

# Modelagem de sistemas dinâmicos



# Modelagem de sistemas dinâmicos

Marley Fagundes Tavares

© 2017 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

**Presidente**

Rodrigo Galindo

**Vice-Presidente Acadêmico de Graduação**

Mário Ghio Júnior

**Conselho Acadêmico**

Alberto S. Santana  
Ana Lucia Jankovic Barduchi  
Camila Cardoso Rotella  
Cristiane Lisandra Danna  
Danielly Nunes Andrade Noé  
Emanuel Santana  
Grasiele Aparecida Lourenço  
Lidiane Cristina Vivaldini Olo  
Paulo Heraldo Costa do Valle  
Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

**Revisão Técnica**

Ricardo Carvalho Quesada  
Roberto Mac Intyer Simões

**Editoração**

Adilson Braga Fontes  
André Augusto de Andrade Ramos  
Cristiane Lisandra Danna  
Diogo Ribeiro Garcia  
Emanuel Santana  
Erick Silva Griep  
Lidiane Cristina Vivaldini Olo

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

T231m      Tavares, Marley Fagundes  
Modelagem de sistemas dinâmicos / Marley Fagundes  
Tavares. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional  
S.A., 2017.  
236 p.

ISBN 978-85-8482-855-5

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Título.

CDD 515.3

---

2017  
Editora e Distribuidora Educacional S.A.  
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza  
CEP: 86041-100 – Londrina – PR  
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br  
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

# Sumário

<b>Unidade 1   Princípio de modelagem matemática de sistemas dinâmicos com uso de software</b> _____	<b>7</b>
Seção 1.1 - Introdução à modelagem matemática _____	9
Seção 1.2 - Introdução aos sistemas dinâmicos _____	25
Seção 1.3 - Fundamentos de MATLAB _____	43
<b>Unidade 2   Modelagem de sistemas elétricos</b> _____	<b>65</b>
Seção 2.1 - Modelagem matemática de sistemas elétricos: circuito RC e amplificadores operacionais _____	67
Seção 2.2 - Modelagem matemática de sistemas elétricos: circuito RLC _____	85
Seção 2.3 - Modelagem matemática de sistemas elétricos com uso de software _____	101
<b>Unidade 3   Modelagem de sistemas mecânicos</b> _____	<b>119</b>
Seção 3.1 - Modelagem matemática de sistemas mecânicos translacionais _____	121
Seção 3.2 - Modelagem matemática de sistemas mecânicos rotacional e motor de corrente contínua _____	137
Seção 3.3 - Modelagem matemática de sistemas mecânicos com uso de software _____	155
<b>Unidade 4   Modelagem de sistemas fluidicos e térmicos</b> _____	<b>173</b>
Seção 4.1 - Modelagem matemática de sistemas hidráulicos _____	175
Seção 4.2 - Modelagem matemática de sistemas pneumáticos _____	195
Seção 4.3 - Modelagem matemática de sistemas térmicos _____	213



# Palavras do autor

Olá, aluno! Seja bem-vindo.

Sabemos que a engenharia é arte de criar ou otimizar processos. Nós, engenheiros, buscamos sempre melhorar nossas atividades e qualidade de vida. Mas como podemos saber se nossa inovação ou otimização é válida? Como podemos testar as nossas novas ideias de forma econômica, segura e sem perder muito tempo? Como podemos materializar as nossas ideias?

Quando imaginamos mudar um processo, temos em mente o que queremos, ou seja, nossa vontade é que o sistema responda da forma planejada para que possamos controlar esse processo. Porém, para controlar um sistema é necessário conhecê-lo. Para isso, precisamos saber como podemos representar esse sistema, quais as características que ele nos oferece em resposta a uma determinada ação ou entrada. Quais os tipos de representações possíveis para um sistema dinâmico? Poderia este modelo ser uma representação matemática? Como obter o modelo que aproxime os diversos sistemas nas mais diferentes áreas de aplicação como: elétrica, mecânica, hidráulica, pneumática, térmica, entre outras?

Nesse contexto, neste livro, inicialmente estudaremos o conceito de modelo e a importância da modelagem matemática para a engenharia. Além disso, ainda na Unidade 1, conheceremos as ferramentas básicas que utilizaremos em todo o curso: as formas-padrão mais utilizadas para representação dos modelos matemáticos de sistemas dinâmicos e um prestigioso software que nos permitirá testar diferentes condições aos nossos modelos. Nas Unidades 2, 3 e 4, entenderemos a aplicabilidade do modelo aos sistemas elétricos, mecânicos, fluídos e térmicos, respectivamente. Compreenderemos, também, suas diferenças, peculiaridade e testaremos, via software conhecido, diversas condições para obter o modelo ótimo ao sistema em estudo.

Para seu melhor aproveitamento, compareça às aulas regularmente, seja atento, faça anotações e pergunte ao seu professor sempre que tiver dúvidas. Bons estudos. Não esqueça de se dedicar bastante a mais essa nova etapa de seu curso.



## Princípio de modelagem matemática de sistemas dinâmicos com uso de software

### Convite ao estudo

Começando nossos estudos de modelagem de sistemas dinâmicos, iremos compreender o que é um modelo, qual seu significado, como ele contribui dentro de um projeto de controle e onde eles são usados. No entanto, por que utilizamos os modelos? Será que eles são únicos? Dando continuidade aos estudos, entenderemos um pouco mais sobre o que é um sistema dinâmico e como ele pode ser representado. Será que sempre teremos todas as informações necessárias para compor nosso modelo? Você já parou para pensar como os técnicos determinam os componentes que irão compor os mais variados protótipos que farão parte de um projeto de engenharia nas mais diversas áreas de aplicabilidades?

Com base nesses questionamentos e compreendendo a relevância do tema no seu desenvolvimento profissional, iremos agrupar os conhecimentos até então desenvolvidos com os conceitos anteriormente aprendidos com os cálculos e a física para aplicá-los à Engenharia. Assim, esta unidade desenvolverá os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) conhecer o que é um modelo; (2) entender o seu significado; (3) saber a importância da utilização dos modelos matemáticos em um projeto de Engenharia; (4) compreender como podem ser representados os modelos de um sistema dinâmico; (5) saber quais são as formas-padrão de representação desses modelos; (6) aprender a programar uma ferramenta de auxílio aos testes desses novos modelos.

A competência geral desta disciplina que você, aluno, deve adquirir é conhecer as ferramentas básicas necessárias para a modelagem matemática de diferentes sistemas.

Como engenheiros, estamos preocupados em apresentar produtos que atendam de forma eficiente e com qualidade as mais diversas demandas do mercado. Imagine se iniciássemos a construção de projetos como motores

elétricos, hidroelétricas, suspensão de carros, aviões, foguetes, prédios ou mesmo projetos menos complexos, como um grampeador de papéis, sem realizar os testes necessários que garantiriam sua funcionalidade, quão complexas não seriam suas construções? Além disso, estaríamos comprometendo a segurança dos profissionais, o custo do projeto e o risco ao meio ambiente. É nesse contexto que a aplicação dos conhecimentos técnicos de modelagem de sistemas dinâmicos auxiliará no desenvolvimento dos diversos projetos de Engenharia.

Nesta unidade, você aprenderá as etapas e a importância do desenvolvimento prévio dos modelos e quais são as representações-padrão dos modelos matemáticos, além de perceber o quanto é importante testar e simular os modelos com auxílio de um software nas mais diversas áreas. Bons estudos!

# Seção 1.1

## Introdução à modelagem matemática

### Diálogo aberto

Você já pensou em como as leis da Física podem contribuir com a melhoria e qualidade dos nossos sistemas? Como e onde aplicamos esses conhecimentos?

Nesta seção aprenderemos qual é o conceito, a importância e as áreas em que comumente utilizamos os modelos matemáticos, bem como quais são as etapas de uma modelagem e sua importância para a implementação dos projetos de engenharia. Assim, após a construção desses conhecimentos, conseguiremos os fundamentos necessários para a solução das diversas situações-problemas na área de Engenharia.

Como engenheiro projetista, seu desafio será identificar o problema e analisar se é possível otimizar ou desenvolver uma nova solução para melhoria do sistema. Você deverá selecionar quais são as características necessárias e suficientes para descrever com precisão seu processo, por exemplo, o sistema de suspensão/pneu de um modelo de automóveis, e analisar o bom funcionamento deste. Como podemos saber, de forma mais econômica, se este sistema está funcionando corretamente? Em realidades em que a redução de custo é indispensável, realizar esse diagnóstico por meio do uso de modelos pode tornar o produto final mais competitivo no mercado.

Como projetista, você deverá analisar a possível otimização desse protótipo, avaliar as propriedades que descreverão o modelo desse sistema, quais são as possíveis aproximações que poderemos implementar e, então, por meio das leis da Física, determinar o modelo e os componentes que irão compor a sua solução. Um conhecimento prévio do processo poderá auxiliá-lo na construção desse modelo matemático.

Também é preciso avaliar quais são as entradas e as saídas do sistema, isto é, quais são os sinais disponíveis no processo com base nos quais podemos obter a resposta desejada para nossa possível solução? Qual é a grandeza do sistema suspensão/pneu que resultará em um deslocamento da mola, representando um bom funcionamento desse sistema?

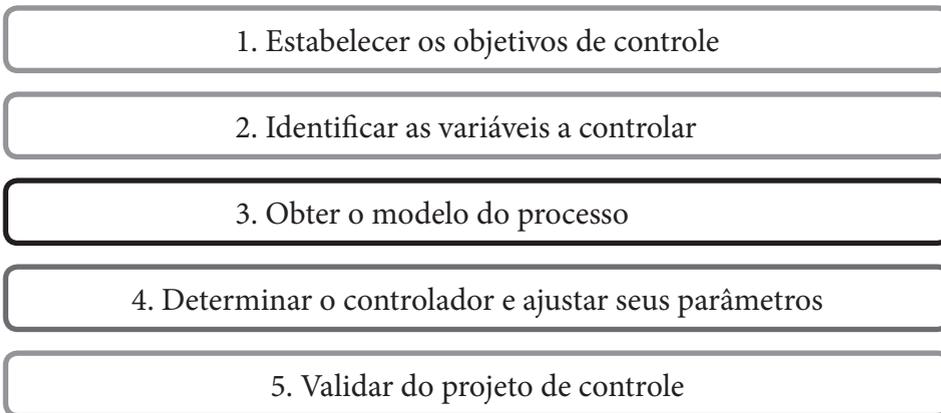
A partir de agora é preciso saber como construir nosso modelo, quais são as variáveis que contribuirão para o nosso diagnóstico e quais são os passos que precisamos seguir na modelagem dinâmica desse processo.

Bons estudos!

## Não pode faltar

Um projeto de engenharia de controle nasce da necessidade de criar ou otimizar um processo, com o objetivo de melhorar nossas atividades e qualidade de vida. Este pode ser, didaticamente, dividido em algumas etapas, como mostra a Figura 1.1.

Figura 1.1 | Fluxograma de projeto de engenharia



Fonte: elaborada pelo autor.



## Refleta

Imagine quão complicado seria iniciar a construção de projetos como edifícios, barragem de usina hidrelétricas, aviões, navios ou outros aparentemente mais simples, como o controle da velocidade do seu ventilador sem os testes que garantam sua funcionalidade. Quais componentes deve-se usar para implementação do produto final? Ele realmente funcionará?

Observando a Figura 1.1, notamos que a obtenção do modelo do processo é uma das etapas fundamentais para um projeto de engenharia de controle. Segundo Ogata (2010), esta é considerada a parte mais importante da análise do projeto.

Um modelo é a aproximação ou simplificação de algo real. Na Engenharia, este pode ter um significado físico ou matemático. Modelos físicos utilizam peças reais ou protótipos, confeccionados em tamanho natural ou em escalas. Estes devem se comportar da mesma forma que o sistema real, são muito utilizados nas fases de testes finais em um projeto e são comumente aplicados às áreas de Engenharia mecânica, civil ou naval. Já os modelos matemáticos são representações, por meio de um conjunto de equações, dos princípios físicos que regem a dinâmica do sistema com certa precisão dentro dos limites estabelecidos. Estes normalmente são usados nas fases iniciais, período que ainda não se fabricam ou se utilizam os componentes para a construção do protótipo. Normalmente, os modelos matemáticos são empregados em toda área científica, como: hidráulica, química, pneumática, elétrica, eletrônica, dentre outras.

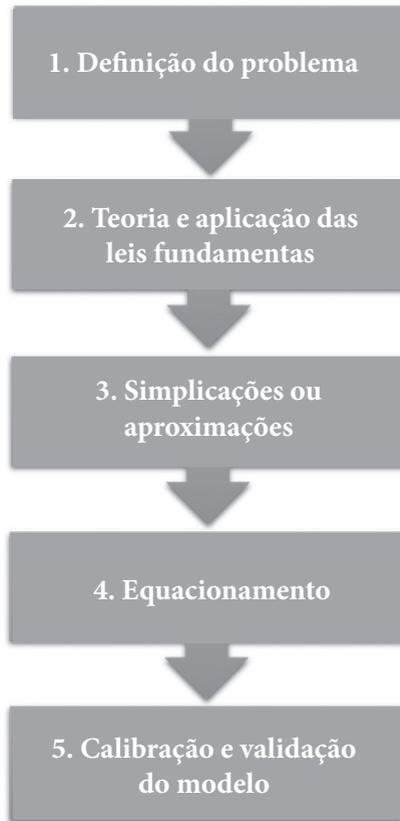
Outro ponto para o qual devemos atentar é que um modelo matemático não é único para um determinado sistema. Este pode ser representado de várias formas diferentes, a depender do que se queira representar e das simplificações consideradas. Devemos estabelecer uma relação entre simplicidade e precisão do modelo. Todavia, este é um fator crítico a ser considerado, pois a obtenção de um modelo muito preciso é algo complexo e envolve detalhes, muitas vezes, irrelevantes. Já os modelos muito simplificados podem deixar de incluir características importantes, gerando modelos com resultados insatisfatórios. Torna-se importante, portanto, encontrar o melhor nível de detalhamento que atenda o sistema em estudo. Um bom conhecimento prévio do processo poderá auxiliá-lo nessa decisão.

Nesse contexto, a modelagem matemática, processo de descrição ou criação do conjunto de equações que regem a dinâmica do sistema, leva em consideração determinadas aproximações ou simplificações necessárias para a obtenção do melhor modelo.

Um sistema é a combinação de componentes que se interagem para conseguir determinado objetivo. Já a dinâmica refere-se ao comportamento de um objeto ou variáveis ao longo do tempo. Assim, a modelagem matemática de um sistema dinâmico é uma representação ótima, por meio de equações, do comportamento dos elementos que se relacionam ao longo do tempo, segundo os princípios das leis da Física.

Em um processo de modelagem matemática de um projeto de Engenharia de controle, algumas fases tornam-se fundamentais, como apresenta a Figura 1.2.

Figura 1.2 | Fluxograma representativo de um processo de modelagem matemática



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, podemos descrever as fases apresentadas na Figura 1.2 como:

**1. Definição do problema:** nesta fase você irá determinar o que deseja conhecer, suas causas e efeitos, ou seja, qual é a variável que tenho no sistema para que eu possa obter a resposta que desejo otimizar ou inovar no meu processo? Quais são as entradas e saídas do meu sistema?



### Vocabulário

**Entrada:** qualquer grandeza que possa modificar o estado do sistema.

**Saída:** grandeza de resposta do sistema desejada ao meu projeto dada uma determinada entrada. Caracteriza o estado do meu sistema.

**2. Teoria e aplicações das leis fundamentais:** uma vez definido o processo, determine quais são as leis fundamentais da Física que regem seu sistema, por exemplo: Lei de Kirchhoff, Lei de Newton, Lei de Conservação das Massas etc.



### Exemplificando

Considere que seu sistema seja um circuito elétrico formado por um resistor e um capacitor. Se após a definição do seu problema você conclui que sua entrada será seu valor de tensão entregue ao sistema e sua saída será o valor de tensão sobre o capacitor, por exemplo, a lei fundamental para seu sistema será a Lei de Kirchhoff.

**3. Simplificações ou aproximações:** são considerações e limitações feitas no sistema para simplificação do seu modelo. Precisamos limitar as fronteiras do sistema que determinará quais elementos do processo serão estudados. Como mencionado, os modelos mais precisos são também os mais complexos e exigem um nível de detalhamento maior dos fenômenos envolvidos, podendo até ser inviável sua determinação. Deve existir um compromisso entre a simplicidade e a precisão, assegurando que o modelo consiga obter as características significativas a que deseja se modelar.

**4. Equacionamento:** nesta etapa você irá descrever as equações que compõem e interagem em seu sistema dinâmico a ser modelado. Para termos uma solução matemática definida, o número de variáveis deverá ser igual ao número de equações do sistema.



### Pesquise mais

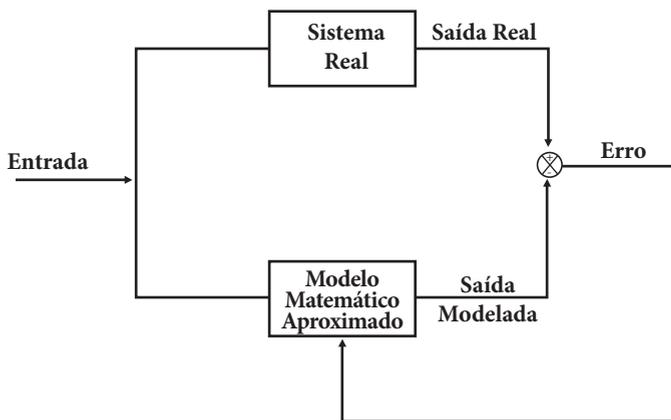
Um modelo é caracterizado por determinado número de variáveis e para ter solução matemática definida deverá ser montada igual ao número de equações. Estas, por sua vez, derivam da relação das equações descritas pelo emprego das leis da Física e deverão ser em número suficientemente igual ao número de variáveis. Veja mais em:

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

**5. Calibração e validação:** na etapa de calibração você irá realizar testes e fará perguntas como: "...e se... qual seria o resultado? O resultado melhora?".

Após os testes, você irá validar ou não o seu modelo aproximado do sistema. A validação é a parte em que você deverá comparar a resposta do seu modelo com o sistema real, julgando se as discrepâncias (ou erros) são aceitáveis ou não. Muitas vezes, os testes e as validações são realizados de forma sequencial até a obtenção do modelo ótimo para seu sistema, como o diagrama de blocos apresentado na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Etapa de calibração e validação



Fonte: elaborada pelo autor.

Caso não seja possível a medição em sistemas reais ou caso esse sistema não exista, visto que pode ser uma inovação, você poderá montar um protótipo ou bancadas experimentais para validação do seu modelo aproximado.

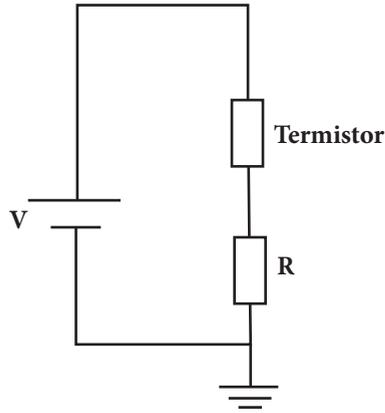
Após essa etapa, o projetista poderá avaliar se o projeto será ou não realizado. Caso ele consiga um bom modelo matemático que represente o sistema, ele poderá determinar, com base nos valores das variáveis, os componentes que formarão o protótipo físico estimado pelo projeto de Engenharia de controle.



### Exemplificando

A Figura 1.4 mostra parte de um circuito de medição de temperatura usando um termistor. Este é um semicondutor que tem seu valor de resistência alterado com a variação de temperatura, ou seja, os do tipo NTC (*negative temperature coefficient* – coeficiente de temperatura negativa) têm o valor da resistência diminuída com aumento da temperatura.

Figura 1.4 | Divisor de tensão



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, os passos de uma modelagem matemática seriam:

**1. Definição do problema:** a alteração do valor na tensão do termistor, provocada pela mudança no valor de temperatura, resultará na variação do valor de tensão do resistor R. Assim, podemos determinar nosso sinal de entrada como a tensão de entrada ( $V$ ) e nossa saída como a tensão sobre o resistor ( $V_R$ ).

**2. Teoria e aplicação das leis fundamentais:** Lei de Kirchhoff para encontrar o valor de  $V_R$ .

**3. Simplificações e aproximações:**

- Resistores puros e lineares.
- Condutores perfeitos com resistências, capacitância e indutâncias nulas.
- Condições iniciais nulas.
- Variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.

**4. Equacionamento:**

$$V = V_{Termistor} + V_R \quad (1.1)$$

$$V = (R_{Termistor} + R)I \quad (1.2)$$

$$I = \frac{V}{R_{\text{Termistor}} + R} \quad (1.3)$$

$$V_R = RI = R \frac{V}{R_{\text{Termistor}} + R} \quad (1.4)$$

Assim, sabendo o valor de tensão de entrada  $V$  e o valor do resistor ( $R$ ), saberemos o valor de tensão  $V_R$ . Quando a temperatura aumentar, por exemplo, o valor de  $R_{\text{Termistor}}$  diminui e o valor de  $V_R$  aumentará. Desse modo, poderemos associar esse valor com o da temperatura.

**5. Calibração e validação:** nesta fase são realizados testes para certificar o valor estipulado para  $R$  com as variações de temperatura conhecidas. Dessa forma, comprovaremos a aproximação do modelo. Este assunto será melhor abordado a partir da Seção 1.3 desta unidade.



### Assimile

Uma modelagem matemática de um sistema dinâmico, frequentemente, é composta pelas seguintes etapas:

- I. Definição do problema.
- II. Teoria e aplicação das leis fundamentais.
- III. Simplificação ou aproximações.
- IV. Equacionamento.
- V. Calibração e validação do modelo.

### Importância do modelo matemático de um sistema em um projeto de Engenharia de controle:

Os modelos matemáticos de um sistema dinâmico são normalmente utilizados em um projeto de engenharia de controle, pois:

- I. É muito oneroso e nada prático construir todas as alternativas possíveis para um sistema até encontrar a melhor solução para o problema.
- II. Hipóteses podem ser testadas antes da confecção do molde final.

III. A confecção ou construção direta dos modelos reais, além de impraticável, pode ser perigo à vida dos técnicos.

IV. O projetista possui controle e precisão maior do projeto, facilitando possíveis ações de manutenção posteriormente.

V. Uma vez construído o modelo, este pode ser utilizado inúmeras vezes para avaliação do projeto.

VI. Em tempos de preocupação com meio ambiente, a confecção do modelo garante segurança na realização do projeto.

## Sem medo de errar

### Descrição da situação-problema

Com intuito de manter a segurança, uma companhia de pneus contratou uma empresa de engenharia para análise do funcionamento do sistema pneu/suspensão de um dos seus veículos.

O engenheiro responsável deve entregar um relatório (laudo técnico, comprovado via memorial de cálculo) diagnosticando o bom funcionamento desse sistema pneu/suspensão do automóvel, que deve conter os seguintes itens:

- A modelagem do sistema avaliado.
- Os valores dos elementos que formarão esse sistema sobre as condições avaliadas.
- Testes para comprovação da viabilidade de funcionamento do sistema analisado.

Você é o engenheiro responsável por desenvolver esse projeto. Para isso, é preciso definir os limites do sistema avaliado e encontrar o modelo do sistema para análise a ser entregue no relatório. Como resolver esse problema?

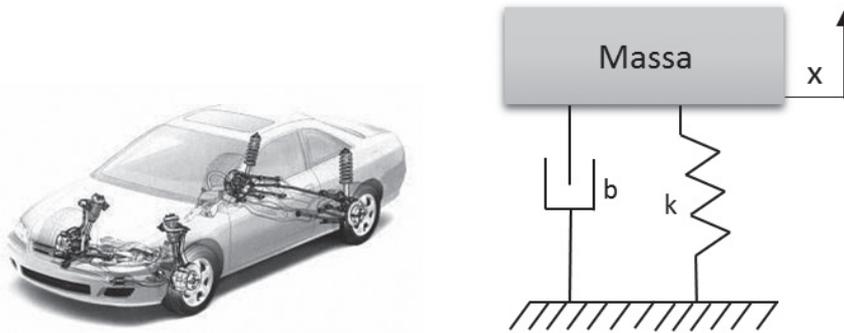
### Resolução da situação-problema

Para analisarmos o funcionamento do sistema de suspensão poderemos, por questões econômicas e de segurança física e ambiental, construir o modelo do sistema e submetê-lo a testes com as mesmas condições de uso. Assim, determinaremos os valores ótimos dos elementos que devem compor o sistema de suspensão do veículo. Se a empresa estiver utilizando os componentes com valores próximos ou iguais aos encontrados pelos testes, poderemos então atestar como seguro o funcionamento desse sistema, caso contrário, devemos sugerir valores ótimos para esse processo.

Dessa forma, para obtenção do modelo, executaremos as fases do processo de modelagem como as descritas a seguir:

**1. Definição do problema:** estimação dos valores dos elementos que compõem o sistema para atestarmos o bom funcionamento. Podemos considerar que este atua como um sistema de massa–mola–amortecedor viscoso, como mostra a Figura 1.5. Sendo assim, a entrada seria a força externa ( $f_{\text{externa}}$ ) aplicada ao sistema, gerada pelo impacto do pneu com solo, e a saída o deslocamento ( $x$ ) ocasionado na massa. A massa do carro é representada por  $m$  e  $k$  e  $b$  são coeficientes da mola e do amortecedor viscoso, respectivamente.

Figura 1.5 | Sistema aproximado de suspensão do carro



Fonte: adaptada de <<http://carros.hsw.uol.com.br/suspensoes-dos-carros.htm>>. Acesso em: 16 jul. 2016.

**2. Teoria e aplicação das leis fundamentais:** segunda Lei de Newton.

**3. Simplificações e aproximações:** como limitação do sistema podemos realizar as seguintes simplificações:

- Todas as massas são rígidas e têm valores constantes.
- As molas são puras e lineares. Logo, elas não têm perda de energia, não possuem massa e seus coeficientes são constantes.
- Os amortecedores são puros e lineares. Logo, eles não têm efeito de mola, não possuem massa e seus coeficientes são constantes.
- A massa translada em uma só direção.
- As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas a fim de manter o comportamento do sistema linear.
- Com exceção das forças da mola e do amortecedor, todas as demais forças são nulas.

#### 4. Equacionamento:

$$f_{\text{externa}}(t) + f_{\text{amortecedor}}(t) + f_{\text{mola}}(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (1.5)$$

$$f_{\text{mola}}(t) = -kx(t) \quad (1.6)$$

$$f_{\text{amortecedor}}(t) = -b \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.7)$$

Logo, substituindo 1.7 e 1.6 em 1.5, chega-se à Equação 1.8:

$$f_{\text{externa}}(t) - b \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (1.8)$$

**5. Calibração e validação:** nesta fase são realizados testes para certificar o valor estipulado para constante da mola ( $k$ ), o coeficiente do amortecedor e a massa ( $m$ ). Alteraríamos o valor da força externa para saber qual é o melhor resultado. Este assunto será mais bem abordado a partir da Seção 1.3 desta unidade.



#### Atenção

Atente-se nas fases para encontrar apenas o equacionamento do sistema. Os fundamentos e detalhes da modelagem de sistemas mecânicos serão abordados na Unidade 3.

É fundamental entender as fases da modelagem do sistema.

## Avançando na prática

### Acionamento automático da iluminação pública

#### Descrição da situação-problema

Em um projeto de automação de um sistema de iluminação pública, é preciso ligar as lâmpadas de forma automática à medida que o sol se põe. Você, como engenheiro projetista responsável pela parte do modelo do sensor, deverá entregar à equipe de

execução o memorial de cálculo do modelo proposto contendo a modelagem e o equacionamento desse seu projeto.

Para isso, será utilizado um sensor tipo LDR (*light dependent resistor* ou resistor dependente de luz) e um circuito comparador.

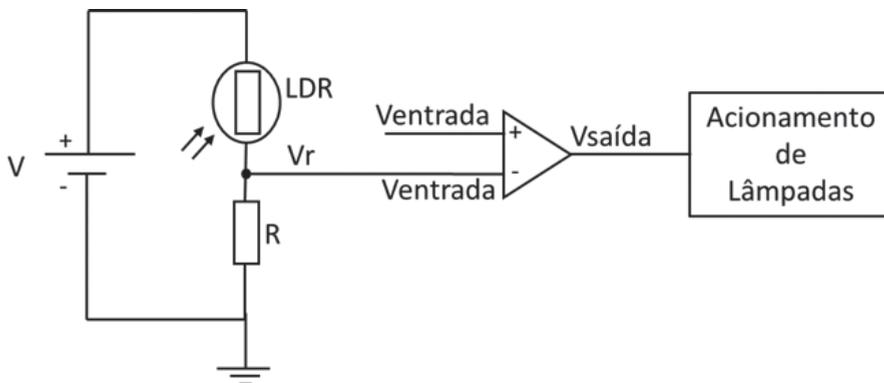
O LDR caracteriza-se por apresentar uma variação no valor de sua resistência à medida que se tem uma variação luminosa. Isto é, se a luminosidade aumenta, o valor da resistência apresentado pelo LDR diminui (ou vice-versa).

Já o comparador é formado por um componente eletrônico: o amplificador operacional, que nesse caso específico terá a função de comparar os valores de tensão de entrada positiva e negativa. Quando a entrada negativa resultar em um valor maior do que a entrada positiva, o valor da tensão de saída será nulo; porém, quando o valor de tensão da entrada positiva for maior do que o de tensão negativa, o valor de tensão de saída será máximo e teremos, portanto, o acionamento do circuito de iluminação.

## Resolução da situação-problema

**1. Definição do problema:** alteração no valor da resistência pela variação da intensidade luminosa e acionamento do circuito que ligará as lâmpadas. Podemos, portanto, representar esse sistema automático como um circuito divisor de tensão e um circuito comparador, como mostrado na Figura 1.6.

Figura 1.6 | Circuito representativo do sistema de acionamento automático da iluminação pública



Fonte: adaptada de <[http://www.maxwellbohr.com.br/downloads/robotica/mec1000\\_kdr5000/tutorial\\_eletronica\\_-\\_aplicacoes\\_e\\_funcionamento\\_de\\_sensores.pdf](http://www.maxwellbohr.com.br/downloads/robotica/mec1000_kdr5000/tutorial_eletronica_-_aplicacoes_e_funcionamento_de_sensores.pdf)>. Acesso em: 16 jul. 2016.

É sabido que à medida que a luminosidade aumenta, o valor da resistência de LDR diminui e o de tensão de saída ( $V_r$ ) aumenta. Sendo o valor de  $V_r$  o mesmo da tensão da entrada negativa no circuito comparador, este não acionará as lâmpadas, bem como o inverso é verdadeiro.

Assim, podemos determinar nosso sinal de entrada como a tensão de entrada  $V$  e nossa saída como a tensão sobre o resistor  $R$ .

**2. Teoria e aplicação das leis fundamentais:** Lei de Kirchhoff para encontrar o valor de  $V_R$ .

**3. Simplificações e aproximações:**

- Resistores puros e lineares.
- Circuito comparador ideal.
- Condutores perfeitos com resistências, capacitância e indutâncias nulas.
- Condições iniciais nulas.
- As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas a fim de manter o comportamento do sistema linear.

**4. Equacionamento:**

$$V = V_{LDR} + V_R \quad (1.9)$$

$$V = (R_{LDR} + R)I \quad (1.10)$$

$$I = \frac{V}{R_{LDR} + R} \quad (1.11)$$

$$V_R = RI = R \frac{V}{R_{LDR} + R} \quad (1.12)$$

Assim, sabendo o valor de tensão de entrada ( $V$ ) e o valor do resistor ( $R$ ), saberemos o valor de tensão ( $V_R$ ). Quando a luminosidade aumentar, o valor de  $V_{LDR}$  diminui e o de  $V_R$ , que é o mesmo da entrada negativa, aumentará. Comparando o valor da entrada negativa ao da entrada positiva conhecida, teremos o acionamento ou não do circuito das lâmpadas, ou seja, elas se acenderão ou não.

**5. Calibração e validação:** nesta fase são realizados testes para certificar se o valor estipulado para  $R$ , com as tensões conhecidas, acionaria ou não as lâmpadas. Alteraríamos esse valor até que conseguíssemos encontrar o melhor resultado. Este assunto será melhor abordado a partir da Seção 1.3 desta unidade.

**Faça valer a pena**

**1.** O modelo matemático é a aproximação ou simplificação de algo real expresso por meio das equações matemáticas. A modelagem matemática é o processo de criação ou determinação do conjunto de equações que regem a dinâmica do sistema.

Quais são as etapas de construção do modelo matemático, ou seja, qual é a ordem das etapas de uma modelagem matemática?

- a) Definição do problema, simplificação, validação, aplicação da fundamentação das leis fundamentais e equacionamento.
- b) Definição do problema, teoria e aplicação das leis fundamentais, simplificação, equacionamento, calibração e validação.
- c) Teoria e aplicação das leis fundamentais, definição do problema, simplificação, equacionamento, calibração e validação.
- d) Equacionamento, simplificação, definição do problema, aplicação das leis fundamentais, calibração e validação.
- e) Definição do problema, teoria e aplicação das leis fundamentais, simplificação e equacionamento.

**2.** Seria muito complexo iniciarmos um projeto de engenharia sem o uso de um modelo para realizarmos testes e propor melhorias.

Qual é a importância dos modelos matemáticos em um projeto de engenharia de controle?

- a) Evita gastos desnecessários, torna mais prática a análise das possíveis soluções propostas para o sistema, evita riscos à vida dos técnicos e garante a segurança do meio ambiente.
- b) Possibilita ao projetista um menor controle e precisão do projeto a ser realizado.
- c) É uma atividade desnecessária, visto que não traz nenhuma solução prática.
- d) Em tempos de grande competitividade por parte das empresas, construir um modelo é oneroso ao produto final.
- e) As atividades de manutenção não são facilitadas com a construção do modelo.

**3.** Em um projeto de engenharia de controle, obter o modelo do processo é a atividade mais importante da análise do projeto. Uma das fases da modelagem matemática é a calibração e validação do modelo.

Qual é a importância dessa etapa no processo?

a) Nessa etapa serão definidas quais são as entradas e saídas do sistema proposto.

b) Nessa etapa o projetista colocará em prática os conhecimentos de cálculos e física adquiridos até esse momento do curso.

c) Nessa fase poderão ser feitas perguntas como: "...e se...qual resultado?". Após os testes nada mais é realizado e o projetista tem o modelo ótimo para o sistema.

d) Nessa etapa o projetista poderá testar suas hipóteses para a possível solução do problema. Após os testes, o projetista compara o valor de saída do modelo com o do sistema real, julgando se são aceitáveis ou não as discrepâncias encontradas.

e) Nessa fase encontramos as equações que formarão o modelo do sistema.



# Seção 1.2

## Introdução aos sistemas dinâmicos

### Diálogo aberto

Dando continuidade aos nossos estudos de modelagem de sistemas dinâmicos, nesta seção iremos aprender ferramentas que permitem analisar e obter a resposta do modelo matemático de forma mais fácil e direta. Você já percebeu quão complexa é uma equação diferencial que consegue descrever a dinâmica de um sistema? Em um projeto de Engenharia de controle nos interessa saber de forma simples e direta a resposta ao sistema, dada uma determinada entrada, para que rapidamente possamos tomar decisões. Já se imaginou tendo de fazer isso por meio de equações com derivadas? Como relacionaríamos os sinais de entrada e saída se não conseguíssemos separar os parâmetros das equações que descrevem os sistemas?

Depois que o engenheiro obtém uma representação matemática de um sistema, é possível analisar seu desempenho por meio de respostas transitórias e em regime permanente. Todavia, como podemos fazer em um caso prático em que o sinal de entrada não é conhecido previamente? Conseguiremos obter a resposta do sistema?

Não esqueça de que você é o engenheiro responsável pela avaliação do funcionamento do sistema de suspensão de um dos veículos. Na seção anterior, você já obteve a equação diferencial que descreve esse sistema. Entretanto, será que ela é de fácil entendimento? Você consegue realizar sua tarefa de forma pragmática com base no modelo encontrado?

Sendo assim, nesta seção iremos apresentar duas outras formas de representação dos modelos matemáticos: a função de transferência e a representação por espaço de estado. Você irá compreender a utilidade dos diagramas de blocos e saberá como representar o sistema caso não seja possível obter o sinal de entrada.

Espero que você esteja animado para explorar todo esse conteúdo.

Bons estudos!

## Não pode faltar

O estudo do comportamento de sistemas complexos como motores, robôs, válvulas, direção hidráulica, amortecedores dos automóveis e outros equipamentos é conhecido como dinâmica de sistemas. Vimos na Seção 1.1 que os sistemas podem ser representados por modelos matemáticos e que este é um dos passos fundamentais em um projeto de engenharia de controle.

Na seção anterior vimos também que em um processo de modelagem matemática da dinâmica de muitos sistemas, como mecânicos, térmicos, hidráulicos, biológicos, dentre outros, é descrita em termos do equacionamento baseada nas leis fundamentais da física que regem o sistema, por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos, leis de Kirchhoff para sistemas elétricos, dentre outras. Estas leis, em sua grande maioria, resultam em equações diferenciais - visto que os sistemas sob consideração são dinâmicos por natureza - que relacionam a entrada com a saída do sistema em estudo.

Vale ressaltar que a solução de problemas de modelagem matemática por meio das equações diferenciais não é muito satisfatória, visto que os cálculos são complexos e muitas vezes não conseguimos separar os parâmetros do sistema. Ou seja, a variável de saída e a entrada do sistema em análise aparece em toda a equação, não sendo possível analisar de forma distinta a relação de saída a partir de uma determinada entrada. Para isso, utilizamos outras formas de representação dos modelos matemáticos como: **função de transferência** (modelagem no domínio da frequência) e **espaço de estado** (modelagem no domínio do tempo).

A dinâmica dos sistemas pode ser representada tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, cada uma delas com suas técnicas, vantagens e desvantagens. A representação no domínio da frequência é conhecida como abordagem clássica, sua principal vantagem é a interpretação rápida da resposta do sistema. Porém, sua maior desvantagem é que este pode ser utilizado apenas em sistemas lineares que não variam no tempo, além de que o uso dessa abordagem para sistemas multivariáveis (representação mais próxima de sistemas reais complexos) é quase inviável. Já a representação no domínio do tempo é aplicável tanto a sistemas lineares quanto a não lineares, que variam ou não com o tempo, monovariáveis ou multivariáveis, todavia a interpretação física dessa abordagem não é tão intuitiva.

- **Abordagem clássica**

- **Função de transferência**

Na abordagem clássica, os modelos matemáticos são representados por meio da função de transferência. Esta é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, quando todas as condições iniciais são consideradas nulas.



### Pesquise mais

Como você viu no curso de cálculo, a transformada de Laplace é um importante método alternativo para resolver as equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. Ao utilizar essa transformada, operações como diferenciação e integração são substituídas por operações algébricas no plano complexo  $s$ . Substituir uma equação diferencial por uma equação algébrica não apenas simplifica a representação dos sistemas, mas também simplifica a modelagem dos sistemas. Veja mais detalhes e propriedades da transformada de Laplace em:

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

É importante ressaltar que a aplicabilidade do conceito de função de transferência é limitada a sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo. Todavia essa representação é amplamente utilizada na análise e no projeto dos sistemas dinâmicos. Além disso, alguns importantes comentários sobre a função de transferência devem ser salientados, como:

- A função de transferência é inerente ao sistema, independentemente da magnitude e da natureza do sinal de entrada do sistema.
- A função de transferência relaciona a entrada e a saída, mas não fornece nenhuma informação relativa à estrutura física do sistema. Dessa forma, funções de transferência de diversos sistemas fisicamente diferentes podem ser idênticas.
- Se a função de transferência for conhecida, a saída do sistema poderá ser estudada para diferentes tipos de entrada, visando, assim, o melhor entendimento da natureza do sistema.

As raízes do numerador de uma função de transferência são denominadas zeros e do denominador polos. Assim, uma função de transferência de um sistema qualquer pode ser escrita em termos de polos e zeros, como na Equação 1.13 com ganho  $k=5$ .

$$H(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + s + 1} \quad (1.13)$$

- **Diagrama de blocos**

Além dessas características, as funções de transferência podem ser mais bem visualizadas na forma gráfica de diagrama de blocos, conforme mostra a Figura 1.7,

com o fluxo do sinal de entrada à esquerda (apontando para o bloco), o fluxo do sinal de saída à direita (apontando para fora do bloco) e o bloco funcional, ou simplesmente bloco, que contém a função de transferência de um sistema ou subsistemas.

Figura 1.7 | Diagrama de blocos de uma função de transferência



Fonte: elaborada pelo autor.

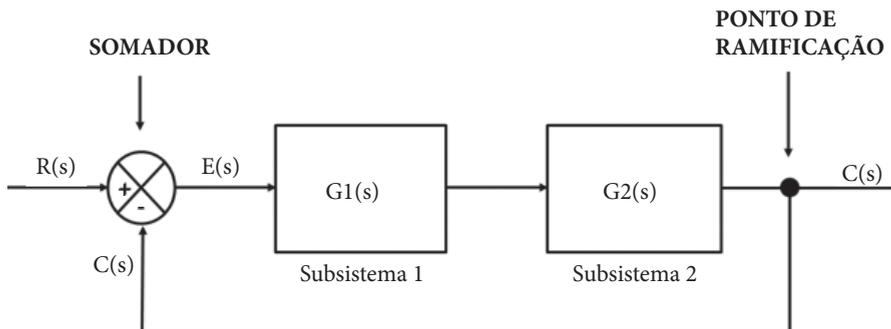
Observe que a resposta ou saída de um sistema é dada pela multiplicação do sinal de entrada pela função de transferência. Supondo que a função de transferência de um sistema seja  $G(s)$ , o sinal de entrada  $R(s)$  e o de saída  $C(s)$ , então, podemos expressar a saída do sistema como mostra a Equação 1.14.

$$C(s) = R(s)G(s) \quad (1.14)$$

A grande vantagem da representação de um sistema por diagrama de blocos é dada pela simplificação da análise dos sistemas. Ou seja, grandes sistemas podem ser representados em subsistemas mais simples, interligados por meio dos fluxos de sinais. Logo, de maneira simples, podemos avaliar a contribuição de cada componente para o desempenho global do sistema.

As interligações dos blocos são realizadas por meio de símbolos como: somador e ponto de ramificação, como mostra a Figura 1.8.

Figura 1.8 | Componentes de interligação dos diagramas de blocos

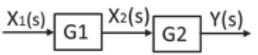
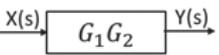
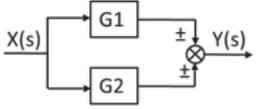
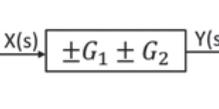
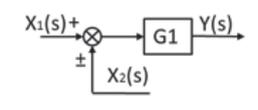
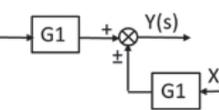
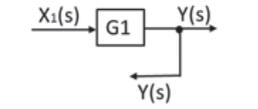
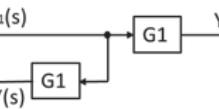
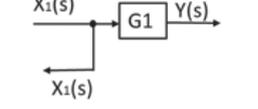
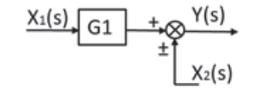
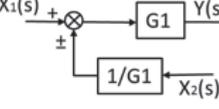
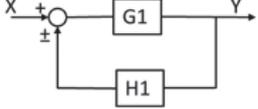
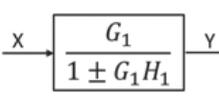


Fonte: adaptada de Ogata (2010).

Na junção de soma, ou somador, o sinal de saída é a soma algébrica dos sinais de entrada, como demonstrado na Figura 1.8, a saída  $E(s)$  resultaria em:  $E(s) = R(s) - C(s)$ ; já o ponto de ramificação distribui o sinal inalterado por vários pontos de saída, por exemplo, temos na mesma figura o sinal  $C(s)$  sendo distribuído de volta ao somador.

A representação em diagrama de blocos de um dado sistema pode, muitas vezes, ser reduzido a um diagrama com menor número de blocos que o original, por meio das técnicas de redução ou transformação. Algumas dessas técnicas são mostradas na Figura 1.9.

Figura 1.9 | Redução de diagrama de blocos

Redução/Transformação	Diagrama Original	Diagrama Equivalente
Cascata		
Paralelo		
Deslocando para frente um ponto de soma situado atrás de um bloco		
Deslocando para trás um ponto de derivação situado à frente de um bloco		
Deslocando para frente um ponto de derivação situado atrás de um bloco		
Deslocando para trás um ponto de soma situado à frente de um bloco		
Eliminando laço de retroação		

Fonte: elaborada pelo autor.

Outra característica importante dos diagramas de blocos é que eles não são únicos. Desse modo, diversos diagramas podem ser desenhados para um determinado sistema, de acordo com o ponto de vista e da análise que se pretende fazer do sistema.



### Refleta

Vimos na Seção 1.1, que uma das fases para obtenção do modelo do sistema é a definição do problema e a determinação dos sinais de entrada e saída do sistema.

Contudo, segundo Ogata (2010), na prática nem sempre o sinal de entrada de um sistema de controle é conhecido previamente, mas somente em alguns casos, podendo ser expresso de maneira analítica ou por meio de curvas.

Então, como podemos obter o modelo do sistema nos casos em que não temos o sinal de entrada?

#### • Sistemas de Ordem 1 e 2:

Para os casos em que não se pode obter o sinal de entrada, deve haver uma base de comparação do desempenho de vários sistemas na análise e no projeto de sistemas de controle. Essa base pode ser estabelecida detalhando os sinais de entrada de testes específicos e, em seguida, comparando-se as respostas dos vários sistemas com esses sinais. O uso de sinais teste pode ser justificado em virtude da correlação existente entre as características das respostas de um sistema a um sinal de entrada típico de teste e a capacidade de o sistema responder aos sinais de entrada reais (OGATA, 2010).

Geralmente, os sinais de entrada de teste utilizados são: funções degrau, rampa, parábola de aceleração, impulso, senoidais e ruído branco. Os sinais típicos que devem ser utilizados na análise das características do sistema dependem do comportamento da entrada a que o sistema será submetido, com maior frequência, nas condições normais de operação. Por exemplo, se um sistema estiver sujeito, com maior frequência, a variações bruscas de entrada, a função degrau poderá ser um bom sinal de entrada, bem como os sinais impulso deverão ser utilizados para sistemas sujeitos a entrada de grande impacto e, assim, sucessivamente.

É importante ressaltar que a resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: resposta transitória (do estado inicial ao final) e resposta permanente (comportamento do sinal de saída à medida que o tempo tende ao infinito).

Sabendo disso, podemos descrever os sistemas-padrão contínuos como:

- **Sistemas de ordem 1:** sistema cuja resposta é descrita por uma equação diferencial de primeira ordem e cuja função de transferência é demonstrada na Equação 1.15. Nessa equação,  $Y(s)$  é a saída do sistema,  $U(s)$  é a entrada,  $T$  é a constante de tempo e " $s$ " é uma variável complexa expressa como  $s = \sigma + j\omega$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (1.15)$$

De posse da função de transferência do sistema de ordem 1, Equação 1.15, analisaremos as respostas desse sistema a uma entrada típica degrau. Sabendo que a transformada de Laplace a uma entrada degrau é  $1/s$ , substituímos na Equação 1.15 o valor de  $U(s) = 1/s$ . Expandindo em frações parciais, a resposta do sistema, na frequência, é expressa pela Equação 1.16.

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad (1.16)$$

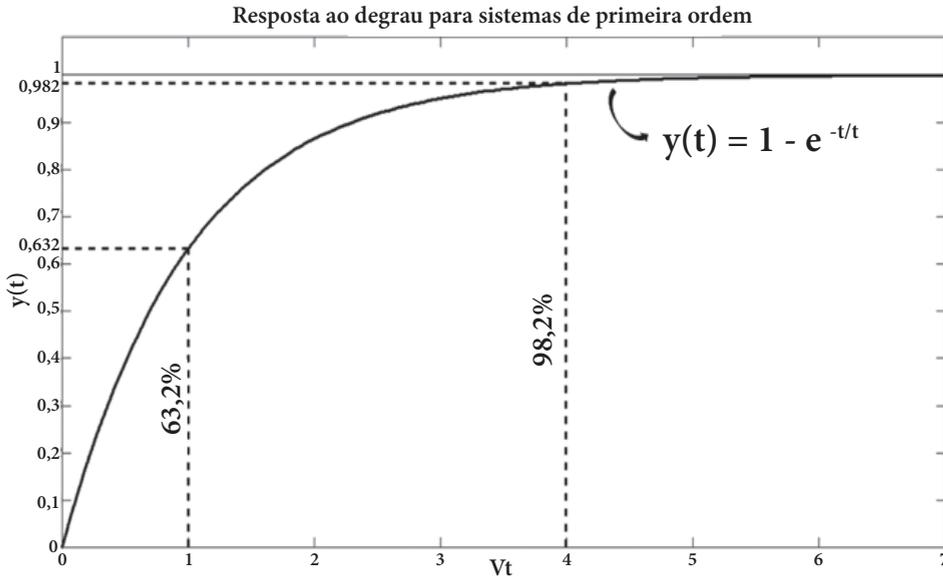
Ao aplicar a transformada inversa de Laplace à Equação 1.16, encontra-se a resposta do sistema no regime do tempo, como mostra a Equação 1.17.

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0 \quad (1.17)$$

Ao considerar que o tempo  $t = T$ , nota-se que a saída  $y(t)$  é 0,632, isso significa que a resposta alcançou 63,2% da sua variação total. Além disso, como a saída do sistema é uma função exponencial negativa, pode-se afirmar que quanto menor  $T$ , mais rápida a resposta do sistema. Por isso,  $T$  é denominado como a constante de tempo da resposta ao sistema, sendo considerada como uma especificação da resposta transitória para sistemas de ordem 1, visto que ela está relacionada à velocidade que o sistema responde a uma entrada degrau.

A curva exponencial da resposta da Equação 1.17 é mostrada na Figura 1.10.

Figura 1.10 | Curva exponencial de resposta para o sistema de ordem 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na prática, o regime permanente, ou estado estacionário, é alcançado quando a resposta permanecer, aproximadamente, a 2% do valor final ou a quatro constantes de tempo ( $4T$ ), esse intervalo é denominado tempo de acomodação.

- **Sistema de ordem 2:** sistema cuja resposta é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem e a função de transferência é demonstrada na Equação 1.18. Esta é conhecida como forma-padrão do sistema de segunda ordem. Nessa forma-padrão,  $C(s)$  é a saída,  $R(s)$  é a entrada,  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\zeta$  o fator ou taxa de amortecimento do sistema.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.18)$$

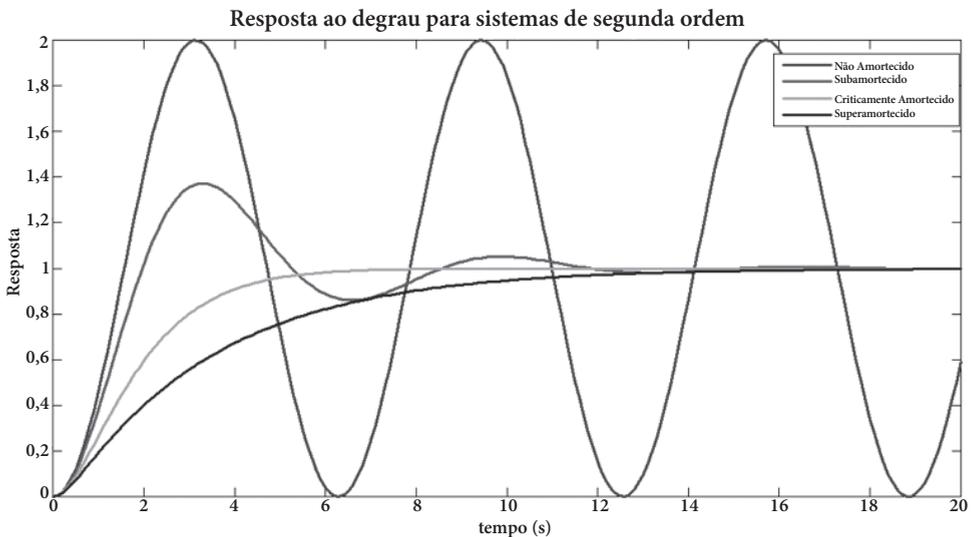
Enquanto na ordem 1 a variação de um parâmetro de um sistema altera simplesmente a velocidade da resposta, as variações nos parâmetros de um sistema de ordem 2 podem alterar a forma da resposta. Isto é, o comportamento dinâmico do sistema pode ser descrito em termo dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Assim:

- Se  $\zeta=0$ , o sistema é considerado **não amortecido** e os polos estão localizados um na origem e dois (par conjugado) sobre o eixo  $j\omega$ .
- Se  $0 < \zeta < 1$ , o sistema é chamado de **subamortecido** e os dois polos (par conjugado) são complexos.

