m/s contra uma bolinha de massa de 3 kg, inicialmente em repouso. Após a colisão, as bolinhas passam a deslocar-se grudadas com uma velocidade v' .



Fonte: elaborada pelo autor.

Com base nestas informações, a perda de energia cinética do sistema será de:

- a) 2,25 J.
- b) 3,25 J.
- c) 3,75 J.
- d) 4,05 J.
- e) 4,45 J.

3. Em um experimento de colisões, um corpo de massa 1,5 kg e velocidade $\vec{v}_1 = (5\hat{i} + 2\hat{j})\text{ m/s}$ foi lançando contra um alvo em repouso, de massa 3 kg. Após a colisão, o corpo de maior massa desloca-se na direção horizontal e o corpo de menor massa tem um momento com um ângulo de 30° com a direção horizontal.

Após a colisão, o módulo do momento linear do corpo de maior massa será:

- a) $|\vec{p}| = 4,23 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- b) $|\vec{p}| = 5,19 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- c) $|\vec{p}| = 6,13 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- d) $|\vec{p}| = 7,14 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- e) $|\vec{p}| = 7,27 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da física**: mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2011. v. 1.

KELLER, F. J.; GETTYS, W.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1997. v. 1.

PHET. Laboratório de Colisões. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/collision-lab>. Acesso em: 20 jun. 2017.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 1.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I**: mecânica. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

Luz e óptica geométrica

Convite ao estudo

Nas unidades anteriores nos concentramos em estudar os conceitos da mecânica, com base nas grandezas força e energia. Agora, vamos trabalhar com os fenômenos luminosos.

A história da Física está repleta de discussões sobre o desenvolvimento das teorias, e certamente uma das mais complexas dentre elas é a evolução da nossa compreensão da natureza e do comportamento da luz. Essas discussões trazem argumentos de grandes nomes, como Isaac Newton e Christiaan Huygens, e posteriormente de James C. Maxwell desenvolvendo a teoria do eletromagnetismo e de Albert Einstein com a teoria da relatividade. Com isso, perceberemos a importância deste estudo.

Quando observamos nosso reflexo em um lago calmo, ou ainda quando pagamos uma conta com a leitura do código de barras, estamos visualizando fenômenos luminosos, estudados pelo campo da Física chamado de **óptica**. A facilidade em se encontrar fenômenos luminosos no cotidiano pode ser aproveitada durante as aulas para dar significado aos conceitos.

Nesta unidade, você deve se colocar no lugar de um professor de Física em uma escola que não possui muitos recursos de laboratório, mas isso não o impede de procurar alternativas para tornar mais significativa a aprendizagem dos alunos. Para trabalhar com os conteúdos de óptica geométrica de maneira desafiadora e interessante, você está planejando três atividades. Para ilustrar a propagação retilínea da luz, será realizada uma atividade para estimar a altura

de um monumento. Depois, para ilustrar a reflexão, será elaborada uma atividade sobre o campo visual de espelhos planos. Por fim, para que o conceito de refração seja bem compreendido pelos alunos, iremos determinar o índice de refração de líquidos, utilizando dados experimentais.

Para que você consiga cumprir sua tarefa como professor, nesta unidade estudaremos os conceitos básicos da óptica na Seção 4.1. Nas Seções 4.2 e 4.3, aprenderemos sobre os fenômenos básicos da luz: reflexão e refração. Além disso, estudaremos instrumentos ópticos básicos, como espelhos planos e esféricos e lentes. Vamos juntos nos dedicar ao estudo deste importante campo de conhecimento da Física?

Seção 4.1

Trajetória de um raio de luz

Diálogo aberto

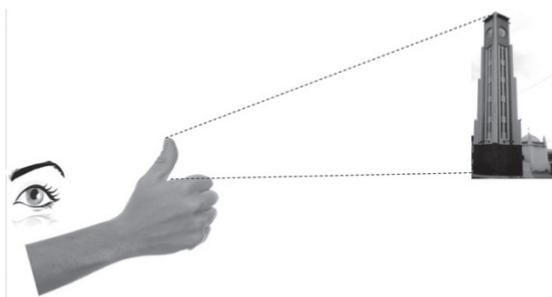
O que é a luz? Por que ela é tão rápida? É possível frear a luz? Você já deve ter feito ao menos uma dessas perguntas e provavelmente não encontrou uma resposta. Isso por que a luz é algo tão natural que discutir sobre sua natureza ou comportamento parece algo estranho. Você poderia citar um fenômeno luminoso que você acha interessante? São exemplos o arco-íris, o eclipse ou ainda o azul do céu diurno.

Todos os fenômenos citados são estudados com base nos princípios da óptica geométrica, que é o tema desta seção. Entender a essência destes princípios é importante para estudar fenômenos mais complexos e entender as aplicações tecnológicas que a óptica fornece. Como podemos realizar uma transposição didática deste tema de forma prática?

Lembre-se de que você foi colocado na posição de um professor de Física em uma escola que possui poucos recursos de laboratório. Sua tarefa agora é trabalhar com os princípios de óptica geométrica em sala de aula. Depois de uma pesquisa em diferentes materiais didáticos, você decidiu determinar a altura de um monumento por meio do conceito de ângulo visual. Para isso, você pensou em levar os estudantes para uma praça e, por meio de medidas de distâncias, estimar a altura de um monumento próximo.

O aluno deve se posicionar com boa visibilidade para o prédio, erguer seu polegar com o braço esticado e afastar-se até que o polegar esconda totalmente o monumento. A situação descrita está representada na Figura 4.1 a seguir.

Figura 4.1 | Representação da situação proposta para estimar a altura de um monumento



Fonte: adaptado de: <<https://goo.gl/yo8QBR>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

Depois devem ser efetuadas algumas medidas, como apresenta o Quadro 4.1.

Quadro 4.1 | Dados coletados na atividade prática para estimar a altura de um monumento

Descrição	Valor numérico
Distância do olho até o polegar	54 cm
Altura do polegar	6 cm
Altura da pessoa	1,75 m
Distância da pessoa até o monumento	162 m

Fonte: elaborado pelo autor.

Como estes dados nos ajudam a obter a altura do monumento? Esta seção apresentará os princípios da óptica geométrica e como a trajetória da luz é importante nesse caso. Dedique-se aos estudos e certamente você resolverá nosso desafio.

Não pode faltar

A **óptica** é o campo da Física responsável pelo estudo dos fenômenos relacionados à luz. Assim, o primeiro conceito importante é sobre natureza da luz. A mecânica quântica indica que a luz se comporta como onda ou como partícula, dependendo da situação analisada. Basicamente, classificamos a luz como partícula ou como onda, a depender do comportamento que ela apresentar durante sua interação com outros objetos.

Por exemplo, uma bolinha de tênis pode ser encarada como uma partícula, pois esta apresenta uma massa e tem dimensões espaciais que podem ser medidas. Após o impacto de uma raquete, ela se movimenta como um projétil e sua posição pode ser acompanhada como função do tempo.

O conceito de onda, que será melhor discutido em outro momento, é baseado na ideia de uma perturbação presente em um meio que se propaga, transportando energia de um ponto ao outro. São exemplos de ondas o som e as ondas do mar.

Seria a luz um conjunto de ondas ou um feixe de partículas? Esta separação clara é fruto de concepções da Física clássica, que foram alteradas pelas ideias da Física moderna. Esta discussão surge já no século XVII como um debate entre o inglês Isaac Newton e o holandês Christiaan Huygens. Newton propõe em seu tratado *Óptica*, que a luz é composta por partículas. Com muito trabalho ele aplicou os conceitos mecânicos da conservação do momento linear para explicar dois fenômenos luminosos básicos: a reflexão e a refração.

Neste tempo, Huygens estudava o comportamento das ondas e como poderiam ocorrer os processos de interação entre elas. No estudo da ondulatória, o chamado princípio de Huygens é essencial para compreender como se dá a propagação das ondas, além de possibilitar uma explicação para a reflexão e a refração. São importantes os trabalhos sobre a difração e interferência, do britânico Thomas Young, e sobre polarização, do francês Augustin Fresnel.

Os fenômenos de interferência e polarização acontecem exclusivamente com ondas. Assim, a teoria ondulatória da luz ganha força, à medida que possibilita o estudo de novos fenômenos. No final do século XIX, o também britânico James C. Maxwell constrói a teoria de que a luz é uma onda eletromagnética, que no vácuo viaja com uma velocidade c , de valor aproximado $c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Apesar do aparente sucesso da teoria ondulatória, o início do século XX guardava um novo capítulo para esta discussão. A explicação do chamado efeito fotoelétrico feita pelo alemão Albert Einstein estava baseada na noção de que a luz ao interagir com os elétrons comporta-se como partícula. Posteriormente, as partículas de luz foram chamadas de **fótons**. Com a evolução das ideias da mecânica quântica, a luz passou a ser encarada com

uma mescla do comportamento destas duas naturezas, como prevê a dualidade onda-partícula. Assim, a luz apresenta um comportamento dual, porém não podemos visualizar estes dois efeitos no mesmo experimento.



Pesquise mais

Uma descrição mais completa da história e filosofia da ciência sobre a teoria ondulatória e corpuscular da luz pode ser encontrada no texto *A evolução da teoria ondulatória da luz e os livros didáticos* (SILVA, 2007, p. 149-159).

Como você deve ter notado, o estudo da óptica passa por várias outras áreas de conhecimento e níveis de abstração. Então, é comum dividirmos este estudo em duas partes: a **óptica geométrica** e a **óptica física**. A primeira parte tem como preocupação a trajetória efetuada pelos raios de luz, prevendo por argumentos geométricos o comportamento da luz. Já a óptica física é mais elaborada, pois usa a notação matemática associada à formulação das ondas eletromagnéticas, além de equações do eletromagnetismo de Maxwell para descrever os fenômenos ondulatórios. Neste material nos concentraremos nos conceitos da óptica geométrica, por serem mais habituais ao ambiente do ensino médio.

A óptica geométrica baseia-se principalmente na definição básica de **raio de luz**. Um raio de luz é uma linha reta que representa a propagação retilínea de uma onda eletromagnética (onda de luz), indicando a direção e o sentido de propagação da luz. Um conjunto de raios de luz forma o chamado **feixe de luz**. As fontes de luz podem ser classificadas em termos da sua natureza, extensão espacial e composição. Quanto à natureza, as **fontes primárias** são os corpos que podem produzir sua própria luz, como o caso do sol, lâmpadas ou velas. Neste caso, há uma conversão de alguma forma de energia para a luminosa. Já as **fontes secundárias** refletem a luz proveniente de uma fonte primária. Por exemplo, a lua é uma fonte secundária, pois luz é originada da reflexão da luz do sol em sua superfície.

Quanto à extensão, uma fonte pontual é aquela em que as dimensões da fonte são desprezíveis em comparação com

a dimensão do objeto. Já uma **fonte extensa** tem dimensões significativas quando comparada a algum outro objeto de análise. Essa classificação é mais delicada, pois a noção de extenso e pontual depende do referencial que estamos escolhendo.

Sobre a composição, as fontes podem emitir apenas uma cor, como o caso de *leds*, que são chamados de **monocromáticos**. Quando há diversas emissões de cores, a fonte é classificada como **policromática**, como é o caso da luz branca.

Por ser uma onda eletromagnética, a luz não necessita de um meio material para se propagar. Assim, ela pode se propagar tanto através de um meio (como a água, ou ar), quanto no vácuo. Ao se propagar no vácuo a luz viaja com velocidade sempre igual a c , sendo este um dos postulados do que mais tarde foi chamado por Einstein de Teoria da Relatividade Restrita.

Quando a luz viaja em meios materiais haverá um decréscimo nesta velocidade, ocasionado pela interação da luz com as moléculas do meio. Os meios materiais são então classificados em transparentes, translúcidos e opacos, de acordo com esta interação. Nos meios **transparentes**, a luz pode viajar sem sofrer alterações em sua trajetória. O efeito final é que podemos visualizar objetos nítidos por detrás de um material transparente, como é o caso do vidro e alguns plásticos. Nos meios **translúcidos**, haverá pequenas alterações na trajetória, o que resulta em uma perda de nitidez nas imagens. Um exemplo de meio translúcido é o plástico fumê. Por fim, nos meios **opacos** não há propagação da luz. Um papel cartão é um exemplo de meio opaco. A Figura 4.2 apresenta fotos representativas dos meios.

Figura 4.2 | Exemplos de esfera transparente, translúcida e opaca



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Meios_Ópticos.jpg>. Acesso em: 5 jun. 2017.

Princípios da óptica geométrica

A óptica geométrica é fundamentada em três princípios básicos, que irão permear outros conceitos. São eles:

a. Propagação retilínea da luz.

Este princípio garante que os raios de luz se propagam em linha reta em meios homogêneos e transparentes. Podemos verificar isso com um experimento de sombra. A única forma de gerar a imagem projetada no chão é se existir uma única linha reta que une a fonte e uma extremidade do objeto com um ponto do anteparo.

b. Reversibilidade dos raios de luz.

Se você dirige, deve utilizar o espelho retrovisor para visualizar o que ocorre na parte traseira do carro. Nesta observação, você pode se perguntar: se eu vejo um passageiro na parte de trás pelo espelho, ele poderia me ver? O princípio da reversibilidade dos raios de luz prevê que sim. A trajetória seguida pela luz deve ser igual independentemente do sentido escolhido.

c. Independência dos raios de luz.

Este último princípio afirma que quando raios de luz se cruzam não há interferência causada na trajetória deles. Assim, é como se cada um viajasse independentemente. Um exemplo disso pode ser encontrado nas festas e danceterias, como os canhões de luz da Figura 4.4.

Figura 4.4 | Os canhões de luz como exemplos do princípio da independência dos raios de luz



Fonte: <https://cdn.pixabay.com/photo/2014/03/16/14/18/laser-288611_960_720.jpg>. Acesso em: 5 jun. 2017.



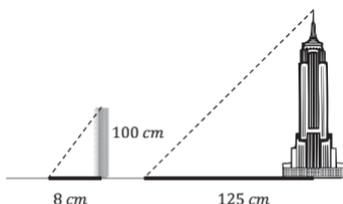
A óptica geométrica é baseada em três princípios: a luz efetua uma trajetória retilínea ao viajar em um meio homogêneo e transparente, a trajetória da luz independe do sentido de sua propagação e os raios de luz viajam de forma independente, mesmo depois de se cruzarem.