- Se  $\zeta=1$ , o sistema é denominado criticamente **amortecido** e os polos estão localizados um na origem e dois são reais iguais.
- Se  $\zeta>1$ , o sistema é denominado **superamortecido** e os polos são reais negativos.

De posse da função de transferência do sistema de ordem 2, Equação 1.18, foram obtidas as respostas desse sistema  $C(s)$  quando aplicada a uma entrada degrau  $R(s)$  para os quatro diferentes casos: não amortecido, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido, como mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Resposta à entrada degrau para casos de amortecimento de segunda ordem: não amortecido (azul), subamortecido (vermelho), criticamente amortecido (amarelo) e superamortecido (roxo).



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o caso subamortecido, vale salientar algumas especificações da resposta transitória, como mostra a Figura 1.12:

- Tempo de atraso –  $t_d$ : trata-se do tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
- Tempo de subida –  $t_r$ : tempo necessário para que a forma de onda da resposta passe de 0,1 a 0,9 do valor final.
- Tempo de pico –  $t_p$ : tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico, ou pico máximo, calculado por meio da Equação 1.19.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.19)$$

- Máximo sobre sinal –  $M_p$ : é o valor máximo de pico da curva de resposta, expresso como uma porcentagem do valor em regime permanente, calculado por meio da Equação 1.20.

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100 \quad (1.20)$$

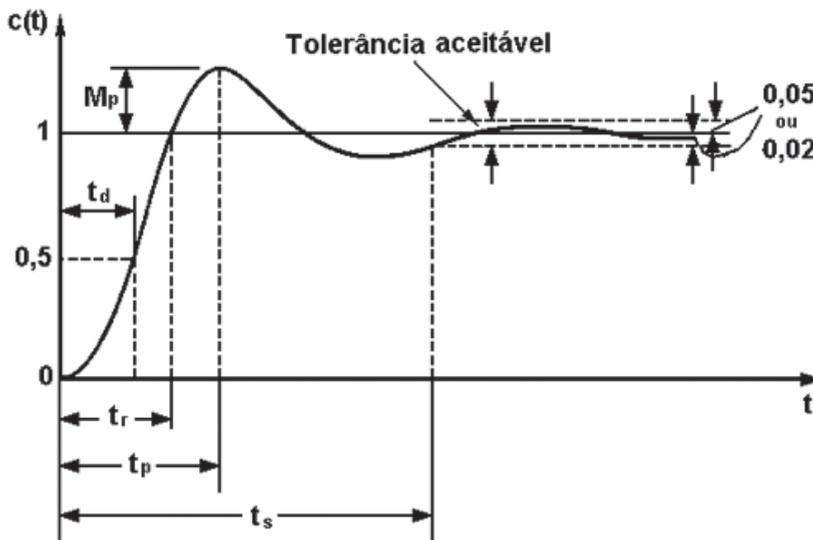
Assim, a frequência natural ( $\zeta$ ) pode ser calculada por meio da Equação 1.21.

$$\zeta = \frac{-\ln(M_p/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p/100)}} \quad (1.21)$$

- Tempo de acomodação –  $t_s$ : é o tempo necessário para que as oscilações amortecidas transitórias alcancem e permaneçam dentro de uma faixa (geralmente 2% ou 5%) em torno do valor final em regime permanente. Para o critério de 2%, o valor de  $t_s$  pode ser calculado como o demonstrado na Equação 1.22.

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (1.22)$$

Figura 1.12 | Curva de resposta ao degrau unitário para sistema de ordem 2 subamortecido



Fonte: adaptada de Ogata (2010).



### Assimile

As funções de transferência-padrão para modelagem de sistemas dinâmicos são dadas pela função de transferência dos sistemas de primeira ordem, Equação 1.15, e nos sistemas de segunda ordem, Equação 1.18. Portanto, é necessário o conhecimento detalhado das suas características para análise de desempenho do sistema em estudo.

#### • Abordagem Moderna

##### ➤ Espaço de estado

A análise no espaço de estado envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado.

As variáveis de estados são definidas como grandezas cujo conjunto de valores determina o estado do sistema. A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema é igual à ordem da equação diferencial que descreve o sistema. Assim, um sistema de segunda ordem requer um mínimo de duas variáveis de estado para descrevê-lo. Vale salientar que apesar de a representação no espaço de estado não ser única para um determinado sistema, o número de variáveis de estado é igual para qualquer uma das diferentes representações desse mesmo sistema no espaço de estado.

Já Estado é definido como o menor conjunto de variáveis independentes que determina completamente o comportamento do sistema. Dessa forma, o vetor de estado caracteriza-se por  $n$  variáveis de estado; e espaço de estado por espaço  $n$ -dimensional, cujos eixos coordenados são as variáveis de estado.

Assim, um modelo matemático linear e invariante no tempo, descrito por uma equação diferencial de ordem  $m$ , pode ser substituído por um conjunto de  $m \times n$  equação diferencial de primeira ordem. Esse conjunto é representado na forma vetorial-matricial pela equação de estado (1.23), e equação de saída do sistema (1.24).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.23)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.24)$$

Em que:

- o  $x(t)$  é o vetor de estado ou equação de estado.
- o  $\dot{x}(t)$  é a derivada do vetor de estado em relação ao tempo.
- o  $y(t)$  é o vetor de saída.
- o  $u(t)$  é o vetor de entrada ou vetor de controle.
- o  $A$  é a matriz de estados do sistema.
- o  $B$  é a matriz de entrada.
- o  $C$  é a matriz de saída.
- o  $D$  é a matriz de transmissão direta.

No item a seguir vamos entender como se aplica a modelagem de espaço de estado.



### Exemplificando

Supondo que a Equação 1.25 é a equação diferencial que descreve um determinado sistema, represente esse sistema em espaço de estado.

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + ky = u \quad (1.25)$$

Para responder esse exemplo, você pode seguir os seguintes questionamentos e passos:

- Quantas variáveis de estado são necessárias? Como a equação diferencial que descreve o sistema é de segunda ordem, logo, são necessárias duas variáveis de estado para descrever completamente a dinâmica do sistema.
- Quais são as variáveis de estado? Escolha as variáveis de estado como as variáveis derivadas. Assim, as duas variáveis de estado são demonstradas nas Equações 1.26 e 1.27.

$$x_1(t) = y(t) \quad (1.26)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \quad (1.27)$$

- Reescreva a equação diferencial em função das variáveis de estado. De posse das Equações 1.25, 1.26 e 1.27, podemos realizar as seguintes manipulações, como descritas nas Equações 1.28, 1.29 e 1.30.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.28)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \quad (1.29)$$

$$y = x_1 \quad (1.30)$$

- Escreva as equações de estado e saída do sistema. De posse das Equações 1.28, 1.29 e 1.30, podemos escrever o sistema em espaço de estado na forma vetor-matricial, como descrevem as Equações 1.31 e 1.32.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (1.31)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Nesse caso, a matriz de transmissão D é nula.

## Sem medo de errar

### Descrição da situação-problema

Com o intuito de manter a segurança, uma companhia de pneus contratou uma empresa de engenharia para análise do funcionamento do sistema pneu/suspensão de um de seus veículos.

Você é o engenheiro responsável e deve entregar um relatório (laudo técnico, comprovado via memorial de cálculo) diagnosticando o bom funcionamento desse sistema pneu/suspensão.

Para isso, ele já realizou as fases de modelagem matemática e obteve a equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema. Que tal facilitar a análise da resposta do sistema e, conseqüentemente, a construção do relatório com uso da função de transferência? Será que é possível? Se uma imagem simplifica o entendimento, vamos construir o diagrama de blocos?

### Resolução da situação-problema

A equação diferencial obtida para o sistema foi a 1.33.

$$f_{\text{externa}}(t) - kx(t) - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.33)$$

Para a obtenção da função de transferência será necessário aplicar a transformada de Laplace.



### Atenção

Lembre-se de que a derivação no domínio da frequência é equivalente à multiplicação por "s", dada as condições iniciais nulas.

Assim, a função de transferência do sistema é expressa pela Equação 1.38.

$$\mathcal{L} \left[ f_{\text{externa}}(t) - kx(t) - b \frac{dx}{dt} \right] = \mathcal{L} \left[ m \frac{d^2x}{dt^2} \right] \quad (1.34)$$

$$\mathcal{L} [f_{\text{externa}}(t)] - k\mathcal{L}[x(t)] - b\mathcal{L} \left[ \frac{dx}{dt} \right] = m\mathcal{L} \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \right] \quad (1.35)$$

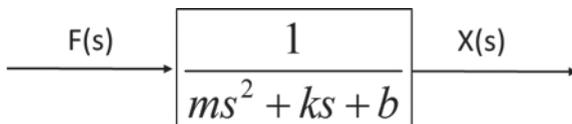
$$F(s) - ksX(s) - bX(s) = ms^2 X(s) \quad (1.36)$$

$$F(s) = (ms^2 + ks + b)X(s) \quad (1.37)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + ks + b} \quad (1.38)$$

Para a construção do diagrama de blocos do sistema só precisamos da função de transferência que compõe o sistema. Como este é formado por apenas uma equação, somente um bloco é necessário. Sendo assim, o diagrama de blocos do sistema pneu/suspensão é apresentado pela Figura 1.13.

Figura 1.13 | Diagrama de bloco para sistema pneu/suspensão



Fonte: elaborada pelo autor.

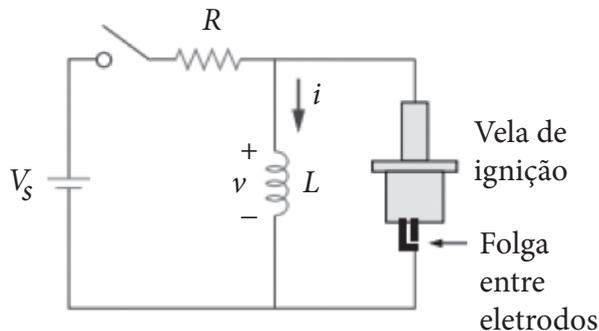
## Avançando na prática

### Sistema ignição de automóvel

#### Descrição da situação-problema

O motor de explosão de um automóvel requer que a mistura ar-combustível em cada cilindro seja inflamada em intervalos apropriados. Isto pode ser alcançado por meio de uma vela de ignição em paralelo ao indutor, como mostra a Figura 1.14. Pela criação de alta tensão entre os eletrodos, forma-se uma centelha na folga, inflamando, assim, o combustível.

Figura 1.14 | Sistema ignição de automóvel



Fonte: adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

Um engenheiro estudando esse sistema gostaria de saber qual é a relação da tensão sobre a vela de ignição e a tensão de entrada. Com isso, ele saberá qual é o valor da tensão no indutor com a fonte de entrada aplicada, garantindo o bom funcionamento do sistema.

#### Resolução da situação-problema

**1. Definição do problema:** relação do valor de tensão no indutor a partir da tensão de entrada. Sendo  $V_s$  a tensão de entrada e  $v$  a tensão de saída, tensão do indutor.

**2. Teoria e aplicação das leis fundamentais:** Lei de Kirchhoff das malhas.

**3. Simplificações e aproximações:** resistor e indutor puros e lineares, condutores perfeitos com resistências, capacitâncias e indutâncias nulas, condições iniciais nulas e variações das grandezas do sistema relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.

**4. Equacionamento:** sabendo que a tensão no indutor é dada pela Equação 1.39, e que a tensão do resistor é dada pela 1.40, tem-se:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1.39)$$

$$v_{\text{resistor}} = Ri \quad (1.40)$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff das malhas e, em seguida, a transformada de Laplace, encontra-se, via função de transferência, a relação desejada, dada pela Equação 1.41.

$$\frac{V_L}{V_s} = \frac{Ls}{Ls + R} \quad (1.41)$$

### Faça valer a pena

**1.** O modelo da dinâmica dos sistemas pode ser representado no domínio da frequência, abordagem clássica, por meio das funções de transferência. Sua principal vantagem é a interpretação rápida da resposta do sistema.

Qual é a definição de função de transferência?

a) É a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, quando todas as condições iniciais são consideradas nulas.

b) É a relação entre a transformada de Laplace da entrada e a transformada de Laplace da saída, quando todas as condições iniciais são consideradas nulas.

c) É a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, quando algumas condições iniciais são consideradas nulas.

d) É a relação entre a transformada de Laplace da entrada e a transformada de Laplace da saída, quando algumas condições iniciais são consideradas nulas.

e) É a relação entre a transformada de Laplace da entrada e a transformada de Laplace da saída, independentemente das condições iniciais.

**2.** Na abordagem moderna, a análise no espaço de estado envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado.

Quantas variáveis de estado são necessárias para descrever um sistema em estudo?

- a) A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema é diferente da ordem da equação diferencial que também o descreve.
- b) A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema é inferior à ordem da equação diferencial que também o descreve.
- c) A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema é igual à ordem da equação diferencial que também o descreve.
- d) A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema não tem relação com a ordem da equação diferencial que também o descreve.
- e) A quantidade de variável de estado necessária para descrever um sistema é igual ao número de eixos coordenados do espaço de estado.

**3.** As funções de transferência podem ser mais bem visualizadas na forma gráfica de diagrama de blocos.

Uma representação pelo método gráfico de diagrama de blocos caracteriza-se pelo:

- a) Sinal de saída vir à esquerda do bloco, ou seja, com sentido de entrar no bloco representativo do sistema, e o sinal de entrada à direita, com sentido de sair do bloco representativo do sistema.
- b) Sinal de entrada não fazer parte do diagrama de blocos do sistema.
- c) Sinal de saída não fazer parte do diagrama de blocos do sistema.
- d) Sinal de entrada vir à esquerda do bloco, ou seja, com sentido de entrar no bloco representativo do sistema, e o sinal de saída à direita, com sentido de sair do bloco representativo do sistema.
- e) Sinal de entrada e saída têm a mesma direção no bloco representativo do sistema.



# Seção 1.3

## Fundamentos de MATLAB

### Diálogo aberto

Na Seção 1.1 desta unidade aprendemos o que é um modelo matemático e quais são as etapas do processo de modelagem matemática que devemos realizar para descrever a dinâmica de um sistema. Na Seção 1.2 conhecemos as formas de representação da matemática-padrão utilizada em Engenharia de controle, que facilita a análise da resposta do sistema dinâmico em estudo, como a função de transferência e o espaço de estado. Além disso, vimos os sinais de entrada típicos utilizados para obtenção da resposta do sistema: sinal degrau, rampa e impulso.

Nesta seção iremos aprender uma ferramenta para testes e simulações dos modelos obtidos. Vimos nas seções anteriores que os modelos matemáticos que descrevem o comportamento da dinâmica dos sistemas devem ser testados e validados. Mas como conseguiremos realizar esses testes sem onerar o custo do projeto? Como podemos obter os típicos sinais de entrada para análise da resposta do sistema de forma segura e econômica?

Segundo Felício (2010), a validação dos sistemas pode implicar em altos custos, decorrentes da compra de equipamentos e da demanda de tempo de pessoas especializadas, seja por meio de um sistema real ou por um protótipo em bancada de testes.

Sendo assim, uma possível solução para verificação dos modelos matemáticos, representativos dos sistemas dinâmicos, são as simulações por meio de softwares específicos que reproduzem os sinais de entrada necessários para obtenção da análise de saída do modelo. Dentre esses softwares, um dos mais utilizados é o MATLAB®.

O MATLAB® é um software desenvolvido pela MatWorks. Atualmente, ele é utilizado em instituições de pesquisa, universidades e empresas. Na engenharia é vastamente utilizado para processamento de sinal e imagem, comunicações, sistemas de controle e finanças computacionais.

Você foi contratado como o engenheiro responsável por uma empresa de automóveis com a tarefa de analisar o funcionamento do sistema de suspensão

de um dos veículos. Você já obteve o modelo matemático representativo desse sistema e agora deverá avaliar e testar o modelo obtido em um software conhecido como MATLAB®, para composição do relatório, diagnosticando o funcionamento desse sistema.

Bons estudos e um ótimo trabalho nessa nova etapa!

## Não pode faltar

### Introdução

O MATLAB® é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo, cujos elementos básicos são as matrizes (origem de seu nome, do inglês *MATrix LABoratory*). Com esta ferramenta é possível realizar cálculos matemáticos, modelamento de sistemas dinâmicos, simulações, gráficos científicos e desenvolvimento de algoritmos, incluindo interfaces gráficas com o usuário nas mais diversas áreas científicas: Medicina, Biologia, Matemática, Física e principalmente nas engenharias. Além disso, esse software se caracteriza pela facilidade de uso, pois os problemas podem ser expressos por meio de uma notação muito próxima à notação matemática e por possuir uma grande biblioteca de funções e comandos já prontos, que otimiza o tempo gasto nas tarefas, visto que o usuário pode utilizar funções predefinidas ao invés de criá-las.

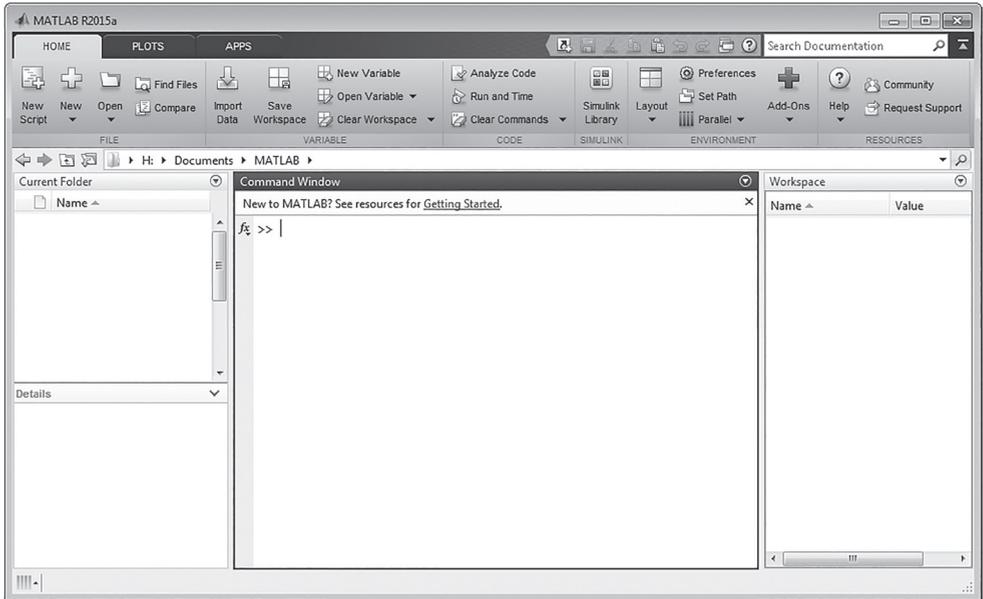
### Apresentação do software

Antes de iniciarmos nossos estudos mais direcionados aos sistemas de modelos dinâmicos, vale uma breve apresentação do software para os que ainda não o conhecem.

Ao acessar o MATLAB® é apresentada a tela-padrão (ou desktop do MATLAB®), como mostra a Figura 1.15. Os principais componentes dessa tela são:

1. *Command Window*: é a janela de comando e visualização de resultados, nela são digitados os dados e exibidos os resultados das operações realizadas. O sinal ">>" (sinal de *prompt*) indica que a linha de comando pode receber instruções.
2. *Current Folder*: nessa janela encontram-se os conteúdos de diretório de trabalho ou as listas de arquivos contidos no diretório corrente.
3. *Workspace*: nessa janela temos as listas das variáveis em uso criadas na janela *command Window* (ou janela de comando).

Figura 1.15 | Tela-padrão do MATLAB®



Fonte: <[https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf)>. Acesso em: 23 ago. 2016.

O MATLAB® oferece os comandos básicos para as operações matemáticas e funções trigonométricas, como mostra a Figura 1.16.

Figura 1.16 | Operações e funções básicas do MATLAB®

Operação	Símbolo
Adição	+
Subtração	-
Multipliação	*
Divisão	/ou\
Potenciação	^

Funções	Símbolo
exp	Exponencial
log	Logaritmo natural
log10	Logaritmo base 10
sqrt	Raiz quadrada

Funções	Significado
sin	Seno
asin	Arco seno
cos	Cosseno
acos	Arco cosseno
tan	Tangente
atan	Arco tangente

Funções	Significado
abs	Valor absoluto
angle	Ângulo de fase
conj	Complexo conjugado
imag	Parte imaginária
real	Parte real

Fonte: elaborada pelo autor.

Além disso, como já mencionado, o MATLAB® tem como unidade fundamental a matriz ou vetor. Dessa forma, os elementos são distribuídos em linhas e colunas, definidos por “[ ]”. Observa-se que um escalar é uma matriz de dimensão 1x1 e um vetor é uma matriz que possui linha e coluna.



### Exemplificando

Se quisermos escrever a Equação 1.42 no MATLAB®,

$$3x^3 + 2x^2 + 5x + 1 \quad (1.42)$$

Basta digitar na *command window* do MATLAB: [3 2 5 1]

Ou: nome\_da\_variável = [3 2 5 1]



### Pesquise mais

Alguns comandos prontos da biblioteca auxiliar do MATLAB® serão bastante úteis, por exemplo: *plot*, *roots*, *conv*, *tf*, dentre outros milhões de comandos e funções que existem nesse software.

Para saber mais sobre isso, utilize o próprio MATLAB®, basta usar o comando *help* (caso saiba o nome do comando), por exemplo: “*help plot*”; ou *lookfor* (caso não saiba o comando, mas queira buscá-lo por uma palavra-chave, que deve ser escrita em inglês), por exemplo: “*lookfor complex*” (o MATLAB® irá retornar todos os comandos que contêm a palavra-chave especificada, como no exemplo: *complex*).

Para saber um pouco mais sobre as funções ou comandos prontos do MATLAB®, leia o Guia do MATLAB®, que pode ser acessado pelo link: <[https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf)>. Acesso em: 5 nov. 2016.

Agora que já fomos apresentados ao MATLAB®, continuaremos nosso aprendizado direcionado a esse programa e aos estudos de modelagem de sistemas dinâmicos.

Na seção anterior, vimos que os modelos matemáticos de sistemas dinâmicos podem ser descritos por meio das funções de transferência ou modelo de espaço de estado e isso também acontece no MATLAB®. Nesse software, para representarmos a dinâmica dos sistemas por função de transferência, basta definirmos os coeficientes dos polinômios do numerador e denominador, já na

representação em espaço de estado definimos as quatro matrizes que caracterizam o modelo.

Vale salientar que a modelagem por meio de espaço de estado é feita usando o comando de instrução (*script*), já a função de transferência pode ser feita via *script* ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink®.

### Introdução à programação em *script*

A função de transferência é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, quando todas as condições iniciais são consideradas nulas, como vimos na seção anterior. Sendo assim, esta é representada pela relação de dois polinômios no plano complexo  $s$ : o numerador e o denominador.

No MATLAB® os polinômios são descritos por vetores linhas contendo os coeficientes do polinômio em ordem decrescente, como mostrado no exemplo anterior. Assim, podemos por meio dos vetores linhas representar o polinômio do numerador e denominador de uma função de transferência. Além disso, podemos encontrar os polos e zeros dessa função por meio de dois comandos:

**1. roots(p)**: calcula as raízes do polinômio “p”, podendo  $p$  ser o numerador ou denominador.

**2. [p, z] = pzmap(num, den)**: esse comando, quando escrito dessa maneira, apresenta os valores dos polos e zeros de uma função de transferência, cujo polinômio do numerador é denominado “num” e do denominador “den”. Quando utilizado apenas “**pzmap(num, den)**”, esse comando apresenta uma figura contendo o mapa dos polos e zeros do sistema.

Vale salientar que a função de transferência contínua de um sistema pode ser fornecida pelo comando “**tf**”, ou seja, **tf(num, den)**, sendo “num” o polinômio do numerador e “den” o polinômio do denominador.

Na forma de espaço de estado, sendo conhecidas: a matriz de estado **A**, a matriz de controle **B**, a matriz de saída **C** e a matriz de transmissão direta **D**, estas podem ser representados no MATLAB por linhas de código onde um espaçamento (“ ”) ou a vírgula (“,”) indica a separação de elementos da mesma linha, ou seja, define colunas e o ponto e vírgula (“;”) finaliza a declaração da linha. Assim, o comando “**ss**” fornece os modelo de espaço de estado contínuo com as matrizes A, B, C e D, por exemplo: “**ss(A, B, C, D)**”.

Se o numerador e o denominador da função de transferência (“num” e “den”, respectivamente), bem como as matrizes de estado, controle, saída e transmissão

direta (A, B, C e D, respectivamente) forem conhecidos, podemos obter a resposta ao degrau unitário por meio do comando **step(sys)**, podendo sys ser tf(num,den) ou ss(A, B, C, D). Esta função é muito importante, uma vez que as especificações de desempenho de sistemas de controle são dadas em termos do degrau unitário. Todavia outras entradas típicas podem ser utilizadas como impulso cujo comando é **impulse(sys)**.



### Exemplificando

Considere os sistemas representados por função de transferência, Equação 1.43 e espaço de estado, Equações 1.44 e 1.45.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+16}{s^2+4s+16} \quad (1.43)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Utilize o MATLAB® para identificar a resposta ao degrau dos dois sistemas apresentados em função de transferência e espaço de estado.

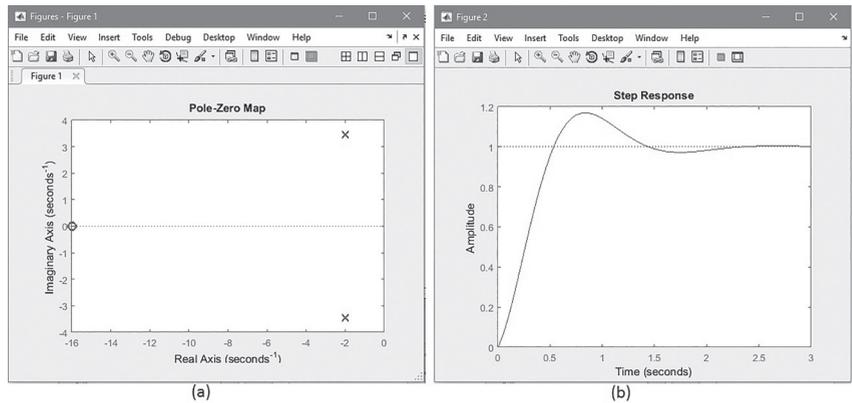
**Resposta:** Foi digitado no *command Window* do MATLAB® o seguinte programa para:

o Função de transferência da Equação 1.43:

```
num=[1 16]
den=[1 4 16]
sys1 = tf(num,den)
[p,z]=pzmap(num,den)
pzmap(num,den)
figure
step(sys1)
```

Assim, as respostas gráficas obtidas para esse programa podem ser vistas na Figura 1.17.

Figura 1.17 | Resposta do MATLAB® à função de transferência, (a) mapa de polos e zeros dada pela função pzmap e (b) resposta do sistema à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

o Espaço de estado representado pelas Equações 1.44 e 1.45:

$$A = [-1 \ -1; \ 7.5 \ 0]$$

$$B = [1 \ 1; \ 1 \ 0]$$

$$C = [1 \ 1; \ 1 \ 0]$$

$$D = [0 \ 0; \ 0 \ 0]$$

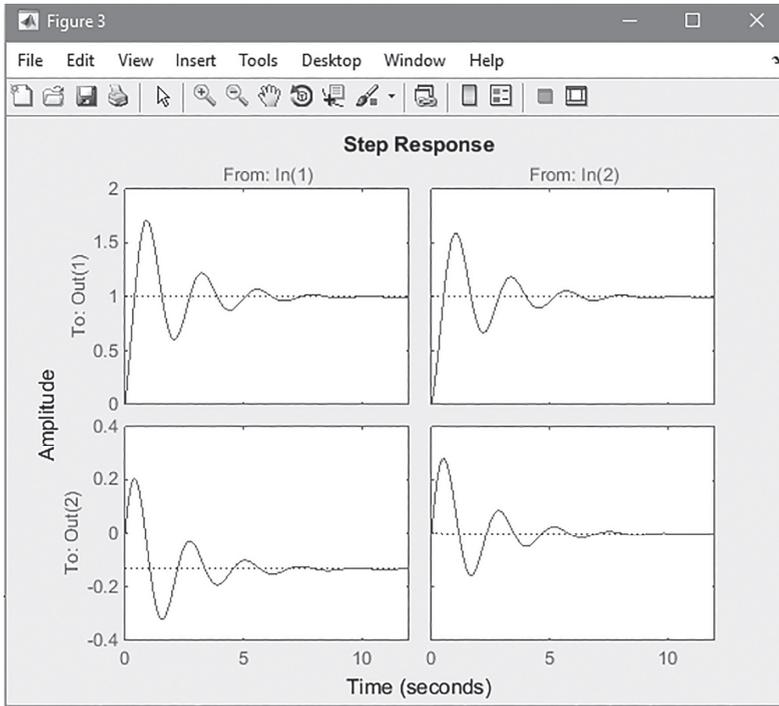
$$\text{sys2} = \text{ss}(A,B,C,D)$$

figure

step(sys2)

Assim, as respostas gráficas obtidas para esse programa com espaço de estado podem ser vistas na Figura 1.18.

Figura 1.18 | Resposta ao degrau para o sistema representado por espaço de estado



Fonte: elaborada pelo autor.

Deve-se atentar que a representação em espaço de estado possui duas entradas e duas saídas, logo, a curva de resposta ao degrau foi em relação às duas entradas para as duas saídas. Entrada 1, coluna da esquerda; entrada 2, coluna da direita; saída 1, linha superior; saída 2, linha inferior.

Vale ressaltar que foi usado também o comando **figure**, o que permitiu que cada gráfico fosse mostrado em diferentes janelas de figuras.

## Introdução à programação em Simulink®

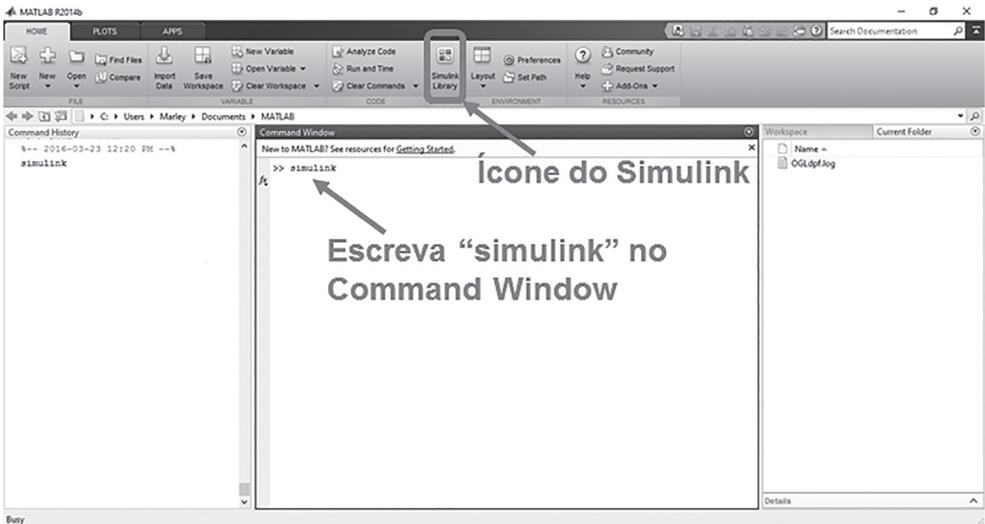
O Simulink® é um pacote do MATLAB® para modelar, simular e analisar sistemas dinâmicos lineares ou não lineares. Ele é realizado em um ambiente de diagrama de blocos que possui uma interface gráfica com o usuário (GUI - *Graphical User Interface*), usando apenas as operações de clicar e arrastar do mouse. Assim, conseguimos construir modelos da mesma forma que construímos esboços nos papéis e nos livros.

Para isso, o Simulink® inclui uma vasta biblioteca de blocos predefinidos, podendo também o usuário personalizar e criar seu próprio bloco. Alguns blocos permitem que os resultados sejam vistos enquanto a simulação ainda está sendo executada.

Vale ressaltar que o ambiente do MATLAB® e do Simulink® são integrados, sendo possível, portanto, simular, analisar e rever os modelos em quaisquer dos ambientes.

Para acessar o Simulink® no MATLAB®, basta escrever "simulink" no *command Window* ou clicar no seu ícone, como mostra a Figura 1.19.

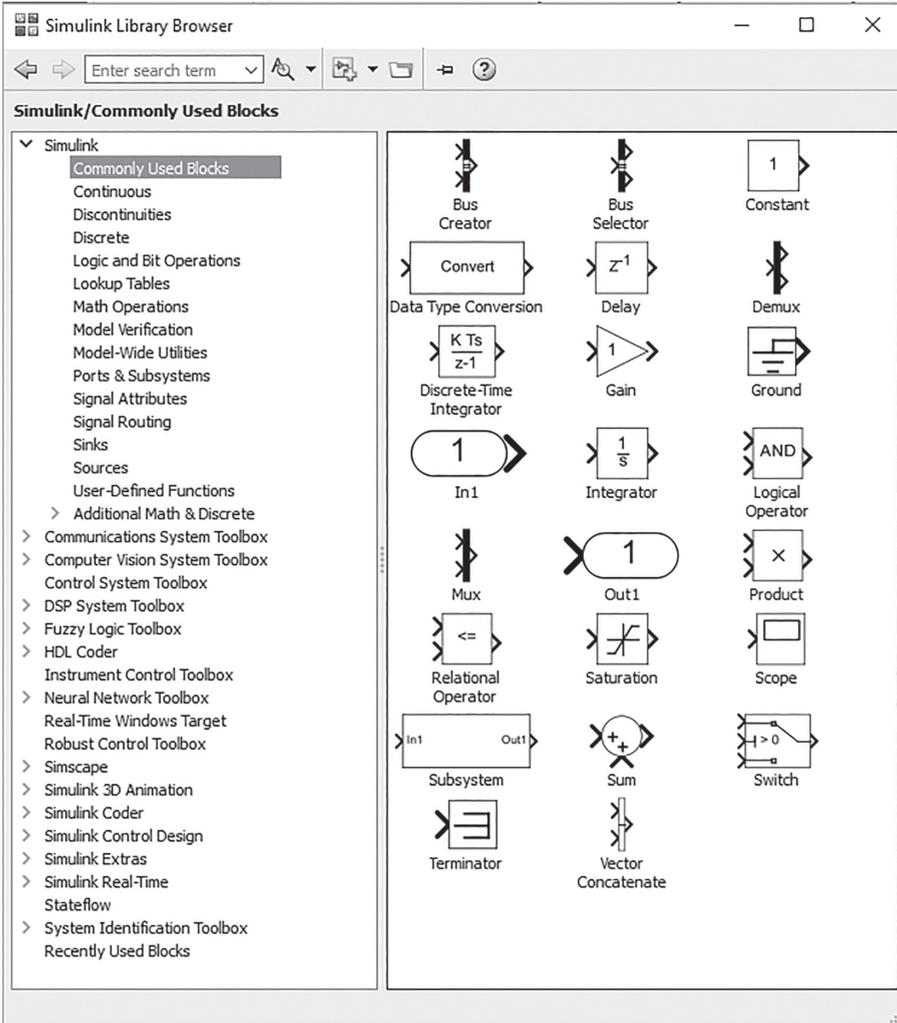
Figura 1.19 | Acessando o Simulink®



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao iniciar a interface do Simulink®, você poderá ter acesso às diversas bibliotecas de blocos desse programa: aos blocos comumente usados (por meio do *commonly used blocks*), aos que são utilizados em sistemas contínuos (por meio do *Continuous*), nas operações matemáticas, aos blocos que mostram os sinais que compõem o sistema e até aos blocos para simulação dos sinais de entrada. Há uma infinidade de blocos que compõem o Simulink®, estes normalmente são organizados por área nos *Toolboxes* do *Simulink Library Browser*, como mostra a Figura 1.20.

Figura 1.20 | Tela principal do Simulink® - Biblioteca dos blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

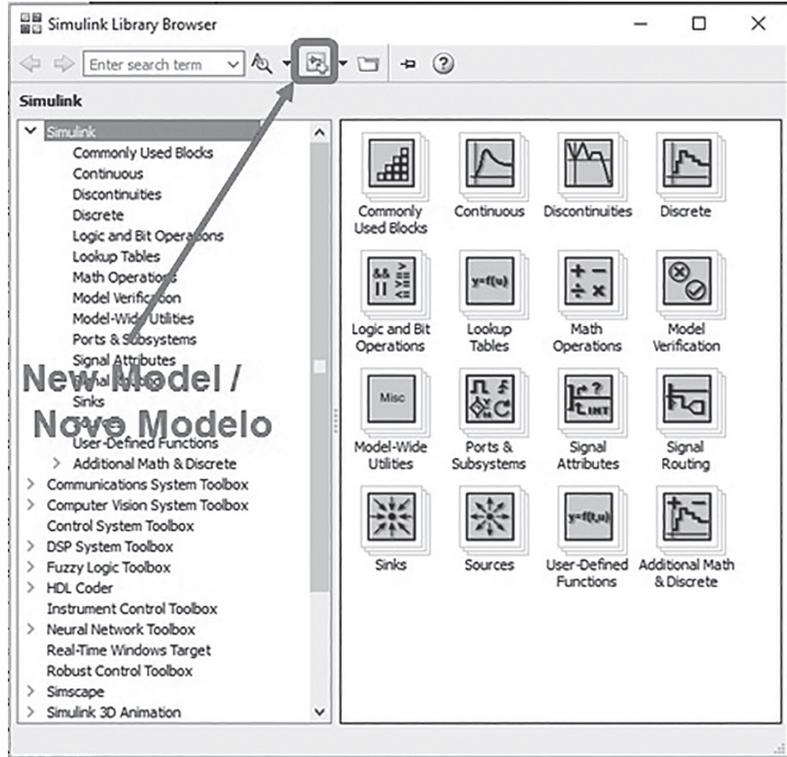


## Exemplificando

Dada a mesma função de transferência da Equação 1.43, obtenha por meio de simulação por diagrama de blocos em ambiente Simulink® a resposta à entrada degrau.

**Resposta:** Após iniciarmos o Simulink®, abrimos um novo modelo, como mostra a Figura 1.21.

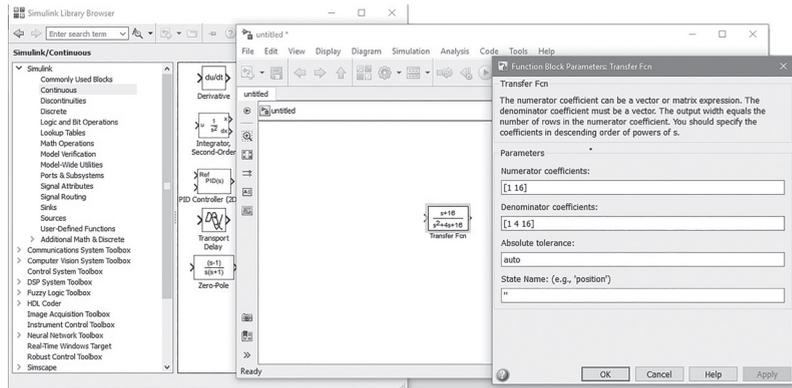
Figura 1.21 | Criando novo arquivo (modelo) Simulink®



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, basta localizar o bloco "Transfer Fcn" (biblioteca: *Continuous*), relativo à função de transferência, clicar e arrastar para a janela "untitled", aberta ao criar o novo modelo. Após arrastar, clique duas vezes sobre o bloco selecionado ("Transfer Fcn"), como mostra a Figura 1.22.

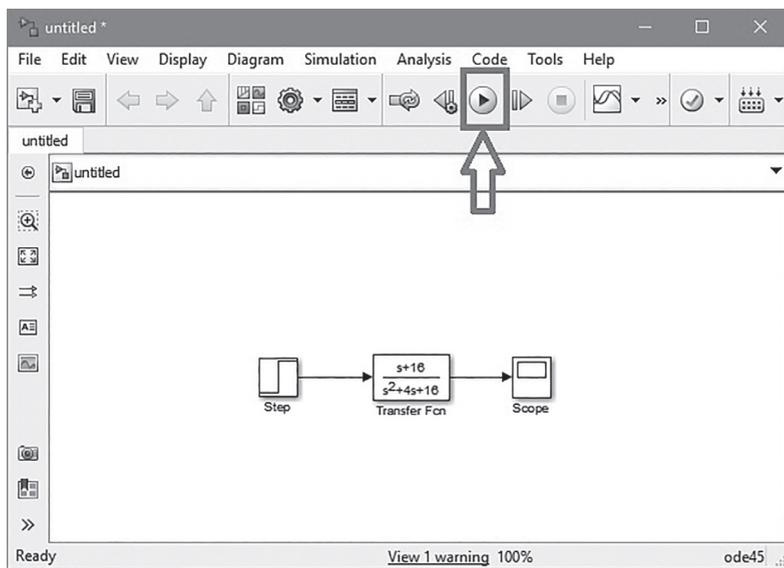
Figura 1.22 | Construindo uma função de transferência via Simulink®



Fonte: elaborada pelo autor.

Como a entrada é uma função degrau, basta localizar o bloco "Step" (biblioteca: *Sources*). Os parâmetros da função degrau podem ser ajustados ao clicar duas vezes nesse bloco. O "Step Time" é tempo inicial para a função degrau excitar o sistema, *Initial value*: valor inicial da função degrau, antes do tempo inicial e *Final value*: valor final da função degrau, após o tempo inicial. Neste exemplo, os valores serão 1; 0; 1, respectivamente. Para analisarmos o valor de saída desse sistema é necessária a inclusão do bloco "Scope" (biblioteca: *Sinks*), como mostra a Figura 1.23.

Figura 1.23 | Simulando função de transferência no Simulink®

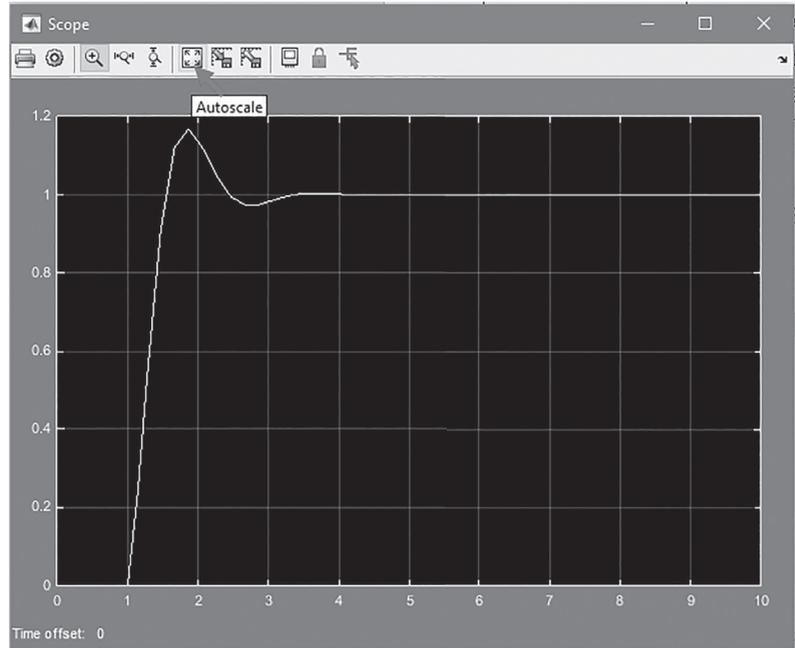


Fonte: elaborada pelo autor.

Após a construção dos blocos, aperte o comando "Run", como destacado na Figura 1.23, dessa forma você está simulando o sistema.

Após esse processo, ao clicar duas vezes sobre o bloco "Scope", você terá o sinal de resposta do sistema. Talvez seja necessário apertar o "Autoscale" para melhor visualização da resposta do sistema, como mostra a Figura 1.24.

Figura 1.24 | Resposta do Simulink® à função de transferência



Fonte: elaborada pelo autor.



### Refleta

Será que podemos representar os sistemas em diagrama de blocos apenas com o Simulink®? Teria outra forma de simular os sistemas em diagrama de blocos via *script*?



### Pesquise mais

A resposta ao item Refleta seria: “sim, temos como modelar em diagrama de blocos por comando de instrução ou programação em *script*”.

Temos vários comandos associados a essa função no MATLAB®, como: *series* (usados para colocar em cascata duas funções de transferência), *parallel* (quando temos duas funções em paralelo) e *feedback* (quando temos o percurso de retroação entre as funções de transferência).

Para saber mais sobre os comandos para programação em *script* no MATLAB®, faça a leitura do capítulo 2, seção 2.10, do livro a seguir:

DORF, Richard; BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle modernos**. 12. ed. São Paulo: LTC, 2013.



## Assimile

Softwares específicos para simulação podem auxiliar a validação dos modelos matemáticos representativos dos sistemas.

Funções já construídas no MATLAB® podem facilitar os testes de validação, como:

1. **tf(num,den)**: sendo "num" o polinômio do numerador e "den" o polinômio do denominador.
2. **ss(A, B, C, D)**: em que a matriz de estado A, a matriz de controle B, a matriz de saída C e matriz de transmissão direta D das equações de espaço de estado são conhecidas.
3. **step(sys)**: resposta ao degrau unitário.

## Sem medo de errar

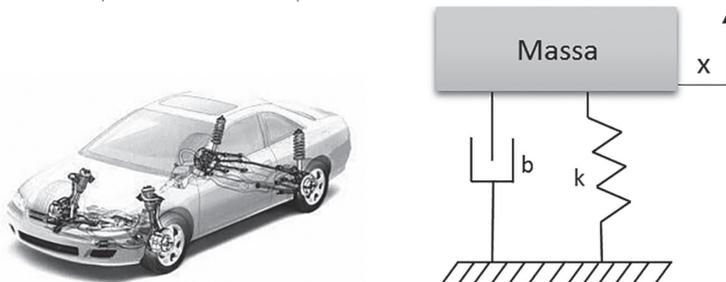
### Descrição da situação-problema

Com intuito de manter a segurança, uma companhia de pneus contratou uma empresa de engenharia para análise do funcionamento do sistema pneu/suspensão de um dos seus veículos.

O engenheiro responsável deve entregar um relatório (laudo técnico, comprovado via memorial de cálculo) diagnosticando o bom funcionamento desse sistema pneu/suspensão do automóvel, como o da Figura 1.25, que deve conter os seguintes itens:

1. A modelagem do sistema avaliado.
2. Os valores dos elementos que formaram esse sistema sobre as condições avaliadas.
3. Os testes para comprovação da viabilidade de funcionamento do sistema analisado.

Figura 1.25 | Sistema aproximado de suspensão do carro



Fonte: adaptada de <<http://carros.hsw.uol.com.br/suspensoes-dos-carros.htm>>. Acesso em: 16 jul. 2016.

## Resolução da situação-problema

De posse da função de transferência obtida nas seções anteriores, para atestar o bom funcionamento do sistema, iremos analisar o deslocamento da massa do carro ao sofrer a ação de uma força externa advinda do pneu. Caso esse deslocamento seja alto, o carro pode encostar no pneu, o que não atestaria um bom funcionamento do sistema.

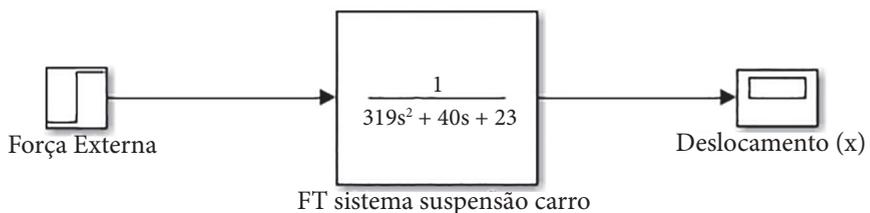
Tendo por base os valores da massa, da constante da mola, do coeficiente do amortecedor e força externa média (Quadro 1.1), informados pela empresa para um dos modelos de passeio, podemos realizar os testes do sistema com base no modelo obtido. Para isso, foi realizada uma simulação por digrama de blocos no Simulink®, como mostra a Figura 1.26.

Quadro 1.1 | Constante dos elementos do sistema suspensão/pneu

Elementos	Valores
Massa	319 kg
Constante da mola	23 N/mm
Coefficiente do amortecedor	40 Ns/mm
Força Externa	150 N

Fonte: elaborado pelo autor.

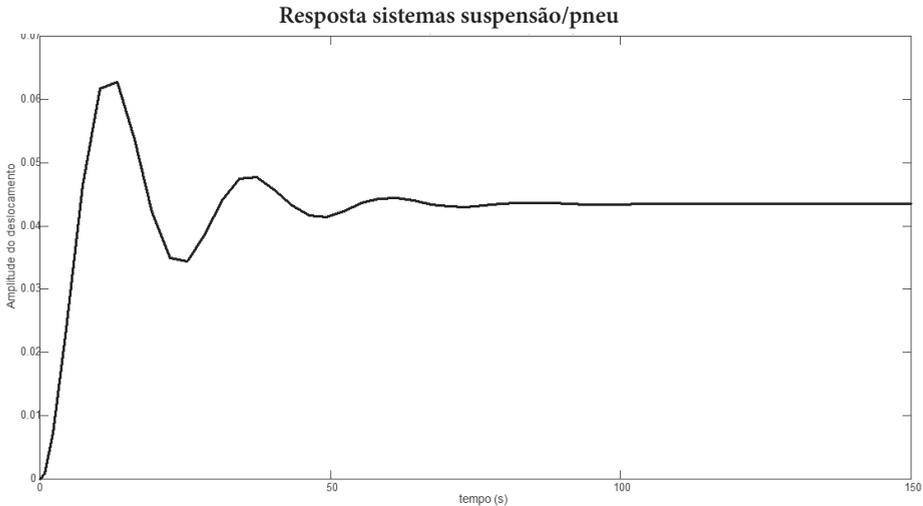
Figura 1.26 | Teste do sistema suspensão/pneu



Fonte: adaptada de <a href="http://carros.hsw.uol.com.br/suspensoes-dos-carros.htm">http://carros.hsw.uol.com.br/suspensoes-dos-carros.htm</a>. Acesso em: 16 jul. 2016.

O resultado obtido para o sistema pode ser analisado na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Resposta do sistema suspensão/pneu



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao analisarmos a resposta, concluímos que o maior deslocamento do sistema é de, aproximadamente, 0,06 m, ou 6 cm. Esse valor não implicaria no bom funcionamento desse modelo de automóvel.

Sendo assim, o engenheiro responsável poderia atestar o sistema em análise como seguro e passível de ser utilizado.