Para ilustrar um dos princípios da óptica geométrica, um professor resolve realizar uma prática com seus alunos. O objetivo era determinar a altura de um prédio, utilizando a medida da sua sombra. Em uma tarde de sol forte, eles medem o comprimento da sombra do prédio, com valor de 125 cm. Paralelamente ao edifício é posicionada uma régua de 100 cm, cuja sombra projetada no solo tem comprimento de 8 cm. Qual é a altura do prédio?

Resolução: Com a descrição do problema, podemos elaborar um desenho como apresenta a Figura 4.4. Com esta figura, podemos visualizar dois triângulos semelhantes, o que nos permite obter relações de proporcionalidade.

Figura 4.4 | Sombra do prédio e de uma régua, fora de escala



Fonte: adaptada de: <<https://goo.gl/1mHRxS>>; <<https://goo.gl/cu82mk>>. Acesso em: 7 jul. 2017.

Aplicando a semelhança de triângulos, obtemos a relação:

$$\frac{100 \text{ cm}}{h} = \frac{8 \text{ cm}}{125 \text{ cm}}$$

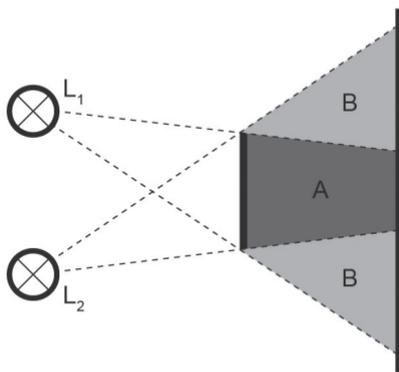
Resolvendo a proporcionalidade:

$$h = \frac{(100 \text{ cm})(125 \text{ cm})}{(8 \text{ cm})} \rightarrow h = 1562,5 \text{ cm} \cong 15,6 \text{ m}$$

A propagação retilínea da luz é a base para explicarmos diferentes fenômenos luminosos, como a sombra e a penumbra, os eclipses e o princípio de funcionamento de uma câmara escura. Na Figura 4.5 é apresentado um objeto retilíneo que é iluminado por duas fontes luminosas, denotadas por L . Caso a distância entre as fontes e a anteparo seja grande, haverá apenas uma região escura que chamamos de **sombra**. A sombra é causada pela ausência total dos raios de luz que chegam diretamente das fontes.

Agora, quando aproximamos o objeto da parede, haverá uma pequena região que receberá somente a luz que provém de uma ou de outra fonte, projetando uma pequena luminosidade. Então, à região marcada por B na Figura 4.5 chamamos de penumbra. Uma região de **penumbra** recebe apenas parte da luz da fonte e ocorre quando as dimensões da fonte são comparáveis à extensão do sistema.

Figura 4.5 | Sombra e penumbra em uma parede devido a duas fontes de luz e um objeto



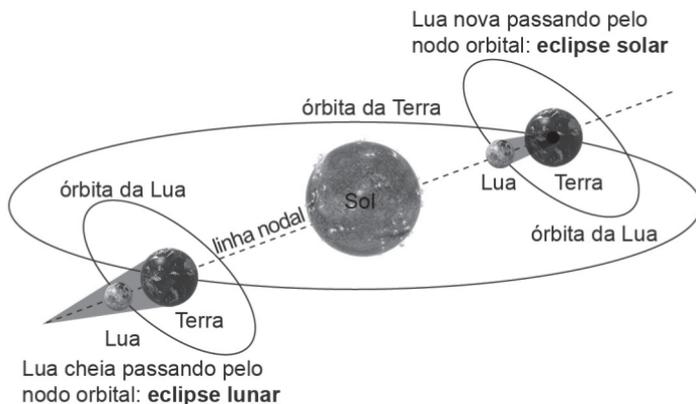
Fonte: <<https://goo.gl/Q6EcT3>>. Acesso em: 6 jun. 2017.

Os **eclipses solares** são fenômenos naturais que ocorrem quando a luz do sol é interceptada pela lua. Em função das dimensões do problema, haverá a formação de duas regiões: uma de escuridão total, correspondente à sombra, que chamamos de eclipse total; enquanto que na faixa de penumbra haverá uma leve escuridão, chamada de eclipse parcial.

No **eclipse lunar**, a lua está localizada atrás da Terra, de forma que não há luz do sol sobre sua superfície. Assim, um observador

nesta faixa do planeta veria a lua escura, com um tom levemente avermelhado. Na Figura 4.6 há representações dos eclipses solar e lunar.

Figura 4.6 | Representação gráfica do eclipse solar e lunar

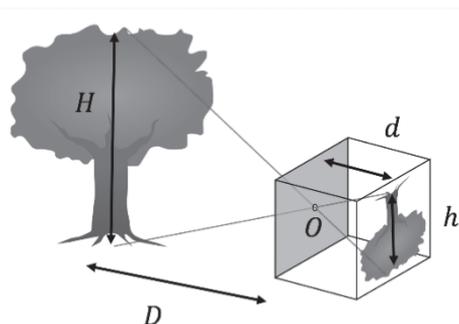


Fonte: <<https://goo.gl/HYAiGU>>. Acesso em: 6 jul. 2017.

Por fim, uma aplicação tecnológica para a propagação retilínea da luz é a câmara escura de orifício, que pode servir como uma rudimentar câmera fotográfica. Ela é composta por uma caixa fechada, contendo um pequeno orifício em uma das faces para a entrada de luz. Quando um objeto é posicionado na frente do orifício, raios de luz saem do objeto até chegar na parede oposta da caixa, formando uma imagem. Se pudéssemos inserir um papel sensível à luz ou um papel vegetal, poderíamos observar a imagem formada.

Na Figura 4.7 é apresentado um esquema da câmara escura em que é visível a formação de triângulos semelhantes formados pelos raios de luz e pela altura do objeto e da imagem. Observe que a imagem projetada no fundo da caixa é invertida, ou seja, de ponta-cabeça. Além disso, a orientação de direita e esquerda também é trocada.

Figura 4.7 | Representação esquemática da câmera escura de orifício



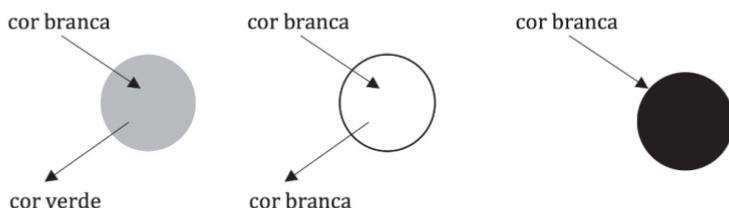
Fonte: <<https://goo.gl/hnkc41>>. Acesso em: 6 jul. de 2017.

Aplicando a relação de proporcionalidade, podemos criar a relação entre as distâncias do objeto-caixa e as respectivas alturas, conforme Figura 4.7.

$$\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$$

Como vimos, a luz branca é gerada pela soma de diversos raios de luz monocromáticos, em especial o vermelho, alaranjado, amarelo, verde, azul, anil e violeta. Assim, quando observamos um objeto com a cor branca, estamos incidindo todas as cores sobre ele. Após a reflexão, a luz proveniente do objeto chega até os nossos olhos. Dependendo da composição dos objetos algumas cores serão absorvidas em sua superfície e outras são refletidas. No caso de um objeto verde, por exemplo, ao incidir luz branca sobre ele, todas outras cores são absorvidas e apenas a cor verde é refletida. Dessa forma, veremos um objeto de cor verde. Para um objeto branco, todas as cores são absorvidas e também refletidas; enquanto que em um corpo negro apenas ocorre a absorção das cores, sem a emissão, como vemos exemplificado na Figura 4.8,

Figura 4.8 | As cores dos objetos são determinadas pela absorção e reflexão



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso da luz, as cores são classificadas em ordens: primárias, secundárias, e assim por diante. As cores primárias são as fundamentais: vermelho, azul e verde. Já as cores secundárias são formadas pela superposição das cores primárias: vermelho + verde = amarelo; vermelho + azul = magenta e verde + azul = ciano, e assim por diante. A cada superposição de uma cor secundária com uma cor primária que não participou da composição é criada a cor branca. Então, a soma das cores primárias forma a luz branca, como mostra a Figura 4.9. Um cuidado que devemos ter é que há uma descrição de cores em termos dos pigmentos, que provavelmente você estudou na disciplina de Artes. Neste caso, as cores primárias são amarelo, ciano e magenta.

Figura 4.9 | As cores secundárias como mistura das cores primárias: verde, vermelho e azul



Fonte: <<https://goo.gl/RhKvhk>>. Acesso em: 6 jul. 2017.



A visão humana depende de células sensíveis à luz chamadas de cones e bastonetes, localizadas na retina (fundo do olho). Os cones são sensíveis às cores e os bastonetes são responsáveis pela escala de cinza. Então, para que você veja um objeto, é necessário que estes componentes sejam sensibilizados pela luz que entra no olho e que eles enviem estas informações ao cérebro. Pense na seguinte pergunta: seria possível que uma pessoa tivesse visão de raios X, como vemos nos filmes de super-heróis?

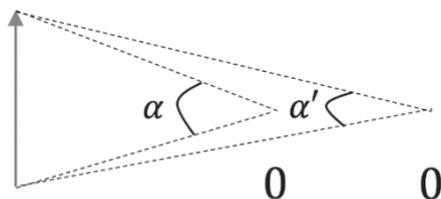
Sem medo de errar

No começo desta seção você foi colocado no lugar de um professor que está planejando uma atividade prática com seus estudantes, que possa ajudar na compreensão dos princípios da óptica geométrica. Então, a atividade escolhida foi estimar a altura de um monumento que fica próximo da escola, utilizando algumas medidas de distância.

Nesta atividade, você pretende trabalhar com os estudantes a noção de ângulo visual. Quando observamos um objeto, precisamos que os pontos extremos deste estejam separados por um valor mínimo, para que os raios de luz sejam identificados separadamente. Assim, poderemos visualizar estes pontos separados, como indica a Figura 4.10. O ângulo indicado na figura é chamado de ângulo visual e depende da separação dos objetos e da distância entre os objetos e o observador.

À medida que aumenta a distância do observador ao objeto, o ângulo visual diminui até um valor limite, da ordem de meio grau. Este valor é denominado de limite de acuidade visual, determinando a maior distância que podemos nos afastar dos objetos e continuar a vê-los como pontos distintos.

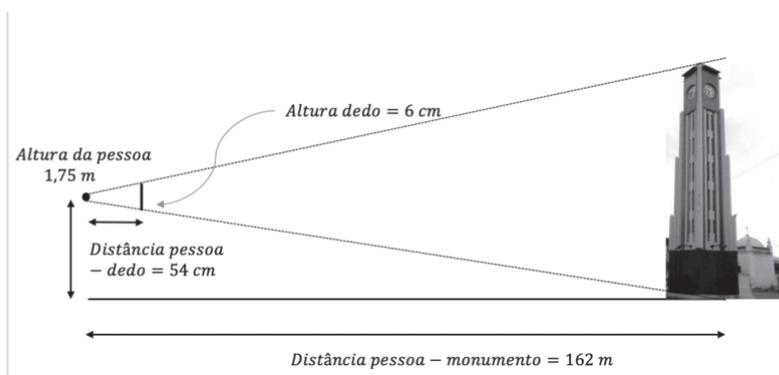
Figura 4.10 | Representação do ângulo visual (α) que depende da separação entre os pontos e a distância até o observador. Quanto maior a distância até o objeto, menor será o ângulo de visão



Fonte: elaborada pelo autor.

Basicamente, podemos aproveitar o conceito de que a luz se propaga em linha reta para esquematizar a situação apresentada na Figura 4.1. Nela, uma pessoa procurava cobrir toda a altura de um prédio com seu polegar levantado. Para isso, ela afastava-se do monumento gradualmente até chegar a este ponto. Então, a Figura 4.11 apresenta um desenho esquemático dessa situação, com as indicações das medidas que são relevantes.

Figura 4.11 | Medição do monumento



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/VrY8De>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

As medidas da pessoa de referência podem ser facilmente obtidas com o uso de uma fita métrica ou ainda uma trena. Já a distância até o monumento pode ser encontrada com o uso de um aplicativo de mapa, que pudesse utilizar a escala.

A figura, então, mostra dois triângulos semelhantes, que podem ser utilizados para calcular a altura do monumento, com um ângulo congruente nos triângulos. Pelas relações de proporcionalidade, podemos chegar às seguintes frações:

$$\frac{\text{altura do monumento}}{\text{altura do dedo}} = \frac{\text{distância pessoa-monumento}}{\text{distância pessoa-dedo}}$$

Com os valores numéricos apresentados no quadro:

$$\frac{\text{altura do monumento}}{6 \text{ cm}} = \frac{162 \text{ m}}{54 \text{ cm}}$$
$$\text{altura do monumento} = \frac{6}{54}(162 \text{ m}) \rightarrow \text{altura do monumento} = 18 \text{ m}.$$

Dessa forma, podemos estimar a altura do monumento com o valor de 18 m. Para confirmar este valor, você pode pedir aos estudantes que procurem em documentos oficiais ou projetos da prefeitura as dimensões deste monumento. Depois desta sistematização dos conceitos, o professor pode organizar o plano de aula e propor alguma atividade avaliativa. Além disso, que outras atividades você proporia para os alunos trabalharem princípios da óptica geométrica?

Avançando na prática

O que é um ano-luz?

Descrição da situação-problema

Em astronomia se realizam muitas medidas de distância por paralaxe, que aplicam os princípios da óptica geométrica. Em função dos altos valores de distância, é utilizada a unidade astronômica ano-luz, que pode gerar alguma confusão quanto ao nome. Apesar de parecer uma unidade de tempo, 1 ano-luz é a distância percorrida pela luz durante o período de um ano. Imagine que você é um professor que deseja ensinar a óptica geométrica no contexto da astronomia. Para ilustrar o valor desta grandeza em km, você pretende aproveitar uma reportagem de jornal:

Cientistas descobrem planetas com tamanhos parecidos ao da Terra em sistema a 40 anos-luz. NASA descobriu novos planetas no sistema planetário da estrela TRAPPIST-1, localizada a 40 anos-luz do Sol. Segundo artigo publicado na revista "Nature" nesta quarta-feira (22/02/2017), o sistema tem sete planetas com um tamanho próximo ao da Terra localizados em uma zona temperada, ou seja, com temperatura entre 0°C e 100°C. É um recorde de planetas deste tamanho e nessa zona de temperatura, afirma a agência espacial americana. (G1, 2017, [s.p.]