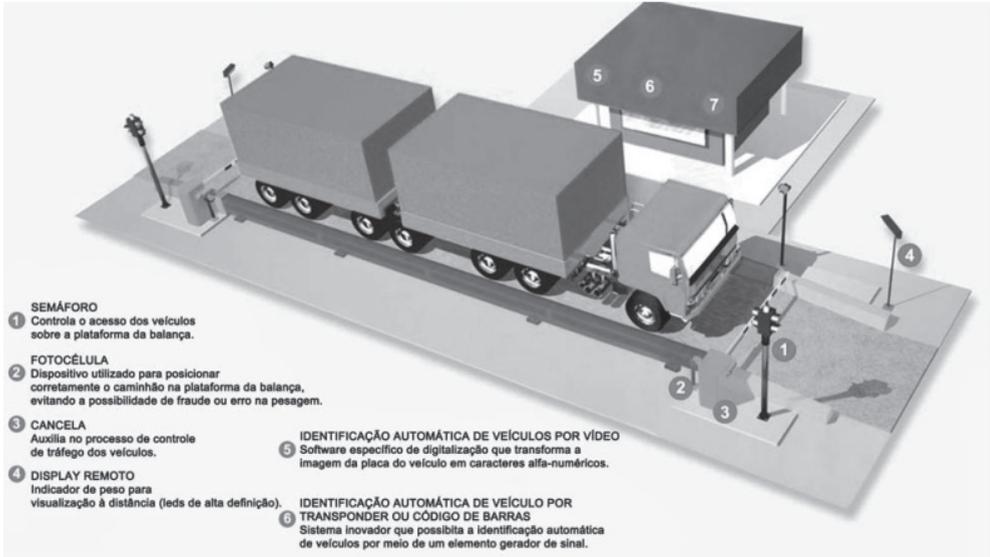
## Avançando na prática

### Circuito de acionamento de um motor de passo

#### Descrição da situação-problema

Em uma determinada rodovia, a pesagem obrigatória de caminhões é realizada por balanças automatizadas. Além da plataforma e do indicador como itens básicos da balança rodoviária, o sistema de pesagem é construído por diversos componentes, como mostra a Figura 1.28.

Figura 1.28 | Balança para pesagem de caminhão



Fonte: adaptada de <[http://download.inep.gov.br/educacao\\_superior/enade/provas/2014/15\\_engenharia\\_controle\\_automacao.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2014/15_engenharia_controle_automacao.pdf)>. Acesso em: 15 ago. 2016.

No momento da pesagem, o caminhão desloca-se por uma pequena inclinação e acomoda-se para que a medição seja realizada e registrada. Assim, do solo até a acomodação do caminhão, o sinal aplicado à balança pode ser aproximado por um degrau unitário.

Suponha que um caminhão de uma empresa de transporte de cargas tenha passado por duas balanças em uma rodovia com pesagem automatizada. O gerente da empresa constatou que o caminhão havia sido multado apenas na segunda balança. Para recorrer da multa, foi solicitado o parecer de um perito com relação ao sistema de controle de pesagem das balanças.

Para análise e emissão do laudo, o perito recebeu do fabricante de balança a função de transferência, representada pela Equação 1.46.

$$\frac{ib(s)}{pc(s)} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16} \quad (1.46)$$

Em que o índice  $ib$  equivale à indicação da balança e  $pc$  ao peso do caminhão.

A empresa responsável pela manutenção do sistema de aquisição de dados informou ao perito que, na primeira balança, o peso é adquirido 3s após a entrada do caminhão e, na segunda balança, 1,2s após a entrada do veículo. Considere que durante o percurso entre as balanças não houve variação de carga no caminhão, que as diferenças causadas pelo consumo de combustível são desprezíveis e que o peso é fixado após a acomodação do sistema.

Você é o perito contratado pela empresa de caminhões. Apresente seu parecer para o caso, justificando-o com dados técnicos.

### Resolução da situação-problema

Para resolver esta situação, é preciso analisar os dados fornecidos pela empresa responsável pela manutenção do sistema. Dessa forma, devemos analisar o tempo de aquisição dos pesos pelas balanças. Será que eles foram adquiridos após o período transitório necessário para aquisição dos pesos?

Se temos a função de transferência do sistema, então podemos, com o auxílio do MATLAB®, fazer um programa que rapidamente mostre o tempo de acomodação da balança e verificarmos se o resultado das balanças foi suficiente para realizar as medidas.

Sendo assim, em linhas de comando, o programa realizado foi:

```
%Avançando na prática - Seção 1.3
%Definição da função de transferência
num=[16];
den=[1 4 16];
sys=tf(num,den)

%Cálculo dos parâmetros necessários
wn=sqrt(num);
zeta=4/(2*wn);

%Cálculo tempo de acomodação para sistemas de balança
ts=4/(zeta*wn)
```

A resposta encontrada foi de 2s para o tempo de acomodação. Desse modo, sua conclusão como perito do caso poderia ser a seguinte:

O sistema de pesagem da balança apresenta medida confiável após o tempo de acomodação do sistema, que é de 2s. Como a segunda medição é realizada após 1,2s, que é menor que o tempo de acomodação, a medida obtida dessa balança não é confiável. Por outro lado, a medição da primeira balança é adequada, pois é realizada

após 3s, que é maior que o tempo de acomodação. Portanto, a multa emitida é indevida, uma vez que o valor medido pela segunda balança não é confiável.

### Faça valer a pena

**1.** O MATLAB® é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo, cujos elementos básicos são as matrizes (origem de seu nome, do inglês MATrix LABoratory). Com esta ferramenta é possível realizar cálculos matemáticos, modelamento de sistemas dinâmicos, simulações, gráficos científicos e desenvolvimento de algoritmos, incluindo interfaces gráficas com o usuário nas mais diversas áreas científicas: Medicina, Biologia, Matemática, Física e principalmente nas engenharias.

A respeito do MATLAB®, podemos afirmar:

I. Tem uma grande biblioteca de funções e comandos já prontos que aperfeiçoam o tempo gasto nas tarefas.

II. Tem em sua tela principal as janelas: *command window*, *current folder* e *workspace*.

III. Permite modelar, simular e analisar sistemas dinâmicos lineares ou não lineares, por meio de um ambiente de diagrama de blocos que possui uma interface gráfica.

É correto o que se afirma em:

- a) I, apenas.
- b) II, apenas.
- c) I, II e III.
- d) III, apenas.
- e) I e III.

**2.** A programação no MATLAB® pode ser feita usando o comando de instrução (script) ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink®.

A respeito da programação via comando de instrução, podemos afirmar que:

I. O comando  $tf(num,den)$  representa a função de transferência do sistema desde que "num" seja o polinômio do numerador e "den" o do denominador, conhecidos.

II. O comando  $ss(A, B, C, D)$  representa o espaço de estado onde a matriz de estado A, a matriz de controle B, a matriz de saída C e matriz de transmissão direta D das equações de espaço de estado são conhecidas.

III. O comando `step(sys)` representa a entrada ao impulso unitário em um sistema.

É correto o que se afirma em:

- a) I, apenas.
- b) II, apenas.
- c) I, II e III.
- d) III, apenas.
- e) I e III.

**3.** O MATLAB® é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo. A programação no MATLAB® pode ser feita usando o comando de instrução (*script*) ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink®.

Na programação em `script`, como poderíamos escrever o polinômio da equação a seguir no MATLAB®?

$$6x^4 - x^3 + x^2 + 1$$

- a) [6 1 1 0 1].
- b) [6; -1; 1; 1].
- c) [6 -1 1 1].
- d) [6 -1 1 0 1].
- e) [6; -1; 1; 0; 1].

# Referências

ALEXANDER, K. C.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

DORF, R.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 12. ed. São Paulo: LTC, 2013.

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

MATHWORKS. **Matlab**. Disponível em: <[https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf)>. Acesso em: 5 nov. 2016.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.



# Modelagem de sistemas elétricos

## Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade faremos um estudo mais detalhado de modelagem matemática aplicados aos sistemas elétricos. Esses são componentes essenciais de muitos sistemas dinâmicos complexos, como: controlador de velocidade de um automóvel, mão robótica, sistemas de aquecimento de temperatura, celulares, máquina de lavar, dentre outros. Todos eles precisam dos circuitos (que usaremos como sinônimos de sistemas) elétricos para funcionar.

Na unidade anterior, adquirimos os conhecimentos necessários para a obtenção do modelo matemático. Na Seção 1.1, vimos o conceito de modelos e aprendemos as fases de uma modelagem de sistemas dinâmicos. Na Seção 1.2, conhecemos as formas de representação matemática que facilitam nossa análise, como: função de transferência e espaço de estado e modelos típicos de sinais de entrada (sinal degrau) e de representação (modelo de primeira ordem e segunda ordem). Por fim, na última seção, aprendemos uma importante ferramenta para a análise dos modelos obtidos.

A partir de agora aplicaremos todos esses conceitos adquiridos anteriormente aos sistemas elétricos dinâmicos. Assim, obteremos o modelo que descreve a dinâmica desses sistemas a partir dos elementos passivos e circuitos com amplificadores operacionais que os compõem. Analisaremos diferentes tipos de associações desses elementos e como eles podem auxiliar no nosso objetivo de controlar os processos. Por fim, na última seção, verificaremos as respostas dos modelos elétricos com auxílio do software MatLab®.

Portanto, o objetivo desta unidade é desenvolver o conhecimento necessário para, com base na modelagem matemática da dinâmica dos componentes elétricos, construir uma solução viável para o controle de processo. Além disso, serão desenvolvidas as habilidades de raciocínio

lógico, solução de problemas, criatividade e flexibilidade.

Nesse contexto, você, aluno, é o engenheiro responsável por uma equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) de uma empresa de sistemas embarcados que foi designada para implementar um controle de nível de um reservatório de água, para uso dos funcionários, de uma determinada usina de álcool. É importante lembrar que nesse tipo de ambiente há muito ruído. Será que é possível implementar esse sistema automático de enchimento do tanque a partir de componentes elétricos e eletrônicos? Quais seriam os elementos necessários? Qual é o modelo que descreve a dinâmica desse sistema?

Você está preparado para desenvolver esse projeto?

Bons estudos e bom trabalho.

## Seção 2.1

### Modelagem matemática de sistemas elétricos: circuito RC e amplificadores operacionais

#### Diálogo aberto

Uma empresa de sistemas embarcados foi contratada por uma usina para desenvolver um controle automático do nível de um reservatório de água que fica próximo a um ambiente com muita presença de ruído. Você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) dessa empresa e será desafiado a desenvolver esse projeto. Se for possível, como você conseguirá projetar esse sistema de nível de forma automática? Quais componentes elétricos poderão ser utilizados? Qual será a relação entre esses componentes? Sabemos que os circuitos elétricos são formados por resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais, mas como esses componentes podem ser associados ou organizados para nos ajudar na tarefa do controle automático do nível? O que é preciso fazer para que a resposta do circuito seja exatamente a que queremos?

Nesta seção aplicaremos os conhecimentos de modelagem matemática aos estudos de circuitos elétricos, isto é, daremos os primeiros passos para encontrar o modelo matemático representativo desse tipo de sistema.

Vimos na unidade anterior, que umas das fases necessárias ao processo de modelagem matemática é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas. Dessa forma, entenderemos como as leis de Kirchhoff nos ajudarão, com base no esquemático de um circuito elétrico, a encontrar a equação diferencial e, conseqüentemente, a função de transferência que representa o sistema.

Sabemos que os modelos matemáticos típicos que descrevem a dinâmica dos sistemas podem ser representações de primeira e segunda ordem. Começaremos nesta seção os estudos dos circuitos elétricos de primeira ordem dos tipos: RC, isto é, circuitos formados por resistores e capacitores, e circuitos RL, formados por resistores e indutores. Vale salientar que esse tipo de sistema forma os chamados filtros, equipamentos eletrônicos utilizados para rejeitar uma certa frequência dos sinais. Essa característica pode nos ajudar a amenizar os ruídos que temos no ambiente do nosso projeto.

Por fim, conheceremos os amplificadores operacionais e como eles podem ser associados aos elementos passivos dos circuitos elétricos para a implementação do nosso controlador.

Preparado para mais essa tarefa?

Bons estudos e ótimo trabalho.

## Não pode faltar

A obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema é o primeiro passo para a análise dos projetos em sistemas dinâmicos. Vimos na Seção 1.1, que umas das etapas para obtenção do modelo matemático é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas. Tratando-se de sistemas elétricos, a lei fundamental para representação da dinâmica destes é a Lei de Kirchhoff.

### • Lei de Kirchhoff

Baseada no princípio de conservação das cargas elétricas e no fato de que o potencial elétrico é o mesmo após um percurso em uma trajetória fechada, compõe-se por outras duas leis:

o **Lei dos Nós ou das Correntes:** a soma algébrica das correntes em um nó é sempre igual a zero, ou seja, a soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó. As correntes que entram no nó são consideradas positivas e as que saem, negativas.

o **Lei das Malhas ou das Tensões:** estabelece que, em qualquer instante, a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha em um circuito elétrico é igual a zero, ou seja, a soma das quedas de tensão é igual à soma das elevações de tensão ao longo de qualquer malha em um circuito elétrico. As quedas de tensões têm sinal positivo e os aumentos de tensões, negativos. Assim, ao percorrer os ramos das malhas são considerados os sinais positivos e negativos até retornar ao ponto inicial. Logo, como voltamos ao mesmo ponto, a somatória dos aumentos e quedas de tensões será nula.



### Refleta

Mas quando devemos aplicar as leis de Kirchhoff: nós ou malhas para obtenção da dinâmica dos sistemas elétricos?

A aplicação de uma ou das duas leis depende das características dos circuitos elétricos em interesse. Normalmente, a escolha da lei a ser utilizada está relacionada ao menor esforço algébrico, por exemplo, aplica-se a Lei dos Nós quando há fonte de corrente e Lei das Malhas quando temos circuito associado em série.

As variáveis ou grandezas físicas frequentemente utilizadas para análise dos circuitos elétricos são tensões e corrente em função do tempo. Os elementos básicos que compõem esse tipo de circuitos são fontes de tensão ou corrente, resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais (AmpOps).

Assim, para iniciarmos nosso estudo em modelagem de sistemas elétricos é fundamental lembrarmos as relações de tensão e corrente desses elementos passivos, como mostra a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Tensão e corrente de elementos básicos dos circuitos elétricos

Componente	Tensão	Corrente
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
Indutor	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$

Fonte: elaborada pela autora.



### Pesquise mais

Os circuitos elétricos são formados por componentes ativos e passivos. Os componentes passivos são os resistores, capacitores e indutores. Já os ativos introduzem energia adicional ao circuito e são as fontes de tensão, a corrente e os amplificadores operacionais.

Para saber mais sobre as características desses elementos, leia, principalmente, o Capítulo 2 do seguinte livro:

DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

De posse desses conhecimentos, nesta seção realizaremos as etapas do processo de modelagem matemática para representação da dinâmica dos sistemas elétricos aplicados aos circuitos de primeira ordem: circuitos resistivos - capacitivos (RC) e resistivos - indutivos (RL). O circuito RC é muito utilizado em filtros (em instalações elétricas e equipamentos eletrônicos para proteção, pois rejeita ruído indesejado) do tipo passa-baixa (os filtros que deixam passar apenas sinais com baixas frequências), instrumentação elétrica e eletrônica, além de ser parte integrante de compensadores em malha de controle. Já o circuito RL é muito usado em filtros (tipo passa-alta, os que permitem a passagem de sinais com alta frequência), nos diversos modelos de enrolamento de máquinas elétricas, circuito de excitação em máquinas síncronas, dentre outros.

- **Modelagem de circuitos RC:**

Formado por elementos passivos: resistor (Ohm) e capacitor (Faraday), como mostra a Figura 2.1, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do circuito RC, considerando  $e_i$  como entrada e  $e_0$  como saída do sistema.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: Lei de Kirchhoff das Malhas.
3. Simplificações e aproximações: para modelagem de todos os sistemas elétricos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: os resistores são puros, lineares e os valores das respectivas resistências são constantes; os capacitores são puros e lineares e os valores das respectivas capacitâncias são constantes; os fios que conectam os elementos são condutores perfeitos com resistências, capacitâncias e indutâncias nulas; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. Equacionamento: antes de iniciarmos o equacionamento, é importante definir e repetir os sentidos das grandezas em todos as malhas de um circuito elétrico. Por exemplo, se considerarmos o sentido horário como positivo para a corrente elétrica em uma malha, é fundamental que essa mesma consideração seja repetida para todas as malhas do circuito. Além disso, a representação do sentido adotado e dos valores das grandezas especificados no esquemático dos circuitos elétricos facilita a obtenção desta etapa no processo de modelagem matemática, como mostra a Figura 2.1.

Sendo assim, aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões, temos as Equações (2.1) e (2.2):

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt - e_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_0 \quad (2.2)$$

Em seguida, aplicamos a transformada de Laplace às Equações (2.1) e (2.2), com condições iniciais nulas, e obtivemos as Equações (2.3) e (2.4):

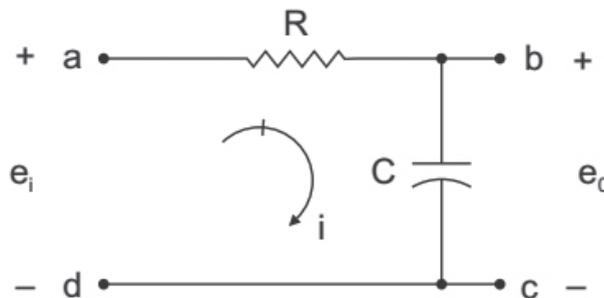
$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s) \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_0(s) \quad (2.4)$$

Dessa forma, a função de transferência para esse sistema é dada pela Equação (2.5):

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (2.5)$$

Figura 2.1 | Esquemático de circuito RC com as grandezas e os sentidos especificados



Fonte: adaptada de Felício (2010).

Dica para facilitar a dedução da função de transferência dos circuitos elétricos: se aplicarmos a transformada de Laplace na coluna de tensão da Tabela 2.1, com as condições iniciais nulas, conseguiremos as seguintes relações:

- **Resistor:**

$$V(s) = RI(s) \quad (2.6)$$

- **Capacitor:**

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) \quad (2.7)$$

- **Indutor:**

$$V(s) = sLI(s) \quad (2.8)$$

Se isolarmos o  $I(s)$  nas Equações (2.6), (2.7) e (2.8), podemos chegar a uma relação genérica como a Equação (2.9):

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) \quad (2.9)$$

Considerando que  $Z(s)$  seja  $R$ ,  $\frac{1}{sC}$  e  $sL$  para os circuitos resistivos, capacitivos e indutivos, respectivamente. A função de transferência da Equação (2.9) é conhecida como função de transferência particular de impedância e  $Z(s)$  como impedância complexa.



### Assimile

As relações de tensão e corrente dos elementos passivos podem ser representadas pela função de transferência particular com a impedância complexa  $Z(s)$  igual a  $R$ ,  $\frac{1}{sC}$  e  $sL$  para os circuitos resistivos, capacitivos e indutivos, respectivamente.

- **Modelagem de circuitos RL**

Formado por elementos passivos: resistor (Ohm) e indutor (Henry), como mostra a Figura 2.2, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do circuito RL, considerando a tensão  $e_i$  como entrada e a corrente  $i$  como saída do sistema.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: Lei de Kirchhoff das Malhas.
3. Simplificações e aproximações: utilizaremos as mesmas simplificações do circuito RC.
4. Equacionamento: considerando os sentidos e as grandezas mostradas na Figura 2.2, podemos aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões, Equação (2.10):

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - e_i = 0 \quad (2.10)$$

Ou aplicarmos diretamente a técnica de obter função de transferência particular de impedância. Dessa forma, poderíamos escrever diretamente a Equação (2.11):

$$-E_i(s) + Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s) \quad (2.11)$$

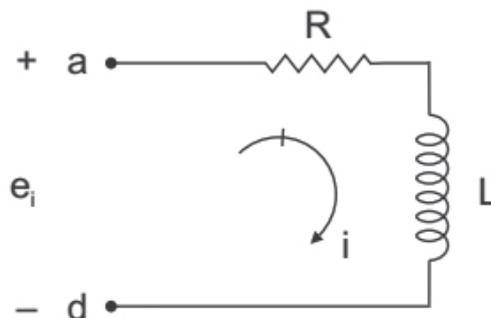
Onde  $Z_1 = R$  e  $Z_2 = sL$ . Logo, a Lei de Kirchhoff das tensões pode ser escrita diretamente no domínio da frequência, como mostra a Equação (2.12):

$$RI(s) + sLI(s) = E_i(s) \quad (2.12)$$

Portanto, a função de transferência para esse sistema é dada pela a Equação (2.13).

$$\frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{Ls + R} \quad (2.13)$$

Figura 2.2 | Esquemático de circuito RL com as grandezas e sentidos especificados



Fonte: adaptada de Felício (2010).



### Pesquise mais

Como dito anteriormente, os circuitos RC e RL são um dos mais simples filtros eletrônicos analógicos existentes. Eles têm como característica fundamental proteger os equipamentos eletrônicos, deixando passar apenas uma frequência do sinal desejado, podendo esta ser baixa (circuito RC) ou alta (circuito RL).

O cálculo dessa frequência é dado pelas Equações (2.14) e (2.15) para os circuitos RC e RL, respectivamente.

- Circuitos RC:  $\omega = \frac{1}{RC}$  rad/s ou  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$  Hz (2.14)

- Circuitos RL:  $\omega = \frac{R}{L}$  rad/s ou  $f_c = \frac{R}{2\pi L}$  Hz (2.15)

Onde  $\omega$  é a frequência angular (dada em radianos por segundo) e  $f_c$  é a frequência angular dada em Hertz.

Para saber mais sobre as características desses circuitos leia o seguinte material: <<http://www.getulio.eng.br/meusalunos/circuitoscom/ApostilaFiltrosPassivos.PDF>>. Acesso em: 9 out. 2016.

Agora que já abordamos os elementos passivos, vamos saber mais sobre a modelagem do elemento ativo amplificador operacional?

- Amplificadores operacionais (AmpOps)

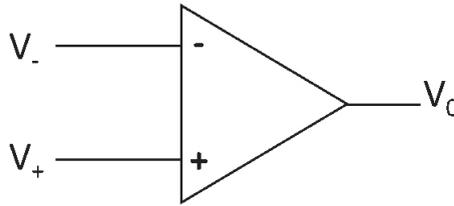
Os AmpOps são circuitos integrados utilizados em um grande número de aplicações, tais como: sistemas eletrônicos de controle industrial, instrumentação industrial, instrumentação médica, sistema de aquisição de dados, equipamento de áudio etc.

Esse componente ativo é caracterizado por um terminal negativo (V-), entrada inversora, terminal positivo (V+) e entrada não inversora, como mostra a Figura 2.3. Dessa forma, a tensão de saída desse elemento pode ser dada pela Equação (2.16).

$$V_0 = \pm A(V_+ - V_-) \quad (2.16)$$

Onde A é o ganho de tensão do AmpOp.

Figura 2.3 | Amplificador operacional - símbolo



Fonte: elaborada pela autora.

Ao analisar a Equação (2.16), nota-se que a tensão de saída é a amplificação da diferença das tensões de entrada do AmpOp. Esse tipo é conhecido como amplificador diferencial.

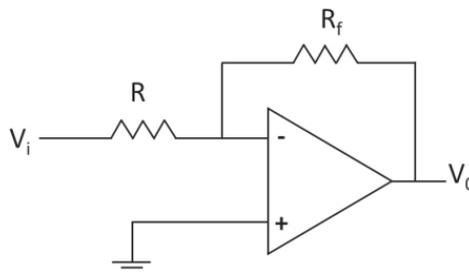
Nos amplificadores operacionais ideais, a impedância de entrada é muito grande, considerada infinita e a de saída é muito pequena, considerada nula. Desse modo, nenhuma corrente flui pelos terminais de entrada e a tensão de saída não é afetada pela carga conectada ao terminal de saída. Assim, nos sistemas de controle e, conseqüentemente, nos projetos de modelagem, consideramos os amplificadores operacionais como ideais.

Dentre os circuitos formados com os amplificadores operacionais nos interessa o tipo inversor e não inversor.

#### o Amplificador inversor

É o amplificador de ganho mais amplamente utilizado. Nesse tipo de circuito, Figura 2.4, a entrada positiva do amplificador operacional é ligada ao referencial, ou terra, do circuito e a saída ( $V_0$ ) é dada pela multiplicação da tensão de entrada ( $V_i$ ) por um ganho constante fornecido pelo resistor de entrada ( $R$ ) e o resistor de realimentação ( $R_f$ ), Equação (2.17). A maior característica desse tipo de circuito é que a saída é invertida em relação à entrada.

Figura 2.4 | Amplificador inversor



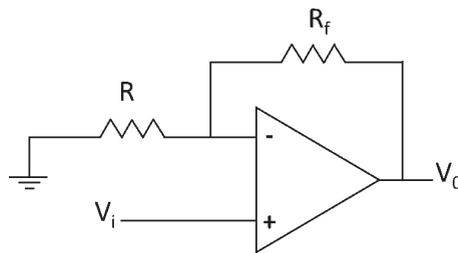
Fonte: Elaborada pela autora.

$$V_0 = -\frac{R_f}{R} V_i \quad (2.17)$$

o Amplificador não inversor

A entrada positiva é conectada a um valor de tensão diferente da referencial, como mostra a Figura 2.5. Assim, a saída é dada pela Equação (2.18). Como a tensão de saída tem o mesmo sinal que a tensão de entrada, logo, esse amplificador é do tipo não inversor.

Figura 2.5 | Amplificador não inversor



Fonte: elaborada pela autora.

$$V_0 = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) V_i \quad (2.18)$$

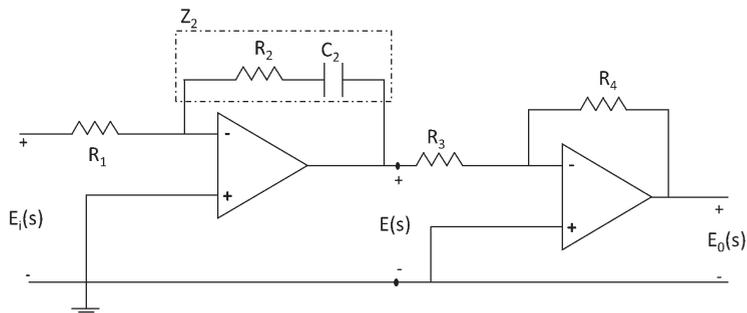
Vejamos como encontrar a função de transferência dos AmpOps a seguir.



### Exemplificando

Encontre a relação de  $E_0(s)$  e  $E_i(s)$ , respectivamente, tensão de saída e tensão de entrada, no circuito da Figura 2.6.

Figura 2.6 | Controlador PI eletrônico



Fonte: elaborada pela autora.

Ao analisarmos esse circuito, notamos que este é formado por dois circuitos de amplificador inversor em cascata. A função de transferência do primeiro está dada em relação às impedâncias complexas, Equação (2.19).

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.19)$$

Como  $Z_1$  é a própria resistência  $R_1$ , Equação (2.20).

$$Z_1 = R_1 \quad (2.20)$$

Já  $Z_2$ ,  $R_2$  e  $C_2$  estão em associação em série, a impedância equivalente entre eles é dada pela Equação (2.21).

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{sC_2} \quad (2.21)$$

Para o segundo amplificador inversor, a relação de saída e entrada é dada pela Equação (2.22).

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad (2.22)$$

Como os AmpOps estão em cascata, a relação saída e entrada resultante é dada pela multiplicação da função de transferência do primeiro pelo segundo, Equação (2.23).

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{E_0(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} \quad (2.23)$$

Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, a função de transferência desse circuito elétrico é dada pela Equação (2.24).

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s} \quad (2.24)$$

O sistema da Figura 2.6, do item *Exemplificando*, é conhecido como controlador PI eletrônico ou controlador proporcional – integral. Esse tipo de circuito pode ser utilizado para melhorar o desempenho de um sistema de controle. Entre os tipos de controladores, o mais amplamente utilizado nos projetos de Engenharia de Controle são os controladores PID, pois tem simplicidade de implementação, baixo custo e robustez nas mais diversas condições de uso. Esses tipos de controladores, assim como os do tipo PI, são formados por capacitores, resistores e amplificadores operacionais, juntos constituem os sistemas de controle automatizados.

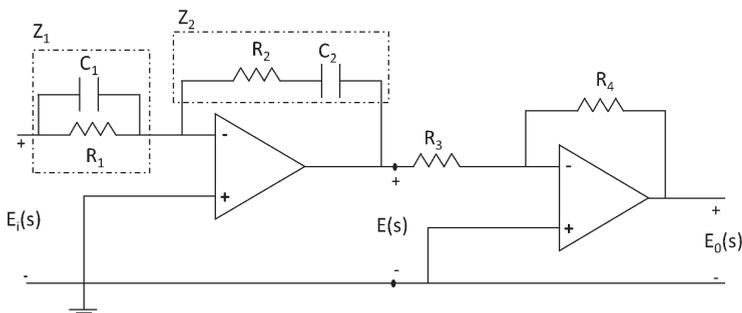
## Sem medo de errar

Uma empresa de sistemas embarcados foi contratada por uma usina para desenvolver um controle automático do nível de um reservatório de água que fica próximo a um ambiente com muita presença de ruído. Você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) dessa empresa. Como você conseguirá projetar esse sistema de nível de forma automática? Quais são os componentes elétricos que podem ser utilizados? Qual será a relação entre esses componentes? Sabemos que os circuitos elétricos são formados por elementos como: resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais, mas como esses componentes podem ser associados ou organizados, para nos ajudar na tarefa do controle automático do nível? O que é preciso fazer para que a resposta do circuito seja exatamente a que queremos?

### Resolução da situação-problema

Como engenheiro de P&D responsável por desenvolver essa parte do projeto, você poderá implementar um controlador do tipo PID analógico para controlar de forma automática o nível de água do reservatório. Vimos que um controlador PID analógico é formado por capacitores, resistores e amplificadores operacionais, como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7 | Controlador PID analógico



Fonte: elaborada pela autora.

Ao analisarmos esse circuito, notamos que este é formado por dois circuitos de amplificador inversor em cascata. A função de transferência do primeiro está dada em relação às impedâncias complexas, Equação (2.25)

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.25)$$

Como  $R_1$  e  $C_1$  estão em associação paralela, a impedância equivalente entre eles é dada pela Equação (2.26).

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad (2.26)$$

Já  $Z_2$  é o equivalente da associação em série dada por  $R_2$  e  $C_2$ , Equação (2.27).

$$Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{s C_2} \quad (2.27)$$

Para o segundo amplificador inversor a relação saída e entrada é dada pela Equação (2.28).

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad (2.28)$$



### Atenção

Como os AmpOps estão em cascata, a relação saída e entrada resultante é dada pela multiplicação da função de transferência do primeiro pelo segundo, Equação (2.29).

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{E_0(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} \quad (2.29)$$

Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, a relação entre os resistores, capacitores e amplificadores operacionais é dada pela função de transferência desse circuito elétrico expressa pela Equação (2.30).

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \left[ \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s} \right] \quad (2.30)$$

Os valores dos resistores a serem usados dependerão do valor do sinal de entrada e saída desse controlador ao longo do processo. Como esse projeto é para ser aplicado em um ambiente com muita presença de ruído, será necessária a implementação de um filtro, que veremos na próxima seção. Dessa forma, a depender de como o filtro for idealizado, saberemos quais serão os sinais exatos de entrada e saída desse dispositivo. Assim, conseguiremos determinar valores comerciais para nosso controlador.

## Avançando na prática

### Projeto de um filtro passa-baixa de primeira ordem

#### Descrição da situação-problema

Uma pequena empresa de alimentos estava com um problema: em determinada hora do dia uma de suas esteiras perdia o controle de sua velocidade, isto é, em alguns momentos ela ficava mais rápida, outros mais devagar.

Um engenheiro foi designado a resolver esse impasse. Ele chegou ao local no determinado horário em que a esteira perdia a sintonia da velocidade e percebeu a presença de um sinal indesejado nas medições. O engenheiro decidiu colocar um filtro para resolver o problema. O que ele não lembrava, naquele instante, era como determinar os elementos que compõem esse filtro.

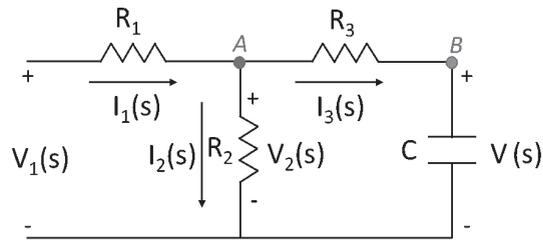
Vamos ajudá-lo?

Dados medidos: o sinal indesejado tinha uma frequência de 106,1 Hz e o equipamento de controle precisa de um sinal com frequência inferior a esta.

#### Resolução da situação-problema

Para ajudar nosso amigo de profissão, o ideal seria projetar um filtro que rejeite os sinais acima da frequência do sinal medido. Sendo assim, um possível esquemático desse filtro passa-baixa é apresentada pela Figura 2.8.

Figura 2.8 | Esquemático filtro passa-baixa



Fonte: elaborada pela autora.

Agora, com o esquemático montado, vamos encontrar a função de transferência do sistema e determinar os elementos que compõem esse filtro.

Iniciamos pela *definição do problema* que se caracteriza pela obtenção da função de transferência do circuito RC, considerando Vi como entrada e V como a saída do sistema. Em seguida, podemos utilizar a Lei de Kirchhoff das Correntes como *teoria e aplicação das leis fundamentais* e podemos realizar as seguintes *simplificações e aproximações*: os resistores são puros, lineares e os valores das respectivas resistências são constantes; os capacitores são puros e lineares e os valores das respectivas capacitâncias são constantes; os fios que conectam os elementos são condutores perfeitos com resistências, capacitâncias e indutâncias nulas; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas a fim de manter o comportamento do sistema linear. Assim, o equacionamento ao aplicarmos a Lei de Kirchhoff das Correntes ao nó A é dado pela Equação (2.31).

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) \quad (2.31)$$

Sabendo a relação de tensão para os resistores e os capacitores, chegamos à Equação (2.32).

$$\frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3 + \frac{1}{sC}} \quad (2.32)$$

Aplicando a mesma lei ao nó B, chegamos à relação dada pela equação (2.33).

$$\frac{V_2(s) - V(s)}{R_3} = \frac{V(s)}{\frac{1}{sC}} \quad (2.33)$$

Isolando o valor de  $V_2(s)$  na Equação (2.33) e substituindo na Equação (2.32), obtemos a função de transferência para o filtro, como na Equação (2.34).

$$\frac{V(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{3RCs + 2} \quad (2.34)$$

$$\frac{V(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{3}}{s + \frac{2}{3RC}} \quad (2.35)$$

Sabendo que a frequência de corte do filtro passa-baixa é dada pela Equação (2.36) e que nossa frequência de corte é 106,1 Hz, podemos chegar à relação resistor-capacitor, como a Equação (2.37).

$$\frac{1}{RC} = 2\pi(106,1) \quad (2.36)$$

$$RC = 0,001 \quad (2.37)$$

Logo, podemos selecionar  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$  que conseguiremos ajudar ao nosso amigo engenheiro.

Vale destacar nesse problema o valor do ganho estático do filtro, ou seja, o valor da função de transferência quando  $s=0$ , nesse caso, o ganho seria igual a 0,5. Assim, teríamos um filtro passa-baixa de ganho estático igual a 1/2 e  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ , cuja função de transferência ficaria como a Equação (2.38).

$$\frac{V(s)}{V_1(s)} = \frac{333,35}{s + 666,7} \quad (2.38)$$

**Faça valer a pena**

**1.** A obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema é o primeiro passo para análise dos problemas em sistemas dinâmicos. Sabemos que uma das etapas para obtenção do modelo matemático é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas.

A respeito de modelagem matemática de circuitos elétricos pode-se afirmar:

I. É baseada nas leis de Kirchhoff: das Tensões e Correntes.

II. Os elementos básicos que compõem esse tipo de circuito são fontes de tensão ou corrente, resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais (AmpOps).

III. As variáveis ou grandezas físicas frequentemente utilizadas para análise dos circuitos elétricos são tensões e corrente em função do tempo.

- a) Apenas I está correta.
- b) Apenas II está correta.
- c) Apenas III está correta.
- d) Apenas II e III estão corretas.
- e) I, II e III estão corretas.

**2.** Os circuitos elétricos podem ter suas dinâmicas descritas por funções de transferência, conhecidas como funções de transferência particular de impedância, que tem por base a impedância complexa como a relação entre tensão e corrente.

Ao aplicarmos a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, à relação tensão - corrente do resistor, capacitor e indutor pode ser dado, respectivamente, por:

- a)  $R$ ,  $sL$  e  $1/sC$ .
- b)  $R$ ,  $1/sC$  e  $sL$ .
- c)  $R$ ,  $sC$  e  $1/sL$ .
- d)  $R$ ,  $1/sL$  e  $sC$ .
- e)  $R$ ,  $sL$  e  $1/sC$ .

**3.** O amplificador operacional não inversor caracteriza-se por ter a entrada positiva ligada ao referencial ou terra do circuito e a saída ( $V_0$ ) é dada pela multiplicação da tensão de entrada ( $V_i$ ) por um ganho constante dado pelo resistor de entrada ( $R$ ) e o resistor de realimentação ( $R_f$ ).

Em um amplificador operacional não inversor qual equação caracteriza a tensão de saída?

a)  $V_i = \frac{R_f}{R} V_0.$

b)  $V_0 = \frac{R_f}{R} V_i.$

c)  $V_i = -\frac{R_f}{R} V_0.$

d)  $V_0 = -\frac{R_f}{R} V_i.$

e)  $V_0 = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) V_i.$

## Seção 2.2

### Modelagem matemática de sistemas elétricos: circuito RLC

#### Diálogo aberto

Na seção anterior, demos início a aplicação dos conceitos de modelagem matemática aplicados aos sistemas elétricos. A partir dos sistemas físicos, obtivemos a equação diferencial descritiva do modelo dinâmico e, conseqüentemente, a função de transferência dos circuitos de primeira ordem (formados por resistores e indutores ou resistores e capacitores) e circuitos com amplificadores operacionais.

Nesta seção daremos continuidade aos nossos estudos de modelagem matemática de sistemas elétricos, com a utilização de circuitos de segunda ordem, podendo ser utilizados também circuitos de ordem superior. Veremos que circuito de segunda ordem é muito utilizado como filtro passivo, ou seja, quando queremos selecionar ou rejeitar uma determinada frequência de um sinal. Além disso, veremos como decorre a resposta desses tipos de sistemas a diferentes entradas, como degrau, impulso e rampa.

Não se esqueça, você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) de uma empresa de sistemas embarcados que foi contratada para implementar um controlador PID do sistema automático de controle de nível, que fica próximo a um ambiente com presença de muito ruído. Você já obteve a função de transferência que descreve o comportamento da dinâmica do sistema desse controlador, agora, deverá atentar-se para o ruído presente no local do projeto. Como resolver essa situação? Como fazer que o ruído presente não interfira no controle do seu sistema?

Vamos implementar mais essa parte do projeto de controle do nível?

Espero que você esteja animado para mais essa etapa.

Bons estudos e ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Na Seção 2.1 vimos que os circuitos elétricos têm sua dinâmica dada pelas Leis de Kirchhoff da Tensão e da Corrente. Além disso, vimos também que eles são formados por elementos ativos como: fonte de tensão, geradores, amplificadores operacionais (AmpOp) etc.; e por elementos passivos: resistores, indutores e capacitores, que podem ser conectados de diversas maneiras, formando os mais diferentes sistemas dinâmicos: compensadores, controladores de velocidades, aquecedores, dentre outros.

Nesse contexto, um circuito RLC é formado por um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C), podendo estar conectado em série ou paralelo. Esse tipo de circuito é denominado de segunda ordem, visto que a tensão e a corrente do circuito podem ser descritas por uma equação diferencial de segunda ordem.

Vale ressaltar que a ordem de um sistema é dada pela quantidade de elementos armazenadores de energia presentes no circuito. Isto é, sabendo que os capacitores são elementos armazenadores de energia elétrica e que os indutores são armazenadores de energia magnética, podemos relacionar a ordem do nosso sistema com a quantidade de capacitores e indutores presentes nos sistemas em estudo. Por exemplo, se o sistema elétrico tiver apenas um capacitor ou indutor, o sistema será descrito por equação diferencial de primeira ordem; mas se o circuito elétrico for formado por dois capacitores ou dois indutores, ou mesmo por um capacitor e um indutor, o circuito será descrito por equação diferencial de segunda ordem, e assim sucessivamente.

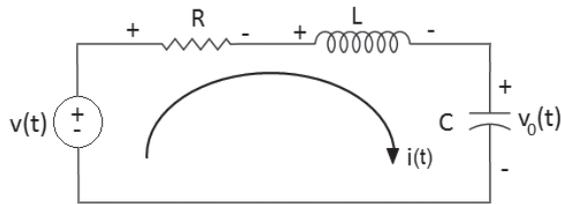


### Assimile

A ordem do modelo matemático de um sistema elétrico é dada pela quantidade de elementos armazenadores de energia que temos em nosso circuito.

Sendo assim, partindo de um circuito RLC em série formado por um resistor (Ohms), um indutor (Henry) e um capacitor (Faraday), percorrido por uma corrente  $i(t)$  (amperes), como mostra a Figura 2.9, vamos encontrar o modelo matemático que descreve a relação entre a tensão do capacitor e a tensão de entrada desse sistema?

Figura 2.9 | Esquemático circuito RLC em série



Fonte: elaborada pela autora.

O processo de modelagem matemática é dado pelos seguintes passos:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do circuito RLC em série, considerando  $v(t)$  como entrada e  $v_0(t)$  como saída do sistema.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: Lei de Kirchhoff das Malhas.
3. Simplificações e aproximações: para a modelagem dos sistemas elétricos de segunda ordem serão adotados o mesmo conjunto de hipóteses aplicados aos circuitos de primeira ordem:
  - a. Os resistores são puros, lineares e os valores das respectivas resistências são constantes.
  - b. Os capacitores são puros e lineares e os valores das respectivas capacitâncias são constantes.
  - c. Os indutores são puros e lineares e os valores das respectivas indutâncias são constantes.
  - d. Os fios que conectam os elementos são condutores perfeitos com resistências, capacitâncias e indutâncias nulas.
  - e. Todas as condições iniciais são nulas.
  - f. As variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. Equacionamento: considerando os sentidos e as grandezas mostradas no esquemático da Figura 2.9, podemos aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões, Equação (2.39) e Equação (2.40).

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt - v(t) = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = v_0(t) \quad (2.40)$$

Aplicando a transformada de Laplace às Equações (2.39) e (2.40), considerando as condições iniciais nulas, chegamos às Equações (2.41) e (2.42).

$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V(s) \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{sC} I(s) = V_0(s) \quad (2.42)$$

Dessa forma, a função de transferência para esse sistema, mostrada na Equação (2.43) é:

$$\frac{V_0(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.43)$$

Esse mesmo circuito elétrico, Figura 2.9, poderia ser modelado por representação em espaço de estado. Sabemos que se trata de um circuito de segunda ordem, logo, são necessárias duas variáveis de estado para descrever completamente a dinâmica do sistema, sendo elas demonstradas pelas Equações (2.44) e (2.45).

$$x_1(t) = v_0(t) \quad (2.44)$$

$$x_2(t) = \frac{dv_0(t)}{dt} \quad (2.45)$$

Assim, derivando a Equação (2.40) e substituindo na Equação (2.39), chegamos à equação diferencial (2.46) em função das variáveis de estado.

$$RC \frac{dv_0(t)}{dt} + LC \frac{d^2v_0(t)}{dt^2} + v_0(t) = v(t) \quad (2.46)$$

Reescrevendo a Equação (2.46) em função das variáveis de estado,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , chegamos à Equação (2.47).

$$\ddot{x}_2(t) = -\frac{R}{L}x_2(t) - \frac{1}{LC}x_1(t) + \frac{1}{LC}v(t) \quad (2.47)$$

Sendo as variáveis de entrada e saída, respectivamente, descritas pelas Equações (2.48) e (2.49).

$$u = v(t) \quad (2.48)$$

$$y = v_0(t) = x_1(t) \quad (2.49)$$

Então, podemos escrever o sistema na forma vetor – matricial, como descreve a Equação (2.50) e (2.51).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (2.50)$$

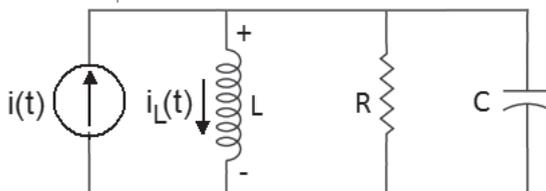
$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$



### Faça você mesmo

O circuito RLC é formado por um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C), podendo ser conectados em série ou paralelo. Já obtivemos o modelo dinâmico para o sistema RLC em série, que tal tentar obter o modelo RLC em paralelo como mostra a Figura 2.10?

Figura 2.10 | Circuito RLC em paralelo



Fonte: elaborada pela autora.

Vamos lá? Os passos são similares ao circuito RLC em série. Você consegue!

Vimos que os sinais de entrada de teste normalmente utilizados são as funções degrau, impulso e rampa. Segundo Ogata (2010), os sinais típicos que devem ser utilizados na análise das características do sistema dependem do comportamento de entrada a que o sistema será submetido com maior frequência, nas condições normais de operação. Por exemplo, se um sistema estiver sujeito, com maior frequência, a variações bruscas de entrada, a função degrau poderá ser um bom sinal de entrada; bem como o sinal impulso deverá ser utilizado para sistemas sujeitos à entrada de grande impacto. Porém, se as entradas dos sistemas variam gradualmente com o tempo, a entrada tipo rampa pode ser um bom sinal de teste.

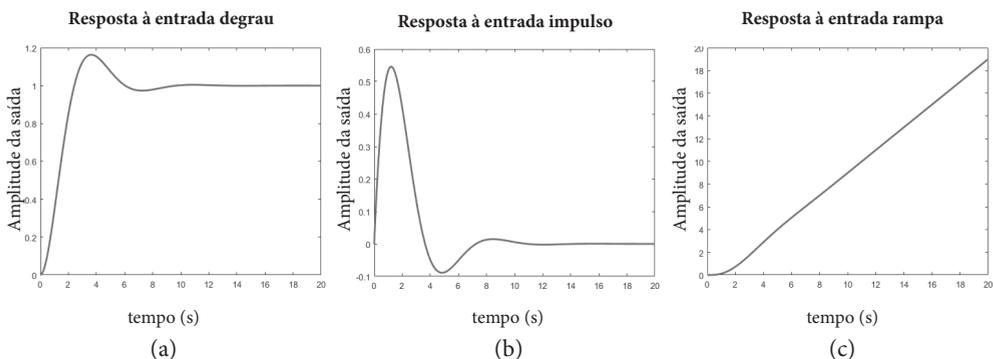


### Refleta

De posse das funções de transferência do circuito RLC em série, que tal obtermos as respostas desses sistemas quando aplicamos diferentes sinais de testes? Mas quais sinais devemos utilizar?

Sendo assim, ao aplicar esses três diferentes tipos de sinais de entrada à função de transferência para o circuito RLC em série, com valores unitários dos componentes passivos, as respostas adquiridas apresentam-se como sistema de segunda ordem subamortecidos, como pode ser vista, respectivamente, na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Circuito RLC em série – respostas às entradas: (a) degrau, (b) impulso e (c) rampa



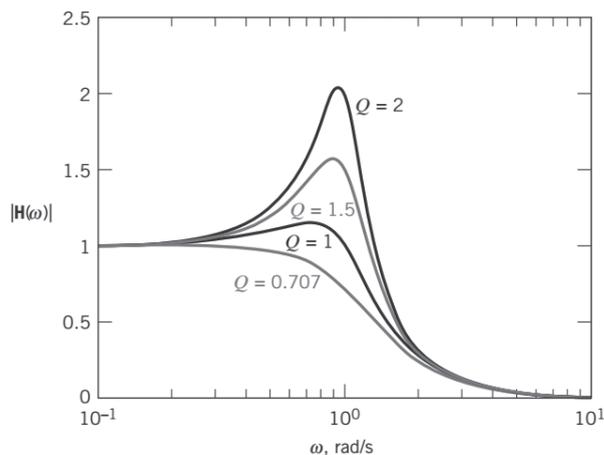
Fonte: elaborada pela autora.

Nesse contexto, uma das aplicabilidades mais usuais dos circuitos RLC é a utilização em filtros passivos. Iniciamos uma introdução sobre filtros na seção anterior, em que vimos filtros de primeira ordem, RL e RC. Vimos também que esse tipo de circuito é formado, basicamente, por impedâncias interligadas e seu comportamento depende dos valores das resistências, capacitâncias e indutâncias envolvidas.

Segundo Dorf e Svoboda (2012), os filtros de segunda ordem são mais próximos dos filtros ideais e são mais sofisticados, ou seja, esses tipos de filtro reproduzem com maior fidelidade o comportamento dos filtros ideais desejados.

A resposta de um filtro de segunda ordem depende do ganho ( $k$ ), da frequência de canto ou corte ( $\omega_0$ ) e do fator de qualidade ( $Q$ ). O ganho do filtro é caracterizado como uma constante que amplifica ou atenua o sinal de resposta, a frequência de corte é caracterizada por ser a frequência em que o filtro permitirá ou não a passagem do sinal e o ganho de qualidade controla a forma da resposta de frequência na transição da banda passante (parte que o filtro permite a passagem do sinal) para banda de rejeição (parte do sinal que é rejeitada pelo filtro), como mostra a Figura 2.12.

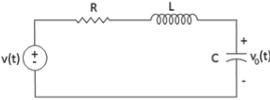
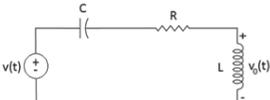
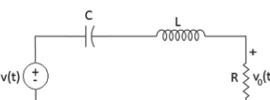
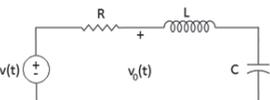
Figura 2.12 | Resposta do filtro de segunda ordem com diferentes valores de ganho de qualidade para  $\omega_0=1$



Fonte: adaptada de Dorf e Svoboda (2012).

Sendo assim, em um projeto de engenharia na qual implementamos um filtro, os valores dos componentes do circuito são escolhidos para que apresente os valores desejados de  $k$ ,  $\omega_0$  e  $Q$ . Estes são relacionados com a função de transferência de segunda ordem, como mostra a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 | Tipos de filtro RLC de segunda ordem

Tipo de Filtro	Circuito	Função de Transferência	Equações Projeto Filtro
Passa - Baixas		$\frac{V_0(s)}{V(S)} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Passa - Altas		$\frac{V_0(s)}{V(S)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Banda Passante		$\frac{V_0(s)}{V(S)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Banda de Rejeição		$\frac{V_0(s)}{V(S)} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$

Fonte: adaptada de Dorf e Svoboda (2012).



**Pesquise mais**

Os filtros são classificados quanto à função executada, isto é, são identificados pelo tipo de frequência do sinal que permite a passagem: passa-baixo (permite a passagem de sinais de baixa frequência); passa-alto (permite a passagem de sinais de alta frequência); banda passante (permite a passagem de sinais em uma faixa de frequência); banda de rejeição (permite a passagem de sinais com frequência acima ou abaixo de uma determinada faixa de frequência).

Para saber mais sobre as características desses tipos de filtro veja mais em:

DORF, Richard C. SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

Vale salientar que as equações de projeto de filtro foram deduzidas pela relação da forma-padrão dos circuitos de ordem dois, Equação (2.52), relacionadas com a função de transferência encontrada para o circuito, coluna 3 da Tabela 2.2.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Na equação acima,  $C(s)$  é a saída,  $R(s)$  é entrada,  $\omega_n$  é a frequência natural (2.52) o fator ou taxa de amortecimento do sistema, como vimos na Seção 2.2. Assim, podemos afirmar que a frequência de canto ( $\omega_0$ ) é dada pela Equação (2.53).

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Já o fator de qualidade ( $Q$ ) é dado pela Equação (2.54). (2.53)

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Sabendo o valor de  $\omega_0$ , Equação (2.54), então o valor do fator de qualidade é dado pela Equação (2.55). (2.54)

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

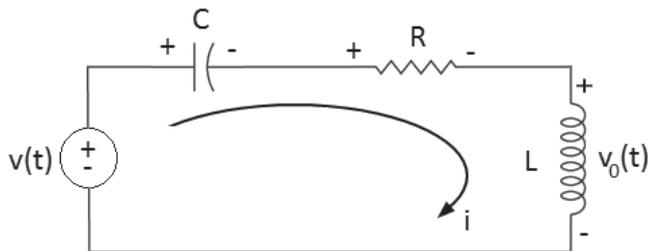
O filtro passa-baixo apresentado pela Tabela 2.2 já foi analisado anteriormente (2.55) quando encontramos a função de transferência do circuito RLC em série.