Para preparar suas notas de aula, você precisa responder às seguintes perguntas: este valor de anos-luz corresponde a qual medida em km? O que significa esta medida, de forma prática?

Resolução da situação-problema

Como apresentado na situação, 1 ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz durante o tempo de 1 ano. A velocidade da luz no vácuo tem valor: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Agora, 1 ano terrestre tem o valor em segundos de:

$$1 \text{ ano} = 365,25 \text{ dias} = 365,25(24 \text{ h}) = 365,25(24 (3600 \text{ s})) = 31557600 \text{ s}$$

De forma aproximada: $1 \text{ ano} = 3,15 \cdot 10^7$ s.

Então, a distância em km de 1 ano-luz é de:

$$1 \text{ ano-luz} = (3,15 \cdot 10^7 \text{ s}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 9,45 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,45 \cdot 10^{12} \text{ km}.$$

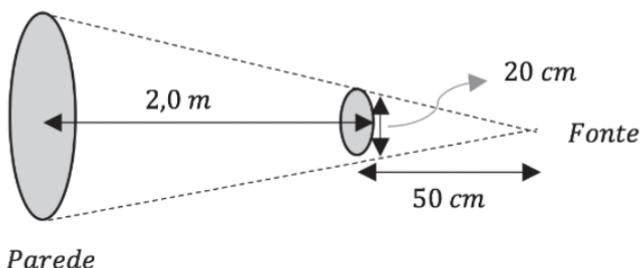
A distância descrita no texto, de 40 anos-luz corresponde então a:

$$40 \text{ anos-luz} = 40(9,45 \cdot 10^{12} \text{ km}) \rightarrow 3,78 \cdot 10^{14} \text{ km}.$$

Além disso, dizer que a distância de um astro à Terra é de 40 anos-luz, significa que a luz deste astro demora 40 anos para chegar até um observador na Terra. Com esta atividade, o professor pode introduzir os conceitos básicos da óptica geométrica aproveitando os conceitos aprendidos em mecânica.

Faça valer a pena

1. Para elaborar um efeito em um jantar, uma promotora de eventos pretende usar a sombra projetada pelo logo circular da empresa com diâmetro de 20 cm. A distância da fonte de luz até o logo é de 50 cm, e do logo até a parede será de 2 m. A situação descrita é apresentada na figura a seguir.



Fonte: elaborada pelo autor.

Adotando $\pi = 3$, a área da sombra projetada pelo logo na parede terá o valor de:

- a) $0,50 \text{ m}^2$.
- b) $0,75 \text{ m}^2$.
- c) $1,00 \text{ m}^2$.
- d) $1,50 \text{ m}^2$.
- e) $1,75 \text{ m}^2$.

2. Uma câmara escura está localizada a 5 m de uma pessoa e projeta uma imagem no seu fundo com o valor de 20 cm. Então, a pessoa procura a distância exata para a qual sua imagem projetada terá o tamanho de 50 cm. Nesta condição, a imagem projetada no fundo da câmara será _____, e ele deve _____, pela distância de _____, a partir de sua posição inicial.

A sequência de palavras que completa corretamente o texto é:

- a) Direita, aproximar-se, 2 m.
- b) Direita, afastar-se, 3 m.
- c) Invertida, afastar-se, 5 m.
- d) Invertida, aproximar-se, 5 m.
- e) Invertida, aproximar-se, 3 m.

3. Na figura a seguir é apresentada a superposição das cores primárias, gerando as cores secundárias.



Fonte: <<https://goo.gl/ax8iib>>. Acesso em: 6 jul. 2017.

Com base nesta figura, analise as seguintes afirmações:

I - Ao iluminarmos um objeto de cor pura vermelha com luz verde ele parecerá preto.

II - Ao iluminarmos um objeto de cor não pura ciano com luz vermelha ele parecerá preto.

III - Ao iluminarmos um objeto de cor verde com luz vermelha ele parecerá magenta.

IV - Ao iluminarmos um objeto de cor pura azul com luz branca ele parecerá azul.

Então, são verdadeiras as afirmativas:

- a) Apenas I, II e IV.
- b) Apenas II e IV.
- c) Apenas I, III e IV.
- d) Apenas I e IV.
- e) Apenas II e IV.

Seção 4.2

Espelhos e a reflexão

Diálogo aberto

A maioria das pessoas ao sair de casa precisa passar pela frente de um espelho para saber se está tudo bem com o seu visual e aparência. Depois, no caminho para suas atividades diárias, você ou o motorista do veículo que você utiliza precisa dos espelhos retrovisores para observar o trânsito na lateral ou atrás do veículo. Nestas situações, temos exemplos do fenômeno da reflexão da luz e sua aplicação mais imediata que é a formação de imagens em espelhos.

O fenômeno da reflexão da luz foi parcialmente descrito na seção anterior, como o responsável pela determinação das cores do objeto. Agora, vamos estender este conceito para reflexão em **superfícies polidas**, que denominamos de **espelhos**. A classificação dos espelhos depende de características geométricas e aqui trabalhamos com os espelhos planos e esféricos.

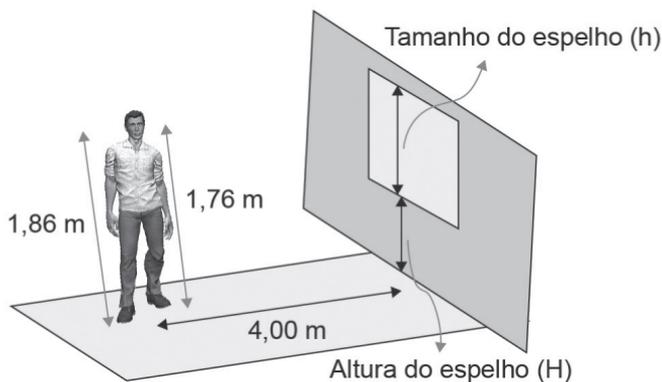
Nesta unidade, você deve se colocar no lugar de um professor de Física em uma escola que possui poucos recursos disponíveis. Na ausência de um laboratório bem estruturado e de outras ferramentas didáticas, como forma de motivar os estudantes, você precisará utilizar da criatividade para encontrar soluções e atividades práticas que possam auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Então, você pensa em encontrar um problema prático sobre espelhos, que pode ser verificado por meio de uma demonstração.

Após uma pesquisa na internet, você descobriu que os espelhos planos são utilizados como um truque por decoradores em ambientes pequenos, como forma de passar a sensação de que estes são maiores que o real. Para isso, os espelhos devem ter um tamanho mínimo e posicionados a determinada altura do solo.

Você pretende levar um espelho para sua sala de aula para demonstrar isso para os estudantes. Para preparar suas notas de aula, você simula a situação de uma pessoa com 1,86 m de altura que está posicionada na frente deste espelho, distante 4 m, e a altura dos

olhos da pessoa é de 1,76 metros. A situação descrita é apresentada na Figura 4.12, com os valores propostos neste problema.

Figura 4.12 | Representação gráfica do problema apresentado



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/BScuqk>>. Acesso em: 18 jul. 2017.

Nesta situação, a pessoa consegue se ver completamente no espelho. Então, qual deve ser o tamanho mínimo do espelho para que isto ocorra? E a que altura do solo deve ser posicionado? Este valor depende da distância da pessoa até o espelho? Com estas questões para responder, você precisa elaborar a sequência didática que irá alinhar os conceitos necessários para isso.

Para ajudar neste desafio, nossa seção será dedicada ao fenômeno da reflexão da luz e a como os espelhos conjugam as imagens, dependendo de alguns parâmetros. A construção das imagens por espelhos será essencial para resolver este problema. E você, está preparado para este desafio?

Não pode faltar

Reflexão da luz

Ao observarmos um produto pela vitrine de uma loja, podemos visualizar diferentes imagens, como a do produto que está atrás do vidro ou ainda a imagem da loja que está em frente a que você está. Esta situação ilustra os dois fenômenos básicos luminosos que podem ocorrer: ao observarmos o objeto atrás do vidro, o raio de luz precisa atravessar uma superfície, em um fenômeno

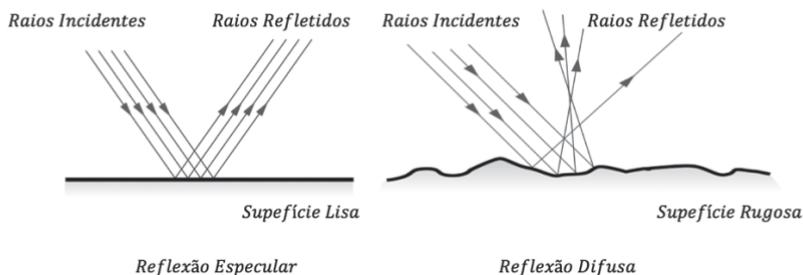
que denominamos de **refração**; quando você pode observar a loja de frente pelo reflexo do vidro é porque ocorreu o fenômeno da **reflexão**. A refração da luz será o tema da próxima seção, enquanto esta seção será direcionada para o estudo da reflexão da luz.

A reflexão ocorre quando um feixe de luz incide sobre uma superfície e, após a interação, volta a se propagar no meio original. Chamamos de **raio incidente** aquele que chegará até à superfície, e de **raio refletido** aquele que sairá da superfície. Como forma de generalizar este estudo, as direções destes raios são descritas em termos do **ângulo de incidência** e do ângulo de reflexão. Ambos são medidos com referência à reta *normal* à superfície, ou seja, perpendicular a esta.

A reflexão da luz pode ocorrer de duas formas: a **difusa**, acontece quando a superfície é rugosa, assim, ao incidirmos raios de luz sobre ela, iremos observar diversos ângulos de reflexão. A reflexão difusa é a que utilizamos para vermos os objetos ao nosso redor. A luz proveniente da lâmpada, por exemplo, incide sobre um livro, e a reflexão permite que você leia as palavras, perceba as características geométricas do objeto e as diferentes cores.

Outra forma de reflexão é a **especular**, em que a superfície refletora é lisa e há apenas um ângulo de reflexão. A estas superfícies é dado o nome genérico de **espelho**. A Figura 4.13 apresenta uma representação da diferença entre a reflexão difusa e a especular.

Figura 4.13 | Diferença entre a reflexão difusa e especular



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/ScyHkE>> ; <<https://goo.gl/eD1DcV>>. Acesso em: 18 jul. 2017.

O fenômeno da reflexão da luz é então descrito por **duas leis básicas**:

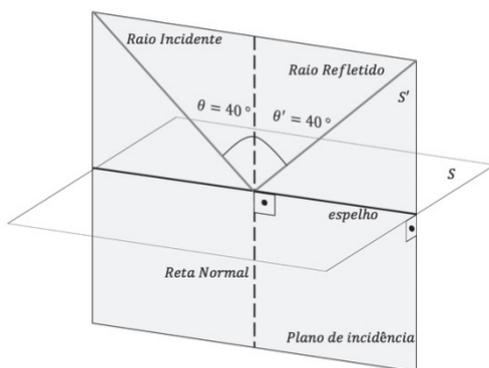
1. Os raios de luz incidente, refletido e reta normal à superfície estão todos sobre o mesmo plano S' , conforme Figura 4.14. O

plano S' é perpendicular ao plano que contém a superfície refletora S . Então, ao representarmos os raios de luz eles devem estar no mesmo plano, chamado de *plano de incidência*. Como forma de simplificar a representação em nosso livro, em geral, o plano de incidência será sempre o plano do papel (ou da tela em que você realiza a leitura).

2. O ângulo de incidência (θ) e o ângulo de reflexão (θ') são iguais. Assim: $\theta = \theta'$.

Então, se incidirmos um feixe de luz em uma inclinação de 40° com a reta normal, devemos esperar um ângulo de reflexão de 40° com a reta normal. A Figura 4.14 ilustra estas leis, indicando os ângulos de incidência e reflexão. Com estas duas leis, podemos estudar como são formadas as imagens pelos espelhos, em especial o espelho plano e o espelho esférico.

Figura 4.14 | Representação das duas leis da reflexão da luz



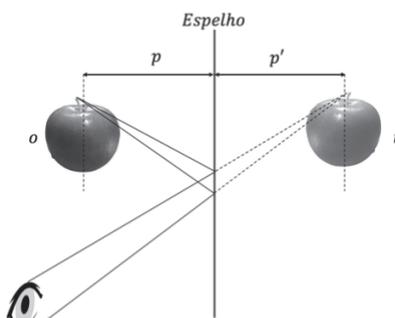
Fonte: elaborada pelo autor.

Espelho plano

O espelho plano é o mais habitual espelho que temos em casa, seja no banheiro ou no quarto. Imagine que você posicione um objeto próximo a um espelho e que deseja observar este objeto com o uso do espelho. Então, os raios de luz provenientes da parte superior do objeto chegarão até a superfície e sofrerão reflexão, como indica a Figura 4.15. Pela lei da reflexão, estes raios serão direcionados com o mesmo ângulo dos raios incididos, em relação à reta normal, o que nos leva a perceber que estes raios de luz não se cruzarão novamente.

Se prolongarmos os raios de luz refletidos como se pudessem atravessar o espelho, teremos um ponto de interseção situado atrás do espelho. Dessa forma, ao observador aparenta que os raios de luz foram emitidos do interior do espelho. A imagem do objeto é formada no interior do espelho, sendo denominada de imagem **virtual**. Caso a imagem seja formada pelo encontro efetivo dos raios refletidos, teremos uma imagem **real**, como veremos a seguir. A imagem real pode ser projetada em um anteparo, como será estudado em alguns casos para espelhos esféricos e lentes.

Figura 4.15 | Formação da imagem por um espelho plano



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/Ni6PD2>>; <<https://goo.gl/8fXxSi>>. Acesso em: 18 jul. 2017.

Realizando o estudo dos raios de luz emitidos por diversos pontos do objeto na Figura 4.15, teremos a formação da imagem virtual completa, mantendo as dimensões e também a orientação original, e o objeto e a imagem são equidistantes do espelho. Quanto à orientação, classificamos as imagens em **direita**, quando conservam o sentido do objeto, e **invertida**, quando são formadas com sentido contrário ao objeto. Então, devemos lembrar que espelhos planos conjugam imagens **de mesmo tamanho, virtuais e direitas**.