### Exemplificando

Vamos fazer o mesmo para o filtro passa-alta? Realize as etapas do processo de modelagem matemática e encontre a função de transferência do filtro passa-alta, Figura 2.13. Em seguida, encontre a frequência de canto e o fator de qualidade para os valores de  $R = 2,7 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  e  $C = 2,2 \text{ }\mu\text{F}$ .

Figura 2.13 | Esquemático circuito RLC - filtro passa-alta



Fonte: elaborada pela autora.

O processo de modelagem matemática é dado pelos seguintes passos:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do circuito RLC em série, considerando  $v(t)$  como entrada e  $v_0(t)$  como saída do sistema.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: Lei de Kirchhoff das Malhas.
3. Simplificações e aproximações: as adotadas para modelagem do circuito RLC em série.
4. Equacionamento: aplicamos a técnica de obter a função de transferência com uso de impedância complexa ou função de transferência própria do sistema. Assim, podemos aplicar a lei de Kirchhoff das Malhas que obteremos a Equação (2.56) e a Equação (2.57).

$$\frac{1}{sC}I(s) + RI(s) + sLI(s) - V(s) = 0 \quad (2.56)$$

$$V_0(s) = sLI(s) \quad (2.57)$$

Dessa forma, a função de transferência para esse sistema fica como mostra a Equação (2.58):

$$\frac{V_0(s)}{V(S)} = \frac{sLI(s)}{\left(\frac{1}{sC} + sL + R\right)I(s)} = \frac{sLI(s)}{\left(\frac{LCs}{LCs^2 + RCs + 1}\right)I(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.58)$$

Assim, para os valores dados, o valor da frequência de corte e do fator de qualidade são dados pela Equação (2.59) e Equação (2.60), respectivamente.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 4767,3 \text{ rad / s} \quad (2.59)$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,0353 \quad (2.60)$$

### Sem medo de errar

Uma empresa de sistemas embarcados foi contratada por uma usina para desenvolver um controle automático do nível de um reservatório de água que fica próximo a um ambiente com presença de muito ruído. Você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) dessa empresa, e já obteve a função de transferência que descreve o comportamento da dinâmica do sistema desse controlador. Agora você deverá atentar-se para o ruído presente no local do projeto. Como resolver essa situação? Como fazer que o ruído presente não interfira no controle do seu sistema?

#### Resolução da situação-problema:

Para implementação do filtro, é necessário saber qual a frequência do sinal que deve ser medido, ou seja, sinal desejado, pelo seu sistema e qual é a frequência do sinal, ruído, que precisa ser atenuado para evitar possíveis erros de medidas no sistema de controle.

Após algumas medidas, você e sua equipe notaram que a frequência desejada dos sinais de controle para seu sistema automático de nível era de 9 kHz e que a frequência do sinal indesejado era de 15 kHz. Como a frequência desejada é inferior a que se pretende atenuar, constatou-se que seria necessária a projeção de um filtro passa-baixa, com frequência de corte estimada em 10 kHz, garantindo o valor estabelecido pelo sistema. Outro ponto importante foi assegurar o valor do fator de qualidade (Q) igual a 1, garantido que não teríamos a presença de elevação do módulo na frequência de corte.

Sabendo que a frequência de corte do filtro passa-baixa é dada pela Equação (2.56) e que então o valor do fator de qualidade é dado pela Equação (2.58). Então, podemos chegar a seguinte relação dos elementos passivos: resistor (R), indutor (L) e capacitor (C) dada pelas Equações (2.61) e (2.62).

$$(10K)^2 = \frac{1}{LC} \tag{2.61}$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.62}$$

Sendo assim, podemos então adotar  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 3 \text{ mH}$  e  $C = 3,3\mu\text{F}$ . A função de transferência para o filtro projetado (T(s)), dado pela Tabela 2.2, fica como mostra a Equação (2.63).

$$T(s) = \frac{1,01 \cdot 10^8}{s^2 + 10000s + 1,01 \cdot 10^8} \tag{2.63}$$

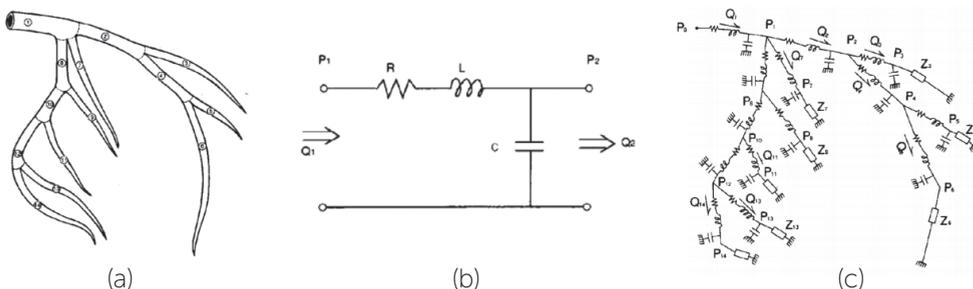
## Avançando na prática

### Deteção da obstrução da artéria coronária

#### Descrição da situação-problema

A obstrução da artéria coronária, em alguns casos, está sendo diagnosticada por meio de técnicas não invasivas, como o uso de microfones sensíveis para detectar anomalias acústicas de fluxo. Com o objetivo de prever as propriedades sonoras da artéria esquerda, foi desenvolvido um modelo que a divide em 14 segmentos, como mostra a Figura 2.14 (a).

Figura 2.14 | Modelo da artéria em 14 segmentos



Fonte: adaptada de Wang et al. (1990).

Cada segmento é então modelado pelo circuito elétrico RLC, dado pela Figura 2.14 (b), o que resulta no modelo completo da artéria, como mostra Figura 2.14 (c). Nesse modelo elétrico a pressão (P) é análoga à tensão, em volts, e o fluxo sanguíneo (Q) é análogo à corrente elétrica, em amperes.

Sendo os valores dos elementos passivos o modelo do segmento 5, dado por  $R = 8906 \Omega$ ,  $C = 0,21 \text{ F}$ ,  $L = 140,5 \text{ H}$ , qual seria a relação entre o fluxo sanguíneo de saída pela pressão de entrada para esse segmento?

### Resolução da situação-problema

Considerando o modelo de cada segmento dado como circuito RLC em série, e sendo a pressão (P) análoga à tensão, em volts, e o fluxo sanguíneo (Q) análogo à corrente elétrica, com condições iniciais nulas, podemos determinar a função de transferência como mostra as Equações (2.64), (2.65) e (2.66).

$$Rq_0(t) + L \frac{dq_0}{dt} + \frac{1}{C} \int q_0(t) dt - p_1(t) = 0 \quad (2.64)$$

$$RQ_0(s) + LsQ_0(s) + \frac{1}{sC} Q_0(s) = P_1(s) \quad (2.65)$$

$$\frac{Q_0(s)}{P_1(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{C}{L}s}{s^2 + \frac{RC}{L}s + \frac{1}{L}} \quad (2.66)$$



### Atenção

Normalmente, em circuitos elétricos a letra "q" representa carga elétrica. Cuidado para não se confundir, nessa situação-problema  $q_0$  refere-se ao fluxo sanguíneo que está sendo representado equivalente à corrente elétrica, geralmente representada pela letra "i", em amperes. Do mesmo modo, a letra "p" se refere à pressão e é equivalente à tensão, normalmente representada pela letra "v" de volts.

Sendo os valores dos elementos passivos, para o modelo do segmento 5, dado por  $R = 8906 \Omega$ ,  $C = 0,21 \text{ F}$ ,  $L = 140,5 \text{ H}$ , então, a relação entre o fluxo sanguíneo de saída pela pressão de entrada para esse segmento é dado pela função de transferência descrita na Equação (2.67).

$$\frac{Q_0(s)}{P_1(S)} = \frac{0,00149s}{s^2 + 13,31s + 0,0071} \quad (2.67)$$

### Faça valer a pena

**1.** Os circuitos RLC são circuitos formados por resistor, indutor e capacitor, podendo estar conectados em série ou paralelo, alimentados por fontes de tensão ou corrente. Os circuitos RLC são chamados de circuito de segunda ordem, visto que qualquer tensão ou corrente nele pode ser descrita por equações diferenciais de segunda ordem.

Um circuito RLC em paralelo é alimentado por uma tensão  $v(t)$ . A expressão da corrente total  $i(t)$  no domínio do tempo é:

$$\text{a) } i(t) = Rv(t) + L \int v(t)dt + \frac{1}{C} \frac{dv(t)}{dt} .$$

$$\text{b) } i(t) = R \frac{dv(t)}{dt} + L \frac{dv(t)}{dt} + C \frac{dv(t)}{dt} .$$

$$\text{c) } i(t) = \frac{v(t)}{R} + L \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int v(t)dt .$$

$$\text{d) } i(t) = \frac{v(t)}{R} + L \int v(t)dt + \frac{1}{C} \frac{dv(t)}{dt} .$$

$$\text{e) } i(t) = R.v(t) + L \frac{dv(t)}{dt} + C \frac{dv(t)}{dt} .$$

**2.** A respeito dos circuitos RLC:

I. A ordem de um sistema é dada pela quantidade de elementos armazenadores de energia que temos em nosso circuito.

II. Nesse tipo de circuito a tensão e a corrente, contidos neste, pode ser descrita por uma equação diferencial de ordem qualquer.

III. Ao aplicar uma entrada degrau, podemos ter a resposta subamortecida, a depender dos valores dos elementos passivos que compõem esse circuito.

IV. São muito utilizados como filtros passivos.

Marque a alternativa que apresenta o julgamento correto das sentenças, por ordem de apresentação:

- a) F – V – F – F.
- b) V – F – F – V.
- c) V – F – V – V.
- d) V – V – F – V.
- e) F – F – V – V.

**3.** Sobre filtros passivos de segunda ordem podemos afirmar:

I. São considerados os mais próximos dos filtros ideais e mais sofisticados.

II. A resposta de um filtro de segunda ordem depende do ganho ( $k$ ), da frequência de canto ou corte ( $\omega_0$ ) e do fator de qualidade ( $Q$ ).

III. A frequência de canto ou corte é inferida da frequência natural do sistema em estudo.

A respeito dos filtros passivos RLC:

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- e) As afirmativas I, II e III estão corretas.



## Seção 2.3

### Modelagem matemática de sistemas elétricos com uso de software

#### Diálogo aberto

Caro aluno, uma empresa de sistemas embarcados foi contratada por uma usina para desenvolver um controle automático do nível de um reservatório de água que fica próximo a um ambiente com presença de muito ruído. Você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) dessa empresa e já desenvolveu o controlador analógico para o controle automático desse sistema. Além disso, você já conseguiu implementar o filtro necessário para amenizar o ruído presente no ambiente. Agora é o momento de testarmos os modelos obtidos e validarmos os elementos passivos estimados nas seções anteriores, que formam esses sistemas elétricos.

Na Seção 1.3 aprendemos sobre uma ferramenta para testes e simulações dos modelos obtidos via software: o MatLab®, e seu ambiente gráfico: o Simulink®. Nesta seção aplicaremos nosso conhecimento adquirido nesse software aos testes e validação dos modelos matemáticos dos sistemas elétricos, nas mais diferentes ordens, estudados nas Seções 2.1 e 2.2 desta unidade.

Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias, ou seja, a validação é importante por assegurar que os modelos estimados contêm as informações que queremos reproduzir para nosso projeto. Ao validarmos nossos modelos matemáticos dinâmicos via uso de software, estamos estimando pelo custo do projeto e pela segurança das pessoas envolvidas.

Sendo assim, temos como objetivo nesta unidade comprovar a viabilidade dos componentes do controlador PID e do filtro necessários para o projeto do controle automático de nível de uma determinada usina de álcool, da qual você é responsável. Vale salientar que os testes devem ser simulados em um software conhecido, como MatLab®.

Esperamos que você esteja determinado para a realização de mais esse desafio.

Bons estudos e um ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Os sistemas elétricos são componentes essenciais de muitos sistemas dinâmicos complexos, como: controlador de nível, de velocidade, notebooks, máquina de lavar, robôs, filtros passivos e outros eletrônicos em geral. Vimos na Seção 2.1 que, para encontramos o modelo dinâmico que descreve o comportamento desse tipo de sistema, é necessário utilizarmos as leis de Kirchhoff, independentemente da ordem do sistema.

De posse do modelo dinâmico do sistema, que pode ser representado por função de transferência ou representação por espaço de estado, podemos analisar por simulação via software a resposta dos sistemas em análise para diferentes tipos de entrada, como fizemos na Seção 1.3. Todavia, agora aplicaremos essas entradas aos sistemas elétricos dos tipos: RC, RL (sistemas de primeira ordem), RLC (sistemas de segunda ordem), ou ordem superior e para os circuitos com amplificadores operacionais, como vimos nas primeiras seções desta unidade.

### 2.3.1 Modelagem matemática de circuitos RC com uso do MatLab®

Como vimos na Seção 2.1, os circuitos RC são formados por um resistor e um capacitor, sendo utilizados em filtros do tipo passa-baixa, instrumentação eletrônica e compensadores em malha de controle, como esquemático mostrado na Figura 2.1 da Seção 2.1.

A função de transferência, que descreve o comportamento dinâmico desse sistema, obtida também na Seção 2.1, é dada pela Equação (2.5). Assim, podemos analisar a saída do sistema via simulação, utilizando o software MatLab® para diferentes tipos de entrada, como degrau e impulso.

Vale lembrar que o MatLab® pode ser programado via linhas de código (ou comando de instrução (script)) ou via diagramação gráfica de blocos: o Simulink®, que será apresentado ainda nesta seção aplicado aos sistemas elétricos.

Utilizando, portanto, a programação por comando de instrução, devemos lembrar de alguns comandos essenciais, vistos na Seção 1.3, como: **tf (num,den)**: comando para criar uma função de transferência contínua de um sistema; **step (sys)**: entrada degrau do sistema dinâmico e **impulse (sys)**: entrada ao impulso do sistema dinâmico. Dessa forma, podemos criar nosso programa em comando de instrução para esse tipo de sistema elétrico para entrada degrau e impulso, como:

```

%Modelagem sistema RC: representação do modelo em função de transferência
num = [1];      %numerador da tf
den = [R*Cap 1]; %denominador da tf
sys = tf(num,den) %função de transferência
figure(1)      %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys)      %aplicação da entrada degrau
figure(2)      %criação da janela para figura(gráfico)
impulse(sys)   %aplicação da entrada impulso

```

Vale salientar que para o programa funcionar corretamente é necessário determinarmos valores numéricos para o resistor e o capacitor. Você pode determinar valores fixos, ou seja, criar seu próprio programa com valores de resistor ou capacitor previamente estabelecidos, ou permitir que o usuário entre com os valores. Para isso, é necessária a utilização do comando: **input**( ' frase que identifica a variável '). Dessa forma, nosso programa anterior ficaria:

```

%Modelagem sistema RC: representação em função de transferência com uso do
%comando "input"

```

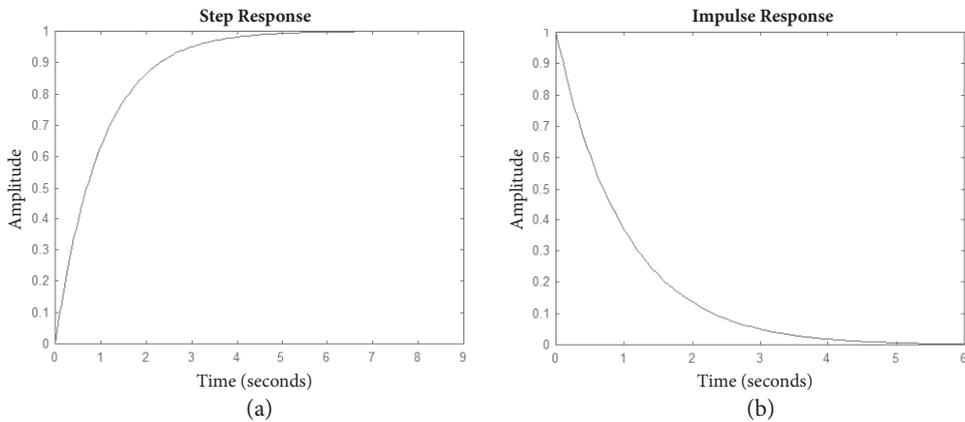
```

R = input('Valor do resistor (ohms): ');
Cap = input('Valor do capacitor (faraday): ');
num = [1];      %numerador da tf
den = [R*Cap 1]; %denominador da tf
sys = tf(num,den) %função de transferência
figure(1)      %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys)      %aplicação da entrada degrau
figure(2)      %criação da janela para figura(gráfico)
impulse(sys)   %aplicação da entrada impulso

```

Utilizando os valores do resistor  $1 \Omega$  e do capacitor  $1 \text{ F}$ , a resposta desse sistema para entradas degrau e impulso podem ser analisadas, respectivamente, na Figura 2.15 (a) e (b).

Figura 2.15 | Resposta para o sistema RC para entradas: (a) degrau e (b) impulso



Fonte: elaborada pela autora.

Ao implementarmos esse programa, podemos alterar os valores do resistor e do capacitor e verificar como se comporta o sistema. Você verá que ao alterarmos o valor de R e C, você irá alterar a constante de tempo do sistema e, conseqüentemente, a velocidade de resposta do sistema.



### Faça você mesmo

Vamos testar o conhecimento que aprendemos até aqui? Simule no MatLab® o programa para análise da saída dos circuitos RC, entrando com diferentes valores de resistor e capacitor e verificando a velocidade de resposta do sistema.

Vale salientar que essa lógica de análise do circuito RC também é válida para os circuitos RL, visto que ambos são circuitos de primeira ordem.

### 2.3.2 Modelagem matemática de circuitos RLC com uso do MatLab®

Os circuitos RLC, ou circuitos de segunda ordem, são formados por resistor, indutor e capacitor, como o esquemático do circuito RLC em série apresentado na Figura 2.9, da Seção 2.2, na qual também foi deduzido o modelo dinâmico desse sistema representado na forma de espaço de estado, Equações (2.50) e (2.51).

Vale salientar que, como visto na Seção 1.3, o comando para implementação do espaço de estado no MatLab® é **ss(A,B,C,D)**, onde a matriz de estado (**A**), a matriz de controle (**B**), a matriz de saída (**C**) e a matriz de transmissão direta (**D**) das equações de espaço de estado são conhecidas.

Assim como o realizado no sistema RC, podemos solicitar que o usuário do programa entre com os valores do indutor, capacitor e resistor. Dessa forma, nosso programa para análise da saída desse sistema, para entradas degrau e impulso, poderia resultar em:

%Modelagem sistema RLC: representação em espaço de estado com uso do comando %"input"

```
R = input('Valor do resistor (ohms): ');
L = input('Valor do indutor (henry): ');
Cap = input('Valor do capacitor (faraday): ');
A = [0 1; (-1/L*Cap) (-R/L*Cap)];      %Matriz A
B = [0; (1/L*Cap)];                  %Matriz B
C = [1 0];                            %Matriz C
D = [0];                              %Matriz D
sys = ss(A,B,C,D)                    %Espaço de Estado
figure(1)                             %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys)                             %aplicação da entrada degrau
figure(2)                             %criação da janela para figura(gráfico)
impulse(sys)                          %aplicação da entrada impulso
```



### Refleta

Uma das possíveis entradas que podemos aplicar aos modelos dinâmicos, por exemplo, no circuito RLC, é a entrada rampa. Todavia, o MatLab® não tem essa função pronta na sua lista de comandos. É possível simular esse tipo de entrada? Como podemos fazer para analisar a resposta do sistema a esse tipo de entrada?

Sabemos que a transformada de Laplace para entrada degrau é  $1/s$  e para entrada rampa é  $1/s^2$ . Sendo assim, para aplicarmos uma entrada rampa aos sistemas, com uso do MatLab®, basta multiplicarmos nossa função de transferência por  $1/s$  ou ainda, se a representação estiver no formato de função de transferência, Equação (2.43), basta aumentarmos uma ordem no nosso denominador. Supondo o sistema de segunda ordem simulado pelas linhas a seguir:

```

%Modelagem sistema RLC: representação em função de transferência
R = 1; L = 1; Cap = 1;
num = [1/L*Cap];           %numerador da tf
den = [1 (R/L) (1/(L*Cap))]; %denominador da tf
den_entrada_rampa = [1 (R/L) (1/(L*Cap)) 0]; %denominador para entrada Rampa
sys = tf(num,den) %função de transferência
sys1 = tf(num,den_entrada_rampa)
figure(1) %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys) %aplicação da entrada degrau
figure(2) %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys1) %aplicação da entrada rampa

```



### Assimile

Para simularmos a entrada rampa com Matlab®, basta aumentarmos uma ordem da função de transferência e aplicarmos a entrada degrau, ou ainda, multiplicar  $1/s$ , resultando na entrada  $1/s^2$ , que no MatLab® pode ser escrita por meio do vetor `den_entrada_rampa` como `[0 1 0]`, que representa o denominador acrescido de uma ordem.

No programa simulado anteriormente, o `den` representa o denominador para função de transferência, RLC em série, como na Equação (2.43) obtida na Seção 2.2.



### Pesquise mais

Os sinais de entrada de teste geralmente utilizados são as funções degrau, rampa, parábola de aceleração, impulso, senoidais e ruído branco. Os sinais típicos que devem ser utilizados na análise das características do sistema dependem do comportamento da entrada a que o sistema será submetido com maior frequência, nas condições normais de operação.

Para saber um pouco mais sobre a função rampa, seu valor no domínio do tempo e da frequência, leia mais em:

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

### 2.3.3 Modelagem matemática de circuitos elétricos Amplificador Operacional com uso do MatLab®

Na Seção 2.1, modelamos o controlador PI eletrônico como mostra a Equação (2.24). Como os outros tipos de sistema elétrico, este pode ser programado por linhas de comando no MatLab®. Nas linhas de código mostradas a seguir, utilizamos valores unitários para os elementos passivos apenas como exemplo, porém eles podem receber qualquer valor ou mesmo ser um valor dado pelo usuário pelo comando **input**, como visto anteriormente.

```
%Modelagem sistema elétrico com Ampop
%Declaração dos elementos passivos
R1 = 1; R2 = 1; R3 = 1; R4 = 1;
Cap2 = 1;
%Cálculo das Partes da Função de Transferência
K_p = (R4*R2)/(R3*R1);
num_T_i = [R2*Cap2 1];
den_T_i = [R2*Cap2 0];
sys_T_i = tf(num_T_i,den_T_i)
%Função de Transferência
f_t_Amp_op = K_p*sys_T_i
```

Assim como feito com o controlador PI, outros tipos de circuitos com amplificadores operacionais podem ser implementados em linha de comando quando já tem-se o modelo dinâmico representativo do sistema.

### 2.3.4 Modelagem matemática de circuitos elétricos RL, RLC e amplificador operacional com uso do Simulink®

Como mencionado no início da seção, as simulações podem ser realizadas via linha de comando (*script*) ou via diagramação gráfica de blocos, utilizando o pacote Simulink®, o mesmo visto na Seção 1.3.

Vamos, então, implementar em Simulink® os tipos de circuitos que implementamos em linha de código?



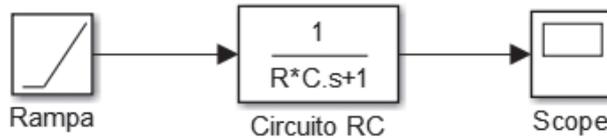
## Exemplificando

Dada as funções de transferência para os circuitos do tipo RC, RLC e para o controlador PI, com uso do AmpOp, mostradas pelas Equações (2.5), (2.43) e (2.24), obtenha a resposta rampa por meio da simulação em diagrama de blocos em ambiente Simulink®. Utilize valores unitários para todos os elementos passivos dos circuitos.

Para realizar essa simulação, é importante lembrar que o bloco "Transfer Fcn", relativo à função de transferência, está localizado na biblioteca *Continuous*. Já o bloco "Ramp", relativo à entrada rampa, está localizado na biblioteca *Sources*. O bloco "Scope", necessário para visualizarmos a saída do sistema, está localizado na biblioteca *Sinks*.

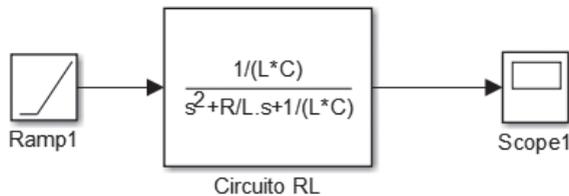
Sendo assim, as simulações para esses tipos de circuitos são apresentadas nas Figuras 2.16, 2.17 e 2.18.

Figura 2.16 | Simulink®: circuito tipo RC



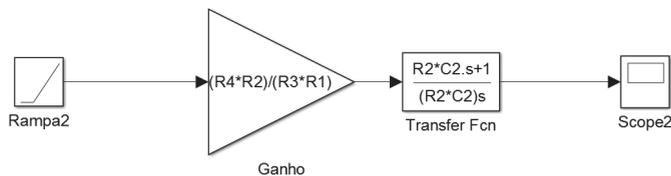
Fonte: elaborada pela autora.

Figura 2.17 | Simulink®: circuito RLC



Fonte: elaborada pela autora.

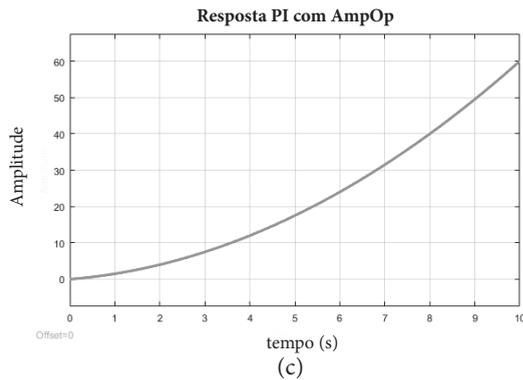
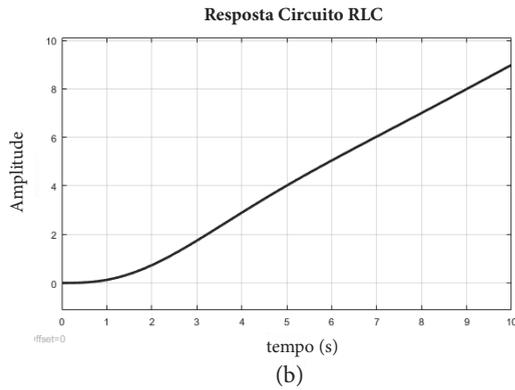
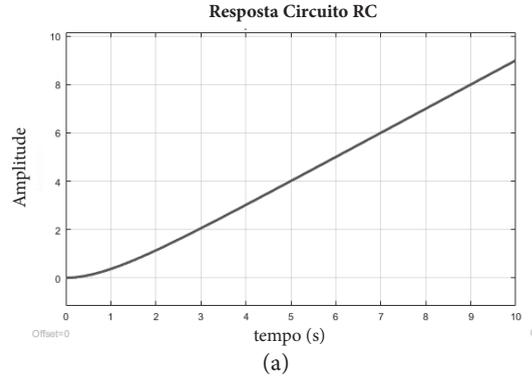
Figura 2.18 | Simulink®: circuito PI



Fonte: elaborada pela autora.

Adotando valores unitários para os elementos passivos, a resposta rampa para esses circuitos são, respectivamente, apresentados pela Figura 2.19.

Figura 2.19 | Resposta rampa dos circuitos do tipo: RC (a), RLC (b) e PI (c) com AmpOp



Fonte: elaborada pela autora.

É importante ressaltar que o Simulink® apresenta o bloco para entrada rampa já pronto em sua biblioteca, como vimos no item Exemplificando.

## Sem medo de errar

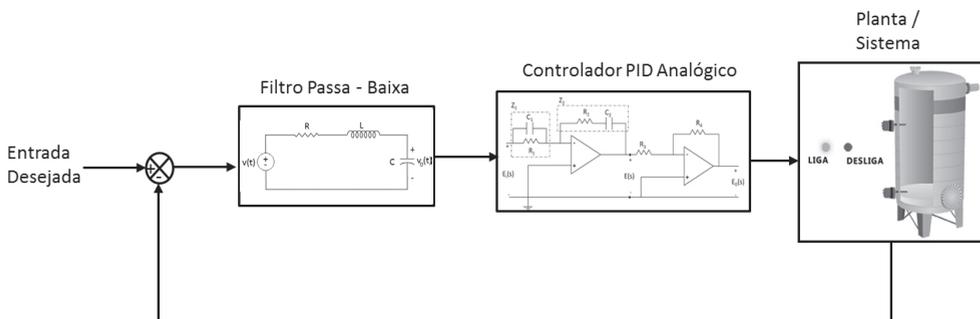
Uma empresa de sistemas embarcados foi contratada por uma usina para desenvolver um controle automático do nível de um reservatório de água que fica próximo a um ambiente com presença de muito ruído. Você é o engenheiro responsável pela equipe de pesquisa e desenvolvimento (P&D) de uma empresa de sistemas embarcados, e já obteve a função de transferência que descreve o comportamento da dinâmica do sistema desse controlador e do filtro para atenuação do ruído presente no local do projeto.

Para finalizar o projeto e comprovar a viabilidade dos componentes do controlador PID, você deve entregar os testes dos elementos passivos simulados em um software conhecido, como o MatLab®. A análise deve levar em consideração os valores dos componentes elétricos estimados anteriormente.

### Resolução da situação-problema:

Nas seções anteriores desta unidade, obtivemos os modelos que descrevem o controlador PID e o filtro passa-baixa para atenuação do ruído. O sistema elétrico para o controle automático de nível em um ambiente ruidoso pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.20.

Figura 2.20 | Controle automático de nível em ambiente ruidoso

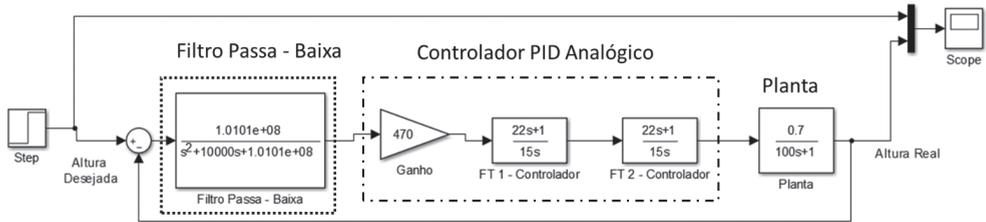


Fonte: adaptada de <<http://automacao.zenz.com.br/produtos/ver/10/medicao-de-nivel>>. Acesso em: 10 out. 2016.

Sendo assim, para finalizar o projeto e comprovar a viabilidade dos componentes passivos e do amplificador operacional que compõem o controlador PID e do filtro passa-baixa, é necessário testar e validar o sistema.

Para isso, foi implementado no Simulink® um programa em diagramação gráfica de blocos que representasse no domínio da frequência, isto é, por meio da função de transferência, o sistema apresentado na Figura 2.20, a simulação aparece na Figura 2.21.

Figura 2.21 | Programa em Simulink® do controle automático de nível



Fonte: elaborada pela autora.

Vale destacar que a função de transferência representativa para o controlador PID analógico, Equação (2.30), foi obtida na Seção 2.1, faltando apenas encontrar os valores para os resistores e capacitores que formam esse sistema. Já para o filtro passa-baixa a função de transferência foi completamente obtida na Seção 2.2, cuja relação sinal de entrada e saída é dada pela Equação (2.66).

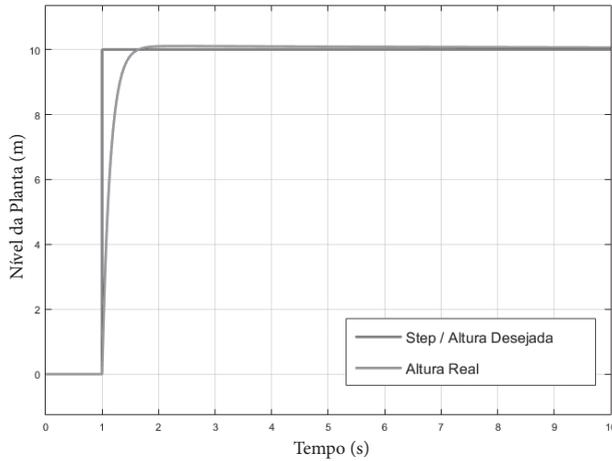


### Atenção

A entrada do sistema, ou altura desejada, é representada por uma função degrau (ou função *step* no Simulink®), pois ao escolher a altura do nível do tanque o usuário provoca uma variação brusca de sinal na entrada do sistema. Sendo assim, o sinal de entrada representativo de uma variação brusca é o sinal degrau.

A entrada do sistema, ou altura desejada, é representada por uma função degrau (ou função *step* no Simulink®), pois ao escolher a altura do nível do tanque o usuário provoca uma variação brusca de sinal na entrada do sistema. Sendo assim, o sinal de entrada representativo de uma variação brusca é o sinal degrau.

Figura 2.22 | Resposta (altura real - azul) e entrada (altura desejada - vermelho) do sistema controle de nível



Fonte: elaborada pela autora.

## Avançando na prática

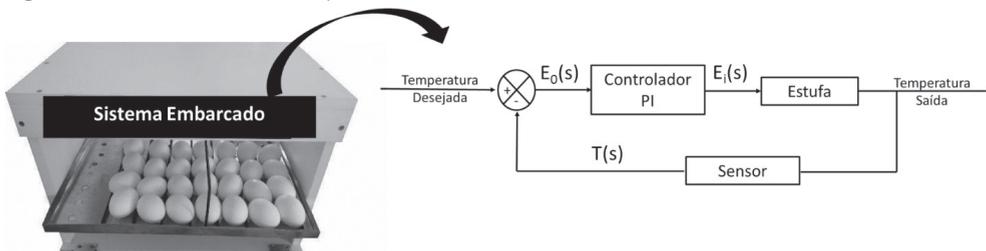
### Validação do controlador de temperatura

#### Descrição da situação-problema

O proprietário de uma granja contratou uma empresa de sistemas embarcados, na qual você é o engenheiro responsável, para implementação do controle automático de temperatura da chocadeira ou estufa para ovos de galinhas.

Sua equipe de pesquisa e desenvolvimento já iniciou o projeto, como mostra a Figura 2.23, e modelou os sistemas elétricos que compõem esse controle automático de temperatura. Você deve, portanto, testar e validar os valores dos elementos passivos ou ativos que formam os sistemas elétricos e apresentar os testes para comprovação de viabilidade de funcionamento desse sistema automático.

Figura 2.23 | Controle de temperatura da chocadeira



Fonte: adaptada de <<http://racas.org/galinhas-raca-pura/chocadeiras-e-ovos/>>. Acesso em: 31 out. 2016.

As equações matemáticas que descrevem o comportamento do controlador PI foram deduzidas na Seção 2.1, Equação (2.24). O modelo estudado foi obtido pelo manual do fabricante, como mostra a Equação (2.68) a seguir. Já o modelo dinâmico representativo do sensor é dado pela Equação (2.17) e multiplicado pelo ganho de valor -1, como orienta o fabricante, por meio da Equação (2.69) apresentada a seguir:

$$\frac{\text{Temperatura\_saída}(s)}{E_i(s)} = \frac{0,6256}{120s + 1} \quad (2.68)$$

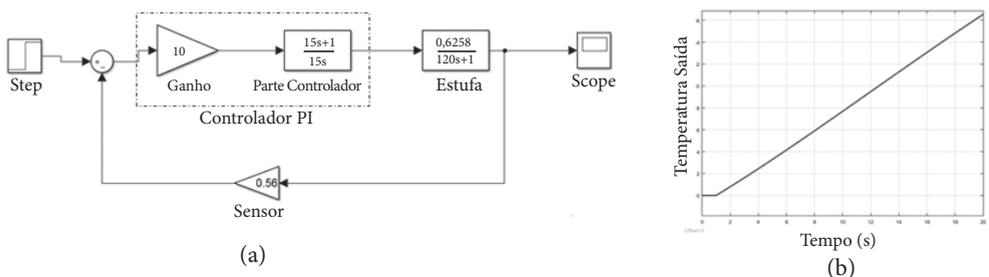
$$\frac{\text{Temperatura\_saída}(s)}{T(s)} = \frac{R_8 R_6}{R_7 R_5} \quad (2.69)$$

Segundo sua equipe, os valores comerciais para os elementos passivos do circuito elétrico das Equações (2.24) e (2.69) são:  $R_1 = 220 \Omega$ ;  $R_2 = 10 \text{ K}\Omega$ ;  $R_3 = 100 \Omega$ ;  $R_4 = 22 \Omega$ ;  $R_5 = 560 \Omega$ ;  $R_6 = 10 \Omega$ ;  $R_7 = 100 \Omega$ ;  $R_8 = 10 \Omega$ ;  $C_2 = 1,5 \text{ mF}$ .

### Resolução da situação-problema

Ao analisar a Figura 2.23, que detalha o funcionamento do sistema embarcado, nota-se que o projeto proposto por sua equipe é formado pelo controlador PI eletrônico (constituído por amplificador operacional, resistores e capacitores), pela estufa e pelo sensor (sendo um circuito amplificador inversor, com ganho -1). Sendo assim, para validar o sistema modelado pela sua equipe de pesquisa e desenvolvimento, você implementou um programa no Simulink® para analisar a resposta do sistema, como mostra a Figura 2.24 (a).

Figura 2.24 | Programa teste (a) e temperatura de saída (b) do sistema automático de temperatura



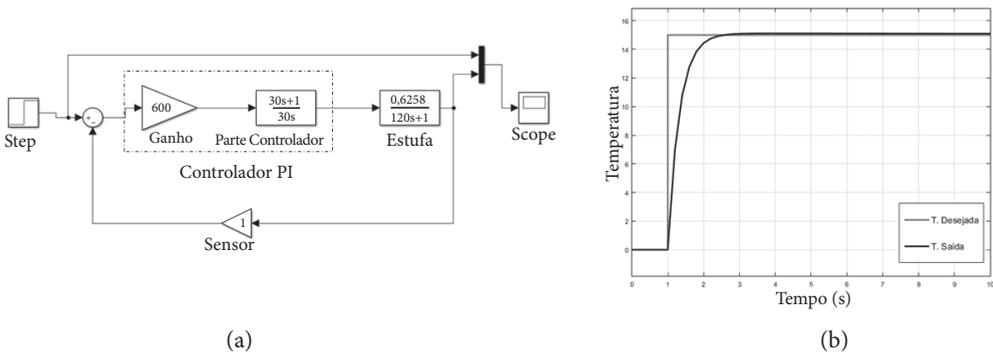
Fonte: elaborada pela autora.

Para sua surpresa, a resposta da temperatura de saída não convergia, como mostra a Figura 2.24 (b). Todavia, com sua experiência, você sabia que os modelos obtidos para o controlador analógico PI e sensor estavam corretos, por isso, resolveu, por meio

de testes empíricos, alterar alguns valores dos elementos passivos que compõem o sistema. Assim, os melhores valores obtidos por meio dos testes foram:  $R1 = 10 \Omega$ ;  $R2 = 200 \Omega$ ;  $R3 = 10 \Omega$ ;  $R4 = 300 \Omega$ ;  $R5 = R6 = R7 = R8 = 1 \Omega$ ;  $C2 = 150 \text{ mF}$ .

O programa no Simulink® e a resposta obtida, que viabilizam a confecção do projeto, visto que a resposta converge para o valor desejado, são apresentados pela Figura 2.25 (a) e (b), respectivamente.

Figura 2.25 | Programa de validação final (a) e de temperatura desejada (vermelho) e temperatura de saída (preto) (b)



Fonte: elaborada pela autora.

## Faça valer a pena

**1.** Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias, ou seja, a validação é importante por assegurar que os modelos estimados contêm as informações que queremos reproduzir em nosso projeto.

A respeito do uso do MatLab® para validação dos circuitos elétricos do tipo RC, tem-se:

I. Como na programação em MatLab® os polinômios são descritos por vetores linhas contendo os coeficientes do polinômio em ordem decrescente, para os sistemas RC teremos apenas um coeficiente, ou termo, no vetor linha referente ao denominador.

II. Utiliza-se o comando **tf (num,den)** para criar uma função de transferência contínua.

III. Utiliza-se o comando **step (sys)** para entrada impulso.

Em relação às sentenças, marque a alternativa correta:

- Apenas a sentença I está correta.
- Apenas a sentença II está correta.

- c) Apenas a sentença III está correta.
- d) Apenas as sentenças II e III estão corretas.
- e) As sentenças I, II e III estão corretas.

**2.** O MatLab<sup>®</sup> é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo, utilizado em modelagem de sistemas para validação e testes dos modelos obtidos. Sendo assim, a programação dos modelos no MatLab<sup>®</sup> pode ser feita usando o comando de instrução (*script*) ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink<sup>®</sup>.

Quanto à linguagem por meio de instrução, o comando **input**(' frase que identifica a variável ') permite que:

- a) O usuário aplique uma entrada ao sistema.
- b) O usuário estabeleça valores numéricos fixos para as variáveis.
- c) O usuário entre com os valores numéricos para as variáveis.
- d) O usuário altere a variável do sistema.
- e) O usuário aplique uma entrada rampa ao sistema.

**3.** Após a obtenção dos modelos dinâmicos que descrevem os sistemas elétricos, é fundamental analisarmos o comportamento de resposta desse sistema. Essa análise pode ser realizada via uso de software, como o MatLab<sup>®</sup>, por meio das linhas de comando, *script* ou diagramação gráfica, utilizando o Simulink<sup>®</sup>.

A respeito do uso do MatLab<sup>®</sup> para validação dos circuitos elétricos, tem-se:

I. Para teste das funções de transferência em linhas de comando, o MatLab<sup>®</sup> tem um comando para função rampa.

II. Ao utilizarmos o MatLab<sup>®</sup> para teste dos modelos elétricos, estimamos pelo custo do projeto.

III. O comando **ss (A,B,C,D)** permite a simulação dos sistemas elétricos, representados por espaço de estado.

IV. O bloco  representa uma entrada rampa para análise da resposta de um sistema.

Em relação às sentenças, analise se elas são verdadeiras (V) ou falsas (F) e marque a alternativa correta:

- a) F – V – V – V.
- b) V – F – V – V.
- c) V – V – F – V.
- d) V – V – V – F.
- e) V – F – F – V.

# Referências

DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

TATEOKI, Getúlio Teruo. **Filtros passivos**. Disponível em: <<http://www.getulio.eng.br/meusalunos/circuitoscom/ApostilaFiltrosPassivos.PDF>>. Acesso em: 9 out. 2016.

WANG, WANG, Jian-Zhong; TIE, Bao; WELKOWITZ, Walter; SEMMLOW, John L.; KOSTIS, John B. et al. Modeling sound generation in stenosed coronary arteries. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, Minnesota, v. 37, n. 11, p. 1087-1094, nov. 1990.



## Modelagem de sistemas mecânicos

### Convite ao estudo

Nesta unidade, faremos um estudo detalhado da modelagem matemática aplicada aos sistemas mecânicos, entenderemos como as leis da física e engenharia contribuem para análise ou síntese dos projetos nessa área. Os sistemas mecânicos são componentes essenciais de muitos sistemas dinâmicos como: automóveis, robôs, motores elétricos, aviões, elevadores, dentre outros sistemas, o que justifica a importância de seu estudo.

Na unidade anterior, aplicamos nossos conhecimentos de modelagem matemática aos sistemas elétricos. Obtivemos o modelo que descreve a dinâmica desse tipo de sistemas com base nas diferentes associações dos elementos passivos e ativos que os compõem. Desenvolvemos um projeto de controle de nível em ambiente ruidoso, determinado por meio dos modelos matemáticos, e comprovamos com os testes simulados os componentes elétricos ótimos que formaram o controlador e o filtro, necessários para o controle automático desse projeto.

Agora, nesta unidade, aplicaremos o nosso conhecimento de modelagem matemática dos sistemas dinâmicos a mais uma área fundamental dos projetos de controle: a mecânica. Os sistemas dinâmicos dessa área podem ser classificados quanto ao seu tipo de movimento em: sistemas translacionais, quando associamos o movimento dos componentes mecânicos ao movimento linear; e sistemas rotacionais, quando associamos o movimento dos componentes mecânicos ao movimento giratório. Sendo assim, nesta unidade iremos obter o modelo que descreve a dinâmica dos sistemas mecânicos, com base nos diferentes tipos de associações dos elementos passivos que os compõem; aprenderemos a analogia entre os sistemas mecânicos e elétricos; veremos a modelagem matemática do motor de corrente contínua; e, por fim, na última seção, iremos testar e validar as respostas dos modelos mecânicos com auxílio de software. Assim, será desenvolvida, nesta

unidade, as habilidades de raciocínio lógico, solução de problemas, criatividade e flexibilidade.

Nesse contexto, uma empresa de desenvolvimento tecnológico foi contratada por um restaurante para a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e serviço de limpeza. Ao final desta seção, você deverá entregar um memorial de cálculo que comprove a viabilidade desse sistema automatizado. Nesse relatório deverá conter os seguintes itens: determinação dos componentes mecânicos que constituirão o dispensador de pratos; determinação dos componentes que compõem o motor que será capaz de realizar o transporte do dispensador da área de atendimento à área de limpeza; e, por fim, os testes simulados em MatLab® para a comprovação da boa aplicabilidade do sistema projetado.

Preparado para desenvolver mais esse projeto? Desejamos bons estudos e bom trabalho.

## Seção 3.1

### Modelagem matemática de sistemas mecânicos translacionais

#### Diálogo aberto

Uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou à sua equipe que, antes de o elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis. Como projetar o dispensador? Quais componentes mecânicos usar para a implementação desse sistema? Quais partes irão compor o seu dispensador?

Nesta seção, aplicaremos os conhecimentos anteriormente adquiridos de modelagem matemática para obtenção do modelo que descreve a dinâmica dos sistemas mecânicos translacionais. Estes caracterizam-se por ser compostos por massas, molas e amortecedores, que são associados para realizar movimentos lineares, podendo ser vertical ou horizontal em um plano.

Vimos na Unidade 1 que uma das fases necessárias ao processo de modelagem matemática é a utilização das leis básicas da Física e da Engenharia, que regem o comportamento dos sistemas. Dessa forma, entenderemos como a segunda lei de Newton nos ajudará, com base no diagrama de corpo livre, a encontrar a equação diferencial e, conseqüentemente, a função de transferência que representa o sistema.

Sabemos que os modelos matemáticos típicos que descrevem a dinâmica dos sistemas podem ser representações de primeira e segunda ordem. Dessa forma, veremos como os componentes dos sistemas mecânicos translacionais podem ser associados para serem descritos com base nesses tipos de modelos e como se comportarão para as diferentes entradas típicas como degrau, impulso e rampa.

Preparado para mais essa área de conhecimento? Desejo bons estudos e um ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Sabemos que a dinâmica dos sistemas é descrita em termos das equações diferenciais, obtidas pelas leis da Física que governam os sistemas particulares, como as Leis de Kirchhoff para os sistemas elétricos. Quanto aos sistemas mecânicos, a lei fundamental para representação da dinâmica dos sistemas por meio dos modelos matemáticos é a segunda lei de Newton.

Essa lei nos diz que a força resultante que age sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida, como nos mostra a Equação (3.1), onde  $f(t)$  representa as forças externas que atuam sobre o corpo,  $m$  é a massa e  $x(t)$  é o deslocamento do corpo ao longo do tempo.

$$\sum f(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (3.1)$$

Podemos ainda reescrever a Equação (3.1) na Equação (3.2). Nesta, as forças e velocidades, que geralmente são grandezas vetoriais, podem ser tratadas como grandezas escalares se considerarmos o movimento apenas em uma direção fixa. Além disso, o termo  $-m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$  é dado como uma força adicional. Essa força fictícia é chamada de força inercial ou força de D'Alembert, que é incluída como uma força externa, o que nos permite reescrever a Equação (3.2) como a Equação (3.3).

$$\sum f(t) - m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum f(t) = 0 \quad (3.3)$$



### Pesquise mais

Alguns autores e estudiosos da área costumam utilizar as equações de Lagrange para obtenção da equação diferencial que descreve a dinâmica dos sistemas. Dessa forma, o equacionamento dos modelos matemáticos dinâmicos são dados por meio da análise energética do movimento mecânico.

Para saber mais sobre as equações de Lagrange, como a lei da física que governa os sistemas mecânicos translacionais, consulte:

GARCIA, Claudio. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

Os componentes físicos lineares passivos que formam os sistemas mecânicos translacionais são: massa, mola, amortecedor e atrito viscoso. E as variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: deslocamento, dado em metros (m), velocidade, dada em metros por segundos (m/s), aceleração, dada em metros por segundo por segundo (m/s<sup>2</sup>) e força externa, dada em newtons (N). A relação dos componentes com as variáveis é dada pela Tabela 3.1, onde K é a constante da mola, dada por newton por metro (N/m),  $f_v$  é o coeficiente do amortecedor ou atrito viscoso, dado por newton – segundo por metro (N.s/m), M é a massa do corpo, dado em quilograma (Kg) e  $x(t)$  é o deslocamento, dado em metros (m).



**Assimile**

Os componentes físicos lineares passivos que formam os sistemas mecânicos translacionais são: massa, mola, amortecedor e atrito viscoso. E as variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: deslocamento, dado em metros (m), velocidade, dada em metros por segundos (m/s), aceleração, dada em metros por segundo por segundo (m/s<sup>2</sup>) e força externa, dada em newtons (N).

Tabela 3.1 | Relação dos elementos passivos com velocidade e deslocamento

Componente	Força - Velocidade	Força - Deslocamento
<p>Mola</p> <p><math>x(t)</math></p> <p><math>f(t)</math></p> <p>K</p>	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$
<p>Amortecedor viscoso</p> <p><math>x(t)</math></p> <p><math>f(t)</math></p> <p><math>f_v</math></p>	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$
<p>Atrito viscoso</p> <p><math>x(t)</math></p> <p><math>f(t)</math></p> <p>M</p> <p><math>f_v</math></p>		
<p>Massa</p> <p><math>x(t)</math></p> <p><math>f(t)</math></p> <p>M</p>	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

Fonte: adaptada de Nise (2012, p. 50).

Vale ressaltar que, usualmente, o deslocamento é dado como medida de referência para o sistema. Este é geralmente o ponto de equilíbrio do componente em estudo, como pode ser visto na primeira coluna da Tabela 3.1, na qual temos que a referência para os componentes do sistema é dada por  $x(t)$ . Além disso, a seta ou flecha indica o sentido positivo a ser adotado para o deslocamento, velocidade ou força, porém não indica a direção do movimento ou da força em um dado instante. Se a referência do sistema não for indicada por meio do deslocamento, por não ser interessante, então a velocidade passa a ser a referência do sistema.

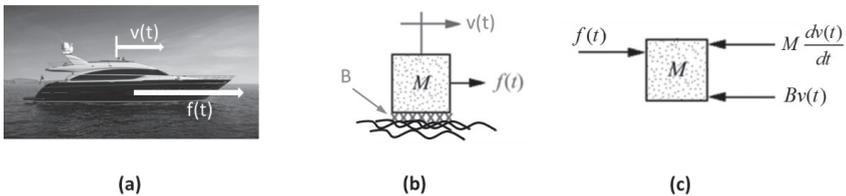
Normalmente, utilizamos o diagrama de corpo livre para expressar todas as forças que agem sobre um determinado componente mecânico em estudo e, então, aplicamos a lei de Newton para determinar a equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema. De posse da equação diferencial, adotando as condições iniciais nulas, obtemos então a função de transferência que relaciona a entrada com a saída, ou a resposta, do sistema.



### Exemplificando

Sendo  $V(s)$  a velocidade resultante (m/s) e  $F(s)$  a força de impulsão aplicada ao barco (N), como mostra a Figura 3.1 (a), determine a função de transferência para o sistema de barco - fluido dado pela Figura 3.1 (a) e modelado segundo a Figura 3.1 (b).