Quando o objeto perante o espelho é assimétrico, não admite um plano que o divida em duas partes iguais, a imagem formada troca o sentido direita-esquerda. Dessa forma, se superpormos o objeto com a imagem, elas não se encaixarão. É como se você colocasse as duas mãos juntas com as palmas para cima. Estas figuras são chamadas de **enantiomorfos**. A Figura 4.16 mostra a imagem de um objeto assimétrico formada por um espelho plano, note que ela está invertida. Qual é a pata levantada pelo sapo real? E qual é a pata levantada pelo sapo da imagem formada?

Figura 4.16 | Imagem conjugada por um espelho plano



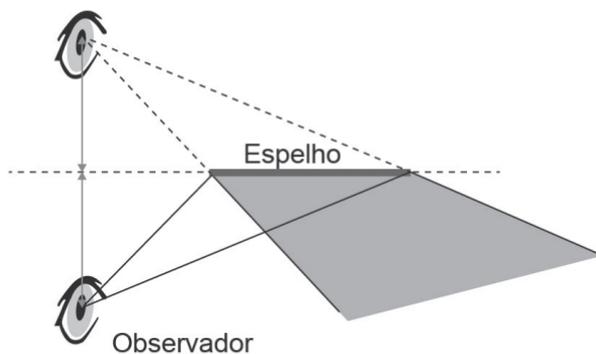
Fonte: <https://cdn.pixabay.com/photo/2016/07/05/17/33/frog-1499067_1280.jpg>. Acesso em: 21 jul. 2017.

No estudo dos espelhos planos há alguns resultados importantes como o **campo visual**, a **translação** e a **imagem formada entre dois espelhos**.

i. Campo visual

O campo visual é uma região do espaço que pode ser visualizado pela reflexão dos raios de luz em uma superfície polida. Esta região é delimitada pela reflexão de raios de luz nos limites geométricos do espelho, como apresenta a Figura 4.17. Todos os pontos internos a esta região podem ser visualizados pelo observador.

Figura 4.17 | O campo visual é uma região demarcada na figura, que pode ser visualizada com o uso do espelho plano

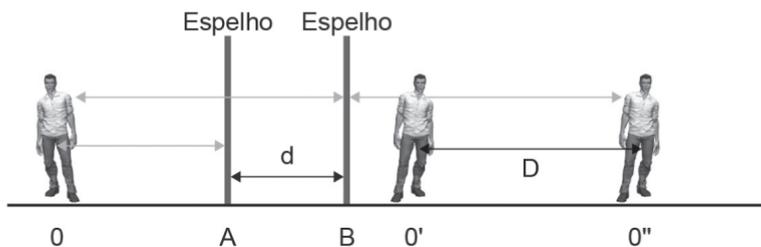


Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/ZEomEd>>. Acesso em: 18 jul. 2017.

ii. Translação de um espelho plano

Considere a imagem O' conjugada por um espelho de uma pessoa localizada no ponto O . Agora, vamos **deslocar o espelho** por uma distância d , levando-o à posição B , de forma que a imagem será deslocada para o ponto O'' . Então, a distância entre os pontos O' e O'' é denotada por D , como ilustra a Figura 4.18

Figura 4.18 | O deslocamento do espelho promove um deslocamento dobrado da imagem conjugada



Fonte: adaptada de <<https://goo.gl/E5aEZ5>>. Acesso em 18 Jul. de 2017.

Pela figura, podemos escrever:

$$D = \overline{O'O''} = \overline{O''O} - \overline{OO'}.$$

E de forma análoga:

$$d = \overline{BA} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Como as imagens são equidistantes dos objetos, podemos ter as relações:

$$\overline{O''O} = 2(\overline{OB}) \text{ e } \overline{OO'} = 2(\overline{OA}).$$

Substituindo estas expressões:

$$D = 2(\overline{OB}) - 2(\overline{OA}) \rightarrow D = 2(\overline{OB} - \overline{OA}).$$

Por fim, chegamos a relação: $D = 2d$.

Então, ao deslocarmos o espelho por determinada distância, teremos o dobro de deslocamento da imagem conjugada.



Imagine que você se desloca com uma velocidade de 6 m/s em relação a um espelho plano. Podemos afirmar que a velocidade da imagem conjugada em relação ao espelho terá qual valor?

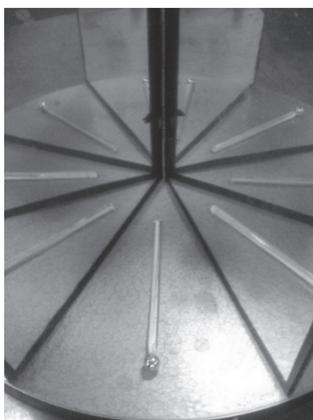
iii. Imagens de um objeto entre dois espelhos

Nesta configuração, temos dois espelhos planos posicionados em ângulo α , medido em graus, entre eles. Quando posicionamos um objeto em um ponto interno ao sistema, serão formadas pelo menos duas imagens em cada espelho, que servirão de objeto para novas imagens. A Figura 4.19 ilustra o caso de espelhos que estão posicionados com certa angulação. Por argumentos geométricos, podemos calcular o número de imagens (N) formadas pela equação:

$$N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1.$$

O ângulo de 0° não é permitido nesta equação, pois nesse caso os espelhos estariam colados. Entretanto, note que no limite do ângulo tendendo a zero, temos a formação de infinitas imagens.

Figura 4.19 | Dois espelhos planos com determinada angulação e a formação de diversas imagens



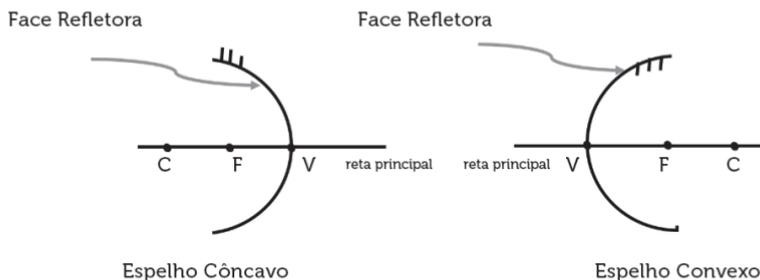
Fonte: <<https://goo.gl/X7QYRr>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

Espelhos esféricos

Os espelhos esféricos são estruturas que podem ser obtidas por um objeto de formato esférico que tenha uma das suas faces polidas. Basicamente, se a parte interna de uma casca esférica de material apropriado for polida, temos um **espelho côncavo**. Caso a parte externa de uma esfera de material apropriado seja polida, teremos um **espelho convexo**.

A Figura 4.20 apresenta a representação geométrica usual de cada espelho, assim como os elementos básicos destes: **vértice (V)**, **o foco (F)** e **o centro de curvatura (C)**. Estes elementos geométricos remetem-se a parâmetros da esfera da qual esta casca faria parte: o centro de curvatura é a posição do centro da esfera; o vértice é o ponto de intersecção entre o espelho e a reta principal. Outro resultado importante é que a posição do **foco corresponde à metade da distância do vértice ao centro de curvatura**.

Figura 4.20 | Representação usual dos espelhos côncavos e convexos e as posições do centro de curvatura, foco e vértice na reta principal



Fonte: elaborada pelo autor.

Nas próximas figuras, vamos trabalhar com raios próximos à reta principal e que respeitem a chamada condição de nitidez de Gauss, como veremos a seguir. Como a imagem é formada pelos espelhos esféricos? Para responder a esta questão, podemos adotar duas posturas complementares: um estudo geométrico, por meio do uso dos chamados raios notáveis, e outra denominada estudo analítico, em que se aplica a equação de Gauss para encontrar a posição da imagem e o aumento linear.

Estudaremos agora a existência de raios notáveis, que seguem resultados das leis da reflexão e o princípio de reversibilidade dos

raios de luz, e que são usados para desenhar a imagem formada pelo espelho esférico. Os raios notáveis são:

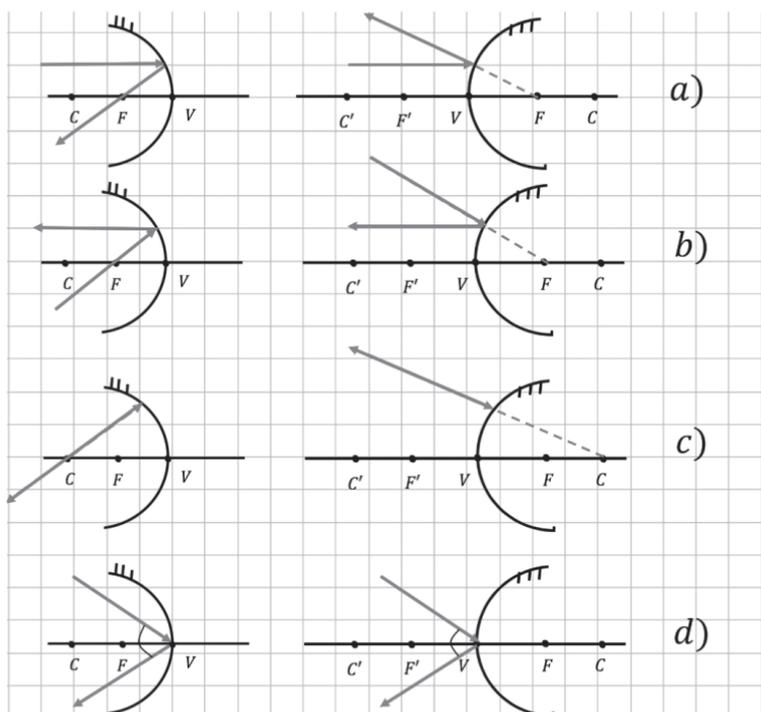
a) **Todo raio que incide no espelho paralelamente à reta principal, com reflexo passando pelo foco.** Observe que para o espelho convexo o foco está localizado atrás do espelho, assim, haverá um prolongamento dos raios de luz (Figura 4.21a).

b) **Todo raio que incide passando pelo foco, refletindo paralelamente à reta principal.** Observe que o comentário anterior também é aplicado neste caso (Figura 4.21b).

c) **Os raios que incidem sobre o centro de curvatura, com reflexo retornando ao centro de curvatura.** Isto também se aplica para a observação do foco para espelho convexo (Figura 4.21c).

d) **Os raios que incidem sobre o vértice, que apresentam ângulo de incidência e reflexão idênticos.** Neste caso, a reta normal é a reta principal (Figura 4.21d).

Figura 4.21 | Representação dos raios notáveis para espelhos esféricos



Fonte: elaborada pelo autor.

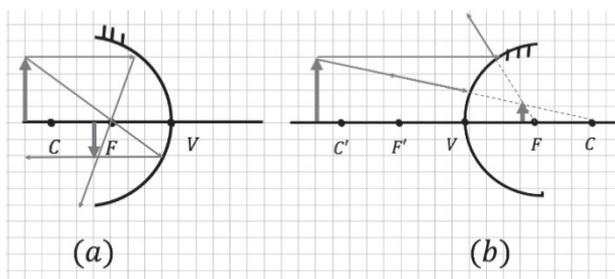
Agora, podemos estudar a formação das imagens em cada espelho, à medida que alteramos a posição do objeto em relação ao espelho. Então, teremos os seguintes casos:

i. Objeto após a posição de centro de curvatura.

Para espelhos côncavos, a imagem conjugada será menor, invertida e real (Figura 4.22a).

Para espelhos convexos, a imagem conjugada será menor, direita e virtual (Figura 4.22b).

Figura 4.22 | Imagem conjugada por espelhos côncavos (a) e convexos (b) quando o objeto está depois do centro de curvatura



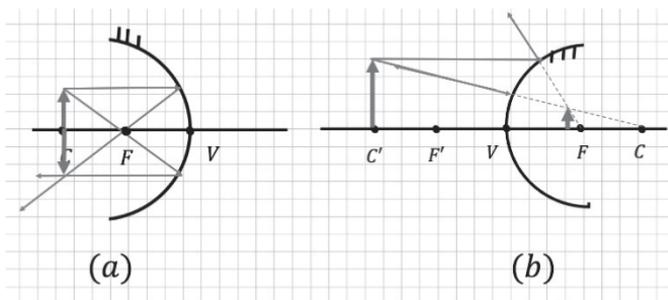
Fonte: elaborada pelo autor.

ii. Objeto na posição do centro de curvatura.

Para espelhos côncavos, a imagem será de mesmo tamanho que objeto, invertida e real (Figura 4.23a).

Para espelhos convexos, a imagem será menor, direita e virtual (Figura 4.23b).

Figura 4.23 | Imagem conjugada por espelhos côncavos (a) e convexos (b) quando o objeto está na posição do centro de curvatura



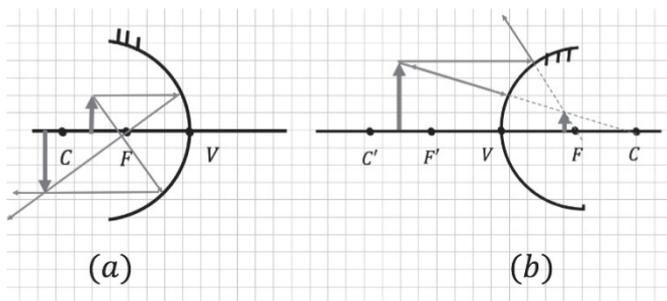
Fonte: elaborada pelo autor.

iii. Objeto entre o centro de curvatura e o foco.

Para espelhos côncavos, a imagem conjugada será maior, invertida e real (Figura 4.24a).

Para espelhos convexos, a imagem será menor, direita e virtual (Figura 4.24b).

Figura 4.24 | Imagem conjugada por espelhos côncavos (a) e convexos (b) quando o objeto está entre o centro de curvatura e o foco



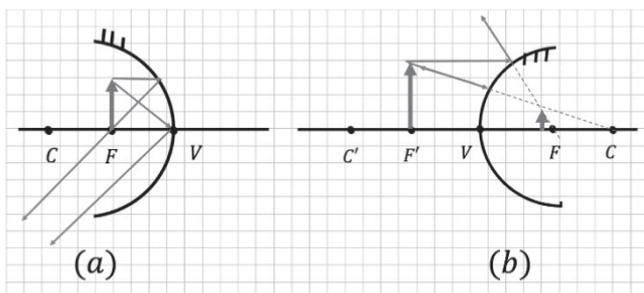
Fonte: elaborada pelo autor.

iv. Objeto na posição de foco.

Para espelhos côncavos, os raios de luz refletidos não se cruzarão, e por consequência não será formada uma imagem. Dessa forma, dizemos que a imagem é do tipo imprópria (Figura 4.25a).

Para espelhos convexos, a imagem conjugada é menor, direita e virtual (Figura 4.25b).

Figura 4.25 | Imagem conjugada por espelhos côncavos (a) e convexos (b) quando o objeto está na posição do foco



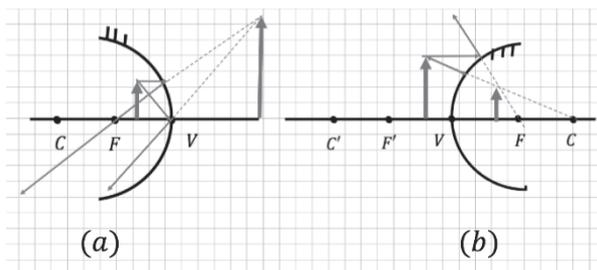
Fonte: elaborada pelo autor.

v. Objeto entre a posição do centro de curvatura e vértice.

Para espelhos côncavos, a imagem conjugada será maior, direita e virtual (Figura 4.26a).

Para espelhos convexos, a imagem conjugada será menor, direita e virtual (4.26b).

Figura 4.26 | Imagem conjugada por espelhos côncavos (a) e convexos (b) quando o objeto está posicionado entre o foco e o vértice



Fonte: elaborada pelo autor.

Estudo analítico da imagem formada por espelhos esféricos

O estudo analítico depende da equação de Gauss para espelhos esféricos. Ela relaciona a posição do objeto (p), da imagem (p') com a distância focal (f), pela forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Lembre-se de que a distância focal pode ser obtida pela metade do raio R da esfera que deu origem ao espelho:

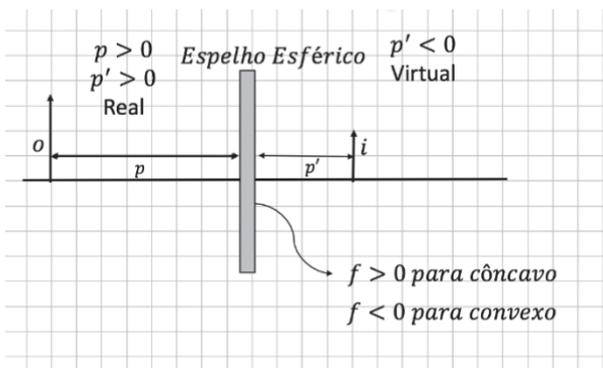
$$f = \frac{R}{2}$$

Nestas equações, o sinal de positivo indica pontos reais do sistema, enquanto o negativo é um ponto virtual. Por exemplo, nos espelhos côncavos o foco é real, assim, na equação, o valor da distância focal será positivo. Agora, para os espelhos convexos, o foco será negativo, pois está localizado atrás do espelho. A mesma regra vale para a posição da imagem e do objeto. A Figura 4.27 ilustra um sistema com espelhos esféricos com as respectivas regras de sinais.



Nos sistemas ópticos, o sinal positivo é um indicativo de pontos de natureza real, localizado na frente dos espelhos. Para sinal negativo, há um indicativo de ponto virtual, localizado atrás do espelho. Agora, para o aumento linear, o sinal de menos indica que o objeto e a imagem estão invertidos. Caso seja positivo, eles têm o mesmo sentido.

Figura 4.27 | Ilustração do referencial de Gauss para espelhos esféricos



Fonte: elaborada pelo autor.

Para quantificar o aumento ou diminuição do tamanho da imagem, em relação ao objeto, definimos a grandeza aumento linear (**A**), que pode ser calculada pela razão entre o tamanho da imagem (**i**) e o tamanho do objeto (**o**), ou ainda:

$$A = \frac{i}{o} \rightarrow A = -\frac{p'}{p}$$

E, por fim, podemos obter uma expressão para o aumento linear como função apenas da posição da imagem e do foco:

$$A = \frac{f}{f - p}$$



Exemplificando

Durante uma aula prática, um estudante posicionou um objeto na frente de espelho côncavo, de distância focal 20 cm. A imagem foi conjugada de forma a ter um aumento linear de duas vezes o tamanho do objeto e com mesma orientação do objeto. a) Qual será a posição do objeto? b) Qual será a posição da imagem?

Resolução: a) Para obter uma imagem direita e maior é necessário que o aluno posicione o objeto entre o foco e o vértice. Com isso, a imagem conjugada deve ser virtual. Com a informação do aumento linear, podemos obter a seguinte relação:

$$A = -\frac{p'}{p} \rightarrow 2 = -\frac{p'}{p} \rightarrow p' = -2p.$$

Substituindo esta informação na equação de Gauss, teremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p}.$$

Trabalhando algebricamente esta expressão:

$$\frac{1}{20} = \frac{2p - p}{2p^2} \rightarrow 2p = 20.$$

Então, a distância do objeto será: $p = 10$ cm.

b) Por fim, a distância da imagem será de:

$$p' = -2p = -2(10 \text{ cm}) = -20 \text{ cm}.$$

Observe que o sinal de menos é indicativo de uma imagem virtual, como pode ser previsto no item a).



Pesquise mais

Para um estudo mais detalhados sobre os espelhos esféricos, recomenda-se a leitura do capítulo 34 do livro a seguir:

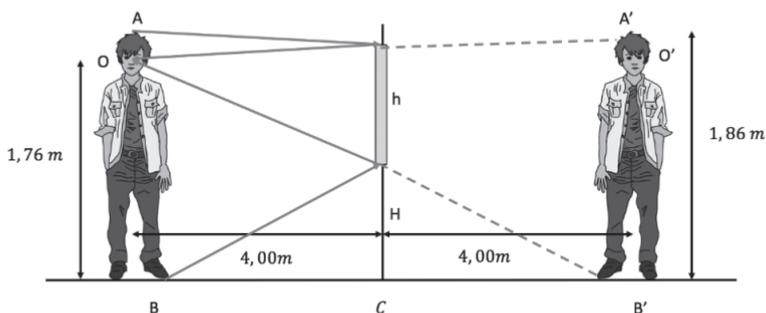
YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física IV: óptica e Física moderna**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016. p. 43-51.

Sem medo de errar

Agora, vamos retornar à situação apresentada no começo da seção, em que você foi colocado no lugar de um professor de Física que utiliza de criatividade para criar situações-problema para seus estudantes. Agora, você está estruturando sua aula com base em um problema prático que envolve o uso de espelhos planos. Uma pessoa pretende utilizar um espelho para enxergar seu corpo completamente. Para que isso ocorra, ele deve ser posicionado com determinada altura do solo e ter um tamanho mínimo. A proposta é calcular estes parâmetros e, se possível, reproduzir este resultado na prática.

A Figura 4.28 retoma os dados numéricos apresentados no item Diálogo aberto, com os raios de luz projetados gerando a imagem atrás do espelho. Observe que temos a formação de diversos triângulos semelhantes, que podem ser utilizados para encontrar os valores desejados.

Figura 4.28 | Dados numéricos do problema apresentado no item Diálogo aberto



Fonte: elaborada pelo autor.

A imagem é formada quando os raios de luz passam pelas extremidades do espelho com tamanho h . Devemos lembrar que a imagem conjugada pelo espelho plano é equidistante do espelho e apresenta o mesmo tamanho que o objeto. Usando o triângulo $OO'B'$, podemos obter a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{B'O'}{h} = \frac{BB'}{BC}$$

Com os valores numéricos, temos que o tamanho h será:

$$\frac{1,86 \text{ m}}{h} = \frac{8,0 \text{ m}}{4,0 \text{ m}} \rightarrow h = \frac{1,86 \text{ m}}{2} = 0,93 \text{ m}.$$

Então, o tamanho mínimo do espelho deve ser de 93 cm. Para obter altura do espelho em relação ao solo, usamos o triângulo $OB'B$. Com ele podemos aplicar a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{OB}{H} = \frac{BB'}{CB'}.$$

Com os dados numéricos do problema, temos:

$$\frac{1,76 \text{ m}}{H} = \frac{8,0 \text{ m}}{4,0 \text{ m}} \rightarrow H = \frac{1,76 \text{ m}}{2} = 0,88 \text{ m}.$$

Outro resultado importante é que estes valores não dependem da distância da pessoa até o espelho. Isso porque sempre haverá uma relação de proporcionalidade entre os valores de BC e BB' , cujo valor é 2. Com isso, você pode ter ideias de como elaborar a sequência didática sobre espelhos planos. Escreva um plano de aula detalhado. Que outras atividades você poderia propor para complementar ou ainda adaptar esta atividade?

Avançando na prática

Espelhos esféricos e argumentos geométricos

Descrição da situação-problema

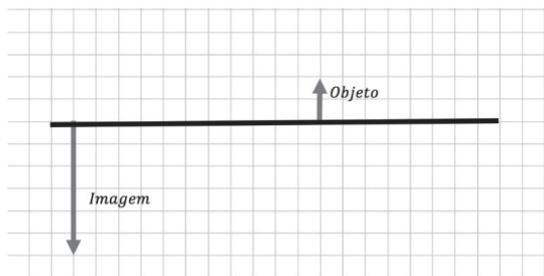
Como base na óptica geométrica, podemos resolver problemas e situações com argumentos geométricos, apenas seguindo os princípios apresentados na Seção 4.1 e os raios notáveis apresentados nesta seção. Dessa forma, é comum encontramos problemas em livros e atividades que necessitam desses argumentos.

Por exemplo, vamos imaginar que durante suas aulas um aluno trouxe uma questão do livro para discussão. Você decide usar a questão como uma atividade extra para a turma, dividindo-a em grupos para trabalhar na solução. Enquanto eles se organizam e iniciam os trabalhos, você se senta em sua mesa e estrutura um gabarito, para depois circular entre os estudantes e auxiliar os grupos com dificuldades.

O problema tem como ilustração base a Figura 4.29, em que são mostrados o objeto e a imagem gerada por um espelho

posicionado próximo deste objeto. Observe que as figuras estão em escala de tamanho.

Figura 4.29 | Ilustração base para o problema no qual s alunos irão trabalhar



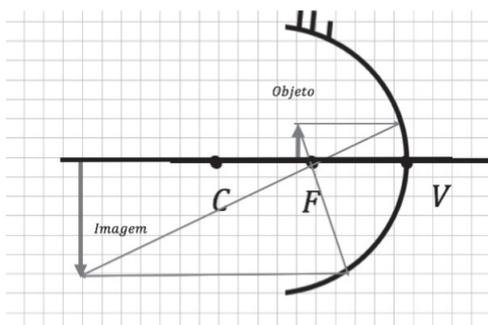
Fonte: elaborada pelo autor.

Com isso, algumas perguntas poderiam ser trabalhadas com estudantes: que tipo de espelho deve ser empregado para ter essa configuração de objeto-imagem? Em que posição o objeto deve ser posicionado para que isso seja possível? Considerando que o desenho está na escala de 1:1 cm, qual seria o valor da distância focal desse espelho?

Resolução da situação-problema

Com o desenho, a única possibilidade de gerar uma imagem maior e invertida é se o espelho for do tipo esférico e côncavo. Além disso, precisamos colocar o objeto entre o centro de curvatura e o foco, como mostra a Figura 4.30.

Figura 4.30 | Uma reconstrução da Figura 4.29, considerando que o espelho é do tipo esférico côncavo



Fonte: elaborada pelo autor.

Pela figura, podemos concluir que o aumento linear é de 3 vezes, se adotarmos a escala da figura. Como a imagem é invertida, podemos obter a relação:

$$A = -\frac{p'}{p} \rightarrow -3 = -\frac{p'}{p} \rightarrow p' = 3p.$$

Adotando que 0 corresponde ao vértice, podemos obter uma relação entre distância do objeto e da imagem. Olhando para a representação apresentada pelo problema:

$$p' - p = 11 \text{ cm}.$$

Com as duas equações, podemos obter o valor:

$$p' - p = 11 \rightarrow 3p - p = 11 \rightarrow p = 5,5 \text{ cm}.$$

A distância da imagem será de:

$$p' = 3p = 3(5,5 \text{ cm}) = 16,5 \text{ cm}.$$

Por fim, podemos obter a distância focal pela relação:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow f = \frac{p \cdot p'}{p + p'}.$$

Então, com os valores numéricos, teremos:

$$f = \frac{(5,5 \text{ cm}) \cdot (16,5 \text{ cm})}{(5,5 \text{ cm}) + (16,5 \text{ cm})} \cong 4,13 \text{ cm}.$$

E você, que outros aspectos discutiria com seus estudantes? Com essa atividade os estudantes puderam fixar diversos conceitos sobre o estudo dos espelhos esféricos e a construção das imagens por aspectos geométricos.

Faça valer a pena

1. Os espelhos são instrumentos ópticos que conjugam imagens em função do fenômeno da reflexão da luz. Os formatos mais comuns de espelho são os esféricos e planos. Sobre este tema, avalie as afirmações a seguir.

I - Ao conectarmos dois espelhos planos formando uma abertura em um ângulo de 60° , o número de imagens formadas será de 5.

II - Posicionando um objeto a 10 cm de um espelho convexo com distância focal de 20 cm, sua imagem será maior, direita e virtual.

III - Posicionando um objeto no foco de um espelho côncavo, teremos uma imagem imprópria.

IV - A imagem de um objeto posicionado a 1,75 cm de um espelho côncavo de distância focal de 2 cm tem tamanho 4 vezes maior que o

objeto original.

V - Se deslocarmos um espelho plano por 2 metros, a distância de deslocamento de uma imagem formada neste espelho será de 4 m.

Dessa forma, podemos afirmar que apenas são verdadeiros:

- a) Os itens I e IV.
- b) Os itens II, III e V.
- c) Os itens III, IV e V.
- d) Os itens III e IV.
- e) Os itens I, III e V.