Figura 3.1 | Sistema real barco – fluido (a); modelagem mecânica do sistema real (b); diagrama de corpo livre (c)



Fonte: (a) adaptada de: <<http://economia.uol.com.br/album/2014/04/08/rio-boat-show-tem-barcos-de-ate-r-33-milhoes.htm#fotoNav=5>>. Acesso em: 6 nov. 2016. (b) e (c) elaborada pela autora.

A obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. Definição do problema: consiste na obtenção da função de transferência do sistema, considerando  $f(t)$  como entrada e  $v(t)$  como a saída do sistema.

2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: segunda lei de Newton.

3. Simplificações e aproximações: para modelagem de todos os sistemas mecânicos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: todas as massas são rígidas e têm valor constantes; as molas são lineares, não têm perda de energia nem possuem massa, seus coeficientes são constantes e transladam em uma só direção; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.

4. Equacionamento: dado o digrama de corpo livre, Figura 3.1 (c), e aplicando a segunda lei de newton, chegamos à Equação (3.4).

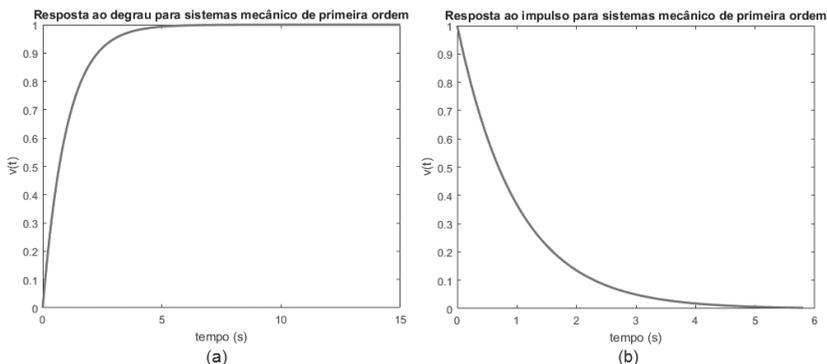
$$M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) - f(t) = 0 \quad (3.4)$$

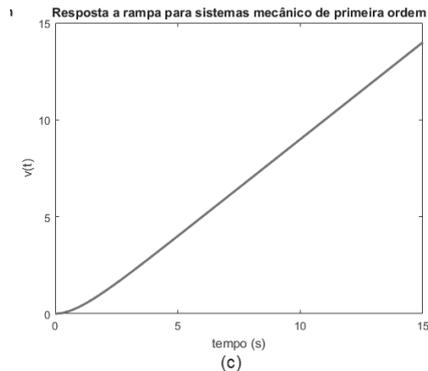
Aplicando a transformada de Laplace, dada as condições iniciais nulas, isolando a entrada e saída, chegamos à função de transferência dada pela Equação (3.5).

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms + B} \quad (3.5)$$

O sistema dado pela Figura 3.1 (b) caracteriza-se como um sistema mecânico translacional de primeira ordem, uma vez que a equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema é de primeira ordem. Se aplicarmos as entradas típicas, como degrau, impulso e rampa, a resposta obtida, supondo que a massa do corpo é  $M = 1 \text{ kg}$  e o coeficiente de atrito viscoso é  $B = 1 \text{ N s/m}$ , é mostrada na Figura 3.2. Podemos notar que a resposta é muito similar aos sistemas elétricos de primeira ordem.

Figura 3.2 | Resposta ao sistema mecânico de primeira ordem: degrau (a), impulso (b) e rampa (c)





Fonte: elaborada pela autora.

Analogamente ao que fizemos para os sistemas elétricos, para facilitar a dedução da função de transferência dos sistemas mecânicos translacionais, podemos aplicar a transformada de Laplace na coluna força-deslocamento da Tabela 3.1, com as condições iniciais nulas e conseguiremos as seguintes relações para os elementos passivos:

- Mola:

$$F(s) = KX(s) \quad (3.6)$$

- Amortecedor viscoso:

$$F(s) = f_v sX(s) \quad (3.7)$$

- Massa:

$$F(s) = Ms^2 X(s) \quad (3.8)$$

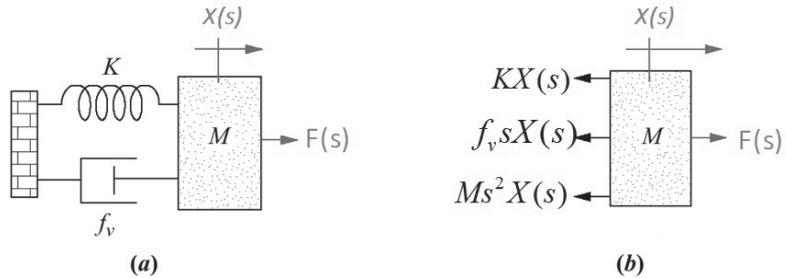
Assim, na etapa de equacionamento da modelagem dos sistemas mecânicos, poderemos obter a relação dos elementos passivos que compõem o sistema mecânico diretamente no domínio da frequência, como no exemplificando a seguir.



### Exemplificando

Determine a função de transferência,  $X(s)/F(s)$ , para o sistema apresentado na Figura 3.3 (a), sendo  $X(s)$  o deslocamento, dado em metros, e  $F(s)$  a força aplicada, em newtons. Considere o sistema sem atrito viscoso.

Figura 3.3 | (a) sistema massa, mola e amortecedor; (b) diagrama de corpo livre



Fonte: adaptada de Nise (2012, p. 50).

A obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do sistema, considerando  $F(s)$  como entrada e  $X(s)$  como a saída.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: segunda lei de Newton.
3. Simplificações e aproximações: para modelagem de todos os sistemas mecânicos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: todas as massas são rígidas e têm valor constantes; as molas são puras, lineares, não têm perda de energia, nem têm massa, seus coeficientes são constantes e transladam em só uma direção; os amortecedores são puros, lineares, não têm efeito de mola, não têm massa e seus coeficientes são constantes; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. Equacionamento: dado o diagrama de corpo livre, apresentado na Figura 3.3 (b) e aplicando a segunda lei de Newton, chegamos à Equação (3.9).
- 5.

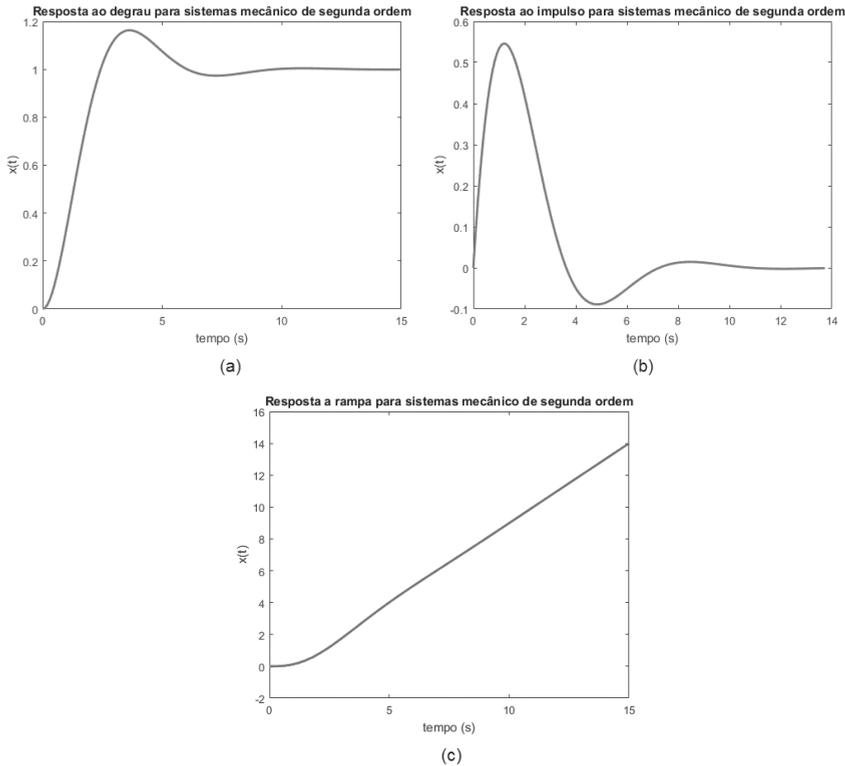
$$Ms^2 X(s) + f_v s X(s) + KX(s) - F(s) = 0 \quad (3.9)$$

Após algumas manipulações algébricas e isolando a entrada e a saída, chegamos à função de transferência dada pela Equação (3.10):

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K} \quad (3.10)$$

O sistema dado pela Figura 3.3 (b) caracteriza-se como um sistema mecânico translacional de segunda ordem. Se aplicarmos as entradas típicas, como degrau, impulso e rampa, a resposta obtida, supondo  $M = 1$  kg,  $f_v = 1$  N s/m e  $K = 1$  N/m é mostrada na Figura 3.4. Notamos que a resposta é muito similar aos sistemas elétricos de segunda ordem.

Figura 3.4 | Resposta ao sistema mecânico de segunda ordem: (a) degrau, (b) impulso, (c) rampa



Fonte: elaborada pela autora.



### Refleta

Sabemos que os sistemas mecânicos translacionais são dados quando associamos o movimento dos componentes mecânicos ao movimento linear. Esse movimento pode ocorrer de forma horizontal ou vertical. Vimos nos exemplos anteriores sistemas translacionais com movimento horizontal, mas como seria o processo de modelagem matemática para o movimento vertical? É válido considerar a força peso?

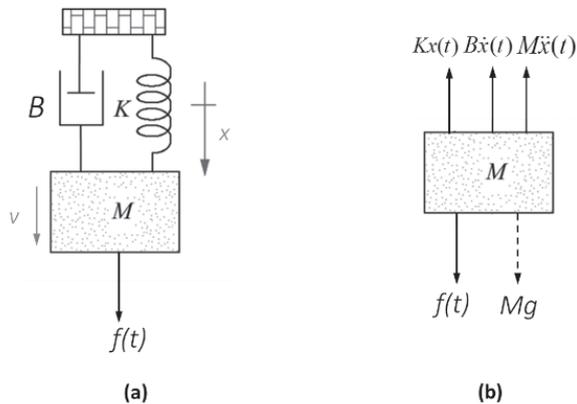
Para os sistemas mecânicos translacionais que se movimentam na direção vertical, a força peso acaba não fazendo parte do diagrama de corpo livre e, conseqüentemente, da função de transferência em razão da escolha criteriosa da origem da variável de deslocamento.



### Exemplificando

Dado o sistema massa, mola, amortecedor e o diagrama de corpo livre, Figura 3.5 (a) e (b), respectivamente, encontre a equação diferencial que descreve o sistema.

Figura 3.5 | (a) sistema massa, mola e amortecedor vertical; (b) diagrama de corpo livre



Fonte: elaborada pela autora.

Considere  $x$  como o deslocamento a partir da posição de equilíbrio da mola, em que a mola não está esticada nem comprimida. Considerando que o diagrama de corpo livre inclui a forma gravitacional  $Mg$ , então a equação diferencial para o sistema que se move verticalmente seria como o mostrado na Equação (3.11).

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t) + Mg \quad (3.11)$$

Suponha que a força  $f(t)$  é nula e que a massa  $M$  não se move. Então,  $x = x_0$ , onde  $x_0$  é o deslocamento causado pela força gravitacional. Assim,  $\dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$  e a Equação (3.11) reduz à Equação (3.12).

$$Kx_0 = Mg \quad (3.12)$$

Agora, reconsiderando a força  $f(t)$  e supondo que ela provoca no sistema um deslocamento "z", então o deslocamento total do sistema é dado pela Equação (3.13).

$$x = x_0 + z \quad (3.13)$$

Substituindo (3.3) em (3.11) e utilizando a relação dada pela Equação (3.12), chegamos à Equação (3.14).

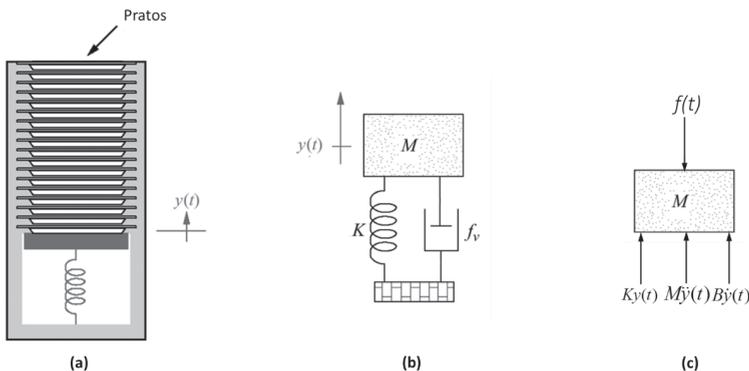
$$M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = f(t) \quad (3.14)$$

Dessa forma, comparando (3.14) e (3.9), concluímos que *podemos ignorar a força gravitacional*,  $Mg$ , quando a origem do deslocamento for a posição em que a massa se encontra em repouso. Vale salientar que nossa conclusão é válida quando as massas estão suspensas por uma ou mais molas lineares.

### Sem medo de errar

Uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou à sua equipe que, antes de o elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis. Como projetar o dispensador? Quais componentes mecânicos usar para a implementação desse sistema? Quais partes irão compor o seu dispensador?

Figura 3.6 | Dispensador de pratos: (a) real; (b) sistema mecânico modelado e (c) diagrama de corpo livre



Fonte: adaptada de Nise (2012, p. 83).

## Resolução da situação-problema

Como o dono do restaurante solicitou que o dispensador acumulasse até 20 pratos, podemos pensar em um projeto como mostra a Figura 3.6 (a), que consiste em uma pilha vertical de pratos suportada por uma mola comprimida. Este sistema pode, então, ser aproximado como mostra a Figura 3.6 (b), ou seja, pode ser representado por um sistema mecânico translacional formado por: uma mola de constante  $K$  (N/m), uma massa "M" (Kg) do sistema com os 20 pratos, considerando o caso mais crítico, e pelo atrito viscoso entre o êmbolo e as laterais do cilindro com constante  $f_v$  (N s/m).

Dessa forma, para projetarmos nosso sistema, é fundamental obtermos a função de transferência. Esta pode ser obtida por meio das etapas de modelagem, que é dada como:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do sistema, considerando  $f(t)$  como entrada e  $y(t)$  como saída, para determinação da mola a ser utilizada.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: segunda lei de Newton.
3. Simplificações e aproximações: para simplificar os modelos matemáticos desse tipo, podemos considerar as seguintes hipóteses: todas as massas são rígidas e têm valor constantes; as molas são puras, lineares, não têm perda de energia, nem têm massa, seus coeficientes são constantes e transladam em uma só direção; os amortecedores são puros, lineares, não têm efeito de mola, não têm massa e seus coeficientes são constantes; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.



### Atenção

Em sistemas mecânicos translacionais horizontais ou verticais, a força peso aplicada ao sistema como todo não faz parte da equação diferencial e, conseqüentemente, da função de transferência que representa o sistema. Portanto, esta força não foi considerada para resolução da situação-problema.

4. Equacionamento: dado o digrama de corpo livre, Figura 3.6 (c) e aplicando a segunda lei de Newton, chegamos à Equação (3.15).

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt} + f_v \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) - f(t) = 0 \quad (3.15)$$

Sendo assim, aplicando a transformada de Laplace, dada as condições iniciais nulas, isolando a entrada e saída, chegamos à função de transferência, dada pela Equação (3.16).

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{f_v}{M}s + \frac{K}{M}} \quad (3.16)$$

Sabendo o peso dos pratos, saberemos a força que será aplicada ao sistema. Dessa forma, conseguiremos determinar qual será a mola utilizada no projeto e qual será o atrito viscoso entre o êmbolo e as laterais do cilindro.

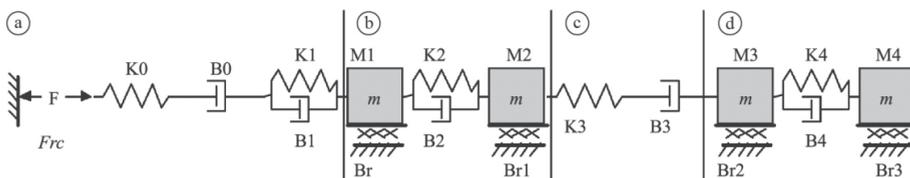
## Avançando na prática

### Modelagem matemática da tíbia humana

#### Descrição da situação-problema

Procedimentos cirúrgicos ortopédicos, como a osteotomia, em que se realiza o corte da tíbia, são comuns e devem ser muito bem executados. O sucesso desses procedimentos cirúrgicos depende do treinamento e da habilidade do médico especialista para manipulação das serras para cortes de ossos. Contudo, essa destreza é particularmente crítica nesse tipo de procedimento para tratamento de artrose no joelho, por exemplo. Dessa forma, a modelagem desse sistema pode ser uma ferramenta útil para se conhecer o comportamento do sistema em diferentes situações, possibilitando até mesmo o desenvolvimento de aparatos que possam interagir adequadamente com a reparação óssea. Sendo assim, consideramos que o osso humano pode ser simplificado de acordo com sistema análogo mecânico translacional, apresentado pela Figura 3.7, em que a região A modela o atrito estático do sistema responsável pela resistência do osso ao movimento inicial da serra; a região B representa a primeira parte do osso cortical a ser perfurada; a região C representa o osso que apresenta menor resistência à perfuração; a região D representa a segunda parte do osso cortical.

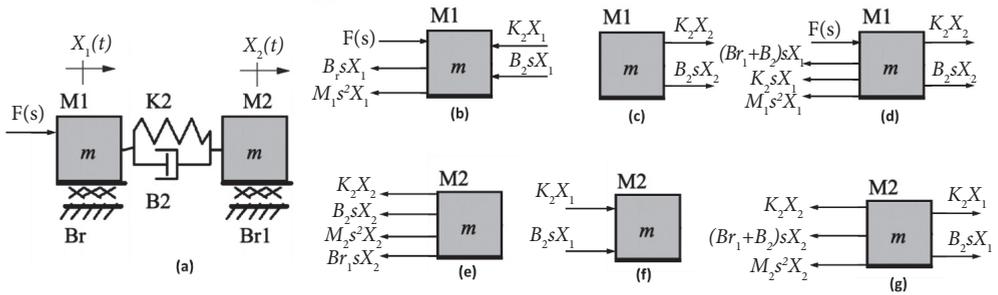
Figura 3.7 | Sistema análogo simplificado mecânico translacional do osso humano



Fonte: adaptada de Rosa (2013).

O objetivo do estudo é verificar o deslocamento de massa, usado para determinar a velocidade de penetração da serra, em relação à força de entrada em cada região. Contudo, você quer saber apenas do deslocamento na região B em relação à distância ( $X_2$ ) para uma dada força  $F(s)$  vinda da região A, como mostra a Figura 3.8 (a).

Figura 3.8 | (a) sistema mecânico translacional da região B; (b) forças sobre M1 decorrentes do seu próprio movimento; (c) forças do movimento de M2 transmitido a M1; (d) todas as forças de M1; (e) forças sobre M2 decorrentes do seu próprio movimento; (f) forças do movimento de M1 transmitido à M2; (g) todas as forças de M2



Fonte: adaptada de Rosa (2013).

### Resolução da situação-problema

Como o objetivo é encontrar a relação deslocamento/força de entrada na região B, em relação à distância ( $X_2$ ), podemos, então, realizar as etapas de modelagem e chegarmos à função de transferência do sistema. Como o sistema tem dois graus de liberdade, uma vez que cada uma das massas pode ser movida na direção horizontal, enquanto a outra é mantida imóvel, devemos encontrar duas equações de movimentos simultâneos para descrever o sistema. As duas equações são obtidas a partir do diagrama de corpo livre de cada uma das massas, utilizando o princípio de superposição, ou seja, deveremos analisar as forças sobre M1 decorrentes do seu próprio movimento, Figura 3.8 (b), e do movimento de M2 transmitido a M1 por meio do sistema, Figura 3.8 (c), e, por fim, considerar que a força total sobre M1 é a superposição ou soma das forças de cada movimento, Figura 3.8 (d). Para M2, devemos proceder de maneira análoga, analisando as forças sobre M2 decorrentes do seu próprio movimento, Figura 3.8 (e), do movimento de M1 transmitido a M2, Figura 3.8 (f), e, por fim, considerar que a força total sobre M2 é a soma das forças de cada movimento, Figura 3.8 (g). Assim, a partir do diagrama de corpo livre resultante, Figura 3.8 (d) e (g), aplicamos como lei fundamental da física a segunda lei de Newton. Realizando as mesmas simplificações dadas no primeiro Exemplificando desta seção, chegamos ao equacionamento dado pelas Equações (3.17) para a massa M1 e (3.18) para a massa M2.

$$f(t) = [M_1 s^2 + (B_r + B_2)s + K_2]X_1(s) - (K_2 + B_2 s)X_2(s) \quad (3.17)$$

$$(K_2 + B_2s)X_1(s) = (M_2s^2 + (B_{r1} + B_2)s + K_2)X_2(s) \quad (3.18)$$

Logo, após algumas manipulações algébricas, obtemos a função de transferência do sistema dada pela Equação (3.19).

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{K_2 + B_2s}{\Delta} \quad (3.19)$$

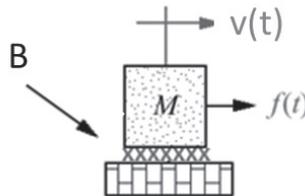
Sendo  $\Delta$  dado pela Equação (3.20):

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1s^2 + (B_r + B_2)s + K_2 & -(K_2 + B_2s) \\ -(K_2 + B_2s) & M_2s^2 + (B_{r1} + B_2)s + K_2 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

### Faça valer a pena

**1.** Os modelos matemáticos típicos, que descrevem a dinâmica dos sistemas, podem ser representações de primeira e segunda ordem. Em sistemas dinâmicos mecânicos, a dinâmica do sistema é fundamentada na segunda lei de Newton, tanto para os sistemas cujo movimento é translacional quanto para os sistemas com movimento rotacional.

Considere o sistema mecânico translacional formado por massa e atrito viscoso, como mostra a figura:



Podemos afirmar que a função de transferência resultante será:

- De primeira ordem, em que a entrada é a força de impulsão externa e a saída é a velocidade do bloco.
- De segunda ordem, em que a entrada é a força de impulsão externa e a saída é a velocidade do bloco.
- De primeira ordem, em que a entrada é a força de impulsão externa e a saída é o deslocamento do bloco.
- De segunda ordem, em que a entrada é a força de impulsão externa e a saída é o deslocamento do bloco.

e) De primeira ordem, em que a entrada é a velocidade do bloco e a saída é a força externa aplicada ao bloco.

**2.** Os sistemas mecânicos podem ser do tipo rotacional e translacional. Os sistemas mecânicos translacionais são aqueles que têm o movimento dos componentes físicos, passivos, lineares associados ao movimento em um plano.

De acordo com as afirmativas a seguir sobre a modelagem matemática dos sistemas mecânicos translacionais, assinale a alternativa correta:

I. As variáveis ou grandezas físicas normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: deslocamento, velocidade, aceleração e força externa.

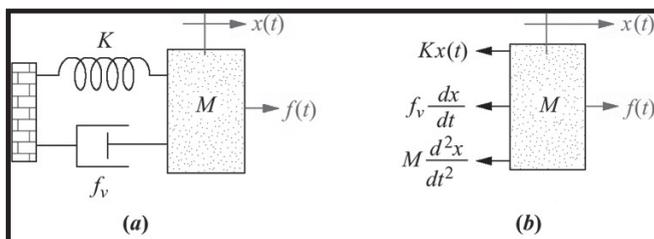
II. Os elementos físicos lineares passivos que compõem os sistemas mecânicos translacionais são: massa, mola, amortecedor e atrito viscoso.

III. Geralmente, o deslocamento é dado como uma medida de referência para o sistema.

- Apenas a afirmativa I está correta.
- Apenas a afirmativa II está correta.
- Apenas a afirmativa III está correta.
- Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- As afirmativas I, II e III estão corretas.

**3.** Os sistemas mecânicos podem ser do tipo rotacional e translacional. Os sistemas mecânicos do tipo translacionais são aqueles que têm o movimento dos componentes físicos, passivos e lineares associados ao movimento em um plano.

A equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema mecânico translacional do sistema massa – mola – amortecedor viscoso, ilustrado na figura (a), cujo diagrama de corpo livre é dado pela figura (b), é expressa por:



$$\text{a) } \frac{1}{M} \frac{d^2 x(t)}{dt} + f_v \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) - f(t) = 0.$$

$$\text{b) } M \frac{d^2 x(t)}{dt} + f_v \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) + f(t) = 0.$$

$$\text{c) } M \frac{d^2 x(t)}{dt} + f_v \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) - f(t) = 0.$$

$$\text{d) } f_v \frac{d^2 x(t)}{dt} + M \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) - f(t) = 0.$$

$$\text{e) } f_v \frac{d^2 x(t)}{dt} + K \frac{dx(t)}{dt} + Mx(t) - f(t) = 0.$$

## Seção 3.2

### Modelagem matemática de sistemas mecânicos rotacional e motor de corrente contínua

#### Diálogo aberto

Na seção anterior, demos início à aplicação dos conceitos de modelagem matemática aplicados aos sistemas mecânicos. Começamos nossos estudos pelos sistemas mecânicos translacionais (sistemas cujo movimento é linear), formados por elementos passivos como: massa, mola, amortecedor e atrito viscoso. Aprendemos como obter a equação diferencial a partir dos sistemas físicos e, conseqüentemente, a função de transferência que descreve a dinâmica desse tipo de sistema.

Nesta seção, daremos continuidade aos nossos estudos de modelagem matemática dos sistemas mecânicos rotacionais. Entenderemos como comporta-se a saída desse tipo de sistema quando aplicamos sinais de entrada típicos, como: rampa, degrau e impulso. Além disso, veremos como relacionar os sistemas elétricos e mecânicos. Logo, aprenderemos a analogia entre esses sistemas para obtenção da função de transferência. Por fim, após a construção de todo esse conhecimento, aprenderemos como modelar um motor de corrente contínua.

Lembre-se de que uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou a sua equipe que, antes de o elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis.

Já projetamos esse dispensador e vimos por quais elementos mecânicos ele é formado. Agora, iremos projetar a parte móvel desse sistema. Se usarmos um servomotor CC para mover o elevador de carga, qual seria o diagrama de blocos que representaria todo esse sistema híbrido, ou seja, do sistema elétrico/mecânico?

Vamos implementar mais essa parte do projeto?

Bons estudos e ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Os elementos dos sistemas mecânicos rotacionais giram em torno de um eixo. Assim como os sistemas mecânicos translacionais, a dinâmica desse tipo de sistema é descrita pela segunda lei de Newton. Todavia, por se tratar de movimentos rotacionais, a força externa é substituída por um torque externo e a Equação (3.1) pode ser reescrita pela Equação (3.21), onde  $T(t)$  representa os torques externos que atuam sobre o corpo,  $J$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação,  $\theta(t)$  é o deslocamento angular do corpo ao longo do tempo e  $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$  é a aceleração angular do corpo.

$$\sum T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (3.21)$$

Como na seção anterior, podemos reescrever a Equação (3.21) como as Equações (3.22) e (3.23). Para isso, os torques e velocidades, que são grandezas vetoriais, podem ser tratadas como grandezas escalares se considerarmos o movimento apenas em uma direção.

$$\sum T(t) - J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum T(t) = 0 \quad (3.23)$$

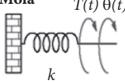
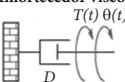
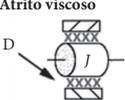
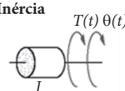
Dessa forma, podemos perceber que as grandezas físicas utilizadas para os sistemas mecânicos rotacionais são:  $\theta$ , deslocamento angular em radianos (rad),  $\omega$ , velocidade angular em radianos por segundo (rad/s),  $\alpha$ , aceleração angular em radianos por segundo por segundo ( $\text{rad/s}^2$ ) e  $T$ , torque em Newton-metros (N.m). Já os componentes físicos lineares passivos que formam os sistemas mecânicos rotacionais são quase os mesmos que para os sistemas translacionais: momento de inércia, mola, amortecedor e atrito viscoso, contudo, estes ficam sujeitos à rotação. A relação dos componentes com as variáveis é dada pela Tabela 3.2.



### Assimile

Os sistemas mecânicos rotacionais são tratados da mesma maneira que os sistemas mecânicos translacionais, com exceção de que o torque substitui a força e o deslocamento angular substitui o deslocamento translacional. Além dessas variáveis, esse tipo de sistema é formado também pela mola, amortecedor e atrito viscoso, que ficam sujeitos à rotação, ao invés da translação.

Tabela 3.2 | Relação dos elementos passivos com velocidade angular e deslocamento angular

Componente	Torque - Velocidade Angular	Torque – Deslocamento Angular
<b>Mola</b> 	$T(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$
<b>Amortecedor viscoso</b>  <b>Atrito viscoso</b> 	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$
<b>Inércia</b> 	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$

Fonte: adaptada de Nise (2012).

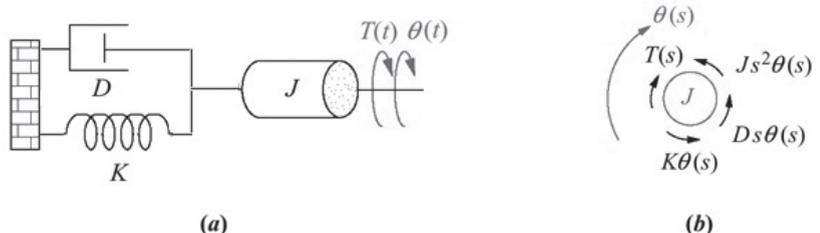
Assim como na seção anterior, para o movimento rotacional também utilizamos o diagrama de corpo livre para expressar todos os torques que agem sobre um determinado componente mecânico em estudo, e então aplicamos a lei de Newton para determinar a equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema. De posse da equação diferencial, adotando as condições iniciais nulas, podemos, então, obter a função de transferência que relaciona a entrada com a saída, ou resposta, do sistema.



### Exemplificando

Determine a função de transferência  $\frac{\theta(s)}{T(s)}$  para o sistema rotacional mostrado na Figura 3.9 (a). Um torque  $T(t)$  é aplicado à direita do corpo, fazendo-o girar com um deslocamento angular  $\theta(t)$ .

Figura 3.9 | (a) sistema mecânico rotacional (b) diagrama de corpo livre



Fonte: adaptada de Nise (2012).

A obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. Definição do problema: obtenção da função de transferência do sistema, considerando  $T(t)$  como entrada e  $\theta(t)$  como a saída do sistema.
2. Teoria e aplicação das leis fundamentais: segunda lei de Newton.
3. Simplificações e aproximações: para modelagem de todos os sistemas mecânicos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: todas as massas são rígidas e têm valor constantes; as molas são puras, lineares, não têm perda de energia, nem têm massa, seus coeficientes são constantes e transladam em uma só direção; os amortecedores são puros e lineares, não têm efeito de mola e não têm massa, seus coeficientes são constantes; todas as condições iniciais são nulas e as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. Equacionamento: dado o digrama de corpo livre, dado pela Figura 3.9 (b) e aplicando a segunda lei de Newton, chegamos à Equação (3.24).

$$-J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - D \frac{d\theta(t)}{dt} - K\theta(t) + T(t) = 0 \quad (3.24)$$

Aplicando a transformada de Laplace, dada as condições iniciais nulas, e isolando a entrada e saída, chegamos à função de transferência, dada pela Equação (3.25).

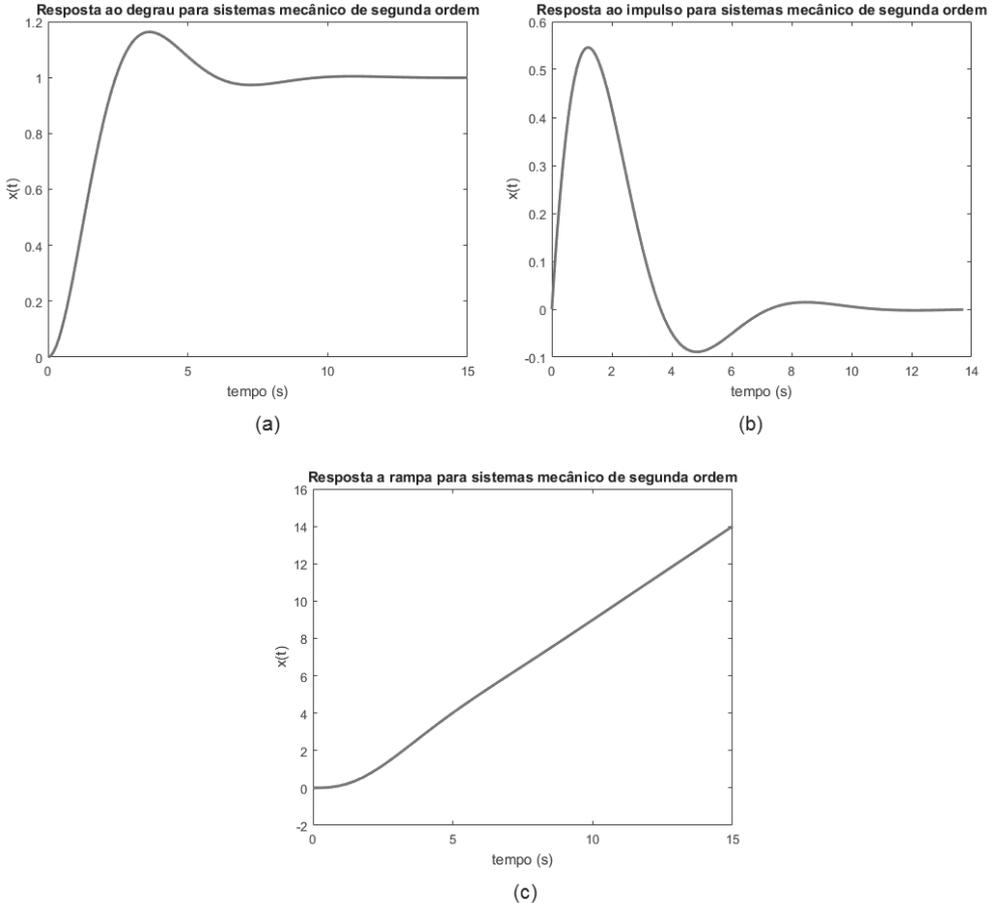
$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Ds + K} \quad (3.25)$$

O sistema dado pela Figura 3.9 (a) caracteriza-se como um sistema mecânico rotacional de segunda ordem. Se aplicarmos as entradas típicas, já conhecidas, como degrau, impulso e rampa, supondo  $J = 1 \text{ kg.m}^2$ ,  $D = 1 \text{ N.m.s/rad}$  e  $K = 1 \text{ N.m/rad}$ , a resposta obtida é mostrada na Figura 3.10. Notamos que a resposta é muito similar aos sistemas translacionais e elétricos de segunda ordem.

Ao analisarmos a função de transferência e a resposta dos sistemas mecânicos, tanto translacionais como rotacionais, de primeira ou segunda ordem, notamos que estes são indistinguíveis quando comparados aos sistemas elétricos. Isto acontece

por causa da característica das respostas, que depende da ordem da função de transferência do sistema, ou seja, independe do tipo de sistema. Portanto, podemos inferir uma analogia entre os sistemas elétricos e mecânicos de mesma ordem.

Figura 3.10 | Resposta ao sistema mecânico rotacional de segunda ordem à entrada: (a) degrau, (b) impulso e (c) rampa



Fonte: elaborada pela autora.

Esta analogia pode ser de dois tipos: força/tensão, também conhecida como análogo série, que é baseada na lei das malhas dos sistemas elétricos, e força/corrente, também conhecida como análogo paralelo, que se baseia na lei dos nós. A Tabela 3.3 mostra o resumo dessas analogias, tanto para os sistemas translacionais quanto para os sistemas rotacionais.

Tabela 3.3 | Analogia eletromecânica

Sistema elétrico	Sistema mecânico translacional	Sistema mecânico rotacional
Analogia força/tensão ou análogo série		
Tensão elétrica $V(t)$	Força $f(t)$	Torque $T(t)$
Indutância (L)	Massa (M)	Momento de inércia (J)
Resistência (R)	Coefficiente de atrito ou amortecedor viscoso (B)	Coefficiente de atrito ou amortecedor viscoso (D)
Inverso da capacitância (1/C)	Coefficiente de elasticidade (K)	Coefficiente de elasticidade (K)
Carga elétrica (q)	Deslocamento (x(t))	Deslocamento angular ( $\theta(t)$ )
Corrente elétrica i(t)	Velocidade $dx(t)/dt$	Velocidade angular $d\theta(t)/dt$
Analogia força/corrente ou análogo paralelo		
Corrente elétrica i(t)	Força $f(t)$	Torque $T(t)$
Capacitância (C)	Massa (M)	Momento de inércia (J)
Inverso da resistência (1/R)	Coefficiente de atrito ou amortecedor viscoso (B)	Coefficiente de atrito ou amortecedor viscoso (D)
Inverso da indutância (1/L)	Coefficiente de elasticidade (K)	Coefficiente de elasticidade (K)
Fluxo magnético ( $\Phi(t)$ )	Deslocamento (x(t))	Deslocamento angular ( $\theta(t)$ )

Fonte: elaborada pela autora.



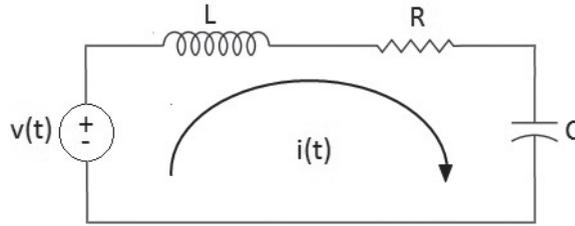
### Exemplificando

Neste exemplificando, o intuito é desenhar o análogo elétrico série e paralelo para o sistema mecânico apresentado na Figura 3.9 (a).

Considerando o sistema mecânico rotacional dado pela Figura 3.9 (a), a função de transferência em relação ao deslocamento é dada pela Equação (3.25).

Já para o sistema elétrico RLC série, cuja entrada é a tensão de entrada  $v(t)$  e a saída é a carga elétrica  $q(t)$ , podemos obter a função de transferência, considerando as condições iniciais nulas, Equação (3.26), a partir da aplicação da lei de Kirchhoff das tensões, dada pela Equação (3.27).

Figura 3.11 | Análogo elétrico série do sistema rotacional de segunda ordem



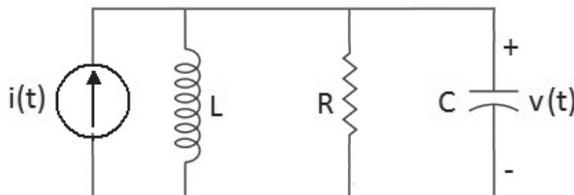
Fonte: elaborada pela autora.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad (3.26)$$

$$\frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \quad (3.27)$$

Assim, as Equações (3.26) e (3.27) são de mesma ordem, o que representa características de resposta idênticas. Logo, podemos dizer que os sistemas são análogos, como mostrado na Tabela 3.3, que os elementos passivos mecânicos: momento de inércia, mola e coeficiente de atrito viscoso podem ser relacionados com indutor, resistor e o inverso da capacitância. Dessa forma, podemos construir o análogo paralelo, ou analogia força/corrente, como o esquemático do circuito elétrico apresentado na Figura 3.12.

Figura 3.12 | Análogo elétrico paralelo do sistema rotacional de segunda ordem



Fonte: elaborada pela autora.

Segundo Nise (2012), os sistemas mecânicos rotacionais, especialmente os acionados por motores, raramente são encontrados sem trens de engrenagens associados, acionando a carga. A função da engrenagem em um sistema mecânico é propiciar o acoplamento mecânico. Considerando um acoplamento mecânico de

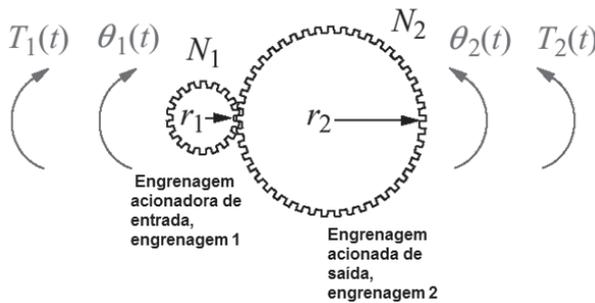
engrenagens sem folgas, dado pela Figura 3.13, para que não haja deslizamento, é necessário que a distância percorrida em um determinado intervalo de tempo seja a mesma, como mostram as Equações (3.28) e (3.29). Sabendo que o número de dentes de uma engrenagem é proporcional ao seu raio, podemos obter a relação de deslocamento angular com número de dentes da engrenagem, dado pela Equação (3.30).

$$d_1 = d_2 \quad (3.28)$$

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \quad (3.29)$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (3.30)$$

Figura 3.13 | Sistemas de engrenagens



Fonte: adaptada de Nise (2012).

Além da relação número de dentes das engrenagens com o deslocamento angular, podemos obter a relação entre o torque de entrada e o número de dentes de uma engrenagem, dado pela Equação (3.31). Vale salientar que as engrenagens do sistema em análise são sem perdas, isto é, elas não absorvem nem armazenam energia, ou seja, a energia que entra pela engrenagem 1, da Figura 3.13, é igual à energia que sai pela engrenagem 2 (isto equivale a dizer que as engrenagens têm inércia e amortecimento desprezíveis) (NISE, 2012).

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.31)$$

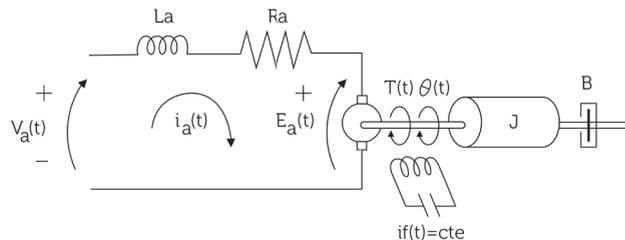


### Refleta

De posse dos conhecimentos do processo de modelagem dos sistemas elétricos e mecânicos puros, como podemos modelar os sistemas híbridos, isto é, sistemas com variáveis dos sistemas elétricos e mecânicos, também conhecidos como eletromecânicos?

Sistemas eletromecânicos são dispositivos que convertem energia elétrica em mecânica, ou vice-versa, como: motores, geradores, alto-falantes, controle de robôs etc. Um motor, por exemplo, produz um deslocamento, como saída, a partir de uma tensão elétrica de entrada. Nesta seção, iremos obter a modelagem da função de transferência para um tipo particular de sistema eletromecânico: o servomotor de corrente contínua (CC) controlado pela armadura. O esquemático desse sistema é apresentado pela Figura 3.14.

Figura 3.14 | Motor CC



Fonte: adaptada de <<https://pt.scribd.com/document/60406704/CADERNO-DIDACTICO-DE-SISTEMAS-DE-CONTROLE-1-Prof-Helio-Leaes-Hey>>. Acesso em: 28 nov. 2016.

Em um motor CC, tem-se um campo magnético gerado por ímãs permanentes estacionários. Um circuito rotativo, chamado de armadura, por meio do qual circula uma corrente  $i_a(t)$ , passa ortogonalmente por esse campo magnético e é submetido a uma força dada pela Equação (3.32), em que  $B$  é a intensidade do campo magnético e  $l$  é o comprimento do condutor. Assim, por se tratar de um movimento giratório, podemos relacionar a força dada pela Equação (3.32) com o torque resultante que gira o rotor (elemento rotativo do motor), dado pela Equação (3.33) (NISE, 2012).

$$F = Bli_a(t) \quad (3.32)$$

$$T(t) = K_1 i_a(t) \quad (3.33)$$

Segundo Nise (2012), outro fenômeno que ocorre no motor, por causa das leis eletromagnéticas, é quando um condutor se move ortogonalmente a um campo magnético, gerando uma diferença de tensão entre os terminais do condutor, dada pela Equação (3.34), em que  $e$  é a diferença de tensão e  $v$  é a velocidade do condutor perpendicular ao campo magnético. Uma vez que a armadura que conduz a corrente está girando em um campo magnético, sua tensão é proporcional à velocidade, dada pela Equação (3.35).

$$e = Blv \quad (3.34)$$

$$E_a(t) = K_2 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.35)$$

A equação diferencial referente ao sistema elétrico, isto é, a modelagem do circuito de armadura do motor CC é definida pela Equação (3.36).

$$V_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a(t) \quad (3.36)$$

Já a equação diferencial referente ao sistema mecânico, associada ao sistema representado pelo esquemático do motor CC, Figura 3.14, é dada pela Equação (3.37).

$$T(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.37)$$

Assumindo as condições iniciais nulas, a transformada de Laplace das expressões (3.33), (3.35), (3.36) e (3.37) é dada, respectivamente, pelas Equações (3.38), (3.39), (3.40) e (3.41).

$$T(s) = K_1 I_a(s) \quad (3.38)$$

$$E_a(s) = K_2 s \theta(s) \quad (3.39)$$

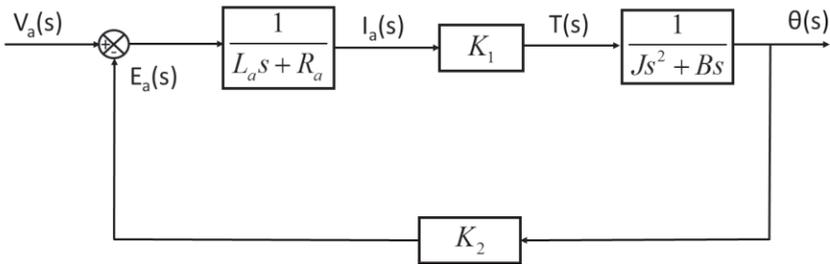
$$V_a(s) = L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + E_a(s) \quad (3.40)$$

$$T(s) = J s^2 \theta(s) + B s \theta(s) \quad (3.41)$$

Considerando que a tensão aplicada na armadura da máquina  $V_a(s)$  é a entrada do sistema, e que o deslocamento angular do eixo do rotor,  $\theta(s)$  é a saída do sistema, podemos escrever a função de transferência como a equação (3.42) e o diagrama de blocos representativo desse modelo do motor CC controlado por armadura é apresentado pela Figura 3.15.

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1}{s(L_a J s^2 + (L_a B + R_a J)s + R_a B + K_1 K_2)} \quad (3.42)$$

Figura 3.15 | Diagrama de bloco representativo motor CC controlado por armadura



Fonte: elaborada pela autora.



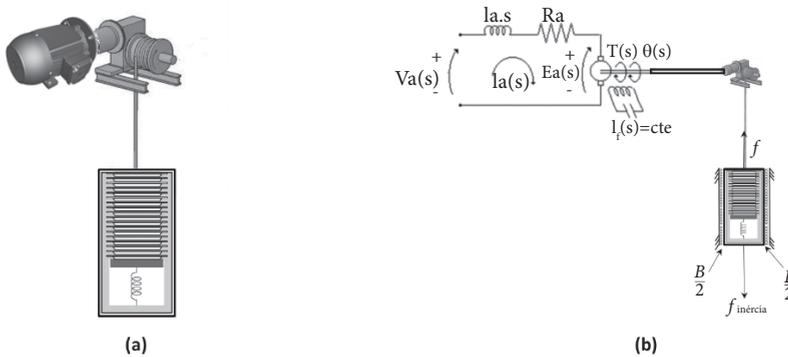
### Pesquise mais

Um servomotor pode ser acionado de duas formas: controle por armadura e controle de campo. No primeiro caso, como visto anteriormente, o enrolamento do campo é excitado separadamente, a corrente de campo é mantida constante e o controle do motor é excitado pela corrente de armadura. Já no controle por campo, a corrente de armadura é mantida constante e a velocidade é controlada pela tensão de campo. Para saber um pouco mais sobre os diferentes tipos de controle e a sua modelagem, consulte: <<http://coral.ufsm.br/gepoc/renes/Templates/arquivos/elc1031/ELC1031.L2.5.pdf>>. Acesso em: 6 nov. 2016.

### Sem medo de errar

Uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou a sua equipe que, antes de o elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis. Já projetamos esse dispensador e vimos por quais elementos passivos mecânicos ele é formado. Agora, iremos projetar a parte elétrica desse sistema. Se usarmos um servomotor CC para mover o elevador de carga, qual seria o diagrama de blocos que representaria todo esse sistema híbrido?

Figura 3.16 | (a) Representação do sistema híbrido para o elevador de carga (b) esquemático elétrico motor CC e diagrama de forças do dispensador de pratos



Fonte: (a) adaptada de Nise (2012) e <<https://www.liloredutores.com.br/Motor-Eletrico-Weg-de-6cv--1720-RPM--220-380v-Trifasico-com-Flange-FF-215/prod-1734262/>> e (b) adaptado de Nise (2012). Acesso em: 26 nov. 2016.

### Resolução da situação-problema

Para a obtenção do diagrama de blocos que representa o elevador de carga, ou seja, nosso sistema híbrido, devemos considerar o sistema motor – dispensador como apresentado pela Figura 3.16 (a). Neste sistema, temos que um servomotor CC produzirá o torque necessário para girar um carretel com cabo de aço, que fará o dispensador mover-se verticalmente entre o térreo, área de atendimento ao cliente, ao primeiro andar e área da cozinha.



#### Atenção

Considere o carretel como um sistema ideal, ou seja, todo movimento rotacional produzido pelo motor será transformado em movimento translacional. Além disso, todo deslocamento angular é transformado em deslocamento vertical, ou seja, não há folgas no sistema.

Outro ponto a que devemos nos atentar é que o dispensador é visto como um corpo único de massa  $M$ , em que  $M$  representa a massa total do elevador e dos pratos. E que a origem do deslocamento dessa massa única será o ponto de equilíbrio, portanto, não será considerada a força peso, como vimos na seção anterior.

Se consideramos o carretel como ideal, ou seja, se considerarmos que todo movimento angular seja transformado em movimento translacional sem perdas, podemos igualar o torque produzido pelo motor à força que desloca o elevador. Assim, a partir da Figura 3.16 (b) e da segunda lei de Newton, obtemos a Equação (3.43).

$$f(t) = f_{\text{inércia}}(t) + f_{\text{atrito}}(t) \quad (3.43)$$

Sabendo que  $f(t) = T(t)$ , podemos reescrever a Equação (3.43), como a Equação (3.44), em que  $M$  é a massa total do dispensador e  $x(t)$  o deslocamento do dispensador.

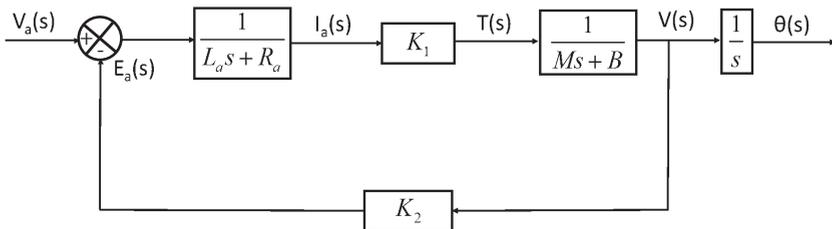
$$T(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} \quad (3.44)$$

Como a velocidade do sistema  $v(t)$  é dada como derivada do deslocamento, podemos então reescrever a Equação (3.44) como a Equação (3.45).

$$T(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) \quad (3.45)$$

Aplicando a transformada de Laplace com as condições iniciais nulas, e sabendo que as Equações (3.38), (3.39) e (3.40) representam as equações que descrevem a dinâmica do servomotor CC com controle de armadura, podemos, então, escrever o diagrama de blocos para o sistema híbrido, como mostra a Figura 3.17.

Figura 3.17 | Diagrama de blocos para sistema híbrido elevador de carga



Fonte: elaborada pela autora.

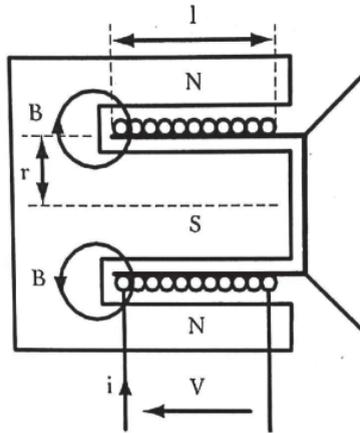
## Avançando na prática

### Modelo de um alto-falante

#### Descrição da situação-problema

O conceito básico de funcionamento de um alto-falante é dado por uma bobina solidária a um diafragma, que se move com relação a um ímã permanente, como mostra a Figura 3.18. Conforme a corrente de entrada varia, gerada por um amplificador de áudio, uma força magnética variável é produzida na bobina, fazendo que a bobina e o diafragma se movam. O movimento do diafragma produz ondas de pressão de ar que correspondem ao som.