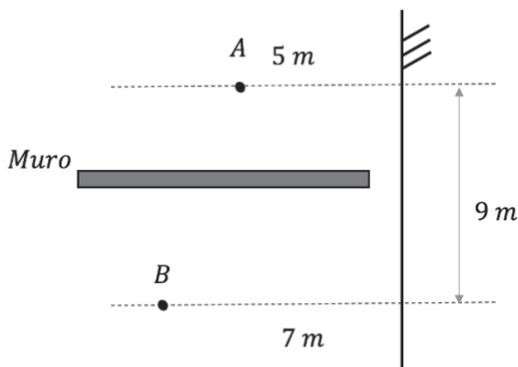
2. Um comerciante pretende ser capaz de visualizar toda a parte posterior de sua loja, aumentando seu campo visual. Para isso, ele posiciona um espelho esférico na parede oposta à entrada da loja. Em determinada situação, a imagem de um cliente próximo a uma prateleira tem a metade do tamanho original.

Considerando que uma pessoa esteja posicionada a 50 cm do espelho, o tipo de espelho utilizado e o raio de curvatura será de:

- a) Côncavo, 25 cm.
- b) Convexo, 25 cm.
- c) Convexo, 50 cm.
- d) Côncavo, 50 cm.
- e) Convexo, 100 cm.

3. Duas pessoas A e B estão posicionadas a 5 m e 7 m de distância de um espelho plano, e entre elas há um muro, como mostra a figura a seguir. A distância em linha reta das duas pessoas é de 9 m. As pessoas somente podem se ver através da reflexão da luz pelo espelho.

Figura | Representação do problema apresentado



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, a distância percorrida pela luz de A até B deve ser de:

- a) 9 m.
- b) 11 m.
- c) 12 m.
- d) 15 m.
- e) 18 m.

Seção 4.3

Lentes e refração

Diálogo aberto

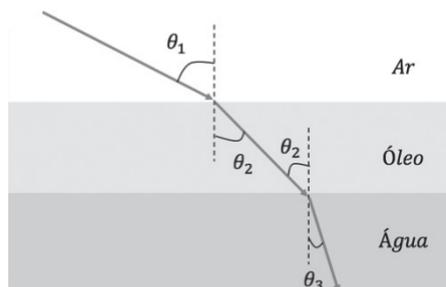
Na seção anterior, trabalhamos com o conceito da reflexão da luz, em que a luz interage com uma superfície e volta a viajar no mesmo meio. Agora, vamos considerar que a luz pode atravessar de um meio para outro, em um fenômeno chamado de **refração da luz**. Podemos visualizar este fenômeno quando colocamos um canudo dentro de um copo com água. Ao visualizarmos a parte externa deste copo, teremos a imagem de um canudo como se estivesse quebrado.

Lembre-se de que nesta unidade você foi colocado no lugar de um professor de Física que trabalha em uma escola que possui poucos recursos do laboratório. Então, para trabalhar os conceitos de óptica geométrica, você precisa de criatividade para desenvolver atividades de baixo custo.

Para trabalhar com o fenômeno da refração da luz, você propôs uma atividade que permite obter um valor aproximado do índice de refração da água e do óleo de cozinha. No planejamento da atividade, você percebe que precisará dos seguintes itens: um recipiente transparente, água, óleo de cozinha, dois transferidores e uma ponteira laser.

Podemos esquematizar o experimento com a Figura 4.31, em que são depositados a água e óleo, de forma que são formadas camadas no recipiente. Então, os alunos apontarão o laser na direção da superfície de divisão do ar com o óleo, que depois de sofrer refração viajará do óleo para água. Dessa forma, é necessário estimar três ângulos, como indica a Figura 4.31.

Figura 4.31 | Esquema do experimento didático de refração



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao preparar suas notas de aula antecipadamente, você realizou o experimento e obteve os valores indicados no Quadro 4.2. Com estas informações, como podemos organizar os conceitos e cálculos para obter um valor aproximado do índice de refração do óleo e da água? Como podemos validar estes valores obtidos?

Quadro 4.2 | Valores obtidos para os ângulos do experimento

Caso	θ_1	θ_2	θ_3
Situação 1	15	11	14
Situação 2	20	14	18
Situação 3	25	17	22
Situação 4	30	20	26
Situação 5	35	23	30

Fonte: elaborado pelo autor.

Para ajudar nesta situação, esta seção discutirá os conceitos de refração da luz e a aplicação em lentes delgadas e em instrumentos ópticos. No final há uma breve apresentação sobre os defeitos de acuidade visual mais comuns, como miopia, astigmatismo e presbiopia.

Não pode faltar

Você já deve ter visualizado um canudo dentro de um copo com água ou com um refrigerante transparente. Nesta situação, temos a sensação de que o canudo está quebrado, como se houvesse uma descontinuidade. O efeito é bem perceptivo na região da interface de transição entre o ar e o líquido. A explicação para este efeito é a refração da luz, fenômeno luminoso associado à passagem da luz de um meio para outro. Esta passagem promove a alteração da velocidade da luz, provocando a alteração da trajetória do raio de luz.

Na Seção 4.1, discutimos que a luz viaja com uma velocidade constante de $c = 3 \cdot 10^8$ m/s no vácuo, ou seja, na ausência de matéria. Em outros meios, a luz viaja com velocidade menor, em função da interferência das moléculas sobre a luz. Esta interferência é caracterizada na grandeza adimensional conhecida como índice de refração (n), que expressa a dificuldade que um meio oferece à passagem da luz. Para obtermos este valor, temos a razão:

$$n_{\text{meio}} = \frac{c}{v_{\text{meio}}}$$

Em que v_{meio} é a velocidade da luz naquele meio. No ar, o índice de refração é de $n_1 = 1,00$, enquanto na água este valor é de $n_{\text{água}} = 1,33$ a 20 °C. Assim, a luz tem sua velocidade alterada ao entrar na água. Então, classificamos o ar como um meio menos refrigente e a água mais refrigente. Além disso, o valor de n é um número maior ou igual do que 1, pois em nenhum meio a velocidade pode ser maior do que a velocidade da luz no vácuo.

De forma análoga à reflexão, a refração da luz tem duas leis básicas:

I. O raio de luz incidente, que se propagara no meio 1, chega até a interface de separação com o meio 2, com um ângulo de incidência θ com a normal. Então, o raio refratado irá emergir da interface com um ângulo θ_r , com a reta normal. Os raios incidentes, refratados e a normal são coplanares.

II. A relação entre os ângulos de incidência e a refração depende do índice de refração, na equação denominada de **Lei de Snell**, na forma:

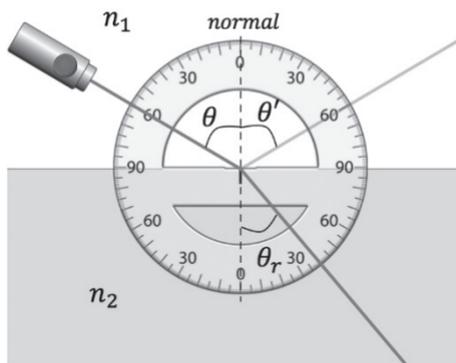
$$n_1 \cdot \text{sen } \theta = n_2 \cdot \text{sen } \theta_r .$$

A Figura 4.32 é a ilustração destes dois princípios e indicação

dos ângulos de incidência e refração. Com a relação da velocidade da luz no meio e o índice de refração, podemos obter as seguintes proporções com os ângulos de incidência e refração:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Figura 4.32 | Ilustração dos raios incidentes e refratados, com o uso do simulador *Desvio da Luz*



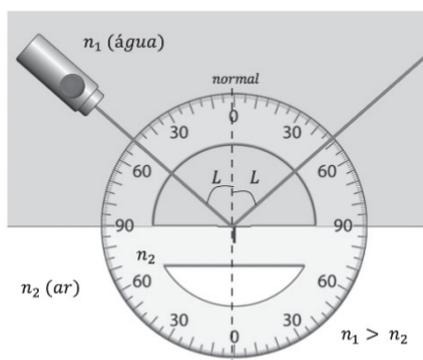
Fonte: elaborada pelo autor.

Os fenômenos da refração e reflexão da luz ocorrem quase que sempre juntos: uma parte da luz incidente com um ângulo θ na interface entre dois meios sofrerá reflexão com um ângulo θ' , com a reta normal; enquanto que a outra parte atravessará para o outro meio, pelo fenômeno da refração, com um ângulo de refração de θ_r . No caso em que o segundo meio é menos refringente que o primeiro ($n_1 > n_2$), a luz refratada tende a se afastar da reta normal.

À medida que aumentamos o ângulo do raio incidente em relação à reta normal, o ângulo do raio refratado aumentará, até o momento em que ele é coincidente à superfície de separação. Nesta situação, o ângulo de refração é de 90° e é denominado de **ângulo limite**. Aumentando ainda mais o ângulo de incidência, não observaremos mais a refração e ocorrerá apenas o fenômeno da reflexão. Chamamos essa situação de **reflexão total**, e o ângulo limite de incidência a partir do qual isso ocorre, descrito na Figura 4.33, é calculado por:

$$\text{sen}L = \frac{n_2}{n_1}.$$

Figura 4.33 | Reflexão total da luz como mostra a figura do simulador *Desvio da Luz*



Fonte: elaborada pelo autor.

O fenômeno da reflexão total da luz é a explicação para o funcionamento da fibra óptica. A fibra óptica é um filamento de vidro ou plástico transparente, cujo índice de refração é maior que o do envoltório, geralmente um plástico opaco. Ao incidirmos um feixe de laser no interior da fibra óptica, com um ângulo maior que o ângulo limite, haverá apenas reflexão da luz no seu interior, impedindo perdas do feixe de luz por refração. Nas telecomunicações os feixes de luz transportam informação, assim, a reflexão total da luz permite conexões mais rápidas e eficientes. Em muitas cidades já há internet com o uso de fibras ópticas, com altas velocidades de conexão.



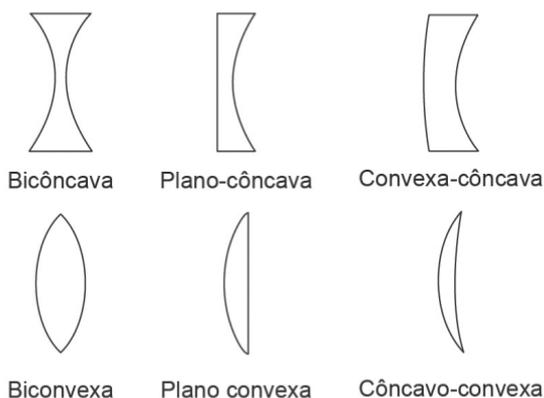
Assimile

Quando um raio de luz chega até a interface de separação de dois meios, com índices de refração diferentes, podem ocorrer dois fenômenos: a **reflexão**, em que o raio volta a propagar-se no meio original, e a **refração**, em que raio de luz atravessa para outro meio, alterando sua velocidade.

As lentes esféricas são uma aplicação prática para o fenômeno da refração da luz. Lentes são corpos transparentes limitados por duas superfícies em que pelo menos uma delas é curva. Com isso é possível formar seis combinações com superfícies côncavas,

convexas e planas, como apresenta a Figura 4.34. A classificação das lentes depende das bordas, porção extremas das lentes. Quando as bordas são mais espessas do que a porção central, são chamadas de bordas espessas e classificadas como *divergentes*. No caso em que a porção central é maior do que a borda, a lente é denominada de lente delgada, classificada como *convergente*. As lentes convergentes têm como nomenclatura "*convexa*" no final do nome e as lentes divergentes têm como nomenclatura "*côncava*", ao final do nome.

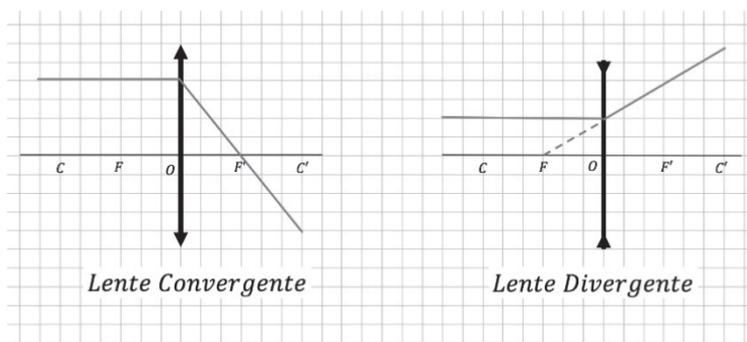
Figura 4.34 | Tipos de lentes esféricas possíveis



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma forma de simplificar a notação das lentes esféricas é adotar o sistema de setas, como indica a Figura 4.35. Os raios de luz incidentes têm pequena inclinação em relação ao eixo principal e a espessura da lente é desprezível quanto às dimensões da situação física. De forma análoga aos espelhos, temos a posição do centro óptico (O) e o foco (f). Porém, a distância focal é calculada de forma mais elaborada, como veremos. Para as lentes convergentes, o foco é de natureza real, enquanto as lentes divergentes têm foco de natureza virtual.

Figura 4.35 | Representação das lentes convergentes e divergentes



Fonte: elaborada pelo autor.

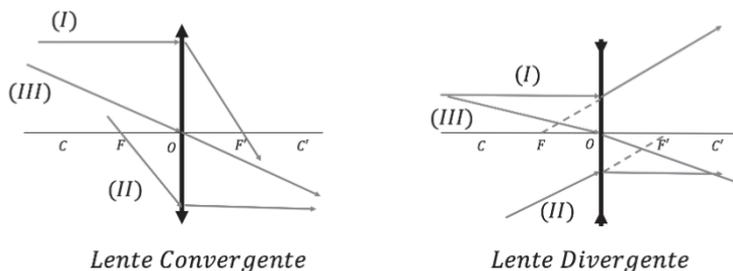
A construção das imagens conjugadas por lentes esféricas é semelhante a dos espelhos esféricos, com a única diferença de que os raios de luz agora atravessarão a lente. Neste caso, os raios notáveis são apresentados na Figura 4.36, para lentes convergentes e divergentes:

I. Todo raio paralelo ao eixo principal que incide sobre a lente refrata passando na direção do foco.

II. Todo raio que incide passando na direção do foco refrata paralelamente ao eixo principal.

III. Todo raio que incide na direção do centro óptico não sofre desvio ao ser refratado pela lente.

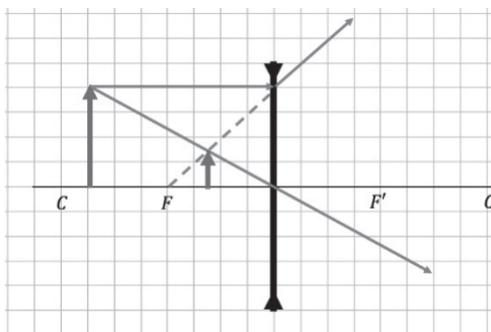
Figura 4.36 | Raios notáveis para lentes convergentes e divergentes, relacionada com a numeração do texto



Fonte: elaborada pelo autor.