Figura 3.18 | Diagrama esquemático de um alto-falante



Fonte: adaptada de Garcia (2013).

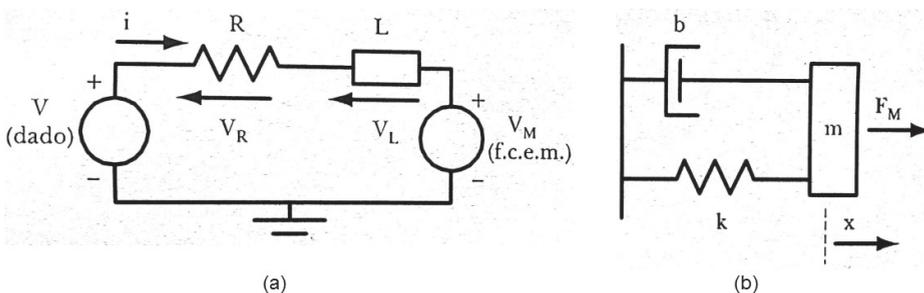
A corrente  $i$ , fluindo pelas espirais da bobina, interage com um fluxo radial constante de densidade  $B \text{ Wb/m}^2$ , criado no interstício do ar por causa de um ímã permanente. A bobina produz uma força contra – eletromotriz, pois ela é um condutor de corrente se movendo em um campo magnético e tem  $N$  espiras, comprimento  $l$ , raio  $r$ , indutância  $L$  e resistência  $R$ . A massa combinada do diafragma e da bobina é dada por  $m$ . A constante da mola  $k$  e o coeficiente de amortecimento  $b$  dependem das propriedades do material do diafragma.

Assumindo-se que a corrente  $i$ , que não influencia a densidade de fluxo  $B$ , gere o modelo físico desse sistema e apresente suas equações de movimento, definindo os parâmetros e variáveis necessários.

### Resolução da situação-problema

Ao analisarmos as características do sistema, nota-se que esse sistema pode ser aproximado pelo esquemático de um sistema híbrido, como mostra a Figura 3.19.

Figura 3.19 | (a) esquemático elétrico (b) diagrama de corpo livre para o modelo físico do alto-falante



Fonte: adaptado de Garcia (2013).

Dessa forma, podemos obter as equações do movimento do alto-falante analisando um sistema elétrico e outro mecânico.

Sistema elétrico: a partir do esquemático da Figura 3.19 (a), aplica-se a lei de Kirchhoff das malhas e obtemos a Equação diferencial (3.46).

$$v_m = K_1 \frac{dx}{dt} \quad (3.46)$$

Sabendo que  $v_m = K_1 \frac{dx}{dt}$ , como mostrou a Equação (3.35), podemos, então, reescrever a Equação (3.46) como a Equação (3.47).

$$v(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t) + K_1 \frac{dx}{dt} \quad (3.47)$$

Sistema mecânico: a partir do esquemático da Figura 3.19 (b), aplica-se a segunda lei de Newton e obtemos a Equação diferencial (3.48).

$$f_m(t) = f_k(t) + f_i(t) + f_b(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Kx \quad (3.48)$$

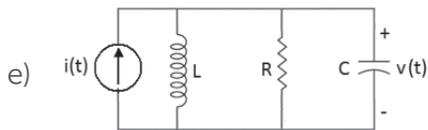
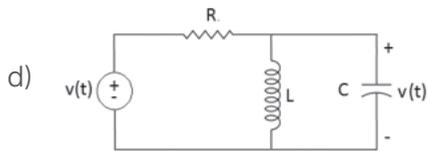
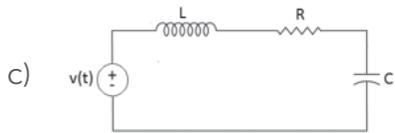
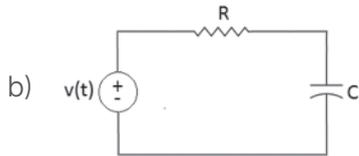
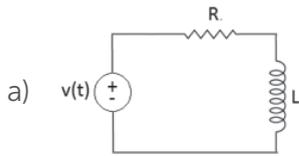
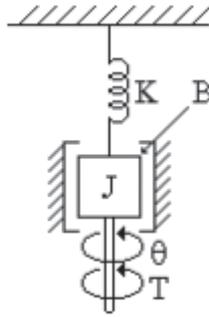
Sabendo que  $f_m(t) = K_2 i(t)$ , como mostrado na Equação (3.33), podemos, então, reescrever a Equação (3.48) como a Equação (3.49).

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Kx - K_2 i(t) = 0 \quad (3.49)$$

### Faça valer a pena

**1.** Ao analisarmos a função de transferência e a resposta dos sistemas mecânicos, tanto translacionais como rotacionais, de primeira ou segunda ordem, notamos que estes são indistinguíveis quando comparados aos sistemas elétricos. Isto acontece porque a característica das respostas depende da ordem da função de transferência do sistema, ou seja, independe do tipo de sistema.

Dado o sistema mecânico rotacional apresentado na figura a seguir, assinale a alternativa que contém o desenho do análogo elétrico série:



**2.** Nesta unidade, aplicaremos nosso conhecimento de modelagem matemática dos sistemas dinâmicos a mais uma área fundamental dos projetos de controle: a mecânica. Os sistemas dinâmicos dessa área podem ser classificados quanto ao seu tipo de movimento em: sistemas translacionais e sistemas rotacionais.

A respeito de modelagem matemática dos sistemas mecânicos rotacionais podemos afirmar que:

I. As variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: deslocamento angular, velocidade angular, aceleração angular e torque externo.

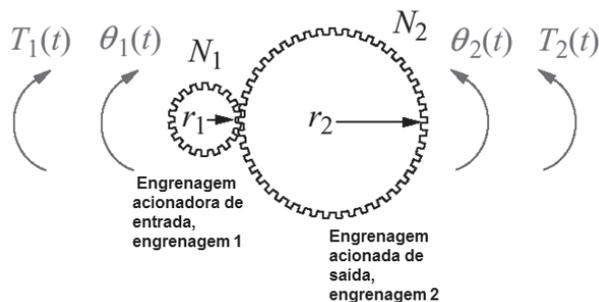
II. Os elementos físicos lineares passivos que compõem os sistemas mecânicos translacionais são: momento de inércia, mola, amortecedor e atrito viscoso.

III. As entradas típicas, já conhecidas por nós como degrau, rampa e impulso, não podem ser aplicadas a este tipo de sistema.

- Apenas I está correta.
- Apenas II está correta.
- Apenas III está correta.
- Apenas I e II estão corretas.
- I, II e III estão corretas.

**3.** Segundo Nise (2012), os sistemas mecânicos rotacionais, especialmente os acionados por motores, raramente são encontrados sem trens de engrenagens associados acionando a carga. A função da engrenagem em um sistema mecânico é propiciar o acoplamento mecânico.

Considere um acoplamento mecânico de engrenagens sem folgas mostrado pela figura:



Podemos relacionar as variáveis torque com o número de dentes da engrenagem e, também, o número de dentes da engrenagem com o deslocamento angular pelas seguintes equações:

$$\text{a) } \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \text{ e } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

$$\text{b) } \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \text{ e } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

$$\text{c) } \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1} \text{ e } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

$$\text{d) } \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1} \text{ e } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

$$\text{e) } \frac{T_1}{T_2} = -\frac{N_1}{N_2} \text{ e } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

## Seção 3.3

### Modelagem matemática de sistemas mecânicos com uso de software

#### Diálogo aberto

Caro aluno, lembre-se de que uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou a sua equipe que, antes de o elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis. Você já estimou o modelo mecânico para a construção do dispensador de pratos e o modelo do servomotor de corrente contínua (CC) controlado pela tensão de armadura, que deve ser utilizado para o movimento vertical desse sistema. Agora é o momento de especificar e validar os valores dos elementos que constituem esse sistema por meio do software MatLab®.

Na Seção 3.1, iniciamos nosso aprendizado sobre simulações e testes dos modelos matemáticos representativos da dinâmica dos sistemas via software: o MatLab®. Na Seção 3.2, vimos como utilizar essa ferramenta para a simulação em sistemas elétricos com as mais diferentes ordens. Nesta seção, para resolver nossa situação-problema, aplicaremos e desenvolveremos um pouco mais nosso conhecimento anteriormente obtido nesse software aos sistemas mecânicos translacionais, rotacionais, circuitos com motor CC via MatLab®, em linhas de código e diagrama de blocos, com auxílio do Simulink®.

Sabemos que testar e validar um sistema pode acarretar altos custos, decorrentes da compra de equipamentos e da demanda de tempo de pessoas especializadas, seja por meio de um sistema real ou por um protótipo em bancada de testes. Além disso, testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias, ou seja, a validação é importante por assegurar que os modelos estimados contêm as informações que queremos reproduzir em nosso projeto.

Bons estudos e um ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Os sistemas mecânicos são elementos essenciais de muitos sistemas dinâmicos como: automóveis, robôs, motores elétricos, aviões, elevadores, dentre outros. Vimos, nas Seções 3.1 e 3.2, que para encontramos o modelo dinâmico que descreve o comportamento desse tipo de sistema é necessário utilizarmos a segunda lei de Newton.

De posse do modelo dinâmico do sistema, podemos analisar por simulação via software a resposta dos sistemas dinâmicos para diferentes tipos de entrada, como fizemos na Seção 3.2, em que analisamos a resposta dos diferentes tipos de modelos dos sistemas elétricos. Todavia, agora avaliaremos as respostas às diferentes entradas dos sistemas mecânicos dos tipos translacionais, rotacionais e circuitos híbridos, ou seja, sistemas eletromecânicos como o motor de corrente contínua.

Vimos, na seção anterior, que a característica da resposta, independentemente do tipo de sistema em análise, podendo ser mecânico ou elétrico, ou seja, a resposta depende da ordem da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema em estudo. O que irá diferenciar é a aplicação e análise dessa resposta, ou seja, a interpretação dada à resposta obtida. Além disso, vale salientar que a ordem do modelo representativo da dinâmica dos sistemas mecânicos depende da quantidade e do tipo de elemento que os formam.

Já vimos que o MatLab® pode ser programado via linhas de código (ou comando de instrução (*script*)) ou via diagramação gráfica de blocos: o Simulink®. Para utilizarmos a programação por comando de instrução em modelagem e análise dos sistemas dinâmicos, é fundamental nos lembrarmos de alguns comandos aprendidos nas unidades anteriores, como:

- **tf(num,den)**: comando para criar uma função de transferência contínua de um sistema.
- **step(sys)**: entrada degrau do sistema dinâmico.
- **impulse(sys)**: entrada impulso do sistema dinâmico.

Assim, de posse desses comandos, podemos simular a resposta do sistema mecânico translacional de primeira ordem, obtida na Seção 3.1 – Equação (3.5) – por meio de um programa em comando de instrução, como:

```
%Modelagem sistema mecânico de primeira ordem
num = [1];      %numerador da tf
den = [M B];    %denominador da tf
sys = tf(num,den) %função de transferência
figure(1)      %criação da janela para figura(gráfico)
```

```

step(sys)      %aplicação da entrada degrau
figure(2)     %criação da janela para figura(gráfico)
impulse(sys)  %aplicação da entrada impulso

```

Sabemos que, para o programa funcionar corretamente, é necessário determinarmos valores numéricos para a massa e para o coeficiente de atrito viscoso, por exemplo, podemos adotar valores de massa e coeficiente de atrito viscoso unitário, isto é,  $M = B = 1$ . Agora, se estivéssemos interessados em comparar a resposta de dois sistemas diferentes, poderíamos, para uma melhor visualização dos resultados, imprimir a resposta em uma mesma janela. Para isso, o comando do MatLab® a ser utilizado é o **hold**. Este comando congela a tela do gráfico atual, de forma que os gráficos subsequentes são superpostos sobre o atual. Para habilitar o uso desse comando, basta utilizar **hold on**, e para desabilitá-lo, permitindo a criação de novas figuras para cada gráfico, basta utilizar **hold off**.

Assim, se quisermos comparar a resposta de dois sistemas diferentes, por exemplo, para o primeiro exemplificando da Seção 3.1, em que temos a relação de velocidade e força externa aplicada a um barco, podemos, então, comparar o comportamento da velocidade de dois barcos com diferentes massas quando em contato com a mesma superfície, ou seja, quando têm o mesmo coeficiente de atrito. Para melhor analisarmos essa resposta, imprimiremos (ou plotaremos) os gráficos na mesma janela, como mostra o programa em comando de instrução:

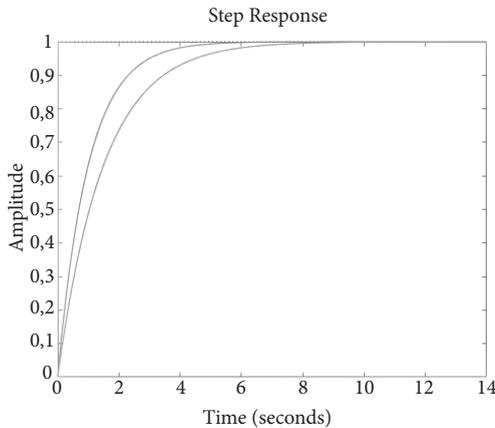
```

%Modelagem sistema mecânico de primeira ordem: Comparação de sistemas
M=1;           %valor de massa barco 1
B=1;           %valor de coeficiente de atrito viscoso 1
M1=1.5;       %valor de massa barco 2
B1=1;         %valor de coeficiente de atrito viscoso 2
num = [1];    %numerador da tf
den = [M B];  %denominador da tf sistema 1
sys = tf(num,den) %função de transferência sistema 1
den1 = [M1 B1]; %denominador da tf 2
sys1 = tf(num,den1) %função de transferência sistema 2
figure(1)     %criação da janela para figura(gráfico)
step(sys)     %aplicação da entrada degrau sistema 1
hold on
step(sys1)    %aplicação da entrada degrau sistema 2

```

A resposta desse sistema a uma entrada degrau unitária, simulando a aplicação de uma força externa constante, é dada pela Figura 3.20.

Figura 3.20 | Comparação da relação de velocidade e força externa aplicada a dois sistemas distintos



Fonte: elaborada pela autora.

Dado o gráfico de resposta do sistema apresentado pela Figura 3.20, percebemos que não é tão direta a análise da resposta, ou seja, para sabermos qual é a curva do gráfico que corresponde a um determinado sistema, teríamos de, por exemplo, analisar a constante de tempo para cada uma das curvas. Contudo, se tivéssemos uma legenda no gráfico, rapidamente poderíamos distinguir qual curva refere-se a uma determinada resposta. No MatLab®, a legenda de um gráfico pode ser inserida por meio do comando **legend()**. Para utilizarmos essa função, é necessário seguir a seguinte sintaxe: `legend('nomefunção1','nomefunção2','nomefunção3')`, em que `nomefunção1` refere-se à primeira função declarada nas linhas de comando; `nomefunção2` refere-se à segunda função declarada e assim sucessivamente.

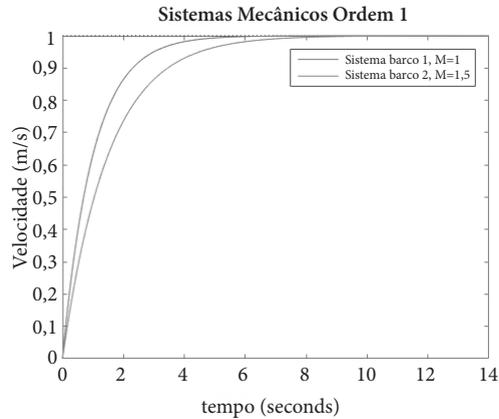
Além disso, em um gráfico podemos alterar ou editar: o título do gráfico, por meio do comando **title('título\_do\_gráfico')**, em que `título_do_gráfico` refere-se ao título que você gostaria de dar ao seu gráfico e ao título dos eixos, y e x, por meio, respectivamente, dos comandos **ylabel('nome-eixo-y')** e **xlabel('nome-eixo-x')**. Assim, para editarmos nosso gráfico, do exemplo do sistema mecânico de primeira ordem, basta completarmos as linhas de código do programa anterior com as seguintes linhas de comando:

```
%Continuidade - Modelagem sistema mecânico de primeira ordem: Comparação de sistemas
```

```
legend('Sistema barco 1, M=1','Sistema barco 2, M=1,5')
ylabel('Velocidade (m/s)')
xlabel('tempo')
```

Assim, a velocidade de resposta do sistema mecânico de primeira ordem, quando aplicamos uma força externa ao barco, com a característica de uma entrada degrau unitária, simulada com a inserção desses novos comandos, fica como mostra a Figura 3.21.

Figura 3.21 | Comparação da relação de velocidade e força externa aplicada a dois sistemas distintos, editado o campo legenda, título e os títulos dos eixos das abcissas e ordenadas



Fonte: elaborada pela autora.



### Assimile

Comandos para a edição do gráfico de resposta do sistema em linhas de comando:

- **legend**('nomefunção1', 'nomefunção2', 'nomefunção3')
- **title**('titulo\_do\_gráfico')
- **ylabel**('nome-eixo-y')
- **xlabel**('nome-eixo-x')

Ao analisarmos a Figura 3.21, conseguimos rapidamente perceber que a curva em azul, referente ao barco 1, apresenta uma constante de tempo de resposta menor quando comparada com a curva em vermelho, referente ao barco 2, sem muito realizar os cálculos. O que torna mais eficiente a análise da resposta do sistema dinâmico.



### Faça você mesmo

Agora que você já sabe como editar um gráfico, que tal tentar programar um sistema mecânico de segunda ordem como o dado pela Equação (3.25)? Utilize diferentes valores para o momento de inércia, o coeficiente do amortecedor viscoso e da mola, e veja como ocorre o deslocamento angular para diferentes sistemas quando aplicado um mesmo torque externo.



### Refleta

Agora que já sabemos como analisar em um mesmo gráfico a resposta de diferentes sistemas em programação em linhas de código do MatLab®, como podemos fazer isso via diagramação gráfica de blocos utilizando o Simulink®?

Temos duas formas de executar essa tarefa: uma menos intuitiva, em que podemos realizar um diagrama de blocos para cada sistema que queremos comparar as respostas em um mesmo gráfico; e uma mais eficiente, em que utilizamos o mesmo diagrama de blocos e, juntamente com a programação em linhas de código, conseguimos gerar as curvas de respostas para as análises.



### Exemplificando

Dado o esquemático do servomotor CC controlado por armadura, apresentado na Figura 3.14 da seção anterior, obtenha a curva de resposta para o torque e a velocidade angular, para dois diferentes servomotores CC, com as seguintes especificações técnicas: servomotor 1  $L_{a_1} = H$  e  $R_{a_1} = \Omega$  e servomotor 2  $L_{a_2} = H$  e  $R_{a_1} = \Omega$ .

Considere que seja acoplado a ambos servomotores a mesma carga, cujos valores são: momento de inércia  $J = 1 \text{ Kg.m}^2$ , coeficiente de amortecedor viscoso  $B = 1 \text{ N.m.s/rad}$ , os valores das constantes de construção são os mesmos, ou seja,  $K_2 = K_3 = 1$  e a tensão aplicada ao circuito de armadura,  $V_a$ , é  $127 \text{ V}$ .

Sabemos que o servomotor CC é modelado segundo as Equações (3.38), (3.39), (3.40) e (3.41), apresentadas na seção anterior, e que a velocidade angular  $\omega$  pode ser escrita em relação ao deslocamento angular  $\theta$  equivalente à Equação (3.50).

$$\omega = s\theta \quad (3.50)$$

Reescrevendo a Equação (3.41) como a Equação (3.51).

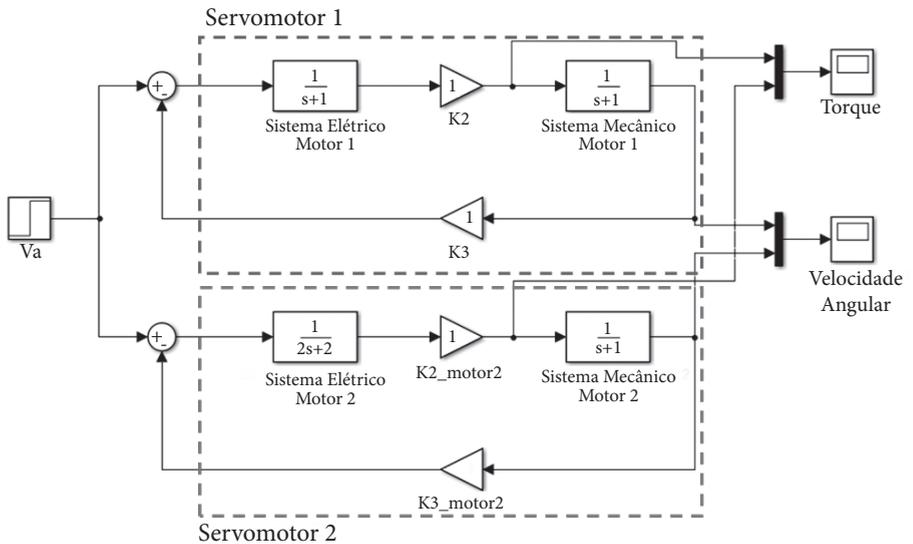
$$T(s) = (Js + B)\omega \quad (3.51)$$

Assim, podemos obter as curvas de respostas para análise, de duas formas, do torque e da velocidade angular para dois diferentes servomotores CC:

### Simulação 1: dois diferentes diagramas de blocos, um para cada sistema.

Para essa simulação, criamos dois diagramas de blocos: um para cada servomotor, como mostra a Figura 3.22.

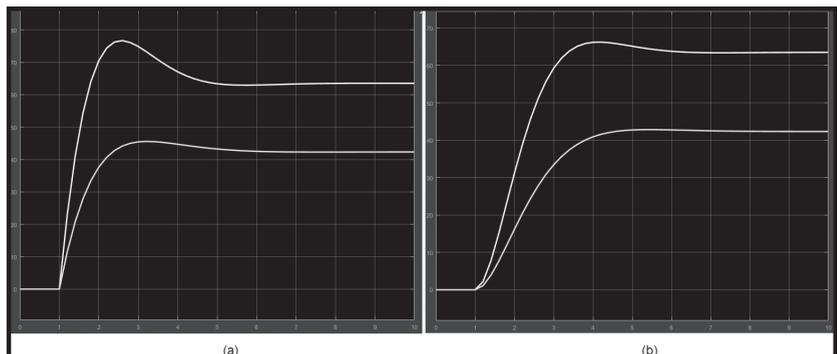
Figura 3.22 | Programação Simulink® - Simulação 1



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, as curvas de resposta para o torque e para a velocidade angular, para ambos os motores, são apresentadas, respectivamente, pela Figura 3.23 (a) e (b).

Figura 3.23 | Resposta Simulação 1 - (a) torque e (b) velocidade angular



Fonte: elaborada pela autora.

Observe que as curvas de resposta foram plotadas no mesmo gráfico, tanto para o torque quanto para velocidade angular. Para isso, foi necessário utilizarmos um bloco de comando, **Mux**, cujo símbolo é dado pela Figura 3.24, que está localizado na biblioteca *commonly used blocks*.

Figura 3.24 | Símbolo bloco de comando Mux do Simulink®

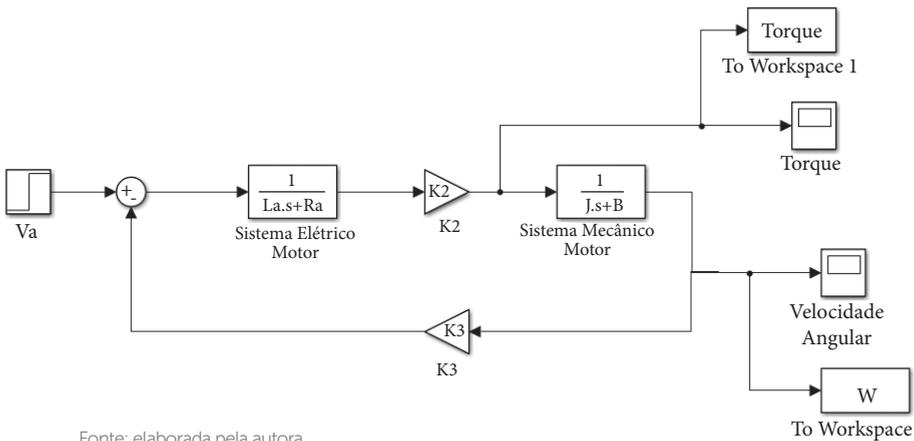


Fonte: elaborada pela autora

### Simulação 2: único diagrama de blocos.

Para essa simulação, criamos apenas um diagrama de blocos, genérico, para ambos servomotores, como mostra a Figura 3.25.

Figura 3.25. | Programação Simulink® - Simulação 2



Fonte: elaborada pela autora

Observando a Figura 3.25, nota-se que os parâmetros do modelo do sistema são dados genericamente por meio de variáveis. Dessa forma, os valores são declarados por um programa em linhas de código como:

```
%Exemplificando Seção 3.3 - Unidade 3 - Simulação Motor CC
La=1; Ra=1; J=1; B=1;K2=1;K3=1;Va=127; %Dados do Motor 1
sim('simulacao1_2') % Simulink
torque1=torque; %Salvando as variáveis
w1=w;
La=2; Ra=2;J=1; B=1;K2=1;K3=1;Va=127; %Dados do Motor 2
```

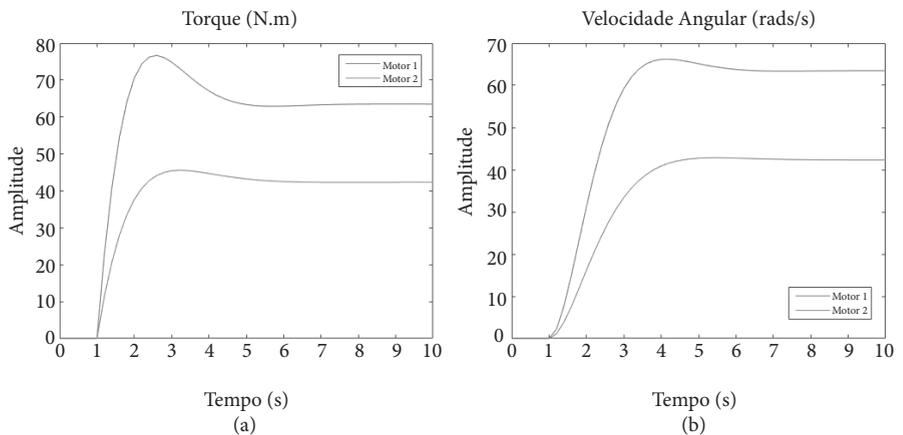
```

sim('simulacao1_2')           % Simulink
torque2=torque;               % Salvando as variáveis
w2=w;
figure(1)                     % Gerando a figura
plot(tout,torque1)
hold on
plot(tout,torque2)
legend('Motor 1','Motor 2')
title('Torque (N.m)')
ylabel('Amplitude')
xlabel('tempo(s)')
figure(2)
plot(tout,w1)
hold on
plot(tout,w2)
legend('Motor 1','Motor 2')
title('Velocidade Angular (rad/s)')
ylabel('Amplitude')
xlabel('tempo(s)')

```

Assim, as curvas de resposta para o torque e para a velocidade angular, para ambos os motores, são apresentadas, respectivamente, pela Figura 3.26.

Figura 3.26 | Resposta Simulação 2 - (a) torque e (b) velocidade angular



Fonte: elaborada pela autora.

Observe na Figura 3.25 que as curvas de resposta foram plotadas no mesmo gráfico, tanto para o torque quanto para velocidade angular. Para isso, foi necessário utilizarmos um bloco de comando **To Workspace**, que está localizado na biblioteca *skins*. Este bloco envia para *Command Windows* os dados lidos pelo *Scope*.

Vale salientar que para o bloco **To Workspace** foi parametrizado (por meio de um duplo clique no bloco) para salvar os dados em formato *Array*, ou seja, dessa forma a variável será salva em formato de um vetor. Assim, conseguiremos plotar o gráfico com as linhas de código sugeridas.



### Pesquise mais

O bloco **To Workspace** foi parametrizado para salvar o formato dos dados enviados ao *Command Windows* em modo *Array*, dessa forma, ele envia apenas os dados de interesse. Contudo, este bloco pode ter mais três formatos de dados. Para saber pouco mais sobre esse bloco, acesse: <https://www.mathworks.com/help/simulink/sref/toworkspace.html?requestedDomain=www.mathworks.com>. Acesso em: 30 nov. 2016.

### Sem medo de errar

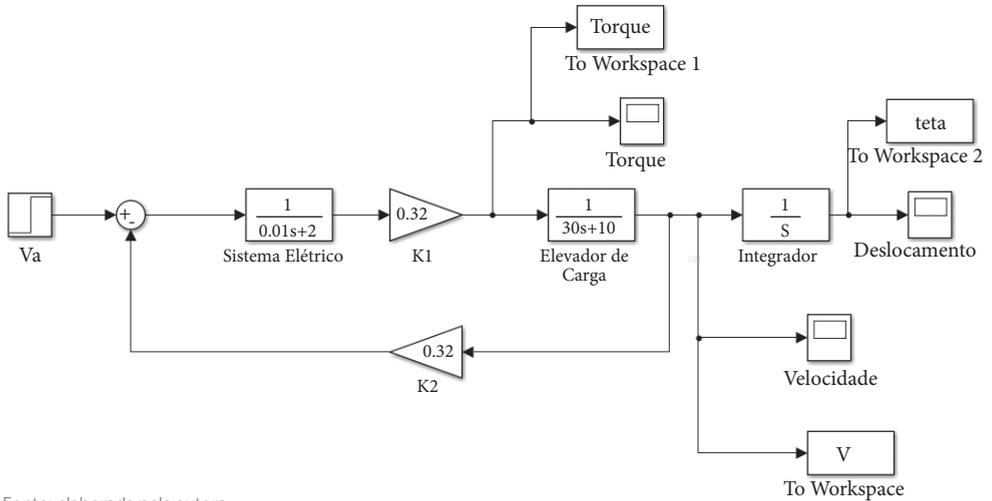
Uma empresa de desenvolvimento tecnológico, na qual você é o engenheiro responsável, foi contratada pelo dono de um restaurante para fazer a automação de um sistema de transporte dos pratos que estão no térreo (área de atendimento ao cliente) até o primeiro andar, onde estão localizados a área de cozinha e o serviço de limpeza. O dono do estabelecimento está preocupado com fatores econômicos, ecológicos e ambientais e solicitou a sua equipe que, antes do elevador transportar os pratos sujos, ele deve ser capaz de acumular até 20 pratos, ou seja, ser um dispensador de pratos móveis. Você já estimou o modelo mecânico para construção do dispensador de pratos e o modelo do servomotor de corrente contínua (CC) controlado pela tensão de armadura, que se deve utilizar para o movimento vertical desse sistema. Agora é o momento de especificar e validar os valores dos elementos que constituem esse sistema por meio do software MatLab®.

### Resolução da situação-problema

O sistema híbrido de elevador de carga foi modelado na seção anterior e é descrito pelo diagrama de blocos da Figura 3.17. Assim, podemos simular esse

sistema utilizando o Simulink®, como mostra a Figura 3.27, e então analisaremos as respostas do sistema.

Figura 3.27 | Simulação em Simulink® - Elevador de carga



Fonte: elaborada pela autora.



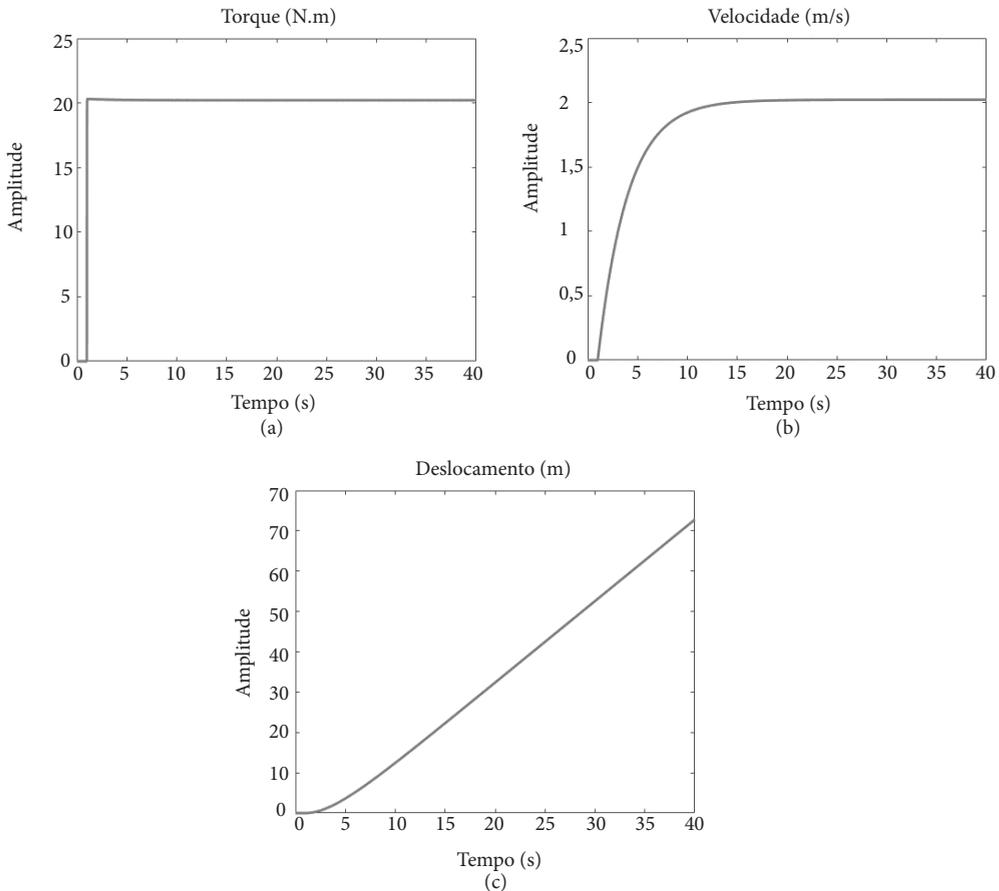
### Atenção

Considere o caso crítico para determinação das características do sistema, ou seja, o caso em que o dispensador está com carregamento máximo de pratos.

Sabendo que a velocidade requerida para que não haja dano à carga, ou seja, aos pratos, seja de aproximadamente 2 m/s e, para condição mais crítica, quando o dispensador estiver com 20 pratos, a massa total do sistema seja de 30 kg, o coeficiente de atrito entre o elevador de carga e o ar seja, aproximadamente, 10 Ns/m e que o torque/força necessário para o deslocamento desse elevador de carga seja aproximadamente 20 N.m, então, por meio de testes empíricos, podemos encontrar as especificações dos elementos construtivos do motor CC como  $L_a = 0,01$  H,  $R_a = 2 \Omega$  e  $K_1 = K_2 = 0,32$ .

Logo, a partir da simulação apresentada na Figura 3.28, obtivemos como resposta para torque, velocidade e deslocamento as curvas apresentadas, respectivamente, na Figura 3.28 (a), (b) e (c).

Figura 3.28 | Resposta do sistema de elevador de carga (a) torque (b) velocidade (c) deslocamento



Fonte: elaborada pela autora.

Analisando a Figura 3.28 (a), notamos que o valor de torque quase que instantaneamente, em 1 s, chega ao 20 N.m; já a velocidade máxima requerida para o sistema é obtida 15 s após o movimento e, por fim, o deslocamento angular é uma curva crescente, visto que enquanto o motor estiver em funcionamento o sistema está movendo-se, logo, o deslocamento está aumentando.

Já para as especificações do sistema do dispensador, dado pela massa dos pratos, considerando o caso crítico de 20 pratos, sabendo que cada prato pesa aproximadamente 820 gramas, então a massa total é de 16,4 quilos e o coeficiente de atrito viscoso dado entre o êmbolo e as laterais do cilindro é estimado, pela característica construtiva dos materiais, em aproximadamente, 30 Ns/cm. Dessa forma, para que o sistema fique estável, foi escolhido uma mola de constante 30 N/cm. A função de transferência desse sistema é apresentado pela Equação (3.52).

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0,0625}{s^2 + 1,875s + 1,875} \quad (3.52)$$

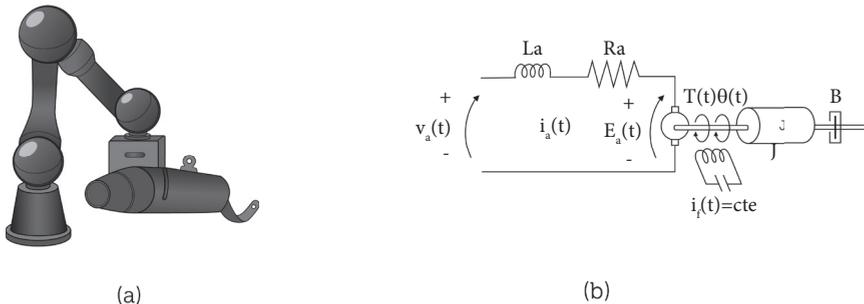
## Avançando na prática

### Braço robótico

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa de tecnologia está desenvolvendo um braço robótico para auxiliar uma linha de produção de montagem de motocicletas. Você, engenheiro responsável pelo desenvolvimento dessa parte do projeto, tem a tarefa de analisar o deslocamento e velocidade angular do braço robótico, acionado por um motor CC, quando este é submetido a um torque de carga variável. Dessa forma, implemente, por meio do software MatLab®, um programa para avaliação do comportamento do deslocamento angular desse sistema, Figura 3.30 (a).

Figura 3.29 | (a) braço robótico (b) modelagem do braço robótico



Fonte: (a) adaptado de: <[http://www.robotica.pt/?p=2270&doing\\_wp\\_cron=1480907412.8459830284118652343750](http://www.robotica.pt/?p=2270&doing_wp_cron=1480907412.8459830284118652343750)>. Acesso em: 2 dez. 2017. (b) elaborada pela autora.

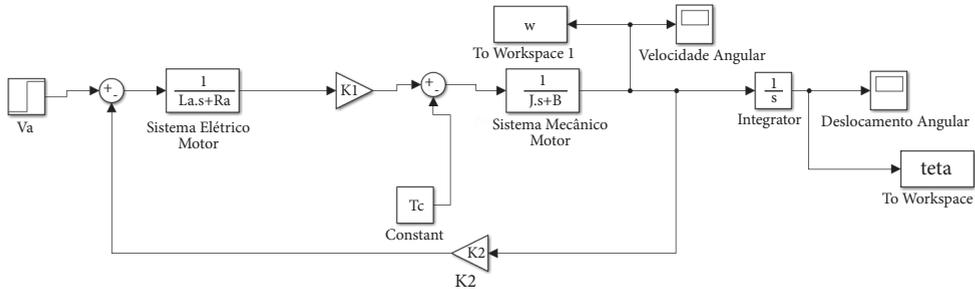
#### Resolução da situação-problema

Ao analisarmos a Figura 3.29 (b), notamos que este braço robótico, de momento de inércia  $J$  e amortecimento  $B$ , acionado por um motor CC, tem equações de movimento dadas pelas Equações (3.38), (3.39) e (3.40). Já a equação do torque do motor, Equação (3.41), é reescrita como Equação (3.53), para adição do torque da carga  $T_c$ .

$$T(s) = T_c(s) + s^2\theta(s) + Bs\theta(s) \quad (3.53)$$

Dessa forma, de posse das equações do movimento do estudo em análise, podemos construir um programa como auxílio do Simulink®, como mostra a Figura 3.30.

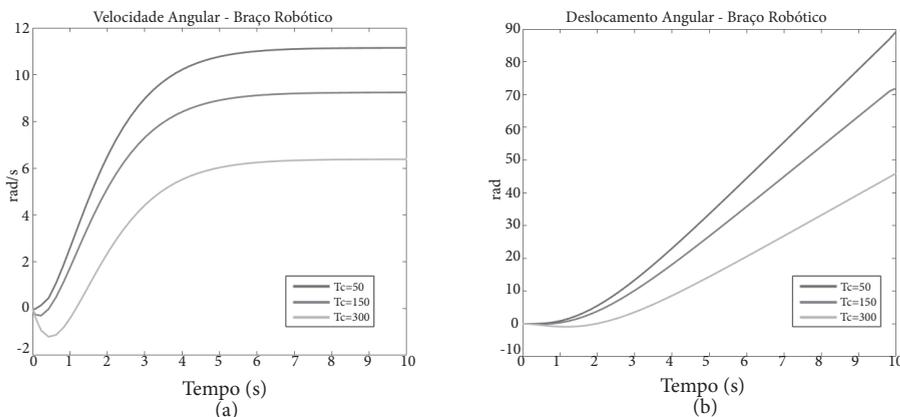
Figura 3.30 | Simulação via Simulink® - braço robótico



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, sabendo que a tensão de entrada do motor é de 127 V, que o indutor e o resistor da armadura equivalem, respectivamente, a 1 H e 1  $\Omega$ , que as constantes  $K1 = 5$  e  $K2 = 0,5$ , que o momento de inércia e o coeficiente de amortecedor viscoso do braço robótico valem, respectivamente, 50 Kg.m<sup>2</sup> e 50 N.m/s/rad e que o torque de carga varia de acordo com o peso da peça a ser retirado, podemos então simular os resultados para três diferentes peças, cujo valor de  $T_c$  vale 50, 150 e 300 N. As respostas de velocidade e deslocamento angular podem ser analisadas, respectivamente, nas Figura 3.31 (a) e (b).

Figura 3.31 | Resposta (a) velocidade angular (b) deslocamento angular - sistema braço robótico



Fonte: elaborada pela autora.

Ao analisarmos as respostas apresentadas na Figura 3.31, inferimos que quanto maior o torque de entrada, mais lento fica o movimento do braço robótico, visto que a velocidade para peça mais leve, ou seja, para o torque de carga igual a 50 N é de, aproximadamente, 11 rad/s e para o torque de 300 N.m é de, aproximadamente, 6 rad/s.

Este comportamento é ratificado ao verificarmos que a resposta do deslocamento angular, a curva em azul, ou seja  $T_c = 50$  N.m, tem uma inclinação maior, isto é, atinge mais rapidamente um determinado deslocamento, quando comparado com os outros dois valores de torque. Notamos ainda, na resposta da Figura 3.31, que a resposta para  $T_c = 300$  N.m apresenta uma velocidade e deslocamento angular iniciais negativos, representando que no começo do movimento o braço do motor rapidamente gira no sentido contrário até, aproximadamente, 1,6 s, quando o sistema retoma o movimento com velocidade e deslocamento angular positivos.

Esta análise foi desenvolvida em Simulink®, como apresentado pela Figura 3.30, juntamente com a programação em linhas de comando do MatLab®, com as linhas de código a seguir:

```
%Sistema Braço Robótico acionado Motor CC
Tc=50; sim('braco');t=tout; teta50=teta; w50=w;
Tc=150; sim('braco');t=tout; teta150=teta; w150=w;
Tc=300; sim('braco');t=tout; teta300=teta; w300=w;
%Velocidade Angular
figure
plot(t,w50(1:60));hold on; plot(t,w150);plot(t,w300);
legend('Tc=50','Tc=150','Tc=300');xlabel('Tempo(s));ylabel('rad/s')
title('Velocidade Angular - Braço Robótico')
%Deslocamento Angular
figure
plot(t,teta50(1:60));hold on; plot(t,teta150);plot(t,teta300)
legend('Tc=50','Tc=150','Tc=300');xlabel('Tempo(s));ylabel('rad')
title('Deslocamento Angular - Braço Robótico')
```

### Faça valer a pena

**1.** O MatLab® é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo utilizado em modelagem de sistemas para validação e testes dos modelos obtidos. Sendo assim, a programação dos modelos no MatLab® pode ser feita usando o comando de instrução (*script*) ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink®.

Em se tratando da linguagem por meio de instrução, o comando **title**('titulo\_do\_gráfico') permite que:

- O usuário insira uma legenda ao gráfico.
- O usuário insira um título ao gráfico.
- O usuário modifique o texto do eixo x.

- d) O usuário modifique o texto do eixo y.
- e) O usuário modifique a cor da curva.

**2.** Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias, ou seja, a validação é importante por assegurar que os modelos estimados contêm as informações que queremos reproduzir em nosso projeto.

Em programação via diagramação gráfica de blocos, utilizando o Simulink®, o bloco de comando **Mux** permite que:

- a) O usuário altere a escala gráfico por meio do bloco de comando *Scope*.
- b) O usuário altere a cor da curva do gráfico por meio do bloco de comando *Scope*.
- c) Duas curvas sejam plotadas no mesmo gráfico por meio do bloco de comando *Scope*.
- d) Apenas uma curva seja plotada no gráfico por meio do bloco de comando *Scope*.
- e) Duas curvas sejam plotadas no mesmo gráfico, independentemente do uso do bloco de comando *Scope*.

**3.** Se estivermos interessados em comparar a resposta de dois sistemas diferentes, podemos, para uma melhor visualização dos resultados, imprimir a resposta em uma mesma janela. Para isso, o comando do MatLab® a ser utilizado é o \_\_\_\_\_. Este comando congela a tela do gráfico atual, de forma que gráficos subsequentes são superpostos sobre o atual. Para habilitar o uso desse comando, basta utilizar \_\_\_\_\_ e, para desabilitá-lo, permitindo a criação de novas figuras para cada gráfico, basta utilizar \_\_\_\_\_.

Indique a alternativa que melhor preenche a lacuna trazida pelo texto:

- a) *Hold, hold off e hold on.*
- b) *Hold off, hold on e hold.*
- c) *Hold on, hold e hold off.*
- d) *Hold, hold on e hold off.*
- e) *Hold on, hold off e hold.*

# Referências

CLOSE, Charles M.; FREDERICK, Dean K.; NEWELL, Jonathan C. **Modeling and analysis of dynamic systems**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002. 593 p.

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

GARCIA, Claudio. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

MATHWORKS. **To workspace**. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/simulink/slref/toworkspace.html?requestedDomain=www.mathworks.com>>. Acesso em: 30 nov. 2016.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

PINHEIRO, José Renes. **Função de transferência de um motor CC**. Disponível em: <<http://coral.ufsm.br/gepoc/renes/Templates/arquivos/elc1031/ELC1031.L2.5.pdf>>. Acesso em: 6 nov. 2016.w

ROSA, Suelia de Siqueira Rodrigues Fleury et al. Modelagem matemática da tíbia humana usando Bond Graph. **Rev. Bras. Eng. Bioméd.**, Rio de Janeiro, v. 29, n. 4, p. 329-342, dez. 2013. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1517-31512013000400003&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-31512013000400003&lng=en&nrm=iso)>. Acesso em: 7 nov. 2016.



## Modelagem de sistemas fluídicos e térmicos

### Convite ao estudo

Olá, bem-vindo à nossa última etapa do estudo de modelagem de sistemas dinâmicos. Nesta unidade, faremos um estudo da modelagem matemática aplicada aos sistemas fluídicos e térmicos. Segundo Ogata (2010), por ser versátil para transmissão de sinais e força, os fluidos têm grande relevância e aplicação na indústria, principalmente em processos químicos, alimentícios, sistemas automáticos de controle, atuadores etc.

Essencialmente, líquidos e gases diferem-se por suas incompressibilidades relativas: um líquido é considerado praticamente incompressível, já o gás deforma-se facilmente com a mudança de pressão. Além disso, um líquido pode ter uma superfície livre, enquanto que um gás se expande de modo a ocupar totalmente o seu reservatório. Neste material, vamos utilizar o termo sistema hidráulico para descrever sistemas que utilizam líquido como fluido de trabalho. Estes sistemas serão focados na descrição da dinâmica do nível dos líquidos e utilizaremos sistemas pneumáticos para sistemas que utilizam gás como fluido de trabalho.

Vale salientar que uma análise exata de um sistema hidráulico usualmente não é viável, por causa de sua natureza distribuída (propriedades distribuídas ao longo da massa) e sua característica não linear (o que proporcionaria modelos não lineares). Todavia, na maioria dos casos deste material, a operação desse tipo de sistema ocorrerá próximo a um ponto de operação, fazendo que tenhamos modelos lineares descritos pela função de transferência (CLOSE; FREDERICK; NEWELL, 2002).

Inicialmente, na primeira seção desta unidade, abordaremos os sistemas de nível de líquido, que são utilizados com regularidade nos processos de controle. Em seguida, vamos aprender um pouco mais sobre os sistemas pneumáticos, visto que são muito utilizados na automação

dos equipamentos de produção, como em controladores automáticos. E, por fim, na última seção, vamos tratar de sistemas térmicos simples, dada sua importância nos processos industriais.

Nesse contexto, uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois caso não esteja na temperatura ideal, o produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar que ele está funcionando corretamente.

Preparado para mais esse projeto?

Bons estudos e ótimo trabalho.

# Seção 4.1

## Modelagem matemática de sistemas hidráulicos

### Diálogo aberto

Uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois se não estiver na temperatura ideal, este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar que ele está funcionando corretamente.

Nesta seção, aplicaremos os conhecimentos anteriormente adquiridos de modelagem matemática para obtenção do modelo que descreve a dinâmica dos sistemas fluidicos. Segundo Campos e Teixeira (2006), um dos controles mais importantes nas unidades industriais é o de nível, pois este é responsável por manter o nível de um tanque constante. Sendo assim, os sistemas fluidicos têm destaque em diversos ramos da atividade industrial, como na área petroquímica, nuclear, na celulose etc.

Na primeira unidade, vimos que uma das fases necessárias ao processo de modelagem matemática é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas. Dessa forma, entenderemos, aqui, como a lei de conservação da massa nos ajudará a encontrar a equação diferencial e, conseqüentemente, a função de transferência que representa o sistema. Neste material, focaremos a modelagem de sistemas com um tanque e com dois tanques interconectados, visto que, ao entendermos a modelagem da dinâmica desses processos, estaremos aptos a estender à descrição da dinâmica de sistemas mais complexos. Ao final desta seção, aprenderemos uma forma mais instrutiva de testar e validar o sistema via diagrama de blocos, com auxílio do Simulink®.

E então, preparado para mais essa área de conhecimento?

Bons estudos e um ótimo trabalho.

## Não pode faltar

Para a obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento dos sistemas, é fundamental a utilização de uma lei básica que rege o comportamento físico do sistema. Por exemplo, para os sistemas elétricos temos as Leis de Kirchhoff, como vimos na Unidade 2, já para os sistemas mecânicos, temos as leis de Newton, como visto na Unidade 3. Para sistemas hidráulicos, a lei fundamental para a obtenção da dinâmica dos sistemas é a lei de conservação da massa.

Segundo Felício (2010), a lei de conservação da massa é também conhecida como Balanço de Massa ou Equação da Continuidade, enunciada usando o conceito de volume de controle, que é uma região do espaço estabelecida por uma fronteira imaginária, chamada de superfície de controle, com forma e tamanho arbitrários. Assim, a lei de conservação da massa nos diz que, em um intervalo de tempo, a massa que entra no volume de controle menos a massa que sai é igual à massa que fica acumulada no volume de controle. Matematicamente, em termos de massa por unidade de tempo, podemos escrever essa lei como mostra a Equação (4.1).

$$\sum_{j=1}^n (\dot{m}_i)_j - \sum_{r=1}^k (\dot{m}_o)_r = \frac{dm_s}{dt} \quad (4.1)$$

Onde  $\dot{m}_i$  é a variação da massa no tempo que entra no volume de controle;  $\dot{m}_o$  é a variação da massa no tempo que sai do volume de controle; e  $\frac{dm_s}{dt}$  é a variação, em função do tempo, da massa acumulada no volume de controle.

Em sistemas hidráulicos, em que consideramos a hipótese de que a variação da massa específica é desprezível (fluido incompressível), a conservação da massa pode ser descrita em função do volume, como a Equação (4.2).

$$\sum_{j=1}^n (Q_i)_j - \sum_{r=1}^k (Q_o)_r = \frac{dV_s}{dt} \quad (4.2)$$

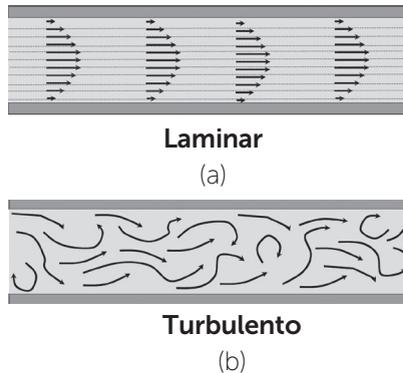
Onde  $Q_i$  é a vazão volumétrica que entra no volume de controle;  $Q_o$  é a vazão volumétrica que sai do volume de controle; e  $\frac{dV_s}{dt}$  a variação, em função do tempo, do volume do fluido acumulado no volume de controle.

Os sistemas hidráulicos, geralmente, exibem dois tipos de propriedades que permitem a descrição de suas características dinâmicas, por meio de modelos matemáticos, de modo simples: a resistência e a capacitância.

- **Resistência hidráulica (R):**

Antes de definirmos a resistência hidráulica, é importante, na análise de sistemas que envolvem fluidos, classificar o regime de fluxo em laminar e turbulento. Um escoamento ocorre em regime laminar, Figura 4.1 (a), quando tem velocidades baixas e é caracterizado por movimento do fluido em lâminas ou camadas, com uma camada escorregando sobre a adjacente, no qual qualquer tendência de turbulência é amortecida por forças viscosas. Já o regime turbulento, Figura 4.1 (b), ocorre quando o escoamento tem velocidades altas e as partículas do líquido apresentam movimentos aleatórios em relação ao movimento global de fluido, que tem uma direção predominante. Nas condições de regime permanente, o tipo de escoamento é classificado quanto ao número de Reynolds, que é a relação entre as forças de inércia e viscosas. Se este parâmetro estiver entre 3.000 e 4.000 o escoamento será turbulento, mas se este valor for inferior a 2.000 este será considerado fluxo laminar (OGATA, 2010; FELÍCIO, 2010).

Figura 4.1 | Tipo de escoamento de fluxo



Fonte: adaptada de <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion\\_laminar\\_a\\_turbulento.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion_laminar_a_turbulento.png)>. Acesso em: 19 jan. 2017.

Suponha, agora, o fluxo hidráulico dado por meio de uma tubulação curta, que conecta dois reservatórios. A resistência (R), ou restrição, ao fluxo de líquido nessa tubulação é definida como a variação na diferença de nível (ou seja, a diferença entre o nível dos líquidos nos dois reservatórios) necessária para causar a variação unitária na vazão, Equação (4.3) (OGATA,2010).

Ou seja:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de nível (m)}}{\text{variação na vazão em volume (m}^3\text{/s)}} = \frac{dH}{dQ} \quad (4.3)$$

Experimentalmente, a relação entre a vazão e a altura em regime permanente, para os fluxos laminares, é dada pela Equação (4.4).

$$Q = KH \quad (4.4)$$

Onde  $Q$  é a vazão em volume em regime permanente, dada em  $m^3/s$ ;  $K$  é o coeficiente que depende das características da tubulação, dada em  $m^2/s$ ; e  $H$  é a altura do nível em regime permanente.

Assim, para fluxos laminares, a resistência hidráulica é dada pela Equação (4.5).

$$R_l = \frac{H}{Q} \quad (4.5)$$

Onde  $R_l$  é a resistência hidráulica para fluxos laminares;  $H$  é a altura do nível em regime permanente, dada em metros; e  $Q$  é a vazão em volume em regime permanente, dada em  $m^3/s$ .

Já para os fluxos turbulentos, a vazão volumétrica em regime permanente é dada, experimentalmente, pela Equação (4.6).

$$Q = K\sqrt{H} \quad (4.6)$$

Então, a partir da relação dada pela Equação (4.6), podemos afirmar que a resistência para o fluxo turbulento ( $R_t$ ) é dada pela Equação (4.7).

$$R_t = \frac{2H}{Q} \quad (4.7)$$

Vale salientar que a resistência para o fluxo turbulento pode ser considerada constante, caso as variações da altura do nível e da vazão do líquido forem muito pequenas.



### Pesquise mais

Em muitos casos práticos, o valor do coeficiente  $K$ , na Equação (4.6), que depende do coeficiente de fluxo e da área de restrição, não é conhecido. Assim, a determinação da resistência para o fluxo turbulento é dada por meio da medição da inclinação da curva no ponto de operação, a partir do gráfico da curva que relaciona a altura do nível com a vazão de fluxo do líquido, com base em dados experimentais.

Para saber mais sobre a obtenção da resistência para o fluxo turbulento a partir dos dados experimentais, consulte:

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

- **Capacitância hidráulica (C):**

Segundo Ogata (2010), a capacitância hidráulica de um reservatório é definida como a variação na quantidade de líquido armazenado necessária para causar uma variação unitária na altura do nível de líquido, como mostra a Equação (4.8).

$$C = \frac{dV}{dH} \quad (4.8)$$

Onde  $dV$  é a variação no volume do líquido armazenado, dado em  $m^3$ ;  $dH$  é a variação na altura do nível do líquido, dado em metros; e  $C$  é a capacitância hidráulica de um reservatório, dada em  $m^2$ .

Note que a capacitância representa a área do reservatório. Portanto, se a área for constante, a capacitância também será constante, para qualquer altura do nível.



### Assimile

Os componentes físicos que formam os sistemas hidráulicos são: resistores e capacitores. E as variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: a vazão volumétrica ( $m^3/s$ ) e a altura do nível do líquido (m).

De posse desses conhecimentos, nesta seção, realizaremos as etapas do processo de modelagem matemática para representação da dinâmica dos sistemas hidráulicos com um tanque e com dois tanques.

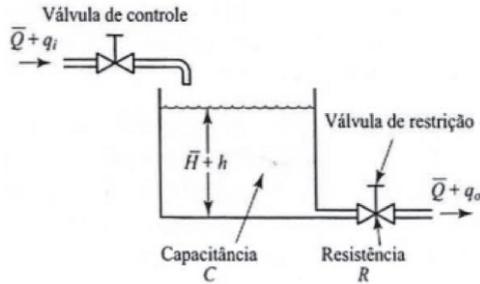
- **Modelagem de um sistema hidráulico com um tanque:**



### Exemplificando

Considerando o sistema apresentado na Figura 4.2 como um sistema linear, determine o modelo matemático, ou a função de transferência, que relaciona a altura do nível em regime permanente,  $H$ , com a vazão volumétrica de entrada em regime permanente ( $q$ ).

Figura 4.2 | Sistema hidráulico com um tanque



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 92).

Onde  $\bar{Q}$  é a vazão volumétrica em regime permanente ( $m^3/s$ );  $q_i$  é o pequeno desvio da vazão de entrada em relação ao seu valor de regime permanente ( $m^3/s$ );  $q_o$  é o pequeno desvio da vazão de saída em relação a seu valor em regime permanente ( $m^3/s$ ),  $\bar{H}$  é a altura do nível em regime permanente (m); e  $h$  é o pequeno desvio do nível a partir de seu valor em regime permanente (m).

Como realizado nas unidades anteriores, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona o fluxo de entrada com o fluxo de saída.
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da massa.
3. **Simplificações e aproximações:** para a modelagem de todos os sistemas hidráulicos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: o fluido é incompressível e tem massa específica constante; as resistências fluídicas são constantes; qualquer tanque tem seção uniforme de área constante; as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. **Equacionamento:** aplicando a lei de conservação da massa, dada pela Equação (4.2), podemos reescrevê-la como a Equação (4.9).

$$\frac{dV}{dt} = q_i(t) - q_o(t) \quad (4.9)$$

Ou ainda como a Equação (4.10).

$$dV = (q_i(t) - q_o(t)) dt \quad (4.10)$$

Podemos, assim, reescrever a equação (4.10), resultando na Equação (4.11).

$$Cdh = (q_i(t) - q_o(t)) dt \quad (4.11)$$

A partir da definição de resistência, temos a relação dada pela Equação (4.12).

$$q_o = \frac{h}{R} \quad (4.12)$$

Então, para um valor constante de R, temos que a Equação (4.12) pode ser reescrita como a Equação (4.13).

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (4.13)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace, com as condições iniciais nulas, chegamos à função de transferência que descreve a altura do nível H, em regime permanente, em relação ao valor em regime permanente da vazão de entrada ( $q_i$ ), como a Equação (4.14).

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (4.14)$$

- **Modelagem de um sistema hidráulico com dois tanques:**

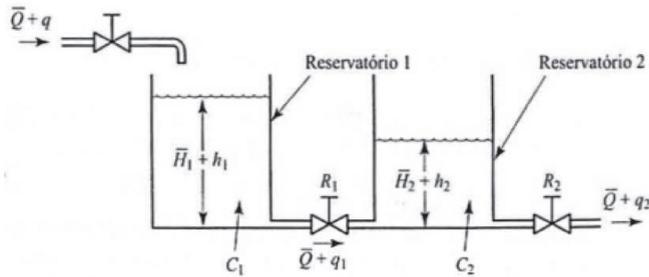
O sistema hidráulico com dois tanques, também conhecido como sistema de nível líquido com interação, é dado quando na saída de um reservatório temos outro reservatório acoplado, normalmente por meio de uma resistência hidráulica.



### Exemplificando

Considerando o sistema apresentado na Figura 4.3 como sistema linear, determine o modelo matemático, ou a função de transferência, que relaciona o fluxo regime permanente ( $q$ ) com a pequena variação de fluxo de saída do reservatório 2 ( $q_2$ ).

Figura 4.3 | Sistema hidráulico com dois tanques



Fonte: adaptada de Ogata (2010, p. 95).

Como nas unidades anteriores, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona o fluxo em regime permanente ( $q$ ) com a pequena variação do fluxo de saída do reservatório 2 ( $q_2$ ).
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da massa.
3. **Simplificações e aproximações:** as mesmas do exemplo anterior.
4. **Equacionamento:** aplicando a lei de conservação da massa ao reservatório 1, obtemos a Equação (4.15).

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q(t) - q_1(t) \quad (4.15)$$

Sabendo que o pequeno desvio da vazão de saída do reservatório 1 ( $q_1$ ) é dado pela relação estabelecida pela Equação (4.16) e que o pequeno desvio da vazão de saída do reservatório 2 ( $q_2$ ) é dado pela Equação (4.17), tem-se que:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (4.16)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (4.17)$$

Podemos reescrever a Equação (4.17) como a Equação (4.18).

$$C_1 \left( R_1 \frac{dq_1}{dt} + R_2 \frac{dq_2}{dt} \right) = q(t) - q_1(t) \quad (4.18)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (4.18), considerando as condições iniciais nulas, e isolando o  $q_1$ , obtemos a Equação (4.19).

$$Q_1(s) = \frac{Q(s) - C_1 R_1 s Q_2(s)}{C_1 R_1 s + 1} \quad (4.19)$$

Da mesma forma, aplicando a lei de conservação da massa ao reservatório 2, obtemos a Equação (4.20).

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \quad (4.20)$$

Aplicando a transformada de Laplace à Equação (4.20), considerando as condições iniciais nulas, e substituindo o valor de  $Q_1$ , dado pela Equação (4.19), obtemos a função de transferência para o sistema da Figura 4.3, dado pela Equação (4.21).

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1} \quad (4.21)$$

Vale salientar que o termo " $R_2 C_1 s$ " no denominador da Equação (4.21) exemplifica a interação entre os dois reservatórios.

O sistema dado pela Figura 4.3 caracteriza-se como um sistema hidráulico de segunda ordem, dada a função de transferência de segunda ordem, expressa em (4.21).



### Refleta

Dada a função de transferência do sistema hidráulico de primeira e segunda ordem, como apresentado nos dois itens Exemplificando anteriores, podemos criar uma analogia entre as propriedades dos sistemas hidráulicos (resistência, capacitância, fluxo de entrada e saída de

um reservatório) com os componentes físicos lineares que formam os sistemas elétricos e mecânicos. Dessa forma, como se daria a analogia eletromecânica/hidráulica?

- **Modelagem de um sistema hidráulico com MatLab®:**

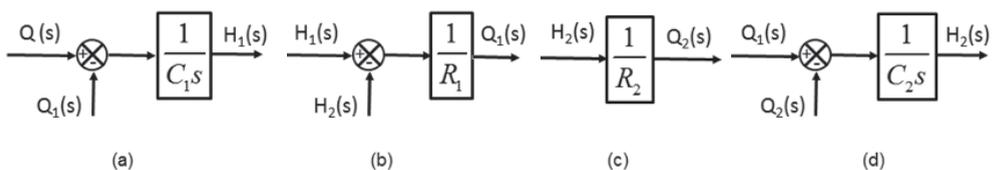
Nas unidades anteriores, vimos que podemos realizar os testes e simulações dos modelos matemáticos dos sistemas dinâmicos obtidos por meio do software MatLab®. Estes modelos podem ser simulados via linhas de código ou comando (programa em *script*) ou por meio do seu ambiente gráfico, o Simulink®, que nos permite a validação do modelo via a diagramação gráfica de blocos.

Sendo assim, uma forma mais simples de se validar o modelo matemático de sistemas complexos é representá-los pela interconexão de subsistemas mais simples, por meio do uso de diagrama de blocos.

Um subsistema dinâmico pode ser representado pelo diagrama de blocos com uma entrada, uma saída e uma função de transferência. Ao representar um sistema complexo por meio de subsistemas múltiplos, podemos interligá-los utilizando as junções de soma e ponto de ramificações. Assim, podemos, por exemplo, representar o sistema hidráulico da Figura 4.3, um sistema de nível líquido com interação, por meio de subsistemas simples de diagramas de blocos e, então, validá-los no Simulink®.

A partir das Equações (4.18), (4.19), (4.20) e (4.22), podemos obter os subsistemas simples representando-os via diagrama de blocos, como mostra a Figura 4.4 (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

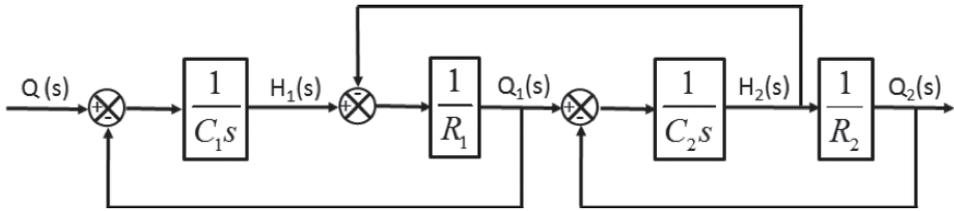
Figura 4.4 | Representação em diagrama de blocos em subsistemas do sistema hidráulico com dois tanques



Fonte: adaptada de Ogata (2010).

Conectando corretamente os sinais dos subsistemas, podemos construir um diagrama de blocos único, representativo do sistema dinâmico hidráulico com dois tanques em interação, como mostra a Figura 4.5.

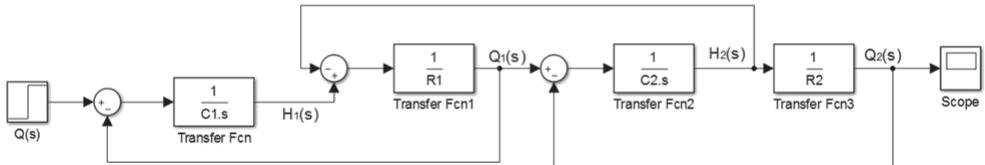
Figura 4.5 | Diagrama de blocos interconectado do sistema hidráulico com dois tanques



Fonte: adaptada de Ogata (2010).

O diagrama de blocos único, representativo do sistema dinâmico hidráulico com dois tanques em iteração, apresentado na Figura 4.5, pode ser simplificado, resultando em um diagrama de blocos representativo da Equação (4.21). Contudo, podemos utilizar a representação gráfica da Figura 4.5 para validar nosso modelo matemático em Simulink®, Figura 4.6. Para isso, basta adotarmos valores numéricos para capacitância e resistência hidráulica do sistema, conforme o projeto em questão.

Figura 4.6 | Simulação em Simulink® do sistema hidráulico com dois tanques interconectados



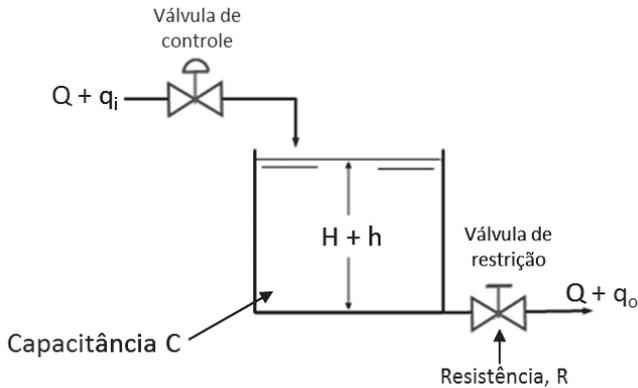
Fonte: elaborada pelo autor.

Vale ressaltar que, apenas para fim ilustrativo, para representação em Simulink® do sistema apresentado na Figura 4.6, adotamos o fluxo em regime permanente  $Q(s)$  como uma entrada degrau, mas isso dependerá das características do projeto.

## Sem medo de errar

Uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois, caso não esteja na temperatura ideal, este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar que este sistema está funcionando corretamente. Qual é a vazão do fluido ao sair do silo? Qual é a equação que rege essa parte do sistema?

Figura 4.7 | Protótipo de silo industrial



Fonte: adaptada de <<http://plantscontrol.blogspot.com.br/2012/02/ejemplo-6.html>>. Acesso em: 19 jul. 2017.

### Resolução da situação-problema

Para obtermos a vazão do fluido e a equação que rege esse sistema, será necessário obtermos a função de transferência que descreve sua dinâmica. A função é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona o fluxo de entrada com o de saída.
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da massa.
3. **Simplificações e aproximações:** para modelagem dos sistemas fluídicos, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como:
  - a. O fluido é incompressível e tem massa específica constante.
  - b. As resistências fluídicas são constantes; qualquer tanque tem seção uniforme de área constante.
  - c. As variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.
4. **Equacionamento:** aplicando a lei de conservação da massa, dada pela Equação (4.2), podemos reescrevê-la como a Equação (4.22).

$$\frac{dV}{dt} = q_i(t) - q_o(t) \quad (4.22)$$

Ou ainda como a equação (4.23).

$$dV = (q_i(t) - q_o(t)) dt \quad (4.23)$$

A partir da definição da capacitância, equação (4.8), podemos reescrever a Equação (4.23) como a Equação (4.24).

$$Cdh = (q_i(t) - q_o(t)) dt \quad (4.24)$$

Isolando  $dh$  na Equação (4.3), obtemos a Equação (4.25).

$$dh = Rdq_o \quad (4.25)$$

Então, podemos reescrever a Equação (4.24) como a Equação diferencial (4.26).

$$CRdq_o = (q_i(t) - q_o(t)) dt \quad (4.26)$$

Esta pode ser reescrita como a Equação diferencial (4.27).

$$RC \frac{dq_o}{dt} + q_o(t) = q_i(t) \quad (4.27)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace, e considerando as condições iniciais nulas, obtemos a função de transferência do sistema, Equação (4.28).

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (4.28)$$

Dessa forma, podemos notar que a vazão do fluido que deixa esse silo dependerá do comportamento da vazão de entrada do material nesse reservatório.



### Atenção

Para encontrarmos a função de transferência que rege o fluxo de saída desse sistema, é importante considerar que o sistema pode ser linearizado, ou seja, que esse tipo de escoamento é laminar.

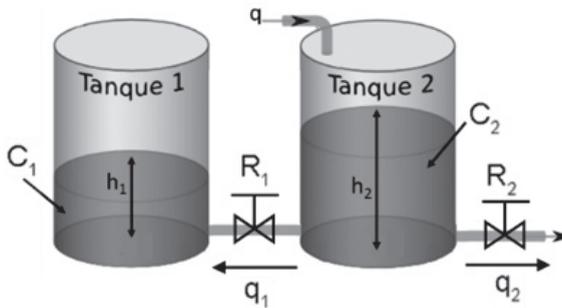
## Avançando na prática

### Controle de nível dos reservatórios de água e esgoto

#### Descrição da situação-problema

Uma empresa de tratamento de água e esgoto está preocupada com a altura do fluido nos seus tanques ou reservatórios, em uma de suas estações. Você foi contratado como engenheiro responsável para certificar que os tanques não irão transbordar, o que ocasionaria uma possível multa por causa da inundação das regiões próximas. A estação em questão é formada por dois tanques interconectados, como mostra a Figura 4.8.

Figura 4.8 | Tanques de estação de tratamento de água e esgoto



Fonte: adaptada de <<http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php>>. Acesso em: 21 jan. 2017.

O tanque 2 recebe o fluido para tratamento através de uma tubulação controlada por uma válvula de entrada com fluxo constante de entrada igual a  $100 \text{ m}^3/\text{s}$ . Além disso, esse reservatório contém uma abertura de saída que se conecta ao tanque 1. Considere as capacitâncias dos tanques 1 e 2, respectivamente, como  $30$  e  $3 \text{ m}^2$  e as resistências dos tanques 1 e 2 iguais a  $3 \text{ m}/\text{m}^3/\text{s}$ .

#### Resolução da situação-problema

Para certificar que a empresa de tratamento de água e esgoto não será multada por inundação, você deverá obter o gráfico do comportamento, em regime permanente, da altura do nível desses tanques em função do fluxo recebido. Uma das possibilidades de resolução é obter o diagrama de blocos representativo dos dois tanques, formado por subsistemas interconectados.

Sabe-se que as equações que regem o comportamento da dinâmica desses sistemas são: para o tanque 1, Equações (4.29) e (4.30), e para o tanque 2, Equações (4.31) e (4.32).

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_1 \quad (4.29)$$

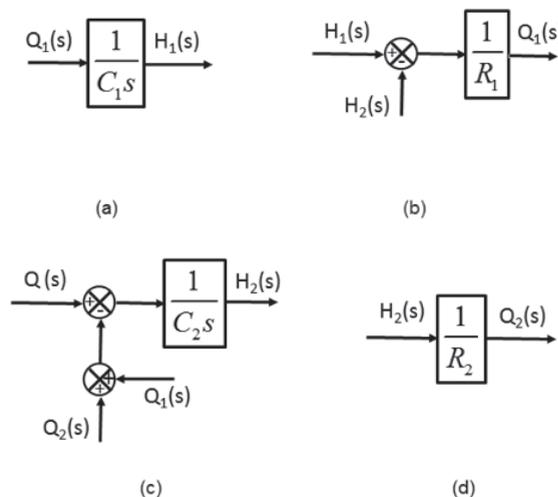
$$\frac{h_2 - h_1}{R_1} = q_1 \quad (4.30)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q - (q_1 + q_2) \quad (4.31)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (4.32)$$

A partir das Equações (4.29), (4.30), (4.31) e (4.32), podemos obter os subsistemas simples representando-os via diagrama de blocos, Figura 4.9 (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

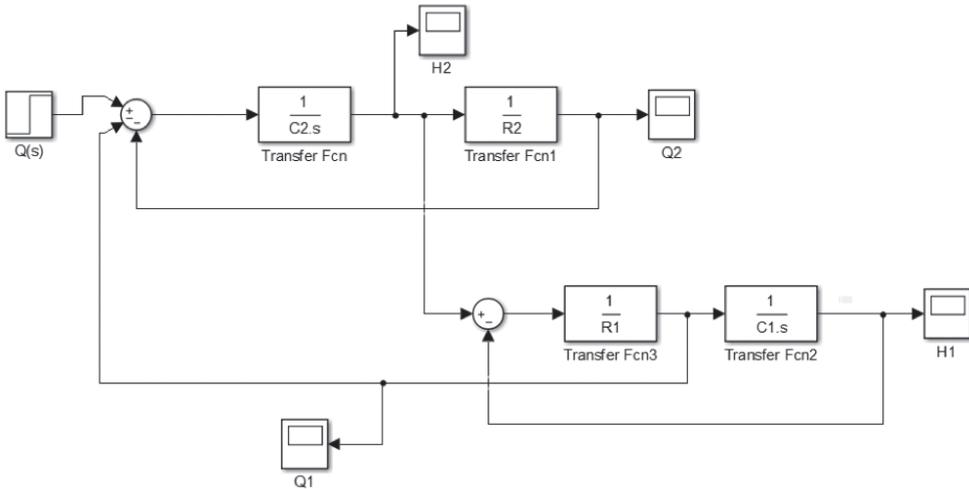
Figura 4.9 | Representação em diagrama de blocos em subsistemas do sistema fluídico - estação de tratamento de água e esgoto



Fonte: elaborada pelo autor.

Conectando corretamente os sinais dos diagramas de blocos dos subsistemas, podemos construir, no Simulink®, um diagrama de blocos único, representativo do sistema dinâmico fluídico, com dois tanques em interação, como mostra a Figura 4.10.

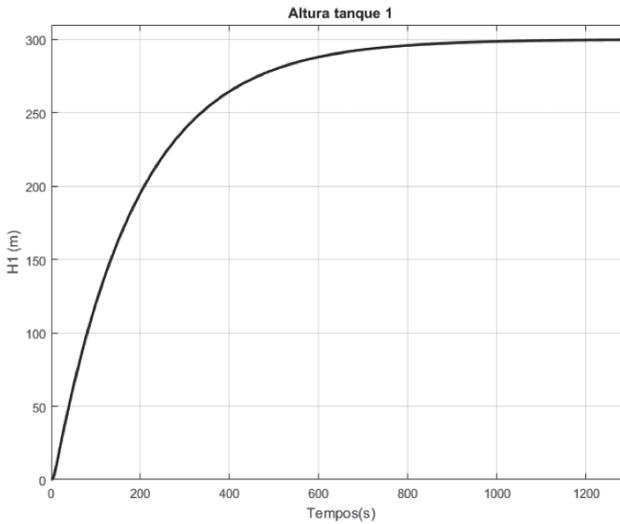
Figura 4.10 | Diagrama de blocos no Simulink®, estação de tratamento de água e esgoto



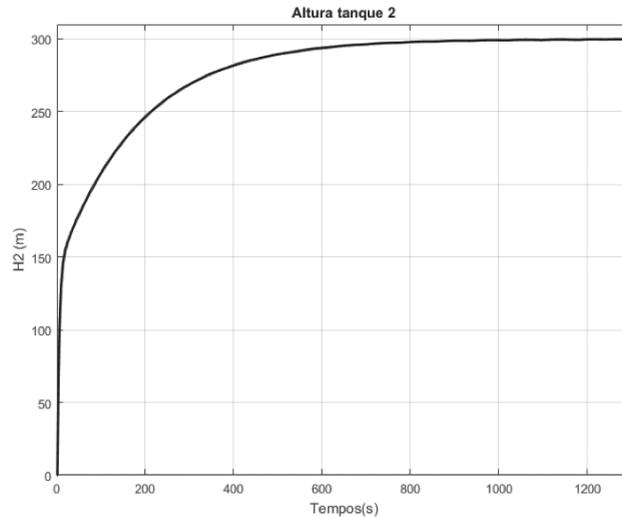
Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, após os testes com auxílio do Simulink®, o gráfico de comportamento da altura do nível do líquido, em função do fluxo constante de entrada para o tanque 1, é dado pela Figura 4.11 (a) e, para o tanque 2, pela Figura 4.11 (b).

Figura 4.11 | Comportamento altura - (a) Tanque 1; (b) Tanque 2



(a)



(b)

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, a empresa não será tarifada caso os tanques tenham altura superior a 300 metros.

### Faça valer a pena

**1.** Os sistemas hidráulicos, geralmente, exibem dois tipos de propriedades que permitem a descrição de suas características dinâmicas, por meio de modelos matemáticos, de modo simples: a resistência e a capacitância, que alteram a depender do tipo de escoamento.

A respeito da propriedade de resistência hidráulica, seguem as seguintes afirmativas:

I. É definida pela relação:  $R = \frac{\text{variação na diferença de nível (m)}}{\text{variação na vazão em volume (m}^3\text{/s)}} = \frac{dH}{dQ}$ .

II. Para fluxos laminares, a resistência hidráulica é dada por  $R = \frac{2H}{Q}$ .

III. Para fluxos turbulentos, a resistência hidráulica é dada por  $R = \frac{H}{Q}$ .

Analisando as afirmativas apresentadas no enunciado, assinale a alternativa correta:

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- e) As afirmativas I, II e III estão corretas.

**2.** Após a obtenção dos modelos dinâmicos que descrevem os sistemas elétricos, é fundamental analisarmos o comportamento da resposta desse sistema. Esta análise pode ser realizada via uso de software como o MatLab® por meio das linhas de comando, *script*, ou diagramação gráfica, o Simulink®.

A seguir, tem-se afirmativas a respeito do uso do MatLab® para validação dos sistemas hidráulicos:

I. Uma forma mais simples de validar o modelo matemático de um sistema, via Simulink®, é representá-lo pela interconexão de subsistemas mais simples.

II. Um subsistema dinâmico pode ser representado pelo diagrama de blocos com uma entrada, uma saída e uma função de transferência.

III. Ao representar um sistema complexo através de subsistemas múltiplos, podemos interligar esses subsistemas utilizando as junções de soma e ponto de ramificações.

IV. Após a obtenção do diagrama de blocos único, ou seja, após a interconexão dos subsistemas, este não pode ser simplificado como uma única função de transferência.

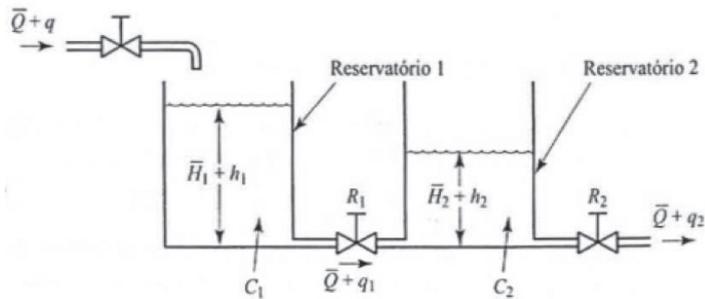
Julgando as afirmativas como verdadeiras (V) ou falsas (F), assinale a alternativa correta:

- a) F, V, V, V.
- b) V, F, V, V.
- c) V, V, F, V.
- d) V, V, V, F.
- e) V, F, F, V.

**3.** Após a obtenção dos modelos dinâmicos que descrevem os sistemas elétricos, é fundamental analisarmos o comportamento da resposta desse sistema. Esta análise pode ser realizada via uso de software como

o MatLab® por meio das linhas de comando, *script*, ou diagramação gráfica, o Simulink®.

Considere o seguinte sistema de nível com dois tanques interconectados:



As linhas de comando em script que representam o modelo matemático que descreve a relação do fluxo regime permanente ( $q$ ) em relação à pequena variação de fluxo de saída do reservatório 2 ( $q_2$ ) é dado por meio de:

a)

R1= input ('Valor da resistência do reservatório 1: ');

C1= input ('Valor da capacitância do reservatório 1: ');

R2= input ('Valor da resistência do reservatório 2: ');

C2= input ('Valor da capacitância do reservatório 2: ');

num = [1];

den = [R1\*C1\*R2\*C2 ((R1\*C1)+(R2\*C2)+(R1\*C2)) 1];

sys = tf(num,den)

b)

R1= input ('Valor da resistência do reservatório 1: ');

C1= input ('Valor da capacitância do reservatório 1: ');

R2= input ('Valor da resistência do reservatório 2: ');

C2= input ('Valor da capacitância do reservatório 2: ');

num = [1];

den = [R1\*C1\*R2\*C2 ((R1\*C1)+(R2\*C2)+(R2\*C1)) 1];

sys = tf(num,den)

c)

```
R1= input ('Valor da resistência do reservatório 1: ');
C1= input ('Valor da capacitância do reservatório 1: ');
R2= input ('Valor da resistência do reservatório 2: ');
C2= input ('Valor da capacitância do reservatório 2: ');
```

```
num = [1];
den = [R1*C1*R2*C2 ((R1*C1)+(R2*C1)) 1];
sys = tf(num,den)
```

d)

```
R1= input ('Valor da resistência do reservatório 1: ');
C1= input ('Valor da capacitância do reservatório 1: ');
R2= input ('Valor da resistência do reservatório 2: ');
C2= input ('Valor da capacitância do reservatório 2: ');
```

```
num = [1];
den = [R1*C1*R2*C2 ((R2*C2)+(R2*C1)) 1];
sys = tf(num,den)
```

e)

```
R1= input ('Valor da resistência do reservatório 1: ');
C1= input ('Valor da capacitância do reservatório 1: ');
R2= input ('Valor da resistência do reservatório 2: ');
C2= input ('Valor da capacitância do reservatório 2: ');
```

```
num = [R1*R2];
den = [R1*C1*R2*C2 ((R1*C1)+(R2*C2)+(R2*C1)) 1];
sys = tf(num,den)
```

## Seção 4.2

### Modelagem matemática de sistemas pneumáticos

#### Diálogo aberto

Nesta seção, aplicaremos os conhecimentos anteriormente adquiridos de modelagem matemática para obtenção do modelo que descreve a dinâmica dos sistemas pneumáticos. Assim como os sistemas hidráulicos, os sistemas pneumáticos são largamente utilizados na automação industrial, tendo destaque os controladores pneumáticos de baixa pressão, por serem à prova de explosão, em virtude de sua simplicidade e fácil manutenção.

Na seção anterior, vimos que a lei básica que descreve as características dinâmicas dos sistemas hidráulicos é a lei de conservação da massa. Dessa forma, entenderemos como esta lei da física, aplicada juntamente com os elementos básicos, ajudará a encontrar o modelo matemático que descreve o comportamento da dinâmica do escoamento de ar em uma tubulação e em um vaso de pressão, também conhecido como sistema de pressão. Além disso, aprenderemos também sobre a obtenção do modelo matemático do sistema pneumático para compensação pelo método de atraso de fase e, ao final da seção, veremos como testar e validar o modelo com auxílio do software MatLab®.

Nesse contexto, uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois, caso não esteja na temperatura ideal, este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar se este sistema está funcionando corretamente. Na seção anterior, você obteve o modelo matemático que rege o funcionamento da vazão de entrada e saída do silo. Nesta seção, atentaremos ao funcionamento do controlador pneumático que atuará no controle de vazão do fluido desse reservatório. O controlador está funcionando corretamente?

Bons estudos.

## Não pode faltar

Para a obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento dos sistemas, é fundamental a utilização da lei básica que rege seu comportamento físico. Na seção anterior, vimos que a lei fundamental para os sistemas hidráulicos é a de conservação da massa. Esta lei também é aplicada aos sistemas pneumáticos, ou seja, a lei de conservação da massa é utilizada em qualquer sistema que utiliza um fluido (líquido ou gases). Sendo assim, a Equação (4.1) também rege o comportamento dos sistemas pneumáticos. Nesta equação, podemos considerar que  $\frac{dm_s}{dt} = q$ , ou seja,  $q$  é a vazão mássica do gás dada em (kg/s).

Além disso, assim como os sistemas hidráulicos, os sistemas pneumáticos também apresentam as mesmas propriedades, o que permite a descrição de suas características dinâmicas, por meio de modelos matemáticos, de modo simples, utilizando a resistência e a capacitância. Todavia, nesta seção, relacionaremos seus valores com a unidade de pressão, dada as propriedades dos gases.

### • Resistência de sistemas de pressão (R):

Segundo Ogata (2010), o fluxo de gás através de uma restrição, ou resistência, é uma função da diferença de pressão. Experimentalmente, constatou-se que o valor da resistência nos sistemas pneumáticos é definido segundo a Equação (4.33).

$$R = \frac{\text{variação na diferença de pressão do gás (N/m}^2\text{)}}{\text{variação no fluxo de gás (m}^3\text{/s)}} = [\text{N.s / m}^5]$$

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \quad (4.33)$$

Onde  $d(\Delta P)$  é uma pequena variação na diferença de pressão do gás e  $dq$  é uma pequena variação no fluxo do gás.



### Pesquise mais

O cálculo do valor da resistência de sistemas de pressão pode ser demasiadamente complexo. Entretanto, este pode ser determinado com facilidade com base no cálculo da inclinação da curva em um determinado ponto de operação, a partir do gráfico que indica a diferença de pressão *versus* o fluxo de gás.

Para saber mais sobre a obtenção do valor dessa resistência com base nos dados experimentais, consulte:

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

- **Capacitância do recipiente de pressão (C):**

Este elemento relaciona a variação na quantidade de massa do gás armazenado com a variação de pressão do gás em um recipiente, Equação (4.34).

$$C = \frac{dm}{dp} \quad (4.34)$$

Segundo Ogata (2010), a capacitância do sistema de pressão depende do tipo do processo de expansão do gás. A capacitância pode, então, ser calculada pela aplicação da lei do gás perfeito. É muito comum considerar o ar como gás perfeito, ou ideal, o qual obedece à Equação (4.35).

$$\frac{PV}{T} = \text{constante} \quad (4.35)$$

Onde  $T$ ,  $P$  e  $V$  são, respectivamente, a temperatura absoluta, dada em Kelvin, a pressão absoluta, dada em Pascal, e o volume, dado em  $m^3$ . Em baixas pressões e temperaturas altas, todos os gases se comportam de acordo com a Equação (4.36):

$$PV = mRT \quad (4.36)$$

Onde  $R$  é a constante que depende do gás e  $m$  é a massa do gás.

Sabendo que o volume específico do gás é definido de acordo com a Equação (4.37),

$$v = \frac{V}{m} \quad (4.37)$$

podemos reescrever a Equação (4.36) como a Equação (4.38).

$$Pv = RT \quad (4.38)$$

Sendo assim, considerando um processo de expansão do gás como o caso mais geral de um processo politrópico, ou seja, a mudança de estado do gás está entre uma expansão isotérmica e adiabática, dado pela Equação (4.39).

$$PV^n = \text{constante} \quad (4.39)$$

A Equação (4.39) pode ser expressa em termos de volume específico ( $v$ ), Equação (4.40).

$$Pv^n = \text{constante} \quad (4.40)$$

Sabendo que o volume específico de um gás é dado como o inverso da massa específica ( $\rho$ ), podemos reescrever a Equação (4.39) como a Equação (4.41).

$$P = \text{constante} \cdot \rho^n \quad (4.41)$$

Diferenciando a Equação (4.41), obtemos a Equação (4.42).

$$dP = \text{constante} \cdot n \rho^{(n-1)} d\rho \quad (4.42)$$

Da equação (4.41), temos  $\text{constante} = P/\rho^n$ , que substituindo na Equação (4.42), chegamos à Equação (4.43).

$$dP = \frac{P}{\rho^n} n \rho^{(n-1)} d\rho = \frac{nP}{\rho} d\rho \quad (4.43)$$

A Equação (4.43) pode ser escrita como Equação (4.44).

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{nP} \quad (4.44)$$

Substituindo a Equação (4.38) na Equação (4.44), obtemos a Equação (4.45).

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{nRT} \quad (4.45)$$

A capacitância ( $C$ ) é, então, definida como Equação (4.46).

$$C = \frac{V}{nRT} \quad (4.46)$$

Se o sistema pneumático for modelado por um processo isotérmico, tem-se que  $n = 1$ , então, a capacitância do recipiente será constante.



### Assimile

Os componentes físicos que formam os sistemas pneumáticos são: resistores e capacitores pneumáticos. E as variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: o fluxo ( $m^3/s$ ) e a pressão (Pa) do gás.

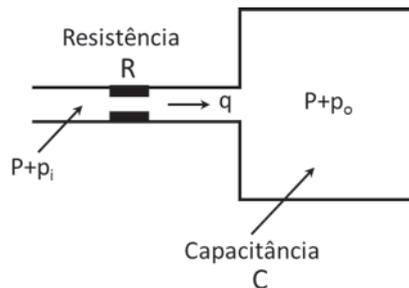
### • Modelagem matemática de circuitos pneumáticos: sistema de pressão:



### Exemplificando

Considerando o sistema linear apresentado na Figura 4.12, determine o modelo matemático, em função de transferência, que relaciona a pressão de saída ( $P_o$ ) com a pressão de entrada ( $P_i$ ).

Figura 4.12 | Diagrama esquemático do sistema de pressão



Fonte: adaptada de Ogata (2010).

Onde  $P$  é a pressão do gás no recipiente em regime permanente e  $pi$  é uma pequena variação na pressão do gás no fluxo de entrada que, a montante da resistência,  $R$ , provocará uma vazão mássica para o interior do recipiente, produzindo uma pequena variação de pressão interna,  $po$ .

Como nas unidades anteriores, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona a pressão de saída com a pressão de entrada.
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da massa.

3. **Simplificações e aproximações:** para modelagem de todos os sistemas pneumáticos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: na equação de estado, a temperatura é uniforme e constante; as existências fluidicas são constantes e lineares; qualquer tanque tem o seu valor geométrico constante (não sofre deformações com a pressão); a pressão atmosférica é constante; os efeitos de inércia do fluido são desprezíveis; e as variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear.

4. **Equacionamento:** para pequenos valores de  $p_i$  e  $p_o$ , a resistência torna-se constante, como mostra a Equação (4.47).

$$R = \frac{p_i(t) - p_o(t)}{q} \quad (4.47)$$

Sabendo que a capacitância é definida como a Equação (4.34), e que a vazão mássica é  $q = \frac{dm}{dt}$ , então, podemos escrever a relação dada pela Equação (4.48).

$$C dp_o = q dt \quad (4.48)$$

Isolando o valor de  $q$ , Equação (4.47), e substituindo na Equação (4.48), chegamos à Equação (4.49).

$$C \frac{dp_o}{dt} = \frac{p_i(t) - p_o(t)}{R} \quad (4.49)$$

A Equação (4.49) pode ser reescrita como a Equação (4.50).

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o(t) = p_i(t) \quad (4.50)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace, com as condições iniciais nulas, chegamos à função de transferência que descreve a pressão de saída ( $P_o$ ) com a pressão de entrada ( $P_i$ ) como a Equação (4.51).

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (4.51)$$

O sistema dado pela Figura 4.12 caracteriza-se como um sistema pneumático de primeira ordem, dada a função de transferência de primeira ordem, expressa em (4.51), cuja constante de tempo ( $\tau$ ) é dada pela Equação (4.52).

$$\tau = RC \quad (4.52)$$



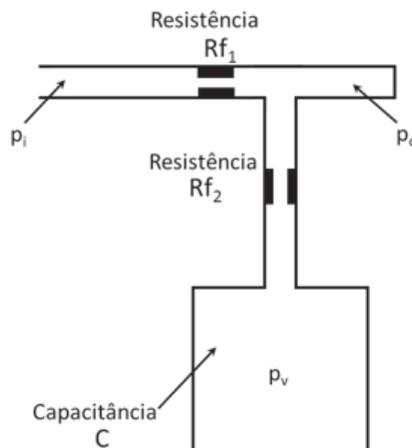
### Refleta

Dada a função de transferência do sistema pneumático de primeira ordem, Equação (4.51), podemos criar uma analogia entre as propriedades dos sistemas pneumáticos com os componentes físicos lineares que formam os sistemas elétricos e mecânicos. Dessa forma, como se daria a analogia eletropneumática?

- **Modelagem matemática de circuitos pneumáticos para compensação pelo método atraso de fase:**

Este tipo de sistema pneumático, apresentado na Figura 4.13, é um dispositivo que pode ser adicionado a uma malha de controle, caso o projetista queira implementar, de uma forma aproximada, um tipo de controle chamado Proporcional e Integral (PI). Atualmente, sabemos que os equipamentos digitais são os mais utilizados para realizar esse tipo de tarefa, contudo, os controladores analógicos podem ser utilizados em situações específicas, como em aplicações militares, locais com forte campo magnético e temperatura acima da temperatura ambiente (FELÍCIO, 2010).

Figura 4.13 | Sistema pneumático que possibilita a compensação por atraso de fase



Fonte: adaptada de Felício (2010).

A modelagem desse tipo de sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que descreve o comportamento dinâmico do compensador por atraso de fase, pneumático, analógico.
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da massa.
3. **Simplificações e aproximações:** as mesmas utilizadas no item Exemplificando.
4. **Equacionamento:** considerando que o volume sob a pressão  $P_o$  é muito pequeno, o acúmulo de massa nesse volume é desprezível. Assim, aplicando a lei de conservação da massa ao volume inicial, temos a Equação (4.53).

$$q_1(t) = q_v(t) \quad (4.53)$$

Para pequenos valores de  $p_i$ ,  $p_o$  e  $p_v$ , as resistências  $Rf_1$  e  $Rf_2$  tornam-se constantes, como mostram as Equações (4.54) e (4.55).

$$Rf_1 = \frac{p_i(t) - p_o(t)}{q_1} \quad (4.54)$$

$$Rf_2 = \frac{p_o(t) - p_v(t)}{q_v} \quad (4.55)$$

Substituindo as Equações (4.54) e (4.55) na Equação (4.53), obtemos a Equação (4.56).

$$p_i(t) = -\frac{Rf_1}{Rf_2} p_v(t) + \left( \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \right) p_o(t) \quad (4.56)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace, com as condições iniciais nulas, podemos reescrever a Equação (4.56) como a Equação (4.57).

$$P_i(s) = -\frac{Rf_1}{Rf_2} P_v(s) + \left( \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \right) P_o(s) \quad (4.57)$$

Além disso, dada a definição da capacitância, Equação (4.47), sabendo que a vazão mássica é dada por  $q = \frac{dm}{dt}$ , isolando o valor de  $q$ , Equação (4.47), e substituindo na Equação (4.48), chegamos à Equação (4.58).

$$C \frac{dp_v}{dt} = \frac{p_o(t) - p_v(t)}{Rf_2} \quad (4.58)$$

A Equação (4.58) pode ser reescrita como a Equação (4.59).

$$Rf_2 C \frac{dp_v}{dt} + p_v(t) - p_o(t) = 0 \quad (4.59)$$

Da mesma forma, aplicando a transformada de Laplace, com as condições iniciais nulas, podemos reescrever a Equação (4.59) como a Equação (4.60).

$$(Rf_2 Cs + 1) P_v(s) - P_o(s) = 0 \quad (4.60)$$

Colocando em forma matricial as Equações (4.57) e (4.60), chegamos à Equação matricial (4.61).

$$\begin{bmatrix} -\frac{Rf_1}{Rf_2} & \left( \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \right) \\ Rf_2 Cs + 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_v \\ P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Aplicando a regra de Cramer, obtemos a Equação (4.62).

$$P_o(s) = \frac{(Rf_2 Cs + 1) P_i(s)}{(Rf_2 Cs + 1) \left( \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \right) - \frac{Rf_1}{Rf_2}} \quad (4.62)$$

A Equação (4.62) pode ser reescrita como a função de transferência dada pela Equação (4.63).

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{Rf_2 Cs + 1}{(Rf_2 Cs) \left( \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \right) + 1} \quad (4.63)$$

Podemos, então, notar que a Equação (4.63) representa a função de transferência de um compensador por atraso de fase, em que o parâmetro  $\tau$  é dado pela Equação (4.64) e o parâmetro  $\alpha$  é dado pela Equação (4.65).

$$\tau = Rf_2 C \quad (4.64)$$

$$\alpha = \frac{Rf_1}{Rf_2} + 1 \quad (4.65)$$

- **Modelagem matemática de circuitos pneumáticos com uso do MatLab®:**

Nas unidades anteriores, vimos que podemos realizar os testes e simulações dos modelos matemáticos dos sistemas dinâmicos obtidos pelo software MatLab®. Aprendemos que o MatLab® pode ser programado via linhas de código (ou comando de instrução (*script*)) ou via diagramação gráfica de blocos, o Simulink®. Algumas vezes, a depender da complexidade do sistema, podemos, a partir de um modelo construído em Simulink®, simular este modelo em um programa linhas de código. Para isso, é necessário usarmos o comando de instrução **sim('nome\_do\_programa\_simulink')** no MatLab®

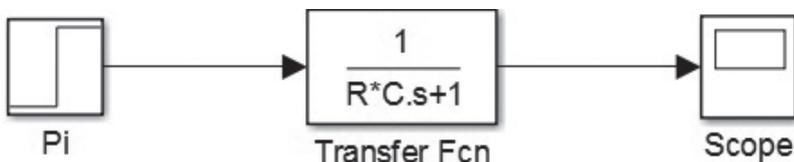


### Exemplificando

Dado o sistema do controlador em atraso de fase da Figura 4.12, utilizando o comando **sim(' ')** do MatLab®, obtenha a resposta do sistema a uma entrada degrau unitário, dado os valores dos parâmetros  $R = 1$  e  $C = 1$ . Em seguida, dobre o valor dos parâmetros e compare o resultado.

Inicialmente, devemos construir o diagrama de blocos do sistema, como mostra a Figura 4.14.

Figura 4.14 | Diagrama de blocos do sistema pneumático de primeira ordem



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, salvamos o esquemático da Figura 4.14 com nome de *sis\_pneu\_ordem1*. Assim, podemos então implementar as seguintes linhas de código para o teste do modelo:

```
R=1;
for C=1:2
    Pi = 1;
```

```

sim ('sis_pneu_ordem1')
plot (tout,Po)

hold on

R=R+1;

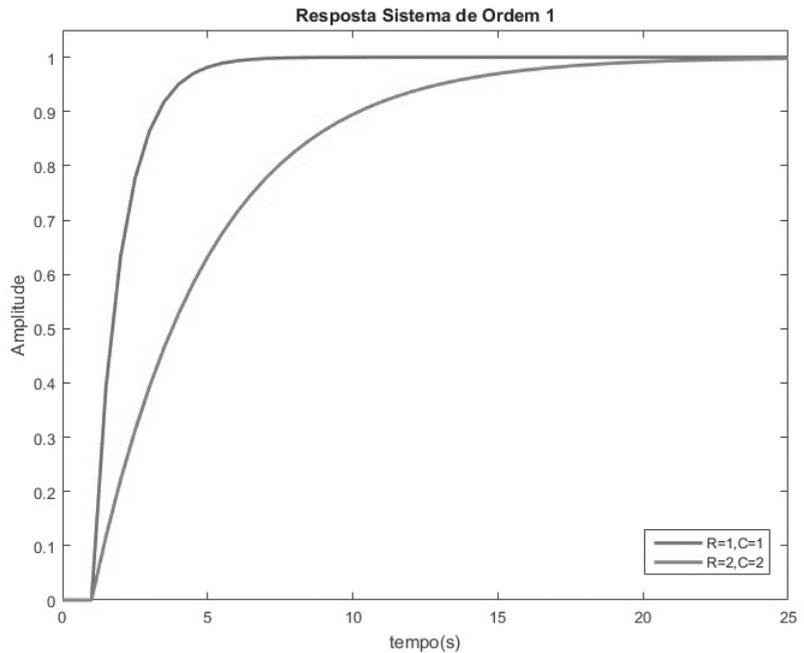
end

xlabel ('tempo(s)')
ylabel ('Amplitude')
title ('Resposta Sistema de Ordem 1')
legend ('R1=1,C1=1','R1=2,C1=2')

```

A resposta obtida para essa simulação é dada pela Figura 4.15. Nesta figura, podemos observar que ao dobrar os valores dos parâmetros, R e C, aumentamos o tempo de assentamento do sistema, como esperado.