Para **lentes divergentes**, a imagem conjugada sempre será direita, de natureza virtual e menor que o objeto. Isso ocorre ao posicionarmos os objetos a qualquer distância da lente, como ilustra a Figura 4.37.

Figura 4.37 | Lentes divergentes, a imagem conjugada é sempre menor, direita e virtual



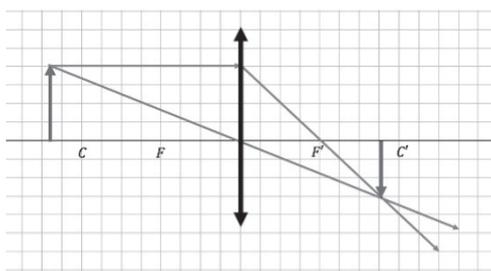
Fonte: elaborada pelo autor.

Para **lentes convergentes**, a imagem conjugada depende da posição do objeto em relação à lente. Para isso, vamos adicionar os chamados pontos antiprincipais (C e C'), localizados a uma distância duas vezes maior que o foco principal.

1) Objeto localizado após o ponto antiprincipal C .

A imagem formada está localizada entre o ponto antiprincipal C' e o foco F' , com natureza real, invertida e menor do que o objeto, como ilustra a Figura 4.38.

Figura 4.38 | A imagem conjugada por uma lente convergente com o objeto além do ponto C

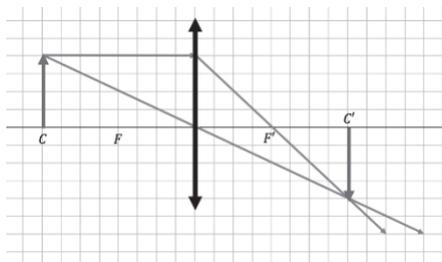


Fonte: elaborada pelo autor.

2) Objeto localizado na posição de antiprincipal C .

A imagem formada está localizada no ponto antiprincipal C' , com natureza real, invertida e de mesmo tamanho do que o objeto, como ilustra a Figura 4.39.

Figura 4.39 | A imagem conjugada por uma lente convergente com objeto no ponto C

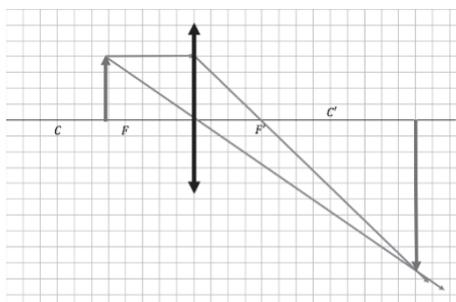


Fonte: elaborada pelo autor.

3) Objeto localizado entre o ponto principal C e o foco F .

A imagem formada está posicionada além do ponto antiprincipal C' , com natureza real, invertida e maior do que o objeto, como ilustra a Figura 4.40.

Figura 4.40 | Imagem conjugada por lente convergente com objeto entre o ponto principal e o foco

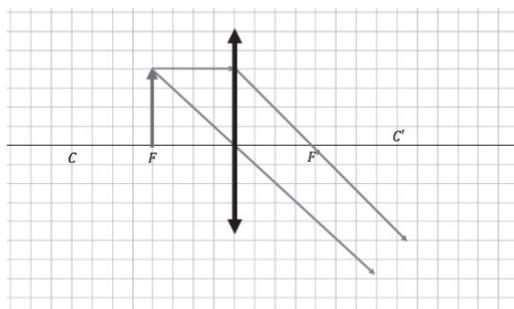


Fonte: elaborada pelo autor.

4) Objeto localizado sobre o foco F .

Os raios emergentes da lente são paralelos, assim, a imagem não será formada. A imagem então é classificada como imprópria, como ilustra a Figura 4.41.

Figura 4.41 | A imagem conjugada por uma lente convergente com objeto sobre o foco

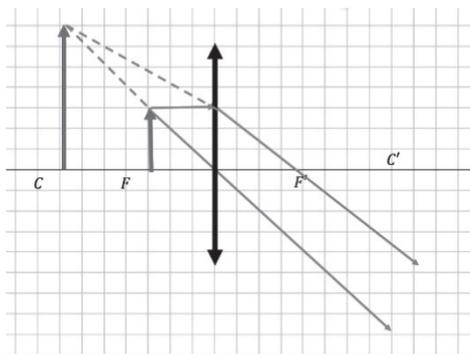


Fonte: elaborada pelo autor.

5) Objeto localizado entre o foco F e o centro óptico O .

A imagem formada é de natureza virtual, direita e maior do que o objeto, como ilustra a Figura 4.42.

Figura 4.42 | A imagem conjugada por uma lente convergente, objeto entre o foco e centro óptico



Fonte: elaborada pelo autor.



Refleta

A lupa é um instrumento óptico composto por uma lente convergente, que tem como função promover o aumento dos objetos que desejamos observar. Em qual posição devemos colocar um objeto em relação ao centro óptico, para obter a imagem desejada? Quais são suas características?

Outra forma de obter as informações sobre a imagem conjugada pelas lentes é por meio do estudo analítico, que está baseado na **equação de Gauss**, trabalhada na Seção 4.2:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Em que p é a distância do objeto e p' é a distância da imagem em relação à lente. Por fim, f é a distância focal. A convenção de sinal para lentes é:

$f > 0$ Lente Convergente, $f < 0$ Lentes Divergentes.

Aqui também vale as relações de sinais proposta anteriormente:

$p' > 0$ Imagem Real, $p' < 0$ Imagem Virtual.

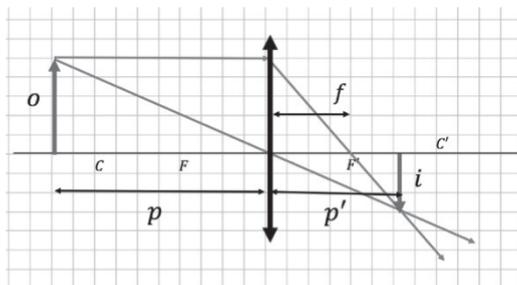
A Figura 4.43 apresenta as grandezas importantes para a imagem conjugada. As expressões para o aumento linear (A) também se mantêm:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Ou ainda a expressão:

$$A = \frac{f}{f - p}$$

Figura 4.43 | Grandezas importantes no estudo analítico das lentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Se o valor de $A > 0$, a imagem é direita, caso contrário $A < 0$, a imagem é invertida. A posição de distância focal depende da curvatura das faces que formam a lente, além da relação entre os índices da refração. A expressão conhecida como a equação dos fabricantes de lentes permite calcular a distância focal como função dos raios e dos índices de refração da lente, indicado como 2, e do juntar indicado como 1:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

Em que os raios podem ter valor positivo para faces convexas e negativo para faces côncavas. Para as faces planas, o raio é infinito e a razão $\frac{1}{R}$ tende a zero. A distância focal de lentes é expressa pela grandeza **dioptria (D)**, que popularmente chamamos de "grau". A dioptria tem como unidade di e é calculada pela razão:

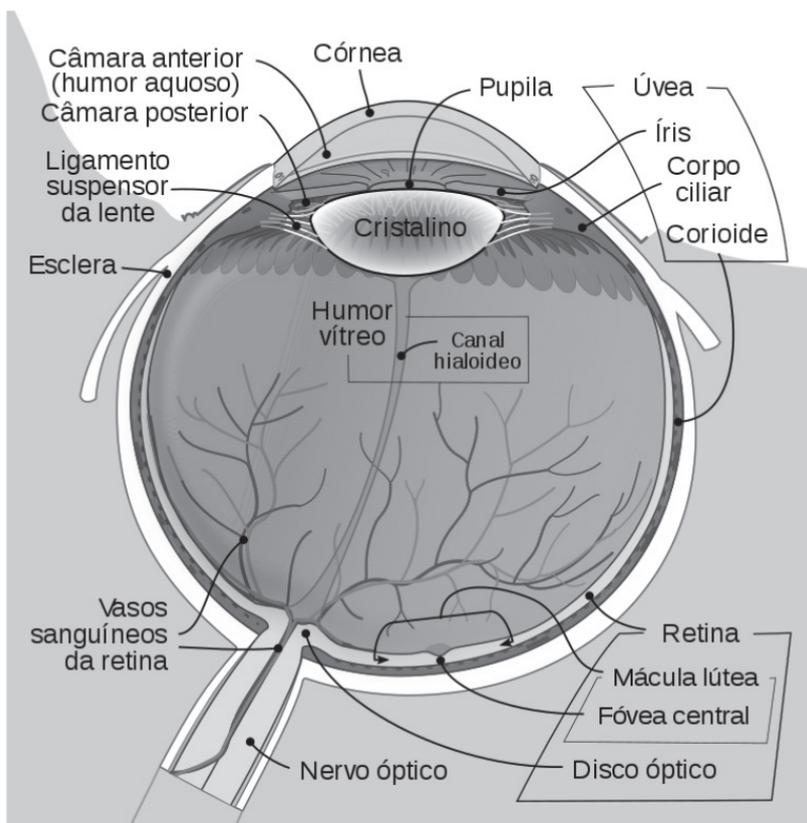
$$D = \frac{1}{f}.$$

Como as lentes podem ser utilizadas para corrigir anomalias na visão? Para isso descobrir, precisamos conhecer um ponto do funcionamento do nosso sentido da visão.

Problemas de visão

O olho humano é uma estrutura complexa, que depende de terminações nervosas e estruturas transparentes para permitir a passagem da luz. As partes mais interessantes para o nosso estudo, pelo ponto de vista da Física, é o **crystalino**, que funciona com uma lente biconvexa, que desvia os raios de luz para o fundo do olho, na **retina**. Na retina há estruturas de detenção de luz que enviam impulsos nervosos ao cérebro, por meio do **nervo óptico**, que permitem a construção de imagens e a visão. A Figura 4.44 apresenta um corte esquemático do olho humano.

Figura 4.44 | Desenho do olho humano



Fonte: <<https://goo.gl/ooec3U>>. Acesso em: 5 ago. 2017.

A entrada de luz é controlada pela **íris**, cujo orifício central chamado de **pupila** tem tamanho variável, de acordo com luminosidade do meio. Uma pessoa com visão normal enxerga objetos desde uma distância de 25 cm até o infinito.

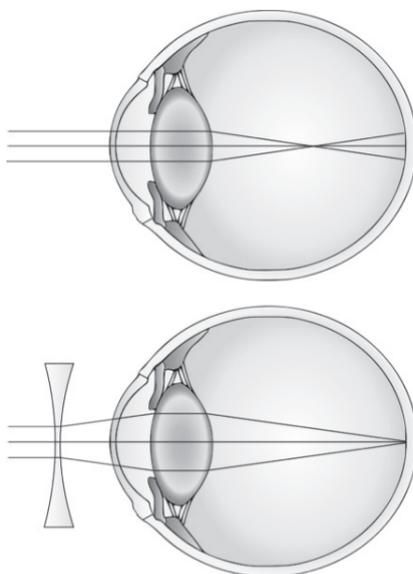
Para que a imagem seja acomodada na retina, a distância focal deve ser variável, controlada pelos músculos ciliares, em um movimento chamado acomodação visual. Quando observamos um objeto distante (ponto remoto), os músculos estão relaxados. A contração máxima ocorre com o objeto localizado a 25 cm, no chamado ponto próximo.

Por questões de fisiologia ou ainda de idade, este sistema pode sofrer deformações ou perder capacidade de acomodação,

provocando a **miopia**, a **hipermetropia** ou a **presbiopia**, que podem ser corrigidos por lentes esféricas.

A **miopia** ocorre quando o alongamento excessivo do globo ocular impede que a imagem conjugada por objetos localizados a grande distância sejam focalizados na retina. Como a posição de foco está antes da retina é formada uma imagem não nítida, dificultando a visão. Como a acomodação visual não é alterada, as imagens de objetos próximos não é afetada. A correção da miopia é feita com lentes divergentes, que têm como função alterar a posição de distância focal para mais distante do cristalino. A Figura 4.45 apresenta um olho com miopia.

Figura 4.45 | Representação de um olho com miopia e correção por lente divergente

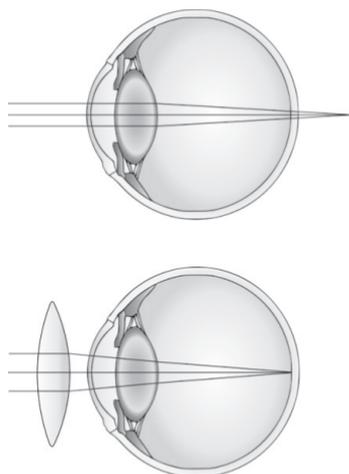


Fonte: <<https://goo.gl/jF9NBL>>. Acesso em: 5 ago. 2017.

A **hipermetropia** ocorre quando o olho sofre um encurtamento, obrigando a realizar o movimento de acomodação visual para visualizar objetos no infinito. Como esta acomodação ocorre muito antes, ele perde a capacidade de focalizar objetos localizados próximos ao olho. Assim, uma pessoa com hipermetropia tem dificuldade de visualizar objetos próximos. A hipermetropia é corrigida com o uso de lentes convergentes. A Figura 4.46 apresenta um olho com hipermetropia.

A **presbiopia** ocorre quando o sistema de acomodação visual perde sua capacidade em função do nosso envelhecimento. Com o passar dos anos, o cristalino perde a flexibilidade, impedindo sua compressão. Assim, a pessoa passa ter dificuldade de visualizar objetos próximos.

Figura 4.46 | Representação de um olho com hipermetropia e a correção por lente convergente



Fonte: <<https://goo.gl/VyMnkj>>. Acesso em: 5 ago. 2017.

O **astigmatismo** ocorre quando deformações na córnea promovem várias imagens projetadas na retina. Assim, a pessoa não consegue ver com nitidez. A correção do astigmatismo é feita por lentes cilíndricas, que podem ser do tipo convergente ou divergente.