Figura 4.15 | Resposta do sistema pneumático de primeira ordem ao degrau unitário



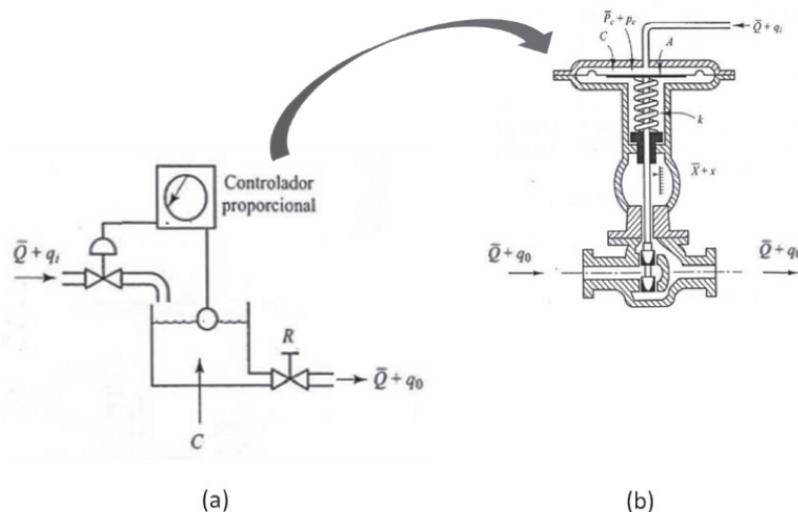
Fonte: elaborada pelo autor.

Desse modo, a simulação do modelo matemático em Simulink® sendo simulado em linhas de código é muito útil para sistemas grandes ou complexos, dada a quantidade de parâmetros (ou variáveis) que compõem esse sistema e que precisam ser alterados a cada teste. Na seção anterior, vimos que podemos testar e validar nossos sistemas maiores a partir de subsistemas em diagrama de blocos. Logo, para não alterarmos cada valor do parâmetro do diagrama de bloco a cada teste, podemos, assim, construir um diagrama de bloco único e, então, simularmos em linhas de código a alteração dos valores dessas variáveis.

### Sem medo de errar

Uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois caso não esteja na temperatura ideal este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar que este sistema está funcionando corretamente. Na seção anterior, você obteve o modelo matemático que rege o funcionamento da vazão de entrada e saída do silo. Nesta seção, atentaremos ao funcionamento do controlador pneumático que atuará no controle de vazão do fluido desse reservatório. O controlador está funcionando corretamente?

Figura 4.16 | (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) Esquemático de uma válvula atuadora pneumática



Fonte: adaptado de Ogata (2010).

## Resolução da situação-problema

Considere que o controle de vazão do líquido seja dado por um controlador pneumático proporcional, como o sistema de nível da Figura 4.16 (a). Uma das características do controle pneumático é que grande parte emprega válvulas atuadoras.



### Atenção

Na prática, as válvulas atuadoras pneumáticas têm características que podem não ser lineares. Todavia, consideraremos pequenas variações das variáveis e linearizaremos a dinâmica da válvula atuadora pneumática.

Sendo assim, a partir do esquemático da Figura 4.16 (b), considere que  $q_i$  é a diferença da variação do fluxo na válvula atuadora pneumática, com o valor de fluxo desejado (ou *setpoint*), e que  $x$  seja o deslocamento dessa válvula. Assim, podemos relacionar este fluxo com o deslocamento por meio da Equação (4.66).

$$\frac{X(s)}{Q_i} = k_1 \quad (4.66)$$

O deslocamento é inversamente proporcional ao fluxo do líquido de entrada do sistema de nível, ou seja, quanto maior o deslocamento da válvula pneumática ( $x$ ), menor a passagem de fluxo do líquido ( $q_i$ ). Assim, podemos relacionar o fluxo do líquido (ou nível) de entrada com a posição da válvula pneumática segundo a Equação (4.67).

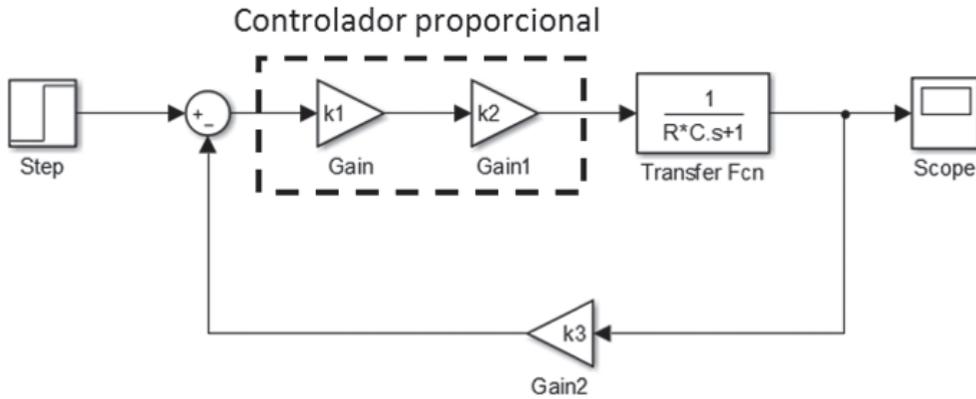
$$\frac{Q_{iL}(s)}{X(s)} = \frac{1}{k} = k_2 \quad (4.67)$$

Já obtivemos, na seção anterior, a função de transferência que relaciona os fluxos de entrada e saída do reservatório, Equação (4.28). Assim, sabendo que o fluxo de saída do líquido do reservatório pode ser relacionado com o fluxo de entrada da válvula pneumática por meio de uma constante, como dado na Equação (4.68).

$$\frac{Q_i(s)}{Q_o(s)} = k_3 \quad (4.68)$$

Podemos, então, montar o digrama de blocos esquemático desse sistema, como mostra a Figura 4.17.

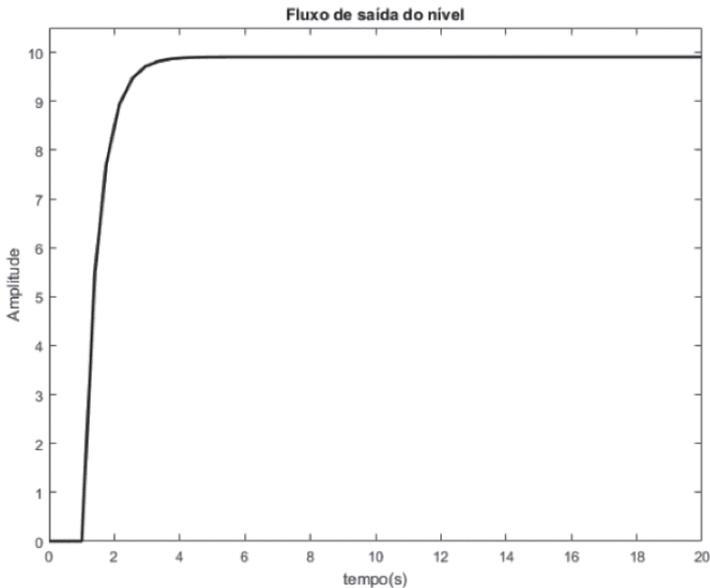
Figura 4.17 | Diagrama de blocos do sistema de controle pneumático proporcional de nível



Fonte: elaborada pelo autor.

Dadas as propriedades do reservatório como  $R = 5$  e  $C = 10$ , e considerando que a entrada é uma função degrau, podemos considerar que o controlador proporcional pneumático estará funcionando corretamente se os valores dos ganhos do sistema forem respectivamente  $k_1 = k_2 = 10$  e  $k_3 = 1$ , como pode ser verificado pelo gráfico de resposta do sistema, dado pela Figura 4.18.

Figura 4.18 | Resposta do sistema de controle de nível



Fonte: elaborada pelo autor.

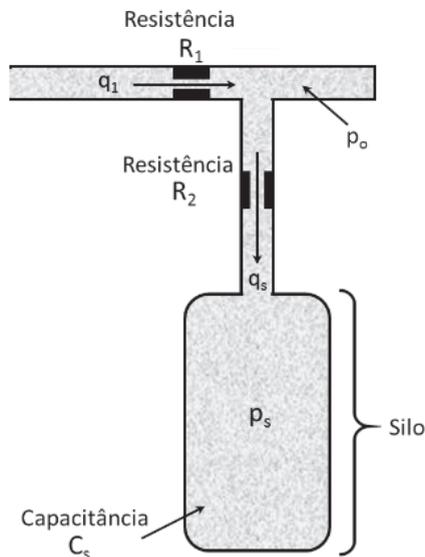
## Avançando na prática

### Controle de pressão na indústria química

#### Descrição da situação-problema

Uma indústria química está em expansão e precisará projetar um novo silo de uma das suas linhas de produção que possui alta temperatura. Você é o engenheiro responsável pela ampliação dessa parte da nova linha de produção e está preocupado com a segurança dos trabalhadores, então resolveu conferir como a pressão dentro do silo se comportará ao longo do funcionamento desse sistema. Sabendo que este tem seu funcionamento como ilustrado pela Figura 4.19, obtenha, para análise, a relação da pressão de saída com a pressão de entrada dessa nova linha de produção.

Figura 4.19 | Esquemático do novo silo da linha de produção de uma indústria química



Fonte: elaborada pelo autor.

#### Resolução da situação-problema

Se analisarmos o esquemático da Figura 4.19, percebemos que este se trata de um sistema pneumático para compensação pelo método de atraso de fase, visto que se trata de uma linha com alta temperatura. Por se tratar de um sistema desse tipo, podemos afirmar que a equação matricial que rege o funcionamento dinâmico desse sistema é dada pela Equação (4.60), onde  $p_v$  do sistema anterior, é o  $p_s$  deste sistema. Ao aplicarmos a Regra de Cramer, considerando a pressão desejada como  $p_s$ , chegamos à Equação (4.69).

$$P_s(s) = \frac{-1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - \left[\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)(R_2Cs + 1)\right]} P_i(s) \quad (4.69)$$

Após algumas simplificações algébricas, podemos reescrever a Equação (4.69), como a função de transferência dada pela Equação (4.70).

$$\frac{P_s(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} \quad (4.70)$$

### Faça valer a pena

**1.** A obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema é o primeiro passo para análise dos problemas em sistemas dinâmicos. Na Unidade 1, vimos que uma das etapas para obtenção do modelo matemático é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas.

A respeito de modelagem matemática de sistemas pneumáticos, podemos afirmar:

I. É baseada na lei de conservação da massa.

II. Assim como os sistemas hidráulicos, as propriedades básicas que compõem esse tipo de sistema são: a resistência e a capacitância.

III. Para sistemas politrópicos, a capacitância pode ser dada por  $C = \frac{V}{nRT}$ , ou seja, a mudança de estado do gás está entre uma expansão isotérmica e adiabática.

Analisando as afirmativas, assinale a alternativa correta:

- Apenas a afirmativa I está correta.
- Apenas a afirmativa II está correta.
- Apenas a afirmativa III está correta.
- Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- As afirmativas I, II e III estão corretas.

**2.** Assim como os sistemas hidráulicos, os sistemas pneumáticos também apresentam as mesmas propriedades, que permitem a descrição de suas características dinâmicas, através de modelos matemáticos, de modo simples: a resistência e a capacitância.

A seguir, têm-se as afirmativas a respeito dos sistemas pneumáticos:

I. Constituem os controladores analógicos que podem ser utilizados em situações específicas, como em aplicações militares, locais com forte campo magnético e temperatura acima da temperatura ambiente.

II. Os controladores pneumáticos por atraso de fase têm sua dinâmica descrita por uma equação diferencial de ordem dois.

III. A função de transferência dos controladores pneumáticos por atraso de fase pode ser descrita em função de duas capacitâncias e uma restrição, ou resistência, utilizada nos reservatórios dos gases.

Analisando as afirmativas, assinale a alternativa correta:

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas a afirmativa III está correta.
- d) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- e) As afirmativas I, II e III estão corretas.

**3.** Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias. Os testes e validações podem ser realizados via software como o MatLab®, por linhas de código *script* ou diagramação de blocos utilizando o Simulink®.

Indique qual alternativa representa o sistema pneumático, dado o programa implementado, utilizando a linguagem de programação de comando de instrução (*script*) do MatLab®, considerando as seguintes linhas de código:

```
R=input('Entre com valor de R: ')

```

```
C=input('Entre com valor de C: ')

```

```
num = [1];

```

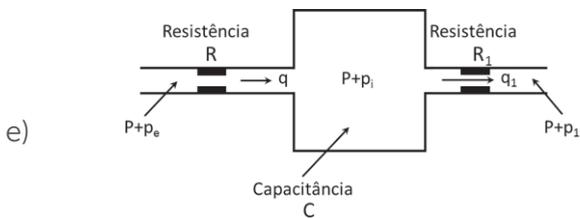
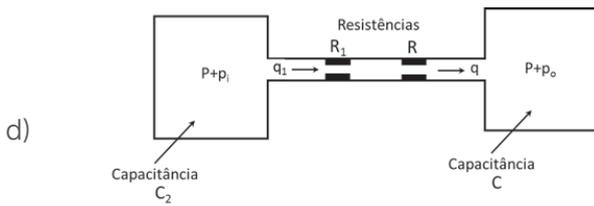
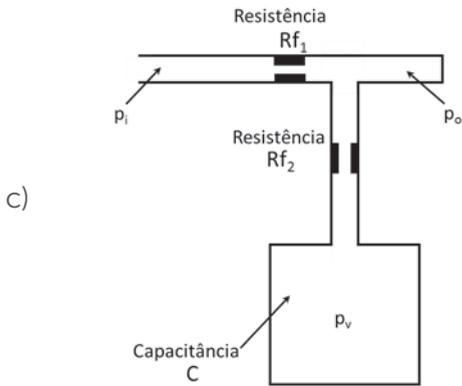
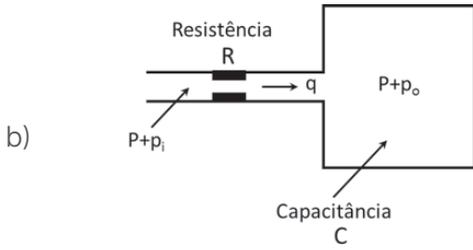
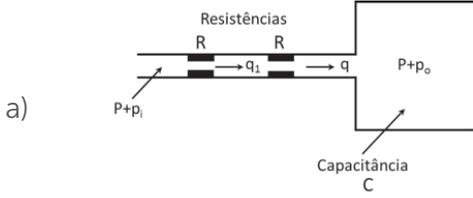
```
den = [R*C 1];

```

```
sys = tf(num,den)

```

Em todos os casos, considere a pressão interna como a saída do sistema e a pressão de entrada como entrada do sistema:



## Seção 4.3

### Modelagem matemática de sistemas térmicos

#### Diálogo aberto

Caro aluno, nesta seção, aplicaremos os conhecimentos adquiridos de modelagem matemática para obtenção do modelo que descreve a dinâmica dos sistemas térmicos. Estes são sistemas em que estão envolvidos o armazenamento e o fluxo de calor por condução, convecção ou radiação. Como exemplo de sistemas térmicos, temos o termômetro, o refrigerador doméstico, o sistema de resfriamento do motor de um automóvel, o condicionador de ar, entre outros.

Sabemos que uma das fases necessárias ao processo de modelagem matemática é a utilização das leis básicas que regem o comportamento dos sistemas. Dessa forma, entenderemos como a lei de conservação de energia nos ajudará a encontrar o modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico desse tipo de sistema. Além disso, nesta seção, focaremos nossos estudos na modelagem matemática de sistemas térmicos com uma e duas massas. E ao final desta seção, aprenderemos como testar e validar o modelo, com auxílio do software MatLab®.

Uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte de seu processo. Uma das linhas de produção requer o controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois caso não esteja na temperatura ideal, este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar-se que ele está funcionando corretamente. Nas seções anteriores, você já certificou o funcionamento do sistema de vazão do líquido. Nesta seção, iremos atentar ao sistema térmico. Qual é a temperatura de aquecimento dessa matéria-prima que escoar em regime permanente? O produto irá condensar?

Bons estudos.

## Não pode faltar

Sabemos que a dinâmica dos sistemas é descrita em termos das equações diferenciais, obtidas utilizando as leis da Física que governam os sistemas particulares, como a lei de conservação da massa para os sistemas hidráulicos e pneumáticos; a lei de Newton para os sistemas mecânicos; e a lei de Kirchhoff para os sistemas elétricos. Já para os sistemas térmicos, a lei fundamental para representação da dinâmica dos sistemas é a de conservação de energia.

Esta lei é diretamente ligada às leis da termodinâmica e envolve grandezas como energia interna, entalpia, trabalho etc. Todavia, neste material, iremos, por simplificação e linearização, focar nossos estudos em sistemas que não trocam trabalho, não sofrem mudança de fase, nem reações químicas e que não apresentam movimentação de massa de fluido. Dessa forma, a lei de conservação de energia fica aqui restrita à transferência de calor e às variações de temperatura de um sistema com massa fixa. Podemos, então, afirmar que a lei de conservação de energia nos diz que a quantidade total de energia de um sistema isolado permanece constante. De outra forma, podemos dizer que “a taxa transportada de energia para dentro do volume de controle, em um determinado instante  $t$ , é igual à taxa de variação de energia dentro desse volume de controle no mesmo instante  $t$ ” (FELÍCIO, 2010, p. 27).

Existem três diferentes modos de o calor, ou energia térmica, fluir de uma substância para outra: condução, convecção e radiação. Consideraremos aqui apenas a condução e a convecção, pois a transferência de calor por radiação é significativa somente se a temperatura do emissor for muito alta comparada à do receptor. Além disso, segundo Ogata (2010), grande parte dos processos térmicos para a modelagem dos sistemas de controle de processos não envolve transferência de calor por radiação. Sendo assim, na transferência de calor por condução ou convecção, o fluxo de calor ( $q$ ), em kcal/s, é descrito segundo a Equação (4.71).

$$q = K\Delta T \quad (4.71)$$

Onde  $\Delta T$  é a diferença de temperatura, em Kelvin, e  $K$  é o coeficiente de proporcionalidade, em kcal/s.K, expresso pela Equação (4.72), na condução, e pela Equação (4.73), na convecção.

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad (4.72)$$

$$K = hA \quad (4.73)$$

Onde  $k$  é a condutividade térmica do material, em kcal/m.s.K,  $A$  é a área normal ao fluxo de calor, em  $m^2$ ,  $\Delta X$  é a espessura do condutor, em metros (m) e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção, em kcal/m<sup>2</sup>.s.K.

Logo, as variáveis ou grandezas físicas usadas para descrever o comportamento dos sistemas térmicos são a temperatura, em Kelvin, e o fluxo de calor, em Watts (ou Joule/segundo). E os elementos típicos que permitem a descrição e a análise da dinâmica desse tipo de sistema são a resistência e a capacitância térmica.

- Resistência térmica: uma das características da lei da termodinâmica é a ocorrência de transferência de calor de um ponto, a certa temperatura, para outro ponto, com temperatura inferior. A intensidade da transferência de calor depende do caminho entre os dois pontos, da distância e das características do meio. A dificuldade que o meio (ou caminho) proporciona à transferência de calor é chamada de resistência térmica.

A natureza e a intensidade da resistência térmica dependem do modo pelo qual ocorre a transferência de calor. Assim, para a transferência de calor por condução ou convecção, a diferença de temperatura é dada pela Equação (4.74).

$$\Delta T = R_t q \quad (4.74)$$

Onde  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre um ponto, a certa temperatura, para outro ponto, com temperatura inferior,  $q$  é a taxa de transferência de calor (ou energia por unidade de tempo) e  $R_t$  é a resistência térmica.

A resistência térmica pode ainda ser definida em função do material e das dimensões do meio, como mostra a Equação (4.75), para o caso de a transferência de calor ocorrer por condução, e a Equação (4.76), para o caso de a troca de calor ocorrer por convecção.

$$R_t = \frac{L}{kA_1} \quad (4.75)$$

$$R_t = \frac{1}{hA_2} \quad (4.76)$$

Nas Equações 4.75 e 4.76, tem-se que  $L$  é o comprimento do material,  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica,  $A_1$  é a área da seção transversal na direção em que ocorre a transferência de calor por condução,  $h$  é o coeficiente de transferência

de calor por convecção e  $A_2$  é a área superficial onde ocorre a troca de calor por convecção.



### Pesquise mais

No caso da troca de calor por radiação, o modelo de resistência térmica é uma função não linear, visto que a transferência de calor por radiação insere uma não linearidade no sistema. O valor da resistência térmica pode, então, ser obtido por meio da linearização dessa função. Para saber mais sobre o estudo do método de linearização para resistência térmica, para os casos da radiação, consulte o livro a seguir:

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

- Capacitância térmica: é a quantidade de calor necessária para produzir um determinado acréscimo de temperatura, como mostra a relação dada pela Equação (4.77).

$$C = \frac{\text{quantidade de calor fornecida ao corpo } (\Delta Q)}{\text{aumento de temperatura do corpo } (\Delta T)} \quad (4.77)$$

Um conceito importante associado com capacitância térmica é o de calor específico, representado pela letra  $c$ , que corresponde à quantidade de calor necessária para elevar em 1 grau Celsius ( $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ ) a temperatura de uma unidade de massa desse corpo. A uma dada temperatura  $T$ , o calor específico de um corpo é definido segundo a Equação (4.78).

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = \frac{C}{m} \quad (4.78)$$

Assim, podemos reescrever a capacitância térmica em função do calor específico, como mostra a Equação (4.79).

$$C = mc \quad (4.79)$$

Retomando e rearranjando a equação que define o calor específico, obtemos a Equação (4.80).

$$dQ = mcdT = CdT \quad (4.80)$$

Se considerarmos um intervalo de tempo  $dt$ , a Equação (4.80) resulta na Equação (4.81).

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} \quad (4.81)$$

Sabendo que quantidade de calor no tempo é, por definição, um fluxo, então, podemos reescrever a Equação (4.81) como a Equação (4.82).

$$q = C \frac{dT}{dt} \quad (4.82)$$

Observe que nas equações anteriores, a temperatura foi considerada para o corpo e não para um ponto. Implicitamente, estamos admitindo que a temperatura seja uniforme. Isto pode ser razoável para gases e líquidos, se tivermos misturadores eficientes instalados no sistema. Para o caso de corpos sólidos, a temperatura só seria uniforme se a condutividade térmica fosse infinita, algo irreal na prática. Contudo, há situações em que a temperatura pode ser considerada uniforme, como nas aplicações que envolvem corpos sólidos mergulhados em um fluido. Nesses casos, é definido um parâmetro adimensional, denominado número de Biot ( $N_B$ ), que serve de critério para definir se um sistema térmico possui uma temperatura uniforme. O critério é: o sistema tem temperatura uniforme apenas se o valor do número de Biot for menor do que um décimo (ou  $N_B < 0,1$ ).



### Assimile

Os componentes físicos que formam os sistemas térmicos são: os resistores e os capacitores. E as variáveis, ou grandezas físicas, normalmente utilizadas para descrever o comportamento dinâmico desse tipo de sistemas são: a temperatura, dada em Kelvin (K), e o fluxo de calor, em Watts (W) (ou Joule por segundo (J/s)).

- **Modelagem matemática de circuitos térmicos: com uma massa:**

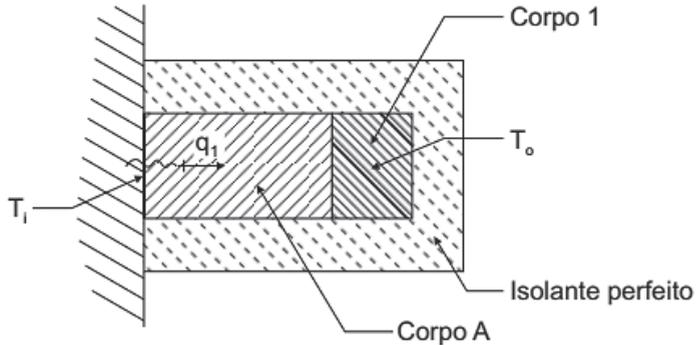
São sistemas térmicos formados com apenas uma capacitância térmica.



### Exemplificando

Para o sistema da Figura 4.20, determine o modelo matemático, em função de transferência, que relaciona a temperatura do corpo 1,  $T_0$ , com a temperatura do corpo A,  $T_1$ . Considere  $q_1$  a taxa de transmissão de calor.

Figura 4.20 | Sistema térmico com uma capacitância térmica



Fonte: adaptada de Felício (2010).

Como nas unidades anteriores, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona a temperatura do corpo 1,  $T_0$ , com a temperatura do corpo A,  $T_1$ .
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da energia.
3. **Simplificações e aproximações:** para modelagem de todos os sistemas térmicos desenvolvidos neste material, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: a transmissão de calor é considerada unidirecional; as temperaturas são consideradas uniformes; as resistências e capacitâncias são consideradas lineares; e as variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear. Além disso, para esse exemplo, devemos considerar que o corpo A tem baixo armazenamento de energia e alta resistência, portanto, é considerado resistência pura, e o corpo 1 é uma peça metálica, logo, tem apenas capacitância térmica.
4. **Equacionamento:** como temos apenas uma capacitância térmica, ao aplicarmos a lei de conservação de energia, como na Equação (4.82), chegamos à Equação (4.83).

$$q_1 = C_t \frac{\Delta T_0}{dt} \quad (4.83)$$

Além disso, da definição de resistência térmica, equação (4.74), podemos obter a equação (4.84).

$$T_i(t) - T_0(t) = R_t q_1 \quad (4.84)$$

Usando a Equação (4.84) para substituir o valor de  $q_1$  na Equação (4.83), chegamos à Equação (4.85).

$$\frac{T_i(t) - T_0(t)}{R_t} = C_t \frac{\Delta T_0}{dt} \quad (4.85)$$

Após algumas manipulações algébricas e, considerando as condições iniciais nulas, ao aplicarmos a transformada de Laplace, obtemos a função de transferência dada pela Equação (4.86).

$$\frac{T_0(s)}{T_i(s)} = \frac{1}{R_t C_t s + 1} \quad (4.86)$$

O sistema dado pela Figura 4.20 caracteriza-se como um sistema térmico de primeira ordem, dada a função de transferência de primeira ordem, expressa em (4.86), cuja constante de tempo ( $\tau$ ) é dada pela Equação (4.87).

$$\tau = RC \quad (4.87)$$



### Refleta

Dada a função de transferência do sistema pneumático de primeira ordem, Equação (4.86), podemos criar uma analogia entre as propriedades dos sistemas térmicos com os componentes físicos lineares que formam os sistemas elétricos e mecânicos. Dessa forma, como se daria a analogia eletromecânica/térmica?

- **Modelagem matemática de circuitos térmicos: com duas massas:**

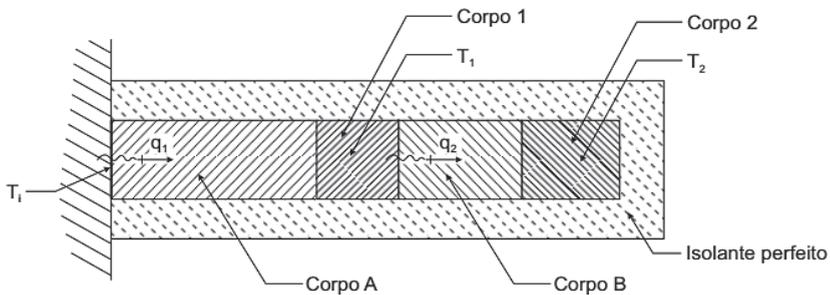
São sistemas térmicos formados com duas capacitâncias térmicas.



### Exemplificando

Para o sistema da Figura 4.21, determine o modelo matemático, em função de transferência, que relaciona a temperatura do corpo 2,  $T_2$ , com a temperatura do corpo 1,  $T_1$ . Considere  $q_1$  e  $q_2$  as taxas de transmissão de calor.

Figura 4.21 | Sistema térmico com uma capacitância térmica



Fonte: adaptada de Felício (2010).

Como nas unidades anteriores, a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica do sistema é dada pelos seguintes passos do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona a temperatura do corpo 1,  $T_1$ , com a temperatura do corpo 2,  $T_2$ .
2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da energia.
3. **Simplificações e aproximações:** as mesmas que no exemplificando anterior. Além disso, para este exemplo, devemos considerar que os corpos A e B têm baixo armazenamento de energia e alta resistência, portanto, esta é considerada resistência pura, e os corpos 1 e 2 são peças metálicas, logo, têm apenas capacitância térmica.
4. **Equacionamento:** como temos duas capacitâncias térmicas, aplicaremos duas vezes a lei de conservação de energia, assim, chegamos às Equações (4.88) e (4.89).

$$q_1 - q_2 = C_{t1} \frac{\Delta T_1}{dt} \quad (4.88)$$

$$q_2 = C_{t2} \frac{\Delta T_2}{dt} \quad (4.89)$$

Além disso, da definição de resistência térmica, Equação (4.74), podemos obter as Equações (4.90) e (4.91).

$$T_i(t) - T_1(t) = R_{t1} q_1 \quad (4.90)$$

$$T_1(t) - T_2(t) = R_{t2} q_2 \quad (4.91)$$

Usando as Equações (4.90) e (4.91) para substituir o valor de  $q_1$  e  $q_2$  nas Equações (4.88) e (4.89), chegamos às Equações (4.92) e (4.93).

$$\frac{T_i(t) - T_1(t)}{R_{t1}} - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{t2}} = C_{t1} \frac{\Delta T_1}{dt} \quad (4.92)$$

$$\frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{t2}} = C_{t2} \frac{\Delta T_2}{dt} \quad (4.93)$$

Aplicando a transformada de Laplace (condições iniciais nulas), e organizando os termos das equações (4.92) e (4.93), obtemos as Equações (4.94) e (4.95).

$$R_{t1} C_{t1} s T_1(s) + T_1(s) + \frac{R_{t1}}{R_{t2}} T_1 - \frac{R_{t1}}{R_{t2}} T_2 = T_1 \quad (4.94)$$

$$-T_1 + R_{t2} C_{t2} s T_2(s) + T_2(s) = 0 \quad (4.95)$$

Na forma matricial fica como mostra a Equação (4.96).

$$\begin{bmatrix} R_{t1} C_{t1} s + \frac{R_{t1} + R_{t2}}{R_{t2}} & -\frac{R_{t1}}{R_{t2}} \\ -1 & R_{t2} C_{t2} s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Aplicando a regra de Cramer para determinar  $T_2$  e, em seguida, inserindo em forma de função de transferência, chegamos à Equação (4.97).

$$\frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{(R_{t1}C_{t1}R_{t2}C_{t2})s^2 + (R_{t1}C_{t1} + R_{t2}C_{t2} + R_{t1}C_{t2})s + 1} \quad (4.97)$$

- **Modelagem matemática de circuitos térmicos com uso MatLab®:**

Na última etapa do nosso material, já estamos familiarizados com os testes e validações dos modelos matemáticos, que descrevem o comportamento dinâmico dos sistemas, via uso do software MatLab® e do Simulink®. Nesta seção, iremos apenas aperfeiçoar a forma de apresentação dos resultados, indicando comandos que permitam editar os gráficos das respostas produzidos nas simulações.

Vimos o comando **plot()**, que é empregado para visualização dos gráficos como comportamento de resposta das variáveis desejadas do nosso sistema dinâmico. Além disso, vimos também como melhorar a identificação dos dados por meio dos comandos: **title()**, **xlabel()** e **ylabel()**. Agora, veremos como melhor visualizar as respostas nos gráficos com uso de cores e tipos de linhas através do próprio comando *plot*.



### Exemplificando

Dado o sistema apresentado no primeiro item Exemplificando desta seção, podemos implementar as seguintes linhas de código para o teste do modelo obtido:

```
Rt= 1;
Ct= 1;
num=[1];
den=[Rt*Ct 1];
sys=tf (num,den)
[yd,td]=step(sys); %resposta ao degrau
[yi,ti]=impulse(sys); %resposta ao impulso
figure
plot (td,yd,'k--')
```

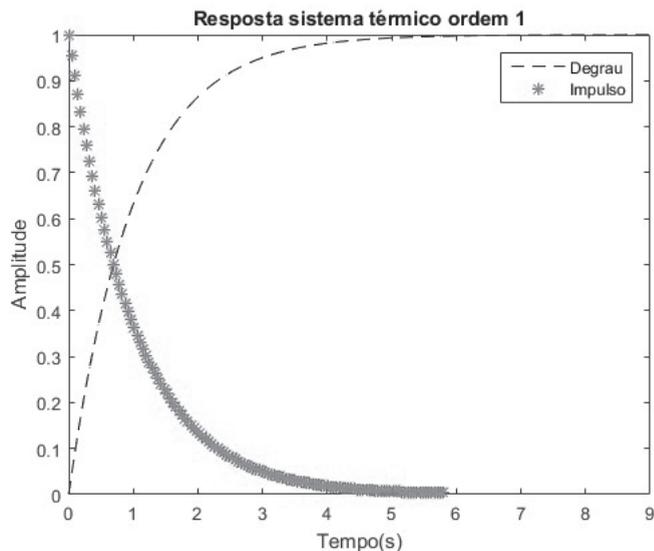
```

hold on
plot (ti,yi,'m*')
xlabel ('Tempo(s)')
ylabel ('Amplitude')
title ('Resposta sistema térmico ordem 1')
legend ('Degrau','Impulso')

```

Considerando valores unitários para a resistência e capacitância, e adotando a temperatura de entrada como um comportamento degrau e como comportamento de uma função impulso, obtemos o gráfico de resposta, Figura 4.22, para a temperatura de saída. Note que a resposta é apresentada na cor magenta e utiliza uma linha formada pelo símbolo “\*”.

Figura 4.22 | Temperatura de saída para o sistema da Figura 4.21



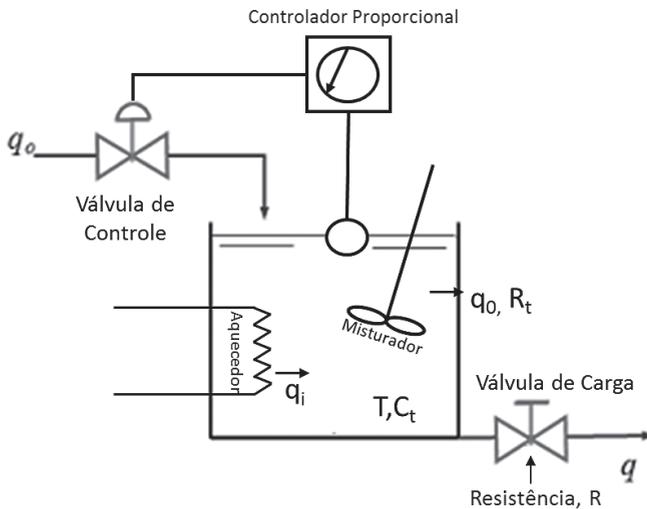
Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, a depender de quantos testes estejamos fazendo em nosso modelo, conseguiremos apresentar e visualizar melhor os resultados.

## Sem medo de errar

Uma pequena indústria de alimentos resolveu otimizar o sistema de controle de uma parte do seu processo. Uma das linhas de produção requer o controle de vazão e aquecimento de uma determinada matéria-prima, pois caso não esteja na temperatura ideal, este produto pode condensar nas tubulações. Para isso, você foi contratado como engenheiro responsável, com a finalidade de revisar o projeto de controle de vazão e de aquecimento desse sistema dinâmico e certificar se este sistema está funcionando corretamente. Nas seções anteriores, você já certificou o funcionamento do sistema de vazão. Nesta seção, iremos nos atentar ao sistema térmico. Qual é a temperatura de aquecimento dessa matéria-prima que escoa em regime permanente? O produto irá condensar?

Figura 4.23| Protótipo de silo industrial



Fonte: elaborada pelo autor.

### Resolução da situação-problema

Considerando que o sistema de aquecimento dessa matéria-prima ocorre como mostra a Figura 4.23, que a temperatura do líquido de entrada é mantida constante e que a taxa de calor no sistema (calor fornecido pelo aquecedor) sofre uma alteração repentina de um valor  $Q$  para  $Q + q_i$ , em que  $q_i$  representa uma pequena variação da taxa de entrada de calor, então, a taxa de saída de calor irá variar gradualmente de  $Q$  para  $Q + q_o$ . Além disso, a temperatura de saída do líquido também irá variar de  $T_0$  para  $T_0 + T$ .

Sendo assim, para analisarmos a temperatura de saída do produto, deveremos, inicialmente, obter o modelo matemático que descreve sua dinâmica. Para isso, iremos realizar as etapas do processo de modelagem matemática:

1. **Definição do problema:** obtenção da função de transferência que relaciona a variação temperatura do líquido de saída ( $T$ ) com a taxa de calor de entrada ( $Q_i$ ).

2. **Teoria e aplicação das leis fundamentais:** lei de conservação da energia.

3. **Simplificações e aproximações:** para modelagem dos sistemas fluídicos, utilizaremos um conjunto de hipóteses que irão simplificar os modelos matemáticos desse tipo, tais como: a transmissão de calor é considerada unidirecional; as temperaturas são consideradas uniformes; as resistências e capacitâncias térmicas são consideradas lineares; as variações das grandezas do sistema são consideradas pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema linear.

4. **Equacionamento:** ao aplicarmos a lei de conservação de energia, obtemos a Equação (4.98).

$$C_t \frac{dT}{dt} = q_{entra} - q_{sai} \quad (4.98)$$

Sabendo que o fluxo de calor que entra no sistema é  $q_i$  e que a taxa de calor de saída é dada pela Equação (4.99),

$$q_{sai} = \frac{T}{R_t} \quad (4.99)$$

e sendo  $R_t$  a resistência térmica do recipiente, então, a Equação (4.98) pode ser reescrita na Equação (4.100).

$$C_t \frac{dT}{dt} = q_i - \frac{T}{R_t} \quad (4.100)$$

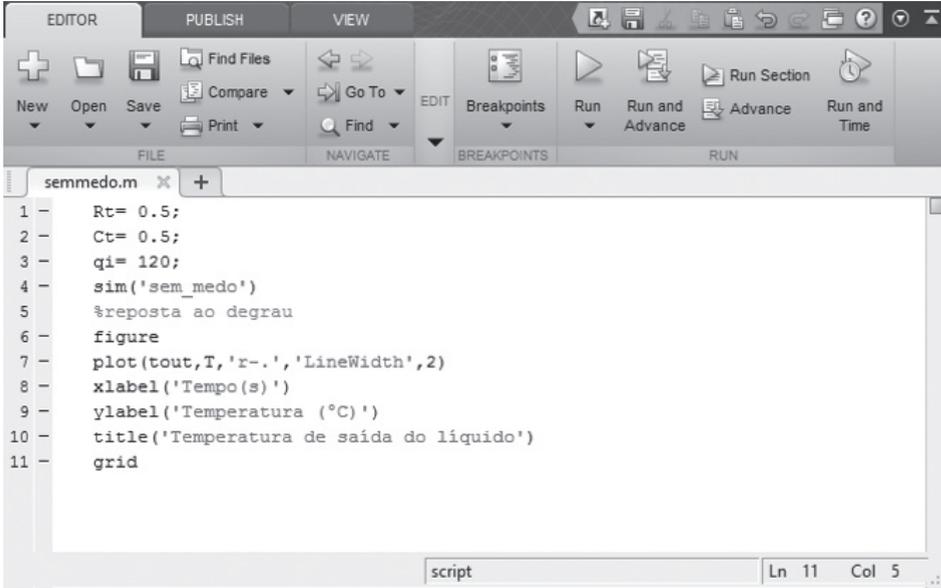
Após algumas simplificações matemáticas, ao aplicarmos a transformada de Laplace com as condições iniciais nulas, obtemos a seguinte função de transferência dada pela Equação (4.101).

$$\frac{T(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{R_t C_t s + 1} \quad (4.101)$$

De posse da função de transferência, podemos então implementar um programa em MatLab® para as validações e testes desse sistema. Para isso, foi considerado que a temperatura de saída da matéria-prima é 120 °C e que a taxa

de entrada de calor é uma função degrau. Então, foi implementado um programa em Matlab® e Simulink® a fim de obter os valores ótimos do sistema térmico que mantivesse essa temperatura, como mostra a Figura 4.19 (a) e (b).

Figura 4.24 | (a) Programa MatLab®; (b) Diagrama de bloco Simulink® do sistema térmico; (c) Temperatura de saída do líquido

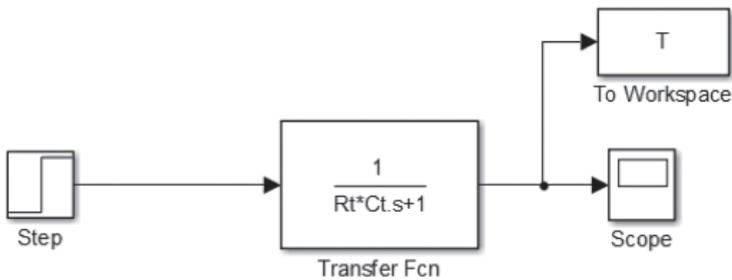


```

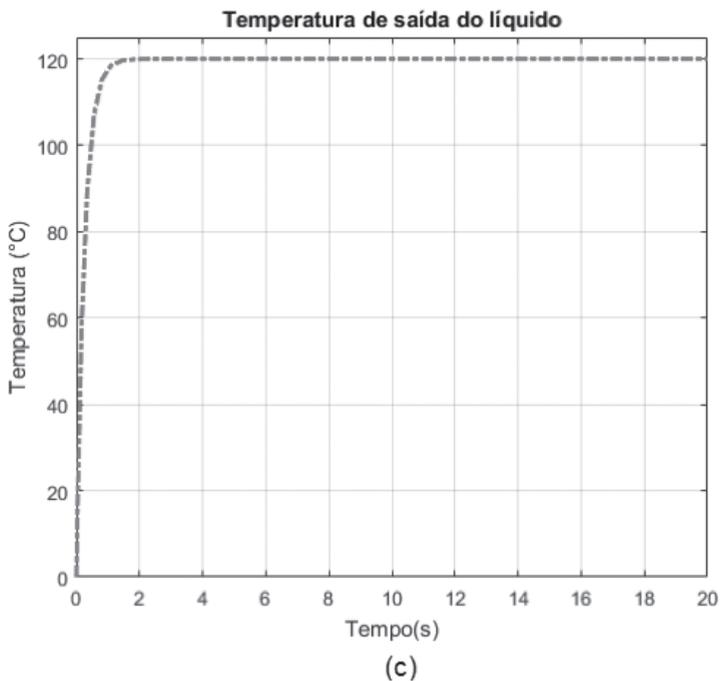
1 - Rt= 0.5;
2 - Ct= 0.5;
3 - qi= 120;
4 - sim('sem_medo')
5 - %reposta ao degrau
6 - figure
7 - plot(tout,T,'r-.','LineWidth',2)
8 - xlabel('Tempo(s)')
9 - ylabel('Temperatura (°C)')
10 - title('Temperatura de saída do líquido')
11 - grid
  
```

Ln 11 Col 5

(a)



(b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Após alguns testes, concluiu-se que para manter a temperatura de saída desejada e para que o produto não condense na tubulação, como mostra a Figura 4.24 (c), os valores de capacitância e resistência térmica são  $0,5 \text{ J/}^\circ\text{C}$  e  $0,5 \text{ s}^\circ\text{C/J}$ , respectivamente.

## Avançando na prática

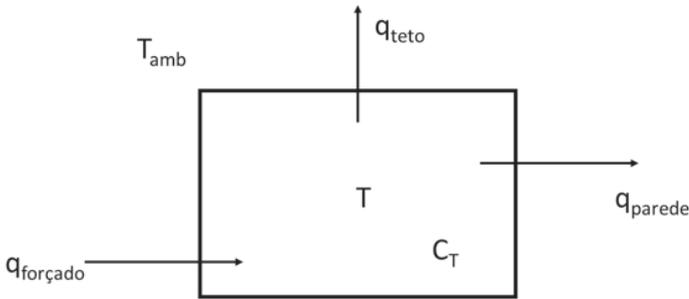
### Sistema de aquecimento do ambiente

#### Descrição da situação-problema

Um escritório de arquitetura está planejando um sistema de aquecimento de uma sala para o projeto de uma casa do seu mais novo cliente. Este cliente já possui um aquecedor e é necessário projetar as paredes e o teto (espessura e largura) para manter a temperatura da sala. Você foi o engenheiro contratado para realizar o estudo térmico e determinar quais são as características construtivas que este ambiente deve ter para que o aquecedor suporte manter a temperatura através da injeção forçada de ar quente em seu interior.

Considere que o sistema de aquecedor é ligado no inverno, quando a temperatura ambiente estiver em 10 °C, e que o fluxo de calor que o aquecedor do cliente consegue injetar tem o comportamento de uma função degrau, com fluxo de calor de 35 W.

Figura 4.25 | Modelo simplificado para o sistema térmico do ambiente



Fonte: adaptada de Garcia (2013).

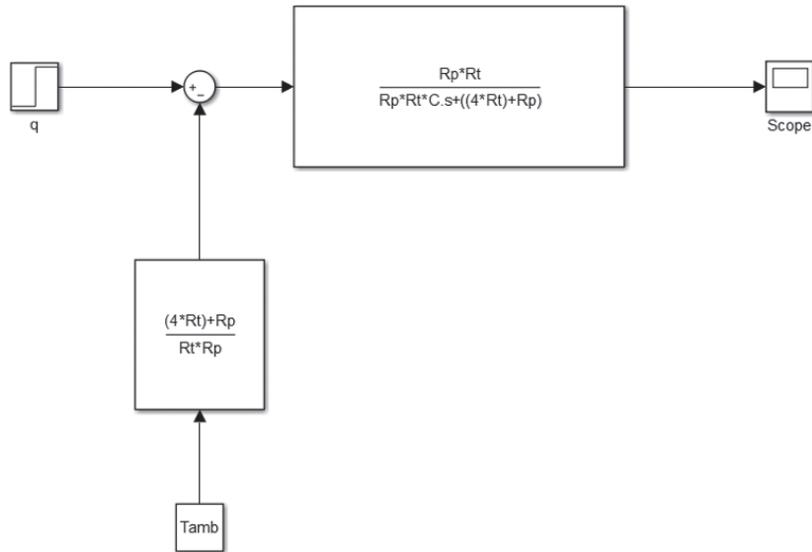
### Resolução da situação-problema

Partindo do ambiente mostrado na Figura 4.25, que tem um elemento de armazenamento de calor de capacitância térmica  $C$ , tem-se que, quando o sistema de aquecimento está ligado, o calor é injetado a uma taxa constante ( $q$ ). Ao aplicarmos as etapas de modelagem matemática ao sistema, obtemos a Equação (4.102) como modelo dinâmico desse sistema térmico.

$$C \frac{dT}{dt} = q - \left( \frac{4}{R_p} + \frac{1}{R_t} \right) (T - T_{amb}) \quad (4.102)$$

De posse desse modelo matemático, foi obtida a função de transferência do sistema e montado um diagrama de blocos via Simulink®, mostrado na Figura 4.21, para realização dos testes e determinação dos valores dos elementos térmicos (resistores e capacitores) que formam o sistema.

Figura 4.26 | Diagrama de bloco do sistema térmico do ambiente



Fonte: elaborada pelo autor.

Para manutenção da temperatura ambiente em 25 °C, considerando que a temperatura ambiente seja de 10 °C, supondo uma injeção de calor de 35 W, os valores das resistências da parede e do teto são 7 sK/J e 2,3 sK/J, respectivamente. Para isso, foi considerado um valor de condutividade de 0,15 para a parede e de 0,1 para o teto. Sendo assim, tomando por base a resistência térmica dada para troca de calor por condução, Equação (4.75), as características construtivas desse ambiente são dadas pelas Equações (4.103) e (4.104).

$$R_p = 7 = \frac{E_p}{0,15L_p^2} \quad (4.103)$$

$$R_t = 2,3 = \frac{E_t}{0,1L_t^2} \quad (4.104)$$

Assim, as características construtivas desse ambiente, ou seja, a relação espessura e largura da parede e do teto são dadas, respectivamente, pelas Equações (4.105) e (4.106).

$$E_p = 1,05L_p^2 \quad (4.105)$$

$$E_t = 0,23L_t^2 \quad (4.106)$$

## Faça valer a pena

**1.** Assim como os sistemas hidráulicos e pneumáticos, os sistemas térmicos também apresentam propriedades que permitem a descrição de suas características dinâmicas, por meio de modelos matemáticos, de modo simples, sendo representadas por: resistência e capacitância.

A seguir, têm-se as afirmativas a respeito de modelagem matemática de sistemas térmicos:

I. É baseada na lei de conservação da energia.

II. Assim como os sistemas hidráulicos e pneumáticos, as propriedades básicas que compõem esse tipo de sistema são: a resistência e a capacitância.

III. A capacitância térmica é definida como

$$C = \frac{\text{variação no calor armazenado, kcal}}{\text{Variação na temperatura, K}} \quad C = mc .$$

Analisando as afirmativas, assinale a alternativa correta:

- Apenas a afirmativa I está correta.
- Apenas a afirmativa II está correta.
- Apenas a afirmativa III está correta.
- Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- As afirmativas I, II e III estão corretas.

**2.** Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias. Os testes e validações podem ser realizados via software como o MatLab®, por linhas de código *script*, ou diagramação de blocos, utilizando o Simulink®.

O comando em linha de código do MatLab® **plot(ti,yi,'m\*')** nos apresentará:

- A resposta à entrada degrau de uma função de transferência.
- A função de transferência do modelo testado.
- A resposta do gráfico em cor magenta e tipo de linha formado por asterisco.
- A resposta à entrada impulso de uma função de transferência.
- O tempo de simulação do teste.

**3.** Testar e validar um sistema é indispensável para certificar e documentar que o projeto em desenvolvimento atende às especificações necessárias. Os testes e validações podem ser realizados via software como o MatLab®, por linhas de código *script*, ou diagramação de blocos, utilizando o Simulink®.

Indique qual alternativa representa o sistema térmico do programa implementado utilizando a linguagem de programação de comando de instrução (*script*) do MatLab®, dada as seguintes linhas de código:

```
R=input('Entre com valor de R: ');
```

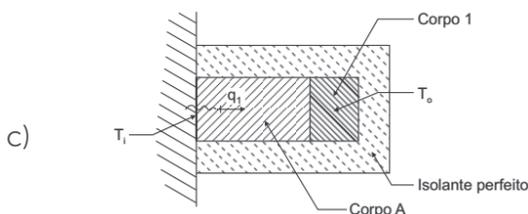
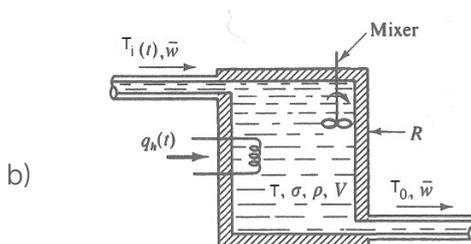
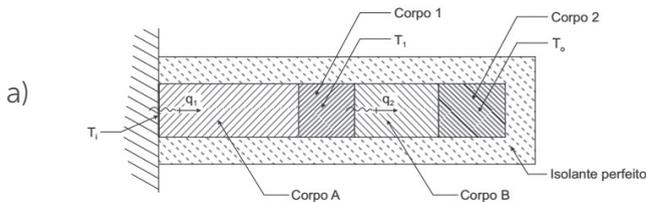
```
C=input('Entre com valor de C: ');
```

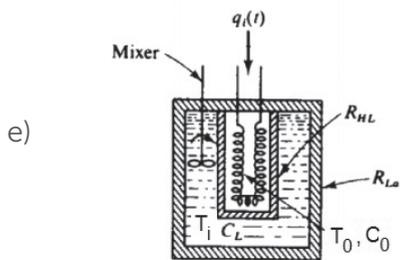
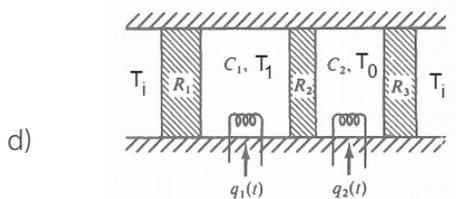
```
num = [1];
```

```
den = [R*C 1];
```

```
sys = tf(num,den)
```

Em todos os casos, considere a temperatura  $T_0$  como saída do sistema e a temperatura  $T_i$  como entrada do sistema.





# Referências

CAMPOS, Mario Cesar M. Massa de; TEIXEIRA, Herbert C. G. **Controle típico de equipamentos e processos industriais**. São Paulo: Blucher, 2006. 396 p.

CLOSE, Charles M.; FREDERICK, Dean K.; NEWELL, Jonathan C. **Modeling and analysis of dynamic systems**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002. 593 p.

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.

GARCIA, Claudio. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.









ISBN 978-85-8482-855-5



9 788584 828555 >