Exemplificando

Ao organizar as coisas antigas de sua família, um aluno encontrou uma lente com a seguinte marcação: $+0,5$ di. Depois de uma pesquisa, descobriu que se tratava de um antigo projetor, que foi improvisado como uma lente de grau pelo seu avô. Com esta situação, responda às seguintes questões:

- Qual é a distância focal desta lente? Ela é convergente ou divergente?
- Ao posicionar um objeto a 20 cm da lente, a que distância da lente a imagem conjugada será formada? Quais serão as suas características?

(c) Qual anomalia visual o avô deste aluno deveria possuir para utilizar esta lente improvisada?

Resolução:

(a) A marcação da lente indica que a diopia é de +0,5, então, o sinal positivo indica que esta lente é do tipo convergente. A distância focal é obtida pela razão inversa com a diopia, na equação:

$$D = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{D} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m}.$$

Então, a distância focal é de 2 m.

(b) Para obtermos a posição da imagem, aplicamos a equação de Gauss com os respectivos sinais:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{0,2} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{0,2 - 2}{2(0,2)},$$
$$p' = -\frac{0,4}{1,8} \cdot \frac{2}{9} \cong -22,2 \text{ cm}.$$

O sinal de menos indica que a imagem é virtual, localizada na frente da lente. O aumento linear pode, então, ser calculado por:

$$A = -\frac{p'}{p} = -\frac{(-2,9 \text{ m})}{(0,2 \text{ m})} \rightarrow A \cong +11.$$

O aumento é positivo, assim, a imagem é direita e maior que o objeto, pois o aumento é maior que 1. Essas características correspondem à figura apresentada na Figura 4.42, em que o objeto é colocado entre o foco e centro óptico. A imagem conjugada é virtual, direita e maior que o objeto.

(c) As lentes convergentes são utilizadas em casos em que há deformação no formato do olho. As anomalias associadas a esta característica são a hipermetropia e a presbiopia. Como as lentes encontradas pelo aluno são convergentes, podemos prever que seu avô tinha hipermetropia.



Pesquise mais

As lentes esféricas têm muitas aplicações, e também são empregadas em telescópios, microscópios e em câmeras fotográficas. Para saber

mais sobre este assunto é recomendada a leitura das páginas 66 até 77 do livro Física IV.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Óptica Geométrica. In: **Física IV: óptica e Física moderna**. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016. p. 66-77.

Você encontra este material on-line na sua biblioteca virtual.

Sem medo de errar

No começo desta seção, você foi colocado no lugar de um professor que está planejando uma atividade experimental com seus alunos. O objetivo era encontrar o índice de refração da água e do óleo de cozinha por meio de dados experimentais coletados por eles, com a montagem apresentada na Figura 4.31. A equação base para encontrar o índice de refração de um meio é a **lei de Snell**, na forma:

$$n_{\text{ar}} \text{sen } \theta_1 = n_{\text{óleo}} \text{sen } \theta_2.$$

Neste caso, o índice de refração do ar é 1, então, teremos a seguinte equação:

$$\text{sen } \theta_1 = n_{\text{óleo}} \text{sen } \theta_2.$$

Com os dados da segunda e terceira colunas do Quadro 4.3, podemos obter os valores do seno de cada um, como apresenta o Quadro 4.4. Com esta estratégia é possível realizar a linearização da função. Se plotarmos esses pontos no plano cartesiano é possível ajustar uma reta, cujo coeficiente angular corresponde ao índice da refração do óleo.

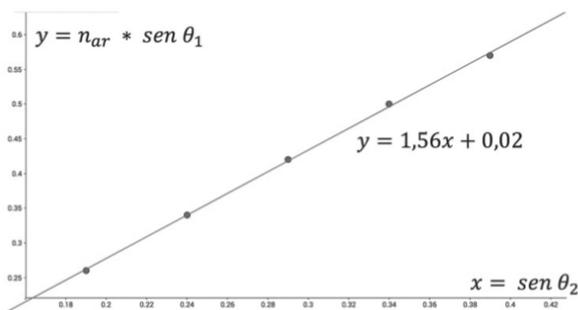
A Figura 4.47 apresenta os pontos obtidos pelo cálculo do seno do índice de incidência e a refração para a passagem da luz do ar para o óleo. Com o auxílio do programa gratuito *Geogebra*, podemos ajustar uma reta e obter um valor de índice de refração para o óleo.

Quadro 4.3 | Valores do seno dos ângulos de incidência e refração do ar para óleo

Caso	$\text{sen}\theta_2$	$\text{sen}\theta_1$
Situação 1	0,19	0,26
Situação 2	0,24	0,34
Situação 3	0,29	0,42
Situação 4	0,34	0,50
Situação 5	0,39	0,57

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.47 | Retra ajustada pelo programa Geogebra – ar e óleo



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, o índice de refração experimental obtido para o óleo é de aproximadamente 1,56. Com este valor, podemos trabalhar com os dados da terceira e quarta coluna. Nesta condição, a lei de Snell resulta na forma:

$$n_{\text{óleo}} \text{sen}\theta_2 = n_{\text{água}} \text{sen}\theta_3.$$

Nosso interesse será no índice de refração água, com base no índice de refração do óleo. No Quadro 4.4 são apresentados os valores dos senos do ângulo de incidência e refração da interface óleo e água.

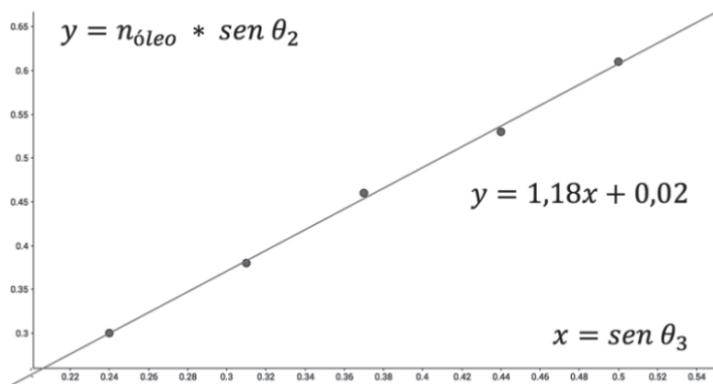
Quadro 4.4 | Valores do seno dos ângulos de incidência e refração do óleo para água

Caso	$\text{sen}\theta_2$	$n_2\text{sen}\theta_2$	$\text{sen}\theta_3$
Situação 1	0,19	0,30	0,24
Situação 2	0,24	0,37	0,31
Situação 3	0,29	0,45	0,37
Situação 4	0,34	0,53	0,44
Situação 5	0,39	0,61	0,50

Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 4.48 são apresentados os valores do seno dos pontos experimentais coletados pelos alunos. Além disso, é indicada a curva ajustada pelo programa *Geogebra*, com seus parâmetros.

Figura 4.48 | Retra ajustada pelo programa Geogebra – óleo e água



Fonte: elaborada pelo autor.

Com isso, podemos concluir que o índice de refração experimental da água é de aproximadamente 1,18. Os gráficos podem servir de base para discutir como é realizado o tratamento de dados e como podemos avaliar a confiabilidade deles. Perceba que nos gráficos há uma flutuação natural nos dados, mas a reta obtida fica bem ajustada.

Para finalizar, você precisa procurar em livros de referência os valores do índice de refração do óleo e da água, obtendo os valores padrão de 1,33 para a água e 1,46 para o óleo de cozinha. Você pode discutir com os estudantes quais erros podem ter ocorrido durante a realização do experimento, quais suas limitações ou mesmo como melhorar o experimento para obter resultados mais precisos. Que outras sugestões você traria para essa prática? E para discutir o conceito de refração com seus alunos? Lembre-se de preparar planos de aula bem completos e de abrir espaço durante a aula para que os estudantes reflitam e cheguem a suas próprias conclusões. Mais um desafio concluído!

Avançando na prática

Simuladores computacionais para lentes e espelhos esféricos

Descrição da situação-problema

Imagine que você, como professor de assistência de dúvidas de uma escola, precisa elaborar um esquema de revisão para os estudantes sobre as lentes esféricas, mas deseja elaborar algo que os alunos possam interagir e verificar as respostas dos exercícios apresentados em sala de aula. Após uma busca na internet, você depara-se com o simulador *Lentes Esféricas*, escrito dentro do *Geogebra* (Disponível em: <<https://ggbm.at/b6nBCFdz>>. Acesso em: 30 ago. 2017). Neste simulador é possível trabalhar com a equação de Gauss e as diferentes particularidades de sinais que esta equação exige. Com este meio tecnológico, ajude seus alunos a compreenderem a seguinte situação.

Em um experimento de óptica, os alunos utilizaram uma lente divergente para obter a imagem de um objeto com o aumento de 25%. A distância entre imagem e objeto é de 16 cm. Como podemos obter o valor da distância focal desta lente? Como comprovar este valor com o uso do simulador? Como você esquematizaria esta resolução?

Resolução da situação-problema

Com as informações do problema, podemos esquematizar as duas equações:

$$-\frac{p'}{p} = 0,25 \rightarrow p' = -0,25p \text{ e } p + p' = 16.$$

Resolvendo este sistema de equações, temos:

$$p + (-0,25p) = 16 \rightarrow 0,75p = 16 \therefore p = 21,3 \text{ cm}$$

E a imagem será posicionado em: $p' = -0,25(21,3) = -5,3$.

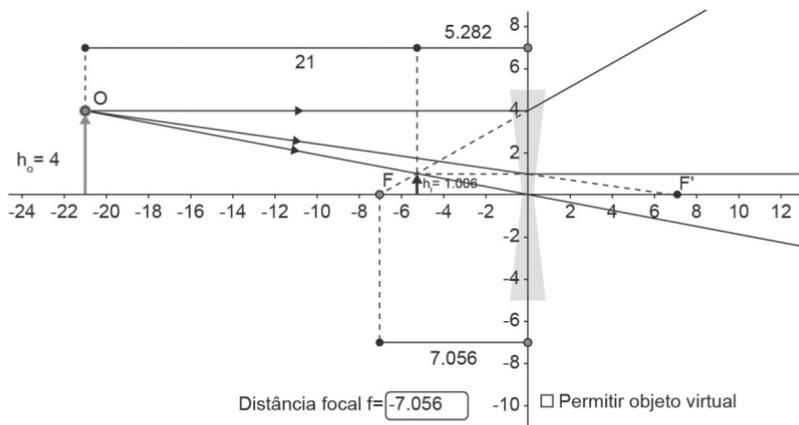
Então, a equação de Gauss permite obter o valor da distância focal f pela expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{21,3} - \frac{1}{5,3} \rightarrow f = \frac{21,3(5,3)}{5,3 - 21,3}$$

Este valor é condizente com uma lente divergente, pois o foco é número negativo. Com o uso do simulador, podemos visualizar esta situação de forma aproximada, como indica a Figura 4.49. Assim, podemos dar significado aos valores discutidos e verificar alguns resultados que obtemos pelo desenho geométrico. Para uma aula de revisão, este tipo de atividade é de bom proveito para os alunos e facilita a visualização

$$f = -\frac{112,9}{16} = -7,05.$$

Figura 4.49 | Representação criada pelo simulador para o problema desenvolvido pelo professor



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. O fenômeno da refração da luz ocorre quando a luz passa de um meio para outro, o que causa uma mudança na sua velocidade de propagação. Para quantificar esta alteração, devemos considerar os índices de refração do meio de incidência e refração. Sobre este fenômeno, avalie as seguintes afirmativas sobre um meio X, no qual foram realizados alguns experimentos. Adote: $n_{ar} = 1$ e $v_{ar} = 3 \cdot 10^8$ m/s.

A luz, ao passar do ar para um material X com um ângulo de 60° com a reta normal, sofre refração e sua direção é alterada, sendo que o raio de luz refratado forma um ângulo de 30° com a reta normal.

I - O índice de refração do meio X é $\sqrt{3}$.

II - Pode ocorrer reflexão total da luz quando a luz passar do meio X para o ar.

III - O raio de luz se propaga no meio X com velocidade de $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^8$ m/s.

IV - Ao incidirmos um raio de luz com um ângulo de 45° com a normal do ar para o meio X sobre a superfície de separação, o ângulo de refração

será de $\theta_r = \arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Então, podemos afirmar que são corretas apenas as afirmativas:

- a) I e II.
- b) I, II e III.
- c) II, III e IV.
- d) III e IV.
- e) I, II e IV.

2. Uma lente esférica é composta por uma face convexa de raio 20 cm e outra côncava de raio 50 cm. O material da lente tem um índice de refração de 1,5 e está imerso no ar, com índice de refração 1.

Então, esta lente tem uma distância focal de _____ e pode ser utilizada para correção da(o) _____.

A sequência de palavras que completa corretamente a afirmativa é:

- a) $2/3$ m, astigmatismo.
- b) $3/2$ m, presbiopia.
- c) $1/3$ m, miopia.
- d) $2/3$ m, hipermetropia.
- e) $3/2$ m, miopia.

3. Durante uma exposição de cinema, um objeto retangular de dimensões 12,5 cm por 30,0 cm é posicionado a 25 cm de uma lente convergente, com distância focal de 20 cm. Pela posição do objeto em relação à lente, será conjugada uma imagem de dimensões maiores que o objeto e invertida.

Com esta configuração, a área projetada por este objeto na tela do cinema será de:

- a) $0,6 \text{ m}^2$.
- b) $0,8 \text{ m}^2$.
- c) $0,9 \text{ m}^2$.
- d) $1,0 \text{ m}^2$.
- e) $1,2 \text{ m}^2$.

Referências

BELISÁRIO, R. A natureza da luz: ela se comporta ora como partícula, ora como onda. **Revista Pré-Univesp**, São Paulo, v. 61, jan. 2017. Disponível em: <<http://pre.univesp.br/a-natureza-da-luz#.WWZ1CMbOpp8>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da física**: óptica e física moderna. 9. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen- LTC, 2011. v. 4.

KELLER, F. J.; GETTYS, W.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1997. v. 2.

SILVA, F. W.O. da. A evolução da teoria ondulatória da luz e os livros didáticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 29, n. 1, p. 149-159, jun. 2007. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/060207.pdf>>. Acesso em: 6 jul. 2017.

SIMULADOR PHET: **Desvio da luz**. s.d. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/bending-light>. Acesso em: 5 ago. 2017.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física IV**: óptica e física moderna. 14. ed. São Paulo: Person Education Brasil, 2016.

ISBN 978-85-522-0178-6



9 788552 201786 >